



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

TESIS DOCTORAL:

**ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN DE NUEVOS
SISTEMAS DETERMINÍSTICOS Y
ESTOCÁSTICOS EN GESTIÓN DE STOCKS**

Presentada por D. Valentín Pando Fernández para optar al
grado de doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por los doctores:

D. Juan García Laguna y D. Luis A. San José Nieto

ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN
DE NUEVOS SISTEMAS
DETERMINÍSTICOS Y ESTOCÁSTICOS
EN GESTIÓN DE STOCKS

VALENTÍN PANDO FERNÁNDEZ

Memoria presentada para optar al grado de
Doctor por la Universidad de Valladolid ba-
jo la dirección de los doctores D. Juan García
Laguna y D. Luis A. San José Nieto.

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

2014

D. Juan García Laguna, Catedrático E.U. del Área de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Valladolid.

D. Luis A. San José Nieto, Profesor Titular de Universidad del Área de Matemática Aplicada de la Universidad de Valladolid.

CERTIFICAMOS:

Que la presente Memoria, titulada “Análisis y Optimización de Nuevos Sistemas Determinísticos y Estocásticos en Gestion de Stocks”, ha sido realizada bajo nuestra dirección por el licenciado D. Valentín Pando Fernández, y constituye su tesis para optar al Grado de Doctor en Matemáticas (R.D. 1393/2007) por la Universidad de Valladolid.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos que haya lugar, firmamos la presente en Valladolid, a 15 de Mayo de 2014.

Fdo: Juan García Laguna

Fdo: Luis A. San José Nieto

A Beatriz y Maricruz, mis dos grandes tesoros

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis directores de tesis, D. Juan García Laguna y D. Luis Augusto San José, por su dedicación, paciencia y entrega, lo cual ha ayudado notablemente a que este trabajo de investigación saliese adelante. También al profesor D. Joaquín Sicilia, que ha participado activamente durante todo el proceso. Sin ellos el documento que ahora presentamos no hubiese sido posible y por ello les estaré siempre agradecido.

A mis compañeros del Departamento de Estadística e Investigación Operativa por su apoyo y colaboración cuando los necesité, muy especialmente a Roberto que siempre estuvo ahí ayudándome y animándome.

A mis compañeros de la Escuela Técnica Superior de Ingenierías Agrarias: Andrés, Manolo, Felipe, Charo, Julio, Feli, Belén, y a Alfonso por su inestimable ayuda con el inglés, que me han ayudado a mejorar mi formación investigadora permitiéndome participar en las investigaciones que dirigen, y que me han apoyado y animado cuando ha hecho falta.

Prólogo

Una consecuencia de la globalización de la economía y del consiguiente incremento de la competencia entre empresas es el alto incremento de la volatilidad en los beneficios empresariales, debido tanto a una disminución de los ingresos como a un aumento de los costos. Por esta razón, la disminución de los gastos sin reducir los ingresos es hoy en día un aspecto vital para la propia subsistencia de la empresa. Sin duda alguna, una de las facetas empresariales donde la reducción de gastos es más factible se tiene a través del control de los niveles de artículos depositados en los almacenes de las empresas, es decir, por medio de la gestión adecuada de los stocks. Dentro de esta actividad ocupa un lugar preferente la formulación y estudio de modelos matemáticos de optimización destinados a cuantificar las variables de decisión que permiten minimizar los gastos e incrementar los beneficios originados en el almacenamiento de existencias, es decir, por medio de la Teoría de Inventarios.

Si importante es el estudio de los inventarios en la vertiente comercial, no lo es menos en la vertiente fabril. En efecto, tanto en los puntos de venta como en los sistemas de la producción, tener artículos en stock es una situación poco deseable ya que, usualmente, no se agrega valor a lo almacenado. Al contrario, la actividad del almacenamiento requiere un manejo que puede dañar los artículos, obliga a consumir recursos costosos e inmoviliza artículos que por consiguiente no pueden venderse. Es decir, el almacenamiento lleva consigo un incremento de los costes de producción y/o de comercialización. Sin embargo, los stocks son necesarios para hacer frente a eventos inesperados como demandas imprevistas, averías en la maquinaria, tiempos de servicio aleatorios, problemas de calidad, etc.

Durante décadas, en las universidades y centros de investigación de todo el mundo

se ha prestado un especial interés al estudio de la Teoría de Inventarios con el objetivo de analizar las posibles formas de reducir e incluso eliminar sus niveles, tanto en los entornos comerciales como en los entornos fabriles, es decir, de un modo general, en las cadenas de suministros. Como resultado de todo ello, hoy en día disponemos de un gran número de modelos en la literatura sobre inventarios. Sin embargo, como la técnica y los sistemas de producción evolucionan constantemente y son cada día más complejos, es necesario hacer un esfuerzo continuado para diseñar y analizar nuevos y más complicados modelos que permitan seguir manteniendo un control adecuado de las variables de decisión que permitan optimizar el funcionamiento de tales sistemas.

En línea con las ideas anteriores, los problemas que se han abordado en la presente tesis son los siguientes:

En el Capítulo 1 se ha investigado un nuevo modelo EOQ con demanda dependiente del nivel de stock en el cual el coste de almacenamiento no es necesariamente lineal con respecto al tiempo de permanencia de los productos en el inventario y a la cantidad de productos almacenados. En este contexto, es importante señalar que cuando la demanda depende del nivel de existencias, el tamaño del pedido puede afectar no sólo a los costes del inventario, sino también a los ingresos obtenidos con la venta del producto. Por tanto, los problemas de minimización de costes y de maximización de beneficios no necesariamente tienen que conducir a la misma solución óptima. Por esta razón, el problema se ha enfocado desde la perspectiva más completa de maximización de los beneficios del sistema. Esto hace que el modelo planteado englobe como casos particulares varios modelos estudiados con anterioridad en la literatura de inventarios. El estudio realizado nos ha permitido diseñar un algoritmo para la determinación de la política óptima y desarrollar un análisis de sensibilidad del tamaño óptimo del lote y del beneficio máximo por unidad de tiempo con respecto a los parámetros iniciales del sistema. Además, se han planteado y resuelto dos extensiones del modelo y se han sugerido otras posibles líneas para el estudio de futuras investigaciones.

Una parte del trabajo desarrollado en este primer capítulo de la tesis ha pro-

porcionado como fruto la publicación de tres artículos en revistas científicas internacionales indexadas en el JCR cuyas referencias completas se incluyen a continuación:

- Pando V., García-Laguna J., San-José L.A. (2012^a). Optimal policy for profit maximising in an EOQ model under non-linear holding cost and stock-dependent demand rate. *International Journal of Systems Science* 43(11), 2160-2171.
- Pando V., San-José L.A., García-Laguna J., Sicilia J. (2012^b). Maximizing profits in an inventory model with both demand rate and holding cost per unit time dependent on the stock level. *Computers & Industrial Engineering* 62(2), 599-608.
- Pando V., San-José L.A., García-Laguna J., Sicilia J. (2013^b). An economic lot-size model with non-linear holding cost hinging on time and quantity. *International Journal of Production Economics* 145, 294-303.

En el Capítulo 2 de esta tesis se investiga una extensión del problema del *news-boy* con pedido de emergencia en el que, cuando hay rotura del stock, la fracción de demanda satisfecha con dicho pedido de emergencia es una función no creciente y no necesariamente continua con respecto al tamaño de la escasez. Se han analizado las propiedades generales del modelo, considerando que la distribución de probabilidad de la demanda viene dada por una función de densidad con el único requisito de que sea continua en su soporte. Este análisis nos ha llevado a comprobar que la función objetivo no es necesariamente convexa, pero nos ha permitido enunciar algunos resultados teóricos generales que ayudan a encontrar la solución del problema en casos concretos y a realizar un análisis de sensibilidad de la política óptima. También para este modelo se han sugerido posibles extensiones que podrían utilizarse para el desarrollo de futuras investigaciones.

La investigación llevada a cabo en este segundo capítulo de la tesis ha proporcionado como fruto las siguientes publicaciones en revistas científicas indexadas en el JCR:

- Pando V., San-José L.A., García-Laguna J., Sicilia J. (2013^a). A newsboy problem with an emergency order under a general backorder rate function. *Omega* 41, 1020-1028.
- Pando V., San-José L.A., García-Laguna J., Sicilia J. (2013^c). Some general properties for the newsboy problem with an extraordinary order. *Top*. DOI 10.1007/s11750-013-0287-7.
- Pando V., San-José L.A., García-Laguna J., Sicilia J. (2014). A newsvendor inventory model with an emergency order to supply a non-increasing fraction of shortage. *Applied Mathematics and Computation* 237, 560-570.

Valladolid, Mayo de 2014

Índice general

Prólogo	xi
Índice de Tablas	xix
Índice de Figuras	xxi
1. Modelos EOQ con demanda dependiente del nivel del inventario y coste de almacenamiento no lineal en el tiempo y en la cantidad	1
1.1. Introducción	1
1.2. El modelo	8
1.3. Resolución del modelo	16
1.4. Análisis de sensibilidad	22
1.5. Casos particulares	35
1.5.1. El modelo de mínimo coste	36
1.5.2. Otros modelos de la literatura de inventarios	38
1.6. Resultados computacionales	43
1.7. Una extensión con punto de reabastecimiento variable	51
1.7.1. El modelo	55
1.7.2. Resolución del modelo	58
1.7.3. Un caso particular	65
1.7.4. Un ejemplo numérico con análisis de sensibilidad	67
1.8. Una extensión con coste de deterioro	73
1.8.1. El modelo	77

1.8.2.	Resolución del modelo	80
1.8.3.	Análisis de sensibilidad respecto a la tasa de deterioro	86
1.8.4.	Casos particulares	91
1.8.5.	Resultados computacionales	96
1.9.	Conclusiones	102
1.10.	Apéndice	106
2.	Una extensión del problema del <i>newsboy</i> con pedido de emergencia	107
2.1.	Introducción	107
2.2.	El modelo	112
2.3.	Propiedades generales	117
2.3.1.	Estudio de la derivada primera de la función $T(Q)$	117
2.3.2.	Estudio de la derivada segunda de la función $T(Q)$	128
2.4.	Resolución del modelo	135
2.5.	Análisis de sensibilidad	141
2.6.	Modelo con función $\beta(y)$ escalonada	150
2.6.1.	Caso de demanda uniforme	152
2.6.2.	Caso de demanda exponencial	154
2.6.3.	Casos especiales	156
2.7.	Modelo con umbral de pérdida de ventas	161
2.7.1.	Propiedades de la función $T(Q)$ cuando $M < b - a$	162
2.7.2.	El caso de la función $\beta(y)$ lineal	170
2.7.3.	El caso de la función $\beta(y)$ exponencial truncada	179
2.7.4.	El caso de la función $\beta(y)$ racional truncada	184
2.8.	Modelo con demanda uniforme	189
2.8.1.	Función $\beta(y)$ potencial truncada	194
2.8.2.	Función $\beta(y)$ exponencial truncada	196
2.8.3.	Función $\beta(y)$ cosinusoidal truncada	198
2.8.4.	Función $\beta(y)$ racional truncada	199
2.9.	Modelo con demanda exponencial	201

2.9.1. Análisis de sensibilidad	205
2.9.2. Función $\beta(y)$ potencial truncada	209
2.9.3. Función $\beta(y)$ exponencial truncada	211
2.9.4. Función $\beta(y)$ cosinusoidal truncada	213
2.9.5. Función $\beta(y)$ racional truncada	216
2.10. Conclusiones	219
A. Códigos de programas en SAS	223
A.1. Programa para el modelo EOQ con $r = 0$	223
A.2. Programa para el modelo EOQ con $r \geq 0$	225
A.3. Programa para el modelo EOQ con coste de deterioro	227
A.4. Programa para el modelo <i>newsboy</i> con pedido de emergencia y umbral de pérdida de ventas	228
A.5. Programa para el modelo <i>newsboy</i> con pedido de emergencia y deman- da uniforme	233
A.6. Programa para el modelo <i>newsboy</i> con pedido de emergencia y deman- da exponencial	236
Bibliografía	237

Índice de Tablas

Capítulo 1. Modelos EOQ con demanda dependiente del nivel del inventario y coste de almacenamiento no lineal en el tiempo y en la cantidad

1.1 Principales características de los modelos de inventario seleccionados	6
1.2 Listado de notación	8
1.3 Modelos EOQ generalizados por este modelo	42
1.4 Valores óptimos q^* y $G(q^*) = G^*$ para diferentes valores β , γ_1 y γ_2	43
1.5 Comparación de soluciones óptimas para ambos modelos	49
1.6 Notación adicional para esta sección	53
1.7 Soluciones óptimas para $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$ y diferentes valores para β	68
1.8 Soluciones óptimas para $\beta = 0.3$, $\gamma_2 = 1.5$ y diferentes valores γ_1	70
1.9 Soluciones óptimas para $\beta = 0.3$, $\gamma_1 = 1.5$ y diferentes valores γ_2	71
1.10 Notación adicional para esta sección	75
1.11 Valores de $P(\tau_o)$ en función de $u + v$ y w	84
1.12 Valores óptimos T^* y G_θ^* para $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$ y diferentes valores de θ y β	97
1.13 Valores óptimos T^* y G_θ^* para $\beta = 0.3$ y diferentes valores de θ , γ_1 y γ_2	98
1.14 Soluciones de mínimo coste y máximo beneficio para $\theta = 0.03$ y $\beta = 0.3$	100
1.15 Coste del seguro	106
1.16 Coste de almacenamiento $H(t, x)$	106

Capítulo 2. Una extensión del problema del *newsboy* con pedido de emergencia

2.1	Listado de notación	115
2.2	Valores óptimos Q^* y $B(Q^*)$ para diferentes parámetros β_o y M	175

Índice de Figuras

Capítulo 1. Modelos EOQ con demanda dependiente del nivel del inventario y coste de almacenamiento no lineal en el tiempo y en la cantidad

1.1	Funciones de coste de almacenamiento $H(t, x)$	10
1.2	Curva del inventario $I(t)$	13
1.3	Curvas $I(t)$ para diferentes β	13
1.4	Forma general de la función $P(q)$	17
1.5	Política óptima de máximo beneficio	22
1.6	Variación de q^* y $G(q^*)$ con γ_1 y γ_2 para $\beta = 0.3$	44
1.7	Variación de q^* y $G(q^*)$ con β y γ_1 para $\gamma_2 = 2$	45
1.8	Variación de q^* y $G(q^*)$ con β y γ_2 para $\gamma_1 = 2$	47
1.9	Máximo beneficio y mínimo coste con $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$ y $\beta = 0.3$	49
1.10	Curva del inventario con $r > 0$ y $r = 0$	54
1.11	Región factible para el problema (1.34)	58
1.12	Curvas de beneficio óptimo e inventario medio en función de β	68
1.13	Curvas de beneficio óptimo e inventario medio en función de γ_1	70
1.14	Curvas de beneficio óptimo e inventario medio en función de γ_2	72
1.15	Curva del inventario en un ciclo con y sin deterioro	77
1.16	Curvas de T^* y $\tilde{G}_\theta(T^*)$ en función de θ para β fijo y $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$	98
1.17	Curvas de T^* y $\tilde{G}_\theta(T^*)$ en función de θ para γ_1, γ_2 fijos y $\beta = 0.3$	99

Capítulo 2. Una extensión del problema del *newsboy* con pedido de emergencia

2.1	Puntos de especial interés para cada Q	118
2.2a	$i_1(Q)$ con $b < \infty$ y $n_1 \geq 1$	121
2.2b	$i_1(Q)$ con $b = \infty$ o $n_1 = 0$	121
2.3a	Ejemplo con $b < \infty$ y $n_1 = 3$	121
2.3b	Ejemplo con $b = \infty$ y $n_1 = 3$	121
2.4	Representación gráfica para el ejemplo 1	157
2.5	Representación gráfica para el ejemplo 2	158
2.6	Representación gráfica para el ejemplo 3	158
2.7	Representación gráfica para el ejemplo 4	160
2.8	Representación gráfica para el ejemplo 5	160
2.9	Variación de Q^* con β_o	176
2.10	Variación de $B(Q^*)$ con β_o	176
2.11	Variación de Q^* con M	176
2.12	Variación de $B(Q^*)$ con M	176
2.13	Representación gráfica con $\beta(y)$ lineal	179
2.14	Función $\beta(y)$ exponencial con diferentes α	180
2.15	Representación gráfica con $\beta(y)$ exponencial truncada	182
2.16	Función $\beta(y)$ racional con diferentes α	184
2.17	Representación gráfica con $\beta(y)$ racional truncada	187
2.18	Función $\beta(y)$ potencial con diferentes α	195
2.19	Función $\beta(y)$ cosinusoidal con $M < b - a$ y $M \geq b - a$	199
2.20a	Q_p^* en función de M y α	211
2.20b	$B(Q_p^*)$ en función de M y α	211
2.21a	Q_e^* en función de M y α	213

2.21b	$B(Q_e^*)$ en función de M y α	213
2.22a	Q_c^* en función de M y β_o	216
2.22b	$B(Q_c^*)$ en función de M y β_o	216
2.23a	Q_r^* en función de M y α	218
2.23b	$B(Q_r^*)$ en función de M y α	218

Capítulo 1

Modelos EOQ con demanda dependiente del nivel del inventario y coste de almacenamiento no lineal en el tiempo y en la cantidad

1.1. Introducción

Los primeros modelos matemáticos sobre sistemas de inventario publicados en la literatura impusieron condiciones muy restrictivas en sus hipótesis con el fin de obtener formulaciones sencillas de los mismos. Así por ejemplo, cuando Ford W. Harris en 1913 presentó el primer modelo EOQ (Economic Order Quantity) se suponía que tanto la demanda por unidad de tiempo como el coste de almacenamiento por artículo y por unidad de tiempo eran constantes. La primera hipótesis permitía asegurar que los ingresos por ventas eran independientes del nivel del inventario y, por tanto, el tamaño óptimo del lote podía ser calculado minimizando la suma de los costes del inventario por unidad de tiempo. La segunda hipótesis permitía asegurar que el coste de almacenamiento por ciclo de inventario era proporcional al tamaño medio del inventario. Sin embargo, la experiencia mostró que ambas hipótesis suponían una

excesiva simplificación de la realidad. Por ello, desde entonces muchos investigadores se han esforzado en relajarlas y adaptarlas a situaciones más reales.

Siguiendo esta línea, en este capítulo se estudiarán situaciones mucho más generales para la demanda y para el coste de almacenamiento.

Centrándonos en primer lugar en las hipótesis para la tasa de demanda, conviene señalar que algunos investigadores y gestores de inventarios han observado que un incremento en la cantidad de producto almacenado y expuesto al público puede generar un incremento en las ventas de ese producto. Así, por ejemplo, en Wolfe (1968) se mostró una evidencia empírica de esta relación en la venta de productos de moda o de temporada, tales como ropa femenina o ropa deportiva, para los cuales grandes cantidades de producto adecuadamente expuestas al público inducen a una mayor venta de esos productos. A partir de esta idea, y comenzando con el trabajo de Urban (1969), se han desarrollado muchos modelos matemáticos de inventario que incorporan esa relación entre el nivel del inventario y la tasa de demanda con dos formas de dependencia: modelos en los cuales la tasa de demanda es una función del nivel de inventario inicial y modelos en los que dicha tasa es una función del nivel de inventario en cada instante.

Años más tarde, en Baker y Urban (1988) se introdujo un modelo en el cual se suponía que la tasa de demanda era una función potencial cóncava del nivel del inventario en cada instante. Este nuevo enfoque del problema trajo como consecuencia la pérdida de independencia entre los ingresos por ventas y los costes del inventario, debido a que mayores tamaño del lote generan mayores costes de almacenamiento en el inventario pero también mayores ingresos por ventas. Por tanto, en esta situación no basta considerar sólo los costes de pedido y de almacenamiento, sino que es necesario considerar una tercera componente en el sistema de inventario: el beneficio bruto obtenido con la venta del producto. Más aún, en este caso el principal objetivo debería ser la maximización del beneficio por unidad de tiempo y no la minimización del coste del inventario por unidad de tiempo. Por ello, los citados autores enfocaron el problema, acertadamente, desde esta perspectiva de maximización del beneficio por

unidad de tiempo.

Desde entonces han aparecido muchos artículos considerando una tasa de demanda dependiente del nivel de stock, pero algunos autores han seguido considerando como objetivo la minimización del coste total del inventario por unidad de tiempo. Entre ellos podemos citar los trabajos de Goh (1992), Goh (1994), Giri y Chaudhuri (1998), Alfares (2007) o Mahata y Goswami (2009). Otros en cambio plantearon el problema desde la perspectiva de maximización de beneficios, como por ejemplo los trabajos de Padmanabhan y Vrat (1995), Chung et al. (2000), Jung y Klein (2006), Sana y Chaudhuri (2008) o San José et al. (2007 y 2009). Urban (2005) llevó a cabo una detallada revisión de la literatura relacionada con este tema hasta esa fecha. Posteriormente, Dye y Ouyang (2005) presentaron un modelo de inventario con demanda dependiente del nivel de stock que permitía escasez en el inventario y suponía que la tasa de producto servida con retraso era proporcional al tiempo de escasez en el inventario, generalizando el modelo considerado anteriormente por Padmanabhan y Vrat (1995). Teng y Chang (2005) introdujeron también un modelo EPQ (Economic Production Quantity) con maximización de beneficios en el que la tasa de demanda era simultáneamente dependiente del nivel del inventario y del precio de venta del producto. También You (2005) y Roy (2008) analizaron modelos EOQ con demanda dependiente del precio de venta. Otros trabajos más recientes con demanda dependiente del nivel de stock son Wu et al. (2006), Urban (2008), Chang et al. (2010) o Yang et al. (2010).

Otra cuestión importante observada por los gestores de inventarios es el hecho de que, a veces, el coste de almacenamiento por unidad de producto no es proporcional al tiempo que éste permanece en el inventario, o que el coste de almacenamiento por unidad de tiempo tampoco es proporcional a la cantidad de producto almacenado. Esta observación plantea la necesidad de considerar otras estructuras para el coste de almacenamiento en los modelos matemáticos para sistemas de inventario. Como punto de partida, y suponiendo constante la tasa de demanda, en Naddor (1982) se propusieron tres modelos de inventario con diferentes funciones de coste de

almacenamiento por ciclo. En el primero de ellos se considera que el coste de almacenamiento por ciclo es no lineal en el tiempo, pero lineal en la cantidad de producto almacenado (*the Perishable-goods System*). En el segundo se supone que el coste de almacenamiento por ciclo es no lineal en la cantidad de producto almacenado pero lineal en el tiempo (*the Expensive-storage System*). Por último, en el tercero se supone que el coste de almacenamiento por ciclo es simultáneamente no lineal en el tiempo y la cantidad de producto almacenado (*the General System*). En Weiss (1982) se presentó un modelo con tasa de demanda constante suponiendo que el coste de almacenamiento por unidad de producto es una función potencial convexa del tiempo que el producto permanece en el inventario. Esta situación puede ocurrir, por ejemplo, en el almacenamiento de objetos perecederos como pueden ser los productos alimenticios. En estos supuestos, cuanto más tiempo tienen que permanecer los productos en el inventario, se necesitan sistemas más sofisticados de conservación cuyo coste puede no ser proporcional al tiempo necesario de conservación. En Ferguson et al. (2007) se demostró que este modelo introducido por Weiss es equivalente al modelo *Perishable-goods System* de Naddor. Además, en Goh (1994) se generalizó este modelo para el caso en que la tasa de demanda dependa del nivel del inventario, pero enfocando el problema desde la perspectiva de minimización del coste del inventario por unidad de tiempo. También en Alfares (2007) se considera este mismo problema suponiendo que el coste de almacenamiento por unidad de producto es una función escalonada del tiempo que éste permanece en el inventario. En Urban (2008) se generaliza el trabajo anterior desde la perspectiva de maximización de beneficios. Recientemente, en Pando et al. (2012^a) se ha resuelto el citado modelo de Goh (1994) considerando como objetivo la maximización del beneficio por unidad de tiempo.

Los modelos de inventario con coste de almacenamiento por unidad de tiempo no lineal respecto a la cantidad de producto almacenado son más escasos. Muhlemann y Valtis-Spanopoulos (1980) destacaron el hecho de que, en algunos sistemas de inventario, podía producirse un cambio desproporcionado en el coste de almacenamiento cuando el stock medio del inventario es demasiado alto. Esta situación puede ocurrir, por ejemplo, en el almacenamiento de productos de mucho valor (como joyas o relojes

de diseño) o productos potencialmente peligrosos que requieren grandes medidas de seguridad. En estos casos generalmente los productos necesitan ser asegurados mientras permanecen en el inventario y los costes por unidad de tiempo pueden ser no lineales respecto de la cantidad de producto asegurado. Desde la perspectiva de minimización de los costes del inventario por unidad de tiempo y suponiendo que la tasa de demanda era una función dependiente del nivel del inventario, Goh (1994) presentó un modelo en el que el coste de almacenamiento por unidad de tiempo era una función potencial convexa de la cantidad de producto almacenado. Posteriormente, Giri y Chaudhuri (1998) extendieron este modelo al caso de productos con deterioro. Berman y Perry (2006) también consideraron un modelo con costes de almacenamiento dependientes del nivel del inventario y otras funciones de tasa de demanda también dependientes del nivel del inventario. Scarpello y Ritelli (2008) presentaron algunos resultados teóricos para modelos EOQ en los que el coste de almacenamiento por unidad de tiempo crece con el nivel del inventario. Por último, recientemente Pando et al. (2012^b) analizaron un sistema de inventario con demanda y coste de almacenamiento dependientes del nivel de stock almacenado, con el objetivo de maximizar el beneficio por unidad de tiempo.

A modo de resumen, en la Tabla 1.1 hemos incluido la mayoría de los trabajos citados clasificándolos según la función objetivo considerada (minimización de coste o maximización de beneficio), las hipótesis sobre la tasa de demanda (constante, dependiente del nivel del inventario o dependiente del precio de venta) y las hipótesis sobre el coste de almacenamiento (constante, dependiente del tiempo o dependiente del nivel del inventario).

Como puede observarse en la citada tabla, y hasta donde nosotros conocemos, el modelo *General System* de Naddor (1982) es el único que considera un coste de almacenamiento simultáneamente no lineal tanto en el tiempo que los productos permanecen en el inventario como en la cantidad de producto almacenado.

Utilizando los mismos argumentos que para los modelos *Perishable-goods System* y *Expensive-storage System*, esta formulación para el coste de almacenamiento pudiera

ser adecuada para representar situaciones reales en las que se trabaje con productos de mucho valor que necesitan estar asegurados mientras permanecen en el inventario y los costes del seguro sean no lineales en la cantidad de producto asegurado y, simultáneamente, puedan deteriorarse o pierdan valor con el paso del tiempo y este coste sea no lineal con respecto al tiempo que el producto permanece en el inventario.

Tabla 1.1. Principales características de los modelos de inventario seleccionados

Modelo	Función objetivo:		Tasa de demanda dependiente de:			Coste de almacenamiento dependiente de:		
	Mínimo	Máximo	Fijo	Stock	Precio	Fijo	Tiempo	Stock
	Coste	Beneficio						
Modelo EOQ básico (Harris, 1913)	x		x			x		
Perishable-goods (Naddor, 1982)	x		x				x	
Expensive-storage (Naddor, 1982)	x		x					x
General system (Naddor, 1982)	x		x				x	x
Muhlemann et al. (1980)	x		x					x
Weiss (1982)	x		x				x	
Baker y Urban (1988)		x		x		x		
Goh (1992)	x			x		x		
Goh (1994, Model A)	x			x			x	
Goh (1994, Model B)	x			x				x
Padmanabhan y Vrat (1995)		x		x		x		
Giri y Chaudhuri (1998, Model A)	x			x			x	
Giri y Chaudhuri (1998, Model B)	x			x				x
Chung et al. (2000)		x		x		x		
Dye y Ouyang (2005)		x		x		x		
Teng y Chang (2005)		x		x	x	x		
Jung y Klein (2006)		x			x	x		
Berman y Perry (2006)		x		x				x
Wu et al. (2006)	x			x		x		
Alfares (2007)	x			x			x	
Ferguson et al. (2007)	x		x				x	
San-José et al. (2007)		x	x				x	
Sana y Chaudhuri (2008)		x		x	x	x		
Roy (2008)		x			x		x	
Urban (2008)		x		x			x	
San-José et al. (2009)		x	x			x		
Chang et al. (2010)		x		x		x		
Yang et al. (2010)		x		x		x		
Pando et al. (2012 ^a)		x		x			x	
Pando et al. (2012 ^b)		x		x				x

Ahora bien, el citado modelo *General System* de Naddor establecía como hipótesis que la tasa de demanda era constante y por tanto la maximización del beneficio del inventario por unidad de tiempo era equivalente a la minimización del coste del inventario por unidad de tiempo, considerando éste como la suma de los costes de pedido y de almacenamiento. De este modo podía obtenerse una expresión matemática en forma cerrada para el tamaño óptimo del lote, tal y como fue proporcionada por

el citado autor.

Teniendo en cuenta los comentarios previos, el objetivo de este primer capítulo de la tesis es formular y resolver un modelo matemático de inventario utilizando una estructura del coste de almacenamiento simultáneamente no lineal en el tiempo y en la cantidad de producto almacenado, pero suponiendo que la tasa de demanda no es constante. Por tanto, el modelo necesita ser planteado desde la perspectiva de maximización del beneficio por unidad de tiempo y es necesario desarrollar una metodología que permita evaluar el coste de almacenamiento por ciclo de inventario para esta situación.

La estructura que seguiremos para desarrollar este capítulo es la siguiente. La sección 1.2 incluye la formulación del modelo, con las hipótesis y notación correspondientes. En la sección 1.3 resolvemos el modelo, diseñando un procedimiento para obtener la política óptima y estudiando las propiedades más importantes que pueden establecerse. La sección 1.4 incluye un análisis de sensibilidad del tamaño óptimo del lote y del beneficio máximo en función de los parámetros iniciales del sistema. En la sección 1.5 estudiamos algunos casos particulares que pueden deducirse del modelo expuesto, comparándolos con otros modelos previos de la literatura de inventarios y analizando las diferencias entre las políticas de máximo beneficio y mínimo coste. Los resultados computacionales que ilustran los desarrollos teóricos con ejemplos numéricos se muestran en la sección 1.6. Además, en la sección 1.7 se propone una extensión del modelo que, en determinados casos, permite mejorar el beneficio del inventario por unidad de tiempo considerando dos variables de decisión y en la sección 1.8 se estudia una segunda extensión que permite la inclusión en el modelo de un coste debido al deterioro del producto mientras permanece en el inventario. Finalmente, en la sección 1.9 se dan las conclusiones y se sugieren otras posibles extensiones del modelo propuesto.

1.2. El modelo

El modelo de inventario que estudiaremos en este capítulo se construye partiendo de las siguientes hipótesis iniciales. Se supone que el inventario es de revisión continua y el horizonte de planificación es infinito, considerándose un sólo producto para el cual no se permite escasez. El reemplazamiento se produce cuando el stock disponible se ha agotado, y además dicho reemplazamiento es instantáneo. En cada instante, la tasa de demanda es una función conocida del nivel del inventario en ese instante. El coste de pedido es fijo e independiente del tamaño del lote. Los costes unitarios de adquisición y venta del producto son conocidos y constantes. Además, el coste de almacenamiento acumulado para x unidades de producto durante t unidades de tiempo es una función de ambas variables y, por tanto, puede ser simultáneamente no lineal en x y en t .

En la Tabla 1.2 se incluye la notación que utilizaremos en nuestro modelo.

Tabla 1.2. Listado de notación

q	tamaño de pedido, o tamaño del lote (> 0 , <i>variable de decisión</i>)
T	longitud del ciclo de inventario (> 0)
t	tiempo transcurrido en el inventario ($\leq T$)
$I(t)$	nivel de inventario en el instante t ($\leq q$)
K	coste de realizar el pedido para cada orden (> 0)
p	precio unitario de adquisición (> 0)
s	precio unitario de venta ($\geq p$)
$H(t, x)$	coste de almacenamiento acumulado para x unidades de producto durante t unidades de tiempo (> 0)
h	parámetro de escala para el coste de almacenamiento (> 0)
γ_1	elasticidad del coste de almacenamiento respecto al tiempo (≥ 1)
γ_2	elasticidad del coste de almacenamiento respecto al nivel de stock (≥ 1)
$D(t)$	tasa de demanda en el instante t
λ	parámetro de escala para la tasa de demanda (> 0)
β	elasticidad de la tasa de demanda respecto al nivel de stock ($0 \leq \beta < 1$)
α	parámetro auxiliar, $\alpha = 1 - \beta$ ($0 < \alpha \leq 1$)
ξ	parámetro auxiliar, $\xi = \alpha\gamma_1 + \gamma_2$ (> 1)

De forma más concreta, suponemos que la tasa de demanda viene dada por la siguiente función potencial del nivel del inventario:

$$D(t) = \lambda [I(t)]^\beta \quad (1.1)$$

con $\lambda > 0$ y $0 \leq \beta < 1$. Con esta dependencia funcional, cuando el nivel del inventario decrece también lo hace la tasa de demanda, de modo que al principio del ciclo el nivel del inventario decrece más rápidamente porque la demanda es mayor. En el instante $t = 0$ el nivel del inventario y la tasa de demanda están en su nivel más alto y, cuando el primero va bajando, también lo hace la tasa de demanda. El parámetro de elasticidad de la tasa de demanda con respecto al nivel de stock, β , representa el cambio relativo que se produce en la tasa de demanda con respecto al correspondiente cambio en el nivel de stock, es decir $\beta = \frac{\partial D(t)/\partial I(t)}{D(t)/I(t)}$. Obsérvese que, si la demanda es inelástica (es decir, $\beta = 0$), se tiene que $D(t) = \lambda$ y, por tanto, el modelo se convierte en el modelo básico con tasa de demanda constante.

Además, suponemos que el coste de almacenamiento acumulado para x unidades de producto durante t unidades de tiempo está dado por la siguiente función potencial de t y x :

$$H(t, x) = ht^{\gamma_1} x^{\gamma_2} \quad (1.2)$$

con $h > 0$, $\gamma_1 \geq 1$ y $\gamma_2 \geq 1$. Entonces, se tiene que $h = H(1, 1)$, es decir, el coste de almacenamiento de una unidad de producto durante una unidad de tiempo representa el parámetro de escala para el coste de almacenamiento. El parámetro de elasticidad del coste de almacenamiento respecto al tiempo, γ_1 , representa el cambio relativo en dicho coste respecto al cambio relativo en el tiempo, es decir, $\gamma_1 = \frac{\partial H/\partial t}{H/t}$. De forma similar, γ_2 representa el cambio relativo en el coste de almacenamiento respecto al cambio relativo en la cantidad de producto disponible, es decir, $\gamma_2 = \frac{\partial H/\partial x}{H/x}$. Además, si $\gamma_1 = 1$, en la expresión (1.2) se obtiene la misma expresión para la función de coste de almacenamiento acumulado considerada, por ejemplo, en los trabajos de Naddor (1982, *Expensive-storage System*), Berman y Perry (2006) y Pando et al. (2012^b). De forma similar, si $\gamma_2 = 1$ en la expresión (1.2), se obtiene la función de coste de almacenamiento acumulado del modelo de Naddor (1982, *Perishable-goods System*),

la cual fue posteriormente utilizada también por Weiss (1982), Ferguson et al. (2007) y Pando et al. (2012^a).

Estos tres parámetros de la función de coste de almacenamiento acumulado pueden ser estimados mediante una regresión no lineal, o mediante una regresión lineal del logaritmo del coste de almacenamiento acumulado y los logaritmos del tiempo t y la cantidad x . En el Apéndice final de este capítulo, en la página 106, ilustramos con un ejemplo cómo esta función $H(t, x) = ht^{\gamma_1}x^{\gamma_2}$ puede ser útil para evaluar el coste de almacenamiento en un modelo de inventario.

Para ilustrar gráficamente el efecto de los parámetros de elasticidad γ_1 y γ_2 en el coste de almacenamiento, en la Figura 1.1 hemos representado la función $H(t, x)$ para el caso del modelo EOQ básico (es decir, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$) junto con el caso en que $\gamma_1 = 1.75$ y $\gamma_2 = 1.25$, utilizando valores de (t, x) dentro del cuadrado de lado 10 y suponiendo que en ambos casos $H(10, 10) = 1$ para que sean comparables.

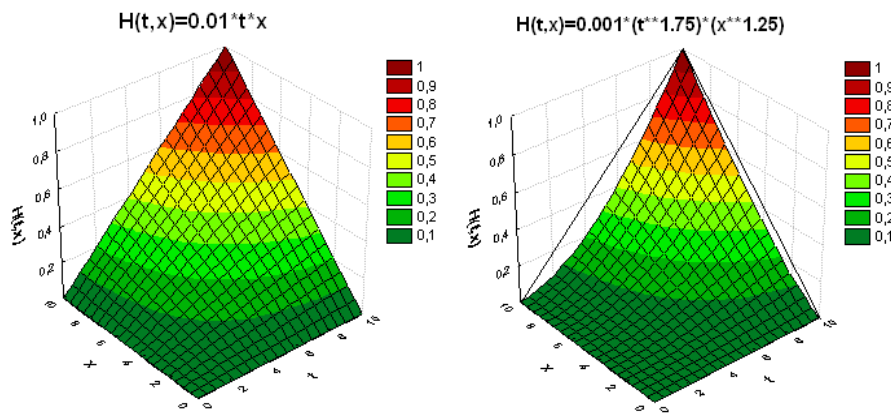


Figura 1.1. Funciones de coste de almacenamiento $H(t, x)$

Podemos observar que en el modelo básico el coste de almacenamiento crece, en términos relativos, a un ritmo constante y de forma simétrica con respecto a ambas variables, mientras que en el caso general, jugando con los parámetros de elasticidad, podemos conseguir otras estructuras mucho más flexibles en las cuales el coste crece más lentamente al principio y este crecimiento se va acentuando a medida que nos alejamos del origen, pudiendo hacerlo además de forma asimétrica respecto al tiempo y la cantidad. Esto puede ser útil en inventarios donde el tiempo y la cantidad no

tienen la misma relevancia en los costes de almacenamiento. Puede haber situaciones en las que lo más costoso es el tiempo y en otras es la cantidad.

Con todas estas hipótesis y la notación dada, se plantea como objetivo encontrar el tamaño óptimo de pedido que proporciona el máximo beneficio por unidad de tiempo para el sistema de inventario.

Nota. Conviene observar que, en la Tabla 1.2, hemos considerado la hipótesis más general $s \geq p$ (en vez de $s > p$, como es habitual) con el propósito de incluir en nuestro estudio algunos modelos analizados por otros autores con anterioridad. Estos modelos han sido desarrollados desde la perspectiva de minimización del coste del inventario, sin tener en cuenta los ingresos y los costes adquisición. Formalmente, éstos pueden ser obtenidos a partir del modelo que desarrollamos en este capítulo haciendo $s = p$, y nosotros nos referiremos a ellos con el nombre de *modelos de inventario de mínimo coste*. En cambio, en el modelo estudiado en este capítulo, se plantea como objetivo la maximización del beneficio por unidad de tiempo, y, por tanto, se necesita incluir en el mismo los ingresos por venta del producto y los costes de adquisición. Por ello, está incluido dentro de los modelos referenciados como *modelos de inventario de máximo beneficio*.

En consecuencia, los sistemas de inventario de mínimo coste que no incluyen en su formulación los ingresos ni los costes de adquisición constituyen sólo una parte de los sistemas asociados a los modelos de máximo beneficio, es decir, constituyen un subsistema del sistema considerado en este capítulo (concretamente, el caso particular con $s = p$). En algunos de estos modelos de inventario, como por ejemplo los modelos EOQ básicos introducidos en Harris (1913), Naddor (1982) o Weiss (1982), la maximización del beneficio es equivalente a la minimización del coste total del inventario (porque la tasa de demanda es constante), pero esto pudiera no ser cierto en otros casos, como ocurrirá en el modelo que presentamos aquí. Más concretamente, si resolvemos el modelo de mínimo coste, como en Goh (1994), y “*a posteriori*” añadimos los ingresos y los costes de adquisición, entonces el beneficio obtenido es menor, o a lo sumo igual, que el beneficio obtenido cuando incluimos los ingresos y los costes

de adquisición “*a priori*” en la formulación del modelo, es decir, si consideramos el modelo de máximo beneficio. Habitualmente, si los problemas no son equivalentes, el gestor del inventario estará más interesado en la política de máximo beneficio que en la política de mínimo coste.

Teniendo en cuenta las hipótesis establecidas, la función que define el nivel de inventario $I(t)$ se obtiene resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\lambda [I(t)]^\beta \quad 0 \leq t \leq T,$$

con la condición inicial $I(0) = q$. La solución de esta ecuación diferencial es

$$I(t) = (q^\alpha - \alpha\lambda t)^\frac{1}{\alpha} \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.3)$$

donde $\alpha = 1 - \beta$. Además, con nuestras hipótesis, se tiene $I(T) = 0$ y, por tanto

$$T = \frac{q^\alpha}{\alpha\lambda} \quad (1.4)$$

Por ello, alternativamente, (1.3) puede escribirse como

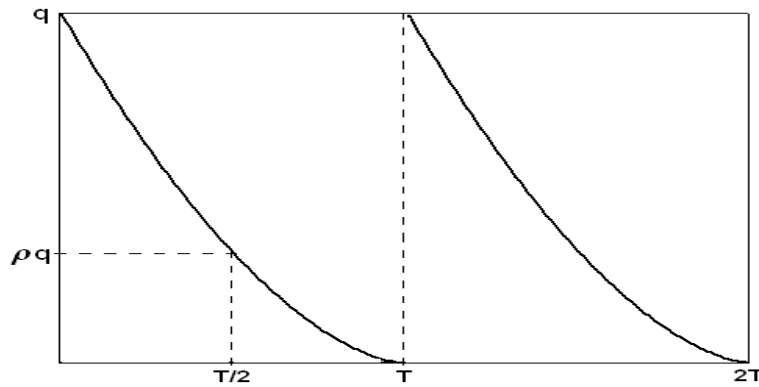
$$I(t) = q \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\frac{1}{\alpha} \quad (1.5)$$

Nota. Una vez obtenida la expresión matemática para la curva del inventario, el parámetro β puede ser mejor interpretado. Concretamente, la demanda acumulada en la segunda mitad del ciclo de inventario puede ser calculada como

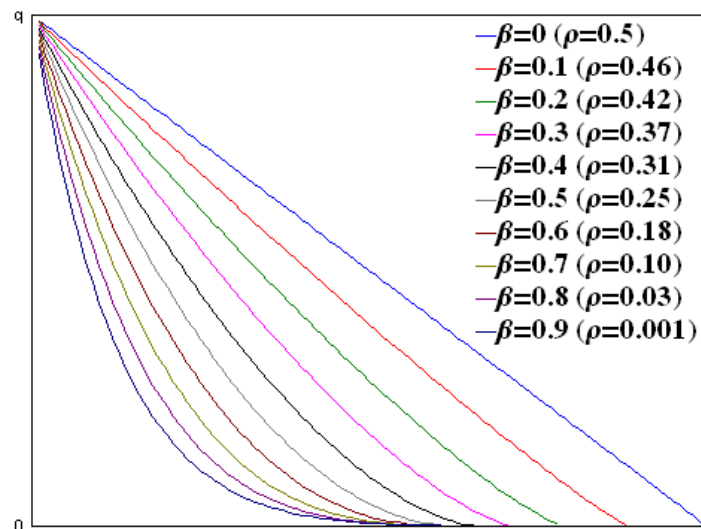
$$\int_{T/2}^T \lambda [I(t)]^\beta dt = - \int_{T/2}^T dI(t) = I(T/2) = q \left(\frac{1}{2}\right)^\frac{1}{1-\beta}$$

y por tanto la proporción de ventas en la segunda mitad del ciclo con respecto al ciclo completo está dada por $\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^\frac{1}{1-\beta}$. Evidentemente, como $0 \leq \beta < 1$, se verifica que $0 < \rho \leq \frac{1}{2}$ lo cual tiene sentido para este tipo de demanda con ventas más altas en la primera mitad del ciclo. Además, el parámetro β puede ser estimado en función de ρ como $\beta = 1 + \frac{\ln 2}{\ln \rho}$.

La representación gráfica de la curva del inventario se muestra en la Figura 1.2.

Figura 1.2. Curva del inventario $I(t)$

Para entender mejor el efecto del parámetro de elasticidad β , en la Figura 1.3 hemos representado gráficamente la curva del inventario $I(t)$ para diferentes valores del parámetro β . Podemos observar que, para $\beta = 0$, tenemos la forma lineal del modelo EOQ básico con el 50% de ventas en la segunda mitad del ciclo ($\rho = 0.5$). A medida que β aumenta, la curvatura va siendo mayor y la proporción de ventas en la segunda mitad del ciclo ρ va decreciendo. Situaciones con $\beta > 0.5$ (por tanto $\rho < 0.25$) son ya menos comunes, puesto que el desequilibrio de las ventas en las dos mitades empieza a ser muy fuerte y esto no suele ser habitual en la práctica.

Figura 1.3. Curvas $I(t)$ para diferentes β

El resultado que demostramos a continuación permite evaluar el coste de almacenamiento por ciclo de inventario para la situación planteada en este modelo.

Lema 1.1 *Supongamos que la función de coste de almacenamiento acumulado está definida por (1.2). Entonces el coste de almacenamiento por ciclo de inventario viene dado por la expresión:*

$$h\gamma_1 \int_0^T t^{\gamma_1-1} [I(t)]^{\gamma_2} dt$$

siendo $I(t)$ el nivel del inventario en el instante t y T la longitud del ciclo de inventario.

Demostración. Sea $H(t, x) = ht^{\gamma_1}x^{\gamma_2}$ el coste de almacenamiento acumulado para x unidades de producto durante t unidades de tiempo y sea $x = I(t)$ la curva del inventario con $I(0) = q$ e $I(T) = 0$. Consideramos la región del plano A limitada por la curva $x = I(t)$ y los ejes de coordenadas, y sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ la partición del intervalo $[0, T]$ en n trozos iguales, con $t_i = i\frac{T}{n}$. Podemos definir entonces la región escalonada $A(P)$ dada por la unión de los rectángulos $A_i = [t_{i-1}, t_i] \times [0, I(t_i)]$, para $1 \leq i \leq n-1$. Entonces, es evidente que A es el límite de las regiones $A(P)$ cuando n tiende a infinito y que el coste de almacenamiento δ_i para cada rectángulo A_i , con $i = 1, \dots, n-1$, puede ser evaluado como:

$$\delta_i = H(t_i, I(t_i)) - H(t_{i-1}, I(t_i)) = h(t_i^{\gamma_1} - t_{i-1}^{\gamma_1}) [I(t_i)]^{\gamma_2} = h\gamma_1 \theta_i^{\gamma_1-1} (t_i - t_{i-1}) [I(t_i)]^{\gamma_2}$$

con $t_{i-1} < \theta_i < t_i$, aplicando el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial en el factor $(t_i^{\gamma_1} - t_{i-1}^{\gamma_1})$.

Por tanto, el coste de almacenamiento asociado a la región $A(P)$ es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i &= h\gamma_1 \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i^{\gamma_1-1} [I(t_i)]^{\gamma_2} (t_i - t_{i-1}) \\ &= h\gamma_1 \sum_{i=1}^{n-1} t_i^{\gamma_1-1} [I(t_i)]^{\gamma_2} (t_i - t_{i-1}) \\ &\quad - h\gamma_1 \sum_{i=1}^{n-1} (t_i^{\gamma_1-1} - \theta_i^{\gamma_1-1}) [I(t_i)]^{\gamma_2} (t_i - t_{i-1}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Usando de nuevo el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial en el factor $(t_i^{\gamma_1-1} - \theta_i^{\gamma_1-1})$, el segundo término de esta expresión puede reescribirse como:

$$h\gamma_1(\gamma_1 - 1) \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i^{\gamma_1-2} [I(t_i)]^{\gamma_2} (t_i - \theta_i) (t_i - t_{i-1}) \quad (1.7)$$

con $t_{i-1} < \theta_i < \eta_i < t_i$. Ahora, teniendo en cuenta que $\eta_i < T$, $I(t_i) < q$, $t_i - \theta_i < t_i - t_{i-1}$ y $t_i - t_{i-1} = T/n$, se deduce que

$$\eta_i^{\gamma_1-2} [I(t_i)]^{\gamma_2} (t_i - \theta_i) (t_i - t_{i-1}) < T^{\gamma_1-2} q^{\gamma_2} \left(\frac{T}{n}\right)^2 = \frac{T^{\gamma_1} q^{\gamma_2}}{n^2}$$

y la expresión (1.7) está acotada superiormente por $h\gamma_1(\gamma_1 - 1)T^{\gamma_1}q^{\gamma_2}\frac{n-1}{n^2}$. Por tanto, el segundo término de la expresión (1.6) converge hacia cero cuando n tiende hacia infinito. Por último, calculando el límite cuando n tiende hacia infinito del primer término de dicha expresión, se deduce que el coste de almacenamiento asociado a la región A (es decir, el coste de almacenamiento para el ciclo de inventario) es

$$h\gamma_1 \int_0^T t^{\gamma_1-1} [I(t)]^{\gamma_2} dt$$

como queríamos demostrar. ■

Teniendo en cuenta este resultado, las hipótesis dadas y las expresiones (1.3), (1.4) y (1.5), el coste de almacenamiento para un ciclo de inventario en función del tamaño de pedido, q , puede obtenerse como

$$HC(q) = h\gamma_1 q^{\gamma_2} T^{\gamma_1} \int_0^T \left(\frac{t}{T}\right)^{\gamma_1-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} dt = h\gamma_1 q^{\gamma_2} T^{\gamma_1} B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) = \frac{q^\xi}{\Delta} \quad (1.8)$$

donde $\xi = \alpha\gamma_1 + \gamma_2$, $\Delta = \frac{(\alpha\lambda)^{\gamma_1}}{h\gamma_1 B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1)}$ y $B(a, b) = \int_0^1 z^{a-1} (1-z)^{b-1} dz$ es la función beta de Euler. Evidentemente, se verifica que $\xi \geq \alpha + 1 > 1$ y $\Delta > 0$.

El beneficio por ciclo de inventario puede calcularse entonces como diferencia entre: (i) los ingresos totales por ciclo (sq) y (ii) la suma del coste de adquisición (pq), el coste de pedido (K) y el coste de almacenamiento dado por (1.8). Por tanto, como $T = \frac{q^\alpha}{\alpha\lambda}$, el beneficio por unidad de tiempo que debemos de maximizar, $G(q)$, viene dado por

$$G(q) = \alpha\lambda(s-p)q^{1-\alpha} - \alpha\lambda K q^{-\alpha} - \frac{\alpha\lambda}{\Delta} q^{\xi-\alpha} \quad (1.9)$$

Ahora, teniendo en cuenta que $G(q) = -\frac{\alpha\lambda}{\Delta} g(q)$ siendo

$$g(q) = q^{\xi-\alpha} - (s-p)\Delta q^{1-\alpha} + K\Delta q^{-\alpha} \quad (1.10)$$

podemos asegurar que la solución óptima que minimiza $g(q)$ coincide con la que maximiza $G(q)$. El problema matemático puede escribirse entonces como

$$\text{Minimizar } \{g(q) : q > 0\} \quad (1.11)$$

1.3. Resolución del modelo

En esta sección resolvemos el modelo presentado, mediante el análisis de la función objetivo a minimizar $g(q)$, y además estudiamos las propiedades más relevantes que caracterizan a la política óptima de máximo beneficio en el modelo.

En primer lugar, es evidente que la función $g(q)$ es de clase C^2 en el intervalo $(0, \infty)$ y además sus dos primeras derivadas vienen dadas por

$$\begin{aligned} g'(q) &= (\xi - \alpha)q^{\xi - \alpha - 1} - (1 - \alpha)(s - p)\Delta q^{-\alpha} - \alpha K \Delta q^{-\alpha - 1} \\ &= \frac{\xi - \alpha}{q^{\alpha + 1}} \left(q^\xi - \frac{(1 - \alpha)(s - p)\Delta}{\xi - \alpha} q - \frac{\alpha K \Delta}{\xi - \alpha} \right) \end{aligned}$$

y

$$g''(q) = (\xi - \alpha)(\xi - \alpha - 1)q^{\xi - \alpha - 2} + \alpha(1 - \alpha)(s - p)\Delta q^{-\alpha - 1} + \alpha(1 + \alpha)K \Delta q^{-\alpha - 2}$$

Teniendo en cuenta que $g''(q) > 0$ para todo $q > 0$, se sigue que $g(q)$ es una función estrictamente convexa. Además, es evidente que $\lim_{q \downarrow 0} g(q) = \lim_{q \rightarrow \infty} g(q) = \infty$. Por consiguiente, la función $g'(q)$ tiene una única raíz positiva q^* que necesariamente será el valor para el cual la función $g(q)$ alcanza su mínimo global, es decir, que será la solución para el problema planteado. Con la expresión dada para $g'(q)$, es obvio que la ecuación $g'(q) = 0$ es equivalente a la ecuación $P(q) = 0$, siendo

$$P(q) = q^\xi - uq - v \quad (1.12)$$

con

$$u = \frac{(1 - \alpha)(s - p)\Delta}{\xi - \alpha} \geq 0 \quad (1.13)$$

y

$$v = \frac{\alpha K \Delta}{\xi - \alpha} > 0 \quad (1.14)$$

Es evidente que si $u = 0$ (es decir, $\alpha = 1$ o $s = p$) la solución es

$$q^* = v^{\frac{1}{\xi}} = \left(\frac{\alpha K \Delta}{\xi - \alpha} \right)^{\frac{1}{\xi}} \quad (1.15)$$

Por lo tanto, sólo es necesario resolver la ecuación (1.12) cuando $u > 0$ (es decir, $0 < \alpha < 1$ y $s > p$). El siguiente resultado responde a esta cuestión.

Teorema 1.2 *Sea la función $P(q) = q^\xi - uq - v$, con $\xi > 1$, $u > 0$, $v > 0$ y $q \geq 0$. Para $i = 1, 2, 3, \dots$, consideremos la sucesión $q_i = q_{i-1} - \frac{P(q_{i-1})}{P'(q_{i-1})} = \frac{(\xi-1)q_{i-1}^\xi + v}{\xi q_{i-1}^{\xi-1} - u}$, con $q_0 = \max \left[(u+v)^{\frac{1}{\xi-1}}, (u+v)^{\frac{1}{\xi}} \right]$. Entonces $P(q)$ tiene una única raíz positiva q^* que, además, es el límite de la sucesión $\{q_i\}_{i=1}^\infty$.*

Demostración. La función $P(q) = q^\xi - uq - v$ verifica las siguiente propiedades: (i) $P(0) = -v < 0$ y $\lim_{q \rightarrow \infty} P(q) = \infty$; (ii) $P'(q) = \xi q^{\xi-1} - u$, $P'(0) = -u < 0$ y $r_1 = \left(\frac{u}{\xi} \right)^{\frac{1}{\xi-1}}$ es la única raíz de $P'(q)$ con $q > 0$ y (iii) $P''(q) = \xi(\xi-1)q^{\xi-2} > 0$ para todo $q > 0$. Por consiguiente, $P(q)$ es una función estrictamente convexa en el intervalo $(0, \infty)$ con una única raíz positiva q^* , verificándose que $P(q) < 0$ para $q \in (0, q^*)$ y $P(q) > 0$ para $q \in (q^*, \infty)$. Además, necesariamente $q^* > r_1$, $P'(q) < 0$ para $q \in (0, r_1)$ y $P'(q) > 0$ para $q \in (r_1, \infty)$. Todo ello nos permite asegurar que, de forma general, la representación gráfica de la función $P(q)$ es la que se muestra en la Figura 1.4.

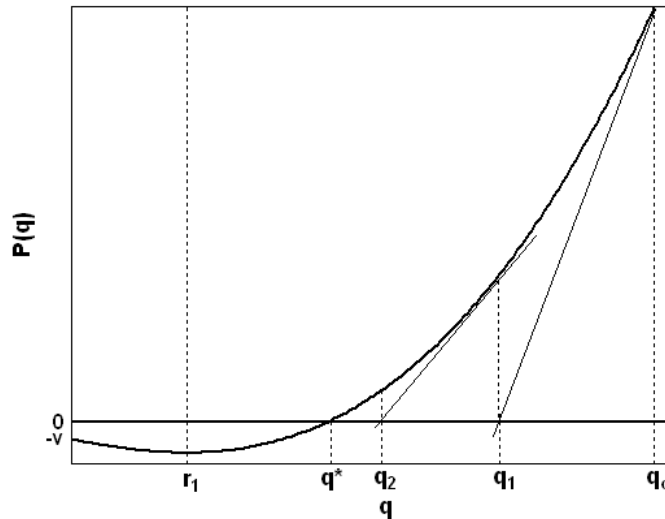


Figura 1.4. Forma general de la función $P(q)$

Teniendo en cuenta estas propiedades de la función $P(q)$ se tiene que, si $u + v < 1$, entonces $q_o = (u + v)^{\frac{1}{\xi}} < 1$ y $P(q_o) = (1 - q_o)u > 0$. De forma similar, si $u + v > 1$, entonces $q_o = (u + v)^{\frac{1}{\xi-1}} > 1$ y $P(q_o) = (q_o - 1)v > 0$. Por tanto en ambos casos tenemos que $P(q_o) > 0$ y, por consiguiente, $q^* < q_o$ y $P'(q_o) > 0$. Es decir, cuando $u + v \neq 1$, se verifica que $q_1 = q_o - P(q_o)/P'(q_o) < q_o$. Además, por el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial, podemos asegurar que existe un punto $\eta \in (q^*, q_o)$ con $P(q_o) = P(q_o) - P(q^*) = P'(\eta)(q_o - q^*) < P'(q_o)(q_o - q^*)$ y, por consiguiente, $q^* < q_o - \frac{P(q_o)}{P'(q_o)} = q_1 < q_o$ (en la Figura 1.4 se puede observar gráficamente la interpretación del valor q_1). Entonces, si ahora suponemos que $q^* < q_{i-1} < q_{i-2}$, un razonamiento similar prueba que $q^* < q_i < q_{i-1}$ y, por tanto, la sucesión $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente decreciente de números positivos. Esto nos permite asegurar que la sucesión $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$ es convergente y además, si denotamos por L al valor de su límite (es decir $L = \lim_{i \rightarrow \infty} q_i$), teniendo en cuenta la definición de los puntos q_i , necesariamente se verifica que $L = L - \frac{P(L)}{P'(L)}$, lo cual implica que $P(L) = 0$ y por tanto $L = q^*$.

Por último, si $u + v = 1$, se tiene que $q_o = 1$ y $P(q_o) = 0$. Por tanto, $q^* = 1$ es la única raíz positiva de la ecuación $P(q) = 0$ y además, en este caso, la sucesión $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$ es constantemente igual a q^* , porque $q_i = q_{i-1}$ para todo $i = 1, 2, \dots$ ■

Utilizando el teorema anterior, podemos evaluar el tamaño óptimo del lote q^* con la precisión deseada y calcular la longitud óptima del ciclo de inventario T^* usando la expresión (1.4). Además, de las expresiones (1.9), (1.11) y (1.12), se deduce que

$$\begin{aligned} G(q^*) &= -\frac{\alpha\lambda}{\Delta} (q^*)^{-\alpha} \left[(q^*)^{\xi} - (s-p)\Delta q^* + K\Delta \right] \\ &= -\frac{\alpha\lambda}{\Delta} (q^*)^{-\alpha} [uq^* + v - (s-p)\Delta q^* + K\Delta] \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de u y v dados por (1.13) y (1.14) en la expresión anterior, obtenemos que el máximo beneficio por unidad de tiempo para el modelo es

$$\begin{aligned} G(q^*) &= -\alpha\lambda (q^*)^{-\alpha} \left[\left(\frac{(1-\alpha)(s-p)}{\xi-\alpha} - (s-p) \right) q^* + \frac{\alpha K}{\xi-\alpha} + K \right] \\ &= \frac{\alpha\lambda}{\xi-\alpha} \left[\frac{(\xi-1)(s-p)q^* - K\xi}{(q^*)^{\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Aunque el cálculo del tamaño óptimo del lote q^* (resolviendo la ecuación $P(q) = 0$) puede hacerse fácilmente utilizando cualquier software de resolución de ecuaciones, a continuación incluimos un sencillo algoritmo para evaluar la solución basado en el teorema anterior y que está en relación con el bien conocido método de Newton-Fourier. Este algoritmo puede ser fácilmente aplicado por cualquier gestor de inventarios sin necesidad de utilizar ningún software específico.

Algoritmo 1. Obtención de la política óptima en el modelo.

Paso 1. Calcular $\Delta = \frac{(\alpha\lambda)^{\gamma_1}}{h\gamma_1 B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1)}$, $\xi = \alpha\gamma_1 + \gamma_2$, $u = \frac{(1-\alpha)(s-p)\Delta}{\xi-\alpha}$ y $v = \frac{\alpha K\Delta}{\xi-\alpha}$.

Paso 2. Si $u = 0$ entonces la solución es $q^* = v^{\frac{1}{\xi}}$. Ir al Paso 5.

Paso 3. Si $u + v = 1$ entonces la solución es $q^* = 1$. Ir al Paso 5.

Paso 4. Calcular $q_0 = \max \left\{ (u + v)^{\frac{1}{\xi}}, (u + v)^{\frac{1}{\xi-1}} \right\}$ y $r_1 = \left(\frac{u}{\xi} \right)^{\frac{1}{\xi-1}}$.

(a) Seleccionar la tolerancia $TOL > 0$, con $0 < TOL < r_1$.

(b) Calcular $q_i = \frac{(\xi-1)q_{i-1}^{\xi} + v}{\xi q_{i-1}^{\xi-1} - u}$ para $i = 1, 2, 3, \dots$ hasta que $P(q_i - TOL) < 0$.

(c) Elegir el tamaño óptimo del lote $q^* = q_i$.

Paso 5. Calcular la longitud óptima del ciclo de inventario $T^* = \frac{(q^*)^{\alpha}}{\alpha\lambda}$ y

$$\text{el máximo beneficio } G(q^*) = \frac{\alpha\lambda}{\xi-\alpha} \left[\frac{(\xi-1)(s-p)q^* - K\xi}{(q^*)^{\alpha}} \right].$$

Nota. Para entender el funcionamiento del algoritmo anterior y su criterio de parada es conveniente repasar la demostración del Teorema 1.2. En efecto, se tiene que: (i) la función $P(q)$ alcanza su mínimo en el punto r_1 ; (ii) $P(q) < 0$ si y sólo si $q \in (0, q^*)$; (iii) la sucesión q_i es estrictamente decreciente y $r_1 < q^* < q_i$ para todo $i = 0, 1, 2, \dots$; y (iv) como la tolerancia TOL está en el intervalo $(0, r_1)$, se deduce que $q_i - TOL > 0$ para todo $i = 0, 1, 2, \dots$. Por tanto, cuando se verifica la condición $P(q_i - TOL) < 0$, se sigue que $q_i - TOL < q^*$, es decir, $q_i - q^* < TOL$. Esto nos permite concluir que la condición $P(q_i - TOL) < 0$ es un adecuado criterio de parada.

Sistemas rentables.

Una cuestión interesante en situaciones prácticas reales es la de establecer condiciones que aseguren que el sistema de inventario generará beneficios, al menos si se

usa el tamaño de lote óptimo. Por ello, cuando $G(q^*) > 0$ diremos que el sistema de inventario es *rentable*, mientras que, si $G(q^*) < 0$, diremos que el sistema de inventario es *no rentable* porque nunca proporciona beneficios. Cuando $G(q^*) = 0$ tendremos que el sistema iguala costes e ingresos y lo denominaremos sistema de inventario *en equilibrio*. Con estas definiciones, habitualmente el gestor del inventario estará interesado en caracterizar, a priori, el sistema como rentable, no rentable o en equilibrio utilizando sólo los parámetros iniciales del sistema, sin necesidad de calcular el tamaño óptimo del lote q^* ni el máximo beneficio por unidad de tiempo $G(q^*)$. De este modo, si se conoce la relación que debe existir entre los parámetros del sistema para que éste sea rentable, se podrá establecer el mínimo precio de venta s que garantice la rentabilidad. Obviamente, si $s = p$ entonces $G(q^*) < 0$ y tenemos un sistema no rentable. El siguiente resultado nos permite caracterizar estos tres tipos de inventario para el caso del modelo aquí expuesto cuando $s > p$.

Teorema 1.3 *Supongamos $s > p$ y sea $\eta = \frac{\xi}{\xi-1} \left[\frac{(\xi-1)K^{\xi-1}}{\Delta} \right]^{\frac{1}{\xi}}$. Entonces:*

1. *El inventario es rentable si y sólo si $s - p > \eta$.*
2. *El inventario está en equilibrio si y sólo si $s - p = \eta$.*
3. *El inventario es no rentable si y sólo si $s - p < \eta$.*

Demostración. Utilizando la expresión (1.16) es evidente que $G(q^*) > 0$ si y sólo si $q^* > \frac{K\xi}{(\xi-1)(s-p)}$. Entonces, por las propiedades de la función $P(q)$ dadas en la demostración del Teorema 1.2, esta última desigualdad es cierta si y sólo si se verifica que $P\left(\frac{K\xi}{(\xi-1)(s-p)}\right) < 0$. Ahora bien, como

$$\begin{aligned} P\left(\frac{K\xi}{(\xi-1)(s-p)}\right) &= \left[\frac{K\xi}{(\xi-1)(s-p)}\right]^{\xi} - \frac{K\Delta}{\xi-\alpha} \left(\frac{\xi(1-\alpha)}{\xi-1} + \alpha\right) \\ &= \left[\frac{K\xi}{(\xi-1)(s-p)}\right]^{\xi} - \frac{K\Delta}{\xi-1} \end{aligned}$$

se deduce que el inventario es rentable si sólo si $\left[\frac{K\xi}{(\xi-1)(s-p)}\right]^{\xi} < \frac{K\Delta}{\xi-1}$, es decir, $s - p > \frac{\xi}{\xi-1} \left[\frac{(\xi-1)K^{\xi-1}}{\Delta}\right]^{\frac{1}{\xi}}$, lo cual demuestra la primera afirmación. El mismo razonamiento aplicado a sistemas en equilibrio o no rentables demuestra las afirmaciones 2 y 3. ■

Como consecuencia de este teorema se puede decir que $s = p + \eta$ es el precio de venta del producto que debemos rebasar para obtener un sistema rentable. Por ejemplo, en el modelo EOQ de Harris (donde $\alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$) se tiene que $\eta = \sqrt{\frac{2Kh}{\lambda}}$ y, por tanto, $s = p + \sqrt{\frac{2Kh}{\lambda}}$.

Una caracterización de la política óptima.

Otro aspecto de interés para cualquier gestor de inventarios consiste en disponer de una regla práctica que permita chequear si un determinado tamaño de pedido es o no óptimo. El siguiente resultado responde a esta cuestión.

Teorema 1.4 Sean las funciones $\Psi(q) = (s - p)q$ (beneficio bruto por ciclo con tamaño de pedido q) y $HC(q) = \frac{q^\xi}{\Delta}$ (coste de almacenamiento por ciclo con tamaño de pedido q). Entonces, un tamaño de pedido q es óptimo si y sólo si se verifica que

$$(\xi - \alpha)HC(q) = \alpha K + (1 - \alpha)\Psi(q) \quad (1.17)$$

Demostración. Si q es el tamaño óptimo del lote (es decir, $q = q^*$), a partir de (1.8), (1.12), (1.13) y (1.14), se tiene que $HC(q^*) = \frac{(q^*)^\xi}{\Delta} = \frac{(1-\alpha)(s-p)}{\xi-\alpha}q^* + \frac{\alpha K}{\xi-\alpha} = \frac{1-\alpha}{\xi-\alpha}\Psi(q^*) + \frac{\alpha}{\xi-\alpha}K$. Es decir, $(\xi - \alpha)HC(q^*) = \alpha K + (1 - \alpha)\Psi(q^*)$. Recíprocamente, si q verifica $(\xi - \alpha)HC(q) = \alpha K + (1 - \alpha)\Psi(q)$, como también q^* verifica esta desigualdad, restando ambas expresiones se tiene que $(\xi - \alpha) \left[\frac{(q^*)^\xi}{\Delta} - \frac{q^\xi}{\Delta} \right] = (1 - \alpha)(s - p)(q^* - q)$; o, equivalentemente, usando (1.13), $\left[(q^*)^\xi - q^\xi \right] = u(q^* - q)$. Entonces, como q^* es la solución de Eq. (1.12), necesariamente $(q^*)^\xi = uq^* + v$ y, por consiguiente, $q^\xi - uq - v = 0$. Finalmente, como $P(q)$ tiene una única raíz positiva, podemos asegurar que $q = q^*$, es decir, q es el tamaño óptimo del lote. ■

Si consideramos el beneficio bruto por unidad de tiempo en vez del beneficio bruto por ciclo de inventario, es posible obtener una interpretación práctica del resultado anterior. En efecto, dividiendo ambos miembros de la igualdad (1.17) por el tamaño de ciclo óptimo T^* , se tiene que

$$(\xi - \alpha) \frac{HC(q^*)}{T^*} = \alpha \frac{K}{T^*} + (1 - \alpha) \frac{\Psi(q^*)}{T^*} \quad (1.18)$$

donde $\frac{HC(q^*)}{T^*}$, $\frac{K}{T^*}$ y $\frac{\Psi(q^*)}{T^*}$ representan, respectivamente, el coste de almacenamiento óptimo por unidad de tiempo, el coste de pedido óptimo por unidad de tiempo y el beneficio bruto óptimo por unidad de tiempo. Por lo tanto, podemos asegurar que la función $G(q)$ alcanza su máximo global en el punto de corte de las funciones $(\xi - \alpha)\frac{HC(q)}{T}$ y $\alpha\frac{K}{T} + (1 - \alpha)\frac{\Psi(q)}{T}$. La Figura 1.5 ilustra esta idea dibujando las tres funciones.

Resulta interesante observar que esta regla es una generalización del conocido resultado para el modelo EOQ básico que asegura que “para el tamaño óptimo de pedido, el coste de almacenamiento coincide exactamente con el coste de pedido” (ver, por ejemplo, Axsäter 2000, p. 32). En efecto, si $\alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$, la expresión (1.18) resulta ser $\frac{HC(q^*)}{T^*} = \frac{K}{T^*}$, lo cual no es más que el resultado que acabamos de citar.

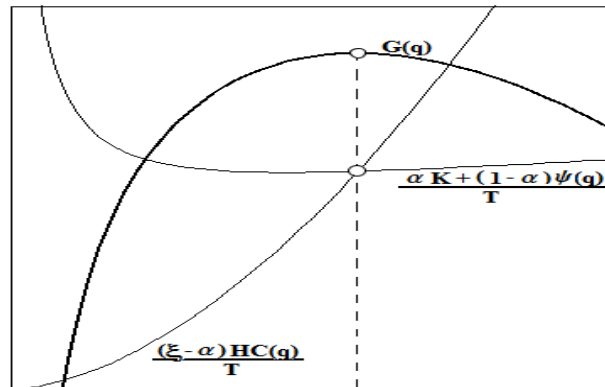


Figura 1.5. Política óptima de máximo beneficio

1.4. Análisis de sensibilidad

A continuación se incluye un análisis de sensibilidad del tamaño óptimo del lote q^* y del beneficio óptimo $G(q^*)$ respecto a los parámetros iniciales del sistema K , h , s , p , λ , β , γ_1 y γ_2 , en el contexto del modelo planteado en la sección 1.2 y resuelto en la sección 1.3. Más concretamente, sabemos que fijados los valores de los parámetros indicados es posible calcular el valor óptimo de la variable de decisión q^* y el valor objetivo $G(q^*)$. Se trata ahora de estudiar la variación de estos valores respecto a cambios independientes en los valores de los parámetros, es decir, considerando que

tales cambios se producen sólo en uno de tales parámetros, mientras que los demás permanecen constantes.

En consecuencia, en el análisis de sensibilidad correspondiente a cada parámetro, se tratará a éste como la única variable y, por tanto, realizaremos el estudio usando las derivadas ordinarias correspondientes y enunciaremos un resultado por separado para cada uno de los parámetros iniciales.

Para calcular dichas derivadas ordinarias necesitaremos utilizar los parámetros auxiliares $\alpha = 1 - \beta$, $\xi = \alpha\gamma_1 + \gamma_2$, $\Delta = \frac{(\alpha\lambda)^{\gamma_1}}{h\gamma_1 B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1)}$, $u = \frac{(1-\alpha)(s-p)\Delta}{\xi-\alpha}$ y $v = \frac{\alpha K \Delta}{\xi-\alpha}$ y, por tanto, en cada caso, calcular las derivadas de dichos parámetros auxiliares con respecto a los iniciales.

Comenzamos con el análisis respecto al parámetro K , para el cual se tiene que $\frac{d\alpha}{dK} = \frac{d\xi}{dK} = \frac{d\Delta}{dK} = \frac{du}{dK} = 0$ y $\frac{dv}{dK} = \frac{\alpha\Delta}{\xi-\alpha}$.

Lema 1.5 Sean $q^*(K)$ y $G(q^*(K))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor K del coste de pedido. Entonces, en un punto $K = K_o$ para el que $q^*(K_o) = q_o^*$, se tiene:

$$(i) \left. \frac{dq^*(K)}{dK} \right|_{K=K_o} = \frac{\alpha\Delta}{(\xi - \alpha) \left[\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u \right]}$$

$$(ii) \left. \frac{dG(q^*(K))}{dK} \right|_{K=K_o} = -\alpha\lambda (q_o^*)^{-\alpha}$$

Además, ambas derivadas son continuas en $K = K_o$.

Demostración.

(i) Si definimos la función

$$F_1(K, q) = q^\xi - uq - v$$

y denotamos por K_o al valor actual de K , entonces para cada K suficientemente cerca de K_o , la solución óptima $q^*(K)$ viene definida implícitamente por la ecuación $F_1(K, q) = 0$, de modo que $F_1(K, q^*(K)) = 0$ y $q^*(K_o) = q_o^*$. Además, se verifica que $\frac{\partial F_1(K, q)}{\partial K} = \frac{\partial F_1(K, q)}{\partial v} \frac{dv}{dK} = -\frac{\alpha\Delta}{\xi-\alpha}$, $\frac{\partial F_1(K, q)}{\partial q} = P'(q) = \xi q^{\xi-1} - u$ y $\frac{\partial F_1}{\partial q}(K_o, q_o^*) = P'(q_o^*) > 0$, tal y como se obtuvo en la demostración del Teorema 1.2. Entonces, por ser las funciones $\frac{\partial F_1(K, q)}{\partial K}$ y $\frac{\partial F_1(K, q)}{\partial q}$ continuas en un entorno del punto (K_o, q_o^*) , podemos

asegurar que la función $F_1(K, q)$ verifica las hipótesis para poder aplicar el Teorema de la Función Implícita en un entorno del punto (K_o, q_o^*) y, por tanto

$$\left. \frac{dq^*(K)}{dK} \right|_{K=K_o} = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial K}(K_o, q_o^*)}{\frac{\partial F_1}{\partial q}(K_o, q_o^*)} = \frac{\alpha \Delta}{(\xi - \alpha) \left[\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u \right]}$$

y esta derivada es continua en el punto $K = K_o$.

(ii) Si definimos la función

$$F_2(K, q) = \alpha \lambda (s - p) q^{1-\alpha} - \alpha \lambda K q^{-\alpha} - \frac{\alpha \lambda}{\Delta} q^{\xi-\alpha}$$

y denotamos por K_o al valor actual de K , entonces para cada K suficientemente cerca de K_o , el beneficio óptimo del lote es una función de K definida como $G(q^*(K)) = F_2(K, q^*(K))$ con $q^*(K_o) = q_o^*$ y $G(q^*(K_o)) = G(q_o^*)$. Entonces, derivando la función $G(q^*(K))$ en el punto K_o y teniendo en cuenta la existencia de $\left. \frac{dq^*(K)}{dK} \right|_{K=K_o}$ y que $\frac{\partial F_2}{\partial q}(K_o, q_o^*) = 0$, se sigue que

$$\left. \frac{dG(q^*(K))}{dK} \right|_{K=K_o} = \frac{\partial F_2}{\partial K}(K_o, q_o^*) + \frac{\partial F_2}{\partial q}(K_o, q_o^*) \left. \frac{dq^*(K)}{dK} \right|_{K=K_o} = \frac{\partial F_2}{\partial K}(K_o, q_o^*) = -\alpha \lambda (q_o^*)^{-\alpha}$$

y, además, esta derivada es continua en el punto $K = K_o$. ■

Para hacer el análisis con respecto al parámetro h , tendremos en cuenta que $\frac{d\alpha}{dh} = \frac{d\xi}{dh} = 0$, $\frac{d\Delta}{dh} = \Delta \frac{d \ln(\Delta)}{dh} = \frac{-\Delta}{h}$, $\frac{du}{dh} = \frac{(1-\alpha)(s-p)}{\xi-\alpha} \frac{d\Delta}{dh} = -\frac{u}{h}$ y $\frac{dv}{dh} = \frac{\alpha K}{\xi-\alpha} \frac{d\Delta}{dh} = -\frac{v}{h}$. Podemos enunciar entonces el siguiente resultado.

Lema 1.6 Sean $q^*(h)$ y $G(q^*(h))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor h del coste de almacenamiento. Entonces, en un punto $h = h_o$ para el que $q^*(h_o) = q_o^*$, $\Delta_o = \Delta(h_o)$, $u_o = u(h_o)$ y $v_o = v(h_o)$, se tiene:

$$(i) \quad \left. \frac{dq^*(h)}{dh} \right|_{h=h_o} = \frac{-(q_o^*)^\xi}{h_o \left[\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o \right]}$$

$$(ii) \quad \left. \frac{dG(q^*(h))}{dh} \right|_{h=h_o} = -\frac{\alpha \lambda}{h_o \Delta_o} (q_o^*)^{\xi-\alpha}$$

Además, ambas derivadas son continuas en $h = h_o$.

Demostración. Si consideramos el parámetro h como una variable y denotamos por h_o al valor actual de h , utilizando el mismo razonamiento que en el Lema 1.5 con la función $F_1(h, q) = q^\xi - uq - v$, mediante derivación implícita, se tiene que

$$\left. \frac{dq^*(h)}{dh} \right|_{h=h_o} = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial h}(h_o, q_o^*)}{\frac{\partial F_1}{\partial q}(h_o, q_o^*)} = \frac{q_o^* \left. \frac{du}{dh} \right|_{h=h_o} + \left. \frac{dv}{dh} \right|_{h=h_o}}{\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o} = \frac{-\frac{u_o q_o^* + v_o}{h_o}}{\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o} = \frac{-(q_o^*)^\xi}{h_o \left[\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o \right]}$$

Del mismo modo, para $G(q^*)$, utilizando el mismo razonamiento que en el Lema 1.5 con la función $F_2(h, q) = \alpha\lambda(s-p)q^{1-\alpha} - \alpha\lambda Kq^{-\alpha} - \frac{\alpha\lambda}{\Delta}q^{\xi-\alpha}$ se tiene que

$$\left. \frac{dG(q^*(h))}{dh} \right|_{h=h_o} = \frac{\partial F_2}{\partial h}(h_o, q_o^*) = \frac{\alpha\lambda}{\Delta_o^2} (q_o^*)^{\xi-\alpha} \left. \frac{d\Delta}{dh} \right|_{h=h_o} = -\frac{\alpha\lambda}{h_o \Delta_o} (q_o^*)^{\xi-\alpha}$$

tal y como queríamos demostrar. ■

De forma similar, el siguiente resultado analiza el comportamiento del tamaño óptimo del lote q^* y del beneficio óptimo $G(q^*)$ con respecto al parámetro s , teniendo en cuenta que $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\xi}{ds} = \frac{d\Delta}{ds} = \frac{dv}{ds} = 0$ y $\frac{du}{ds} = \frac{(1-\alpha)\Delta}{\xi-\alpha}$.

Lema 1.7 Sean $q^*(s)$ y $G(q^*(s))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor s del precio de venta. Entonces, en un punto $s = s_o$ para el que $q^*(s_o) = q_o^*$ y $u_o = u(s_o)$, se tiene:

$$(i) \left. \frac{dq^*(s)}{ds} \right|_{s=s_o} = \frac{q_o^*(1-\alpha)\Delta}{(\xi-\alpha) \left[\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o \right]}$$

$$(ii) \left. \frac{dG(q^*(s))}{ds} \right|_{s=s_o} = \alpha\lambda (q_o^*)^{1-\alpha}$$

Además, ambas derivadas son continuas en $s = s_o$.

Demostración. Si consideramos el parámetro s como una variable y denotamos por s_o al valor actual de s , utilizando el mismo razonamiento que en el Lema 1.5 con la función $F_1(s, q) = q^\xi - uq - v$, mediante derivación implícita, se tiene que

$$\left. \frac{dq^*(s)}{ds} \right|_{s=s_o} = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial s}(s_o, q_o^*)}{\frac{\partial F_1}{\partial q}(s_o, q_o^*)} = \frac{q_o^* \left. \frac{du}{ds} \right|_{s=s_o}}{\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o} = \frac{q_o^*(1-\alpha)\Delta}{(\xi-\alpha) \left[\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o \right]}$$

Del mismo modo, para $G(q^*)$, utilizando el mismo razonamiento que en el Lema 1.5 con la función $F_2(s, q) = \alpha\lambda(s-p)q^{1-\alpha} - \alpha\lambda Kq^{-\alpha} - \frac{\alpha\lambda}{\Delta}q^{\xi-\alpha}$ se tiene que

$$\left. \frac{dG(q^*(s))}{ds} \right|_{s=s_o} = \frac{\partial F_2}{\partial s}(s_o, q_o^*) = \alpha\lambda (q_o^*)^{1-\alpha}$$

tal y como queríamos demostrar. ■

Para el análisis con respecto al parámetro p , tendremos en cuenta que $\frac{d\alpha}{dp} = \frac{d\xi}{dp} = \frac{d\Delta}{dp} = \frac{dv}{dp} = 0$ y $\frac{du}{dp} = \frac{-(1-\alpha)\Delta}{\xi-\alpha}$. A partir de ello podemos enunciar el siguiente lema.

Lema 1.8 Sean $q^*(p)$ y $G(q^*(p))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor p del coste de compra del modelo considerado. Entonces, en un punto $p = p_o$ para el que $q^*(p_o) = q_o^*$ y $u_o = u(p_o)$, se tiene:

$$(i) \left. \frac{dq^*(p)}{dp} \right|_{p=p_o} = \frac{-q_o^*(1-\alpha)\Delta}{(\xi-\alpha) \left[\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o \right]}$$

$$(ii) \left. \frac{dG(q^*(p))}{dp} \right|_{p=p_o} = -\alpha\lambda (q_o^*)^{1-\alpha}$$

Además, ambas derivadas son continuas en $p = p_o$.

Demostración. Es totalmente similar a la del lema anterior ya que, por ser $\frac{du}{dp} = -\frac{du}{ds}$ y $\frac{\partial F_2(p,q)}{\partial p} = -\frac{\partial F_2(s,q)}{\partial s}$, se tiene que $\frac{dq^*(p)}{dp} = -\frac{dq^*(s)}{ds}$ y $\frac{dG(q^*(p))}{dp} = -\frac{dG(q^*(s))}{ds}$. ■

El siguiente resultado analiza el comportamiento del tamaño óptimo del lote q^* y del beneficio óptimo $G(q^*)$ con respecto al parámetro de escala de la tasa de demanda λ , teniendo en cuenta que $\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{d\xi}{d\lambda} = 0$, $\frac{d\Delta}{d\lambda} = \Delta \frac{d \ln(\Delta)}{d\lambda} = \frac{\gamma_1 \Delta}{\lambda}$, $\frac{du}{d\lambda} = \frac{(1-\alpha)(s-p)\gamma_1 \Delta}{(\xi-\alpha)\lambda} = \frac{\gamma_1 u}{\lambda}$ y $\frac{dv}{d\lambda} = \frac{\alpha K \gamma_1 \Delta}{(\xi-\alpha)\lambda} = \frac{\gamma_1 v}{\lambda}$.

Lema 1.9 Sean $q^*(\lambda)$ y $G(q^*(\lambda))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor λ del parámetro de escala de la demanda. Entonces, en un punto $\lambda = \lambda_o$ para el que $q^*(\lambda_o) = q_o^*$, $\Delta_o = \Delta(\lambda_o)$, $u_o = u(\lambda_o)$ y $v_o = v(\lambda_o)$, se tiene:

$$(i) \left. \frac{dq^*(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_o} = \frac{\gamma_1 (q_o^*)^\xi}{\lambda_o \left[\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o \right]}$$

$$(ii) \left. \frac{dG(q^*(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_o} = \frac{\alpha}{(q_o^*)^\alpha} \left[\frac{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)q_o^* - \gamma_2 K}{\xi - \alpha} \right]$$

Además, ambas derivadas son continuas en $\lambda = \lambda_o$.

Demostración. Si consideramos el parámetro λ como una variable y denotamos por λ_o al valor actual de λ , utilizando el mismo razonamiento que en el Lema 1.5 con la

función $F_1(\lambda, q) = q^\xi - uq - v$, mediante derivación implícita, se tiene que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dq^*(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_o} &= - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}(\lambda_o, q_o^*)}{\frac{\partial F_1}{\partial q}(\lambda_o, q_o^*)} = \frac{q_o^* \left. \frac{du}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_o} + \left. \frac{dv}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_o}}{\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o} = \frac{\frac{\gamma_1}{\lambda_o} (u_o q_o^* + v_o)}{\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o} \\ &= \frac{\gamma_1 (q_o^*)^\xi}{\lambda_o \left[\xi (q_o^*)^{\xi-1} - u_o \right]} \end{aligned}$$

Del mismo modo, para $G(q^*)$, utilizando el mismo razonamiento que en el Lema 1.5 con la función $F_2(\lambda, q) = \alpha \lambda (s - p) q^{1-\alpha} - \alpha \lambda K q^{-\alpha} - \frac{\alpha \lambda}{\Delta} q^{\xi-\alpha}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dG(q^*(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_o} &= \frac{\partial F_2(\lambda_o, q_o^*)}{\partial \lambda} = \alpha (s-p) (q_o^*)^{1-\alpha} - \alpha K (q_o^*)^{-\alpha} - \frac{\alpha}{\Delta_o} (q_o^*)^{\xi-\alpha} + \lambda \alpha (q_o^*)^{\xi-\alpha} \left. \frac{d\Delta}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_o} \frac{1}{\Delta_o^2} \\ &= \alpha (s-p) (q_o^*)^{1-\alpha} - \alpha K (q_o^*)^{-\alpha} - \frac{\alpha}{\Delta_o} (q_o^*)^{\xi-\alpha} + \frac{\alpha (q_o^*)^{\xi-\alpha} \gamma_1}{\Delta_o} \\ &= \alpha (s-p) (q_o^*)^{1-\alpha} - \alpha K (q_o^*)^{-\alpha} + (\gamma_1 - 1) \frac{\alpha}{\Delta_o} (q_o^*)^{\xi-\alpha} \\ &= \frac{\alpha}{\Delta_o (q_o^*)^\alpha} [(\gamma_1 - 1) (q_o^*)^\xi + (s-p) \Delta_o q_o^* - K \Delta_o] \\ &= \frac{\alpha}{\Delta_o (q_o^*)^\alpha} [(\gamma_1 - 1) u_o q_o^* + (s-p) \Delta_o q_o^* + (\gamma_1 - 1) v_o - K \Delta_o] \\ &= \frac{\alpha}{(q_o^*)^\alpha} \left[\frac{(\gamma_1 - 1) (1-\alpha) (s-p) + (\xi - \alpha) (s-p)}{\xi - \alpha} q_o^* + \frac{(\gamma_1 - 1) \alpha K}{\xi - \alpha} - K \right] \\ &= \frac{\alpha}{(q_o^*)^\alpha} \left[\frac{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1) (s-p) q_o^* - \gamma_2 K}{\xi - \alpha} \right] \end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar. ■

A partir de las derivadas obtenidas en los cinco lemas anteriores, el siguiente corolario analiza la variación del tamaño óptimo del lote q^* con respecto a los parámetros K , h , s , p y λ .

Corolario 1.10 *Sea q^* el tamaño óptimo del lote para el modelo considerado. Entonces, manteniendo fijos el resto de los parámetros del sistema de inventario, el tamaño óptimo del lote q^* verifica que:*

- (a) *crece con el parámetro K de coste de pedido.*
- (b) *decrece cuando el parámetro h de escala del coste de almacenamiento crece.*
- (c) *crece con el precio unitario de venta s si $\beta > 0$, y no depende de s si $\beta = 0$.*

(d) decrece cuando el precio unitario de adquisición p crece si $\beta > 0$, y no depende de p si $\beta = 0$.

(e) crece con el parámetro λ de escala de la tasa de demanda.

Demostración.

(a) Se sigue del Lema 1.5, teniendo además en cuenta que, como se indica en su demostración, $P'(q^*) = \xi(q^*)^{\xi-1} - u > 0$ y, por tanto, $\left. \frac{dq^*(K)}{dK} \right|_{K=K_o} > 0$ para cualquier K_o .

(b) Del mismo modo que en (a), por el Lema 1.6, se tiene que $\left. \frac{dq^*(h)}{dh} \right|_{h=h_o} < 0$ para cualquier h_o .

(c) Si $\beta = 0$, es decir, $\alpha = 1$, utilizando (1.15), se tiene que $q^* = v^{\frac{1}{\xi}}$ y el tamaño óptimo del lote no depende de s porque v y ξ no dependen de s . En cambio, si $\beta > 0$, utilizando el Lema 1.7, se tiene que $\left. \frac{dq^*(s)}{ds} \right|_{s=s_o} > 0$ para cualquier s_o y, por tanto, q^* crece con s .

(d) Se demuestra igual que en el apartado anterior teniendo en cuenta que ahora, si $\beta > 0$, utilizando el Lema 1.8, se tiene que $\left. \frac{dq^*(p)}{dp} \right|_{p=p_o} < 0$ para cualquier p_o .

(e) Se sigue del Lema 1.9, observando que $\left. \frac{dq^*(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_o} > 0$ para cualquier λ_o .

Del mismo modo, el siguiente corolario analiza la variación del beneficio máximo $G(q^*)$ con respecto a los parámetros K , h , s , p y λ .

Corolario 1.11 *Sea q^* el tamaño óptimo del lote para el modelo considerado. Entonces, manteniendo fijos el resto de los parámetros del sistema de inventario, el beneficio máximo por unidad de tiempo $G(q^*)$ verifica que:*

(a) decrece cuando el parámetro K de coste de pedido crece.

(b) decrece cuando el parámetro h de escala del coste de almacenamiento crece.

(c) crece con el precio unitario de venta s .

(d) decrece cuando el precio unitario de adquisición p crece.

(e) crece con el parámetro λ de escala para la tasa de demanda si $s > p$ y además

$$q^* > \frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)}. \text{ En particular, } G(q^*) \text{ crece con } \lambda \text{ si el inventario es rentable.}$$

(f) decrece cuando el parámetro λ de escala para la tasa de demanda crece si $s = p$,

$$\text{o si } s > p \text{ y } q^* < \frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)}.$$

Demostración. Los cuatro primeros apartados se deducen directamente de los lemas 1.5 a 1.8, teniendo en cuenta que $\left. \frac{dG(q^*(K))}{dK} \right|_{K=K_o} < 0$, $\left. \frac{dq^*(h)}{dh} \right|_{h=h_o} < 0$, $\left. \frac{dq^*(s)}{ds} \right|_{s=s_o} > 0$ y $\left. \frac{dq^*(p)}{dp} \right|_{p=p_o} < 0$ para cualesquiera valores K_o , h_o , s_o y p_o . Para el apartado (e) basta tener en cuenta que, si $s > p$ y $q^*(\lambda_o) = q_o^* > \frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)}$, por el Lema 1.9, se tiene que $\left. \frac{dG(q^*(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_o} > 0$ para cualquier λ_o . En particular, si el inventario es rentable se verifica que $s > p$ y, además, aplicando la expresión (1.16), se tiene que $q^* > \frac{\xi K}{(\xi-1)(s-p)} > \frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)}$. Por lo tanto $G(q^*)$ crece con λ . Finalmente, para el apartado (f), si $s = p$ o $s > p$ con $q^*(\lambda_o) = q_o^* < \frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)}$, utilizando de nuevo el Lema 1.9, se tiene que $\left. \frac{dG(q^*(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_o} < 0$.

Nota. Es importante observar que, si $s > p$, la condición $q^* > \frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)}$ es equivalente a:

$$\begin{aligned} q^* > \frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)} &\Leftrightarrow P \left(\frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)} \right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)} \right]^\xi < \frac{\gamma_2 K u}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)} + v \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)} \right]^\xi < \Delta K \left[\frac{\gamma_2(1-\alpha)}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(\xi - \alpha)} + \frac{\alpha}{\xi - \alpha} \right] \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)} \right]^\xi < \frac{\Delta K}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} \\ &\Leftrightarrow \Delta > \left(\frac{\gamma_2}{s-p} \right) \left[\frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)} \right]^{\xi-1} \\ &\Leftrightarrow (\alpha\lambda)^{\gamma_1} > \left[\frac{h\gamma_1\gamma_2 B \left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1 \right)}{s-p} \right] \left[\frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)} \right]^{\xi-1} \\ &\Leftrightarrow \lambda > \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left[\frac{h\gamma_1\gamma_2 B \left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1 \right)}{s-p} \right]^{\frac{1}{\gamma_1}} \left[\frac{\gamma_2 K}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(s-p)} \right]^{\frac{\xi-1}{\gamma_1}} \\ &\Leftrightarrow \lambda > \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left[h\gamma_1 B \left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{\gamma_1}} \left(\frac{\gamma_2}{s-p} \right)^{\frac{\xi}{\gamma_1}} \left[\frac{K}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} \right]^{\frac{\xi-1}{\gamma_1}} \\ &\Leftrightarrow \lambda > \lambda_1 \end{aligned}$$

siendo

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left[h\gamma_1 B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{\gamma_2}{s-p}\right)^\xi \left(\frac{K}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}\right)^{\xi-1} \right]^{\frac{1}{\gamma_1}}$$

Por lo tanto, el beneficio máximo por unidad de tiempo $G(q^*)$ es mínimo para $\lambda = \lambda_1$, es decir, λ_1 es el valor más desfavorable para el parámetro de escala λ de la tasa de demanda si todos los demás parámetros permanecen fijos. Para el modelo EOQ básico con $\alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$ este valor es $\lambda_1 = \frac{hK}{2(s-p)^2}$, mientras que la condición de rentabilidad dada por el Teorema 1.3 es $\lambda > \frac{2hK}{(s-p)^2} = 4\lambda_1$.

Aunque respecto a los tres parámetros de elasticidad β , γ_1 y γ_2 no hemos obtenido resultados tan generales en cuanto al crecimiento o decrecimiento del tamaño óptimo del lote y del beneficio máximo como para los parámetros K , h , s , p y λ que acabamos de exponer, a continuación calculamos las derivadas de q^* y $G(q^*)$ respecto β , γ_1 y γ_2 ya que son de utilidad en los casos prácticos asociados a sistemas concretos. Más adelante usaremos tales derivadas en algunos ejemplos.

Para facilitar los cálculos antepondremos algunas operaciones auxiliares como

$$\ln(\Delta) = \gamma_1 \ln \lambda + \gamma_1 \ln \alpha - \ln h - \ln \gamma_1 - \ln \left[B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) \right]$$

y tendremos en cuenta que

$$\frac{\partial B(a, b)}{\partial a} = \int_0^1 z^{a-1} (1-z)^{b-1} \ln z \, dz = B(a, b) [\varphi(a) - \varphi(a+b)]$$

$$\frac{\partial B(a, b)}{\partial b} = \int_0^1 z^{a-1} (1-z)^{b-1} \ln(1-z) \, dz = B(a, b) [\varphi(b) - \varphi(a+b)]$$

siendo $\varphi(x)$ la función digamma, que es creciente para $x \geq 1$. Esto es así porque $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ y, por tanto,

$$\ln [B(a, b)] = \ln [\Gamma(a)] + \ln [\Gamma(b)] - \ln [\Gamma(a+b)]$$

siendo $\Gamma(x)$ la conocida función gamma. Por lo tanto, derivando con respecto a a , tenemos

$$\frac{\frac{\partial B(a, b)}{\partial a}}{B(a, b)} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(a+b)}{\Gamma(a+b)} = \varphi(a) - \varphi(a+b)$$

Comenzamos esta parte con el análisis respecto al parámetro β , para el cual se tiene $\frac{d\alpha}{d\beta} = -1$, $\frac{d\xi}{d\beta} = -\gamma_1$ y

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta}{d\beta} &= -\frac{d\Delta}{d\alpha} = -\Delta \frac{d \ln \Delta}{d\alpha} = -\Delta \left\{ \frac{\gamma_1}{\alpha} + \frac{\gamma_2}{\alpha^2} \left[\varphi \left(\frac{\gamma_2}{\alpha} + 1 \right) - \varphi \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1 \right) \right] \right\} \\ &= -\frac{\Delta}{\alpha} \left[\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\varphi \left(\frac{\gamma_2}{\alpha} + 1 \right) - \varphi \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1 \right)}{\alpha} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\beta} &= -\frac{du}{d\alpha} = -u \frac{d \ln u}{d\alpha} = -u \frac{d [\ln(1-\alpha) + \ln(s-p) + \ln \Delta - \ln(\xi-\alpha)]}{d\alpha} \\ &= -u \left[\frac{-1}{1-\alpha} + \frac{\frac{d\Delta}{d\alpha}}{\Delta} - \frac{\gamma_1-1}{\xi-\alpha} \right] \\ &= -u \left[-\frac{\gamma_1+\gamma_2-1}{(1-\alpha)(\xi-\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\varphi \left(\frac{\gamma_2}{\alpha} + 1 \right) - \varphi \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1 \right)}{\alpha} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\beta} &= -\frac{dv}{d\alpha} = -v \frac{d \ln v}{d\alpha} = -v \frac{d [\ln \alpha + \ln K + \ln \Delta - \ln(\xi-\alpha)]}{d\alpha} \\ &= -v \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{\frac{d\Delta}{d\alpha}}{\Delta} - \frac{\gamma_1-1}{\xi-\alpha} \right] \\ &= -v \left[\frac{\gamma_2}{\alpha(\xi-\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\varphi \left(\frac{\gamma_2}{\alpha} + 1 \right) - \varphi \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1 \right)}{\alpha} \right) \right]\end{aligned}$$

A partir de estas derivadas podemos obtener las derivadas de $q^*(\beta)$ y $G(q^*(\beta))$ con respecto a β , tal y como se hace en el siguiente lema.

Lema 1.12 Sean $q^*(\beta)$ y $G(q^*(\beta))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor dado $\beta > 0$ del parámetro de elasticidad de la demanda respecto al nivel de stock. Entonces, en un punto $\beta = \beta_o$ para el que $q^*(\beta_o) = q_o^*$, $\alpha_o = 1 - \beta_o$, $\xi_o = \alpha_o \gamma_1 + \gamma_2$, $\Delta_o = \Delta(\beta_o)$, $u_o = u(\beta_o)$ y $v_o = v(\beta_o)$ se tiene:

$$\left. \frac{dq^*(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_o} = \frac{\left[\gamma_1 \ln q_o^* - \frac{\gamma_1}{\alpha_o} + \frac{\gamma_1+\gamma_2-1}{(1-\alpha_o)(\xi_o-\alpha_o)} - \gamma_2 \frac{\varphi \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_o} + 1 \right) - \varphi \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha_o} + 1 \right)}{\alpha_o^2} \right] (q_o^*)^{\xi_o} - \frac{v_o}{\alpha_o(1-\alpha_o)}}{\xi_o (q_o^*)^{\xi_o-1} - u_o}$$

y

$$\begin{aligned}\left. \frac{dG(q^*(\beta))}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_o} &= G(q_o^*) \left[\ln q_o^* - \frac{1}{\alpha_o} \right] \\ &\quad + \frac{\lambda \alpha_o (q_o^*)^{\xi_o-\alpha_o}}{\Delta_o} \left[\gamma_1 \ln q_o^* - \frac{\gamma_1}{\alpha_o} - \gamma_2 \frac{\varphi \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_o} + 1 \right) - \varphi \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha_o} + 1 \right)}{\alpha_o^2} \right]\end{aligned}$$

siendo $\varphi(x)$ la conocida función digamma.

Además, ambas derivadas son continuas en $\beta = \beta_o$.

Demostración. Si consideramos el parámetro β como una variable y utilizamos los mismos razonamientos que en los lemas 1.5 a 1.9 con las funciones $F_1(\alpha, q) = q^\xi - uq - v$ para el caso de $q^*(\beta)$ y $F_2(\alpha, q) = \alpha\lambda(s-p)q^{1-\alpha} - \alpha\lambda Kq^{-\alpha} - \frac{\alpha\lambda}{\Delta}q^{\xi-\alpha}$ para el caso de $G(q^*(\beta))$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dq^*(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_o} &= - \left. \frac{dq^*(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_o} = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}(\alpha_o, q_o^*)}{\frac{\partial F_1}{\partial q}(\alpha_o, q_o^*)} = \frac{\gamma_1 (q_o^*)^{\xi_o} \ln q_o^* - q_o^* \frac{du}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_o} - \frac{dv}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_o}}{\xi_o (q_o^*)^{\xi_o-1} - u_o} \\ &= \frac{\left[\gamma_1 \ln q_o^* - \frac{1}{\alpha_o} \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\varphi\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_o} + 1\right) - \varphi\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha_o} + 1\right)}{\alpha_o} \right) \right] (q_o^*)^{\xi_o} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}{(1-\alpha_o)(\xi_o - \alpha_o)} u_o q_o^* - \frac{\gamma_2}{\alpha_o(\xi_o - \alpha_o)} v_o}{\xi_o (q_o^*)^{\xi_o-1} - u_o} \\ &= \frac{\left[\gamma_1 \ln q_o^* - \frac{\gamma_1}{\alpha_o} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}{(1-\alpha_o)(\xi_o - \alpha_o)} - \gamma_2 \frac{\varphi\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_o} + 1\right) - \varphi\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha_o} + 1\right)}{\alpha_o^2} \right] (q_o^*)^{\xi_o} - \frac{v_o}{\alpha_o(1-\alpha_o)}}{\xi_o (q_o^*)^{\xi_o-1} - u_o} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left. \frac{dG(q^*(\beta))}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_o} &= - \left. \frac{dG(q^*(\alpha))}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_o} = - \frac{\partial F_2(\alpha_o, q_o^*)}{\partial \alpha} = - \left. \frac{d[\lambda\alpha (q_o^*)^{-\alpha}]}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_o} \left[(s-p)q_o^* - K - \frac{(q_o^*)^{\xi_o}}{\Delta_o} \right] \\ &\quad + \lambda\alpha_o (q_o^*)^{-\alpha_o} \left. \frac{d\left[\frac{(q_o^*)^\xi}{\Delta}\right]}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_o} \\ &= \lambda\alpha_o (q_o^*)^{-\alpha_o} \left[(s-p)q_o^* - K - \frac{(q_o^*)^{\xi_o}}{\Delta_o} \right] \left[\ln q_o^* - \frac{1}{\alpha_o} \right] + \frac{\lambda\alpha_o (q_o^*)^{\xi_o - \alpha_o}}{\Delta_o} \left. \frac{d[\xi \ln q_o^* - \ln \Delta]}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_o} \\ &= G(q_o^*) \left[\ln q_o^* - \frac{1}{\alpha_o} \right] \\ &\quad + \frac{\lambda\alpha_o (q_o^*)^{\xi_o - \alpha_o}}{\Delta_o} \left[\gamma_1 \ln q_o^* - \frac{\gamma_1}{\alpha_o} - \gamma_2 \frac{\varphi\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_o} + 1\right) - \varphi\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha_o} + 1\right)}{\alpha_o^2} \right] \end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar. ■

Para hacer los cálculos respecto al parámetro γ_1 , calculamos las derivadas de los parámetros auxiliares con respecto a γ_1 y obtenemos que $\frac{d\alpha}{d\gamma_1} = 0$, $\frac{d\xi}{d\gamma_1} = \alpha$ y

$$\frac{d\Delta}{d\gamma_1} = \Delta \frac{d[\ln \Delta]}{d\gamma_1} = \Delta \left[\ln(\alpha\lambda) - \frac{1}{\gamma_1} - \varphi(\gamma_1) + \varphi\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) \right]$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\gamma_1} &= u \frac{d[\ln u]}{\partial\gamma_1} = u \frac{d[\ln(1-\alpha) + \ln(s-p) + \ln\Delta - \ln(\xi-\alpha)]}{d\gamma_1} \\ &= u \left[\frac{\frac{d\Delta}{d\gamma_1}}{\Delta} - \frac{\alpha}{\xi-\alpha} \right] = u \left[\ln(\alpha\lambda) - \frac{1}{\gamma_1} - \varphi(\gamma_1) + \varphi\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) - \frac{\alpha}{\xi-\alpha} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\gamma_1} &= v \frac{d[\ln v]}{d\gamma_1} = v \frac{d[\ln\alpha + \ln K + \ln\Delta - \ln(\xi-\alpha)]}{d\gamma_1} \\ &= v \left[\frac{\frac{d\Delta}{d\gamma_1}}{\Delta} - \frac{\alpha}{\xi-\alpha} \right] = v \left[\ln(\alpha\lambda) - \frac{1}{\gamma_1} - \varphi(\gamma_1) + \varphi\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) - \frac{\alpha}{\xi-\alpha} \right]\end{aligned}$$

Podemos enunciar entonces el siguiente resultado.

Lema 1.13 Sean $q^*(\gamma_1)$ y $G(q^*(\gamma_1))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor γ_1 del parámetro de elasticidad del coste de almacenamiento respecto al tiempo. Entonces, en un punto $\gamma_1 = \gamma_{1o}$ para el que $q^*(\gamma_{1o}) = q_o^*$, $\xi_o = \alpha\gamma_{1o} + \gamma_2$, $\Delta_o = \Delta(\gamma_{1o})$, $u_o = u(\gamma_{1o})$ y $v_o = v(\gamma_{1o})$ se tiene:

$$\left. \frac{dq^*(\gamma_1)}{d\gamma_1} \right|_{\gamma_1=\gamma_{1o}} = \frac{- \left[\ln\left(\frac{(q_o^*)^\alpha}{\alpha\lambda}\right) + \frac{1}{\gamma_{1o}} + \frac{\alpha}{\xi_o-\alpha} + \varphi(\gamma_{1o}) - \varphi\left(\gamma_{1o} + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) \right] (q_o^*)^{\xi_o}}{\xi_o (q_o^*)^{\xi_o-1} - u_o}$$

y

$$\left. \frac{dG(q^*(\gamma_1))}{d\gamma_1} \right|_{\gamma_1=\gamma_{1o}} = \frac{-\alpha\lambda \left[\ln\left(\frac{(q_o^*)^\alpha}{\alpha\lambda}\right) + \frac{1}{\gamma_{1o}} + \varphi(\gamma_{1o}) - \varphi\left(\gamma_{1o} + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) \right] (q_o^*)^{\xi_o-\alpha}}{\Delta_o}$$

siendo $\varphi(x)$ la conocida función digamma.

Además, ambas derivadas son continuas en $\gamma_1 = \gamma_{1o}$.

Demostración. Si consideramos el parámetro γ_1 como una variable y denotamos por γ_{1o} su valor actual, utilizando los mismos razonamientos que en los lemas 1.5 a 1.9 con las funciones $F_1(\gamma_1, q) = q^\xi - uq - v$ para el caso de $q^*(\gamma_1)$ y $F_2(\gamma_1, q) = \alpha\lambda(s-p)q^{1-\alpha} - \alpha\lambda Kq^{-\alpha} - \frac{\alpha\lambda}{\Delta}q^{\xi-\alpha}$ para el caso de $G(q^*(\gamma_1))$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\left. \frac{dq^*(\gamma_1)}{d\gamma_1} \right|_{\gamma_1=\gamma_{1o}} &= - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_1}(\gamma_{1o}, q_o^*)}{\frac{\partial F_1}{\partial q}(\gamma_{1o}, q_o^*)} = - \frac{\alpha (q_o^*)^{\xi_o} \ln q_o^* - q_o^* \left. \frac{du}{d\gamma_1} \right|_{\gamma_1=\gamma_{1o}} - \left. \frac{dv}{d\gamma_1} \right|_{\gamma_1=\gamma_{1o}}}{\xi_o (q_o^*)^{\xi_o-1} - u_o} \\ &= - \frac{\alpha (q_o^*)^{\xi_o} \ln q_o^* - (u_o q_o^* + v_o) \left[\ln(\alpha\lambda) - \frac{1}{\gamma_{1o}} - \frac{\alpha}{\xi_o-\alpha} - \varphi(\gamma_{1o}) + \varphi\left(\gamma_{1o} + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) \right]}{\xi_o (q_o^*)^{\xi_o-1} - u_o} \\ &= - \frac{\left[\ln\left(\frac{(q_o^*)^\alpha}{\alpha\lambda}\right) + \frac{1}{\gamma_{1o}} + \frac{\alpha}{\xi_o-\alpha} + \varphi(\gamma_{1o}) - \varphi\left(\gamma_{1o} + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) \right] (q_o^*)^{\xi_o}}{\xi_o (q_o^*)^{\xi_o-1} - u_o}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dG(q^*(\gamma_1))}{d\gamma_1} \right|_{\gamma_1=\gamma_{1o}} &= \frac{\partial F_2(\gamma_{1o}, q_o^*)}{\partial \gamma_1} = -\alpha \lambda \frac{d \left[\frac{(q_o^*)^{\xi-\alpha}}{\Delta} \right]}{d\gamma_1} \bigg|_{\gamma_1=\gamma_{1o}} = -\frac{\alpha \lambda (q_o^*)^{\xi_o-\alpha}}{\Delta_o} \frac{d [(\xi-\alpha) \ln q_o^* - \ln \Delta]}{d\gamma_1} \bigg|_{\gamma_1=\gamma_{1o}} \\
&= \frac{-\alpha \lambda \left[\alpha \ln q_o^* - \ln(\alpha \lambda) + \frac{1}{\gamma_{1o}} + \varphi(\gamma_{1o}) - \varphi\left(\gamma_{1o} + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) \right] (q_o^*)^{\xi_o-\alpha}}{\Delta_o} \\
&= \frac{-\alpha \lambda \left[\ln \left(\frac{(q_o^*)^\alpha}{\alpha \lambda} \right) + \frac{1}{\gamma_{1o}} + \varphi(\gamma_{1o}) - \varphi\left(\gamma_{1o} + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) \right] (q_o^*)^{\xi_o-\alpha}}{\Delta_o}
\end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar. ■

Por último, para hacer los cálculos respecto al parámetro γ_2 , empezamos calculando las derivadas de los parámetros auxiliares con respecto a γ_2 , y obtenemos que

$$\frac{d\alpha}{d\gamma_2} = 0, \quad \frac{d\xi}{d\gamma_2} = 1 \text{ y}$$

$$\frac{d\Delta}{d\gamma_2} = \Delta \frac{d[\ln \Delta]}{d\gamma_2} = -\Delta \frac{\varphi\left(\frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) - \varphi\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right)}{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\gamma_2} &= u \frac{d[\ln u]}{d\gamma_2} = u \frac{d[\ln(1-\alpha) + \ln(s-p) + \ln \Delta - \ln(\xi-\alpha)]}{d\gamma_2} \\
&= u \left[\frac{\frac{d\Delta}{d\gamma_2}}{\Delta} - \frac{1}{\xi-\alpha} \right] = u \left[-\frac{\varphi\left(\frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) - \varphi\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right)}{\alpha} - \frac{1}{\xi-\alpha} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{d\gamma_2} &= v \frac{d[\ln v]}{d\gamma_2} = v \frac{d[\ln \alpha + \ln K + \ln \Delta - \ln(\xi-\alpha)]}{d\gamma_2} \\
&= v \left[\frac{\frac{d\Delta}{d\gamma_2}}{\Delta} - \frac{1}{\xi-\alpha} \right] = v \left[-\frac{\varphi\left(\frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) - \varphi\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right)}{\alpha} - \frac{1}{\xi-\alpha} \right]
\end{aligned}$$

Podemos enunciar entonces el siguiente resultado.

Lema 1.14 Sean $q^*(\gamma_2)$ y $G(q^*(\gamma_2))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor γ_2 del parámetro de elasticidad del coste de almacenamiento respecto al nivel de stock. Entonces, en un punto $\gamma_2 = \gamma_{2o}$ para el que $q^*(\gamma_{2o}) = q_o^*$, $\xi_o = \alpha \gamma_1 + \gamma_{2o}$, $\Delta_o = \Delta(\gamma_{2o})$, $u_o = u(\gamma_{2o})$ y $v_o = v(\gamma_{2o})$ se tiene:

$$\left. \frac{dq^*(\gamma_2)}{d\gamma_2} \right|_{\gamma_2=\gamma_{2o}} = \frac{- \left[\ln q_o^* + \frac{\varphi\left(\frac{\gamma_{2o}}{\alpha} + 1\right) - \varphi\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_{2o}}{\alpha} + 1\right)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha \gamma_1 + \gamma_{2o} - \alpha} \right] (q_o^*)^{\xi_o}}{\xi_o (q_o^*)^{\xi_o-1} - u_o}$$

y

$$\left. \frac{dG(q^*(\gamma_2))}{d\gamma_2} \right|_{\gamma_2=\gamma_{2o}} = \frac{-\alpha\lambda \left[\ln q_o^* + \frac{\varphi(\frac{\gamma_{2o}}{\alpha}+1) - \varphi(\gamma_1 + \frac{\gamma_{2o}}{\alpha} + 1)}{\alpha} \right] (q_o^*)^{\xi_o - \alpha}}{\Delta_o}$$

siendo $\varphi(x)$ la conocida función digamma.

Además, ambas derivadas son continuas en $\gamma_2 = \gamma_{2o}$.

Demostración. Si consideramos el parámetro γ_2 como una variable y denotamos por γ_{2o} al valor actual de γ_2 , utilizando el mismo razonamiento que en los lemas 1.5 a 1.9 con las funciones $F_1(\gamma_2, q) = q^\xi - uq - v$ para el caso de q^* y $F_2(\gamma_2, q) = \alpha\lambda(s-p)q^{1-\alpha} - \alpha\lambda Kq^{-\alpha} - \frac{\alpha\lambda}{\Delta}q^{\xi-\alpha}$ para el caso de $G(q^*)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dq^*(\gamma_2)}{d\gamma_2} \right|_{\gamma_2=\gamma_{2o}} &= - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \gamma_2}(\gamma_{2o}, q_o^*)}{\frac{\partial F_1}{\partial q}(\gamma_{2o}, q_o^*)} = - \frac{(q_o^*)^{\xi_o} \ln q_o^* - q_o^* \left. \frac{du}{d\gamma_2} \right|_{\gamma_2=\gamma_{2o}} - \left. \frac{dv}{d\gamma_2} \right|_{\gamma_2=\gamma_{2o}}}{\xi_o (q_o^*)^{\xi_o - 1} - u_o} \\ &= \frac{- \left[\ln q_o^* + \frac{\varphi(\frac{\gamma_{2o}}{\alpha}+1) - \varphi(\gamma_1 + \frac{\gamma_{2o}}{\alpha} + 1)}{\alpha} + \frac{1}{\xi_o - \alpha} \right] (q_o^*)^{\xi_o}}{\xi_o (q_o^*)^{\xi_o - 1} - u_o} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left. \frac{dG(q^*(\gamma_2))}{d\gamma_2} \right|_{\gamma_2=\gamma_{2o}} &= \frac{\partial F_2(\gamma_{2o}, q_o^*)}{\partial \gamma_2} = -\alpha\lambda \left. \frac{d \left[\frac{(q_o^*)^{\xi-\alpha}}{\Delta} \right]}{d\gamma_2} \right|_{\gamma_2=\gamma_{2o}} \\ &= - \frac{\alpha\lambda (q_o^*)^{\xi_o - \alpha}}{\Delta_o} \left. \frac{d [(\xi - \alpha) \ln q_o^* - \ln \Delta]}{d\gamma_2} \right|_{\gamma_2=\gamma_{2o}} \\ &= \frac{-\alpha\lambda \left[\ln q_o^* + \frac{\varphi(\frac{\gamma_{2o}}{\alpha}+1) - \varphi(\gamma_1 + \frac{\gamma_{2o}}{\alpha} + 1)}{\alpha} \right] (q_o^*)^{\xi_o - \alpha}}{\Delta_o} \end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar. ■

1.5. Casos particulares

En esta sección analizamos algunos casos particulares del modelo expuesto que resultan de especial interés por sus aplicaciones prácticas o por su relevancia en el desarrollo de la teoría de inventarios de tipo determinista. En primer lugar dedicamos

una subsección al caso especial que hemos denominado *modelo de inventario de mínimo coste*, que puede ser obtenido como un caso particular del *modelo de inventario de máximo beneficio* aquí planteado. En la segunda subsección repasaremos unos cuantos modelos previos existentes en la teoría de inventarios que pueden obtenerse también como casos particulares del modelo aquí planteado, y comprobaremos que las soluciones propuestas por sus autores coinciden con las que ahora obtenemos.

1.5.1. El modelo de mínimo coste

Muchos de los modelos estudiados con anterioridad en la literatura de inventarios han sido analizados planteando como objetivo la minimización de los costes del inventario por unidad de tiempo, incluyendo sólo los costes de pedido y los costes de almacenamiento. Por eso resulta de interés encontrar dicha solución de mínimo coste para el modelo que hemos planteado y compararla con la solución de máximo beneficio por unidad de tiempo que hemos obtenido. Esta cuestión es la que abordamos en esta subsección.

Si en nuestro modelo consideramos sólo los costes de pedido y de almacenamiento, es claro que el coste total del inventario por unidad de tiempo, $C(q)$, se obtiene sumando los dos términos negativos de la función $G(q)$ dada por la expresión (1.9). Por tanto se tiene

$$C(q) = \alpha\lambda Kq^{-\alpha} + \frac{\alpha\lambda}{\Delta}q^{\xi-\alpha} = \frac{\alpha\lambda}{\Delta}c(q) \quad (1.19)$$

siendo

$$c(q) = q^{\xi-\alpha} + K\Delta q^{-\alpha} \quad (1.20)$$

Teniendo en cuenta que la solución óptima que minimiza $c(q)$ es la misma que minimiza $C(q)$, podemos decir que el problema de mínimo coste es

$$\text{Minimizar } \{c(q) : q > 0\} \quad (1.21)$$

Es importante tener en cuenta que, si $s = p$, las expresiones (1.10) y (1.20) para $g(q)$ y $c(q)$ coinciden y por tanto ambos problemas son el mismo. Además, si $s > p$ pero $\alpha = 1$ (es decir, la tasa de demanda es constante) entonces $g(q) - c(q) = -(s-p)\Delta$ es una función constante y ambos problemas tienen la misma solución. Sin embargo,

en cualquier otro caso (es decir, $s > p$ y $0 < \alpha < 1$) ambos son diferentes y sus soluciones no son necesariamente iguales.

Ahora bien, la solución del problema (1.21), q_{\min}^* , puede obtenerse suponiendo que $s = p$ en el problema (1.11). En consecuencia, por lo expuesto en la primera parte de la sección 1.3 (página 17), en este caso se tiene $u = 0$ y, por tanto, la solución del problema de mínimo coste está dada por (1.15), es decir,

$$q_{\min}^* = v^{\frac{1}{\xi}} = \left(\frac{\alpha K \Delta}{\xi - \alpha} \right)^{\frac{1}{\xi}}$$

En el caso particular del modelo básico (es decir $\alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$) se obtiene que $\Delta = \frac{\lambda}{hB(1,2)} = \frac{2\lambda}{h}$, $\xi = 2$ y, por tanto, $q_{\min}^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}$, que es la conocida expresión para el tamaño óptimo del lote.

Además, podemos asegurar que $P(q_{\min}^*) = -uq_{\min}^* < 0$. Por tanto, utilizando las propiedades de la función $P(q)$ dadas en la demostración del Teorema 1.2, se tiene que $q_{\min}^* < q^*$, es decir, en el modelo de máximo beneficio el tamaño óptimo del lote es mayor que en el modelo de mínimo coste.

Además, obviamente, se tiene que $G(q^*) > G(q_{\min}^*)$ y $C(q^*) > C(q_{\min}^*)$ porque q_{\min}^* es la solución de mínimo coste y q^* es la solución de máximo beneficio.

Más aún, si T_{\min}^* denota la longitud óptima del ciclo en el problema de mínimo coste, entonces se tiene que $T_{\min}^* = \frac{(q_{\min}^*)^\alpha}{\alpha\lambda} < \frac{(q^*)^\alpha}{\alpha\lambda} = T^*$ y en el problema de máximo beneficio se tiene también una mayor longitud de ciclo que en el problema de mínimo coste.

Si comparamos el coste de almacenamiento por unidad de tiempo en ambos problemas se tiene que

$$\frac{HC(q^*)}{T^*} = \frac{\alpha\lambda}{\Delta}(q^*)^{\xi-\alpha} > \frac{\alpha\lambda}{\Delta}(q_{\min}^*)^{\xi-\alpha} = \frac{HC(q_{\min}^*)}{T_{\min}^*}$$

y ocurre lo contrario para el coste de pedido por unidad de tiempo ya que $\frac{K}{T^*} < \frac{K}{T_{\min}^*}$. Es decir, en el problema de máximo beneficio se tiene un mayor coste de almacenamiento por unidad de tiempo que en el problema de mínimo coste, y ocurre lo contrario con el coste de pedido por unidad de tiempo, porque es menor en el problema de máximo beneficio que en el problema de mínimo coste.

Por tanto, podemos concluir que para el problema de mínimo coste se tiene menor longitud de ciclo, menor tamaño del lote, menor beneficio por unidad de tiempo, menor coste total por unidad de tiempo, menor coste de almacenamiento por unidad de tiempo y mayor coste de pedido por unidad de tiempo que para el problema de máximo beneficio.

1.5.2. Otros modelos de la literatura de inventarios

En esta subsección mostraremos cómo el modelo expuesto admite como casos particulares otros modelos EOQ desarrollados anteriormente en la literatura de inventarios y, además, la solución óptima coincide con la obtenida por sus correspondientes autores con algún cambio de notación.

1. *Modelo EOQ de Harris*. Si en nuestro modelo consideramos $\alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$ obtenemos el modelo EOQ clásico con demanda constante y costes de almacenamiento lineales en el tiempo y la cantidad de producto almacenado. En esta situación se tiene que $\Delta = \frac{2\lambda}{h}$, $\xi = 2$, $u = 0$, $v = \frac{2K\lambda}{h}$ y $P(q) = q^2 - \frac{2K\lambda}{h}$. El tamaño óptimo de pedido es entonces $q^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}$, que coincide con la solución conocida de este modelo. Además, usando (1.16), se tiene que el beneficio óptimo por unidad de tiempo es

$$G(q^*) = \frac{\lambda}{q^*} [(s-p)q^* - 2K] = \lambda(s-p) - \sqrt{2K\lambda h}$$

y podemos observar que el último término en $G(q^*)$ es el mínimo coste en el modelo EOQ básico.

2. *Modelo de Naddor (1982, perishable-goods system)*. Si consideramos $\alpha = \gamma_2 = 1$ y $\gamma_1 > 1$, entonces obtenemos el citado modelo de Naddor con $c_1 = h$, $n = \gamma_1$, $c_3 = K$ y $r = \lambda$ o, equivalentemente, el modelo determinista propuesto en Weiss (1982) con $r = \gamma_1$. En este caso, con la notación de Naddor (1982), se tiene que $\Delta = \frac{r^n}{nc_1 B(n,2)} = \frac{(n+1)r^n}{c_1}$, $\xi = n+1$, $u = 0$, $v = \frac{(n+1)c_3 r^n}{nc_1}$ y $P(q) = q^{n+1} - \frac{(n+1)c_3 r^n}{nc_1}$. Por tanto, la solución es $q^* = \left(\frac{(n+1)c_3 r^n}{nc_1} \right)^{\frac{1}{n+1}}$, que coincide con la solución dada

por ambos autores. Además, el máximo beneficio por unidad de tiempo es

$$G(q^*) = \frac{r}{nq^*} [n(s-p)q^* - c_3(n+1)] = r(s-p) - \left[\left(\frac{n+1}{n} c_3 \right)^n c_1 r \right]^{\frac{1}{n+1}}$$

y podemos observar que el último término es el mínimo coste dado por Naddor.

3. *Modelo de Naddor (1982, expensive-storage system)*. Si consideramos $\alpha = \gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 > 1$, entonces obtenemos el citado modelo con $c_1 = h$, $m = \gamma_2$, $c_3 = K$ y $r = \lambda$. En este caso se tiene que $\Delta = \frac{r}{c_1 B(1, m+1)} = \frac{(m+1)r}{c_1}$, $\xi = m+1$, $u = 0$, $v = \frac{(m+1)c_3 r}{m c_1}$ y $P(q) = q^{m+1} - \frac{(m+1)c_3 r}{m c_1}$. Por tanto, la solución es $q^* = \left(\frac{(m+1)c_3 r}{m c_1} \right)^{\frac{1}{m+1}}$, que coincide con la solución dada por Naddor. Además, el máximo beneficio por unidad de tiempo es

$$G(q^*) = \frac{r}{mq^*} [m(s-p)q^* - c_3(m+1)] = r(s-p) - \left[\left(\frac{(m+1)c_3 r}{m} \right)^m c_1 \right]^{\frac{1}{m+1}}$$

y el último sumando también es el mínimo coste dado por este autor.

4. *Modelo de Naddor (1982, general system)*. Si consideramos $\alpha = 1$, $\gamma_1 > 1$ y $\gamma_2 > 1$, entonces obtenemos el citado modelo con $a = \gamma_1 B(\gamma_1, \gamma_2 + 1)$, $c_1 = h$, $n = \gamma_1$, $m = \gamma_2$, $c_3 = K$ y $r = \lambda$. En este caso se tiene que $\Delta = \frac{r^n}{c_1 a}$, $\xi = m+n$, $u = 0$, $v = \frac{c_3 r^n}{a c_1 (m+n-1)}$ y $P(q) = q^{m+n} - \frac{c_3 r^n}{a c_1 (m+n-1)}$. Por tanto, la solución es $q^* = \left(\frac{c_3 r^n}{a c_1 (m+n-1)} \right)^{\frac{1}{m+n}}$ que coincide con la solución dada por Naddor. Además, el máximo beneficio por unidad de tiempo es

$$\begin{aligned} G(q^*) &= \frac{r}{(n+m-1)q^*} [(n+m-1)(s-p)q^* - c_3(n+m)] \\ &= r(s-p) - (m+n) \left[a c_1 r^m \left(\frac{c_3}{m+n-1} \right)^{m+n-1} \right]^{\frac{1}{m+n}} \end{aligned}$$

y de nuevo el último término coincide con el mínimo coste dado por dicho autor.

5. *Modelo de Goh (1992, basic case)*. Si consideramos $s = p$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ en nuestro modelo se obtiene el modelo citado con $k = K$. En este caso se tiene que $B(1, \frac{1}{\alpha} + 1) = \frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{1-\beta}{2-\beta}$, $\Delta = \frac{\lambda(2-\beta)}{h}$, $\xi = 2 - \beta$, $u = 0$, $v = \frac{k\lambda(1-\beta)(2-\beta)}{h}$ y $P(q) = q^{2-\beta} - \frac{k\lambda(1-\beta)(2-\beta)}{h}$. Por tanto, la solución es $q^* = \left(\frac{k\lambda(1-\beta)(2-\beta)}{h} \right)^{\frac{1}{2-\beta}}$

que coincide con la solución dada por Goh. Además, el máximo beneficio por unidad de tiempo es

$$G(q^*) = (1 - \beta)\lambda(q^*)^{-1+\beta} [-(2 - \beta)k] = -hq^*$$

que coincide con la solución dada por dicho autor para el mínimo coste.

6. *Modelo de Goh (1994, modelo A)*. Si consideramos $s = p$ y $\gamma_2 = 1$ en nuestro modelo se obtiene el modelo citado con $n = \gamma_1$ y $k = K$. En este caso se tiene que $\Delta = \frac{(\alpha\lambda)^n}{hnB(n, \frac{1}{\alpha}+1)}$, $\xi = \alpha n + 1$, $u = 0$, $v = \frac{\alpha k(\alpha\lambda)^n}{h(\alpha n+1-\alpha)nB(n, \frac{1}{\alpha}+1)} = \frac{k\lambda^n \alpha^{n+2}}{h(\alpha n+1-\alpha)B(n+1, \frac{1}{\alpha})}$ y $P(q) = q^{\alpha n+1} - \frac{k\lambda^n \alpha^{n+2}}{h(\alpha n+1-\alpha)B(n+1, \frac{1}{\alpha})}$. Por tanto, la solución es

$$(q^*)^{\alpha n+1} = \frac{k\lambda^n \alpha^{n+2}}{h(\alpha n + 1 - \alpha)B(n + 1, \frac{1}{\alpha})}$$

que coincide con la solución de Goh para su Modelo A. Además

$$G(q^*) = \frac{\alpha\lambda}{\alpha n + 1 - \alpha} (q^*)^{-\alpha} [-k(\alpha n + 1)] = -\frac{\alpha\lambda k(\alpha n + 1)}{\alpha n + 1 - \alpha} (q^*)^{-\alpha}$$

que también coincide con el mínimo coste dado por dicho autor.

7. *Modelo de Goh (1994, modelo B)*. Si consideramos $s = p$ y $\gamma_1 = 1$ en nuestro modelo se obtiene el modelo citado con $n = \gamma_2$ y $k = K$. En este caso se tiene que $\Delta = \frac{\alpha\lambda}{hB(1, \frac{n}{\alpha}+1)} = \frac{\lambda(\alpha+n)}{h}$, $\xi = n + \alpha$, $u = 0$, $v = \frac{K\lambda\alpha(n+\alpha)}{hn}$ y $P(q) = q^{n+\alpha} - \frac{K\lambda\alpha(n+\alpha)}{hn}$. Por tanto, la solución es $q^* = \left[\frac{K\lambda\alpha(n+\alpha)}{hn} \right]^{\frac{1}{n+\alpha}}$. Esta solución no coincide con la proporcionada por Goh $\left(q^* = \left[\frac{k\lambda\alpha^2(n+\alpha)}{hn} \right]^{\frac{1}{n+\alpha}} \right)$, pero hemos comprobado que hay un error en esta fórmula con el exponente de α (es α , no α^2). Además

$$G(q^*) = \frac{\alpha\lambda}{n} (q^*)^{-\alpha} [-k(n + \alpha)] = -\frac{\alpha\lambda k(n + \alpha)}{n} (q^*)^{-\alpha} = -h(q^*)^n$$

que tampoco coincide con el mínimo coste dado por dicho autor $\left(\frac{(n+\alpha^2)h}{\alpha(n+\alpha)} (q^*)^n \right)$, pero también hemos comprobado que esta fórmula no es correcta por el error cometido en el valor para q^* .

8. *Modelo de Baker y Urban (1988, un caso particular)*. Si consideramos $\beta > 0$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ en nuestro modelo se obtiene el modelo citado suponiendo que el punto de reorden es igual a cero (es decir, $i_T = 0$) y siendo $\alpha = \lambda$, $c = p$, $C_0 = K$ y $C_h = h$. En este caso, como $B(1, \frac{1}{1-\beta} + 1) = \frac{1-\beta}{2-\beta}$, se tiene que $\Delta = \frac{(1-\beta)\alpha}{C_h \frac{1-\beta}{2-\beta}} = \frac{\alpha(2-\beta)}{C_h}$, $\xi = 2 - \beta$, $u = \frac{\beta(2-\beta)(s-p)\alpha}{C_h}$, $v = \frac{(1-\beta)(2-\beta)C_0\alpha}{C_h}$ y por tanto

$$G(q) = (s - c)(1 - \beta)\alpha q^\beta - C_0(1 - \beta)\alpha q^{-1+\beta} - \frac{C_h(1 - \beta)}{2 - \beta}q$$

que coincide con la función objetivo dada por Baker y Urban si suponemos $i_T = 0$.

9. *Modelo de Pando et al. (2012^a)*. Si consideramos $\gamma_2 = 1$ en nuestro modelo obtenemos el citado modelo con $\gamma = \gamma_1$ y $D = \lambda$. En este caso se tiene que $\Delta = \frac{(\alpha D)^\gamma}{h\gamma B(\gamma, \frac{1}{\alpha} + 1)} = \frac{\alpha^{\gamma+1} D^\gamma}{h\gamma_1 B(\gamma+1, \frac{1}{\alpha})}$, $\xi = \alpha\gamma + 1$, $u = \frac{(1-\alpha)(s-p)\Delta}{\alpha\gamma+1-\alpha}$, $v = \frac{\alpha K \Delta}{\alpha\gamma+1-\alpha}$ y $P(q) = q^{\alpha\gamma+1} - uq - v$. Por tanto, el tamaño óptimo del lote q^* es la solución de la ecuación $q^{\alpha\gamma+1} - uq - v = 0$, tal y como obtuvieron los citados autores. Además, $G(q^*) = \frac{\alpha D}{\alpha\gamma+1-\alpha} \left[\frac{\alpha\gamma(s-p)q^* - K(\alpha\gamma+1)}{(q^*)^\alpha} \right]$, que también coincide con el máximo beneficio por unidad de tiempo obtenido por los citados autores. También la condición de rentabilidad y la regla dada por el Teorema 1.4 coinciden con las allí obtenidas.

10. *Modelo de Pando et al. (2012^b)*. Si consideramos $\gamma_1 = 1$ en nuestro modelo obtenemos el citado modelo con $\gamma = \gamma_2$. En este caso, se tiene que $\Delta = \frac{\alpha\lambda}{hB(1, \frac{\gamma}{\alpha} + 1)} = \frac{\lambda(\gamma+1-\beta)}{h}$, $\xi = 1 - \beta + \gamma$ y, usando $T = \frac{q^{1-\beta}}{\lambda(1-\beta)}$ como variable de decisión, se obtiene que $q = [\lambda(1-\beta)T]^{\frac{1}{1-\beta}}$ y la ecuación $P(q) = 0$ se convierte en

$$[\lambda(1-\beta)T]^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}} - \frac{\beta(s-p)(\gamma+1-\beta)\lambda}{h\gamma} [\lambda(1-\beta)T]^{\frac{1}{1-\beta}} - \frac{(1-\beta)(\gamma+1-\beta)\lambda K}{h\gamma} = 0$$

Dividiendo esta ecuación por $[\lambda(1-\beta)]^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}}$, se obtiene la siguiente ecuación equivalente:

$$T^{1+\frac{\gamma}{1-\beta}} - \left[\frac{(s-p)\beta(\gamma+1-\beta)}{(1-\beta)h\gamma} [\lambda(1-\beta)]^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \right] T^{\frac{1}{1-\beta}} - \frac{K(\gamma+1-\beta)}{h\gamma} [\lambda(1-\beta)]^{\frac{-\gamma}{1-\beta}} = 0$$

Esta ecuación coincide con la obtenida por los citados autores y, además, usando la expresión (1.16) en función de $T^* = \frac{(q^*)^{1-\beta}}{\lambda(1-\beta)}$, el máximo beneficio por unidad de tiempo está dado por

$$\begin{aligned} G(T^*) &= \frac{\lambda(1-\beta)}{\gamma} \left[\frac{(\gamma-\beta)(s-p) [\lambda(1-\beta)T^*]^{\frac{1}{1-\beta}} - K(\gamma+1-\beta)}{\lambda(1-\beta)T^*} \right] \\ &= \frac{(\gamma-\beta)(s-p) [\lambda(1-\beta)T^*]^{\frac{1}{1-\beta}} - K(\gamma+1-\beta)}{\gamma T^*} \end{aligned}$$

que también coincide con el obtenido por los citados autores. Del mismo modo, la condición de rentabilidad y la regla dada por el Teorema 1.4 también coinciden con las obtenidas por ellos.

A la vista de los resultados mostrados en esta sección, es claro que el modelo aquí desarrollado puede ser considerado como un marco general en el que encajan varios modelos utilizados con anterioridad en la literatura de inventarios. A modo de resumen, en la Tabla 1.3 hemos incluido todos estos modelos, clasificados en función de los valores de los parámetros de elasticidad β , γ_1 y γ_2 que utilizan.

Tabla 1.3. Modelos EOQ generalizados por este modelo

	$\beta = 0$	$\beta \geq 0$	
	Mínimo coste y máximo beneficio	Mínimo coste $s = p$	Máximo beneficio $s \geq p$
$\gamma_1 = \gamma_2 = 1$	Harris (1913) (Modelo EOQ básico)	Goh (1992) (Basic case)	Baker y Urban (1988) (suponiendo $i_T = 0$)
$\gamma_1 \geq 1$ $\gamma_2 = 1$	Naddor (1982) (Perishable-goods system) o Weiss (1982)	Goh (1994) (Model A)	Pando et al. (2012 ^a)
$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 \geq 1$	Naddor (1982) (Expensive-storage system)	Goh (1994) (Model B)	Pando et al. (2012 ^b)
$\gamma_1 \geq 1$ $\gamma_2 \geq 1$	Naddor (1982) (General system)	X	X

Los casos marcados con una cruz en esta tabla corresponden a los nuevos modelos resueltos en este capítulo y, por considerar la situación más general con $\beta \geq 0$, $\gamma_1 \geq 1$ y $\gamma_2 \geq 1$, incluyen como casos particulares el resto de modelos referenciados.

1.6. Resultados computacionales

En esta sección ilustraremos el modelo propuesto y nuestra metodología de resolución con un ejemplo numérico, utilizando diferentes valores para los tres parámetros de elasticidad β , γ_1 y γ_2 considerados en el mismo. Vamos a suponer que los parámetros iniciales del sistema de inventario son los siguientes: $\lambda = 1$, $K = 10$, $h = 0.5$, $s = 62$, $p = 50$ y $\beta \in \{0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$. Además, para poder observar los efectos de los parámetros γ_1 y γ_2 en el tamaño óptimo de pedido y el máximo beneficio, supondremos que ambos parámetros pueden tomar los valores del conjunto $\{1, 1.5, 2, 2.5\}$. Utilizando el Algoritmo 1 dado en la sección 1.3, hemos calculado el tamaño óptimo del lote q^* y el beneficio máximo $G(q^*)$, obteniendo los resultados que se muestran en la Tabla 1.4.

Tabla 1.4. Valores óptimos q^* y $G(q^*) = G^*$ para diferentes valores β , γ_1 y γ_2

β		0		0.1		0.3		0.5		0.7		0.9	
γ_1	γ_2	q^*	G^*	q^*	G^*	q^*	G^*	q^*	G^*	q^*	G^*	q^*	G^*
1	1	6.32	8.84	10.0	10.1	38.4	16.6	326	53.7	3·10 ⁴	1440	6·10 ¹³	3·10 ¹¹
1	1.5	4.07	7.90	5.02	8.48	8.47	10.5	16.8	14.8	43.2	25.6	187	52.5
1	2	3.11	7.17	3.52	7.43	4.68	8.13	6.59	9.11	10.0	10.0	17.2	7.73
1	2.5	2.59	6.60	2.81	6.67	3.37	6.82	4.16	6.84	5.29	6.29	7.05	3.60
1.5	1	4.07	7.90	5.21	8.56	10.7	11.3	37.6	20.9	591	122	3·10 ⁹	7·10 ⁶
1.5	1.5	3.24	7.37	3.77	7.72	5.58	8.89	9.77	11.3	23.3	17.4	114	35.1
1.5	2	2.76	6.93	3.07	7.10	3.95	7.59	5.48	8.31	8.53	9.09	16.3	7.48
1.5	2.5	2.45	6.56	2.65	6.62	3.17	6.74	3.94	6.77	5.19	6.35	7.44	3.88
2	1	3.11	7.17	3.65	7.51	5.75	8.78	12.8	12.4	76.6	33.6	4·10 ⁵	2·10 ⁴
2	1.5	2.76	6.93	3.10	7.13	4.20	7.78	6.59	9.11	13.9	12.3	64.0	21.5
2	2	2.51	6.70	2.75	6.79	3.42	7.08	4.61	7.51	7.09	7.98	14.1	6.61
2	2.5	2.33	6.48	2.50	6.50	2.96	6.55	3.67	6.53	4.88	6.13	7.33	3.86
2.5	1	2.59	6.60	2.90	6.72	3.94	7.22	6.68	8.59	21.4	14.5	5038	560
2.5	1.5	2.45	6.56	2.69	6.64	3.41	6.92	4.87	7.52	8.98	8.93	34.8	12.5
2.5	2	2.33	6.48	2.51	6.51	3.04	6.61	3.94	6.77	5.85	6.87	11.5	5.48
2.5	2.5	2.22	6.38	2.37	6.36	2.77	6.32	3.39	6.38	4.49	5.74	6.86	3.63

Podemos observar que, en todos los casos considerados, el sistema de inventario es rentable y el menor beneficio óptimo se obtiene para $\beta = 0.9$, $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 = 2.5$, con $G(q^*) = 3.60$. Para este caso concreto se tiene $s - p = 12$, que es mayor que $\eta = \frac{\xi}{\xi-1} \left(\frac{(\xi-1)K^{\xi-1}}{\Delta} \right)^{\frac{1}{\xi}} = 4.260$; tal y como se afirma en el apartado 1 del Teorema 1.3.

También, podemos observar que cuando $\gamma_2 > \gamma_1$ se obtienen menores tamaños óptimos del lote y menores beneficios máximos que si intercambiamos los valores de los parámetros γ_1 y γ_2 . Esto se debe a que, en el primer caso, se tienen mayores costes de almacenamiento.

Para ilustrar el efecto de los parámetros γ_1 y γ_2 sobre el tamaño óptimo del lote y el beneficio máximo en este ejemplo, en la Figura 1.6 hemos representado gráficamente q^* y $G(q^*)$ para diferentes valores de los parámetros γ_1 y γ_2 suponiendo siempre que $\beta = 0.3$.

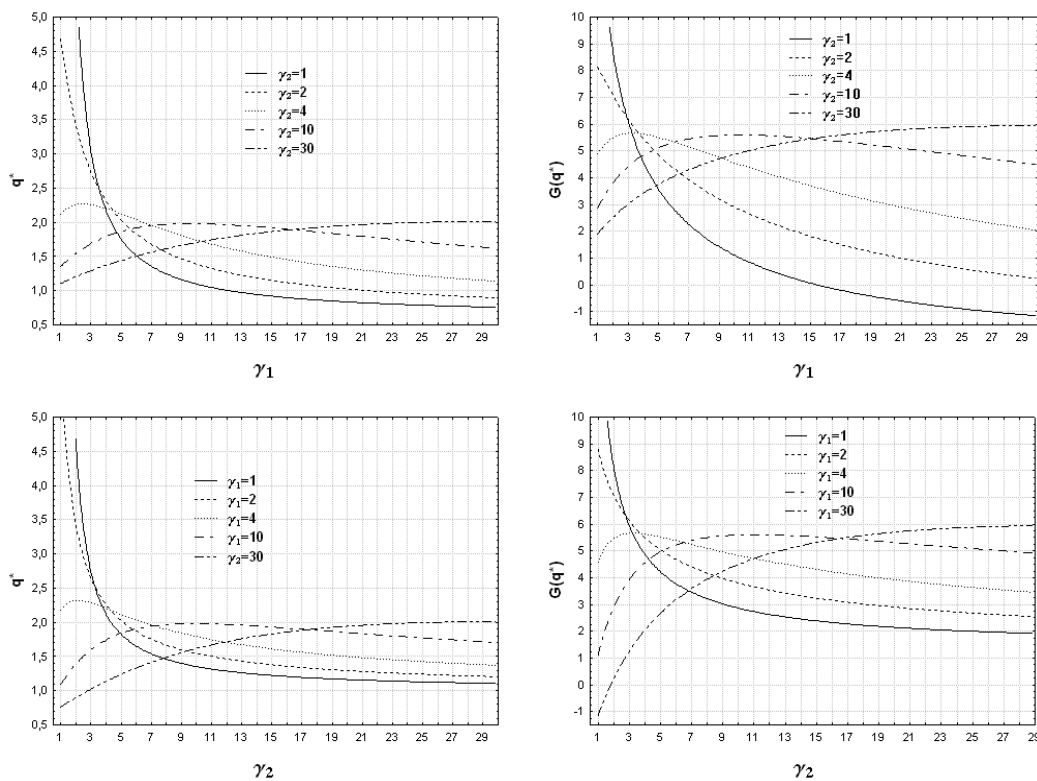


Figura 1.6. Variación de q^* y $G(q^*)$ con γ_1 y γ_2 para $\beta = 0.3$

De la observación de estos gráficos podemos extraer las siguientes conclusiones:

1. Fijado γ_2 , si el valor de γ_1 aumenta, en los dos primeros gráficos de la Figura 1.6, pueden observarse tres casos diferentes: (a) el tamaño óptimo del lote q^* y el beneficio máximo $G(q^*)$ son funciones estrictamente decrecientes (esto ocurre, por ejemplo, cuando $\gamma_2 = 2$), (b) el beneficio óptimo y el tamaño óptimo del lote son funciones estrictamente crecientes al principio para pasar después a

ser ligeramente decrecientes (esto ocurre, por ejemplo, cuando $\gamma_2 = 10$) y (c) el tamaño óptimo del lote y el beneficio máximo son funciones estrictamente crecientes (esto ocurre, por ejemplo, para $\gamma_2 = 30$).

2. Los mismos comentarios pueden hacerse sobre el tamaño óptimo del lote y el beneficio máximo cuando γ_1 es fijo y consideramos γ_2 como una variable (ver los dos últimos gráficos de la Figura 1.6).

Del mismo modo, en la Figura 1.7 se representan las curvas del tamaño óptimo del lote y del beneficio máximo por unidad de tiempo en función β y γ_1 para $\gamma_2 = 2$. De su observación se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. Si $\gamma_1 \leq 4$, cuando el parámetro β aumenta, también lo hace el tamaño óptimo del lote. Sin embargo, cuando $\gamma_1 > 4$, el tamaño óptimo del lote es una función ligeramente decreciente con el parámetro β (ver la primera gráfica de la Figura 1.7).

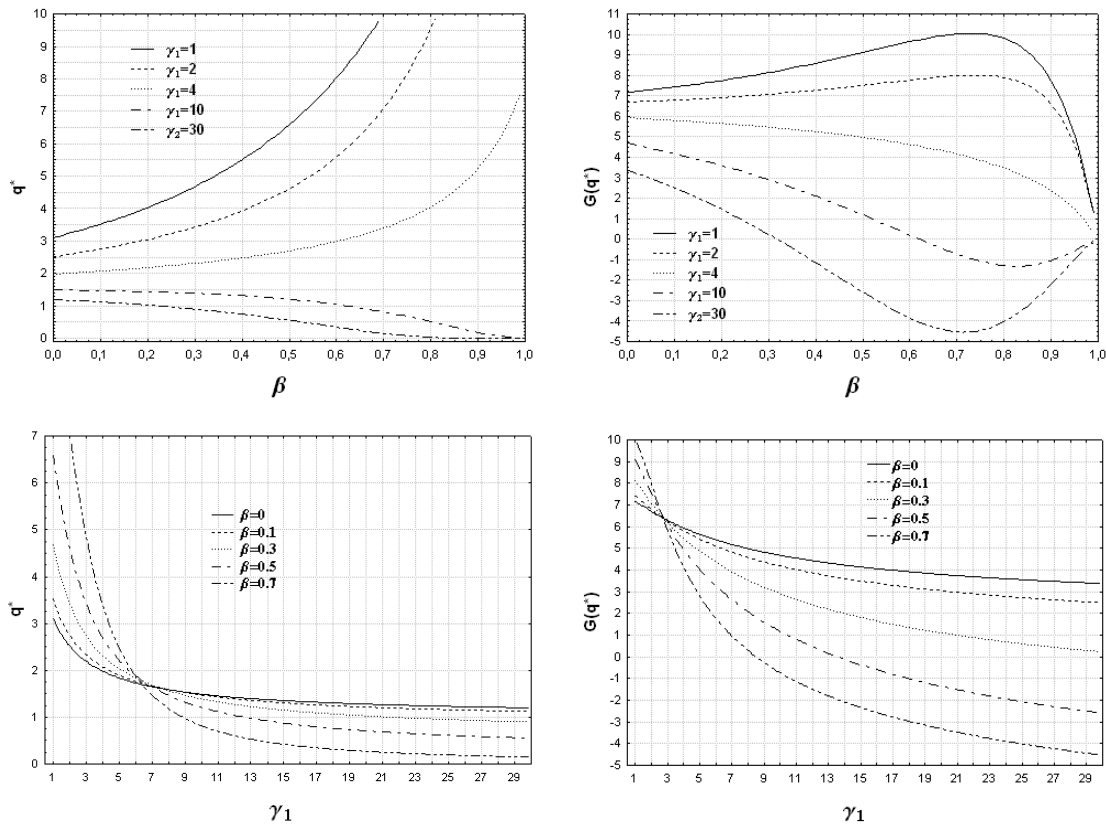


Figura 1.7. Variación de q^* y $G(q^*)$ con β y γ_1 para $\gamma_2 = 2$

2. Con respecto al beneficio máximo por unidad de tiempo, para γ_1 fijo, si la elasticidad de la demanda β aumenta pueden observarse tres tendencias: (a) existe un punto $\tilde{\beta}$ tal que el máximo beneficio $G(q^*)$ crece con β dentro del intervalo $[0, \tilde{\beta})$ y decrece en el intervalo $(\tilde{\beta}, 1)$ (esto ocurre, por ejemplo, cuando $\gamma_1 < 4$), (b) el máximo beneficio es una función estrictamente decreciente con el parámetro β (esto ocurre, por ejemplo, cuando $\gamma_1 = 4$) y (c) existe un punto $\hat{\beta}$ tal que el beneficio máximo $G(q^*)$ decrece cuando el parámetro β aumenta en el intervalo $[0, \hat{\beta})$, mientras que crece con el parámetro β en el intervalo $(\hat{\beta}, 1)$ (esto ocurre, por ejemplo, cuando $\gamma_1 > 4$). También puede observarse que, en todos los casos, el beneficio máximo por unidad de tiempo converge hacia cero cuando β converge hacia 1 (ver la segunda gráfica de la Figura 1.7).
3. Para cualquier valor fijo de la elasticidad de la demanda β , el tamaño óptimo del lote y el beneficio máximo decrecen cuando el parámetro γ_1 aumenta (ver las dos últimas gráficas de la Figura 1.7). Además, aunque para todos los valores de la Tabla 1.4 el inventario era rentable, podemos ahora observar que el sistema puede ser no rentable para ciertos valores de los parámetros β y γ_1 (esto ocurre, por ejemplo, cuando $\beta = 0.7$ y $\gamma_1 = 9$).

Por último, en la Figura 1.8, representamos la variación del tamaño óptimo del lote y el beneficio máximo por unidad de tiempo en función de β y γ_2 cuando $\gamma_1 = 2$. De ella podemos extraer las siguientes conclusiones:

1. Para γ_2 fijo, el tamaño óptimo del lote crece cuando el parámetro de elasticidad β aumenta, pero este crecimiento es muy débil para $\gamma_2 \geq 4$ (ver la primera gráfica de la Figura 1.8).
2. Con respecto al beneficio máximo por unidad de tiempo, para γ_2 fijo, podemos distinguir tres comportamientos distintos cuando el parámetro de elasticidad de la demanda β aumenta: (a) crece hacia infinito cuando $\gamma_2 = 1$, (b) existe un punto $\tilde{\beta}$ tal que $G(q^*)$ crece con β en el intervalo $[0, \tilde{\beta})$ y decrece cuando β aumenta dentro del intervalo $(\tilde{\beta}, 1)$ (esto ocurre, por ejemplo si $1 < \gamma_2 < 4$) y (c) el beneficio máximo por unidad de tiempo $G(q^*)$ es una función estrictamente

decreciente con respecto al parámetro β (esto ocurre, por ejemplo, si $\gamma_2 \geq 4$). Además, podemos observar que, si $\gamma_2 > 1$, el beneficio máximo por unidad de tiempo converge hacia cero cuando β tiende hacia 1 (ver la segunda gráfica de la Figura 1.8).

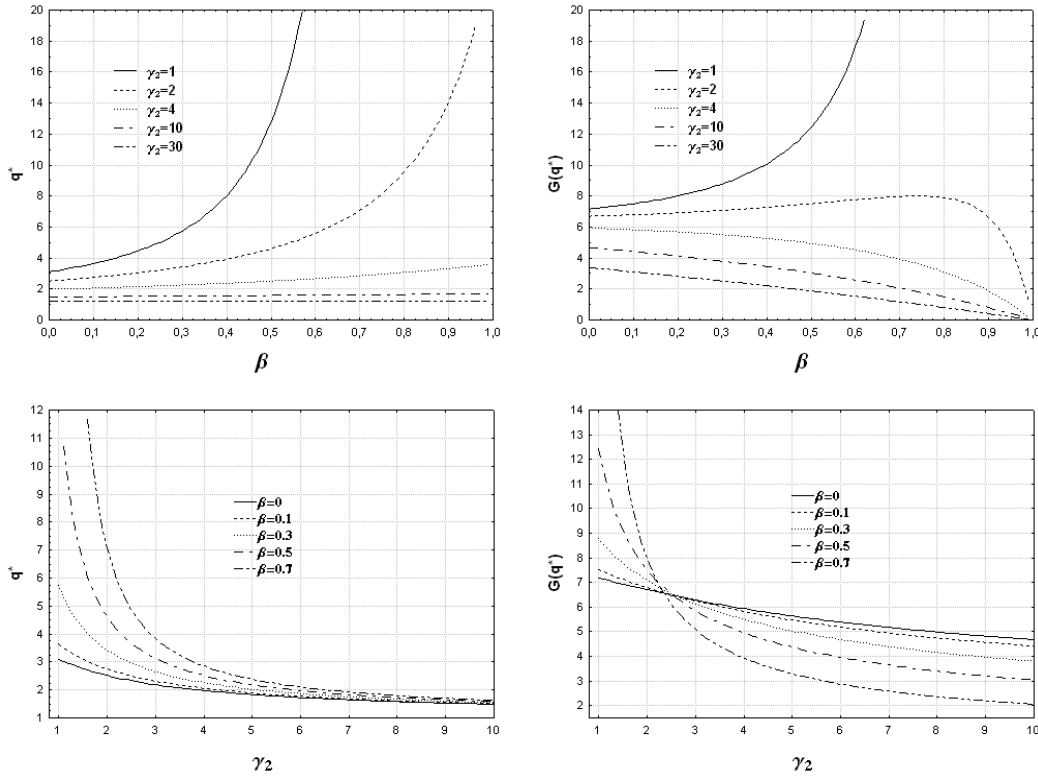


Figura 1.8. Variación de q^* y $G(q^*)$ con β y γ_2 para $\gamma_1 = 2$

- Por último, para cualquier valor fijo del parámetro β , las dos últimas gráficas de la Figura 1.8 muestran que el tamaño óptimo del lote y el beneficio máximo por unidad de tiempo decrecen cuando el parámetro γ_2 aumenta, pero el valor de $G(q^*)$ es siempre positivo (es decir, el inventario es siempre rentable).

A la vista de los resultados numéricos obtenidos hasta aquí en esta sección, así como de los correspondientes comentarios asociados, conviene recordar que, como ya señalamos en la sección 1.4 (página 30), el análisis de sensibilidad respecto a los parámetros β , γ_1 y γ_2 no mantiene la generalidad que el análisis de sensibilidad respecto a los parámetros K , h , s , p y λ .

Para ilustrar numéricamente los resultados teóricos del análisis de sensibilidad presentados en los lemas de la sección 1.4, vamos a considerar el caso concreto en

el que los parámetros de elasticidad toman los siguientes valores: $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$ y $\beta = 0.3$ (es decir, $\alpha = 0.7$ y $\xi = \alpha\gamma_1 + \gamma_2 = 2.55$). Como podemos comprobar en la Tabla 1.4, en este caso la solución óptima es $q^* = 5.58$ con $G(q^*) = 8.89$. Evaluando las derivadas de q^* con respecto a todos los parámetros del sistema hemos obtenido los siguientes valores:

$$\begin{array}{cccc} \left. \frac{dq^*(K)}{dK} \right|_{K=10} = 0.08 & \left. \frac{dq^*(h)}{dh} \right|_{h=0.5} = -6.17 & \left. \frac{dq^*(s)}{ds} \right|_{s=62} = 0.19 & \left. \frac{dq^*(p)}{dp} \right|_{p=50} = -0.19 \\ \left. \frac{dq^*(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 4.63 & \left. \frac{dq^*(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=0.3} = 12.87 & \left. \frac{dq^*(\gamma_1)}{d\gamma_1} \right|_{\gamma_1=1.5} = -3.75 & \left. \frac{dq^*(\gamma_2)}{d\gamma_2} \right|_{\gamma_2=1.5} = -5.00 \end{array}$$

Por tanto, en este caso, el tamaño óptimo del lote crece con los parámetros β , λ , s y K (es decir, los parámetros relacionados con la demanda, el precio de venta y el coste de pedido) y decrece al aumentar los parámetros h , γ_2 , γ_1 y p (es decir los parámetros relacionados con el coste de almacenamiento y el coste de adquisición). Además, en este caso, el tamaño óptimo del lote es más sensible a cambios en el parámetro de elasticidad de la demanda β .

Para el beneficio máximo por unidad de tiempo $G(q^*)$ hemos obtenido las siguientes derivadas:

$$\begin{array}{cccc} \left. \frac{dG(q^*(K))}{dK} \right|_{K=10} = -0.21 & \left. \frac{dG(q^*(h))}{dh} \right|_{h=0.5} = -6.15 & \left. \frac{dG(q^*(s))}{ds} \right|_{s=62} = 1.17 & \left. \frac{dG(q^*(p))}{dp} \right|_{p=50} = -1.17 \\ \left. \frac{dG(q^*(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 13.50 & \left. \frac{dG(q^*(\beta))}{d\beta} \right|_{\beta=0.3} = 8.12 & \left. \frac{dG(q^*(\gamma_1))}{d\gamma_1} \right|_{\gamma_1=1.5} = -2.58 & \left. \frac{dG(q^*(\gamma_2))}{d\gamma_2} \right|_{\gamma_2=1.5} = -3.33 \end{array}$$

Por tanto, el beneficio óptimo por unidad de tiempo crece con los parámetros λ , β y s (es decir, los parámetros relacionados con la demanda y el precio de venta) y decrece al aumentar los parámetros h , γ_2 , γ_1 , p y K (es decir, los parámetros relacionados con los costes de almacenamiento, adquisición y pedido). En este caso, para un mayor aumento en el beneficio óptimo por unidad de tiempo deberíamos incrementar el parámetro de escala de la demanda λ o el parámetro de elasticidad β , es decir, mejorar, en general, la demanda. Si esto no es posible, deberíamos tratar de reducir el parámetro de escala h para el coste de almacenamiento o los parámetros de elasticidad γ_1 y γ_2 , es decir, reducir, en general, los costes de almacenamiento del inventario. Observar que, en este caso, el coste de pedido y los precios de adquisición

o venta tienen menos relevancia en los cambios del beneficio óptimo por unidad de tiempo.

Diferencias entre las soluciones de máximo beneficio y mínimo coste.

Finalmente, hemos utilizado este mismo ejemplo (es decir $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$ y $\beta = 0.3$) para ilustrar numérica y gráficamente la comparación entre las soluciones del modelo de máximo beneficio y el modelo de mínimo coste, y también la regla de identificación de la política óptima dada por el Teorema 1.4. Para ello, en la Figura 1.9, hemos representado gráficamente las funciones $G(q)$, $C(q)$, $\frac{(\xi-\alpha)HC(q)}{T}$, $\frac{\alpha K+(1-\alpha)\Psi(q)}{T}$ y $\frac{\alpha K}{T}$ para este caso concreto, y en la Tabla 1.5 hemos incluido los valores óptimos para las soluciones del modelo de máximo beneficio y del modelo de mínimo coste. En ellas podemos observar los siguientes hechos:

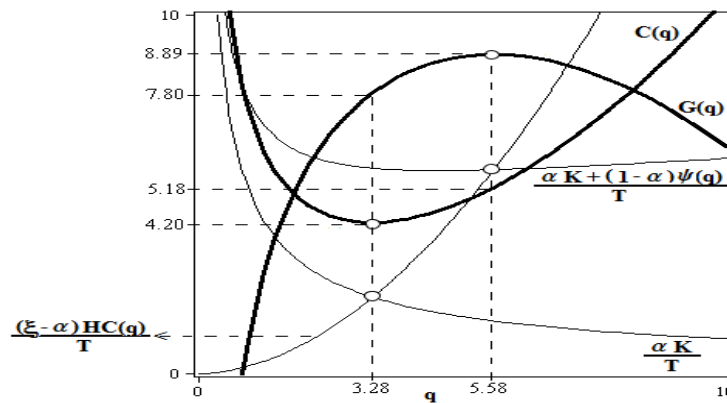


Figura 1.9. Máximo beneficio y mínimo coste con $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$ y $\beta = 0.3$

Tabla 1.5. Comparación de soluciones óptimas para ambos modelos

	<i>Máximo beneficio</i>	<i>Mínimo coste</i>
Tamaño del lote	$q^* = 5.58$	$q_{\min}^* = 3.28$
Beneficio	$G(q^*) = 8.89$	$G(q_{\min}^*) = 7.80$
Coste del inventario	$C(q^*) = 5.18$	$C(q_{\min}^*) = 4.20$
Longitud de ciclo	$T^* = 4.76$	$T_{\min}^* = 3.28$
Coste de almacenamiento	$\frac{HC(q^*)}{T^*} = 3.08$	$\frac{HC(q_{\min}^*)}{T_{\min}^*} = 1.15$
Coste de pedido	$\frac{K}{T^*} = 2.10$	$\frac{K}{T_{\min}^*} = 3.05$

1. Para el problema de máximo beneficio por unidad de tiempo, el tamaño óptimo del lote se obtiene en el punto de corte de las funciones $\frac{(\xi-\alpha)HC(q)}{T}$ y $\frac{\alpha K+(1-\alpha)\Psi(q)}{T}$,

tal y como establece la regla dada por la expresión (1.18). En este caso, como ya hemos dicho, el tamaño óptimo del lote es $q^* = 5.58$ y el máximo beneficio por unidad de tiempo es $G(q^*) = 8.89$.

2. Del mismo modo, para el problema de mínimo coste, el tamaño óptimo del lote que minimiza el coste total del inventario por unidad de tiempo, $C(q)$, se obtiene en el punto de corte de las funciones $\frac{(\xi-\alpha)HC(q)}{T}$ y $\frac{\alpha K}{T}$. En este caso, el tamaño óptimo del lote es $q_{\min}^* = 3.28$ y el mínimo coste del inventario por unidad de tiempo es $C(q_{\min}^*) = 4.20$.
3. Tal y como demostramos en la subsección 1.5.1, podemos observar que la solución óptima de máximo beneficio, $q^* = 5.58$, es mayor que la solución óptima de mínimo coste, $q_{\min}^* = 3.28$. En concreto, con la política de máximo beneficio tenemos un incremento del 70 % en el tamaño del lote respecto a la política de mínimo coste.
4. El beneficio por unidad de tiempo obtenido con la solución de mínimo coste es $G(q_{\min}^*) = 7.80$, que es menor que el beneficio máximo por unidad de tiempo $G(q^*) = 8.89$. Por lo tanto, con la política de máximo beneficio obtenemos una mejora del 14 % sobre el beneficio que obtendríamos con la política de mínimo coste.
5. El coste total por unidad de tiempo obtenido con la solución de máximo beneficio es $C(q^*) = 5.18$, que es mayor que el coste mínimo por unidad de tiempo $C(q_{\min}^*) = 4.20$. Por tanto, con la política de máximo beneficio tenemos un incremento del 23 % sobre el coste mínimo.
6. La longitud óptima del ciclo de inventario para la política de máximo beneficio es $T^* = \frac{(q^*)^\alpha}{\alpha\lambda} = 4.76$, mientras que para la política de mínimo coste es $T_{\min}^* = \frac{(q_{\min}^*)^\alpha}{\alpha\lambda} = 3.28$. Por tanto, con la política de máximo beneficio tenemos un incremento del 45 % en la longitud de ciclo del inventario.
7. Si tenemos en cuenta que, en este caso, $\xi = 2.55$ y $\Delta = 5.47$, el coste de almacenamiento por unidad de tiempo para la política de máximo beneficio

es $\frac{HC(q^*)}{T^*} = \frac{\alpha\lambda}{\Delta}(q^*)^{\xi-\alpha} = 3.08$, mientras para la política de mínimo coste es $\frac{HC(q_{\min}^*)}{T_{\min}^*} = \frac{\alpha\lambda}{\Delta}(q_{\min}^*)^{\xi-\alpha} = 1.15$. Por tanto, con la política de máximo beneficio tenemos un incremento del 167 % en el coste de almacenamiento por unidad de tiempo.

8. El coste de pedido por unidad de tiempo para la política de máximo beneficio es $\frac{K}{T^*} = 2.10$, mientras que para la política de mínimo coste es $\frac{K}{T_{\min}^*} = 3.05$. Por tanto, con la política de máximo beneficio tenemos un descenso del 31 % en el coste de pedido por unidad de tiempo.

A la vista de todos estos comentarios, podemos observar que son ciertas todas las afirmaciones hechas en la subsección 1.5.1 cuando comparamos las políticas de máximo beneficio y mínimo coste por unidad de tiempo.

Todos los cálculos expuestos en esta sección han sido desarrollados utilizando un programa de software específico diseñado para ello y escrito en lenguaje SAS (SAS Institute Inc., 2005), cuya redacción se incluye en la sección A.1 del Apéndice A, al final de este documento.

1.7. Una extensión con punto de reabastecimiento variable

Múltiples son las posibles extensiones del modelo analizado hasta aquí. Sin afán de ser exhaustivos, algunas de ellas son las siguientes: (i) considerar la posible existencia de un punto de reabastecimiento antes de que el stock se agote, eliminando la restricción de que el nivel de inventario en el momento de realizar un nuevo pedido sea igual a cero; (ii) incorporar la posibilidad de descuentos en el coste de adquisición en función del tamaño del pedido; (iii) integrar la posibilidad de descuentos en el precio de venta; (iv) examinar otras formas de variación en la tasa de demanda; (v) considerar otras funciones matemáticas para el coste acumulado de almacenamiento; (vi) agregar costes debidos al deterioro del producto mientras permanece en el inventario; (vii) estudiar el caso en el que el tamaño del lote deba ser una cantidad entera; (viii)

analizar el caso en el que exista la posibilidad de rotura del stock con demanda acumulable; (ix) examinar el caso en el que exista la posibilidad de rotura del stock con pérdida de ventas; (x) estudiar el caso en el que exista la posibilidad de rotura del stock con una mixtura (constante o variable) entre la demanda acumulable y la pérdida de ventas.

En esta sección nos vamos a centrar en el desarrollo de la primera de las extensiones antes señaladas. Se trata de suponer que el punto de reabastecimiento no está obligado a ser nulo. Es decir, consideraremos que se puede hacer un nuevo pedido antes de que se acaben las existencias en el almacén. Este hecho incrementa el coste de almacenamiento por unidad de tiempo, pero puede producir también un incremento en el beneficio por unidad de tiempo debido a la mayor demanda conseguida por el hecho de mantener un nivel de inventario más alto. Nótese que, a diferencia de lo que ocurre en los modelos con tasa de demanda constante en los que es óptimo que el nivel de inventario sea cero antes del reabastecimiento, ahora hay menos ventas a medida que disminuye el nivel de inventario, y es conveniente tener un alto nivel de inventario con el propósito de mantener mayores ventas. Por tanto, relajar la condición de pedir cuando el nivel del inventario se anula puede conducir a una mejora en las ganancias debido a que el aumento en las ventas puede compensar tanto el coste de almacenamiento por unidad de tiempo, como el coste de pedir con nivel positivo en el inventario.

Una consecuencia obvia de lo anterior es que ahora, en lugar de una, se tienen dos variables de decisión. Inicialmente, estas variables son el nivel del inventario después de recibir el pedido, S (o nivel de orden), y el nivel del inventario en el momento de hacer el pedido, r (o punto de reabastecimiento). Por tanto, el tamaño del lote es $q = S - r$.

En este contexto, Baker y Urban (1988) fueron los primeros autores en considerar este tipo de modelos EOQ con dos variables decisión, suponiendo que la tasa de demanda es una función potencial cóncava del nivel del inventario y el coste de almacenamiento es lineal en el tiempo y en la cantidad de producto almacenado.

Posteriormente, Pal et al. (1993) extendieron este modelo al caso de productos con deterioro y Giri et al. (1996) a situaciones en las que la tasa de demanda depende del nivel del inventario hasta un cierto nivel y después pasa a ser constante. Urban (2005) presentó una detallada revisión de toda la literatura de modelos EOQ con tasa de demanda dependiente del nivel del inventario y consideró también la posibilidad de modelos de inventario de revisión periódica en este contexto. Finalmente, Urban (2008) también consideró el estudio de un modelo EOQ con dos variables de decisión, demanda dependiente del nivel del inventario y costes de almacenamiento variables de una forma incremental y discreta. Otros modelos EOQ con tasa de demanda dependiente del nivel del inventario y punto de reabastecimiento no nulo son Chang (2004), Teng et al. (2005) y Shah et al. (2011).

En la Tabla 1.6 se incluye la notación para las variables de decisión que utilizaremos a lo largo de esta sección.

Tabla 1.6. Notación adicional para esta sección

S	nivel del inventario después de recibir el pedido, <i>variable de decisión</i> (> 0)
r	nivel del inventario en el momento de hacer el pedido, <i>variable inicial de decisión</i> ($0 \leq r < S$)
τ	<i>variable auxiliar de decisión</i> , $\tau = 1 - \left(\frac{r}{S}\right)^\alpha$ ($0 < \tau \leq 1$)

Con estas nuevas hipótesis, que modifican parcialmente las dadas en la sección 1.2, es claro que el nivel del inventario $I(t)$ en el instante $t \in (0, T)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dI}{dt} = -\lambda [I(t)]^\beta \quad 0 < t < T \quad (1.22)$$

con las condiciones de frontera $I(0+) = S$ e $I(T-) = r$. Su solución es

$$I(t) = [S^\alpha - \alpha\lambda t]^\frac{1}{\alpha} = S \left[1 - \frac{\alpha\lambda}{S^\alpha} t \right]^\frac{1}{\alpha} \quad (1.23)$$

donde $\alpha = 1 - \beta$, como en las secciones anteriores.

Además, como $I(T-) = r$, la longitud del ciclo de inventario viene dada por

$$T = \frac{S^\alpha - r^\alpha}{\alpha\lambda} \quad (1.24)$$

y, si para un valor dado de S denotamos por $T_{\text{máx}}(S)$ la máxima longitud de ciclo (que se obtiene cuando $r = 0$), resulta

$$T_{\text{máx}}(S) = \frac{S^\alpha}{\alpha\lambda} \quad (1.25)$$

Por tanto, otra expresión para el nivel del inventario en cada ciclo es

$$I(t) = S \left[1 - \frac{t}{T_{\text{máx}}(S)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.26)$$

con $0 \leq t \leq T \leq T_{\text{máx}}(S)$.

En la Figura 1.10 se representan las curvas del inventario en sucesivos ciclos para $r = 0$ y $r > 0$ con un mismo nivel de inventario S después de recibir un nuevo pedido.

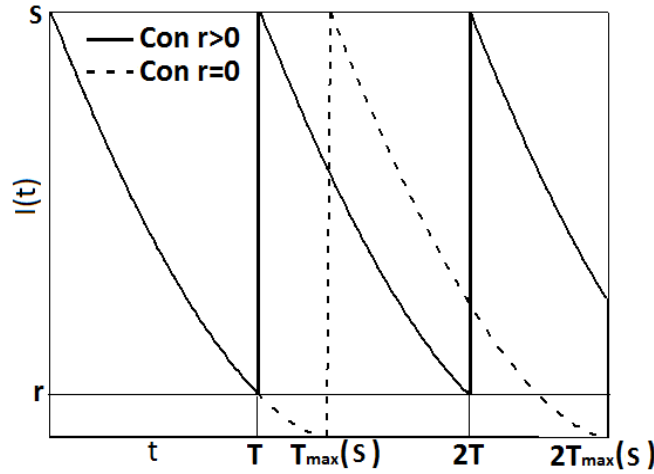


Figura 1.10. Curva del inventario con $r > 0$ y $r = 0$

Utilizando la expresión de $I(t)$ dada por (1.26) y el Lema 1.1, se sigue que el coste de almacenamiento para un ciclo de inventario, en lugar del dado en (1.8), ahora es

$$\begin{aligned} HC &= HC(S, r) = h\gamma_1 \int_0^T t^{\gamma_1-1} [I(t)]^{\gamma_2} dt = h\gamma_1 S^{\gamma_2} \int_0^T t^{\gamma_1-1} \left[1 - \frac{t}{T_{\text{máx}}(S)} \right]^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} dt \\ &= h\gamma_1 S^{\gamma_2} [T_{\text{máx}}(S)]^{\gamma_1} \int_0^T \left[\frac{t}{T_{\text{máx}}(S)} \right]^{\gamma_1-1} \left[1 - \frac{t}{T_{\text{máx}}(S)} \right]^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} \frac{dt}{T_{\text{máx}}(S)} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Haciendo en (1.27) el cambio de variable $w = \frac{t}{T_{\text{máx}}(S)}$ y definiendo la nueva variable auxiliar de decisión

$$\tau = \frac{T}{T_{\text{máx}}(S)} \quad (1.28)$$

resulta

$$\begin{aligned}
HC &= h\gamma_1 S^{\gamma_2} [T_{\text{máx}}(S)]^{\gamma_1} \int_0^\tau w^{\gamma_1-1} (1-w)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} dw \\
&= h\gamma_1 S^{\gamma_2} [T_{\text{máx}}(S)]^{\gamma_1} B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) \int_0^\tau \frac{w^{\gamma_1-1} (1-w)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}}}{B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right)} dw \\
&= \frac{h\gamma_1 B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right)}{[\alpha\lambda]^{\gamma_1}} F_{\text{beta}}(\tau) S^{\alpha\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{F_{\text{beta}}(\tau) S^\xi}{\Delta} \tag{1.29}
\end{aligned}$$

donde, al igual que en las secciones anteriores, $B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right)$ es la función beta de Euler con parámetros γ_1 y $\frac{\gamma_2}{\alpha} + 1$, $\Delta = \frac{(\alpha\lambda)^{\gamma_1}}{h\gamma_1 B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right)}$ y $\xi = \alpha\gamma_1 + \gamma_2$. Además, $F_{\text{beta}}(\tau)$ es la función de distribución de la distribución Beta con los mismos parámetros. Nótese que $\Delta > 0$ y $\xi \geq 1 + \alpha > 1$.

1.7.1. El modelo

A continuación vamos a obtener la función objetivo y las restricciones asociadas al modelo considerado en esta sección.

Obtención de la función objetivo

El beneficio por ciclo de inventario puede calcularse como la diferencia entre: (i) los ingresos totales por ciclo $s(S - r)$ y (ii) la suma del coste de adquisición $p(S - r)$, el coste de pedido (K) y el coste de almacenamiento HC dado por (1.29), resultando ser

$$(s - p)(S - r) - K - \frac{F_{\text{beta}}(\tau) S^\xi}{\Delta}$$

Utilizando las expresiones (1.24), (1.25) y (1.28) se tiene que

$$\tau = 1 - \left(\frac{r}{S}\right)^\alpha \tag{1.30}$$

de donde $r = S(1 - \tau)^{1/\alpha}$ y, por tanto, el beneficio por ciclo es

$$(s - p)(S - r) - K - \frac{F_{\text{beta}}(\tau) S^\xi}{\Delta} = (s - p)S \left[1 - (1 - \tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right] - K - \frac{F_{\text{beta}}(\tau) S^\xi}{\Delta}$$

Además, como $T = \tau T_{\text{máx}}(S) = \frac{\tau S^\alpha}{\alpha\lambda}$, el beneficio medio por unidad de tiempo es

$$G(\tau, S) = -\frac{\alpha\lambda}{\Delta} \left[\frac{-(s - p)\Delta S \left[1 - (1 - \tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right] + K\Delta + F_{\text{beta}}(\tau) S^\xi}{\tau S^\alpha} \right] = -\frac{\alpha\lambda}{\Delta} g(\tau, S) \tag{1.31}$$

donde

$$g(\tau, S) = \frac{F_{beta}(\tau)S^{\xi-\alpha} - (s-p)\Delta \left[1 - (1-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right] S^{1-\alpha} + K\Delta S^{-\alpha}}{\tau} \quad (1.32)$$

Como el objetivo es maximizar el beneficio por unidad de tiempo, de (1.31) se sigue que maximizar $G(\tau, S)$ es equivalente a minimizar $g(\tau, S)$. En consecuencia, nuestro problema consiste en determinar las variables de decisión τ y S , con las restricciones que veremos a continuación, que minimizan la función $g(\tau, S)$ dada en (1.32).

Notese que si $\tau = 1$, es decir $r = 0$, entonces $S = q$ y $g(1, S)$ coincide con la función objetivo dada en (1.10) para el modelo con nivel de inventario nulo antes del reabastecimiento.

Obtención de las restricciones

Continuando con la formulación del modelo, dos son hasta ahora las restricciones que tenemos asociadas a la función objetivo $g(\tau, S)$: (i) $S > 0$ y (ii) $0 < \tau \leq 1$ (obsérvese que si $\tau = 0$, entonces $r = S$ y no habría sistema de inventario en sentido propio). Sin embargo, el siguiente lema muestra una propiedad de esta función $g(\tau, S)$ que justifica la necesidad de imponer alguna restricción adicional en el modelo.

Lema 1.15 *Supongamos que $s > p$, $0 < \alpha < 1$ y $\gamma_2 < \gamma_1(1 - \alpha)$. Sea la función $g(\tau, S)$ dada por (1.32), con $0 < \tau \leq 1$ y $S > 0$. Entonces, $g(\tau, S)$ es una función no acotada inferiormente.*

Demostración. Por ser $\gamma_2 < \gamma_1(1 - \alpha)$, se tiene que $\xi = \alpha\gamma_1 + \gamma_2 < \gamma_1$ y podemos elegir un número real θ con $1 < \theta < \frac{\gamma_1-1}{\xi-1}$. Entonces, si hacemos $S = \tau^{-\theta}$, se tiene que

$$\begin{aligned} g(\tau, \tau^{-\theta}) &= F_{beta}(\tau)\tau^{-\theta(\xi-\alpha)-1} - (s-p)\Delta \left[1 - (1-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right] \tau^{-\theta(1-\alpha)-1} + K\Delta\tau^{\alpha\theta-1} \\ &= \frac{(p-s)\Delta}{\tau^{\theta(1-\alpha)}} L_1(\tau) \left[\frac{L_2(\tau)}{(p-s)\Delta L_1(\tau)} \tau^{\gamma_1-1+\theta(1-\xi)} + 1 + \frac{K}{(p-s)L_1(\tau)} \tau^{\theta-1} \right] \end{aligned}$$

con $L_1(\tau) = \frac{1-(1-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}}{\tau}$ y $L_2(\tau) = \frac{F_{beta}(\tau)}{\tau^{\gamma_1}}$. Utilizando la regla de L'Hopital, es evidente que $\lim_{\tau \downarrow 0} L_1(\tau) = \frac{1}{\alpha} > 0$ y, del mismo modo, se tiene que

$$\lim_{\tau \downarrow 0} L_2(\tau) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{f_{beta}(\tau)}{\gamma_1 \tau^{\gamma_1-1}} = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{(1-\tau)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}}}{\gamma_1 B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1)} = \frac{1}{\gamma_1 B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1)} > 0$$

Por tanto, como $s > p$ y $0 < \alpha < 1$, se deduce que $\lim_{\tau \downarrow 0} g(\tau, \tau^{-\theta}) = -\infty$ y la función $g(\tau, S)$ no está acotada inferiormente para τ suficientemente pequeño ($\tau \downarrow 0$) y S suficientemente grande ($S \uparrow \infty$). ■

El resultado anterior demuestra que, para ciertos valores de los parámetros del sistema, el beneficio del inventario por unidad de tiempo pudiera ser infinito eligiendo S infinitamente grande y τ suficientemente pequeño. Obviamente una situación como ésta no puede ser real y por ello debemos considerar un valor máximo $S_{\text{máx}}$ para el nivel del inventario, que en las situaciones prácticas será la cantidad máxima de inventario que podemos tener debido a las limitaciones físicas en la capacidad del almacén. Análogamente, es necesario considerar un tiempo mínimo $T_{\text{mín}}$ para la longitud del ciclo del inventario, o equivalentemente, establecer un tiempo mínimo entre dos pedidos consecutivos, que puede ser el tiempo necesario para formular una nueva orden de pedido.

Teniendo en cuenta la definición de la variable auxiliar de decisión τ y (1.25), la condición $T \geq T_{\text{mín}}$ es equivalente a

$$\tau S^\alpha \geq \alpha \lambda T_{\text{mín}} \quad (1.33)$$

Además, como $S \leq S_{\text{máx}}$, de (1.33) se sigue que $\tau \geq \alpha \lambda T_{\text{mín}} / S_{\text{máx}}^\alpha$. Es decir,

$$\tau_{\text{mín}} = \alpha \lambda T_{\text{mín}} / S_{\text{máx}}^\alpha$$

representa el mínimo valor asumible para la variable τ .

Nótese que la condición $\tau S^\alpha \geq \alpha \lambda T_{\text{mín}}$ implica $S \geq (\alpha \lambda T_{\text{mín}})^{\frac{1}{\alpha}}$ y, por tanto, existe un valor mínimo

$$S_{\text{mín}} = (\alpha \lambda T_{\text{mín}})^{\frac{1}{\alpha}}$$

para el nivel de inventario después de recibir el pedido. En particular, los valores $S_{\text{máx}}$ y $T_{\text{mín}}$ deberán verificar la condición $S_{\text{máx}} > (\alpha \lambda T_{\text{mín}})^{\frac{1}{\alpha}}$.

En consecuencia, el problema que hay que resolver es

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && g(\tau, S) \\ & \text{sujeta a} && (\tau, S) \in \Omega \end{aligned} \quad (1.34)$$

siendo $\Omega = \{(\tau, S) : \tau_{\min} \leq \tau \leq 1, S_{\min} \leq S \leq S_{\max}, \tau S^\alpha \geq \alpha \lambda T_{\min}\}$.

En la Figura 1.11 se representa la región factible Ω para este problema.

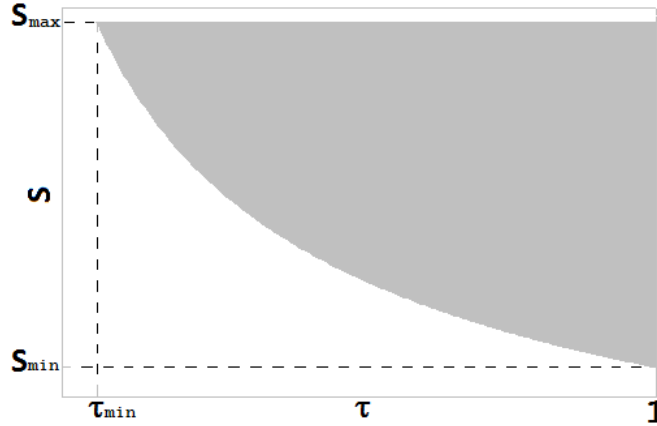


Figura 1.11. Región factible para el problema (1.34)

1.7.2. Resolución del modelo

La función objetivo $g(\tau, S)$ es de clase C^1 pero no es, en general, convexa en la región factible Ω . No obstante, la existencia del mínimo global está asegurada por ser Ω un conjunto compacto de \mathbb{R}^2 .

Asegurada la existencia de solución óptima, vamos a basar su búsqueda en dos ideas: (i) descomponer la región Ω en cinco subregiones disjuntas buscando el mínimo global en cada una de ellas y (ii) tener en cuenta que, por lo demostrado en la sección 1.3, la función $g(\tau, S)$ restringida al conjunto $\{(\tau, S) \in \Omega : \tau = 1\}$ es estrictamente convexa.

Las cinco subregiones a considerar son las siguientes:

- (i) $\Omega_1 = \{(\tau, S) \in \Omega : \tau = 1\}$.
- (ii) $\Omega_2 = \{(\tau, S) : \tau_{\min} < \tau < 1, S_{\min} < S < S_{\max}, \tau S^\alpha > \alpha \lambda T_{\min}\}$.
- (iii) $\Omega_3 = \{(\tau, S) : \tau_{\min} < \tau < 1, S = S_{\max}\}$.
- (iv) $\Omega_4 = \{(\tau, S) : \tau_{\min} < \tau < 1, \tau S^\alpha = \alpha \lambda T_{\min}\}$.
- (v) $\Omega_5 = \{(\tau_{\min}, S_{\max})\}$.

A continuación, desarrollamos los correspondientes análisis separadamente.

Análisis en la subregión Ω_1 . Para este caso se tiene siempre $\tau = 1$ (es decir, $r = 0$) y estamos por tanto en el modelo que hemos resuelto en la sección 1.3 mediante el

Algoritmo 1. Si S_o^* es la solución óptima que minimiza la función $g(1, S)$ con $S > 0$, por ser la función $g(1, S)$ estrictamente convexa, el punto óptimo de $g(1, S)$ sobre Ω_1 es $(1, S_1^*)$ con

$$S_1^* = \begin{cases} S_{\text{mín}} & \text{si } S_o^* \leq S_{\text{mín}} \\ S_o^* & \text{si } S_{\text{mín}} < S_o^* < S_{\text{máx}} \\ S_{\text{máx}} & \text{si } S_o^* \geq S_{\text{máx}} \end{cases} \quad (1.35)$$

Análisis en la subregión Ω_2 . Las derivadas parciales primeras de la función $g(\tau, S)$ son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial S}(\tau, S) &= \frac{(\xi - \alpha) F_{beta}(\tau) S^\xi - (1 - \alpha)(s - p)\Delta \left[1 - (1 - \tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right] S - \alpha K \Delta}{\tau S^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\xi - \alpha}{\tau S^{\alpha+1}} \left[F_{beta}(\tau) S^\xi - u \left[1 - (1 - \tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right] S - v \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau, S) &= \frac{[\tau f_{beta}(\tau) - F_{beta}(\tau)] S^\xi - (s - p)\Delta \left[\frac{\tau(1-\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\alpha} - \left(1 - (1 - \tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right] S - K \Delta}{\tau^2 S^\alpha} \\ &= \frac{[\alpha \tau f_{beta}(\tau) - \xi F_{beta}(\tau)] S^{\xi-1} + (s - p)\Delta \left[1 - (1 - \tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]}{\alpha \tau^2 S^{\alpha-1}} + \frac{S}{\alpha \tau} \frac{\partial g}{\partial S}(\tau, S) \end{aligned} \quad (1.37)$$

siendo $u = \frac{(1-\alpha)(s-p)\Delta}{\xi-\alpha}$ y $v = \frac{\alpha K \Delta}{\xi-\alpha}$, con $u \geq 0$ y $v > 0$, los mismos parámetros auxiliares ya definidos en la sección 1.2.

Por tanto los puntos estacionarios de la función $g(\tau, S)$ son las soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned} F_{beta}(\tau) S^\xi - u \left[1 - (1 - \tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right] S - v &= 0 \\ [\xi F_{beta}(\tau) - \alpha \tau f_{beta}(\tau)] S^{\xi-1} &= (s - p)\Delta \left[1 - (1 - \tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right] \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

El resultado que damos a continuación será útil para su resolución.

Lema 1.16 Sean $F_{beta}(\tau)$ y $f_{beta}(\tau)$, respectivamente, la función de distribución y la función de densidad para una distribución de probabilidad Beta con parámetros γ_1 y $\frac{\gamma_2}{\alpha} + 1$. Entonces, para cualquier $\tau \in (0, 1]$, se verifica que

$$\xi F_{beta}(\tau) - \alpha \tau f_{beta}(\tau) > 0$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $f_{beta}(\tau) = \frac{\tau^{\gamma_1-1}(1-\tau)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}}}{B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha}+1)}$ y considerando la función $h(\tau) = \xi F_{beta}(\tau) - \alpha\tau f_{beta}(\tau)$, es evidente que $h(\tau)$ es una función de clase C^1 en el intervalo $(0, 1)$ con $h(0) = 0$ y $h(1) = \xi > 0$. Además, si $\tau \in (0, 1)$, se verifica que $h'(\tau) = (\xi - \alpha) f_{beta}(\tau) - \alpha\tau f'_{beta}(\tau)$ con

$$\begin{aligned} f'_{beta}(\tau) &= \frac{(\gamma_1 - 1)\tau^{\gamma_1-2}(1-\tau)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} - \frac{\gamma_2}{\alpha}\tau^{\gamma_1-1}(1-\tau)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}-1}}{B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha}+1)} \\ &= \frac{\tau^{\gamma_1-1}(1-\tau)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}}}{B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha}+1)} \left[\frac{\gamma_1 - 1}{\tau} - \frac{\gamma_2}{\alpha(1-\tau)} \right] \end{aligned}$$

Por consiguiente, $h'(\tau)$ puede reescribirse como

$$\begin{aligned} h'(\tau) &= \frac{\tau^{\gamma_1-1}(1-\tau)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}}}{B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha}+1)} \left[\xi - \alpha - \alpha(\gamma_1 - 1) + \frac{\gamma_2\tau}{1-\tau} \right] \\ &= \frac{\tau^{\gamma_1-1}(1-\tau)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}}}{B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha}+1)} \left(\frac{\gamma_2}{1-\tau} \right) \end{aligned}$$

y es evidente que $h'(\tau) > 0$ para todo $\tau \in (0, 1)$, por lo que podemos asegurar que $h(\tau)$ es una función estrictamente creciente en el intervalo $(0, 1)$. Finalmente, como $h(0) = 0$, necesariamente se tiene que $h(\tau) > 0$ para todo $\tau \in (0, 1)$, tal y como queríamos probar. ■

Utilizando este resultado, el valor de S en el sistema (1.38) puede ser obtenido de la segunda ecuación como

$$S = w(\tau) = \left[\frac{(s-p)\Delta \left[1 - (1-\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right]}{\xi F_{beta}(\tau) - \alpha\tau f_{beta}(\tau)} \right]^{\frac{1}{\xi-1}} \quad (1.39)$$

Entonces, sustituyendo el valor de S en la primera ecuación, los puntos estacionarios de la función $g(\tau, S)$ en la subregión Ω_2 pueden obtenerse resolviendo la ecuación

$$\Phi_1(\tau) = F_{beta}(\tau) [w(\tau)]^\xi - u \left[1 - (1-\tau)^{\frac{1}{\alpha}} \right] w(\tau) - v = 0 \quad (1.40)$$

con $\tau_{\min} < \tau < 1$, $w(\tau) < S_{\max}$ y $\tau [w(\tau)]^\alpha > \alpha\lambda T_{\min}$. Estas son, por tanto, las posibles soluciones en la subregión Ω_2 . La existencia y posible unicidad de las raíces de la ecuación $\Phi_1(\tau) = 0$ en el intervalo $(\tau_{\min}, 1)$ no están aseguradas, pero las posibles soluciones pueden encontrarse evaluando la función $\Phi_1(\tau)$ en todo el intervalo con un

paso igual a la tolerancia deseada para la variable de decisión τ y haciendo una representación gráfica de los resultados obtenidos.

Análisis en la subregión Ω_3 . En este caso tenemos que $S = S_{\text{máx}}$ y sólo necesitamos resolver la ecuación $\frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau, S_{\text{máx}}) = 0$. Por tanto, hay que resolver la ecuación

$$\Phi_2(\tau) = [\tau f_{\text{beta}}(\tau) - F_{\text{beta}}(\tau)] S_{\text{máx}}^\xi - (s-p)\Delta \left[\frac{\tau (1-\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\alpha} - \left(1 - (1-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right] S_{\text{máx}} - K\Delta = 0 \quad (1.41)$$

con $\tau_{\text{mín}} < \tau < 1$. Las soluciones pueden encontrarse del mismo modo que para la ecuación $\Phi_1(\tau) = 0$ y, haciendo $S = S_{\text{máx}}$, tendremos los posibles candidatos en la subregión Ω_3 .

Análisis en la subregión Ω_4 . Como dicha frontera está definida por la curva $\tau S^\alpha - \alpha \lambda T_{\text{mín}} = 0$, podemos utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange, definiendo la función

$$\Psi(\tau, S) = g(\tau, S) - \eta (\tau S^\alpha - \alpha \lambda T_{\text{mín}})$$

Entonces, el sistema de ecuaciones que hay que resolver es

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}(\tau, S) &= \frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau, S) - \eta S^\alpha = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial S}(\tau, S) &= \frac{\partial g}{\partial S}(\tau, S) - \eta \alpha \tau S^{\alpha-1} = 0 \\ \tau S^\alpha - \alpha \lambda T_{\text{mín}} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

o, equivalentemente

$$\left. \begin{aligned} \eta &= S^{-\alpha} \frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau, S) \\ \frac{\partial g}{\partial S}(\tau, S) &= \frac{\alpha \tau}{S} \frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau, S) \\ \tau S^\alpha - \alpha \lambda T_{\text{mín}} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Usando la expresión (1.37), la segunda ecuación puede reescribirse como

$$\frac{\partial g}{\partial S}(\tau, S) = \frac{[\alpha \tau f_{\text{beta}}(\tau) - \xi F_{\text{beta}}(\tau)] S^{\xi-1} + (s-p)\Delta \left[1 - (1-\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right]}{\tau S^\alpha} + \frac{\partial g}{\partial S}(\tau, S)$$

y por tanto el sistema anterior es equivalente a este otro

$$\left. \begin{aligned} \eta &= S^{-\alpha} \frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau, S) \\ S &= w(\tau) \\ \tau S^\alpha - \alpha \lambda T_{\text{mín}} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde $w(\tau)$ está definido por (1.39). Las posibles soluciones pueden obtenerse, entonces, resolviendo la ecuación

$$\Phi_3(\tau) = \tau [w(\tau)]^\alpha - \alpha \lambda T_{\min} = 0 \quad (1.42)$$

con $\tau_{\min} < \tau < 1$ y haciendo $S = w(\tau)$. Por tanto, del mismo modo que en los casos anteriores, podemos obtener los posibles candidatos en la subregión Ω_4 .

Con estos análisis previos, podemos ser capaces de elaborar una lista con todos los posibles candidatos para la solución del problema (1.34), la cual estará formada por: (i) el punto $(1, S_1^*)$; (ii) los puntos (τ, S) con $\Phi_1(\tau) = 0$, $\tau_{\min} < \tau < 1$, $\tau [w(\tau)]^\alpha > \alpha \lambda T_{\min}$ y $S = w(\tau)$; (iii) los puntos (τ, S_{\max}) con $\Phi_2(\tau) = 0$ y $\tau_{\min} < \tau < 1$; (iv) los puntos (τ, S) con $\Phi_3(\tau) = 0$, $\tau_{\min} < \tau < 1$ y $S = w(\tau)$; y (v) el punto (τ_{\min}, S_{\max}) .

Finalmente, la función objetivo $g(\tau, S)$ puede ser evaluada en todos estos puntos y seleccionar aquel punto, (τ^*, S^*) , para el que se obtenga el menor valor $g(\tau, S)$.

El siguiente teorema proporciona la solución óptima del modelo en el caso especial de que $\beta = 0$ o $s = p$.

Teorema 1.17 *Si $\beta = 0$ o $s = p$ la solución para el problema (1.34) se obtiene en el punto (τ^*, S^*) , siendo $\tau^* = 1$ y*

$$S^* = \begin{cases} S_{\min} & \text{si } v^{\frac{1}{\xi}} \leq S_{\min} \\ v^{\frac{1}{\xi}} & \text{si } S_{\min} < v^{\frac{1}{\xi}} < S_{\max} \\ S_{\max} & \text{si } v^{\frac{1}{\xi}} \geq S_{\max} \end{cases}$$

con $\alpha = 1 - \beta$, $\xi = \alpha \gamma_1 + \gamma_2$, $v = \frac{\alpha K \Delta}{\xi - \alpha}$ y $\Delta = \frac{(\alpha \lambda)^{\gamma_1}}{h \gamma_1 B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1)}$.

Demostración. Si $\beta = 0$ o $s = p$, en la subregión Ω_2 , no hay puntos estacionarios para la función $g(\tau, S)$ ya que, si $\frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau, S) = 0$, usando (1.37), se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial S}(\tau, S) = \frac{[\xi F_{beta}(\tau) - \alpha \tau f_{beta}(\tau)] S^{\xi-1-\alpha}}{\tau} > 0$$

Por tanto, no existen candidatos en la subregión Ω_2 .

Además, una posible solución $(\tau_o, S_{\text{máx}})$ en la subregión Ω_3 debería verificar que $\frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau_o, S_{\text{máx}}) = 0$ y, usando de nuevo la expresión (1.37), se tendría que

$$\frac{\partial g}{\partial S}(\tau_o, S_{\text{máx}}) = \frac{[\xi F_{\text{beta}}(\tau_o) - \alpha \tau_o f_{\text{beta}}(\tau_o)] S_{\text{máx}}^{\xi-1-\alpha}}{\tau_o} > 0$$

Como consecuencia de ello, la derivada direccional de la función $g(\tau, S)$ en la dirección del vector $(0, -1)$ en el punto $(\tau_o, S_{\text{máx}})$ es $d_{(0,-1)}g(\tau_o, S_{\text{máx}}) = -\frac{\partial g}{\partial S}(\tau_o, S_{\text{máx}}) < 0$ y podemos asegurar que existen puntos en el interior de la región factible Ω con $g(\tau, S) < g(\tau_o, S_{\text{máx}})$. Por tanto, $(\tau_o, S_{\text{máx}})$ no puede ser la solución del problema y tampoco existen candidatos en la subregión Ω_3 .

Finalmente, para las subregiones Ω_4 y Ω_5 , la función $g(\tau, S)$ con $\tau_{\text{mín}} \leq \tau < 1$ puede expresarse como

$$g_{45}(\tau) = (\alpha \lambda T_{\text{mín}})^{\frac{\xi}{\alpha}-1} \tau^{-\frac{\xi}{\alpha}} F_{\text{beta}}(\tau) + \frac{K \Delta}{\alpha \lambda T_{\text{mín}}} - C$$

con $C = 0$ si $s = p$ y $C = (s - p) \Delta$ si $\beta = 0$. Entonces, se verifica que

$$g'_{45}(\tau) = \frac{(\alpha \lambda T_{\text{mín}})^{\frac{\xi}{\alpha}-1}}{\alpha \tau^{1+\frac{\xi}{\alpha}}} [\alpha \tau f_{\text{beta}}(\tau) - \xi F_{\text{beta}}(\tau)] < 0$$

para todo $\tau \in [\tau_{\text{mín}}, 1)$ y podemos asegurar que el mínimo global no puede estar en esas dos subregiones.

Por tanto, la solución del problema (1.34) se obtiene en la subregión Ω_1 , para la cual, como ya estudiamos en el análisis de dicha subregión, el valor óptimo es el punto S_1^* dado por (1.35). Por último, la expresión (1.15) nos asegura que, si $\beta = 0$ o $s = p$, se tiene que $S_o^* = v^{\frac{1}{\xi}}$ y, por tanto, S_1^* coincide con el valor S^* dado en este teorema. ■

Como ya hemos comentado en secciones anteriores, el caso $\beta = 0$ corresponde al modelo con tasa de demanda constante y el caso $s = p$ al problema de mínimo coste del inventario por unidad de tiempo. Por tanto, teniendo en cuenta que $\tau^* = 1$ es equivalente a $r^* = 0$, el teorema anterior demuestra que, para estos dos casos, resulta adecuado esperar a que el stock se agote para reponer el inventario. Sin embargo, para otros casos, la solución óptima podría obtenerse con un punto de reabastecimiento $r^* > 0$.

El algoritmo que damos a continuación nos permite encontrar la solución óptima del modelo en el resto de casos no incluidos en el teorema anterior, es decir, cuando $\beta > 0$ y $s > p$.

Algoritmo 2. Obtención de la política óptima en el modelo si $\beta > 0$ y $s > p$.

Paso 1. Calcular $\Delta = \frac{(\alpha\lambda)^{\gamma_1}}{h\gamma_1 B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1)}$, $\xi = \alpha\gamma_1 + \gamma_2$, $u = \frac{(1-\alpha)(s-p)\Delta}{\xi-\alpha}$, $v = \frac{\alpha K\Delta}{\xi-\alpha}$,

$$S_{\min} = (\alpha\lambda T_{\min})^{\frac{1}{\alpha}} \text{ y } \tau_{\min} = \frac{\alpha\lambda T_{\min}}{S_{\max}^{\alpha}}.$$

Paso 2. Programar la función

$$g(\tau, S) = \frac{F_{\text{beta}}(\tau)S^{\xi-\alpha} - (s-p)\Delta \left[1 - (1-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right] S^{1-\alpha} + K\Delta S^{-\alpha}}{\tau}$$

Paso 3. Calcular el valor $S_1^* = q^*$ utilizando el Algoritmo 1.

(i) Si $S_1^* < S_{\min}$ hacer $S_1^* = S_{\min}$.

(ii) Si $S_1^* > S_{\max}$ hacer $S_1^* = S_{\max}$.

(iii) Elegir $S^* = S_1^*$, $\tau^* = 1$ y calcular $g(\tau^*, S^*)$.

Paso 4. Programar las funciones $w(\tau)$, $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$ y $\Phi_3(\tau)$ con las expresiones (1.39), (1.40), (1.41) y (1.42) respectivamente.

Paso 5. Seleccionar la precisión δ para la variable τ y hacer $n = \lceil \frac{1-\tau_{\min}}{\delta} \rceil$, donde $\lceil x \rceil$ representa la parte entera superior del número real x .

Paso 6. Para $i = 0, 1, \dots, n-1$ ejecutar los siguientes pasos:

(i) Hacer $\tau_i = \tau_{\min} + i \frac{1-\tau_{\min}}{n}$.

(ii) Si $\Phi_1(\tau_i)\Phi_1\left(\tau_i + \frac{1-\tau_{\min}}{n}\right) \leq 0$, $w(\tau_i) < S_{\max}$, $\tau_i [w(\tau_i)]^{\alpha} > \alpha\lambda T_{\min}$ y

$g(\tau_i, w(\tau_i)) < g(\tau^*, S^*)$ entonces elegir $\tau^* = \tau_i$, $S^* = w(\tau_i)$ y

calcular $g(\tau^*, S^*)$.

(iii) Si $\Phi_2(\tau_i)\Phi_2\left(\tau_i + \frac{1-\tau_{\min}}{n}\right) \leq 0$ y $g(\tau_i, S_{\max}) < g(\tau^*, S^*)$ entonces

elegir $\tau^* = \tau_i$, $S^* = S_{\max}$ y calcular $g(\tau^*, S^*)$.

(iv) Si $\Phi_3(\tau_i)\Phi_3\left(\tau_i + \frac{1-\tau_{\min}}{n}\right) \leq 0$ y $g(\tau_i, w(\tau_i)) < g(\tau^*, S^*)$ entonces

elegir $\tau^* = \tau_i$, $S^* = w(\tau_i)$ y calcular $g(\tau^*, S^*)$.

Paso 7. Si $g(\tau_{\min}, S_{\max}) < g(\tau^*, S^*)$ entonces elegir $\tau^* = \tau_{\min}$, $S^* = S_{\max}$ y calcular $g(\tau^*, S^*)$.

Paso 8. Evaluar el beneficio óptimo $G^* = G(\tau^*, S^*) = -\frac{\alpha\lambda}{\Delta}g(\tau^*, S^*)$, el punto de reabastecimiento $r^* = S^*(1 - \tau^*)^{\frac{1}{\alpha}}$, la longitud del ciclo del inventario $T^* = \frac{\tau^*(S^*)^\alpha}{\alpha\lambda}$ y el tamaño óptimo de pedido $q^* = S^* - r^* = S^* \left[1 - (1 - \tau^*)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$.

Nota. Una vez obtenida la solución para el modelo con $r \geq 0$, resulta interesante evaluar el tamaño medio del inventario con el propósito de compararlo con el tamaño medio que obtendríamos en el caso $r = 0$. Teniendo en cuenta que, para cualesquiera valores (S, r) se tiene $T = \frac{S^\alpha - r^\alpha}{\alpha\lambda}$, podemos evaluar el tamaño medio del inventario como

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [S^\alpha - \alpha\lambda t]^\frac{1}{\alpha} dt = \frac{-1}{(1 + \alpha)\lambda T} [r^{1+\alpha} - S^{1+\alpha}] \\ &= \frac{\alpha}{1 + \alpha} \left[\frac{S^{1+\alpha} - r^{1+\alpha}}{S^\alpha - r^\alpha} \right] = \frac{\alpha S}{1 + \alpha} \left[\frac{1 - \left(\frac{r}{S}\right)^{1+\alpha}}{1 - \left(\frac{r}{S}\right)^\alpha} \right] \end{aligned} \quad (1.43)$$

Por tanto, es claro que, si $r > 0$, como $\left(\frac{r}{S}\right)^{1+\alpha} < \left(\frac{r}{S}\right)^\alpha$, entonces $\bar{I} > \frac{\alpha S}{1+\alpha}$ y esta cantidad resulta ser el nivel medio del inventario en el modelo con $r = 0$, si se usa el mismo nivel de pedido S . Por lo tanto, si $\beta > 0$ y $s > p$, el modelo con $r \geq 0$ proporciona un mayor beneficio por unidad de tiempo, pero conduce a un mayor nivel medio del inventario que el modelo con $r = 0$.

1.7.3. Un caso particular

El modelo introducido en Baker y Urban (1988) puede obtenerse como un caso particular del modelo que hemos presentado en esta sección, haciendo $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ y usando la notación $S = Q$, $r = i_T$, $p = c$, $K = C_0$, $h = C_h$ y $\lambda = \alpha$ (por eso necesitamos usar siempre $1 - \beta$ en lugar de α). En efecto, para esos valores se tiene que $B(1, \frac{1}{1-\beta} + 1) = \frac{1-\beta}{2-\beta}$, $\Delta = \frac{(1-\beta)\alpha}{C_h \frac{1-\beta}{2-\beta}} = \frac{\alpha(2-\beta)}{C_h}$, $f_{beta}(\tau) = \frac{2-\beta}{1-\beta} (1 - \tau)^{\frac{1}{1-\beta}}$, $F_{beta}(\tau) = 1 - (1 - \tau)^{\frac{2-\beta}{1-\beta}}$, $\tau = 1 - \left(\frac{i_T}{Q}\right)^{1-\beta}$ y $T = \frac{\tau Q^{1-\beta}}{(1-\beta)\alpha} = \frac{Q^{1-\beta} - i_T^{1-\beta}}{(1-\beta)\alpha}$. Utilizando las

variables (i_T, Q) y sustituyendo estas expresiones en la fórmula (1.31) para el beneficio del inventario por unidad de tiempo, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 G(i_T, Q) &= - \left[\frac{-(s-c)Q \left(1 - \frac{i_T}{Q}\right) + C_0 + \frac{C_h}{\alpha(2-\beta)} Q^{2-\beta} \left[1 - \left(\frac{i_T}{Q}\right)^{2-\beta}\right]}{T} \right] \\
 &= \frac{-C_0 + \left[(s-c)Q - \frac{C_h}{\alpha(2-\beta)} Q^{2-\beta}\right] - \left[(s-c)i_T - \frac{C_h}{\alpha(2-\beta)} i_T^{2-\beta}\right]}{T}
 \end{aligned}$$

que es la misma función obtenida por los citados autores. Podemos observar entonces que, para este caso especial, $G(i_T, Q)$ es un cociente de dos funciones separables en las variables i_T y Q . Por este motivo, Baker y Urban usaron una metodología de programación separable para obtener una solución aproximada para el modelo. Para el caso general que hemos presentado en esta sección, la separación de variables no es posible y, por tanto, su metodología para obtener una solución aproximada no es aplicable. No obstante, podemos resolver el problema planteado por los citados autores utilizando el Algoritmo 2 presentado anteriormente con las variables de decisión (τ, S) en lugar de (i_T, Q) .

Por ejemplo, con los mismos valores utilizados por los citados autores en su artículo ($\lambda = 0.5$, $\beta = 0.4$, $K = 10$, $h = 0.5$, $s = 20$, $p = 10$, $S_{\text{máx}} = 40$) junto con $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ y un valor $T_{\text{mín}} = 0.001$, el algoritmo anterior proporciona el punto $(1, S_1^*) = (1, 24.37)$ como mínimo en la subregión Ω_1 con valor $G(1, S_1^*) = 5.75$; un único punto estacionario $(\tau_2^*, S_2^*) = (0.661, 20.67)$ en la subregión Ω_2 con $G(\tau_2^*, S_2^*) = 6.46$; $G(\tau_{\text{mín}}, S_{\text{máx}}) = -9998.1$ y ningún candidato en las subregiones Ω_3 y Ω_4 . Por consiguiente, el beneficio óptimo obtenido es $G^* = 6.46$ para $\tau^* = 0.661$ y $S^* = 20.67$, obteniéndose entonces que $r^* = 3.40$ y $T^* = 13.57$. La solución aproximada dada en Baker y Urban (1998) es $S^* = 22.2$, $r^* = 5.0$, $T^* = 12.6$ y $G^* = 6.40$, la cual efectivamente coincide de forma aproximada con la solución obtenida ahora. Además, podemos observar que, si hacemos $r = 0$, el beneficio óptimo sería $G(1, S_1^*) = 5.75$ y por tanto el valor obtenido ahora ($G^* = 6.46$) es un 11.3% mayor. Por otro lado, el nivel medio del inventario es $\bar{I} = 9.14$ para el modelo con $r = 0$, mientras que para el

modelo con $r \geq 0$ se tiene que $\bar{I} = 11.07$, lo cual es un 21.1% más grande.

1.7.4. Un ejemplo numérico con análisis de sensibilidad

A continuación presentamos un ejemplo numérico para ilustrar el modelo introducido en esta sección y su procedimiento de resolución, incluyendo un análisis de sensibilidad de la solución óptima con respecto a los tres parámetros de elasticidad β , γ_1 y γ_2 considerados en el mismo. Además, las soluciones óptimas para los modelos con $r \geq 0$ y $r = 0$ serán comparadas para analizar las diferencias entre ellas. Al igual que en los ejemplos numéricos de la sección 1.6 anterior, suponemos que el sistema de inventario tiene los siguientes parámetros: $\lambda = 1$, $K = 10$, $h = 0.5$, $s = 62$, $p = 50$ y elegimos $S_{\max} = 10^6$ y $T_{\min} = 10^{-6}$.

Sensibilidad respecto al parámetro de elasticidad de la demanda β

En primer lugar, para evaluar el efecto del parámetro de elasticidad de la demanda β , hemos usado el Algoritmo 2 para obtener los valores óptimos para el nivel de pedido (S^*), el punto de reabastecimiento (r^*), el tamaño de pedido ($q^* = S^* - r^*$), la longitud del ciclo (T^*), el nivel medio del inventario (\bar{I}) y el beneficio máximo por unidad de tiempo (G^*), tanto para el caso $r \geq 0$ como para el caso $r = 0$, usando diferentes valores para el parámetro β y suponiendo siempre que $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$. Estos resultados computacionales se muestran en la Tabla 1.7. Además, en la Figura 1.12 representamos la variación del beneficio óptimo (izquierda) y del nivel medio del inventario óptimo (derecha) con respecto al parámetro β , tanto para el caso $r \geq 0$ como para el caso $r = 0$.

A la vista de estos resultados numéricos, pueden hacerse los siguientes comentarios sobre el efecto del parámetro de elasticidad β en la solución óptima para este ejemplo numérico cuando $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$:

1. El beneficio máximo por unidad de tiempo y el inventario medio para la solución óptima son siempre más altos para el modelo con $r \geq 0$ que para el modelo con $r = 0$. Además, las soluciones sólo coinciden cuando $\beta = 0$, lo cual era de esperar si tenemos

en cuenta el Teorema 1.17. Por tanto, para este ejemplo numérico, la política de nivel cero de inventario en el momento de realizar un nuevo pedido sólo es óptima cuando la tasa de demanda es constante y no depende del nivel del inventario.

2. La solución óptima para el modelo con $r \geq 0$ se obtiene siempre usando un menor tamaño de pedido y una menor longitud de ciclo que en el modelo con $r = 0$.

Tabla 1.7. Soluciones óptimas para $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$ y diferentes valores para β

β	Con $r \geq 0$						Con $r = 0$			
	r^*	S^*	q^*	T^*	\bar{I}	G^*	$S^* = q^*$	T^*	\bar{I}	G^*
0	0	3.24	3.24	3.24	1.62	7.37	3.24	3.24	1.62	7.37
0.1	0.01	3.77	3.76	3.65	1.80	7.72	3.77	3.67	1.79	7.72
0.2	0.17	4.47	4.30	3.84	2.14	8.32	4.51	4.17	2.00	8.21
0.3	0.54	5.39	4.85	3.41	2.72	9.40	5.58	4.76	2.30	8.89
0.4	1.30	6.68	5.38	3.26	3.71	11.31	7.18	5.44	2.70	9.87
0.5	3.25	8.81	5.56	2.33	5.80	14.93	9.77	6.25	3.26	11.34
0.6	10.72	15.33	4.61	0.99	12.94	23.59	14.30	7.25	4.09	13.62
0.7	50.00	53.66	3.66	0.23	51.82	58.25	23.32	8.57	5.38	17.42

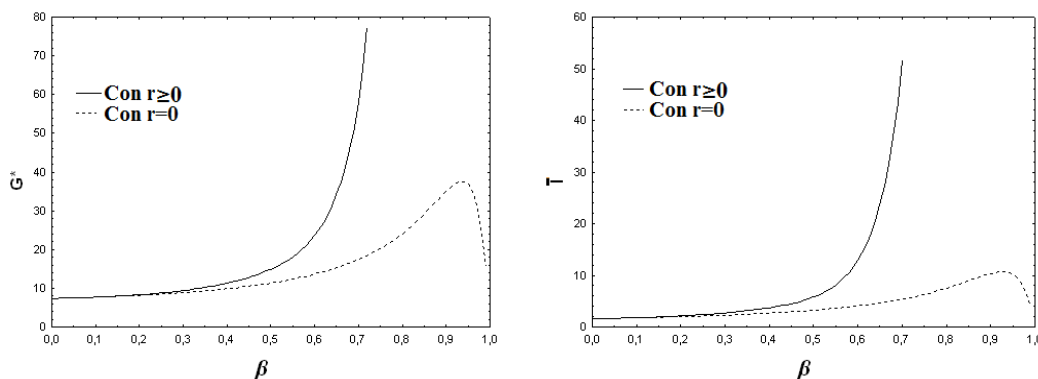


Figura 1.12. Curvas de beneficio óptimo e inventario medio en función de β

3. La Tabla 1.7 muestra que el valor óptimo para el punto de reabastecimiento r^* crece con el parámetro β , al igual que ocurre con el nivel de pedido óptimo (S^*) y el nivel medio del inventario (\bar{I}). Estas dos últimas cantidades también crecen con dicho parámetro en el caso de que $r = 0$. En cambio, si el parámetro β aumenta, la longitud óptima del ciclo del inventario tiene un comportamiento distinto cuando

$r \geq 0$ (empieza creciendo y después pasa a ser decreciente) que cuando $r = 0$ (en este caso siempre crece). También observamos que en el modelo con $r \geq 0$ el tamaño óptimo de pedido q^* empieza creciendo con el parámetro β para pasar después a ser decreciente si este parámetro está por encima de 0.5.

4. Como puede observarse en la Tabla 1.7 y en la Figura 1.12, la diferencia en el beneficio máximo entre los modelos con $r \geq 0$ y $r = 0$ es mayor cuanto más grande es el parámetro β . Empieza siendo pequeña para $\beta \in [0, 0.2]$ y es más relevante para $\beta \in [0.2, 0.7]$. Por ejemplo, el incremento relativo en el beneficio óptimo es de 5.1 % para $\beta = 0.2$, 31.7 % para $\beta = 0.5$ y 334.4 % para $\beta = 0.7$. El mismo comportamiento puede observarse con el nivel medio del inventario para ambas soluciones, pero ahora los incrementos relativos son más altos: un 7.0 % para $\beta = 0.2$, un 77.9 % para $\beta = 0.5$ y 963.1 % para $\beta = 0.7$.

5. Aunque quizás no sea de interés desde el punto de vista práctico, merece la pena comentar que el máximo beneficio por unidad de tiempo y el nivel medio del inventario para la solución óptima convergen hacia infinito cuando el parámetro β tiende hacia 1 en el modelo con $r \geq 0$, mientras que convergen hacia cero cuando $r = 0$.

Sensibilidad respecto al parámetro de elasticidad γ_1 del coste de almacenamiento

A continuación, para analizar el efecto del parámetro γ_1 sobre la solución, hemos repetido los mismos cálculos con $\beta = 0.3$, $\gamma_2 = 1.5$ y diferentes valores para γ_1 comprendidos entre 1 y 4. Estos resultados numéricos se muestran en la Tabla 1.8. La representación gráfica de la variación del beneficio óptimo (izquierda) y del nivel medio del inventario óptimo (derecha) con respecto al parámetro γ_1 , tanto para el caso $r \geq 0$ como para el caso $r = 0$, puede verse en la Figura 1.13, suponiendo siempre que $\beta = 0.3$ y $\gamma_2 = 1.5$.

A la vista de estos resultados numéricos, pueden hacerse los siguientes comentarios sobre el efecto del parámetro γ_1 en la solución óptima para este ejemplo numérico:

1. En la Tabla 1.8 observamos que, para $\beta = 0.3$ y $\gamma_2 = 1.5$, todas las cantidades decrecen cuando el parámetro γ_1 aumenta, tanto en el modelo con $r \geq 0$ como en el caso $r = 0$.

Tabla 1.8. Soluciones óptimas para $\beta = 0.3$, $\gamma_2 = 1.5$ y diferentes valores γ_1

γ_1	γ_2	Con $r \geq 0$						Con $r = 0$			
		r^*	S^*	q^*	T^*	\bar{I}	G^*	$S^* = q^*$	T^*	\bar{I}	G^*
1	1.5	0.87	7.97	7.10	4.81	4.07	11.12	8.47	6.37	3.49	10.46
1.5	1.5	0.54	5.39	4.85	3.41	2.72	9.40	5.58	4.76	2.30	8.89
2	1.5	0.37	4.12	3.75	3.14	2.04	8.18	4.20	3.90	1.73	7.78
2.5	1.5	0.26	3.37	3.11	2.79	1.64	7.24	3.41	3.37	1.40	6.92
3	1.5	0.19	2.88	2.69	2.55	1.38	6.48	2.90	3.01	1.19	6.23
3.5	1.5	0.14	2.53	2.39	2.38	1.19	5.85	2.54	2.75	1.07	5.66
4	1.5	0.10	2.28	2.18	2.25	1.06	5.33	2.28	2.55	0.94	5.17

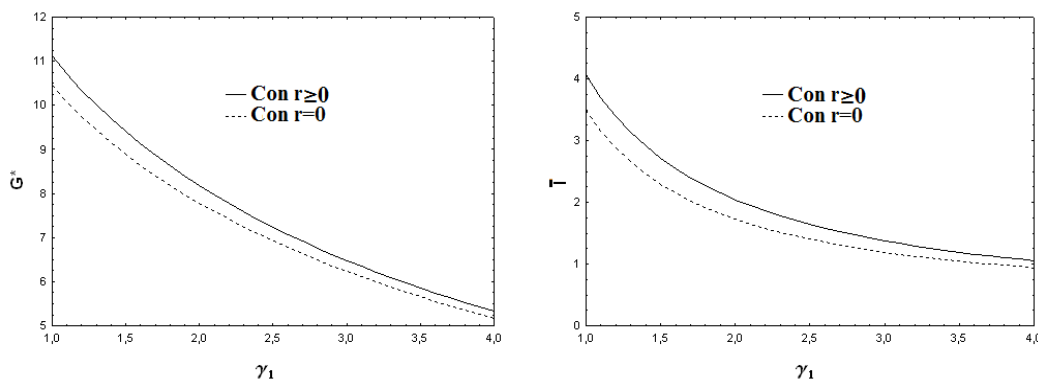


Figura 1.13. Curvas de beneficio óptimo e inventario medio en función de γ_1

2. Como puede observarse en la Figura 1.13, las diferencias entre los modelos con $r \geq 0$ y $r = 0$ respecto al máximo beneficio y el nivel medio del inventario para la solución óptima, son ahora menos importantes para los valores fijos $\beta = 0.3$ y $\gamma_2 = 1.5$ y tienden a desaparecer cuando el parámetro γ_1 aumenta. Por ejemplo, el incremento en el beneficio para el modelo con $r \geq 0$ respecto al modelo con $r = 0$ es sólo de 0.66 unidades para $\gamma_1 = 1$, 0.32 para $\gamma_1 = 2.5$ y 0.16 para $\gamma_1 = 4$ y el incremento en el tamaño medio del inventario es de 0.58 para $\gamma_1 = 1$, 0.24 para $\gamma_1 = 2.5$ y 0.12 para

$\gamma_1 = 4$. En términos relativos, la máxima diferencia en el beneficio óptimo es de 6.3% cuando $\gamma_1 = 1$ y, para el nivel medio del inventario es de 18.3% cuando $\gamma_1 = 1.5$.

Sensibilidad respecto al parámetro de elasticidad γ_2 del coste de almacenamiento

A continuación, para analizar el efecto del parámetro γ_2 sobre la solución, hemos repetido los mismos cálculos con $\beta = 0.3$, $\gamma_1 = 1.5$ y diferentes valores para γ_2 comprendidos entre 1 y 4. Estos resultados numéricos se muestran en la Tabla 1.9. La representación gráfica de la variación del beneficio óptimo (izquierda) y del nivel medio del inventario óptimo (derecha) con respecto al parámetro γ_2 , tanto para el caso $r \geq 0$ como para el caso $r = 0$, puede verse en la Figura 1.14, suponiendo que $\beta = 0.3$ y $\gamma_1 = 1.5$.

A la vista de estos resultados numéricos, pueden hacerse los siguientes comentarios sobre el efecto del parámetro γ_2 en la solución óptima para este ejemplo numérico:

1. En la Tabla 1.9 observamos que, para $\beta = 0.3$ y $\gamma_1 = 1.5$, todas las cantidades decrecen cuando el parámetro γ_2 aumenta, tanto en el modelo con $r \geq 0$ como en el caso $r = 0$.

Tabla 1.9. Soluciones óptimas para $\beta = 0.3$, $\gamma_1 = 1.5$ y diferentes valores γ_2

		Con $r \geq 0$						Con $r = 0$			
γ_1	γ_2	r^*	S^*	q^*	T^*	\bar{I}	G^*	$S^* = q^*$	T^*	\bar{I}	G^*
1.5	1	4.35	10.69	6.34	3.50	7.38	12.55	10.70	7.51	4.40	11.28
1.5	1.5	0.54	5.39	4.85	3.41	2.72	9.40	5.58	4.76	2.30	8.89
1.5	2	0.26	3.87	3.61	3.13	1.86	7.94	3.95	3.74	1.63	7.59
1.5	2.5	0.17	3.13	2.96	2.77	1.47	7.00	3.17	3.20	1.31	6.74
1.5	3	0.12	2.70	2.58	2.54	1.25	6.33	2.72	2.88	1.12	6.12
1.5	3.5	0.09	2.41	2.32	2.38	1.10	5.82	2.42	2.65	1.00	5.65
1.5	4	0.07	2.21	2.14	2.26	1.00	5.42	2.22	2.49	0.91	5.27

2. Resulta interesante señalar que el beneficio máximo por unidad de tiempo y el nivel medio del inventario para la solución óptima son mayores para los valores

del parámetro γ_1 cuando el γ_2 es fijo (Tabla 1.8) que para esos mismos valores del parámetro γ_2 cuando γ_1 es fijo (Tabla 1.9), tanto en el caso $r \geq 0$ como en el caso $r = 0$. Esta diferencia es consistente con el hecho observado por Naddor (1982) para modelos con tasa de demanda constante, de que valores de $\gamma_2 > 1$ generan un mayor coste de almacenamiento que similares valores del parámetro γ_1 y por tanto conducen a menores tamaños de pedido y un beneficio óptimo por unidad de tiempo más bajo.

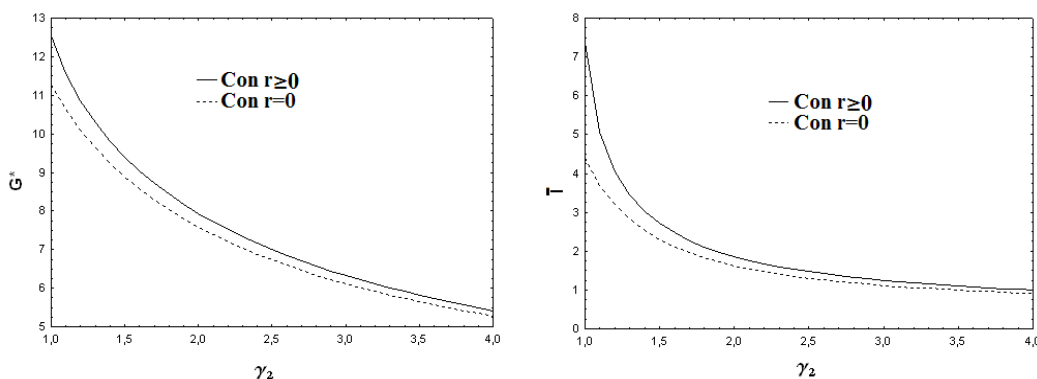


Figura 1.14. Curvas de beneficio óptimo e inventario medio en función de γ_2

3. Como puede observarse en la Figura 1.14, las diferencias entre los modelos con $r \geq 0$ y $r = 0$ respecto al máximo beneficio y el nivel medio del inventario para la solución óptima, son también ahora pequeñas para los valores fijos $\beta = 0.3$ y $\gamma_1 = 1.5$ y tienden a desaparecer cuando se incrementan los valores del parámetro γ_2 . Las mejoras en el beneficio máximo por unidad de tiempo en el modelo con $r \geq 0$ respecto al modelo con $r = 0$ son de 1.27 para $\gamma_2 = 1$, 0.26 para $\gamma_2 = 2.5$ y 0.15 para $\gamma_2 = 4$ y los incrementos en el nivel medio del inventario son 2.98 para $\gamma_2 = 1$, 0.16 para $\gamma_2 = 2.5$ y 0.09 para $\gamma_2 = 4$. En términos relativos, las máximas diferencias son de un 11.3% para el beneficio máximo por unidad de tiempo y de un 67.7% para el nivel medio del inventario, en ambos casos cuando $\gamma_2 = 1$.

Todos los cálculos expuestos en esta sección han sido desarrollados utilizando un programa de software específico diseñado para ello y escrito en lenguaje SAS (SAS Institute Inc., 2005), cuya redacción se incluye en la sección A.2 del Apéndice A, al final de este documento.

1.8. Una extensión con coste de deterioro

De modo similar a lo hecho en la sección anterior, a continuación desarrollamos la extensión señalada en el apartado (vi) de la página 51. Es decir, en el contexto del modelo introducido en la sección 1.2, suponemos que existen costes debidos al deterioro del producto mientras permanece en el inventario.

Con cierta frecuencia, los modelos matemáticos para el estudio de sistemas de inventario suponen que el producto puede ser almacenado convenientemente durante el ciclo de inventario sin sufrir cambio alguno. Esta simplificación permite una formulación matemática más sencilla del problema considerado. Sin embargo, en muchas situaciones reales se observa que determinado tipo de productos pueden deteriorarse durante el periodo normal de almacenamiento. Así ocurre, por ejemplo, con productos comestibles como fruta, leche, vegetales o carne, y también, con productos que pierden calidad como películas fotográficas, componentes electrónicos, alcohol, perfumes o gasolina. Aunque habitualmente la proporción de producto deteriorado por unidad de tiempo suele ser pequeña, cuando la duración del ciclo de inventario es relativamente grande o el precio unitario de los productos es elevado, puede ocurrir que el impacto económico del coste asociado con ese deterioro sea importante y, por tanto, debe ser tenido en cuenta en los correspondientes modelos matemáticos.

Por tal motivo, durante las últimas décadas muchos investigadores han desarrollado modelos para este tipo de productos. Within (1957) y Ghare y Schrader (1963) fueron los trabajos pioneros en esta materia y, desde entonces, varias recopilaciones de los sucesivos avances en la literatura de inventarios para productos perecederos han sido publicadas. Entre ellas tenemos las siguientes: Nahmias (1982), Raafat (1991), Goyal y Giri (2001) y Bakker et al. (2012). Para ilustrar el grado de desarrollo de esta línea de investigación, basta señalar que en esta última recopilación se incluyen 241 referencias que han sido publicadas en las principales revistas científicas sobre esta materia durante el periodo comprendido entre enero de 2001 y diciembre de 2011. Algunas de ellas serán citadas en el estudio que haremos a continuación.

En el contexto del deterioro, algunos autores han supuesto que su tasa por unidad de tiempo es estocástica, pero mayoritariamente se supone que es determinística. En el trabajo que desarrollaremos en esta sección, se utilizará esta perspectiva.

Centrándonos en los modelos de inventario para productos perecederos con costes de almacenamiento no lineales, los trabajos son más bien escasos. Inicialmente, en este contexto, Giri y Chaudhuri (1998) consideraron dos casos: un modelo con coste de almacenamiento no lineal con respecto al tiempo y otro con coste de almacenamiento no lineal respecto a la cantidad de producto almacenado. Estos dos modelos generalizan los modelos planteados en Goh (1994) para el caso sin deterioro. Además, en ellos se supone que, en cada instante, la tasa de deterioro por unidad de tiempo es una pequeña fracción constante del nivel del inventario y que la tasa de demanda es una función potencial cóncava del nivel del inventario. Ahora bien, en todos estos modelos se plantea como objetivo la minimización del coste total del inventario por unidad de tiempo (calculado sumando el coste de pedido, el coste de almacenamiento y el coste del deterioro). Es decir, no se tienen en cuenta ni el coste de adquisición ni los ingresos por ventas. Entonces, como ya hemos comentado en la subsección 1.5.1, puede ocurrir que la solución de mínimo coste proporcionada por esos modelos no necesariamente sea la solución que proporciona un mayor beneficio por unidad de tiempo.

El objetivo que nos planteamos en esta sección es extender el modelo presentado en la sección 1.2 considerando que, en cada momento, sobre el inventario existente se produce una pequeña fracción constante de deterioro por unidad de tiempo θ , con $0 < \theta \ll 1$. Por tanto, esta hipótesis requiere la consideración del coste resultante de la pérdida de beneficios asociada a la cantidad de productos deteriorados, y también por el efecto que tal cantidad tiene sobre la demanda, ya que estamos considerando que ésta depende del nivel del inventario existente.

En la Tabla 1.10 se incluye la notación adicional que utilizaremos a lo largo de esta sección.

Tabla 1.10. Notación adicional para esta sección

θ	tasa de deterioro por unidad y por unidad de tiempo ($0 < \theta \ll 1$)
$I_\theta(t)$	nivel del inventario en el instante t cuando la tasa de deterioro es θ
$\tau = (\alpha\lambda T)^\frac{1}{\alpha}$	variable auxiliar de decisión (> 0)

Con la nueva hipótesis introducida sobre el deterioro, que se añade ahora a las dadas en la página 8 al inicio de la sección 1.2, es claro que el nivel del inventario $I_\theta(t)$ en el instante $t \in (0, T)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dI_\theta(t)}{dt} = -\lambda [I_\theta(t)]^\beta - \theta I_\theta(t) \quad 0 < t < T \quad (1.44)$$

con las condiciones de frontera $I_\theta(0+) = q$ e $I_\theta(T-) = 0$.

Como $\theta > 0$ y $\beta = 1 - \alpha$, multiplicando ambos miembros de la igualdad por $[I_\theta(t)]^{\alpha-1}$, esta ecuación diferencial puede expresarse como

$$\frac{[I_\theta(t)]^{\alpha-1}}{\lambda + \theta [I_\theta(t)]^\alpha} dI_\theta(t) = -dt$$

y por tanto, la curva del inventario $I_\theta(t)$ en forma implícita es

$$\ln [\lambda + \theta [I_\theta(t)]^\alpha] = -\alpha\theta t + C \quad (1.45)$$

Utilizando la longitud de ciclo T como variable de decisión y la condición inicial $I_\theta(T-) = 0$, se tiene $C = \alpha\theta T + \ln(\lambda)$ y, por tanto

$$I_\theta(t) = \lambda^\frac{1}{\alpha} \left[\frac{e^{\alpha\theta(T-t)} - 1}{\theta} \right]^\frac{1}{\alpha} \quad (1.46)$$

Además, $q = I_\theta(0+) = \lambda^\frac{1}{\alpha} \left(\frac{e^{\alpha\theta T} - 1}{\theta} \right)^\frac{1}{\alpha}$.

En consecuencia, utilizando el Lema 1.1 para evaluar el coste de almacenamiento, el beneficio por ciclo de inventario puede calcularse como la diferencia entre: (i) los ingresos totales por ciclo $IN(T) = s \int_0^T \lambda [I_\theta(t)]^\beta dt$ y (ii) la suma del coste de adquisición $pI_\theta(0+)$, el coste de pedido (K) y el coste de almacenamiento $HC(T) = \int_0^T h\gamma_1 t^{\gamma_1-1} [I_\theta(t)]^{\gamma_2} dt$.

Por tanto, el beneficio total del inventario por unidad de tiempo $G_\theta(T)$ vendrá dado por

$$G_\theta(T) = \frac{IN(T) - pI_\theta(0+) - K - HC(T)}{T} \quad (1.47)$$

Además, usando (1.44), se tiene que

$$\begin{aligned} IN(T) &= s \int_0^T \lambda [I_\theta(t)]^\beta dt = -s \int_0^T dI_\theta(t)dt - s\theta \int_0^T I_\theta(t)dt \\ &= sI_\theta(0+) - DC(T) \end{aligned}$$

donde

$$DC(T) = s\theta \int_0^T I_\theta(t)dt \quad (1.48)$$

es el coste de deterioro por ciclo. Por tanto, podemos reescribir (1.47) como

$$G_\theta(T) = \frac{(s-p)I_\theta(0+) - K - HC(T) - DC(T)}{T} \quad (1.49)$$

y, por consiguiente, nuestro objetivo debería ser resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} &Maximizar \quad G_\theta(T) \\ &sujeito a \quad T > 0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Hasta donde nosotros conocemos, las dificultades que se generan al tratar de resolver directamente el problema planteado usando la expresión (1.46) han llevado a los investigadores que han trabajado en esta línea de inventarios a usar aproximaciones lineales en aquellas expresiones en las que aparece el parámetro θ . Nosotros seguiremos este mismo enfoque y así se tiene

$$I_\theta(t) \approx [\alpha\lambda(T-t)]^{\frac{1}{\alpha}} \left[1 + \frac{\theta}{2}(T-t) \right] \quad (1.51)$$

y

$$q = I_\theta(0+) \approx (\alpha\lambda T)^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{\theta}{2}T \right) \quad (1.52)$$

expresiones que utilizaremos para desarrollar el modelo.

Nota. Si no hubiese deterioro en el inventario y utilizásemos el mismo tamaño del lote q , teniendo en cuenta la expresión (1.4), la longitud del ciclo sería $T_o = \frac{q^\alpha}{\alpha\lambda} \approx$

$T \left(1 + \frac{\theta}{2}T\right)^\alpha > T$. Además, de la expresión (1.3) se sigue que entonces el nivel del inventario en el instante T sería

$$I_o(T) = (q^\alpha - \alpha\lambda T)^\frac{1}{\alpha} \approx (\alpha\lambda T)^\frac{1}{\alpha} \left[\left(1 + \frac{\theta}{2}T\right)^\alpha - 1 \right]^\frac{1}{\alpha}.$$

Podemos comparar gráficamente las curvas del inventario en un ciclo con deterioro, $I_\theta(t)$, suponiendo $\theta > 0$, y sin deterioro, $I_o(t)$, tal y como se hace en la Figura 1.15.

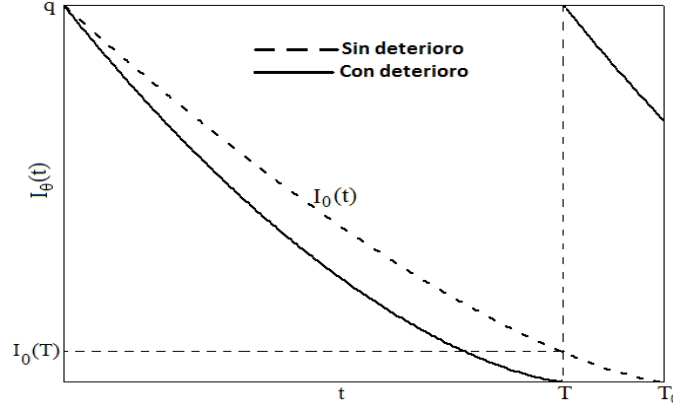


Figura 1.15. Curva del inventario en un ciclo con y sin deterioro

1.8.1. El modelo

A continuación vamos a obtener la función objetivo para el modelo considerado en esta sección a partir de las aproximaciones (1.51) y (1.52). Utilizando la expresión (1.51) y con la aproximación de primer orden en θ , el coste por deterioro durante el ciclo de inventario $DC(T)$ puede aproximarse como

$$\begin{aligned} DC(T) &= s\theta \int_0^T I_\theta(t) dt \approx s\theta (\alpha\lambda)^\frac{1}{\alpha} \int_0^T \left[(T-t)^\frac{1}{\alpha} + \frac{\theta}{2}(T-t)^\frac{1}{\alpha}+1 \right] dt \\ &= s\theta (\alpha\lambda)^\frac{1}{\alpha} \left[\frac{\alpha}{1+\alpha} T^\frac{1}{\alpha}+1 + \frac{\alpha\theta}{2(1+2\alpha)} T^\frac{1}{\alpha}+2 \right] \\ &= \frac{s\alpha\theta (\alpha\lambda)^\frac{1}{\alpha}}{1+\alpha} T^\frac{1}{\alpha}+1 \left[1 + \frac{1+\alpha}{2(1+2\alpha)} \theta T \right] \\ &\approx \frac{s\theta}{\lambda(1+\alpha)} (\alpha\lambda T)^\frac{1}{\alpha}+1 \end{aligned} \quad (1.53)$$

Del mismo modo, utilizando de nuevo la aproximación de primer orden en θ , se tiene que

$$[I_\theta(t)]^\gamma \approx [\alpha\lambda(T-t)]^\frac{\gamma}{\alpha} \left[1 + \frac{\gamma\theta}{2}(T-t) \right] = (\alpha\lambda)^\frac{\gamma}{\alpha} \left[(T-t)^\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma\theta}{2}(T-t)^\frac{\gamma}{\alpha}+1 \right]$$

y por tanto, el coste de almacenamiento aproximado por ciclo de inventario es

$$\begin{aligned}
HC(T) &\approx h\gamma_1 (\alpha\lambda)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} \left[\int_0^T t^{\gamma_1-1} (T-t)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} dt + \frac{\gamma_2\theta}{2} \int_0^T t^{\gamma_1-1} (T-t)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}+1} dt \right] \\
&= h\gamma_1 (\alpha\lambda)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} T^{\frac{\alpha\gamma_1+\gamma_2}{\alpha}} \left[\int_0^1 \left(\frac{t}{T}\right)^{\gamma_1-1} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} \frac{dt}{T} + \frac{\gamma_2\theta T}{2} \int_0^1 \left(\frac{t}{T}\right)^{\gamma_1-1} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}+1} \frac{dt}{T} \right] \\
&= h\gamma_1 (\alpha\lambda)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} T^{\frac{\alpha\gamma_1+\gamma_2}{\alpha}} \left[B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) + \frac{\gamma_2\theta T}{2} B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 2\right) \right] \\
&= h\gamma_1 (\alpha\lambda)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right) T^{\frac{\alpha\gamma_1+\gamma_2}{\alpha}} \left[1 + \frac{\gamma_2(\gamma_2 + \alpha)\theta}{2(\alpha\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha)} T \right] \\
&= \frac{(\alpha\lambda T)^{\frac{\xi}{\alpha}}}{\Delta} \left[1 + \frac{\gamma_2(\gamma_2 + \alpha)\theta}{2(\xi + \alpha)} T \right] \tag{1.54}
\end{aligned}$$

siendo $B(a, b) = \int_0^1 z^{a-1} (1-z)^{b-1} dz$ la función beta de Euler, $\xi = \alpha\gamma_1 + \gamma_2$ y $\Delta = \frac{(\alpha\lambda)^{\gamma_1}}{h\gamma_1 B\left(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1\right)}$, al igual que en secciones anteriores.

Teniendo en cuenta las aproximaciones hechas hasta aquí, se tiene que el beneficio total del inventario por unidad de tiempo puede aproximarse por la función $\tilde{G}_\theta(T)$ dada por

$$\tilde{G}_\theta(T) = \frac{(s-p)\tilde{I}_\theta(0+) - K - \widetilde{HC}(T) - \widetilde{DC}(T)}{T} \tag{1.55}$$

donde

- (i) $\tilde{I}_\theta(0+) = (\alpha\lambda T)^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{\theta}{2} T\right)$.
- (ii) $\widetilde{HC}(T) = \frac{(\alpha\lambda T)^{\frac{\xi}{\alpha}}}{\Delta} \left[1 + \frac{\gamma_2(\gamma_2 + \alpha)\theta}{2(\xi + \alpha)} T \right]$.
- (iii) $\widetilde{DC}(T) = \frac{s\theta}{\lambda(1+\alpha)} (\alpha\lambda T)^{\frac{1}{\alpha}+1}$.

Por consiguiente, nuestro objetivo será resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar } \tilde{G}_\theta(T) \\
&\text{sujeto a } T > 0
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Nota. En la literatura previa existente sobre el problema aquí considerado, la ecuación (1.44) se resuelve unas veces utilizando q como variable de decisión y otras utilizando T . En función de q , la condición inicial es $I_\theta(0+) = q$ y, a continuación, T puede obtenerse a partir de $I_\theta(T-) = 0$. Alternativamente, usando T como variable de decisión, la condición inicial es $I_\theta(T-) = 0$ y q puede obtenerse como $q = I_\theta(0+)$.

En el primero de los casos, la condición $I_\theta(0+) = q$ conduce a $C = \ln(\lambda + \theta q^\alpha)$. Sustituyendo este valor en (1.45) se tiene que la curva que define el nivel del inventario $I_\theta(t)$ es

$$I_\theta(t) = \left[\frac{(\lambda + \theta q^\alpha) e^{-\alpha\theta t} - \lambda}{\theta} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.57)$$

Además, si $0 < t < T$, la función inversa de $x = I_\theta(t)$ es

$$t = I_\theta^{-1}(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{\theta}{\lambda} q^\alpha\right) - \ln\left(1 + \frac{\theta}{\lambda} x^\alpha\right)}{\alpha\theta}$$

Diversos autores han utilizado con anterioridad las siguientes aproximaciones con respecto a θ para las expresiones anteriores:

$$I_\theta(t) \approx \left[q^\alpha - \alpha\lambda t - \left(\alpha q^\alpha t - \frac{1}{2} \alpha^2 \lambda t^2 \right) \theta \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.58)$$

o

$$I_\theta(t) \approx (q^\alpha - \alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 - \frac{q^\alpha t - \frac{1}{2} \alpha \lambda t^2}{q^\alpha - \alpha\lambda t} \theta \right) \quad (1.59)$$

y, si $x = I_\theta(t)$, con $0 < t < T$,

$$t = I_\theta^{-1}(x) \approx \frac{q^\alpha - x^\alpha}{\alpha\lambda} \left(1 - \frac{q^\alpha + x^\alpha}{2\lambda} \theta \right) \quad (1.60)$$

de donde

$$T = I_\theta^{-1}(0+) \approx \frac{q^\alpha}{\alpha\lambda} \left(1 - \frac{\theta q^\alpha}{2\lambda} \right) \quad (1.61)$$

La expresión (1.58) fue utilizada en Pal et al. (1993), pero ellos omitieron equivocadamente el término con t^2 y por eso obtuvieron que $T = I_\theta^{-1}(0+) \approx \frac{q^\alpha}{\alpha(\lambda + \theta q^\alpha)}$, en lugar de la expresión (1.61). Posteriormente, Giri et al. (1996) utilizaron correctamente la aproximación dada por (1.59). Finalmente, las dos últimas expresiones fueron utilizadas en Giri y Chaudhuri (1998). Es importante observar que, para la validez de la aproximación dada por (1.60), es necesario suponer que $1 - \frac{q^\alpha + x^\alpha}{2\lambda} \theta \geq 0$ para todo $x \in [0, q]$ y, por tanto, $1 - \frac{\theta q^\alpha}{\lambda} \geq 0$. En consecuencia, siempre que se use la expresión (1.60), es necesario suponer que $q \leq \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ y esta consideración no fue tenida en cuenta en Giri y Chaudhuri (1998).

Por todo lo anterior, en lo desarrollado en esta sección antes del inicio de esta nota, hemos considerado más adecuado utilizar la longitud de ciclo T como variable de decisión.

1.8.2. Resolución del modelo

En esta subsección abordaremos la resolución del modelo planteado, calculando la longitud óptima del ciclo de inventario, el tamaño óptimo del lote y el beneficio máximo por unidad de tiempo. Para ello reformularemos el problema anterior utilizando la variable de decisión auxiliar

$$\tau = (\alpha\lambda T)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.62)$$

En función de τ , el beneficio total aproximado por unidad de tiempo $\tilde{G}_\theta(T)$ está dado por

$$\hat{G}_\theta(\tau) = -\frac{\alpha\lambda}{\Delta} g_\theta(\tau) \quad (1.63)$$

siendo

$$\begin{aligned} g_\theta(\tau) &= -(s-p)\Delta\tau^{1-\alpha} \left[1 + \frac{\theta}{2\alpha\lambda}\tau^\alpha \right] + K\Delta\tau^{-\alpha} + \tau^{\xi-\alpha} \left[1 + \frac{\gamma_2(\gamma_2+\alpha)\theta\tau^\alpha}{2\alpha\lambda(\xi+\alpha)} \right] + \frac{s\Delta\theta\tau}{\lambda(1+\alpha)} \\ &= \tau^{\xi-\alpha} \left[-(s-p)\Delta\tau^{1-\alpha} + K\Delta\tau^{-\alpha} + \frac{\theta}{2\alpha\lambda} \left[\frac{\gamma_2(\gamma_2+\alpha)\tau^\xi}{\xi+\alpha} - \frac{(s-p)(1-\alpha) - 2p\alpha}{1+\alpha} \Delta\tau \right] \right] \end{aligned} \quad (1.64)$$

Es evidente que, si τ minimiza la función $g_\theta(\tau)$, entonces $T = \frac{\tau^\alpha}{\alpha\lambda}$ maximiza la función $\tilde{G}_\theta(T)$. Por consiguiente, el problema matemático puede ser reformulado como

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } g_\theta(\tau) \\ & \text{sujeto a } \tau > 0 \end{aligned} \quad (1.65)$$

Además, es evidente que la función $g_\theta(\tau)$ es de clase C^2 en $(0, \infty)$ y sus dos primeras derivadas vienen dadas por

$$\begin{aligned} g'_\theta(\tau) &= [(\xi - \alpha)\tau^{\xi-\alpha-1} - (1 - \alpha)(s - p)\Delta\tau^{-\alpha} - \alpha K\Delta\tau^{-\alpha-1}] \\ &\quad + \frac{\theta}{2\alpha\lambda} \left[\frac{\gamma_2\xi(\gamma_2 + \alpha)}{\xi + \alpha}\tau^{\xi-1} - \frac{(s - p)(1 - \alpha) - 2p\alpha}{1 + \alpha}\Delta \right] \\ g''_\theta(\tau) &= (\xi - \alpha)(\xi - \alpha - 1)\tau^{\xi-\alpha-2} + \alpha(1 - \alpha)(s - p)\Delta\tau^{-\alpha-1} \\ &\quad + \alpha(1 + \alpha)K\Delta\tau^{-\alpha-2} + \frac{\theta}{2\alpha\lambda} \frac{\gamma_2\xi(\gamma_2 + \alpha)(\xi - 1)}{\xi + \alpha}\tau^{\xi-2} \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que $g''_\theta(\tau) > 0$ para todo $\tau > 0$ y la función $g_\theta(\tau)$ es estrictamente convexa. Además, se verifica que

$$\lim_{\tau \downarrow 0} g_\theta(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} g_\theta(\tau) = \infty$$

Por consiguiente, podemos asegurar que la solución del problema (1.65) se obtiene resolviendo la ecuación $g'_\theta(\tau) = 0$, que necesariamente tiene una única raíz estrictamente positiva τ^* .

Alternativamente, esta derivada puede expresarse como

$$g'_\theta(\tau) = \frac{\xi - \alpha}{\tau^{1+\alpha}} P(\tau)$$

con

$$P(\tau) = P_1(\tau) + c\theta\tau^{1+\alpha}P_2(\tau)$$

$$P_1(\tau) = \tau^\xi - u\tau - v$$

$$P_2(\tau) = \tau^{\xi-1} - w,$$

donde $c = \frac{\gamma_2\xi(\gamma_2+\alpha)}{2\alpha\lambda(\xi+\alpha)(\xi-\alpha)}$, $\xi = \alpha\gamma_1 + \gamma_2$, $u = \frac{(1-\alpha)(s-p)\Delta}{\xi-\alpha}$, $v = \frac{\alpha K\Delta}{\xi-\alpha}$ y

$$w = \frac{(\xi + \alpha) [(s - p)(1 - \alpha) - 2p\alpha] \Delta}{\gamma_2\xi(\gamma_2 + \alpha)(1 + \alpha)}$$

Además, es evidente que $\xi \geq \alpha + 1 > 1$, $u \geq 0$, $v > 0$ y $c > 0$. También $w < \left(\frac{\xi+\alpha}{1+\alpha}\right)u$, tal y como se prueba a continuación:

$$\begin{aligned} w &= \frac{(\xi + \alpha) [(s - p)(1 - \alpha) - 2p\alpha] \Delta}{\gamma_2\xi(\gamma_2 + \alpha)(1 + \alpha)} < \frac{(\xi + \alpha)(s - p)(1 - \alpha)\Delta}{\gamma_2\xi(\gamma_2 + \alpha)(1 + \alpha)} \\ &< \frac{\xi - \alpha}{\gamma_2\xi(\gamma_2 + \alpha)} \left(\frac{\xi + \alpha}{1 + \alpha}\right) u < \left(\frac{\xi + \alpha}{1 + \alpha}\right) u \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones $g'_\theta(\tau) = 0$ y $P(\tau) = 0$ son equivalentes y la solución del problema (1.65) puede obtenerse resolviendo esta última.

Para ello enunciamos un lema previo que proporciona un resultado general del cálculo diferencial, con una demostración adaptada a las necesidades de nuestro problema.

Lema 1.18 *Sea $y = f(x)$ una función de clase C^2 en el intervalo (a, b) con una única raíz $c \in (a, b)$ verificando las siguientes hipótesis: (i) $f(x) < 0 \forall x \in (a, c)$; (ii) $f(x) > 0 \forall x \in (c, b)$ y (iii) $f''(x) > 0 \forall x \in [c, b)$. Se tiene:*

1. $f'(c) > 0$.

2. Para $n = 1, 2, 3, \dots$, se considera la sucesión definida por $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ con cualquier valor inicial $x_o \in [c, b)$. Entonces, dicha sucesión es convergente con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Además, si $f(x_o) > 0$ la sucesión es estrictamente decreciente y si $f(x_o) = 0$ es constantemente igual a c .

Demostración.

1. Por la hipótesis (iii) y por ser $f(x)$ de clase C^2 , existe un número real $\epsilon > 0$ con $f''(x) > 0 \forall x \in (c - \epsilon, b)$. Luego para cada $x \in (c - \epsilon, c)$, existe un punto $\xi_x \in (c - \epsilon, c)$ con $f(x) = f'(c)(x - c) + f''(\xi_x)\frac{(x-c)^2}{2}$ y $f''(\xi_x) > 0$. Como, por la hipótesis (i), $f(x) < 0$, necesariamente se tiene $f'(c) > 0$.
2. Por otro lado, de nuevo por la hipótesis (iii), necesariamente $f'(x) > f'(c) > 0 \forall x \in (c, b)$. Por consiguiente, se tiene que $f'(x) > 0 \forall x \in [c, b)$. Sea entonces un punto $x_o \in [c, b)$.

Si $x_o = c$, entonces $f(x_o) = 0$, $x_1 = x_o$, $f'(x_o) > 0$ y la sucesión es constantemente igual a c con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Si $x_o > c$, como $f(x_o) > 0$ y $f'(x_o) > 0$, entonces se verifica que $c < x_1 < x_o$, $f(x_1) > 0$ y $f'(x_1) > 0$. Por consiguiente, x_1 está en las mismas condiciones que x_o . Repitiendo el razonamiento se tiene $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ con $c < x_n < x_{n-1}$, $f(x_n) > 0$ y $f'(x_n) > 0$. Como consecuencia de todo esto, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente decreciente y acotada inferiormente por c , lo cual asegura que su límite L verifica que $L \geq c$. Finalmente, por la definición dada de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, dicho límite debe verificar la ecuación $L = L - \frac{f(L)}{f'(L)}$ y, por tanto $f(L) = 0$, lo cual implica que $L = c$ como queríamos demostrar. ■

Apoyándonos en este resultado, el siguiente teorema plantea la resolución de la ecuación $P(\tau) = 0$.

Teorema 1.19 Sean las funciones $P_1(\tau) = \tau^\xi - u\tau - v$, $P_2(\tau) = \tau^{\xi-1} - w$ y $P(\tau) = P_1(\tau) + c\theta\tau^{1+\alpha}P_2(\tau)$, con $0 < \alpha \leq 1$, $\xi \geq \alpha + 1$, $c > 0$, $v > 0$, $u \geq 0$, $\theta > 0$,

$w < \left(\frac{\xi+\alpha}{1+\alpha}\right)u$ y $\tau > 0$. Para $i = 1, 2, 3, \dots$, consideramos la sucesión definida como

$$\tau_i = \frac{(\xi - 1)\tau_{i-1}^\xi + v + c\theta\tau_{i-1}^{1+\alpha} \left[(\xi - 1 + \alpha)\tau_{i-1}^{\xi-1} - w\alpha \right]}{\xi\tau_{i-1}^{\xi-1} - u + c\theta\tau_{i-1}^\alpha \left[(\xi + \alpha)\tau_{i-1}^{\xi-1} - w(1 + \alpha) \right]},$$

con valor inicial $\tau_o = \max \left\{ (u + v)^{\frac{1}{\xi}}, (u + v)^{\frac{1}{\xi-1}}, w_o^{\frac{1}{\xi-1}} \right\}$, siendo $w_o = \max \{0, w\}$.

Entonces:

1. $P(\tau)$ tiene una única raíz positiva τ^* que, además, es el límite de la sucesión $\{\tau_i\}_{i=0}^\infty$.
2. $P'(\tau^*) > 0$.

Demostración.

1. La ecuación $P(\tau) = 0$ tiene una única raíz positiva τ^* porque es equivalente a la ecuación $g'_\theta(\tau) = 0$ y, como hemos indicado anteriormente, la función $g_\theta(\tau)$ es de clase C^2 y estrictamente convexa en el intervalo $(0, \infty)$ con $\lim_{\tau \downarrow 0} g_\theta(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} g_\theta(\tau) = \infty$. Además, por ser $P(0) = -v < 0$ y $\lim_{\tau \rightarrow \infty} P(\tau) = \infty$, se verifica que $P(\tau) < 0$ para $\tau \in (0, \tau^*)$ y $P(\tau) > 0$ para $\tau \in (\tau^*, \infty)$. Por otro lado, la función $P(\tau)$ es de clase C^2 en $(0, \infty)$ y sus dos primeras derivadas vienen dadas por:

$$P'(\tau) = \xi\tau^{\xi-1} - u + c\theta\tau^\alpha \left[(\xi + \alpha)\tau^{\xi-1} - w(1 + \alpha) \right]$$

$$P''(\tau) = \xi(\xi - 1)\tau^{\xi-2} + c\theta\tau^{\alpha-1} \left[(\xi + \alpha)(\xi + \alpha - 1)\tau^{\xi-1} - w\alpha(1 + \alpha) \right]$$

Por tanto, si $w \leq 0$, entonces $P''(\tau) > 0$ para todo $\tau > 0$ y, si $w > 0$, es evidente que $P''(\tau) > 0$ para todo $\tau \geq r_1$ con $r_1 = \left[\frac{\alpha(1+\alpha)w}{(\xi+\alpha)(\xi+\alpha-1)} \right]^{\frac{1}{\xi-1}}$. Además, en este último caso, se verifica que

$$P_1(r_1) = \left[\frac{\alpha(1+\alpha)w}{(\xi+\alpha)(\xi+\alpha-1)} - u \right] r_1 - v < \left[\frac{\alpha u}{\xi+\alpha-1} - u \right] r_1 \leq 0$$

y

$$P_2(r_1) = \left[\frac{\alpha(1+\alpha)}{(\xi+\alpha)(\xi+\alpha-1)} - 1 \right] w < 0$$

Como consecuencia de ello, se tiene que $P(r_1) < 0$, $r_1 < \tau^*$ y $P''(\tau) > 0$ para todo $\tau \geq \tau^*$. Aplicando entonces el lema anterior a la función $P(\tau)$ en el intervalo (r_1, ∞) , podemos asegurar que la sucesión definida como

$$\tau_i = \tau_{i-1} - \frac{P(\tau_{i-1})}{P'(\tau_{i-1})} = \frac{(\xi - 1)\tau_{i-1}^\xi + v + c\theta\tau_{i-1}^{1+\alpha} \left[(\xi - 1 + \alpha)\tau_{i-1}^{\xi-1} - w\alpha \right]}{\xi\tau_{i-1}^{\xi-1} - u + c\theta\tau_{i-1}^\alpha \left[(\xi + \alpha)\tau_{i-1}^{\xi-1} - w(1 + \alpha) \right]}$$

con cualquier valor inicial $\tau_o \geq \tau^*$ es convergente, con $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = \tau^*$ y además, si $P(\tau_o) > 0$, es estrictamente decreciente y, si $P(\tau_o) = 0$, es constantemente igual a τ^* . Con el valor inicial τ_o propuesto por el teorema, si $u + v > 1$ y $w > 1$ entonces $\tau_o = \max \left\{ (u + v)^{\frac{1}{\xi-1}}, w^{\frac{1}{\xi-1}} \right\} > 1$ y se verifica que $P_1(\tau_o) = (\tau_o^{\xi-1} - u)\tau_o - v \geq v(\tau_o - 1) > 0$, $P_2(\tau_o) = \tau_o^{\xi-1} - w \geq 0$ y $P(\tau_o) > 0$. De forma similar, para todas las diferentes posibilidades que pueden presentarse en función de los valores de los parámetros $u + v$ y w , la Tabla 1.11 muestra que $P(\tau_o) \geq 0$ y, por consiguiente, se tiene que $\tau_o \geq \tau^*$. Además, $P(\tau_o) > 0$ y la sucesión es estrictamente decreciente en todos los casos excepto en dos: $u + v = w = 1$, y $u = 0$, $v < 1$ y $w = v^{\frac{\xi-1}{\xi}}$. Para el primero de ellos, la solución es $\tau^* = \tau_o = 1$ mientras que, para el segundo, la solución es $\tau^* = \tau_o = v^{\frac{1}{\xi}}$.

2. Se sigue del apartado 1 del lema anterior. ■

Tabla 1.11. Valores de $P(\tau_o)$ en función de $u + v$ y w

$u+v$	w	τ_o	$P(\tau_o)$
1	< 1	1	$c\theta(1-w) > 0$
1	1	1	0
1	> 1	$w^{\frac{1}{\xi-1}} > 1$	$(w-u)\tau_o - (1-u) > 0$
< 1	$< (u+v)^{\frac{\xi-1}{\xi}}$	$(u+v)^{\frac{1}{\xi}} < 1$	$u(1-\tau_o) + c\theta\tau_o^{1+\alpha} [\tau_o^{\xi-1} - w] > 0$
$< 1, u=0$	$v^{\frac{\xi-1}{\xi}}$	$v^{\frac{1}{\xi}} < 1$	0
$< 1, u > 0$	$(u+v)^{\frac{\xi-1}{\xi}}$	$(u+v)^{\frac{1}{\xi}} < 1$	$u(1-\tau_o) > 0$
< 1	$(u+v)^{\frac{\xi-1}{\xi}} < w < 1$	$w^{\frac{1}{\xi-1}} < 1$	$w^{\frac{\xi}{\xi-1}} - uw^{\frac{1}{\xi-1}} - v > u \left(1 - w^{\frac{1}{\xi-1}} \right) \geq 0$
< 1	≥ 1	$w^{\frac{1}{\xi-1}} \geq 1$	$(w-u)\tau_o - v \geq w - u - v > 0$
> 1	≤ 1	$(u+v)^{\frac{1}{\xi-1}} > 1$	$v(\tau_o - 1) + c\theta\tau_o^{1+\alpha}(u+v-w) > 0$
> 1	> 1	> 1	$P_1(\tau_o) + c\theta\tau_o^{1+\alpha}P_2(\tau_o) > 0$

Utilizando el teorema anterior, podemos evaluar la solución τ^* del problema (1.65) con el grado de precisión deseado y, una vez obtenida, calcular la longitud de ciclo óptima aproximada como $T^* = \frac{(\tau^*)^\alpha}{\alpha\lambda}$. El tamaño óptimo del lote q^* puede ser aproximado con la expresión (1.52) y el beneficio óptimo $\widetilde{G}_\theta(T^*)$ puede obtenerse con la expresión (1.55) una vez evaluadas las expresiones (1.53) y (1.54) para el coste del deterioro y el coste de almacenamiento aproximados.

Podemos enunciar entonces el siguiente algoritmo para la resolución del modelo planteado en esta sección:

Algoritmo 3. *Obtención de la política óptima del modelo con deterioro ($\theta > 0$).*

Paso 1. Calcular $\Delta = \frac{(\alpha\lambda)^{\gamma_1}}{h\gamma_1 B(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\alpha} + 1)}$, $\xi = \alpha\gamma_1 + \gamma_2$, $u = \frac{(1-\alpha)(s-p)\Delta}{\xi-\alpha}$, $v = \frac{\alpha K\Delta}{\xi-\alpha}$,
 $w = \frac{(\xi+\alpha)[(s-p)(1-\alpha)-2p\alpha]\Delta}{\gamma_2\xi(\gamma_2+\alpha)(1+\alpha)}$ y $c = \frac{\gamma_2\xi(\gamma_2+\alpha)}{2\alpha\lambda(\xi+\alpha)(\xi-\alpha)}$.

Paso 2. Si $u + v = w = 1$ entonces hacer $\tau^* = 1$. Ir al Paso 5.

Paso 3. Si $u = 0$, $v < 1$ y $w = v^{\frac{\xi-1}{\xi}}$ entonces hacer $\tau^* = v^{\frac{1}{\xi}}$. Ir al Paso 5.

Paso 4. Hacer $w_o = \max\{0, w\}$.

(a) Calcular $\tau_o = \max\left\{(u+v)^{\frac{1}{\xi}}, (u+v)^{\frac{1}{\xi-1}}, w_o^{\frac{1}{\xi-1}}\right\}$ y seleccionar la tolerancia TOL , con $0 < TOL < \tau_o$.

(b) Calcular $\tau_i = \frac{(\xi-1)\tau_{i-1}^\xi + v + c\theta\tau_{i-1}^{1+\alpha} \left[(\xi-1+\alpha)\tau_{i-1}^{\xi-1} - w\alpha \right]}{\xi\tau_{i-1}^{\xi-1} - u + c\theta\tau_{i-1}^\alpha \left[(\xi+\alpha)\tau_{i-1}^{\xi-1} - w(1+\alpha) \right]}$ para $i = 1, 2, 3, \dots$
hasta que se verifique $\tau_i - TOL \leq 0$, o $\tau_i - TOL > 0$ con $P(\tau_i - TOL) < 0$.

(c) Hacer $\tau^* = \tau_i$.

Paso 5. Calcular la longitud óptima del ciclo de inventario $T^* = \frac{(\tau^*)^\alpha}{\alpha\lambda}$.

Calcular el tamaño óptimo del lote $q^* = (\alpha\lambda T^*)^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{\theta}{2} T^*\right)$.

Evaluar $\widetilde{HC}(T^*) = \frac{(\alpha\lambda T^*)^{\frac{\xi}{\alpha}}}{\Delta} \left[1 + \frac{\gamma_2(\gamma_2+\alpha)\theta}{2(\xi+\alpha)} T^*\right]$ y $\widetilde{DC}(T^*) = \frac{s\theta}{\lambda(1+\alpha)} (\alpha\lambda T^*)^{\frac{1}{\alpha}+1}$.

Calcular el beneficio óptimo por unidad de tiempo

$$\widetilde{G}_\theta(T^*) = \frac{(s-p)q^* - K - \widetilde{HC}(T^*) - \widetilde{DC}(T^*)}{T^*}.$$

Nota. Observar que, en el Paso 4(b), si $\tau_i - TOL \leq 0$, como $\tau^* > 0$, entonces $\tau_i - \tau^* < TOL$. Del mismo modo, si $\tau_i - TOL > 0$, como la sucesión τ_i es estrictamente

decreciente y $P(\tau) < 0$ si y sólo si $\tau \in [0, \tau^*)$, entonces $P(\tau_i - TOL) < 0$ implica que $\tau_i - \tau^* < TOL$. Por lo tanto la regla dada en este paso es un criterio adecuado de parada para el algoritmo.

1.8.3. Análisis de sensibilidad respecto a la tasa de deterioro

En esta subsección se incluye un análisis de sensibilidad con respecto a la variación de la tasa de deterioro θ para distintos valores óptimos de las variables del modelo planteado. Más concretamente, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la subsección anterior, sabemos que para cada valor de θ , con $0 < \theta \ll 1$, es posible calcular el valor óptimo de la variable de decisión auxiliar τ^* , la longitud óptima del ciclo de inventario T^* , el tamaño óptimo del lote q^* , el beneficio óptimo por unidad de tiempo $\tilde{G}_\theta(T^*)$ y el valor óptimo de la función auxiliar $g_\theta(\tau^*)$. En consecuencia, considerando ahora el parámetro θ como una variable, se generan las funciones $\tau^*(\theta)$, $T^*(\theta)$, $q^*(\theta)$, $\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))$ y $g_\theta(\tau^*(\theta))$. Se trata ahora de estudiar la variación de estas funciones respecto a cambios en la tasa de deterioro θ .

Teniendo en cuenta que en la resolución del problema hemos utilizado como paso intermedio la variable auxiliar τ y la función auxiliar $g_\theta(\tau)$, empezaremos calculando las derivadas de $\tau^*(\theta)$ y de $g_\theta(\tau^*(\theta))$ con respecto a θ .

Lema 1.20 Sea $g_\theta(\tau)$ la función dada por (1.64), y $\tau^*(\theta)$ y $g_\theta(\tau^*(\theta))$ las funciones arriba definidas. Entonces en un punto $\theta = \theta_o$ para el cual $\tau^*(\theta_o) = \tau_o^*$, se tiene:

$$(i) \quad \left. \frac{d\tau^*(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} = - \frac{c(\tau_o^*)^{1+\alpha} [(\tau_o^*)^{\xi-1} - w]}{\xi(\tau_o^*)^{\xi-1} - u + c\theta_o(\tau_o^*)^\alpha [(\xi + \alpha)(\tau_o^*)^{\xi-1} - w(1 + \alpha)]}$$

$$(ii) \quad \left. \frac{dg_\theta(\tau^*(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} = \frac{\gamma_2(\gamma_2 + \alpha)\tau_o^*}{2\lambda\alpha(\xi + \alpha)} [(\tau_o^*)^{\xi-1} - \xi w]$$

Además, ambas derivadas son continuas en el punto $\theta = \theta_o$.

Demostración.

(i) Si definimos la función

$$F_1(\theta, \tau) = \tau^\xi - u\tau - v + c\theta\tau^{1+\alpha} (\tau^{\xi-1} - w)$$

y denotamos por θ_o al valor actual de θ , entonces, para cada θ suficientemente cerca de θ_o , la solución óptima $\tau^*(\theta)$ viene definida implícitamente por la ecuación $F_1(\theta, \tau) = 0$, de modo que $F_1(\theta, \tau^*(\theta)) = 0$ y $\tau^*(\theta_o) = \tau_o^*$. Además, se verifica que $\frac{\partial F_1(\theta, \tau)}{\partial \theta} = c\tau^{1+\alpha}(\tau^{\xi-1} - w)$, $\frac{\partial F_1(\theta, \tau)}{\partial \tau} = P'(\tau) = \xi\tau^{\xi-1} - u + c\theta\tau^\alpha [(\xi + \alpha)\tau^{\xi-1} - w(1 + \alpha)]$ y, por el apartado (ii) del Teorema 1.19, $\frac{\partial F_1(\theta_o, \tau_o^*)}{\partial \tau} = P'(\tau_o^*) > 0$. Entonces, por ser las funciones $\frac{\partial F_1(\theta, \tau)}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial F_1(\theta, \tau)}{\partial \tau}$ continuas en un entorno del punto (θ_o, τ_o^*) , podemos asegurar que la función $F_1(\theta, \tau)$ verifica las hipótesis para poder aplicar el Teorema de la Función Implícita en un entorno del punto (θ_o, τ_o^*) y, por tanto

$$\left. \frac{d\tau^*(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} = - \frac{\frac{\partial F_1(\theta_o, \tau_o^*)}{\partial \theta}}{\frac{\partial F_1(\theta_o, \tau_o^*)}{\partial \tau}} = - \frac{c(\tau_o^*)^{1+\alpha} [(\tau_o^*)^{\xi-1} - w]}{\xi(\tau_o^*)^{\xi-1} - u + c\theta_o(\tau_o^*)^\alpha [(\xi + \alpha)(\tau_o^*)^{\xi-1} - w(1 + \alpha)]}$$

y esta derivada es continua en el punto $\theta = \theta_o$.

(ii) Si definimos la función

$$F_2(\theta, \tau) = \tau^{\xi-\alpha} - (s-p)\Delta\tau^{1-\alpha} + K\Delta\tau^{-\alpha} + \frac{\theta}{2\alpha\lambda} \left[\frac{\gamma_2(\gamma_2 + \alpha)\tau^\xi}{\xi + \alpha} - \frac{(s-p)(1-\alpha) - 2p\alpha}{1+\alpha} \Delta\tau \right]$$

y denotamos por θ_o al valor actual de θ , entonces, para cada θ suficientemente cerca de θ_o , el valor mínimo de $g_\theta(\tau)$ es $g_\theta(\tau^*(\theta)) = F_2(\theta, \tau^*(\theta))$ con $\tau^*(\theta_o) = \tau_o^*$ y $g_\theta(\tau^*(\theta_o)) = g_\theta(\tau_o^*)$. Entonces, derivando la función $g_\theta(\tau^*(\theta))$ en el punto θ_o , y teniendo en cuenta la existencia de $\left. \frac{d\tau^*(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o}$, que $\frac{\partial F_2(\theta_o, \tau_o^*)}{\partial \tau} = 0$ y $w = \frac{(\xi + \alpha)[(s-p)(1-\alpha) - 2p\alpha]\Delta}{\gamma_2\xi(\gamma_2 + \alpha)(1 + \alpha)}$, se sigue

$$\begin{aligned} \left. \frac{dg_\theta(\tau^*(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} &= \frac{\partial F_2(\theta_o, \tau_o^*)}{\partial \theta} + \frac{\partial F_2(\theta_o, \tau_o^*)}{\partial \tau} \left. \frac{d\tau^*(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} \\ &= \frac{\partial F_2(\theta_o, \tau_o^*)}{\partial \theta} \\ &= \frac{\gamma_2(\gamma_2 + \alpha)\tau_o^*}{2\lambda\alpha(\xi + \alpha)} \left[(\tau_o^*)^{\xi-1} - \xi w \right] \end{aligned}$$

y esta derivada es continua en el punto $\theta = \theta_o$. ■

Apoyándonos en el resultado anterior, podemos enunciar el siguiente teorema para las derivadas de la longitud óptima del ciclo $T^*(\theta)$ y el tamaño óptimo del lote $q^*(\theta)$ con respecto al parámetro θ .

Teorema 1.21 Sean $T^*(\theta)$ y $q^*(\theta)$ las funciones antes definidas para la longitud de ciclo óptima y el tamaño óptimo del lote para un valor dado de θ , respectivamente. Entonces, en un punto $\theta = \theta_o$ para el cual $\tau^*(\theta_o) = \tau_o^*$, se tiene:

$$(i) \quad \left. \frac{dT^*(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} = - \frac{\frac{c}{\lambda} (\tau_o^*)^{2\alpha} \left[(\tau_o^*)^{\xi-1} - w \right]}{\xi (\tau_o^*)^{\xi-1} - u + c\theta (\tau_o^*)^\alpha \left[(\xi + \alpha) (\tau_o^*)^{\xi-1} - w(1 + \alpha) \right]}$$

$$(ii) \quad \left. \frac{dq^*(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} = - \frac{c (\tau_o^*)^{1+\alpha} \left[(\tau_o^*)^{\xi-1} - w \right] \left[1 + \frac{\theta(1+\alpha)}{2\alpha\lambda} (\tau_o^*)^\alpha \right]}{\xi (\tau_o^*)^{\xi-1} - u + c\theta (\tau_o^*)^\alpha \left[(\xi + \alpha) (\tau_o^*)^{\xi-1} - w(1 + \alpha) \right]}$$

Además, ambas derivadas son continuas en el punto $\theta = \theta_o$.

Demostración.

(i) De (1.62) se sigue que $T = \tau^\alpha / (\alpha\lambda)$ y, por tanto $\frac{dT}{d\tau} = \frac{\tau^{\alpha-1}}{\lambda}$. El resto es inmediato aplicando el Lema 1.20 y teniendo en cuenta que $\frac{dT^*}{d\theta} = \frac{dT^*}{d\tau^*} \frac{d\tau^*}{d\theta}$.

(ii) De (1.52) y de (1.62) se sigue que $q = \tau \left(1 + \frac{\theta}{2} \frac{\tau^\alpha}{\alpha\lambda} \right)$, de donde $\frac{dq}{d\tau} = 1 + \frac{\theta(1+\alpha)}{2\alpha\lambda} \tau^\alpha$. Basta ahora aplicar el Lema 1.20 y tener en cuenta que $\frac{dq^*}{d\theta} = \frac{dq^*}{d\tau^*} \frac{d\tau^*}{d\theta}$. ■

Como consecuencia de este teorema, podemos enunciar el siguiente resultado para el análisis de sensibilidad de la longitud óptima del ciclo $T^*(\theta)$ y el tamaño óptimo del lote $q^*(\theta)$ con respecto al parámetro θ .

Corolario 1.22 Sean $T^*(\theta)$ y $q^*(\theta)$ las funciones antes definidas para la longitud de ciclo óptima y el tamaño óptimo del lote para un valor dado de θ , respectivamente, con $0 < \theta < 1$.

- (i) Si $w \leq 0$ entonces $T^*(\theta)$ y $q^*(\theta)$ son funciones monótonas estrictamente decrecientes.
- (ii) Si $w > 0$ y para un valor dado θ_o se tiene $T^*(\theta_o) > \frac{w^{\frac{\alpha}{\xi-1}}}{\alpha\lambda}$, entonces $T^*(\theta)$ y $q^*(\theta)$ son funciones estrictamente decrecientes en un entorno del punto $\theta = \theta_o$.
- (iii) Si $w > 0$ y para un valor dado θ_o se tiene $T^*(\theta_o) < \frac{w^{\frac{\alpha}{\xi-1}}}{\alpha\lambda}$, entonces $T^*(\theta)$ y $q^*(\theta)$ son funciones estrictamente crecientes en un entorno del punto $\theta = \theta_o$.

Demostración. Utilizando los apartados (i) y (ii) del teorema anterior referidos ahora a cualquier θ , con $0 < \theta \ll 1$, se tiene

$$\text{signo} \left[\frac{dT^*(\theta)}{d\theta} \right] = \text{signo} \left[\frac{dq^*(\theta)}{d\theta} \right] = \text{signo} \left[w - (\tau^*(\theta))^{\xi-1} \right],$$

ya que

$$\xi (\tau^*(\theta))^{\xi-1} - u + c\theta (\tau^*(\theta))^\alpha \left[(\xi + \alpha) (\tau^*(\theta))^{\xi-1} - w(1 + \alpha) \right] = P'(\tau^*(\theta)) > 0$$

por el apartado (ii) del Teorema 1.19. Entonces:

(i) Si $w \leq 0$ se tiene $\frac{dT^*(\theta)}{d\theta} < 0$ y $\frac{dq^*(\theta)}{d\theta} < 0$ para cualquier θ y, por tanto, $T^*(\theta)$ y $q^*(\theta)$ son funciones monótonas estrictamente decrecientes.

(ii) Para un valor dado θ_o , si $w > 0$ y $T^*(\theta_o) > \frac{w^{\frac{\alpha}{\xi-1}}}{\alpha\lambda}$, utilizando (1.62), se tiene $\tau^*(\theta_o) > w^{\frac{1}{\xi-1}}$ y, por tanto, $\left. \frac{dT^*(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} < 0$. El resto se sigue de la continuidad de la función $\frac{dT^*(\theta)}{d\theta}$ en el punto $\theta = \theta_o$.

(iii) Del mismo modo que en el apartado anterior, si $w > 0$ y $T^*(\theta_o) < \frac{w^{\frac{\alpha}{\xi-1}}}{\alpha\lambda}$, se tiene $\tau^*(\theta_o) < w^{\frac{1}{\xi-1}}$ y, por tanto, $\left. \frac{dT^*(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} > 0$. ■

El siguiente teorema proporciona la derivada del beneficio máximo por unidad de tiempo $\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))$ con respecto al parámetro θ .

Teorema 1.23 *Sea $\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))$ la función antes definida para el beneficio máximo por unidad de tiempo y $T^*(\theta)$ la longitud óptima del ciclo para un valor dado de θ .*

Entonces en un punto $\theta = \theta_o$ para el cual $\tau^(\theta_o) = \tau_o^*$, se tiene:*

$$\left. \frac{d\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} = -\frac{\gamma_2(\gamma_2 + \alpha)\tau_o^*}{2(\xi + \alpha)\Delta} \left[(\tau_o^*)^{\xi-1} - \xi w \right]$$

Además, esta derivada es continua en el punto $\theta = \theta_o$.

Demostración.

Teniendo en cuenta (1.63), y utilizando el apartado (ii) del Lema 1.20, se tiene que

$$\left. \frac{d\hat{G}_\theta(\tau^*(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} = -\frac{\alpha\lambda}{\Delta} \left. \frac{dg_\theta(\tau^*(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} = -\frac{\gamma_2(\gamma_2 + \alpha)\tau_o^*}{2(\xi + \alpha)\Delta} \left[(\tau_o^*)^{\xi-1} - \xi w \right].$$

Pero, además, como $\tilde{G}_\theta(T^*(\theta)) = \hat{G}_\theta(\tau^*(\theta))$, resulta que

$$\left. \frac{d\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} = \left. \frac{d\hat{G}_\theta(\tau(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o}$$

y queda probado. ■

Para finalizar, el siguiente corolario incluye el análisis de sensibilidad para el beneficio máximo por unidad de tiempo $\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))$ con respecto al parámetro θ .

Corolario 1.24 Sea $\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))$ la función antes definida para el beneficio máximo por unidad de tiempo y $T^*(\theta)$ la longitud óptima del ciclo para un valor dado de θ .

- (i) Si $w \leq 0$ entonces $\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))$ es una función monótona estrictamente decreciente.
- (ii) Si $w > 0$ y para un valor dado θ_o se tiene $T^*(\theta_o) > \frac{(\xi w)^{\frac{\alpha}{\xi-1}}}{\alpha\lambda}$, entonces $\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))$ es una función estrictamente decreciente en un entorno del punto $\theta = \theta_o$.
- (iii) Si $w > 0$ y para un valor dado θ_o se tiene $T^*(\theta_o) < \frac{(\xi w)^{\frac{\alpha}{\xi-1}}}{\alpha\lambda}$, entonces $\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))$ es una función estrictamente creciente en un entorno del punto $\theta = \theta_o$.

Demostración. Utilizando el teorema anterior, referido ahora a cualquier θ , con $0 < \theta \ll 1$, se tiene

$$\text{signo} \left[\frac{d\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))}{d\theta} \right] = \text{signo} \left[\xi w - (\tau^*(\theta))^{\xi-1} \right]$$

y por tanto:

- (i) Si $w \leq 0$ entonces $\left. \frac{d\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} < 0$ para cualquier θ_o y, por tanto, $\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))$ es una función monótona estrictamente decreciente.
- (ii) Para un valor dado θ_o , si $w > 0$ y $T^*(\theta_o) > \frac{(\xi w)^{\frac{\alpha}{\xi-1}}}{\alpha\lambda}$, utilizando (1.62), se tiene $(\tau^*(\theta_o))^{\xi-1} > \xi w$ y, por tanto, $\left. \frac{d\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} < 0$. El resto se sigue de la continuidad de la función $\frac{d\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))}{d\theta}$ en el punto $\theta = \theta_o$.
- (iii) Del mismo modo que en el apartado anterior, si $w > 0$ y $T^*(\theta_o) < \frac{(\xi w)^{\frac{\alpha}{\xi-1}}}{\alpha\lambda}$, utilizando (1.62), se tiene $(\tau^*(\theta_o))^{\xi-1} < \xi w$ y, por tanto, $\left. \frac{d\tilde{G}_\theta(T^*(\theta))}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_o} > 0$. ■

Una conclusión importante de los corolarios 1.22 y 1.24 es el hecho de que la longitud óptima del ciclo de inventario, el tamaño óptimo del lote y el beneficio máximo por unidad de tiempo no necesariamente decrecen cuando la tasa de deterioro θ aumenta, como podría, quizás, pensarse *a priori*.

1.8.4. Casos particulares

A continuación mostraremos algunos casos particulares del modelo analizado en esta sección. En primer lugar, dedicaremos un apartado al caso especial del modelo de mínimo coste, que es una situación particular del problema de máximo beneficio aquí estudiado. Al igual que en la sección 1.5, este modelo de mínimo coste con deterioro se puede obtener haciendo $s = p$ en nuestro modelo. En segundo lugar repasaremos algunos modelos existentes en la literatura de inventarios que pueden obtenerse como casos particulares del modelo aquí desarrollado. Además, compararemos las soluciones obtenidas por sus respectivos autores con las que proporciona nuestro estudio.

El modelo de mínimo coste

Diversos autores, como Giri y Chaudhuri (1998), han considerado modelos de inventario con deterioro desde la perspectiva de minimización del coste total del inventario por unidad de tiempo. Este coste total lo definen como la suma de los costes de pedido, de almacenamiento y del deterioro. En estos trabajos el coste de deterioro se calcula usando el coste unitario de adquisición p en vez del precio unitario de venta s . Así, el coste total del inventario por unidad de tiempo, $C_\theta(T)$, viene dado por

$$C_\theta(T) = \frac{K + HC(T) + \frac{p}{s}DC(T)}{T}$$

y el problema de mínimo coste puede formularse como

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } C_\theta(T) \\ & \text{sujeto a } T > 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, es evidente que si $s = p$, entonces $G_\theta(T) = -C_\theta(T)$ y el problema de maximización del beneficio por unidad de tiempo es equivalente al de minimización del coste del inventario por unidad de tiempo. Por tanto, el problema de mínimo coste considerado por otros autores puede obtenerse haciendo $s = p$ en el modelo analizado en esta sección. Además, si $s > p$ pero la tasa de demanda es constante (es decir,

$\alpha = 1$), entonces se tiene

$$\begin{aligned} G_\theta(T) &= \frac{(s-p)I_\theta(0+) - \frac{s-p}{s}DC(T)}{T} - C_\theta(T) \\ &= \frac{(s-p)\frac{\lambda}{\theta}(e^{\theta T} - 1) - (s-p)\lambda\left(\frac{e^{\theta T}-1}{\theta} - T\right)}{T} - C_\theta(T) \\ &= (s-p)\lambda - C_\theta(T) \end{aligned}$$

y, por tanto, también en este caso, ambos problemas tienen la misma solución. Sin embargo, en cualquier otro caso, los dos problemas son distintos y sus respectivas políticas óptimas también pueden serlo.

De esta forma, resulta interesante comparar las soluciones de ambos problemas cuando $s > p$ y $0 < \alpha < 1$. Teniendo en cuenta que $C_\theta(T) \approx \tilde{C}_\theta(T)$ siendo

$$\tilde{C}_\theta(T) = \frac{K + \frac{(\alpha\lambda T)^\xi}{\Delta} \left(1 + \frac{\gamma_2(\gamma_2+\alpha)\theta}{2(\xi+\alpha)}T\right) + \frac{p\theta}{\lambda(1+\alpha)}(\alpha\lambda T)^{\frac{1}{\alpha}+1}}{T}$$

y usando la variable auxiliar τ , el problema de minimizar el coste total aproximado por unidad de tiempo podemos reformularlo como

$$\text{mín}\{c_a(\tau) : \tau > 0\}, \quad (1.66)$$

siendo $c_a(\tau) = \tau^{\xi-\alpha} + K\Delta\tau^{-\alpha} + \frac{\theta}{2\alpha\lambda} \left(\frac{\gamma_2(\gamma_2+\alpha)}{\xi+\alpha}\tau^\xi + \frac{2p\alpha\Delta}{1+\alpha}\tau\right)$. Dado que la solución del problema (1.66), $\tau_{\text{mín}}^*$, puede obtenerse haciendo $s = p$ en el problema (1.65), podemos asegurar que $P_{\text{mín}}(\tau_{\text{mín}}^*) = 0$, siendo

$$P_{\text{mín}}(\tau) = \tau^\xi - v + c\theta\tau^{1+\alpha} \left(\tau^{\xi-1} + \frac{2p\alpha(\xi+\alpha)\Delta}{\gamma_2\xi(\gamma_2+\alpha)(1+\alpha)}\right).$$

Además, es claro que

$$P(\tau) = P_{\text{mín}}(\tau) - u\tau - \frac{c\theta(\xi+\alpha)(s-p)(1-\alpha)\Delta}{\gamma_2\xi(\gamma_2+\alpha)(1+\alpha)}\tau^{1+\alpha}$$

y, por tanto,

$$P(\tau_{\text{mín}}^*) = -u\tau_{\text{mín}}^* - \frac{c\theta(\xi+\alpha)(s-p)(1-\alpha)\Delta}{\gamma_2\xi(\gamma_2+\alpha)(1+\alpha)}(\tau_{\text{mín}}^*)^{1+\alpha} < 0.$$

Utilizando las propiedades de la función $P(\tau)$ dadas en la demostración del Teorema 1.19, la desigualdad anterior nos permite asegurar que $\tau_{\text{mín}}^* < \tau^*$. En consecuencia, se verifica:

- (i) $T_{\min}^* = \frac{(\tau_{\min}^*)^\alpha}{\alpha\lambda} < \frac{(\tau^*)^\alpha}{\alpha\lambda} = T^*$.
- (ii) $q_{\min}^* = (\alpha\lambda T_{\min}^*)^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{\theta}{2} T_{\min}^*\right) < (\alpha\lambda T^*)^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{\theta}{2} T^*\right) = q^*$.
- (iii) $\frac{\widetilde{HC}(T_{\min}^*)}{T_{\min}^*} = \frac{(\alpha\lambda T_{\min}^*)^{\frac{\xi}{\alpha}-1}}{\Delta} \left(1 + \frac{\gamma_2(\gamma_2+\alpha)\theta T_{\min}^*}{2(\xi+\alpha)}\right) < \frac{(\alpha\lambda T^*)^{\frac{\xi}{\alpha}-1}}{\Delta} \left(1 + \frac{\gamma_2(\gamma_2+\alpha)\theta T^*}{2(\xi+\alpha)}\right) = \frac{\widetilde{HC}(T^*)}{T^*}$.
- (iv) $\frac{\widetilde{DC}(T_{\min}^*)}{T_{\min}^*} = \frac{s\theta(\alpha\lambda)^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\lambda(1+\alpha)} (T_{\min}^*)^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{s\theta(\alpha\lambda)^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\lambda(1+\alpha)} (T^*)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\widetilde{DC}(T^*)}{T^*}$.
- (v) $\frac{K}{T_{\min}^*} > \frac{K}{T^*}$.
- (vi) $\widetilde{C}_\theta(T_{\min}^*) < \widetilde{C}_\theta(T^*)$ porque T_{\min}^* es la solución de mínimo coste.
- (vii) $\widetilde{G}_\theta(T_{\min}^*) < \widetilde{G}_\theta(T^*)$ porque T^* es la solución de máximo beneficio.

Resumiendo, la solución óptima para el problema de mínimo coste tiene menor longitud de ciclo, menor tamaño del lote, menor beneficio, menor coste total y menor coste de almacenamiento por unidad de tiempo, pero mayor coste de pedido por unidad de tiempo. Recordemos que esto mismo ocurría en el modelo sin deterioro.

Otros modelos de la literatura de inventarios

En este apartado mostraremos cómo el modelo expuesto en esta sección admite como casos particulares otros modelos EOQ desarrollados anteriormente en la literatura de inventarios. Además, compararemos algunas de las expresiones obtenidas por sus respectivos autores con las mostradas en esta sección.

1. *Modelo EOQ básico con deterioro.* (Ver, por ejemplo, Zipkin, 2000, p. 62). Si en el modelo estudiado en esta sección consideramos $\alpha = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$, obtenemos el modelo EOQ básico con deterioro, demanda constante y costes de almacenamiento lineales en el tiempo y la cantidad de producto almacenado. En este caso, se tiene $\Delta = \frac{2\lambda}{h}$, $\xi = 2$, $u = 0$, $v = \frac{2K\lambda}{h}$, $w = -\frac{3p\lambda}{2h}$, $c = \frac{2}{3\lambda}$, $\tau = \lambda T$ y, además,

$$P(\tau) = \tau^2 - \frac{2K\lambda}{h} + \frac{2\theta}{3\lambda} \left(\tau^3 + \frac{3p\lambda}{2h} \tau^2 \right) = \frac{2\theta}{3\lambda} \tau^3 + \frac{h + p\theta}{h} \tau^2 - \frac{2K\lambda}{h}.$$

Como $\theta \approx 0$, si omitimos el sumando con τ^3 , la solución aproximada para la ecuación $P(\tau) = 0$ es $\tau^* \approx \sqrt{\frac{2K\lambda}{h+p\theta}}$ y, por tanto, $q^* \approx \tau^* \left(1 + \frac{\theta\tau^*}{2\lambda}\right) \approx \sqrt{\frac{2K\lambda}{h+p\theta}}$, expresión que coincide con la solución proporcionada, por ejemplo, en Zipkin (2000, p. 62). No obstante, puede obtenerse una mejor solución resolviendo la ecuación $P(\tau) = 0$ sin omitir el sumando con τ^3 .

Aunque este modelo fue estudiado desde la perspectiva del mínimo coste, como la tasa de demanda es constante, es equivalente al modelo de máximo beneficio y, por tanto, no hemos necesitado considerar $s = p$ en nuestro análisis.

2. *Modelo de Pal et al. (1993, un caso particular)*. Si consideramos $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ en nuestro modelo, se obtiene el caso del citado modelo suponiendo que el reemplazamiento se produce en el instante en que el stock se agota (es decir, $i_T = 0$) y siendo $\alpha = \lambda$, $Q = q$, $C = p$, $C_0 = K$ y $C_h = h$. Además, los autores utilizaron el tamaño del lote q como variable de decisión, en lugar de la longitud de ciclo T que nosotros hemos usado. Los resultados aquí presentados no coinciden con los obtenidos en el citado trabajo debido a que los autores cometieron un error al aproximar el valor de la longitud del ciclo del inventario. Así, ellos utilizaron como aproximación al nivel de inventario $I_\theta(t)$ dado por (1.57) la expresión

$$I_\theta(t) \approx [q^\alpha - \alpha t (\lambda + \theta q^\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}}$$

en lugar de la expresión (1.58). Como consecuencia, $T = I_\theta^{-1}(0+)$ lo aproximaron por $\frac{q^\alpha}{\alpha(\lambda + \theta q^\alpha)}$, en lugar de usar (1.61). Estas diferencias son las que provocan la no coincidencia del beneficio por unidad de tiempo conseguido por ellos con el obtenido en esta sección.

3. *Modelo de Giri y Chaudhuri (1998, modelo A)*. Si tomamos $s = p$ y $\gamma_2 = 1$ en nuestro modelo, obtenemos el citado modelo con $n = \gamma_1$ y $C = p$. En este caso se tiene $\Delta = \frac{(\alpha\lambda)^n}{h n B(n, \frac{1}{\alpha} + 1)} = \frac{\alpha(\alpha\lambda)^n}{h B(n+1, \frac{1}{\alpha})}$. Los autores consideraron el tamaño del lote q como variable de decisión y utilizaron como aproximación de T la expresión (1.61). Utilizando la aproximación de primer orden en θ , de (1.54) se

sigue que el coste de almacenamiento por ciclo de inventario es

$$\begin{aligned}
Hc(q) &\approx \frac{[\alpha\lambda T(q)]^{\frac{\alpha n+1}{\alpha}}}{\Delta} \left(1 + \frac{(1+\alpha)\theta}{2(\alpha n+1+\alpha)} T(q)\right) \\
&\approx \frac{hB\left(n+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha(\alpha\lambda)^n} q^{\alpha n+1} \left(1 - \frac{\theta q^\alpha}{2\lambda}\right)^{\frac{\alpha n+1}{\alpha}} \left(1 + \frac{(1+\alpha)\theta q^\alpha}{2(\alpha n+1+\alpha)\alpha\lambda}\right) \\
&\approx \frac{hB\left(n+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha(\alpha\lambda)^n} q^{\alpha n+1} \left(1 - \frac{(\alpha n+1)\theta q^\alpha}{2\alpha\lambda}\right) \left(1 + \frac{(1+\alpha)\theta q^\alpha}{2(\alpha n+1+\alpha)\alpha\lambda}\right) \\
&\approx \frac{hB\left(n+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha(\alpha\lambda)^n} q^{\alpha n+1} \left(1 - \frac{n(\alpha n+\alpha+2)\theta q^\alpha}{2(\alpha n+1+\alpha)\lambda}\right) \\
&= \frac{hB\left(n+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{2(\alpha\lambda)^{n+1}} \left(2\lambda q^{\alpha n+1} - \frac{n(\alpha n+\alpha+2)\theta}{\alpha n+\alpha+1} q^{\alpha n+\alpha+1}\right) \tag{1.67}
\end{aligned}$$

y, de (1.53), el coste de deterioro es

$$\begin{aligned}
Dc(q) &\approx \frac{s\theta}{\lambda(1+\alpha)} [\alpha\lambda T(q)]^{\frac{1}{\alpha}+1} \approx \frac{s\theta q^{\alpha+1}}{\lambda(1+\alpha)} \left(1 - \frac{\theta q^\alpha}{2\lambda}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\
&\approx \frac{s\theta q^{\alpha+1}}{\lambda(1+\alpha)}. \tag{1.68}
\end{aligned}$$

Las aproximaciones al coste de almacenamiento y al coste de deterioro dadas, respectivamente, por (1.67) y (1.68) coinciden con las obtenidas en Giri y Chaudhuri (1998).

4. *Modelo de Giri y Chaudhuri (1998, modelo B)*. Si consideramos $s = p$ y $\gamma_1 = 1$ en nuestro modelo, obtenemos el citado modelo con $n = \gamma_2$ y $C = p$. En este caso, se tiene $\Delta = \frac{\alpha\lambda}{hB\left(1, \frac{n}{\alpha}+1\right)} = \frac{\lambda(n+\alpha)}{h}$. Como en el caso anterior, los autores consideraron el tamaño del lote q como variable de decisión, en lugar de la longitud del ciclo del inventario y también utilizaron como aproximación de T la expresión (1.61). Usando la aproximación de primer orden en θ , de (1.54) se sigue que el coste de almacenamiento por ciclo de inventario es

$$\begin{aligned}
Hc(q) &\approx \frac{h[\alpha\lambda T(q)]^{\frac{n+\alpha}{\alpha}}}{\lambda(n+\alpha)} \left(1 + \frac{n(n+\alpha)\theta}{2(n+2\alpha)} T(q)\right) \\
&\approx \frac{h}{\lambda(n+\alpha)} q^{n+\alpha} \left(1 - \frac{\theta q^\alpha}{2\lambda}\right)^{\frac{n+\alpha}{\alpha}} \left(1 + \frac{n(n+\alpha)\theta q^\alpha}{2(n+2\alpha)\alpha\lambda}\right) \\
&\approx \frac{h}{\lambda(n+\alpha)} q^{n+\alpha} \left(1 - \frac{(n+\alpha)\theta q^\alpha}{2\alpha\lambda}\right) \left(1 + \frac{n(n+\alpha)\theta q^\alpha}{2(n+2\alpha)\alpha\lambda}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{h}{\lambda(n+\alpha)} q^{n+\alpha} \left(1 - \frac{(n+\alpha)\theta q^\alpha}{(n+2\alpha)\lambda} \right) \\
&= h \left(\frac{q^{n+\alpha}}{(n+\alpha)\lambda} - \frac{\theta q^{n+2\alpha}}{(n+2\alpha)\lambda^2} \right)
\end{aligned}$$

Esta última expresión coincide con la obtenida en Giri y Chaudhuri (1998) para su modelo.

Como ya se ha señalado, en estos dos últimos modelos los autores usaron el tamaño del lote q como variable de decisión y, por tanto, una aproximación para la curva del inventario $I_\theta(t)$ distinta a la utilizada por nosotros. No obstante, en los resultados computacionales que se incluyen en la siguiente subsección comprobaremos, con el ejemplo numérico utilizado por ellos, que las soluciones aquí obtenidas son aproximadamente las mismas que las proporcionadas en su trabajo.

1.8.5. Resultados computacionales

En esta subsección ilustraremos los resultados obtenidos para el modelo con deterioro por medio de dos ejemplos numéricos que permitirán analizar el comportamiento de la solución óptima con respecto a cambios en el parámetro de deterioro θ y en los parámetros de elasticidad β , γ_1 y γ_2 .

Para el primer ejemplo utilizaremos un sistema de inventario con los mismos parámetros que en el ejemplo de la sección 1.6. Es decir, $\lambda = 1$, $K = 10$, $h = 0.5$, $s = 62$, $p = 50$. Para analizar el efecto del parámetro θ sobre la longitud óptima del ciclo y el beneficio máximo por unidad de tiempo hemos utilizado el Algoritmo 3 dado en la subsección 1.8.2 para obtener dichos valores óptimos para ciertos valores fijos de los parámetros de elasticidad β , γ_1 y γ_2 , y los siguientes valores de la tasa de deterioro $\theta \in \{0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.09\}$. En primer lugar, para $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$, hemos elegido $\beta \in \{0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7\}$ y, en la Tabla 1.12 hemos incluido la longitud óptima del ciclo T^* y el beneficio óptimo por unidad de tiempo $G_\theta^* = \tilde{G}_\theta(T^*)$. Las curvas de variación de estos valores como funciones del parámetro θ se representan en la Figura 1.16. En segundo lugar, para $\beta = 0.3$, hemos utilizado los siguientes valores para los parámetros de elasticidad del coste de almacenamiento $\gamma_1, \gamma_2 \in \{1, 1.5, 2, 2.5\}$ y,

considerando todas las posibles combinaciones, hemos calculado de nuevo la longitud óptima del ciclo y el beneficio máximo por unidad de tiempo, obteniendo los resultados que se muestran en la Tabla 1.13. Para este mismo caso, la variación de estas cantidades como función del parámetro θ es representada en la Figura 1.17. Además, en ambas tablas hemos incluido también las soluciones correspondientes al modelo sin deterioro, evaluadas con el Algoritmo 1 de la sección 1.3, con el propósito de comparar las soluciones óptimas de los modelos con y sin deterioro.

Tabla 1.12. Valores óptimos T^* y G_θ^* para $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$ y diferentes valores de θ y β

θ	0		0.01		0.03		0.05		0.07		0.09	
β	T^*	G_θ^*	T^*	G_θ^*	T^*	G_θ^*	T^*	G_θ^*	T^*	G_θ^*	T^*	G_θ^*
0	3.24	7.37	2.96	6.57	2.55	5.17	2.25	3.96	2.04	2.87	1.87	1.89
0.1	3.67	7.72	3.36	6.85	2.88	5.35	2.54	4.07	2.28	2.95	2.09	1.95
0.3	4.76	8.89	4.38	7.80	3.77	5.98	3.32	4.50	2.98	3.26	2.71	2.19
0.5	6.25	11.3	5.84	9.83	5.16	7.39	4.62	5.51	4.18	4.01	3.81	2.79
0.7	8.57	17.4	8.21	15.0	7.58	11.2	7.05	8.41	6.58	6.28	6.16	4.63

A la luz de los resultados obtenidos, conviene realizar los siguientes comentarios:

1. En todos los casos, la solución óptima para el modelo sin deterioro tiene mayor longitud óptima de ciclo y mayor beneficio máximo, como puede, en principio, esperarse.
2. La Figura 1.16 muestra que, para γ_1, γ_2 fijos y todos los valores del parámetro β considerados, la longitud óptima de ciclo y el beneficio máximo por unidad de tiempo decrecen cuando el valor de la tasa de deterioro θ aumenta. Además, el decrecimiento de la longitud óptima de ciclo hacia cero es más rápido cuanto mayor es el parámetro de elasticidad de la demanda β . De forma algo similar, el decrecimiento del beneficio óptimo por unidad de tiempo es lineal cuando $\beta = 0$ y más fuertemente convexo cuando el valor del parámetro β aumenta, es decir, grandes tasas de decrecimiento para pequeños valores del parámetro θ y pequeñas tasas de decrecimiento para valores de θ más grandes. No obstante, como demuestran los corolarios 1.22 y 1.24 de la subsección 1.8.3, esto no tiene por qué ser siempre cierto para todos los sistemas de inventario con deterioro.

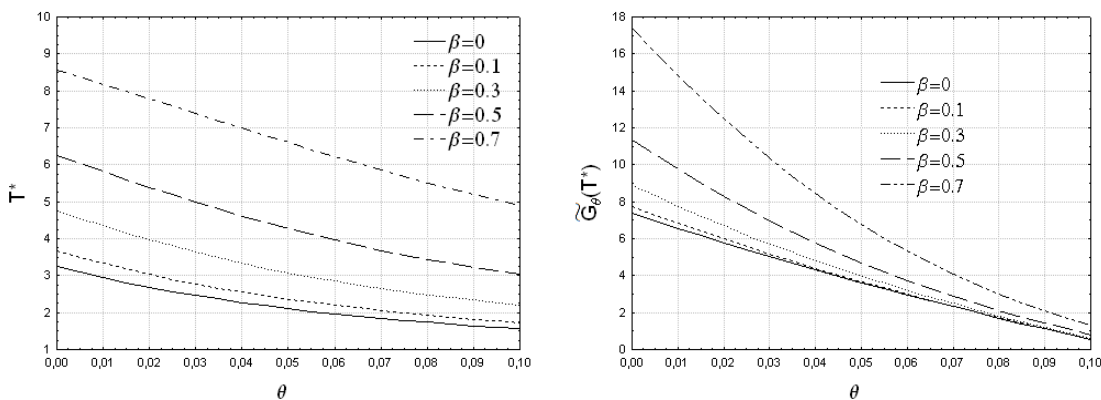


Figura 1.16. Curvas de T^* y $\tilde{G}_\theta(T^*)$ en función de θ para β fijo y $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.5$

Tabla 1.13. Valores óptimos T^* y G_θ^* para $\beta = 0.3$ y diferentes valores de θ , γ_1 y γ_2

θ	0		0.01		0.03		0.05		0.07		0.09	
	T^*	G_θ^*	T^*	G_θ^*	T^*	G_θ^*	T^*	G_θ^*	T^*	G_θ^*	T^*	G_θ^*
(1,1)	18.4	16.6	9.79	11.8	5.64	7.64	4.21	5.36	3.47	3.75	3.01	2.49
(1,1.5)	6.37	10.5	5.47	8.86	4.32	6.51	3.62	4.78	3.15	3.41	2.81	2.27
(1,2)	4.21	8.13	3.92	7.18	3.47	5.55	3.11	4.20	2.83	3.04	2.60	2.03
(1,2.5)	3.35	6.82	3.21	6.11	2.97	4.83	2.76	3.70	2.58	2.69	2.42	1.79
(1.5,1)	7.51	11.3	6.17	9.39	4.63	6.76	3.78	4.91	3.24	3.49	2.87	2.32
(1.5,1.5)	4.76	8.89	4.38	7.80	3.77	5.98	3.32	4.50	2.98	3.26	2.71	2.19
(1.5,2)	3.74	7.59	3.56	6.79	3.24	5.35	2.98	4.11	2.75	3.02	2.56	2.04
(1.5,2.5)	3.20	6.74	3.10	6.08	2.90	4.86	2.72	3.77	2.56	2.79	2.42	1.89
(2,1)	4.86	8.78	4.45	7.69	3.81	5.87	3.34	4.40	2.98	3.17	2.71	2.11
(2,1.5)	3.90	7.78	3.70	6.95	3.35	5.47	3.06	4.19	2.81	3.07	2.60	2.08
(2,2)	3.38	7.08	3.26	6.38	3.04	5.11	2.84	3.97	2.66	2.94	2.50	2.01
(2,2.5)	3.05	6.55	2.97	5.94	2.81	4.80	2.66	3.76	2.53	2.80	2.40	1.92
(2.5,1)	3.73	7.22	3.55	6.46	3.23	5.08	2.96	3.88	2.73	2.81	2.54	1.86
(2.5,1.5)	3.37	6.92	3.25	6.25	3.03	5.00	2.83	3.88	2.65	2.86	2.49	1.94
(2.5,2)	3.11	6.61	3.02	6.00	2.86	4.85	2.71	3.80	2.56	2.83	2.43	1.95
(2.5,2.5)	2.91	6.32	2.85	5.76	2.72	4.69	2.60	3.69	2.48	2.77	2.37	1.92

3. La Figura 1.17 muestra que, también cuando el parámetro de elasticidad de la demanda es fijo con $\beta = 0.3$, y para todos los valores de γ_1 y γ_2 utilizados, la longitud óptima de ciclo y el beneficio máximo por unidad de tiempo decrecen cuando la tasa de deterioro θ aumenta. Pero, en ambos casos, el decrecimiento es mucho más rápido para valores pequeños del parámetro θ cuando la suma de los parámetros γ_1 y γ_2 es pequeña, y se convierte en un decrecimiento prácticamente

lineal cuando la suma de γ_1 y γ_2 es grande. También ahora, como se deduce de los corolarios 1.22 y 1.24 de la subsección 1.8.3, esto pudiera no ser cierto para otros modelos de inventario con parámetros iniciales distintos.

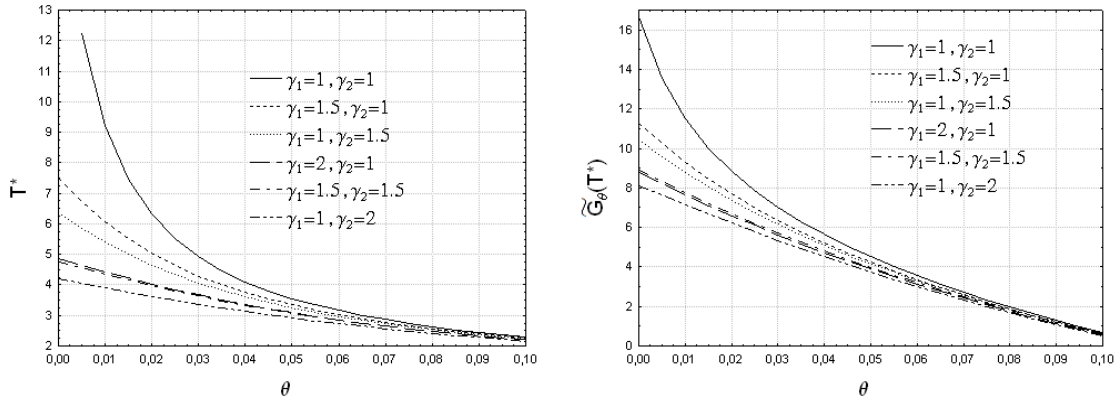


Figura 1.17. Curvas de T^* y $\tilde{G}_\theta(T^*)$ en función de θ para γ_1, γ_2 fijos y $\beta = 0.3$

Finalmente, para comparar las soluciones de máximo beneficio y mínimo coste por unidad de tiempo, utilizaremos el mismo ejemplo numérico que en el trabajo de Giri y Chaudhuri (1998), pero añadiendo un valor para el precio de venta del producto, que no fue considerado por los citados autores por haber planteado el problema desde la perspectiva de minimización del coste total del inventario por unidad de tiempo. Concretamente, suponemos que el sistema de inventario tiene los siguientes parámetros: $\lambda = 2$, $h = 0.5$, $K = 200$, $\theta = 0.03$, $p = 10$ y $s = 50$. Haremos la comparación suponiendo siempre que el parámetro de elasticidad de la demanda es $\beta = 0.3$ y los parámetros de elasticidad del coste de almacenamiento son $\gamma_1, \gamma_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. En primer lugar, suponemos que $\gamma_2 = 1$ y $s = p = 10$ para obtener el modelo A de Giri y Chaudhuri (1998) y comprobar que, con los mismos valores del parámetro γ_1 utilizados por esos autores, la longitud óptima de ciclo $T^* = T_G$ coincide, aproximadamente, con la solución proporcionada por los citados autores, y también el mínimo coste por unidad de tiempo $C_\theta^* = -G_\theta^*$ coincide con el proporcionado por ellos. Después hemos considerado también el caso $s = 50$, calculando de nuevo la longitud óptima de ciclo T^* , el beneficio máximo por unidad de tiempo G_θ^* y el valor del beneficio por unidad de tiempo que se obtendría utilizando la solución de mínimo coste T_G , es decir, $\tilde{G}_\theta(T_G)$. Por último, para obtener

el modelo B de Giri y Chaudhuri (1998), hemos repetido los mismos cálculos con $\gamma_1 = 1$ y los mismos valores del parámetro γ_2 utilizados por esos autores. Todos los resultados se muestran en la Tabla 1.14.

Tabla 1.14. Soluciones de mínimo coste y máximo beneficio para $\theta = 0.03$ y $\beta = 0.3$

$\gamma_2 = 1$ (como en modelo A de Giri y Chaudhuri)						$\gamma_1 = 1$ (como en modelo B de Giri y Chaudhuri)					
$s = 10$ (mínimo coste)		$s = 50$ (máximo beneficio)				$s = 10$ (mínimo coste)		$s = 50$ (máximo beneficio)			
γ_1	T_G	C_θ^*	T^*	G_θ^*	$\tilde{G}_\theta(T_G)$	γ_2	T_G	C_θ^*	T^*	G_θ^*	$\tilde{G}_\theta(T_G)$
1	9.51	35.17	35.3	213.2	138.9	1	9.51	35.17	35.3	213.2	138.9
2	5.57	51.39	8.44	100.2	85.68	2	3.83	70.74	4.75	51.39	45.40
3	3.90	67.03	4.72	55.40	50.02	3	2.41	102.6	2.61	-5.99	-7.79
4	3.08	80.31	3.44	28.03	25.25	4	1.85	127.4	1.93	-41.97	-42.83
5	2.61	91.37	2.81	8.57	6.85	5	1.56	146.6	1.60	-67.51	-68.03
6	2.31	100.6	2.44	-6.30	-7.48	6	1.38	161.7	1.41	-86.75	-87.10
7	2.10	108.4	2.19	-18.14	-19.01	7	1.27	173.9	1.29	-101.8	-102.1
8	1.95	115.1	2.02	-27.85	-28.53	8	1.18	183.9	1.20	-113.9	-114.1
9	1.84	120.9	1.89	-35.98	-36.53	9	1.12	192.2	1.13	-123.8	-124.0
10	1.75	125.9	1.79	-42.90	-43.35	10	1.07	199.2	1.08	-132.2	-132.3

A la vista de los resultados obtenidos, podemos establecer las siguientes conclusiones:

1. Cuando $s = p = 10$, la longitud óptima de ciclo $T^* = T_G$ y el mínimo coste total por unidad de tiempo $C_\theta^* = -G_\theta^*$ coinciden, aproximadamente, con los proporcionados en el trabajo de Giri y Chaudhuri (1998). Las pequeñas diferencias son justificadas por el hecho de que, como ya comentamos en la subsección 1.8.1, los citados autores utilizaron la aproximación a la curva del inventario $I_\theta(t)$ dada por (1.60), en función del tamaño del lote q , en lugar de la aproximación dada por (1.51) que hemos utilizado nosotros, en función de la longitud de ciclo T . Por ejemplo, en el modelo A, para $\beta = 0.3$ y $\gamma_1 = 2$, estos autores obtuvieron $T^* = 5.54$ y $C_\theta^* = 51.72$, mientras que nosotros hemos obtenido $T^* = 5.57$ y $C_\theta^* = 51.39$. Del mismo modo, en el modelo B, para $\beta = 0.3$ y

$\gamma_2 = 2$, ellos obtuvieron $T^* = 3.81$ y $C_\theta^* = 71.04$, mientras que nosotros hemos obtenido $T^* = 3.83$ y $C_\theta^* = 70.74$. Estas coincidencias también nos sirven para comprobar que, efectivamente, la solución de mínimo coste puede ser obtenida haciendo $s = p$ en el modelo que hemos presentado.

2. Cuando $s = 50 > p$, la longitud óptima de ciclo T^* en el problema de máximo beneficio por unidad de tiempo es más grande que la longitud óptima de ciclo T_G en el problema de mínimo coste por unidad de tiempo y las diferencias son, a veces, importantes. Por ejemplo, en el caso más extremo con $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $T^* = 35.3$ y $T_G = 9.51$, lo cual supone que T^* es un 371 % más grande que T_G ; pero estas diferencias desaparecen cuando los parámetros γ_1 o γ_2 se incrementan. Esto ocurría también en el modelo sin deterioro planteado inicialmente en este capítulo.
3. Como era de esperar, el beneficio óptimo por unidad de tiempo G_θ^* es mayor que el beneficio por unidad de tiempo que obtendríamos con la solución de mínimo coste $\tilde{G}_\theta(T_G)$. Al igual que para la longitud óptima de ciclo, las diferencias son, a veces, importantes y desaparecen cuando los parámetros γ_1 o γ_2 aumentan. Por ejemplo, si $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $G_\theta^* = 213.2$ y $\tilde{G}_\theta(T_G) = 138.9$, lo cual supone que el beneficio óptimo por unidad de tiempo es un 53 % más grande que el que obtendríamos con la solución de mínimo coste por unidad de tiempo. En cambio, si $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 = 10$, los valores son casi iguales, concretamente, $G_\theta^* = -42.90$ y $\tilde{G}_\theta(T_G) = -43.35$. Este mismo hecho ocurría también en el modelo sin deterioro planteado inicialmente en este capítulo.
4. Tal y como fue destacado por Giri y Chaudhuri (1998) para el problema de mínimo coste, también para el problema de máximo beneficio se obtienen valores más grandes para la longitud óptima de ciclo y el beneficio óptimo por unidad de tiempo en el modelo A que en el modelo B. Esto es coherente con el hecho de que valores $\gamma_2 > 1$ generan un mayor coste de almacenamiento que valores similares para el parámetro γ_1 , y por tanto se obtiene menor longitud de ciclo y un menor beneficio por unidad de tiempo. Quizás por ello, en el caso en que

la tasa de demanda es constante y no hay deterioro en el inventario, Naddor (1982), denotó al modelo con $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 > 1$ como *The Expensive-Storage System*.

Todos los cálculos expuestos en esta sección han sido desarrollados utilizando un programa de software específico diseñado para ello y escrito en lenguaje SAS (SAS Institute Inc., 2005), cuya redacción se incluye en la sección A.3 del Apéndice A, al final de este documento.

1.9. Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado un modelo EOQ con tasa de demanda dependiente del nivel de stock y coste de almacenamiento simultáneamente no lineal con respecto a la cantidad de producto almacenado y al tiempo de permanencia en el inventario. Para ello se ha considerado el uso simultáneo de tres parámetros de elasticidad (uno para la demanda y dos para el coste de almacenamiento) que permiten modelar multitud de situaciones prácticas.

El problema se ha resuelto desde la perspectiva de maximización del beneficio por unidad de tiempo, considerando tres componentes en el sistema de inventario: coste de almacenamiento, coste de pedido y beneficio bruto de la venta. La solución óptima se puede obtener mediante un sencillo algoritmo fácilmente implementable para los gestores en situaciones prácticas reales.

La rentabilidad del inventario puede caracterizarse a priori utilizando sólo los parámetros del sistema y sin conocer la solución óptima. A partir de esta condición de rentabilidad se puede determinar el mínimo precio de venta del producto necesario para obtener un sistema de inventario rentable. Además, la política óptima se obtiene cuando se alcanza un determinado equilibrio entre los tres componentes del sistema: coste de almacenamiento, coste de pedido y beneficio bruto de la venta. Esta regla de equilibrio resulta ser una generalización de la conocida regla de Harris para el modelo EOQ básico (coste de almacenamiento igual a coste de pedido), en la que sólo

intervienen el coste de almacenamiento y el coste de pedido.

El modelo propuesto engloba como casos particulares varios modelos estudiados con anterioridad en la literatura de inventarios, los cuales pueden obtenerse fijando alguno o algunos de los parámetros de elasticidad. La metodología propuesta permite también obtener la solución del problema de mínimo coste del inventario por unidad de tiempo, como un caso particular del problema de máximo beneficio. Ambas soluciones no necesariamente coinciden cuando la tasa de demanda no es constante. En general, para el problema de máximo beneficio se obtiene mayor tamaño del lote, mayor longitud de ciclo, mayor coste de almacenamiento por unidad de tiempo y menor coste de pedido por unidad de tiempo.

Desde el punto de vista de la sensibilidad, el tamaño óptimo del lote crece con los parámetros K , s y λ y decrece cuando h o p crecen, manteniendo fijos, en cada caso, el resto de los parámetros. El beneficio óptimo por unidad de tiempo crece con el parámetro s y decrece cuando K , h o p crecen, manteniendo fijos, en cada caso, el resto de los parámetros. Con respecto al parámetro λ de escala de la demanda, el beneficio óptimo por unidad de tiempo crece con dicho parámetro cuando su valor está por encima de un determinado umbral. Por debajo de este valor el beneficio óptimo por unidad de tiempo decrece al aumentar el valor del parámetro λ , manteniendo fijos el resto de los parámetros. En particular, podemos asegurar que el beneficio óptimo por unidad de tiempo crece con el parámetro λ cuando el inventario es rentable.

Se ha desarrollado un software específico para la resolución del modelo, escrito en lenguaje SAS (SAS Institute Inc., 2005), que permite resolver el modelo sin más que introducir como datos de entrada los parámetros del sistema de inventario.

El modelo propuesto se ha extendido de dos formas. En la primera se considera la posible existencia de un punto de reabastecimiento antes de que el stock se agote, eliminado la restricción de que el nivel de inventario en el momento de realizar un nuevo pedido sea igual a cero. Este hecho incrementa el coste de almacenamiento por unidad de tiempo pero puede producir también un incremento en el beneficio por unidad de tiempo debido a la mayor demanda conseguida por el hecho de mantener un

nivel de inventario más alto. Para este caso, se ha diseñado un algoritmo de solución que permite encontrar el tamaño óptimo de pedido y la longitud óptima del ciclo de inventario, el cual nos ha permitido también desarrollar un software de resolución para este nuevo modelo. Además, hemos demostrado que efectivamente se puede obtener un incremento importante en el beneficio óptimo por unidad de tiempo considerando un punto de reabastecimiento no nulo, especialmente para valores altos del parámetro de elasticidad de la demanda y valores bajos de los parámetros de elasticidad del coste de almacenamiento. Ahora bien, la nueva solución óptima conduce siempre a un mayor nivel medio del inventario, lo cual debería ser también tenido en cuenta. Los ejemplos numéricos utilizados muestran que, en general, el tamaño óptimo del lote y la longitud óptima del ciclo de inventario son menores en el modelo con punto de reabastecimiento no nulo que en el caso de obligar a que el nivel del inventario sea cero antes de realizar un nuevo pedido.

Se ha estudiado una segunda extensión del modelo considerando la posibilidad de que exista un deterioro del producto durante el tiempo que permanece almacenado en el inventario y suponiendo que la tasa de deterioro en un instante cualquiera es una pequeña fracción constante ($\theta > 0$) del inventario disponible. El problema se ha resuelto utilizando la longitud del ciclo como variable de decisión y una aproximación de primer orden en θ para la curva del inventario. Reformulando el modelo mediante el uso de una variable de decisión auxiliar, el problema matemático se reduce a la minimización de una función objetivo auxiliar que resulta ser estrictamente convexa. La solución óptima puede obtenerse mediante un sencillo algoritmo iterativo, fácilmente implementable en las aplicaciones prácticas reales, que también nos ha permitido diseñar un software específico para la resolución del modelo en este caso. Además, la solución para el problema de mínimo coste del inventario por unidad de tiempo puede también ser obtenida como un caso particular. Este hecho ha permitido demostrar que, también en este caso, la longitud de ciclo óptima y el tamaño óptimo del lote son mayores en el problema de máximo beneficio que en el problema de mínimo coste. Además, se tiene también mayores costes de almacenamiento y de deterioro,

pero menores costes de pedido. Un análisis de sensibilidad respecto al parámetro de deterioro nos ha permitido demostrar que la longitud de ciclo, el tamaño del lote y el beneficio por unidad de tiempo óptimos no son necesariamente decrecientes cuando la tasa de deterioro se incrementa.

Otras extensiones del modelo podrían ser la incorporación de posibles descuentos en el precio de venta, variaciones en la tasa de demanda, descuentos en el coste de adquisición en función del tamaño de pedido, el estudio del caso de demanda entera, el análisis en el caso de que exista la posibilidad de rotura del stock con demanda acumulable, con pérdida de ventas o con una mixtura (constante o variable) de ambas, etc. Además, se podrían considerar también otras funciones matemáticas bivariantes para el coste acumulado de almacenamiento.

Por último, terminaremos diciendo que gran parte de la investigación desarrollada en este capítulo ha originado tres artículos científicos publicados en las revistas *International Journal of Production Economics* (Pando et al., 2013^b), *International Journal of Systems Science* (Pando et al., 2012^a) y *Computers & Industrial Engineering* (Pando et al. 2012^b).

1.10. Apéndice

En este apéndice ilustramos con un ejemplo el uso de la función $H(t, x) = ht^{\gamma_1}x^{\gamma_2}$ para el coste de almacenamiento en un inventario. Consideramos un sistema de inventario para productos de lujo (tales como joyería de alto valor o relojes de diseño), los cuáles necesitan ser asegurados mientras permanecen en el inventario. Supongamos que los costes acumulados del seguro para diferentes cantidades de producto durante diferentes unidades de tiempo vienen dados por los valores incluidos en la Tabla 1.15.

Tabla 1.15. Coste del seguro

$t \backslash x$	25	50	100	200
1	10	20	40	90
2	20	40	110	240
3	40	80	180	400
4	60	120	270	590
5	80	160	360	790
6	100	210	460	1000

Tabla 1.16. Coste de almacenamiento $H(t, x)$

$t \backslash x$	25	50	100	200
1	12.5	25	50	110
2	25	50	130	280
3	47.5	95	210	460
4	70	140	310	670
5	92.5	185	410	890
6	115	240	520	1120

Para los valores recogidos en dicha tabla, puede observarse que los costes del seguro son no lineales tanto en el tiempo t como en la cantidad x de producto. Además, vamos a suponer que el coste regular de almacenamiento es de 0.1 unidades monetarias por cada unidad de producto y unidad de tiempo. De este modo tendremos que, por ejemplo, para $x = 100$ unidades de producto durante $t = 4$ unidades de tiempo, el coste acumulado de almacenamiento podría evaluarse como la suma del coste regular de almacenamiento y el coste del seguro, es decir, $(0.1)(4)(100) + 270 = 310$ unidades monetarias. De forma similar, se han calculado los costes acumulados de almacenamiento para los diferentes valores de t y x , los cuales han sido incluidos en la Tabla 1.16. Utilizando una regresión no lineal con los valores de la citada tabla, hemos estimado los parámetros $h = 0.31$, $\gamma_1 = 1.28$ y $\gamma_2 = 1.12$, con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.998$. Por consiguiente, la función $H(t, x) = 0.31t^{1.28}x^{1.12}$ puede representar adecuadamente el coste de almacenamiento acumulado en este sistema de inventario.

Capítulo 2

Una extensión del problema del *newsboy* con pedido de emergencia

2.1. Introducción

Según Chikán (1990, p. 29), el estudio sistemático de los modelos estocásticos de inventarios se inicia en la década de 1940 a 1950 con el planteamiento y análisis del problema del vendedor de periódicos (*newspaperboy problem* o, más brevemente, *newsboy problem*), también llamado problema del árbol de Navidad (*Christmas tree problem*). Para este investigador, el primer resumen sobre el problema anterior fue publicado en Morse y Kimbel (1951). Sin embargo, conviene no olvidar la existencia de algunos trabajos previos sobre el tema. Así, en Arrow (1958, p. 7) se señala al trabajo de Edgeworth (1888) sobre el cálculo del coeficiente de caja (proporción de depósitos que los bancos deben guardar en forma de reserva para garantizar la liquidez) como el introductor del modelo de decisión de periodo único. Asimismo, en Naddor (1982, p. 16) se comenta la existencia del trabajo de Fry (1928) en el que su autor muestra de qué modo se puede utilizar la teoría de la probabilidad para resolver algunos problemas de gestión de inventarios. Desde el punto de vista teórico, la principal diferencia entre el trabajo de Edgeworth y el de Fry radica en la hipótesis sobre el modelo de distribución de probabilidad para la demanda. Mientras que el primero considera que

la demanda está dada por una variable aleatoria con distribución normal, el segundo justifica para la misma la utilización de la distribución de Poisson.

En su formulación inicial, el problema del vendedor de periódicos se origina cuando un vendedor debe realizar un pedido antes del inicio de la temporada de ventas y no tiene la oportunidad de volver a pedir en caso de necesitar más artículos. Además, se supone que la demanda del artículo por parte de los clientes se describe mediante una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es conocida y que el exceso de stock al final de la temporada no puede venderse. El objetivo del modelo es determinar la cantidad a pedir para maximizar los beneficios esperados. Según Porteus (2002, p. 10), la primera solución a este problema en forma de razón crítica apareció en Arrow et al. (1951), y desde entonces el problema del *newsboy* es probablemente el modelo estocástico de inventario más estudiado y el que ha tenido un mayor número de extensiones durante los últimos 50 años. Este problema aparece en muchas situaciones de la vida real y con mucha frecuencia se utiliza como herramienta para la toma de decisiones en la fabricación y distribución de todo tipo productos comerciales. Es particularmente importante cuando se da un alto grado de incertidumbre en la demanda o cuando los costes derivados del exceso o la falta de stock son relevantes para la economía de las empresas.

Una primera generalización del modelo anterior se presenta en Hadley y Whitin (1963, p. 298). En este nuevo modelo se supone que si el tamaño del pedido es inferior a la demanda, se incurre en un coste derivado de la pérdida de confianza del cliente cuya demanda no ha podido ser satisfecha (que debe añadirse al coste por la pérdida del beneficio), mientras que si el tamaño del pedido es superior a la demanda, el exceso de stock al final de la temporada puede venderse a un precio de saldo inferior al precio de compra.

Sin embargo, en algunas situaciones prácticas reales, cuando se produce escasez existe la posibilidad de hacer un pedido de emergencia. En estas circunstancias es necesario analizar el comportamiento de los clientes ante una situación de escasez en el inventario. Así, por ejemplo, en Gallego y Moon (1993) se supone que todos los clientes están dispuestos a esperar al pedido de emergencia, mientras que en Khouja

(1996) se considera que solamente una fracción fija de los clientes es atendida con dicho pedido. No obstante, en la práctica suele ocurrir que la respuesta de los clientes ante una situación de escasez dependa del tamaño de la misma, porque cuanto más grande sea ésta mayor suele ser el tiempo de espera del cliente. Por tanto, se puede considerar que la fracción de clientes atendidos con el pedido de emergencia es función del tamaño de la escasez generada con el pedido inicial. En esta línea, en el trabajo de Lodree (2007) se supone que dicha fracción es una función lineal decreciente que empieza con el valor uno cuando no hay escasez y termina con el valor cero cuando ésta alcanza un valor límite a partir del cual los clientes no están dispuestos a esperar por el pedido de emergencia. Más recientemente, en el trabajo de Lee y Lodree (2010), se consideran dos nuevas funciones para modelar el comportamiento de los clientes y se estudia la manera en que estas funciones caracterizan el tipo de respuesta de los clientes frente a la escasez.

En el contexto de los modelos de inventario con revisión continua, esta idea había sido ya utilizada con anterioridad por otros autores. Así, los primeros modelos de inventario que consideran una mixtura de demanda pendiente y pérdida de ventas fueron sugeridos y formulados (aunque no resueltos) en Fabrycky y Banks (1967). Sin embargo, es en el trabajo de Montgomery et al. (1973) donde se proporciona por primera vez la solución a un sistema de inventario con demanda parcialmente acumulable. Estos autores estudiaron, además de un modelo con demanda determinística, dos modelos estocásticos, uno con revisión continua y otro con revisión periódica, aunque estos últimos fueron tratados heurísticamente. En Rosenberg (1979) y en Park (1982) se realizan nuevas formulaciones de este modelo determinístico, mientras que en Kim y Park (1985) se realiza un tratamiento heurístico de una variante del modelo estocástico de revisión continua. Más adelante, algunos autores utilizan el concepto de impaciencia para modelar la situación de mixtura entre pérdida de ventas y demanda pendiente. Así, en Lee y Nahmias (1993) se comenta el problema de un sistema de inventario en el que todos los clientes son pacientes durante un intervalo inicial de tiempo que termina en un instante dado, a partir del cual todos los clientes se vuelven completamente impacientes. Abad (1996) fue el primero en admitir que la

fracción de demanda que se sirve con retraso es una función dependiente del tiempo de espera, y propuso dos funciones para modelar la impaciencia de los clientes. En los últimos años, este enfoque ha recibido la atención de numerosos investigadores. En esta línea se pueden citar, entre otros, los trabajos de Abad (2001, 2003, 2008), Wang (2002), Papachristos y Skouri (2003), San-José et al. (2005a, 2005b, 2006), Dye y Ouyang (2005), Chang et al. (2006), Pal et al. (2006), Wu et al. (2006), Dye (2007), Dye et al. (2007), Lodree et al. (2008) y Bhunia et al. (2009). Otra forma de proceder para modelar la situación de mixtura en los modelos de inventario con revisión continua es la introducida en Padmanabhan y Vrat (1990). Estos autores consideran que la fracción de demanda que se sirve con retraso es variable y depende de la cantidad de pedidos pendientes de satisfacer, por lo que se obtiene una situación similar a la que estamos considerando ahora en el entorno de modelos estocásticos de inventario. En esta línea se pueden citar también los trabajos de Padmanabhan y Vrat (1995), Chung et al. (2000), Ouyang et al. (2003), Zhou et al. (2003), Zhou (2003), Chu et al. (2004) y Dye et al. (2006).

Otra cuestión importante que se debe de tener en cuenta en el problema del *newsboy* es la distribución de probabilidad asumida para la demanda. En el problema básico la solución puede ser obtenida de forma general para cualquier distribución de probabilidad a través de su función de distribución (ver, por ejemplo Hillier y Lieberman, 2001), pero en muchas extensiones del problema esto no es posible y se necesita especificar la distribución de probabilidad para la demanda. En el trabajo de Dominey y Hill (2004) se supone que el número de clientes que se reciben durante el periodo de ventas sigue una distribución de Poisson y los tamaños de los pedidos son variables aleatorias independientes con distribución normal, gamma o lognormal. En Gallego et al. (2007) se analiza la variación de la solución en el problema básico para las distribuciones de probabilidad normal, lognormal, gamma, binomial negativa y Pareto. Para el caso del problema con pedido de emergencia la distribución exponencial es probablemente la más utilizada para la demanda, a veces junto con las distribuciones uniforme y normal. Además, en Abdel-Malek et al. (2004) se considera el problema básico del *newsboy* con múltiples productos utilizando las distribuciones

exponencial, uniforme y beta. Otros trabajos que utilizan la distribución exponencial o lognormal son Choi y Ruszczyński (2008), Geng et al. (2010) y Grubbstrom (2010).

En la literatura se han propuesto y resuelto otras extensiones del problema clásico del vendedor de periódicos que no tienen en cuenta la existencia de un pedido de emergencia. En algunos de estos estudios se consideran objetivos de optimización alternativos al de maximización del beneficio esperado, como maximizar la utilidad esperada o la probabilidad de alcanzar un nivel esperado de beneficio. Cabe citar entre ellos a Lau (1980), Sankarasubramanian y Kumaraswamy (1983) y Lau y Lau (1988). El lector interesado en conocer las principales extensiones puede consultar, entre otros, el libro de Silver et al. (1998) y el artículo de Khouja (1999). Citaremos a continuación algunos de los trabajos en esta línea de objetivos alternativos al de maximización de beneficios durante la última década. En Lodree et al. (2004) se considera el objetivo de minimizar el tiempo de espera del cliente en una cadena de suministro con dos etapas. En el trabajo de Khouja y Vergara (2008) se contempla la posibilidad de incluir descuentos para vender el exceso de inventario por debajo del precio regular. En Huang et al. (2011) se analiza el problema del *newsboy* con múltiples productos que compiten entre sí, y en Yang et al. (2011) se proponen decisiones óptimas en cuanto a tamaño de pedido y precio de venta en un problema del *newsboy* orientado a objetivos. En Brito y de Almeida (2012) se introduce el problema con múltiples atributos, incluyendo en la función objetivo el posible impacto sobre el medio ambiente de los productos no vendidos, o el impacto del nivel de servicio en la imagen de la compañía o la confianza del cliente. Otros autores también han considerado el tópico de la tolerancia al riesgo en este problema. Por ejemplo, en Jörnsten et al. (2012) se analiza este tema en un modelo con demanda discreta y en Arcelus et al. (2012) se evalúan las políticas óptimas de precio y tamaño de pedido bajo diferentes grados de tolerancia al riesgo. Por último, en Jammerneegg y Kischka (2013) se estudia la política de precios adecuada para un problema del *newsboy* con restricciones en el nivel de servicio. Estos trabajos muestran cómo el problema del *newsboy* continúa siendo hoy en día un tema de actualidad.

En este capítulo centraremos la atención en los modelos de decisión de periodo

único en los que, para la demanda no satisfecha con el pedido inicial, se admite la posibilidad de un pedido de emergencia dependiente del tamaño de la escasez. En concreto, se supone que la fracción de demanda satisfecha con dicho pedido de emergencia es una función no creciente y no necesariamente continua. Además, se considera una distribución de probabilidad cualquiera con función de densidad continua y se pretende encontrar resultados teóricos generales que nos ayuden a resolver el problema en casos concretos. Obsérvese que en la lista de trabajos citados anteriormente, pocos son los que tratan este tipo de modelos de decisión de periodo único de una forma tan general.

Nuestro trabajo en este capítulo se desarrolla del modo siguiente. En la sección 2.2 hacemos la descripción general del modelo, y damos las hipótesis y la notación que usaremos. Las principales propiedades de la función objetivo se estudian en la sección 2.3. A partir de ellas, en la sección 2.4, se obtienen resultados útiles para resolver el problema en casos concretos, incluyéndose un análisis de sensibilidad para la solución óptima en la sección 2.5. El caso especial en que la fracción de demanda satisfecha con el pedido de emergencia venga dada por una función escalonada es analizado en la sección 2.6. Cuando la fracción de demanda es definida mediante una función que se anula a partir de un punto dado, indicando un umbral de pérdida de ventas, pueden obtenerse nuevos resultados teóricos que son estudiados en la sección 2.7. Los casos especiales en que la distribución de probabilidad de la demanda es uniforme o exponencial son analizados en las secciones 2.8 y 2.9 respectivamente. Por último, en la sección 2.10 se exponen las conclusiones obtenidas para el modelo planteado.

2.2. El modelo

En este capítulo se considera el problema al que se enfrenta el distribuidor de un artículo que desea generar un stock con anterioridad al inicio del periodo de ventas. Para ello, el distribuidor adquiere el artículo a un determinado fabricante en un único pedido de tamaño Q , a un coste de c unidades monetarias por unidad de producto. El distribuidor supone que la demanda del artículo durante el periodo normal de ventas

puede describirse por medio de una variable aleatoria continua y no negativa X , con función de densidad $f(x)$ y función de distribución $F(x)$ cuyo intervalo soporte es $I_{a,b}$, donde $a = \inf\{x \geq 0 : f(x) > 0\}$ y $b = \sup\{x \geq 0 : f(x) > 0\}$. Si el intervalo soporte es acotado, entonces $I_{a,b} = [a, b]$, con $0 \leq a < b < \infty$; en otro caso, tenemos $I_{a,b} = [a, \infty)$, es decir, $b = \infty$. Nótese que $I_{a,b}$ es el menor intervalo cerrado que contiene al conjunto $\{x \geq 0 : f(x) > 0\}$. Además, en todo este capítulo supondremos que la función de densidad $f(x)$ es continua en dicho intervalo soporte $I_{a,b}$. Por tanto, se verifica que: (i) $f(a) = \lim_{x \downarrow a} f(x)$; (ii) si $b < \infty$, entonces $f(b) = \lim_{x \uparrow b} f(x)$ y $\lim_{x \downarrow b} f(x) = 0$, pero no necesariamente $f(b) = 0$. Además, si $a > 0$, $\lim_{x \uparrow a} f(x) = 0$, pero no necesariamente $f(a) = 0$. La esperanza matemática de la demanda se representa por μ .

Se supone que el distribuidor vende el producto a sus clientes a un precio unitario v mayor que c . Los productos sobrantes al final del periodo normal de ventas generan un coste unitario efectivo por sobreabastecimiento, c_H . Como en Khouja y Vergara (2008), suponemos que este valor c_H puede ser negativo (en caso de representar un ingreso), ya que se permite la posibilidad de vender el exceso de stock a un precio de saldo inferior al coste de adquisición, es decir, $-c_H < c$. Por tanto, el coste unitario total por sobreabastecimiento es $h = c_H + c > 0$.

Si la demanda durante el periodo normal de ventas, x , es superior al tamaño del stock Q , e $y = x - Q$ representa la cantidad faltante, entonces se admite que el distribuidor tiene la posibilidad de suministrar con retraso a sus clientes una determinada fracción $\beta(y)$ de esta cantidad, mediante un pedido de emergencia al mismo u otro fabricante. En tal caso, se considera un coste unitario de adquisición c_B mayor que el coste unitario de compra inicial c , ya que los pedidos de emergencia suponen un mayor coste administrativo que el pedido inicial y, además, el coste de fabricación se incrementa debido a una falta de planificación de la producción y a la necesidad de servir esos productos con un tiempo de entrega menor que en el pedido inicial. La diferencia entre estos dos costes de adquisición, $\omega = c_B - c > 0$, representa entonces el sobrecoste unitario del pedido de emergencia.

Además, consideraremos que la fracción $\beta(y)$ que se sirve con retraso es una función no creciente de la cantidad de faltantes y , puesto que, cuanto más grande sea ésta, mayor será el tiempo de entrega del pedido de emergencia y, por tanto, menor o igual será la proporción de clientes que estén dispuestos a esperar la llegada del pedido de emergencia para satisfacer su demanda.

Por otro lado, el distribuidor considera que el número de unidades del producto que finalmente no son servidas, es decir $y[1 - \beta(y)]$, generan un coste unitario por pérdida de confianza del cliente cuya demanda no ha sido satisfecha, c_G , además del coste unitario por pérdida del beneficio, $v - c$. Por tanto, el coste unitario total por pérdida de ventas del distribuidor es $p = c_G + v - c > 0$. Supondremos, como en Khouja (1996), Lodree (2007) y Lee y Lodree (2010), que este coste p es mayor que el sobrecoste unitario asociado al pedido de emergencia, ω , debido a que, en caso contrario, el distribuidor preferiría perder la venta antes que recuperarla mediante el pedido de emergencia.

Finalmente, teniendo en cuenta que $\beta(y)$ es una función no creciente con valores en el intervalo $[0, 1]$, siempre existe $\lim_{y \downarrow 0} \beta(y) = \beta_o$. Además, si $\beta_o = 0$ entonces $\beta(y) = 0$ para cualquier y y, en consecuencia, el problema se reduce al del modelo de decisión de periodo único sin pedido de emergencia, cuya solución es perfectamente conocida para cualquier distribución de probabilidad de la demanda. También, admitiremos que cuando la escasez tiende a cero, puede no satisfacerse toda la demanda, es decir, $\beta_o \leq 1$. Así, β_o es otro parámetro del sistema que representa la proporción inicial de escasez que se satisface con el pedido de emergencia, al que denominaremos *intensidad de emergencia*. Por tanto, $1 - \beta_o$ representa la proporción de clientes que se pierden sólo por el hecho de que se produzca una rotura en el inventario, independientemente del tamaño de ésta. Si $\beta_o = 1$ se tiene la hipótesis dada en Lodree (2007), como propiedad 1, y en Lee y Lodree (2010), como propiedad 2. Además, podemos asegurar que existe el límite lateral por la derecha $\beta(y+) = \lim_{h \downarrow 0} \beta(y + h)$ para todo $y \geq 0$ y también existe el límite lateral por la izquierda $\beta(y-) = \lim_{h \uparrow 0} \beta(y + h)$ para todo $y > 0$.

En este contexto, nuestro modelo considera como objetivo determinar el tamaño de pedido óptimo, Q^* , que proporciona al distribuidor un mayor beneficio esperado al final de la temporada.

La tabla siguiente contiene la notación que utilizamos en este capítulo.

Tabla 2.1. Listado de notación

Q	tamaño del lote, <i>variable de decisión</i> (≥ 0)
X	variable aleatoria continua y no negativa que describe la demanda durante la temporada
x	valor actual de la demanda (≥ 0)
$f(x)$	función de densidad de la variable aleatoria X
$F(x)$	función de distribución de la variable aleatoria X
$I_{a,b}$	intervalo soporte de $f(x)$ con extremos a y b (i.e. $I_{a,b}=[a, b]$ con $b < \infty$ o $I_{a,b} = [a, \infty)$, donde $a = \inf\{x \geq 0: f(x) > 0\}$ y $b = \sup\{x \geq 0: f(x) > 0\}$, con $f(x)$ continua en $I_{a,b}$)
μ	valor esperado de la demanda (> 0)
y	cantidad faltante antes del pedido de emergencia ($y = (x - Q)^+ \geq 0$)
$\beta(y)$	fracción variable de la demanda que se sirve con retraso cuando la cantidad faltante es y ($0 \leq \beta(y) \leq 1$)
β_o	intensidad de emergencia ($0 \leq \beta_o \leq 1$)
c	coste unitario de adquisición antes del inicio de la temporada (> 0)
v	precio unitario de venta ($> c$)
c_H	coste unitario efectivo por sobreabastecimiento sin incluir el coste de adquisición ($> -c$)
c_B	coste unitario de adquisición en el periodo de emergencia ($> c$)
c_G	coste unitario por pérdida de ventas (<i>goodwill cost</i>) excluyendo la pérdida de beneficios (≥ 0)
<i>Parámetros auxiliares</i>	
h	coste unitario por sobreabastecimiento incluyendo el coste de adquisición ($h = c_H + c > 0$)
ω	sobrecoste unitario de adquisición en el periodo de emergencia ($\omega = c_B - c > 0$)
p	coste unitario por pérdida de ventas incluyendo la pérdida de beneficios ($p = c_G + v - c > \omega$)

Con la notación e hipótesis anteriores, si Q es el tamaño del lote y x es el valor actual de la demanda se tiene:

- ingresos en el periodo ordinario: $v \min(Q, x) = vx - v(x - Q)^+$.
- ingresos en el periodo de emergencia: $v(x - Q)^+ \beta((x - Q)^+)$.
- coste de adquisición en el periodo ordinario: $cQ = cx + c(Q - x)^+ - c(x - Q)^+$.
- coste de adquisición en el periodo de emergencia: $c_B(x - Q)^+ \beta((x - Q)^+)$.
- coste por sobreabastecimiento: $c_H(Q - x)^+$.
- coste de pérdida de confianza por ventas perdidas: $c_G(x - Q)^+ [1 - \beta((x - Q)^+)]$.

Por tanto, usando los parámetros auxiliares h , ω y p , resulta que los beneficios obtenidos son:

$$P(Q, x) = (v - c)x - h(Q - x)^+ - \omega(x - Q)^+ \beta((x - Q)^+) - p(x - Q)^+ [1 - \beta((x - Q)^+)] \quad (2.1)$$

y el beneficio esperado es:

$$B(Q) = E[P(Q, X)] = (v - c)\mu - T(Q) \quad (2.2)$$

donde

$$T(Q) = hE[(Q - X)^+] + \omega E[(X - Q)^+ \beta((X - Q)^+)] + pE\{(X - Q)^+ [1 - \beta((X - Q)^+)]\}. \quad (2.3)$$

En consecuencia, el problema de maximizar el beneficio esperado se reduce al problema de minimizar la función $T(Q)$ con $Q \geq 0$. Además, teniendo en cuenta que $f(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria continua X , podemos reescribir la función $T(Q)$ como:

$$\begin{aligned} T(Q) &= h \int_0^Q (Q - x) f(x) dx + \omega \int_Q^\infty (x - Q) \beta(x - Q) f(x) dx \\ &\quad + p \int_Q^\infty (x - Q) [1 - \beta(x - Q)] f(x) dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

y el problema matemático que necesitamos resolver es

$$\min_{Q \geq 0} T(Q). \quad (2.5)$$

2.3. Propiedades generales

El propósito de esta sección es establecer propiedades generales para el problema anterior. En primer lugar, se da un resultado referido al comportamiento de la función $T(Q)$ fuera del intervalo soporte $I_{a,b}$.

Lema 2.1 *Sea $I_{a,b}$ el intervalo soporte de la demanda. La función $T(Q)$ verifica:*

1. Si $0 \leq Q < a$, entonces $T(Q) > T(a)$.
2. Si $b < Q < \infty$, entonces $T(Q) > T(b)$.

Demostración. Si $0 \leq Q < a$ entonces

$$T(Q) = \int_a^b [p + (\omega - p)\beta(x - Q)](x - Q)f(x)dx.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $x - Q > x - a$, $\beta(x - Q) \leq \beta(x - a)$ y $\omega < p$, se verifica que $T(Q) > \int_a^b [p + (\omega - p)\beta(x - a)](x - a)f(x)dx = T(a)$.

Del mismo modo, si $b < Q < \infty$, entonces

$$T(Q) = h \int_a^b (Q - x)f(x)dx > h \int_a^b (b - x)f(x)dx = T(b)$$

y la afirmación 2 queda demostrada. ■

Como consecuencia de este resultado el problema matemático dado por (2.5) puede reducirse a

$$\min_{Q \in I_{a,b}} T(Q). \quad (2.6)$$

2.3.1. Estudio de la derivada primera de la función $T(Q)$

Reordenando los términos de la expresión (2.4), la función $T(Q)$ puede escribirse como

$$T(Q) = h \int_a^Q (Q - x)f(x)dx + p \int_Q^b (x - Q)f(x)dx + (\omega - p) \int_Q^b (x - Q)\beta(x - Q)f(x)dx \quad (2.7)$$

es decir

$$T(Q) = L(Q) + (\omega - p) A(Q) \quad (2.8)$$

donde

$$L(Q) = h \int_a^Q (Q - x)f(x)dx + p \int_Q^b (x - Q)f(x)dx \quad (2.9)$$

y

$$A(Q) = \int_Q^b (x - Q) \beta(x - Q)f(x)dx. \quad (2.10)$$

La función $L(Q)$ es la función de coste para el problema básico del *newsboy* sin pedido de emergencia, la cual, como es sabido, es de clase C^2 y convexa en el intervalo soporte $I_{a,b}$ con las siguientes expresiones para sus derivadas:

$$L'(Q) = (p + h)F(Q) - p \quad L''(Q) = (p + h)f(Q).$$

La función $A(Q)$ representa el tamaño esperado del pedido de emergencia y $(\omega - p)A(Q)$, que es negativo, representa el ahorro en la función de coste asociado con el pedido de emergencia cuando el tamaño del lote es Q .

Para estudiar la derivada de $A(Q)$ nos proponemos aplicar la regla de Leibniz. Por esta razón, es importante notar que si $b < \infty$, como $f(x) = 0$ para $x > b$, se tiene que el valor de $A(Q)$ no depende del comportamiento de la función $\beta(y)$ para $y = x - Q > b - Q$. Es decir, suponiendo fijo $Q \in [a, b]$, para calcular $A(Q)$ es suficiente conocer el comportamiento de $\beta(y)$ cuando $y \in [0, b - Q]$. Además, nos interesan los puntos $x \in [Q, b]$ de la función $(x - Q)\beta(x - Q)f(x)$ que presentan un comportamiento especial (puntos en los que la función no es continua o no es diferenciable, etc.). Dado que $(x - Q)$ y $f(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[Q, b]$, además de en los puntos $Q = a$ y $Q = b$, en principio nuestro interés se centra en conocer los puntos $y \in (0, b - Q)$ en los cuales la función $\beta(y)$ presenta un comportamiento especial (no es continua, no es diferenciable, etc.). Más concretamente, si denotamos por $i_1(Q)$ al número de tales puntos en el intervalo $(0, b - Q)$ y suponemos que $i_1(Q)$ es finito, podemos denotarles por $y_1, y_2, \dots, y_{i_1(Q)}$, con $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{i_1(Q)}$. Gráficamente, para cada $Q \in I_{a,b}$, la situación se representa en la siguiente figura:

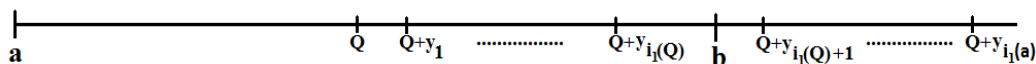


Figura 2.1. Puntos de especial interés para cada Q

donde, como acabamos de indicar, $i_1(Q) = \#\{y_j : Q + y_j < b\}$.

Por tanto, si ponemos $y_o = 0$, se tiene

$$A(Q) = \sum_{k=1}^{i_1(Q)} \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} (x-Q)\beta(x-Q)f(x)dx + \int_{Q+y_{i_1(Q)}}^b (x-Q)\beta(x-Q)f(x)dx \quad (2.11)$$

considerando que el sumatorio del primer término es igual a cero cuando $i_1(Q) = 0$ (convenio que seguiremos en todo este capítulo).

De modo análogo, si $b = \infty$ llegamos a la misma conclusión que expresa (2.11).

Por otro lado, como Q puede tomar el valor $Q = a$, para poder contemplar todas las situaciones posibles, además de los puntos $y = 0$ e $y = b - a$, necesitamos considerar todos los puntos $y \in (0, b - a)$ en los cuales la función $\beta(y)$ presenta un comportamiento especial (no es continua, no es diferenciable, etc.). Es decir, suponiendo de nuevo que tales puntos son un conjunto finito se tendría $\{y_1, y_2, \dots, y_{i_1(a)}\}$, con $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{i_1(a)}$. Por brevedad pondremos $n_1 = i_1(a)$ y también usaremos la notación $y_{n_1+1} = b - a$.

Estas observaciones son la razón de las siguientes nuevas hipótesis sobre la función $\beta(y)$:

Hipótesis H1. La función $\beta(y)$ es de clase C^1 en el intervalo $(0, b - a)$ excepto quizás en un número finito de puntos, $y_1 < y_2 < \dots < y_{n_1}$, donde existen y son finitos los límites laterales $\beta'(y_j-)$ y $\beta'(y_j+)$, con $j = 1, \dots, n_1$.

Hipótesis H2. En los extremos del intervalo $(0, b - a)$ existen y son finitos los límites laterales $\lim_{y \downarrow 0} [y\beta'(y)]$ y $\lim_{y \uparrow (b-a)} [y\beta'(y)]$.

Es importante observar que si $b < \infty$, cuando restringimos nuestro interés al estudio del intervalo cerrado $[y_{j-1}, y_j]$, con $j = 1, \dots, n_1 + 1$, podemos redefinir los valores de $\beta(y)$ y de $y\beta'(y)$ en los extremos de este intervalo de acuerdo con los valores de los correspondientes límites laterales y, en consecuencia, es posible suponer que tanto $\beta(y)$ como $y\beta'(y)$ son funciones continuas en este intervalo cerrado. Análogamente, si $b = \infty$, la misma conclusión es válida para todos los intervalos de la forma $[y_{j-1}, y_j]$, con $j = 1, \dots, n_1$, y también para el intervalo $[y_{n_1}, \infty)$, aunque en éste sólo es necesario redefinir $\beta(y)$ y $y\beta'(y)$ en el punto $y = y_{n_1}$, pero no en $y = \infty$.

Como consecuencia de lo anterior (aunque también se sigue directamente de H1 y H2), existe una constante $M_1 > 0$ tal que, para todo $y > 0$, se tiene que $|\beta(y) + y\beta'(y)| \leq M_1$.

Profundizando un poco más, las hipótesis y comentarios anteriores nos aseguran que se cumplen las condiciones para poder aplicar la regla de Leibniz de derivación de integrales paramétricas propias e impropias cuando en el integrando aparecen las funciones $\beta(y)$ e $y\beta'(y)$. Además, nos garantizan la continuidad de la función $A(Q)$.

Con todo ello podemos enunciar el siguiente resultado para $A(Q)$.

Lema 2.2 *Supongamos que la función $\beta(y)$ verifica las hipótesis H1 y H2. Entonces:*

1. *La función $A(Q)$ es de clase C^1 en cualquier punto $Q \in (a, b)$ con $Q \neq b - y_j$, para $j = 1, \dots, n_1$, y su derivada está dada por*

$$\begin{aligned} A'(Q) = & - \sum_{k=1}^{i_1(Q)} \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} [\beta(x-Q) + (x-Q)\beta'(x-Q)] f(x) dx \\ & - \int_{Q+y_{i_1(Q)}}^b [\beta(x-Q) + (x-Q)\beta'(x-Q)] f(x) dx \\ & + S_1(Q) \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde

$$S_1(Q) = \sum_{k=1}^{i_1(Q)} [\beta(y_k-) - \beta(y_k+)] y_k f(Q + y_k). \quad (2.13)$$

2. *$A(Q)$ es derivable con continuidad por la derecha en el punto $Q = a$ y la derivada lateral $A'_+(a)$ está dada por la expresión (2.12) para $Q = a$.*
3. *Si $b < \infty$, $A(Q)$ es derivable con continuidad por la derecha para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, \dots, n_1$, y las derivadas laterales $A'_+(b - y_j)$ están dadas por la expresión (2.12) con $Q = b - y_j$.*
4. *Si $b < \infty$, $A(Q)$ es derivable con continuidad por la izquierda en el punto $Q = b$ y se tiene $A'_-(b) = 0$.*
5. *Si $b < \infty$ y $n_1 \geq 1$, $A(Q)$ es derivable con continuidad por la izquierda para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, \dots, n_1$, y las derivadas laterales $A'_-(b - y_j)$ están dadas por*

$$A'_-(b - y_j) = A'_+(b - y_j) + y_j [\beta(y_j-) - \beta(y_j+)] f(b).$$

Demostración. Para facilitar el seguimiento de los razonamientos que vienen a continuación antepondremos algunas figuras relativas a la función $i_1(Q)$:

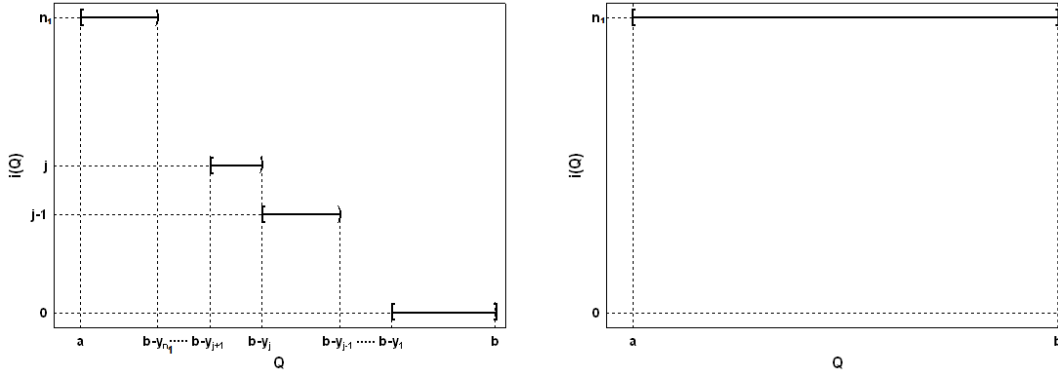


Figura 2.2a. $i_1(Q)$ con $b < \infty$ y $n_1 \geq 1$ Figura 2.2b. $i_1(Q)$ con $b = \infty$ o $n_1 = 0$

En las figuras 2.2a y 2.2b se representan las dos posibles formas que puede adoptar la función $i_1(Q)$ teniendo en cuenta los valores de b y n_1 .

Como más adelante veremos, cuando $b < \infty$ y $n_1 \geq 1$, las discontinuidades por la izquierda de la función $i_1(Q)$ en los puntos $b - y_j$, para $j = 1, \dots, n_1$, son la clave para entender la última expresión del enunciado de este lema.

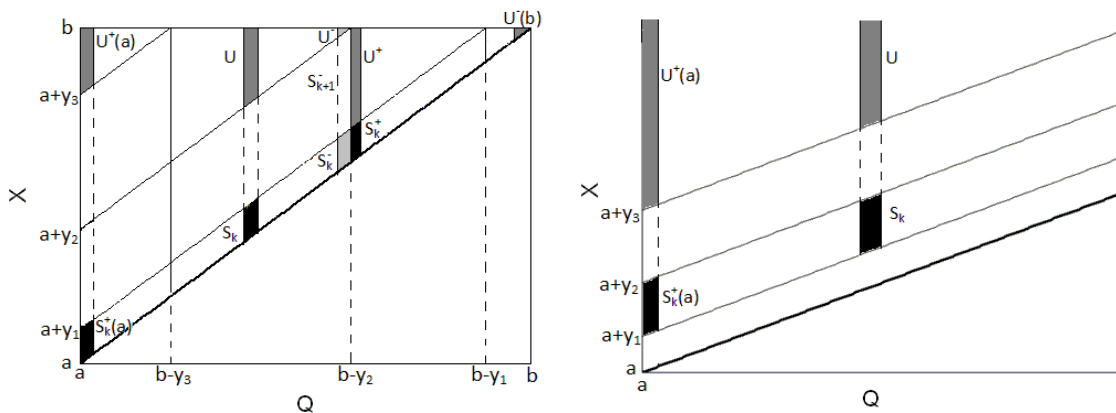


Figura 2.3a. Ejemplo con $b < \infty$ y $n_1 = 3$ Figura 2.3b. Ejemplo con $b = \infty$ y $n_1 = 3$

Las figuras 2.3a y 2.3b son de gran ayuda para seguir la exposición de los diferentes casos que se presentan en este lema.

1. En primer lugar consideremos el caso $b < \infty$. Sea $Q \in (a, b)$ con $Q \neq b - y_j$, para $j = 1, \dots, n_1$. Si $i_1(Q) \geq 1$, es claro que eligiendo $\varepsilon > 0$ suficientemente

pequeño se tiene que $i_1(Q)$ es constante en el intervalo $(Q - \varepsilon, Q + \varepsilon)$ y por tanto, de (2.11) se sigue que podemos reducir nuestro problema al estudio de las funciones

$$A_k(Q) = \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} (x-Q)\beta(x-Q)f(x)dx$$

con $k = 1, \dots, i_1(Q)$ y

$$A_{ult}(Q) = \int_{Q+y_{i_1(Q)}}^b (x-Q)\beta(x-Q)f(x)dx.$$

Sea ahora $S_k(Q) = \{(\hat{Q}, x) : Q - \varepsilon < \hat{Q} < Q + \varepsilon, \hat{Q} + y_{k-1} \leq x \leq \hat{Q} + y_k\}$. Redefiniendo los valores de $(x-Q)\beta(x-Q)$ y de $\beta(x-Q) + (x-Q)\beta'(x-Q)$ en las fronteras superior e inferior de $S_k(Q)$, y de acuerdo con lo establecido en las hipótesis H1 y H2, se tiene que en un entorno abierto del punto Q ambas funciones verifican las hipótesis de la regla de Leibniz para derivadas de integrales dependientes de un parámetro. Por tanto, se tiene que $A_k(Q)$ es de clase C^1 en Q , y su derivada es

$$\begin{aligned} A'_k(Q) &= - \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} [\beta(x-Q) + (x-Q)\beta'(x-Q)] f(x)dx \\ &\quad + y_k\beta(y_k-)f(Q+y_k) - y_{k-1}\beta(y_{k-1}+)f(Q+y_{k-1}). \end{aligned}$$

Considerando ahora $U(Q) = \{(\hat{Q}, x) : Q - \varepsilon < \hat{Q} < Q + \varepsilon, \hat{Q} + y_{i_1(Q)} \leq x \leq b\}$ y haciendo un razonamiento similar al anterior se prueba que $A_{ult}(Q)$ es de clase C^1 en Q , y que su derivada es

$$\begin{aligned} A'_{ult}(Q) &= - \int_{Q+y_{i_1(Q)}}^b [\beta(x-Q) + (x-Q)\beta'(x-Q)] f(x)dx \\ &\quad - y_{i_1(Q)}\beta(y_{i_1(Q}+)f(Q+y_{i_1(Q)}). \end{aligned}$$

En consecuencia, como $A(Q)$ es suma de funciones de la forma $A_k(Q)$, con $k = 1, \dots, i_1(Q)$, y $A_{ult}(Q)$, se tiene que $A(Q)$ es de clase C^1 en Q . El resto se sigue sin más que operar en el sumatorio que incluye todas las derivadas obtenidas. Si $i_1(Q) = 0$, en lo anterior sobran los razonamientos sobre $A_k(Q)$ ya que entonces $A(Q)$ se reduce a $A_{ult}(Q)$ y, por tanto, obtenemos la misma conclusión.

En otro caso, si $b = \infty$, es válido todo lo hecho anteriormente, pero poniendo ahora $U(Q) = \{(\hat{Q}, x) : Q - \varepsilon < \hat{Q} < Q + \varepsilon, x \geq \hat{Q} + y_{i_1(Q)}\}$. Además, es interesante señalar que en este caso $i_1(Q) = n_1$ para todo $Q \in I_{a,b}$ por lo que la función $i_1(Q)$ no tiene puntos de discontinuidad en $I_{a,b}$ y, en consecuencia, tampoco los tiene $A'(Q)$. Es decir, $A(Q)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$.

2. La demostración es análoga a la realizada en el apartado anterior con los siguientes cambios:

- a) se sustituye $S_k(Q)$ por $S_k^+(a) = \{(\hat{Q}, x) : a \leq \hat{Q} < a + \varepsilon, \hat{Q} + y_{k-1} \leq x \leq \hat{Q} + y_k\}$.
- b) se sustituye $U(Q)$ por $U^+(a) = \{(\hat{Q}, x) : a \leq \hat{Q} < a + \varepsilon, \hat{Q} + y_{i_1(Q)} \leq x \leq b\}$ cuando $b < \infty$, o $U^+(a) = \{(\hat{Q}, x) : Q - \varepsilon < \hat{Q} < Q + \varepsilon, x \geq \hat{Q} + y_{n_1}\}$ cuando $b = \infty$.
- c) en lugar de la regla de Leibniz para derivadas ordinarias se aplica la misma regla pero para derivadas laterales por la derecha.

3. Como en los puntos $b - y_j$ la función $i_1(Q)$ es continua por la derecha, la demostración es muy similar a la hecha en el apartado anterior con los cambios:

- a) se sustituye $S_k^+(a)$ por $S_k^+(b - y_j) = \{(\hat{Q}, x) : b - y_j \leq \hat{Q} < b - y_j + \varepsilon, \hat{Q} + y_{k-1} \leq x \leq \hat{Q} + y_k\}$.
- b) se sustituye $U^+(a)$ por $U^+(b - y_j) = \{(\hat{Q}, x) : b - y_j \leq \hat{Q} < b - y_j + \varepsilon, \hat{Q} + y_{i_1(Q)} \leq x \leq b\}$.

En consecuencia, $A(Q)$ es derivable con continuidad por la derecha en los puntos $Q = b - y_j$ y la derivada lateral $A'_+(b - y_j)$ está dada por la expresión (2.12) con $Q = b - y_j$. Además, para la demostración del apartado 5, nos interesa lo siguiente. Como $i_1(b - y_j) = j - 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
A'_+(b - y_j) &= - \sum_{k=1}^{j-1} \int_{b-y_j+y_{k-1}}^{b-y_j+y_k} [\beta(x - b + y_j) + (x - b + y_j) \beta'(x - b + y_j)] f(x) dx \\
&\quad - \int_{b-y_j+y_{j-1}}^b [\beta(x - b + y_j) + (x - b + y_j) \beta'(x - b + y_j)] f(x) dx \\
&\quad + \sum_{k=1}^{j-1} y_k [\beta(y_k -) - \beta(y_k +)] f(b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=1}^j \int_{b-y_j+y_{k-1}}^{b-y_j+y_k} [\beta(x-b+y_j) + (x-b+y_j) \beta'(x-b+y_j)] f(x) dx \\
&\quad + \sum_{k=1}^{j-1} y_k [\beta(y_k-) - \beta(y_k+)] f(b).
\end{aligned}$$

4. Es claro que eligiendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene que $i_1(Q) = 0$ en el intervalo $(b - \varepsilon, b]$ y por tanto en este intervalo se tiene

$$A(Q) = \int_Q^b (x - Q) \beta(x - Q) f(x) dx.$$

Considerando ahora $U^-(b) = \{(Q, x) : b - \varepsilon < Q \leq b, Q \leq x \leq b\}$, haciendo un razonamiento similar a los anteriores y apoyándonos en la regla de Leibniz para derivadas laterales por la izquierda de integrales dependientes de un parámetro, se prueba que $A(Q)$ es derivable con continuidad por la izquierda en el punto $Q = b$ y que su derivada lateral es $A'_-(b) = 0$.

5. Para analizar la derivada lateral por la izquierda en los puntos $b - y_j$, con $j = 1, \dots, n_1$, es importante tener en cuenta que la función $i_1(Q)$ no es continua por la izquierda en estos puntos. Consideremos en primer lugar el caso $j > 1$. Se tiene que $i_1(b - y_j) = j - 1 > 0$, pero eligiendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, $i_1(\hat{Q}) = j$, si $\hat{Q} \in (b - y_j - \varepsilon, b - y_j)$, y por tanto, ahora en la expresión de $A(Q)$ se tiene un término $A_k(Q)$ más que cuando se estudia la derivada lateral por la derecha. Pero, como allí, aquí también podemos reducir nuestro problema al estudio de las funciones $A_k(Q)$, con $k = 1, \dots, j$, y

$$A_{ult}(Q) = \int_{Q+y_j}^b (x - Q) \beta(x - Q) f(x) dx$$

estudiadas en el intervalo $(b - y_j - \varepsilon, b - y_j)$ para la variable Q . Razonando de modo análogo, a lo hecho en ese apartado con los siguientes cambios:

- a) se sustituye $S_k^+(b - y_j)$ por $S_k^-(b - y_j) = \{(\hat{Q}, x) : b - y_j - \varepsilon < \hat{Q} \leq b - y_j, \hat{Q} + y_{k-1} \leq x \leq \hat{Q} + y_k\}$.
- b) se sustituye $U^+(b - y_j)$ por $U^-(b - y_j) = \{(\hat{Q}, x) : b - y_j - \varepsilon < \hat{Q} \leq b - y_j, \hat{Q} + y_j \leq x \leq b\}$.

- c) en lugar de la regla de Leibniz por la derecha se aplica la misma regla, pero por la izquierda.

Por tanto

$$(A_k)'_-(b - y_j) = - \int_{b-y_j+y_{k-1}}^{b-y_j+y_k} [\beta(x - b + y_j) + (x - b + y_j) \beta'(x - b + y_j)] f(x) dx \\ + y_k [\beta(y_k-) - \beta(y_k+)] f(b)$$

para $k = 1, \dots, j$ y

$$(A_{ult})'_-(b - y_j) = -y_j \beta(y_j+) f(b).$$

El resto se sigue sin más que operar en el sumatorio que incluye todas las derivadas obtenidas. El caso $j = 1$ es ya inmediato. ■

El lema anterior nos permite deducir el siguiente corolario:

Corolario 2.3 *Con las hipótesis del Lema 2.2 se tiene que la función $A(Q)$ es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$ si y sólo si se verifica al menos una de las siguientes condiciones:*

- (i) $f(b) = 0$
- (ii) $\beta(y)$ es una función continua en el intervalo $(0, b - a)$.

Demostración. Si $A(Q)$ es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$, entonces o bien $b = \infty$, en cuyo caso se tiene $f(b) = 0$, o bien $b < \infty$. En este caso, si $n_1 \geq 1$, por el apartado 5 del Lema 2.2, se sigue que en los puntos $Q = b - y_j$, con $j = 1, \dots, n_1$, se verifica $A'_-(b - y_j) - A'_+(b - y_j) = y_j [\beta(y_j-) - \beta(y_j+)] f(b) = 0$, lo cual implica que $f(b) = 0$ o $\beta(y_j-) = \beta(y_j+)$ para todo y_j , con $j = 1, \dots, n_1$, es decir, al menos una de las dos condiciones del corolario es cierta. En otro caso ($n_1 = 0$) $\beta(y)$ es una función continua en el intervalo $(0, b - a)$.

Recíprocamente, si al menos una de las dos condiciones del corolario es cierta y $b < \infty$ con $n_1 \geq 1$, por el apartado 5 del Lema 2.2 se sigue que $A(Q)$ es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$. En otro caso, o bien $b < \infty$ con $n_1 = 0$ o bien $b = \infty$, y en ambos casos $A(Q)$ es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$. ■

Como consecuencia de los resultados anteriores, podemos obtener el siguiente teorema para la función $T(Q)$.

Teorema 2.4 *Supongamos que la función $\beta(y)$ verifica las hipótesis H1 y H2. Entonces:*

1. *La función $T(Q)$ es de clase C^1 en cualquier punto $Q \in (a, b)$ con $Q \neq b - y_j$, para $j = 1, \dots, n_1$, y su derivada está dada por*

$$\begin{aligned}
 T'(Q) &= (p + h) F(Q) - p \\
 &\quad - (\omega - p) \sum_{k=1}^{i_1(Q)} \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} [\beta(x - Q) + (x - Q) \beta'(x - Q)] f(x) dx \\
 &\quad - (\omega - p) \int_{Q+y_{i_1(Q)}}^b [\beta(x - Q) + (x - Q) \beta'(x - Q)] f(x) dx \\
 &\quad + (\omega - p) S_1(Q)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde $S_1(Q) = \sum_{k=1}^{i_1(Q)} [\beta(y_k -) - \beta(y_k +)] y_k f(Q + y_k)$.

2. *$T(Q)$ es derivable con continuidad por la derecha en el punto $Q = a$ y la derivada lateral $T'_+(a)$ está dada por la expresión (2.14) para $Q = a$.*
3. *Si $b < \infty$, $T(Q)$ es derivable con continuidad por la derecha para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, \dots, n_1$, y las derivadas laterales $T'_+(b - y_j)$ están dadas por la expresión (2.14) con $Q = b - y_j$.*
4. *Si $b < \infty$, $T(Q)$ es derivable con continuidad por la izquierda en el punto $Q = b$ y se tiene $T'_-(b) = h$.*
5. *Si $b < \infty$ y $n_1 \geq 1$, $T(Q)$ es derivable con continuidad por la izquierda para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, \dots, n_1$, y las derivadas laterales $T'_-(b - y_j)$ están dadas por*

$$T'_-(b - y_j) = T'_+(b - y_j) + (\omega - p) [\beta(y_j -) - \beta(y_j +)] y_j f(b).$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $T(Q) = L(Q) + (\omega - p) A(Q)$ y $L'(Q) = (p + h) F(Q) - p$, la prueba se sigue del Lema 2.2. ■

Como consecuencia de este teorema, cuando se cumplen las hipótesis señaladas en el mismo, se tiene que:

1. Por ser $\beta(y)$ una función no creciente con $\beta(y) \leq \beta_o$ para todo $y \geq 0$, se sigue que $S_1(Q) \geq 0$. Además, utilizando el apartado 2 de dicho teorema, podemos asegurar que

$$\begin{aligned} T'_+(a) &\leq -p - (\omega - p) \int_a^b \beta(x - a) f(x) dx \leq -p - (\omega - p) \beta_o \\ &= -(1 - \beta_o) p - \beta_o \omega < 0. \end{aligned}$$

2. Si $b < \infty$, por el apartado 4 de dicho teorema, se tiene $T'_-(b) = h > 0$ y si $b = \infty$, por ser $\lim_{Q \rightarrow \infty} i_1(Q) = \lim_{Q \rightarrow \infty} S_1(Q) = 0$, se verifica que

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} T'(Q) = \lim_{Q \rightarrow \infty} [(p + h) F(Q) - p] = h > 0.$$

Por tanto, al ser $T(Q)$ una función continua, el modelo de optimización dado por (2.6) alcanza, al menos, una solución óptima en un punto $Q \in (a, b)$ y podemos reformularlo como

$$\min_{Q \in (a, b)} T(Q). \quad (2.15)$$

Utilizando también el Teorema 2.4, el siguiente corolario nos permite establecer condiciones necesarias y suficientes para que la función $T(Q)$ sea de clase C^1 .

Corolario 2.5 *Supongamos que la función $\beta(y)$ verifica las hipótesis H1 y H2. Entonces, $T(Q)$ es una función de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$ si y sólo si se verifica al menos una de las siguientes condiciones:*

- (i) $f(b) = 0$.
- (ii) $\beta(y)$ es una función continua en el intervalo $(0, b - a)$.

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 2.4, razonando como en la prueba del Corolario 2.3. ■

Nota. Si $b = \infty$ entonces es claro que la función $T(Q)$ es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$.

2.3.2. Estudio de la derivada segunda de la función $T(Q)$

Para analizar la existencia de la derivada segunda de la función $T(Q)$ vamos a suponer que la función de densidad $f(x)$ es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$, con $f'(b) = \lim_{x \uparrow b} f'(x)$ y $f'(a) = \lim_{x \downarrow a} f'(x)$. Además, por el mismo motivo que en la subsección anterior, para cada $Q \in I_{a,b}$, nos interesa conocer los puntos $y \in (0, b - Q)$ en los cuales la función $\beta(y)$ no es de clase C^2 . Más concretamente, si denotamos por $i_2(Q)$ al número de tales puntos en el intervalo $(0, b - Q)$ y suponemos que $i_2(Q)$ es finito, podemos denotarles por $y_1, y_2, \dots, y_{i_2(Q)}$, con $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{i_2(Q)}$. Por último, si ponemos $n_2 = i_2(a)$ e $y_{n_2+1} = b - a$, de modo paralelo a lo hecho en la subsección 2.3.1, supondremos las siguientes nuevas hipótesis sobre la función $\beta(y)$:

Hipótesis H3. *La función $\beta(y)$ es de clase C^2 en el intervalo $(0, b - a)$ excepto quizás en un número finito de puntos, $y_1 < y_2 < \dots < y_{n_2}$, donde existen y son finitos los límites laterales $\beta'(y_j-)$, $\beta'(y_j+)$, $\beta''(y_j-)$ y $\beta''(y_j+)$, con $j = 1, \dots, n_2$.*

Hipótesis H4. *En los extremos del intervalo $(0, b - a)$ existen y son finitos los límites laterales $\lim_{y \downarrow 0} [2\beta'(y) + y\beta''(y)]$ y $\lim_{y \uparrow (b-a)} [2\beta'(y) + y\beta''(y)]$.*

Nótese que la hipótesis H3 implica la hipótesis H1. Además, observar que $n_1 \leq n_2$ y, como consecuencia de estas nuevas hipótesis, podemos asegurar que existe una constante $M_2 > 0$ tal que, para todo $y > 0$, se tiene que $|2\beta'(y) + y\beta''(y)| \leq M_2$. Por tanto, usando el mismo razonamiento que en la subsección anterior, podemos suponer que, si $b < \infty$, las funciones $y\beta(y)$, $\beta(y) + y\beta'(y)$ y $2\beta'(y) + y\beta''(y)$ son continuas en los intervalos $[y_{j-1}, y_j]$, con $j = 1, \dots, n_2 + 1$, y si $b = \infty$, son continuas en los intervalos $[y_{j-1}, y_j]$, con $j = 1, \dots, n_2$, y también en el intervalo $[y_{n_2}, \infty)$. En consecuencia, como ya comentamos en la subsección anterior, podemos asegurar que se cumplen las condiciones necesarias para poder aplicar la regla de Leibniz para la derivación de integrales paramétricas propias e impropias en las que aparezcan dichas funciones.

Entonces, poniendo $y_o = 0$, podemos escribir la función $A(Q)$ como

$$A(Q) = \sum_{k=1}^{i_2(Q)} \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} (x - Q) \beta(x - Q) f(x) dx + \int_{Q+y_{i_2(Q)}}^b (x - Q) \beta(x - Q) f(x) dx. \quad (2.16)$$

Con todo ello podemos enunciar el siguiente resultado para la derivada segunda de la función $A(Q)$.

Lema 2.6 *Supongamos que la función de densidad $f(x)$ es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$ y la función $\beta(y)$ verifica las hipótesis $H2$, $H3$ y $H4$. Entonces:*

1. *La función $A(Q)$ es de clase C^2 en cualquier punto $Q \in (a, b)$ con $Q \neq b - y_j$, para $j = 1, \dots, n_2$, y su derivada segunda está dada por*

$$\begin{aligned} A''(Q) &= \beta_o f(Q) + \sum_{k=1}^{i_2(Q)} \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} [2\beta'(x-Q) + (x-Q)\beta''(x-Q)] f(x) dx \\ &\quad + \int_{Q+y_{i_2(Q)}}^b [2\beta'(x-Q) + (x-Q)\beta''(x-Q)] f(x) dx \\ &\quad + S_2(Q) \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde

$$\begin{aligned} S_2(Q) &= - \sum_{k=1}^{i_2(Q)} \{ \beta(y_{k-}) - \beta(y_{k+}) + y_k [\beta'(y_{k-}) - \beta'(y_{k+})] \} f(Q + y_k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i_2(Q)} y_k [\beta(y_{k-}) - \beta(y_{k+})] f'(Q + y_k). \end{aligned} \quad (2.18)$$

2. *$A(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la derecha en el punto $Q = a$ y la derivada lateral segunda $A''_{++}(a)$ está dada por la expresión (2.17) para $Q = a$.*
3. *Si $b < \infty$, $A(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la derecha para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, \dots, n_2$, y las derivadas laterales segundas $A''_{++}(b - y_j)$ están dadas por la expresión (2.17) con $Q = b - y_j$.*
4. *Si $b < \infty$, $A(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la izquierda en el punto $Q = b$ y se tiene $A''_{--}(b) = \beta_o f(b)$.*
5. *Si $b < \infty$ y $n_2 \geq 1$, $A(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la izquierda para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, \dots, n_2$, y las derivadas laterales segundas $A''_{--}(b - y_j)$ están dadas por*

$$\begin{aligned} A''_{--}(b - y_j) &= A''_{++}(b - y_j) - \{ \beta(y_{j-}) - \beta(y_{j+}) + y_j [\beta'(y_{j-}) - \beta'(y_{j+})] \} f(b) \\ &\quad + y_j [\beta(y_{j-}) - \beta(y_{j+})] f'(b). \end{aligned}$$

Demostración. Probamos en primer lugar que si $\lim_{y \downarrow 0} [y\beta'(y)]$ existe y es finito (hipótesis H2), entonces necesariamente $\lim_{y \downarrow 0} [y\beta'(y)] = 0$. En efecto, como $\beta(y)$ es una función no creciente y, por la hipótesis H1, en el punto $y = 0$ por la derecha existe un entorno lateral reducido en el cual $-y\beta'(y) \geq 0$, se tiene que $\lim_{y \downarrow 0} [-y\beta'(y)] \geq 0$. Luego, si suponemos que $\lim_{y \downarrow 0} [-y\beta'(y)] = L > 0$, para cualquier ε con $0 < \varepsilon < L/2$, existiría un $\delta \in (0, b - a)$ tal que si $y \in (0, \delta)$, entonces $-\beta'(y) > \frac{\varepsilon}{y}$. Por consiguiente, $\int_0^\delta -\beta'(y)dy > \int_0^\delta \frac{\varepsilon}{y}dy = \varepsilon[\ln \delta - \lim_{y \downarrow 0} \ln y] = \infty$, lo cual es imposible porque $\int_0^\delta -\beta'(y)dy = -\beta(y)|_0^\delta = -\beta(\delta) + \beta(0+) = -\beta(\delta) + \beta_o < 1$. Por tanto, necesariamente $\lim_{y \downarrow 0} [-y\beta'(y)] = 0$ y también $\lim_{y \downarrow 0} [y\beta'(y)] = 0$. De ello deducimos que $\lim_{y \downarrow 0} [\beta(y) + y\beta'(y)] = \beta_o$, propiedad que usaremos a continuación.

Considerando funciones $A_k(Q)$ y $A_{ult}(Q)$ análogas a las utilizadas en el Lema 2.2, pero cambiando n_1 por n_2 e $i_1(Q)$ por $i_2(Q)$, y derivando del mismo modo las expresiones $A'_k(Q)$ y $A'_{ult}(Q)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} A''_k(Q) &= \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} [2\beta'(x-Q) + (x-Q)\beta''(x-Q)] f(x)dx \\ &\quad - [\beta(y_k-) + y_k\beta'(y_k-)] f(Q+y_k) \\ &\quad + [\beta(y_{k-1}+) + y_{k-1}\beta'(y_{k-1}+)] f(Q+y_{k-1}) \\ &\quad + y_k\beta(y_k-)f'(Q+y_k) - y_{k-1}\beta(y_{k-1}+)f'(Q+y_{k-1}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A''_{ult}(Q) &= \int_{Q+y_{i_2(Q)}}^b [2\beta'(x-Q) + (x-Q)\beta''(x-Q)] f(x)dx \\ &\quad + [\beta(y_{i_2(Q)}+) + y_{i_2(Q)}\beta'(y_{i_2(Q)}+)] f(Q+y_{i_2(Q)}) \\ &\quad - y_{i_2(Q)}\beta(y_{i_2(Q)}+)f'(Q+y_{i_2(Q)}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que para $k = 1$, de acuerdo con las hipótesis dadas, la expresión $[\beta(y_{k-1}+) + y_{k-1}\beta'(y_{k-1}+)] f(Q+y_{k-1})$ debe interpretarse como

$$\{\lim_{y \downarrow 0} [\beta(y) + y\beta'(y)]\} f(Q) = \beta_o f(Q)$$

y, operando en el sumatorio que incluye todas las derivadas, el resto de la demostración se deduce de forma similar a como se hizo en el Lema 2.2. ■

Como consecuencia del lema anterior podemos enunciar el siguiente resultado para la función $T(Q)$.

Teorema 2.7 *Supongamos que la función de densidad $f(x)$ es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$ y la función $\beta(y)$ verifica las hipótesis $H2$, $H3$ y $H4$. Entonces:*

1. *La función $T(Q)$ es de clase C^2 en cualquier punto $Q \in (a, b)$ con $Q \neq b - y_j$, para $j = 1, \dots, n_2$, y su derivada segunda está dada por*

$$\begin{aligned}
 T''(Q) &= [p + h + \beta_o(\omega - p)] f(Q) \\
 &+ (\omega - p) \sum_{k=1}^{i_2(Q)} \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} [2\beta'(x - Q) + (x - Q) \beta''(x - Q)] f(x) dx \\
 &+ (\omega - p) \int_{Q+y_{i_2(Q)}}^b [2\beta'(x - Q) + (x - Q) \beta''(x - Q)] f(x) dx \\
 &+ (\omega - p) S_2(Q)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 S_2(Q) &= - \sum_{k=1}^{i_2(Q)} \{ \beta(y_{k-}) - \beta(y_{k+}) + y_k [\beta'(y_{k-}) - \beta'(y_{k+})] \} f(Q + y_k) \\
 &+ \sum_{k=1}^{i_2(Q)} y_k [\beta(y_{k-}) - \beta(y_{k+})] f'(Q + y_k).
 \end{aligned}$$

2. *$T(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la derecha en el punto $Q = a$ y la derivada lateral segunda $T''_{++}(a)$ está dada por la expresión (2.19) para $Q = a$.*
3. *Si $b < \infty$, $T(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la derecha para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, \dots, n_2$, y las derivadas laterales segundas $T''_{++}(b - y_j)$ están dadas por la expresión (2.19) con $Q = b - y_j$.*
4. *Si $b < \infty$, $T(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la izquierda en el punto $Q = b$ y se tiene $T''_{--}(b) = [p + h + \beta_o(\omega - p)] f(b)$.*
5. *Si $b < \infty$ y $n_2 \geq 1$, $T(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la izquierda para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, \dots, n_2$, y las derivadas laterales segundas $T''_{--}(b - y_j)$ están dadas por*

$$\begin{aligned}
 T''_{--}(b - y_j) &= T''_{++}(b - y_j) - (\omega - p) \{ \beta(y_{j-}) - \beta(y_{j+}) + y_j [\beta'(y_{j-}) - \beta'(y_{j+})] \} f(b) \\
 &+ (\omega - p) y_j [\beta(y_{j-}) - \beta(y_{j+})] f'(b).
 \end{aligned}$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $T(Q) = L(Q) + (\omega - p)A(Q)$ y $L''(Q) = (p + h)f(Q)$, se deduce inmediatamente del Lema 2.6. ■

Es posible matizar el teorema anterior si reforzamos las hipótesis sobre la función $\beta(y)$ y las debilitamos sobre la función de densidad $f(x)$. En efecto:

1. Si en el Teorema 2.4 suponemos que la función $\beta(y)$ es continua en el intervalo $(0, b - a)$, y mantenemos las demás hipótesis allí consideradas, se tiene $S_1(Q) = 0$, con lo que la expresión de la función $T'(Q)$ en el apartado 1 se simplifica y, como ya se señaló en el Corolario 2.5, la función $T(Q)$ es de clase C^1 .
2. Como consecuencia de lo anterior, si en el Teorema 2.7 se supone que la función $\beta(y)$ es continua en el intervalo $(0, b - a)$ y se elimina la hipótesis de que $f(x)$ es de clase C^1 (pero se mantiene su continuidad), se tiene

$$S_2(Q) = - \sum_{k=1}^{i_2(Q)} y_k [\beta'(y_k-) - \beta'(y_k+)] f(Q + y_k),$$

por lo que la expresión de la función $T''(Q)$ se simplifica. Además, ahora la expresión dada en el apartado 5 del Teorema 2.7 pasa a ser

$$T''_{--}(b - y_j) = T''_{++}(b - y_j) - (\omega - p) y_j [\beta'(y_j-) - \beta'(y_j+)] f(b).$$

Resumimos lo anterior en el siguiente nuevo teorema:

Teorema 2.8 *Supongamos que la función $\beta(y)$ es continua en el intervalo $(0, b - a)$ y, además, verifica las hipótesis H2, H3 y H4. Entonces:*

1. *La función $T(Q)$ es de clase C^2 en cualquier punto $Q \in (a, b)$ con $Q \neq b - y_j$, para $j = 1, \dots, n_2$, y su derivada segunda está dada por*

$$\begin{aligned} T''(Q) &= [p + h + \beta_o(\omega - p)] f(Q) + \\ &+ (\omega - p) \sum_{k=1}^{i_2(Q)} \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} [2\beta'(x - Q) + (x - Q)\beta''(x - Q)] f(x) dx \\ &+ (\omega - p) \int_{Q+y_{i_2(Q)}}^b [2\beta'(x - Q) + (x - Q)\beta''(x - Q)] f(x) dx \\ &+ (\omega - p) S_2(Q) \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde

$$S_2(Q) = - \sum_{k=1}^{i_2(Q)} y_k [\beta'(y_{k-}) - \beta'(y_{k+})] f(Q + y_k). \quad (2.21)$$

2. $T(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la derecha en el punto $Q = a$ y la derivada lateral segunda $T''_{++}(a)$ está dada por la expresión (2.20) para $Q = a$.
3. Si $b < \infty$, $T(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la derecha para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, \dots, n_2$, y las derivadas laterales segundas $T''_{++}(b - y_j)$ están dadas por la expresión (2.20) con $Q = b - y_j$.
4. Si $b < \infty$, $T(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la izquierda en el punto $Q = b$ y se tiene $T''_{--}(b) = [p + h + \beta_o(\omega - p)] f(b)$.
5. Si $b < \infty$ y $n_2 \geq 1$, $T(Q)$ es dos veces derivable con continuidad por la izquierda para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, \dots, n_2$, y las derivadas laterales segundas $T''_{--}(b - y_j)$ están dadas por

$$T''_{--}(b - y_j) = T''_{++}(b - y_j) - (\omega - p) y_j [\beta'(y_{j-}) - \beta'(y_{j+})] f(b).$$

A partir de los Teoremas 2.7 y 2.8 podemos establecer condiciones suficientes para que $T(Q)$ sea una función de clase C^2 .

Corolario 2.9 *Supongamos que la función $\beta(y)$ verifica las hipótesis H2, H3 y H4.*

Si, además, se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

- (i) $f(x)$ es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$ con $f(b) = f'(b) = 0$;
- (ii) $\beta(y)$ es continua en el intervalo $(0, b - a)$ y $f(b) = 0$;
- (iii) $\beta(y)$ es de clase C^1 en el intervalo $(0, b - a)$;

entonces, $T(Q)$ es una función de clase C^2 en el intervalo soporte $I_{a,b}$.

Demostración. Si $b < \infty$ y $n_2 \geq 1$, cuando se verifica (i) en el apartado 5 del Teorema 2.7 se tiene $T''_{--}(b - y_j) = T''_{++}(b - y_j)$ para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, \dots, n_2$, luego la función $T(Q)$ es de clase C^2 en tales puntos y, por tanto, $T(Q)$ es de clase C^2 en $I_{a,b}$. A la misma conclusión se llega si se verifican (ii) o (iii) considerando ahora el Teorema 2.8.

Si $b < \infty$ y $n_2 = 0$, entonces $\beta(y)$ es una función de clase C^1 en el intervalo $(0, b - a)$ y en el apartado 1 del Teorema 2.8 no existen puntos del tipo y_j . Por tanto, $T(Q)$ es de clase C^2 en $I_{a,b}$.

Si $b = \infty$, en el apartado 1 del Teorema 2.8 se tiene $b - y_j = \infty$ y, por tanto, $T(Q)$ es de clase C^2 en $I_{a,b}$. ■

El Teorema 2.8 nos permite también encontrar una condición suficiente para que $T(Q)$ sea una función convexa de clase C^1 , tal y como establece el siguiente teorema.

Teorema 2.10 *Supongamos que la función $\beta(y)$ es continua en el intervalo $(0, b - a)$ y verifica las hipótesis H2, H3 y H4. Si, además, cumple las dos condiciones siguientes:*

(i) *Para todo punto y_j , con $j = 1, \dots, n_2$, se tiene $\beta'(y_j-) \geq \beta'(y_j+)$;*

(ii) *Para todo punto $y \in (0, b - a)$ con $y \neq y_j$, $j = 1, \dots, n_2$, se tiene $2\beta'(y) + y\beta''(y) \leq 0$;*

entonces, $T(Q)$ es una función convexa de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$.

Además, si $f(x) > 0$ para todo $x \in I_{a,b}$ se verifica que la función $T(Q)$ es estrictamente convexa en el intervalo soporte $I_{a,b}$.

Demostración. Por ser $\beta(y)$ una función continua en el intervalo $(0, b - a)$, utilizando el Corolario 2.5, se deduce que $T(Q)$ es una función de clase C^1 . Además, por la condición (i) y el apartado 1 del Teorema 2.8, se tiene que $S_2(Q) \leq 0$ para todo $Q \in I_{a,b}$. Entonces, como $p + h + \beta_o(\omega - p) = p(1 - \beta_o) + h + \beta_o\omega > 0$ y, por la condición (ii), $2\beta'(x - Q) + (x - Q)\beta''(x - Q) \leq 0$, podemos asegurar que $T''(Q) \geq 0$ para todo $Q \in (a, b)$ con $Q \neq b - y_j$, $j = 1, \dots, n_2$. Luego $T(Q)$ es convexa en todo intervalo abierto que no contenga puntos de la forma $Q = b - y_j$, para $j = 1, \dots, n_2$. Finalmente, por ser $T(Q)$ una función de clase C^1 , se tiene que $T(Q)$ es convexa en el intervalo soporte $I_{a,b}$.

Además, si $f(x) > 0$ para todo $x \in I_{a,b}$, es ya inmediato que $T''(Q) > 0$ para todo $Q \in (a, b)$ con $Q \neq b - y_j$, $j = 1, \dots, n_2$, y por tanto $T(Q)$ es estrictamente convexa en el intervalo soporte $I_{a,b}$. ■

A partir de estos dos últimos resultados, el siguiente corolario establece una condición suficiente para que $T(Q)$ sea una función convexa de clase C^2 .

Corolario 2.11 *Supongamos que la función $\beta(y)$ verifica las hipótesis H2, H3 y H4. Si, además, cumple las dos condiciones siguientes:*

- (i) $\beta(y)$ es de clase C^1 en el intervalo $(0, b - a)$;
- (ii) Para cualquier punto $y \in (0, b - a)$ con $y \neq y_j$, $j = 1, \dots, n_2$, se tiene $2\beta'(y) + y\beta''(y) \leq 0$;

entonces, $T(Q)$ es una función convexa de clase C^2 en el intervalo soporte $I_{a,b}$.

Además, si $f(x) > 0$ para todo $x \in I_{a,b}$ se verifica que la función $T(Q)$ es estrictamente convexa en el intervalo soporte $I_{a,b}$.

Demostración. Se deduce inmediatamente del Corolario 2.9 y el Teorema 2.10. ■

2.4. Resolución del modelo

Apoyándonos en las propiedades de la función $T(Q)$ expuestas en la sección anterior, a continuación se obtienen resultados que facilitan la obtención de soluciones óptimas para el modelo inicialmente formulado en la sección 2.2 por medio de la expresión (2.5) y reformulado en la sección 2.3 por medio de las expresiones (2.6) y (2.15). Evidentemente, la facilidad o dificultad para obtener soluciones óptimas va a depender de las hipótesis que consideremos en cada momento. Así, por ejemplo, si suponemos que se verifican las hipótesis del Teorema 2.10, la solución del modelo (2.15) puede obtenerse resolviendo la ecuación $T'(Q) = 0$.

Para lo que sigue nos interesa estudiar la función $\beta(y) = \beta_o$ para todo $y \in (0, \infty)$. Es evidente que entonces obtenemos el problema del *newsboy* estudiado en Khouja (1996) y que podemos encontrar su solución resolviendo la ecuación $T'(Q) = 0$, puesto que se verifican las condiciones del Teorema 2.10. Obsérvese que ahora se tiene $n_1 = n_2 = 0$, $i_1(Q) = i_2(Q) = S_1(Q) = S_2(Q) = 0$ para todo $Q \in I_{a,b}$. En este caso,

denotando la función $T(Q)$ como $T_K(Q)$, se tiene $T_K(Q) = L(Q) + (\omega - p) A_K(Q)$, donde $A_K(Q) = \beta_o \int_Q^b (x - Q) f(x) dx$ y la expresión (2.14) para la derivada es

$$\begin{aligned} T'_K(Q) &= (p + h) F(Q) - p - (\omega - p) \beta_o \int_Q^b f(x) dx \\ &= [p + h + (\omega - p) \beta_o] F(Q) - [p + (\omega - p) \beta_o] \end{aligned}$$

y, por tanto, la solución se obtiene cuando $F(Q) = \frac{p + (\omega - p) \beta_o}{h + p + (\omega - p) \beta_o}$, que coincide con el fractil crítico dado por Khouja. Es decir, es solución óptima todo punto Q_K^* perteneciente al conjunto $I_K^* = F^{-1} \left[\frac{p + (\omega - p) \beta_o}{h + p + (\omega - p) \beta_o} \right]$. Aunque lo anterior se ha obtenido usando las hipótesis del Teorema 2.10, es posible alcanzar resultados que facilitan la resolución del modelo (2.15) usando hipótesis más débiles. Lo haremos a continuación.

Lema 2.12 *Supongamos que $b < \infty$ y sean $\tilde{y} = \sup\{y \in [0, b - a] : \beta(y) = \beta_o\}$, $\tilde{Q} = b - \tilde{y}$ y $Q \in (a, b)$. Entonces:*

1. $T(Q) = T_K(Q)$ para todo $Q \geq \tilde{Q}$.
2. $T(Q) > T_K(Q)$ para todo $Q < \tilde{Q}$.
3. Si, además, se cumplen las hipótesis H1 y H2, entonces $T'_+(Q) < T'_K(Q)$ para todo $Q < \tilde{Q}$.

Demostración.

1. Como $\beta(y)$ es una función no creciente, para todo par (Q, x) con $\tilde{Q} < Q \leq x \leq b$ se tiene $\beta(x - Q) = \beta_o$ y, de (2.10), se sigue que si $Q \geq \tilde{Q}$ (obsérvese que ahora ponemos \geq en lugar de $>$) entonces

$$A_K(Q) - A(Q) = \int_Q^b (x - Q) [\beta_o - \beta(x - Q)] f(x) dx = 0.$$

Por tanto, $T_K(Q) - T(Q) = (\omega - p) [A_K(Q) - A(Q)] = 0$, es decir, $T(Q) = T_K(Q)$.

2. Sea $Q < \tilde{Q}$. Como $Q + \tilde{y} < b$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $Q + \tilde{y} + \varepsilon < b$. Luego, si $x \in (Q + \tilde{y} + \varepsilon, b)$ se tiene $x - Q > \tilde{y} + \varepsilon$, de donde $\beta_o - \beta(x - Q) \geq \beta_o - \beta(\tilde{y} + \varepsilon) > 0$.

Por tanto

$$\begin{aligned}
A_K(Q) - A(Q) &= \int_Q^b (x - Q) [\beta_o - \beta(x - Q)] f(x) dx \\
&\geq \int_{Q+\tilde{y}+\varepsilon}^b (x - Q) [\beta_o - \beta(x - Q)] f(x) dx \\
&\geq (\tilde{y} + \varepsilon) [\beta_o - \beta(\tilde{y} + \varepsilon)] \int_{Q+\tilde{y}+\varepsilon}^b f(x) dx > 0
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora que $T_K(Q) - T(Q) = (\omega - p) [A_K(Q) - A(Q)]$, resulta que $T_K(Q) < T(Q)$.

3. Admitiendo ahora las hipótesis H1 y H2, considerando el mismo valor de ε antes usado y aplicando los resultados obtenidos en los apartados 1 y 3 del Lema 2.2, para todo $Q < \tilde{Q}$ se tiene

$$\begin{aligned}
A'_+(Q) - A'_K(Q) &= \sum_{k=1}^{i_1(Q)} \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} [\beta_o - \beta(x - Q) - (x - Q) \beta'(x - Q)] f(x) dx \\
&\quad + \int_{Q+y_{i_1(Q)}}^b [\beta_o - \beta(x - Q) - (x - Q) \beta'(x - Q)] f(x) dx \\
&\quad + S_1(Q) \\
&\geq \int_{\max\{Q+\tilde{y}+\varepsilon, Q+y_{i_1(Q)}\}}^b [\beta_o - \beta(x - Q)] f(x) dx \\
&\geq [\beta_o - \beta(\tilde{y} + \varepsilon)] \int_{\max\{Q+\tilde{y}+\varepsilon, Q+y_{i_1(Q)}\}}^b f(x) dx > 0. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

En consecuencia, $T'_+(Q) - T'_K(Q) = (\omega - p) [A'_+(Q) - A'_K(Q)] < 0$, de donde $T'_+(Q) < T'_K(Q)$. ■

Nota. Es claro que, con las hipótesis del apartado 3 anterior, en todos los puntos $Q < \tilde{Q}$, con $Q \neq b - y_j$ y $j = 1, \dots, n_1$, se tiene $T'(Q) < T'_K(Q)$, ya que en estos puntos $T'_+(Q) = T'(Q)$, de acuerdo con el Lema 2.2.

Teniendo en cuenta el resultado anterior, si $b < \infty$, el siguiente teorema nos permitirá encontrar la solución en algunos supuestos y delimitar el intervalo de búsqueda de la solución para el resto de casos.

Teorema 2.13 *Supongamos que $b < \infty$ y la función $\beta(y)$ verifica las hipótesis H1 y H2. Sean $I_K^* = F^{-1} \left[\frac{p+(\omega-p)\beta_o}{h+p+(\omega-p)\beta_o} \right]$, $Q_{K_1}^* = \min \{Q \in I_K^*\}$, $Q_{K_2}^* = \max \{Q \in I_K^*\}$, $\tilde{y} = \sup \{y \in [0, b-a) : \beta(y) = \beta_o\}$ y $\tilde{Q} = b - \tilde{y}$.*

1. *Si $\tilde{Q} \leq Q_{K_1}^*$, entonces $T(Q)$ alcanza su mínimo global en todos los puntos del intervalo $I_K^* = [Q_{K_1}^*, Q_{K_2}^*]$ y sólo en estos puntos.*
2. *Si $Q_{K_1}^* < \tilde{Q} \leq Q_{K_2}^*$, entonces $T(Q)$ alcanza su mínimo global en todos los puntos del intervalo $[\tilde{Q}, Q_{K_2}^*]$ y sólo en estos puntos.*
3. *Si $Q_{K_2}^* < \tilde{Q}$, entonces $T(Q)$ alcanza su mínimo global en, al menos, un punto Q^* del intervalo $(Q_{K_2}^*, \tilde{Q}]$. Además, si $\beta(y)$ es continua en \tilde{y} , entonces $T(Q)$ no alcanza su valor mínimo en \tilde{Q} .*

Demostración.

1. Si $\tilde{Q} \leq Q_{K_1}^*$, aplicando el Lema 2.12, se tiene $T'_+(Q) < T'_K(Q) < 0$ para todo $Q \in (a, \tilde{Q})$ y $T(Q) = T_K(Q)$ para todo $Q \in [\tilde{Q}, b)$. Luego la función $T(Q)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(a, Q_{K_1}^*)$, constante en el intervalo $[Q_{K_1}^*, Q_{K_2}^*]$ y estrictamente creciente en el intervalo $(Q_{K_2}^*, b)$. Por tanto, $T(Q)$ alcanza su mínimo global en todos los puntos del intervalo $I_K^* = [Q_{K_1}^*, Q_{K_2}^*]$ y sólo en esos puntos.
2. Si $Q_{K_1}^* < \tilde{Q} \leq Q_{K_2}^*$, como en el caso anterior, deducimos que $T(Q)$ es estrictamente decreciente en (a, \tilde{Q}) , constante en $[\tilde{Q}, Q_{K_2}^*]$ y estrictamente creciente en $(Q_{K_2}^*, b)$. Por tanto, la función $T(Q)$ alcanza su mínimo global en todos los puntos del intervalo $[\tilde{Q}, Q_{K_2}^*]$ y sólo en esos puntos.
3. Si $Q_{K_2}^* < \tilde{Q}$, de nuevo por el Lema 2.12, se tiene que $T'_+(Q) < T'_K(Q) \leq 0$ si $Q \leq Q_{K_2}^*$ y la función $T(Q)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(a, Q_{K_2}^*]$ con $T'_+(Q_{K_2}^*) < T'_K(Q_{K_2}^*) = 0$. Por otro lado, $T(Q) = T_K(Q)$ para todo $Q \geq \tilde{Q}$, y la función $T(Q)$ es estrictamente creciente en (\tilde{Q}, b) , por serlo $T_K(Q)$. Por tanto, la función $T(Q)$ alcanza su mínimo global en, al menos, un punto Q^* del intervalo $(Q_{K_2}^*, \tilde{Q}]$. Finalmente, como $T'_+(\tilde{Q}) = T'_K(\tilde{Q}) > 0$, si $\beta(y)$ es continua en \tilde{y} , aplicando el Teorema 2.4, se deduce que $T(Q)$ es derivable en \tilde{Q} con $T'(\tilde{Q}) = T'_+(\tilde{Q}) > 0$ y $T(Q)$ no alcanza su valor mínimo en \tilde{Q} . ■

Con el propósito de encontrar un resultado similar para el caso $b = \infty$, se demuestra a continuación el siguiente lema.

Lema 2.14 *Supongamos que $b = \infty$ y la función $\beta(y)$ verifica que $\lim_{y \rightarrow \infty} \beta(y) < \beta_o$.*

Entonces:

1. $T(Q) > T_K(Q)$ para todo $Q \in I_{a,b}$.
2. Si, además, se cumplen las hipótesis H1 y H2, entonces $T'(Q) < T'_K(Q)$ para todo $Q \in I_{a,b}$.

Demostración.

1. Como $\lim_{y \rightarrow \infty} \beta(y) < \beta_o$, existe $M_1 > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\beta_o - \beta(y) > \varepsilon$ para todo $y \geq M_1$. Además, por la definición de b como extremo superior del intervalo soporte $I_{a,b}$, sabemos que, para todo $M_2 > 0$, $\int_{M_2}^{\infty} f(x)dx > 0$. Por tanto, si $Q \in I_{a,b}$, se tiene

$$\begin{aligned} A_K(Q) - A(Q) &= \int_Q^{\infty} (x - Q) [\beta_o - \beta(x - Q)] f(x)dx \\ &\geq \int_{Q+M_1}^{\infty} (x - Q) [\beta_o - \beta(x - Q)] f(x)dx \\ &\geq M_1 \varepsilon \int_{Q+M_1}^{\infty} f(x)dx > 0 \end{aligned}$$

de donde $T(Q) - T_K(Q) = (\omega - p) [A(Q) - A_K(Q)] > 0$, es decir, $T(Q) > T_K(Q)$ para todo $Q \in I_{a,b}$.

2. Por ser $b = \infty$, por el Corolario 2.3 se tiene que $A(Q)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$. Además, considerando los mismos valores de ε , M_1 y M_2 que en el apartado anterior, se tiene

$$\begin{aligned} A'(Q) - A'_K(Q) &= \sum_{k=1}^{i_1(Q)} \int_{Q+y_{k-1}}^{Q+y_k} [\beta_o - \beta(x - Q) - (x - Q) \beta'(x - Q)] f(x)dx \\ &+ \int_{Q+y_{i_1(Q)}}^{\infty} [\beta_o - \beta(x - Q) - (x - Q) \beta'(x - Q)] f(x)dx + S_1(Q) \\ &\geq \int_{\max\{Q+y_{i_1(Q)}, Q+M_1\}}^{\infty} [\beta_o - \beta(x - Q)] f(x)dx \\ &\geq \varepsilon \int_{\max\{Q+y_{i_1(Q)}, Q+M_1\}}^{\infty} f(x)dx > 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Luego $T'(Q) - T'_K(Q) = (\omega - p) [A'(Q) - A'_K(Q)] < 0$ y $T'(Q) < T'_K(Q)$ para todo $Q \in I_{a,b}$. ■

Del mismo modo que antes, a partir de este lema, se puede enunciar el siguiente teorema, que permitirá encontrar la solución, o delimitar el intervalo de búsqueda de la solución, para el caso $b = \infty$.

Teorema 2.15 *Supongamos que $b = \infty$ y la función $\beta(y)$ verifica las hipótesis H1 y H2. Sean $I_K^* = F^{-1} \left[\frac{p+(\omega-p)\beta_o}{h+p+(\omega-p)\beta_o} \right]$, $Q_{K_1}^* = \min \{Q \in I_K^*\}$ y $Q_{K_2}^* = \max \{Q \in I_K^*\}$. Se verifica que:*

1. Si $\lim_{y \rightarrow \infty} \beta(y) = \beta_o$, entonces $T(Q)$ alcanza su mínimo global en todos los puntos del intervalo $I_K^* = [Q_{K_1}^*, Q_{K_2}^*]$ y sólo en estos puntos.
2. Si $\lim_{y \rightarrow \infty} \beta(y) < \beta_o$, entonces $T(Q)$ alcanza su mínimo global en, al menos, un punto Q^* del intervalo $(Q_{K_2}^*, \infty)$ con $T'(Q^*) = 0$.

Demostración.

1. Si $\lim_{y \rightarrow \infty} \beta(y) = \beta_o$, entonces $\beta(y) = \beta_o$ para todo $y \in (0, \infty)$ y el problema se reduce al modelo de Khouja (1996), cuya solución óptima se obtiene para todos los puntos del intervalo $I_K^* = [Q_{K_1}^*, Q_{K_2}^*]$ y sólo para estos puntos.
2. Por ser $b = \infty$, por el Corolario 2.5, se tiene que $T(Q)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$. Como $\lim_{y \rightarrow \infty} \beta(y) < \beta_o$, aplicando el Lema 2.14, para $Q \in (a, Q_{K_2}^*]$ se tiene que $T'(Q) < T'_K(Q) \leq 0$ y $T(Q)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(a, Q_{K_2}^*]$ con $T'(Q_{K_2}^*) < T'_K(Q_{K_2}^*) = 0$. Por tanto, $T(Q)$ alcanza su mínimo global en, al menos, un punto Q^* del intervalo $(Q_{K_2}^*, \infty)$ con $T'(Q^*) = 0$. ■

Una generalización del concepto de fractil crítico.

Los casos en los que la política óptima del modelo (2.15) se obtiene mediante la resolución de la ecuación $T'(Q) = 0$, nos permiten generalizar el concepto de fractil crítico dado en el problema del *newsboy* estudiado en Khouja (1996). En efecto, como

$$\begin{aligned} T'(Q) &= L'(Q) + (\omega - p) A'(Q) = (p + h) F(Q) - p + (\omega - p) A'(Q) \\ &= h - [1 - F(Q)] [h + p + (\omega - p) \Delta(Q)] \end{aligned}$$

con $\Delta(Q) = \frac{-A'_+(Q)}{1-F(Q)}$ para todo $Q \in (a, b)$, se tiene que la ecuación $T'(Q) = 0$ es equivalente a la ecuación

$$F(Q) = \frac{p + (\omega - p) \Delta(Q)}{h + p + (\omega - p) \Delta(Q)}. \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{d}{dQ} \left[\int_Q^b (x - Q) f(x) dx \right] = F(Q) - 1$, podemos decir que $\Delta(Q)$ es la razón entre la derivada del valor esperado para el tamaño del pedido de emergencia (es decir, $A'(Q)$) y la derivada del valor esperado de la escasez si el tamaño del lote es Q . Además, como de (2.22) o (2.23) se sigue que $A'(Q) - A'_K(Q) \geq 0$, podemos asegurar que $-A'(Q) \leq -A'_K(Q) = \beta_o [1 - F(Q)]$ y, por consiguiente, $\Delta(Q) \leq \beta_o \leq 1$ para todo $Q \in (a, b)$. Como consecuencia de ello, es evidente que $h + p + (\omega - p) \Delta(Q) > 0$ y en la ecuación (2.24) se tiene $0 < \frac{p + (\omega - p) \Delta(Q)}{h + p + (\omega - p) \Delta(Q)} < 1$, incluso si $\Delta(Q) \leq 0$. Por tanto, si para todo $Q \in (a, b)$ definimos la función

$$\Psi(Q) = \frac{p + (\omega - p) \Delta(Q)}{h + p + (\omega - p) \Delta(Q)} \quad (2.25)$$

a la que denominaremos *función fractil* del problema (2.15), entonces $0 < \Psi(Q) < 1$, y resolver la ecuación (2.24) es equivalente a encontrar los puntos de corte de la función de distribución de la demanda $F(Q)$ y la función fractil $\Psi(Q)$. Es importante observar que $\Psi(Q)$ es una generalización del fractil crítico dado en Khouja (1996). En efecto, si $\beta(y) = \beta_o$ entonces $\Delta(Q) = \beta_o$ para todo $Q \in (a, b)$ y la función fractil también es la función constante $\Psi_K(Q) = \frac{p + (\omega - p) \beta_o}{h + p + (\omega - p) \beta_o}$ para todo $Q \in (a, b)$. Para el caso que nosotros planteamos ahora, la función fractil depende del tamaño del lote Q y la solución no puede obtenerse directamente, sino que es necesario resolver la ecuación (2.24) para encontrar los puntos de corte entre la función de distribución y la función fractil.

2.5. Análisis de sensibilidad

En esta sección se incluye un análisis de sensibilidad del tamaño óptimo del lote Q^* y del beneficio esperado máximo $B(Q^*)$ en el contexto del modelo planteado en

la sección 2.2. Para ello supondremos que hemos encontrado tal solución óptima Q^* y que, además, se cumplen algunas condiciones adicionales las cuales, teniendo en cuenta la teoría desarrollada hasta aquí, nos facilitan el estudio que pretendemos. En esta línea, además de $T'(Q^*) = 0$, supondremos que:

1. La función de densidad $f(x)$ es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$ y la función $\beta(y)$ verifica las hipótesis H2, H3 y H4.
2. La función $T(Q)$ es dos veces derivable en el punto Q^* con $T''(Q^*) > 0$.

En consecuencia, podemos aplicar los siguientes resultados: (i) el Teorema 2.7; (ii) el apartado 3 del Teorema 2.13 y (iii) el apartado 2 del Teorema 2.15. Además, la función $T(Q)$ es de clase C^2 y estrictamente convexa en un entorno de Q^* . Puesto que los parámetros auxiliares h , ω y p dependen de los parámetros iniciales c_H , c_B , c_G , c y v , hemos preferido realizar el estudio de sensibilidad utilizando estos últimos.

Con las condiciones dadas, y teniendo en cuenta la expresión (2.8), podemos asegurar que la solución óptima Q^* se obtiene resolviendo la ecuación

$$T'(Q) = (p + h) F(Q) - p + (\omega - p) A'(Q) = 0 \quad (2.26)$$

es decir, usando los parámetros iniciales, con la ecuación

$$T'(Q) = (c_G + v + c_H) F(Q) - (c_G + v - c) + (c_B - c_G - v) A'(Q) = 0 \quad (2.27)$$

Además, para el beneficio esperado máximo tendremos en cuenta que está definido por la expresión $B(Q^*) = (v - c)\mu - T(Q^*)$ con

$$\begin{aligned} T(Q^*) &= (c_H + c) \int_a^{Q^*} (Q^* - x) f(x) dx + (c_B - c) \int_{Q^*}^b (x - Q^*) \beta(x - Q^*) f(x) dx \\ &\quad + (c_G + v - c) \int_{Q^*}^b (x - Q^*) [1 - \beta(x - Q^*)] f(x) dx \end{aligned}$$

A continuación, al igual que hicimos en la sección 1.4 y en la subsección 1.8.3 del capítulo anterior, en el análisis de sensibilidad correspondiente a cada parámetro, se tratará a éste como la única variable y, por tanto, realizaremos el estudio usando las derivadas ordinarias correspondientes, y enunciaremos un resultado por separado para cada uno de los parámetros iniciales.

Además, necesitamos considerar el punto $Q_o^* = \min \left\{ Q \in I_{a,b} : F(Q) = \frac{c_G+v-c}{c_G+v+c_H} \right\}$, que resulta ser el tamaño óptimo del lote para el problema básico del *newsboy* sin pedido de emergencia. El siguiente lema incluye las derivadas del tamaño óptimo del lote Q^* y del beneficio esperado máximo $B(Q^*)$ respecto al parámetro c_H .

Lema 2.16 *Supongamos que $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y $\beta(y)$ verifica las hipótesis H2, H3 y H4. Sean $Q^*(c_H)$ y $B(Q^*(c_H))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor c_H del coste unitario efectivo por sobreabastecimiento. Supongamos, además, que en un punto $c_H = c_{H_1}$ para el que $Q^*(c_{H_1}) = Q_1^*$, se tiene que $T(Q)$ es dos veces derivable y $T''(Q_1^*) > 0$. Entonces:*

$$(a) \quad \left. \frac{dQ^*(c_H)}{dc_H} \right|_{c_H=c_{H_1}} = -\frac{F(Q_1^*)}{T''(Q_1^*)}.$$

$$(b) \quad \left. \frac{dB(Q^*(c_H))}{dc_H} \right|_{c_H=c_{H_1}} = -\int_a^{Q_1^*} (Q_1^* - x)f(x)dx.$$

Demostración.

(a) Si definimos la función

$$G_1(c_H, Q) = (c_G + v + c_H) F(Q) - (c_G + v - c) + (c_B - c_G - v) A'(Q)$$

entonces para cada valor de c_H suficientemente cerca de c_{H_1} , la solución óptima $Q^*(c_H)$ viene definida implícitamente por la ecuación $G_1(c_H, Q) = 0$, de modo que $G_1(c_H, Q^*(c_H)) = 0$. Además $\frac{\partial G_1}{\partial c_H}(c_H, Q) = F(Q)$, $\frac{\partial G_1}{\partial Q}(c_H, Q) = T''(Q)$ y $\frac{\partial G_1}{\partial Q}(c_{H_1}, Q_1^*) = T''(Q_1^*) > 0$. Como las funciones $T''(Q)$ y $F(Q)$ son continuas en un entorno del punto Q_1^* , podemos asegurar que la función $G_1(c_H, Q)$ verifica las hipótesis para poder aplicar el Teorema de la Función Implícita en un entorno del punto (c_{H_1}, Q_1^*) . Por tanto, se tiene

$$\left. \frac{dQ^*(c_H)}{dc_H} \right|_{c_H=c_{H_1}} = -\frac{\frac{\partial G_1}{\partial c_H}(c_{H_1}, Q_1^*)}{\frac{\partial G_1}{\partial Q}(c_{H_1}, Q_1^*)} = -\frac{F(Q_1^*)}{T''(Q_1^*)}.$$

(b) Análogamente, si definimos la función

$$\begin{aligned} G_2(c_H, Q) &= (v - c)\mu - (c_H + c) \int_a^Q (Q - x)f(x)dx \\ &\quad - (c_B - c) \int_Q^b (x - Q)\beta(x - Q)f(x)dx \\ &\quad - (c_G + v - c) \int_Q^b (x - Q)[1 - \beta(x - Q)]f(x)dx \end{aligned}$$

entonces, para cada c_H suficientemente cerca de c_{H_1} , el beneficio óptimo del lote es una función de c_H definida como $B(Q^*(c_H)) = G_2(c_H, Q^*(c_H))$ con $B(Q^*(c_{H_1})) = B(Q_1^*)$. Además, $\frac{\partial G_2}{\partial Q}(c_{H_1}, Q_1^*) = -T'(Q_1^*) = 0$. Entonces, derivando la función $B(Q^*(c_H))$ en el punto c_{H_1} , se tiene que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dB(Q^*(c_H))}{dc_H} \right|_{c_H=c_{H_1}} &= \frac{\partial G_2}{\partial c_H}(c_{H_1}, Q_1^*) + \frac{\partial G_2}{\partial Q}(c_{H_1}, Q_1^*) \left. \frac{dQ^*(c_H)}{dc_H} \right|_{c_H=c_{H_1}} \\ &= - \int_a^{Q_1^*} (Q_1^* - x)f(x)dx - T'(Q_1^*) \left. \frac{dQ^*(c_H)}{dc_H} \right|_{c_H=c_{H_1}} \\ &= - \int_a^{Q_1^*} (Q_1^* - x)f(x)dx. \blacksquare \end{aligned}$$

Del mismo modo, el siguiente lema incluye las derivadas del tamaño óptimo del lote Q^* y del beneficio esperado máximo $B(Q^*)$ respecto al parámetro c_B .

Lema 2.17 *Supongamos que $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y $\beta(y)$ verifica las hipótesis H2, H3 y H4. Sean $Q^*(c_B)$ y $B(Q^*(c_B))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor c_B del coste unitario de adquisición en el periodo de emergencia. Supongamos, además, que en un punto $c_B = c_{B_1}$ para el que $Q^*(c_{B_1}) = Q_1^*$, se tiene que $T(Q)$ es dos veces derivable y $T''(Q_1^*) > 0$. Entonces:*

$$(a) \left. \frac{dQ^*(c_B)}{dc_B} \right|_{c_B=c_{B_1}} = - \frac{(c_G+v+c_H)F(Q_1^*)-(c_G+v-c)}{(c_G+v-c_{B_1})T''(Q_1^*)}.$$

$$(b) \left. \frac{dB(Q^*(c_B))}{dc_B} \right|_{c_B=c_{B_1}} = - \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*)\beta(x - Q_1^*)f(x)dx.$$

Demostración.

(a) Utilizando ahora para el parámetro c_B el mismo razonamiento que para el parámetro c_H en la demostración del apartado (a) del lema anterior, se tiene

$$\left. \frac{dQ^*(c_B)}{dc_B} \right|_{c_B=c_{B_1}} = - \frac{\frac{\partial G_1}{\partial c_B}(c_{B_1}, Q_1^*)}{\frac{\partial G_1}{\partial Q}(c_{B_1}, Q_1^*)} = - \frac{A'(Q_1^*)}{T''(Q_1^*)} = - \frac{(c_G+v+c_H)F(Q_1^*)-(c_G+v-c)}{(c_G+v-c_{B_1})T''(Q_1^*)}.$$

(b) Utilizando para el parámetro c_B el mismo razonamiento que para el parámetro c_H en la demostración del apartado (b) del lema anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{dB(Q^*(c_B))}{dc_B} \right|_{c_B=c_{B_1}} &= - \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*) \beta(x - Q_1^*) f(x) dx - T'(Q_1^*) \left. \frac{dQ^*(c_B)}{dc_B} \right|_{c_B=c_{B_1}} \\ &= - \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*) \beta(x - Q_1^*) f(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas de Q^* y de $B(Q^*)$ respecto al parámetro c_G .

Lema 2.18 *Supongamos que $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y $\beta(y)$ verifica las hipótesis H_2 , H_3 y H_4 . Sean $Q^*(c_G)$ y $B(Q^*(c_G))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor c_G del coste unitario por pérdida de ventas. Supongamos, además, que en un punto $c_G = c_{G_1}$ para el que $Q^*(c_{G_1}) = Q_1^*$, se tiene que $T(Q)$ es dos veces derivable y $T''(Q_1^*) > 0$. Entonces:*

$$(a) \quad \left. \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} \right|_{c_G=c_{G_1}} = \frac{(c_H+c_B)F(Q_1^*)-(c_B-c)}{(c_{G_1}+v-c_B)T''(Q_1^*)}.$$

$$(b) \quad \left. \frac{dB(Q^*(c_G))}{dc_G} \right|_{c_G=c_{G_1}} = - \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*) [1 - \beta(x - Q_1^*)] f(x) dx.$$

Demostración.

Razonando como en las demostraciones de los dos lemas anteriores, se tiene:

$$\left. \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} \right|_{c_G=c_{G_1}} = - \frac{\frac{\partial G_1}{\partial c_G}(c_{G_1}, Q_1^*)}{\frac{\partial G_1}{\partial Q}(c_{G_1}, Q_1^*)} = - \frac{F(Q_1^*) - 1 - A'(Q_1^*)}{T''(Q_1^*)} = \frac{(c_H+c_B)F(Q_1^*)-(c_B-c)}{(c_{G_1}+v-c_B)T''(Q_1^*)}.$$

y

$$\begin{aligned} \left. \frac{dB(Q^*(c_G))}{dc_G} \right|_{c_G=c_{G_1}} &= - \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*) [1 - \beta(x - Q_1^*)] f(x) dx - T'(Q_1^*) \left. \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} \right|_{c_G=c_{G_1}} \\ &= - \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*) [1 - \beta(x - Q_1^*)] f(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Del mismo modo, calculamos ahora las derivadas respecto al parámetro c .

Lema 2.19 *Supongamos que $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y $\beta(y)$ verifica las hipótesis H_2 , H_3 y H_4 . Sean $Q^*(c)$ y $B(Q^*(c))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor c del coste unitario de adquisición antes del inicio de la temporada. Supongamos, además, que en un punto $c = c_1$ para el que $Q^*(c_1) = Q_1^*$, se tiene que $T(Q)$ es dos veces derivable y $T''(Q_1^*) > 0$. Entonces:*

$$(a) \left. \frac{dQ^*(c)}{dc} \right|_{c=c_1} = \frac{-1}{T''(Q_1^*)}.$$

$$(b) \left. \frac{dB(Q^*(c))}{dc} \right|_{c=c_1} = -Q_1^*.$$

Demostración.

Razonando como en las demostraciones de los lemas anteriores, se tiene:

$$\left. \frac{dQ^*(c)}{dc} \right|_{c=c_1} = -\frac{\frac{\partial G_1}{\partial c}(c_1, Q_1^*)}{\frac{\partial G_1}{\partial Q}(c_1, Q_1^*)} = \frac{-1}{T''(Q_1^*)}.$$

y

$$\begin{aligned} \left. \frac{dB(Q^*(c))}{dc} \right|_{c=c_1} &= -\mu - \int_a^{Q_1^*} (Q_1^* - x)f(x)dx + \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*)\beta(x - Q_1^*)f(x)dx \\ &\quad + \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*)[1 - \beta(x - Q_1^*)]f(x)dx - T'(Q_1^*) \left. \frac{dQ^*(c)}{dc} \right|_{c=c_1} \\ &= -\mu + \int_a^{Q_1^*} (x - Q_1^*)f(x)dx + \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*)f(x)dx \\ &= -\mu + \int_a^b (x - Q_1^*)f(x)dx = -\mu + \int_a^b xf(x)dx - Q_1^* \\ &= -Q_1^*. \blacksquare \end{aligned}$$

Finalmente, el siguiente lema incluye las derivadas del tamaño óptimo del lote Q^* y del beneficio esperado máximo $B(Q^*)$ respecto al parámetro v .

Lema 2.20 *Supongamos que $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y $\beta(y)$ verifica las hipótesis $H2$, $H3$ y $H4$. Sean $Q^*(v)$ y $B(Q^*(v))$, respectivamente, el tamaño óptimo del lote y el beneficio óptimo para un valor v del precio unitario de venta. Supongamos, además, que en un punto $v = v_1$ para el que $Q^*(v_1) = Q_1^*$, se tiene que $T(Q)$ es dos veces derivable y $T''(Q_1^*) > 0$. Entonces:*

$$(a) \left. \frac{dQ^*(v)}{dv} \right|_{v=v_1} = \frac{(c_H + c_B)F(Q_1^*) - (c_B - c)}{(c_G + v_1 - c_B)T''(Q_1^*)}.$$

$$(b) \left. \frac{dB(Q^*(v))}{dv} \right|_{v=v_1} = \mu - \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*) [1 - \beta(x - Q_1^*)] f(x)dx.$$

Demostración.

Razonando como en la demostraciones de los lemas anteriores, se tiene:

$$\left. \frac{dQ^*(v)}{dv} \right|_{v=v_1} = -\frac{\frac{\partial G_1}{\partial v}(v_1, Q_1^*)}{\frac{\partial G_1}{\partial Q}(v_1, Q_1^*)} = -\frac{F(Q_1^*)-1-A'(Q_1^*)}{T''(Q_1^*)} = \frac{(c_H+c_B)F(Q_1^*)-(c_B-c)}{(c_G+v_1-c_B)T''(Q_1^*)}.$$

y

$$\begin{aligned} \left. \frac{dB(Q^*(v))}{dv} \right|_{v=v_1} &= \mu - \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*) [1 - \beta(x - Q_1^*)] f(x) dx - T'(Q_1^*) \left. \frac{dQ^*(v)}{dv} \right|_{v=v_1} \\ &= \mu - \int_{Q_1^*}^b (x - Q_1^*) [1 - \beta(x - Q_1^*)] f(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notas.

1. Resulta interesante interpretar las derivadas del beneficio esperado óptimo obtenidas en los lemas anteriores. En primer lugar, por el apartado (b) del Lema 2.16, podemos decir que la derivada del beneficio esperado óptimo $B(Q^*)$ con respecto al coste unitario efectivo por sobreabastecimiento c_H es el número esperado de productos sobrantes cambiado de signo, suponiendo que el tamaño del lote inicial es el tamaño óptimo del lote Q^* . Del mismo modo, por el apartado (b) del Lema 2.17, la derivada del beneficio esperado óptimo $B(Q^*)$ con respecto al coste unitario de adquisición en el periodo de emergencia c_B es el tamaño esperado del pedido de emergencia cambiado de signo, suponiendo que el tamaño del lote inicial es el tamaño óptimo del lote Q^* . Con respecto al coste unitario por pérdida de ventas c_G , por el apartado (b) del Lema 2.18, la derivada del beneficio esperado óptimo $B(Q^*)$ es el número esperado de ventas perdidas cambiado de signo, suponiendo que el tamaño del lote inicial es el tamaño óptimo del lote Q^* . Además, por el apartado (b) del Lema 2.19, es evidente que la derivada del beneficio esperado óptimo $B(Q^*)$ con respecto al coste unitario de adquisición inicial es el tamaño óptimo del lote Q^* cambiado de signo. Finalmente, utilizando el apartado (b) del Lema 2.20, podemos decir que la derivada del beneficio esperado óptimo $B(Q^*)$ con respecto al precio unitario de venta v es el número esperado de productos finalmente suministrados por el distribuidor suponiendo que el tamaño del lote inicial es el tamaño óptimo del lote Q^* .

2. Observar también que la derivada del apartado (b) del Lema 2.16 podría expresarse como $\left. \frac{dB(Q^*(c_H))}{dc_H} \right|_{c_H=c_{H_1}} = - \int_a^{Q_1^*} F(x)dx$, ya que se tiene

$$\int_a^{Q_1^*} (Q_1^* - x)f(x)dx = [(Q_1^* - x)F(x)]_a^{Q_1^*} + \int_a^{Q_1^*} F(x)dx = \int_a^{Q_1^*} F(x)dx$$

Como consecuencia de los lemas anteriores se obtiene el siguiente resultado para el análisis de sensibilidad del tamaño óptimo del lote Q^* .

Corolario 2.21 *Supongamos que $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y $\beta(y)$ verifica las hipótesis H_2 , H_3 y H_4 . Supongamos, además, que $T(Q)$ es dos veces derivable en el punto Q^* con $T''(Q^*) > 0$. Consideremos los valores $\beta((b - Q^*)-) = \lim_{y \uparrow b - Q^*} \beta(y)$ y $Q_o^* = \min \left\{ Q \in I_{a,b} : F(Q) = \frac{c_G + v - c}{c_G + v + c_H} \right\}$. Entonces, se verifica:*

- (a) Q^* decrece cuando c_H crece.
- (b) Q^* crece con c_B si $Q^* < Q_o^*$, y no crece cuando c_B crece si $Q^* \geq Q_o^*$.
- (c) Q^* crece con c_G si $\beta((b - Q^*)-) < 1$, y no depende de c_G en caso contrario.
- (d) Q^* decrece cuando c crece.
- (e) Q^* crece con v si $\beta((b - Q^*)-) < 1$, y no depende de v en caso contrario.

Demostración.

- (a) Se sigue inmediatamente del apartado (a) del Lema 2.16, ya que, si denotamos por c_{H_1} al valor actual de c_H , se tiene $\left. \frac{dQ^*(c_H)}{dc_H} \right|_{c_H=c_{H_1}} < 0$.
- (b) Utilizando el apartado (a) del Lema 2.17, si $Q^* < Q_o^*$, de la definición dada de Q_o^* se sigue que $(c_G + v + c_H)F(Q^*) < (c_G + v + c_H)F(Q_o^*) = c_G + v - c$ y, por tanto, si denotamos por c_{B_1} al valor actual de c_B , se tiene $\left. \frac{dQ^*(c_B)}{dc_B} \right|_{c_B=c_{B_1}} > 0$. Del mismo modo, si $Q^* \geq Q_o^*$, se tiene que $\left. \frac{dQ^*(c_B)}{dc_B} \right|_{c_B=c_{B_1}} \leq 0$ y la afirmación queda demostrada.
- (c) Utilizando el apartado (a) del Lema 2.18, si denotamos por c_{G_1} al valor actual de c_G , se tiene que $\left. \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} \right|_{c_G=c_{G_1}} = - \frac{F(Q^*) - 1 - A'(Q^*)}{T''(Q^*)}$, luego

$$\text{signo} \left. \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} \right|_{c_G=c_{G_1}} = \text{signo} [1 - F(Q^*) + A'(Q^*)]$$

De (2.12) y (2.13) se sigue que

$$-A'(Q^*) \leq \sum_{k=1}^{i_1(Q^*)} \int_{Q^*+y_{k-1}}^{Q^*+y_k} \beta(x-Q^*)f(x)dx + \int_{Q^*+y_{i_1(Q^*)}}^b \beta(x-Q^*)f(x)dx$$

Luego, si $\beta((b-Q^*)-) < 1$ se verifica que $-A'(Q^*) < \int_{Q^*}^b f(x)dx = 1 - F(Q^*)$

y $\left. \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} \right|_{c_G=c_{G_1}} > 0$. En cambio, si $\beta((b-Q^*)-) = 1$, se tiene que $A'(Q^*) =$

$$\int_{Q^*}^b f(x)dx = 1 - F(Q^*) \text{ y } \left. \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} \right|_{c_G=c_{G_1}} = 0.$$

(d) Es inmediato por el apartado (a) del Lema 2.19.

(e) Igual que en el caso (c), utilizando el apartado (a) del Lema 2.20. ■

Del mismo modo, también como consecuencia de los lemas anteriores, se obtiene el siguiente resultado para el análisis de sensibilidad del beneficio esperado máximo $B(Q^*)$.

Corolario 2.22 *Supongamos que $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y $\beta(y)$ verifica las hipótesis H_2 , H_3 y H_4 . Supongamos, además, que $T(Q)$ es dos veces derivable en el punto Q^* con $T''(Q^*) > 0$. Sea $\beta((b-Q^*)-) = \lim_{y \uparrow b-Q^*} \beta(y)$. Entonces, se verifica:*

- (a) $B(Q^*)$ decrece cuando c_H crece.
- (b) $B(Q^*)$ decrece cuando c_B crece si $\beta_o > 0$, y no depende de c_B si $\beta_o = 0$.
- (c) $B(Q^*)$ decrece cuando c_G crece si $\beta((b-Q^*)-) < 1$, y no depende de c_G en caso contrario.
- (d) $B(Q^*)$ decrece cuando c crece.
- (e) $B(Q^*)$ crece con v .

Demostración.

- (a) Se sigue inmediatamente del apartado (b) del Lema 2.16, ya que, si c_{H_1} representa el valor actual de c_H , se tiene $\left. \frac{dB(Q^*(c_H))}{dc_H} \right|_{c_H=c_{H_1}} < 0$.
- (b) Por el apartado (b) del Lema 2.17, si $\beta_o > 0$ y c_{B_1} representa el valor actual de c_B , es claro que $\left. \frac{dB(Q^*(c_B))}{dc_B} \right|_{c_B=c_{B_1}} < 0$, mientras que si $\beta_o = 0$, entonces no hay pedido de emergencia y el beneficio óptimo $B(Q^*)$ no depende de c_B .

- (c) Por el apartado (b) del Lema 2.18, si $\beta((b - Q^*)-) < 1$ y c_{G_1} representa el valor actual de c_G , es evidente que $\left. \frac{dB(Q^*(c_G))}{dc_G} \right|_{c_G=c_{G_1}} < 0$. En cambio, si $\beta((b - Q^*)-) = 1$, resulta $\left. \frac{dB(Q^*(c_G))}{dc_G} \right|_{c_G=c_{G_1}} = 0$.
- (d) Es inmediato por el apartado (b) del Lema 2.19.
- (e) Por el apartado (b) del Lema 2.20, si v_1 representa el valor actual v , se tiene que

$$\left. \frac{dB(Q^*(v))}{dv} \right|_{v=v_1} = \mu - \int_{Q^*}^b (x - Q^*) [1 - \beta(x - Q^*)] f(x) dx > \mu - \int_{Q^*}^b x f(x) dx > 0. \blacksquare$$

Nota. Es interesante observar que todos los lemas y corolarios anteriores siguen siendo ciertos si, en lugar del Teorema 2.7, utilizamos el Teorema 2.8. Para ello, además de las hipótesis específicamente asociadas a cada lema o corolario, hemos de suponer que la función $\beta(y)$ es continua en el intervalo $(0, b - a)$, pero en lugar de exigir que la función de densidad $f(x)$ sea de clase C^1 en el intervalo $I_{a,b}$, sólo necesitamos que sea continua en este intervalo.

2.6. Modelo con función $\beta(y)$ escalonada

En esta sección se considera el caso particular del problema planteado en la sección 2.2 en que $\beta(y)$ está definida mediante una función escalonada con un número finito n de escalones. Este caso es especialmente interesante porque permite resolver el problema para cualquier función $\beta(y)$ utilizando una aproximación mediante una función escalonada con un número adecuado de escalones.

Supongamos entonces que la fracción de escasez que se sirve mediante el pedido de emergencia viene dada por una función escalonada con n escalones definida como

$$\beta(y) = \beta_j \text{ si } y_j \leq y < y_{j+1} \text{ para } j = 0, 1, \dots, n$$

con $0 \leq \beta_n < \dots < \beta_1 < \beta_0 \leq 1$ y $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n < y_{n+1} = b - a$.

Analizamos en primer lugar el caso en que el soporte para la función de densidad de la demanda es finito, es decir, $b < \infty$. Teniendo en cuenta que la función $\beta(y)$

verifica las hipótesis H1 y H2 con $n_1 = n$, y aplicando el Teorema 2.4, se deduce que la función $T(Q)$ es de clase C^1 en cualquier punto $Q \in (a, b)$ con $Q \neq b - y_j$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Además, si $Q \in (b - y_{j+1}, b - y_j)$, se tiene que $i_1(Q) = j$ y $S_1(Q) = \sum_{k=1}^j (\beta_{k-1} - \beta_k) y_k f(Q + y_k)$. Por tanto, para esos puntos, la expresión de $T'(Q)$, dada por (2.14), es

$$\begin{aligned}
T'(Q) &= (h+p)F(Q) - p - (\omega-p) \sum_{k=1}^j \beta_{k-1} [F(Q+y_k) - F(Q+y_{k-1})] \\
&\quad - (\omega-p) \beta_j [1 - F(Q+y_j)] + (\omega-p) \sum_{k=1}^j (\beta_{k-1} - \beta_k) y_k f(Q+y_k) \\
&= [h+p + (\omega-p) \beta_o] F(Q) - p - (\omega-p) \beta_j \\
&\quad - (\omega-p) \sum_{k=1}^j (\beta_{k-1} - \beta_k) [F(Q+y_k) - y_k f(Q+y_k)] \\
&= [h+p + (\omega-p) \beta_o] F(Q) - p - (\omega-p) \beta_o \\
&\quad + (\omega-p) \sum_{k=1}^j (\beta_{k-1} - \beta_k) [1 - F(Q+y_k) + y_k f(Q+y_k)] \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Para los puntos $Q = b - y_j$ con $j = 1, 2, \dots, n$, utilizando el mismo teorema y teniendo en cuenta que $i_1(b - y_j) = j - 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
T'_+(b - y_j) &= [h+p + (\omega-p) \beta_o] F(b - y_j) - p - (\omega-p) \beta_o \\
&\quad + (\omega-p) \sum_{k=1}^{j-1} (\beta_{k-1} - \beta_k) [1 - F(b - y_j + y_k) + y_k f(b - y_j + y_k)]
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
T'_-(b - y_j) &= T'_+(b - y_j) + (\omega-p) (\beta_{j-1} - \beta_j) y_j f(b) \\
&= [h+p + (\omega-p) \beta_o] F(b - y_j) - p - (\omega-p) \beta_o \\
&\quad + (\omega-p) \sum_{k=1}^j (\beta_{k-1} - \beta_k) [1 - F(b - y_j + y_k) + y_k f(b - y_j + y_k)].
\end{aligned}$$

Por otro lado, como la función $\beta(y)$ también verifica las hipótesis H2, H3 y H4 con $n_2 = n$, suponiendo que la función de densidad $f(x)$ sea de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$ y utilizando el Teorema 2.7, se deduce que la función $T(Q)$ es de clase C^2 en cualquier punto $Q \in (a, b)$ con $Q \neq b - y_j$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Además, si

$Q \in (b - y_{j+1}, b - y_j)$, se tiene que $i_2(Q) = j$ y

$$S_2(Q) = \sum_{k=1}^j (\beta_{k-1} - \beta_k) [-f(Q + y_k) + y_k f'(Q + y_k)].$$

Por tanto, para esos puntos, la expresión de $T''(Q)$, dada por (2.19), es

$$\begin{aligned} T''(Q) &= [h + p + (\omega - p)\beta_o] f(Q) \\ &\quad - (\omega - p) \sum_{k=1}^j (\beta_{k-1} - \beta_k) [f(Q + y_k) - y_k f'(Q + y_k)] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para el caso $b = \infty$, utilizando el Corolario 2.5, se deduce que la función $T(Q)$ es de clase C^1 en todo el intervalo soporte $I_{a,b}$ y además $i_1(Q) = n$ para todo $Q \in (a, b)$.

Por tanto, al igual que en el caso anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} T'(Q) &= [h + p + (\omega - p)\beta_o] F(Q) - p - (\omega - p)\beta_o \\ &\quad + (\omega - p) \sum_{k=1}^n (\beta_{k-1} - \beta_k) [1 - F(Q + y_k) + y_k f(Q + y_k)] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Del mismo modo, si la función de densidad $f(x)$ es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$, utilizando el Corolario 2.9, se deduce que la función $T(Q)$ es de clase C^2 en todo el intervalo soporte $I_{a,b}$ y su derivada segunda viene dada por

$$\begin{aligned} T''(Q) &= [h + p + (\omega - p)\beta_o] f(Q) \\ &\quad - (\omega - p) \sum_{k=1}^n (\beta_{k-1} - \beta_k) [f(Q + y_k) - y_k f'(Q + y_k)] \end{aligned} \quad (2.31)$$

A partir de estos resultados vamos a mostrar cómo se puede obtener la solución del problema para dos distribuciones de probabilidad de la demanda, una con $b < \infty$ (distribución uniforme) y otra con $b = \infty$ (distribución exponencial).

2.6.1. Caso de demanda uniforme

Supongamos ahora que la demanda tiene distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$, es decir, $f(x) = \frac{1}{b-a}$ y $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ con $x \in [a, b]$. En este caso se tiene que

$$1 - F(Q + y_k) + y_k f(Q + y_k) = \frac{b - Q - y_k}{b - a} + \frac{y_k}{b - a} = \frac{b - Q}{b - a}$$

y por tanto, si $Q \in (b - y_{j+1}, b - y_j)$, la expresión (2.28) para la derivada es

$$\begin{aligned} T'(Q) &= [h + p + (\omega - p)\beta_o] \frac{Q - a}{b - a} - p - (\omega - p)\beta_o \\ &\quad + (\omega - p) \frac{b - Q}{b - a} \sum_{k=1}^j (\beta_{k-1} - \beta_k) \\ &= h - [h + p + (\omega - p)\beta_o] \frac{b - Q}{b - a} + (\omega - p) \frac{b - Q}{b - a} (\beta_o - \beta_j) \\ &= h - [h + p + (\omega - p)\beta_j] \frac{b - Q}{b - a} \end{aligned}$$

Además, las expresiones para $T'_+(b - y_j)$ y $T'_-(b - y_j)$ son

$$\begin{aligned} T'_+(b - y_j) &= h - [h + p + (\omega - p)\beta_{j-1}] \frac{y_j}{b - a} \\ T'_-(b - y_j) &= h - [h + p + (\omega - p)\beta_j] \frac{y_j}{b - a} \end{aligned}$$

y por tanto se tiene que $T'_+(b - y_j) \geq T'_-(b - y_j)$. Nótese que a esto mismo puede llegarse de forma general desde el apartado 5 del Teorema 2.4.

Del mismo modo, si $Q \in (b - y_{j+1}, b - y_j)$ la expresión (2.29) para la derivada segunda es

$$T''(Q) = \frac{h + p + (\omega - p)\beta_o}{b - a} - \frac{(\omega - p) \sum_{k=1}^j (\beta_{k-1} - \beta_k)}{b - a} = \frac{h + p + (\omega - p)\beta_j}{b - a} > 0$$

Por tanto, por ser $T''(Q) > 0$ para $Q \in (b - y_{j+1}, b - y_j)$ y $T'_+(b - y_j) \geq T'_-(b - y_j)$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$, se deduce que en este caso la función $T(Q)$ es estrictamente convexa en el intervalo soporte $I_{a,b}$ y su mínimo global necesariamente se alcanza en un único punto $Q \in I_{a,b}$ donde, o bien $T'(Q) = 0$ con $Q \neq b - y_j$ para todo $j = 1, \dots, n$, o bien $Q = b - y_j$ con $T'_-(b - y_j) \leq 0 \leq T'_+(b - y_j)$.

Se puede observar además que $T'_-(b - y_j) > 0$ si y sólo si $y_j < \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_j}$ y podemos definir entonces

$$j_o = \max \left\{ i \in \{0, \dots, n\} : y_i < \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_i} \right\}.$$

Para ese índice j_o necesariamente se tendrá $T'_-(b - y_{j_o+1}) \leq 0$, y la solución del problema será $Q^* = b - y_{j_o+1}$ si $T'_+(b - y_{j_o+1}) \geq 0$ o un punto $Q \in (b - y_{j_o+1}, b - y_{j_o})$

con $T'(Q) = 0$ si $T'_+(b - y_{j_o+1}) < 0$. El primer caso se obtiene cuando $y_{j_o+1} \leq \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_{j_o}}$ y el segundo cuando $y_{j_o+1} > \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_{j_o}}$. Además, en este último caso, la solución Q^* tiene que verificar la ecuación

$$h - [h + p + (\omega - p) \beta_{j_o}] \frac{b - Q^*}{b - a} = 0$$

es decir, se tiene que $Q^* = b - \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_{j_o}}$.

Por tanto:

$$Q^* = \begin{cases} b - y_{j_o+1} & \text{si } y_{j_o+1} \leq \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_{j_o}} \\ b - \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_{j_o}} & \text{si } y_{j_o+1} > \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_{j_o}} \end{cases}$$

Estas dos expresiones pueden escribirse de una forma cerrada como

$$Q^* = b - \min \left\{ \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_{j_o}}, y_{j_o+1} \right\}$$

siendo $j_o = \max \left\{ i \in \{0, \dots, n\} : y_i < \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_i} \right\}$.

En resumen, hemos encontrado la solución del problema planteado cuando la demanda es uniforme y $\beta(y)$ es una función con n escalones.

2.6.2. Caso de demanda exponencial

Supongamos ahora que la demanda tiene una distribución exponencial, es decir,

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} \text{ y } F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}} \text{ con } x \in [0, \infty).$$

En este caso, como $b = \infty$ y $f(x)$ es de clase C^1 en el intervalo $[0, \infty)$, se sabe que la función $T(Q)$ es de clase C^2 y las expresiones para las derivadas vienen dadas por (2.30) y (2.31). Además, se verifica que $f'(x) = -\frac{f(x)}{\mu}$, $F(x) = 1 - \mu f(x)$ y $f(Q + y_k) = e^{-\frac{y_k}{\mu}} f(Q)$. Por tanto la expresión (2.31) para la derivada segunda es

$$T''(Q) = f(Q) \left[h + p + (\omega - p) \beta_o - (\omega - p) \sum_{k=1}^n (\beta_{k-1} - \beta_k) e^{-\frac{y_k}{\mu}} \left(1 + \frac{y_k}{\mu} \right) \right] > 0$$

y se puede asegurar que, también en este caso, la función $T(Q)$ es estrictamente convexa en el soporte $[0, \infty)$.

Por otro lado se tiene que, en (2.30),

$$1 - F(Q + y_k) + y_k f(Q + y_k) = f(Q) e^{-\frac{y_k}{\mu}} (\mu + y_k)$$

y por tanto la expresión para la derivada primera es

$$\begin{aligned} T'(Q) &= h - [h + p + (\omega - p) \beta_o] \mu f(Q) + (\omega - p) f(Q) \sum_{k=1}^n (\beta_{k-1} - \beta_k) e^{-\frac{y_k}{\mu}} (\mu + y_k) \\ &= h - e^{-\frac{Q}{\mu}} \left[h + p + (\omega - p) \beta_o - (\omega - p) \sum_{k=1}^n (\beta_{k-1} - \beta_k) e^{-\frac{y_k}{\mu}} \left(1 + \frac{y_k}{\mu} \right) \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, la solución del problema se obtendrá resolviendo la ecuación $T'(Q) = 0$, cuya única solución es

$$Q^* = \mu \ln \left\{ 1 + \frac{p + (\omega - p) \left[\beta_o - \sum_{k=1}^n (\beta_{k-1} - \beta_k) \left(1 + \frac{y_k}{\mu} \right) e^{-\frac{y_k}{\mu}} \right]}{h} \right\}.$$

En resumen, hemos encontrado la solución del problema planteado cuando la demanda es exponencial y la función $\beta(y)$ es escalonada.

Es importante observar que, a diferencia de lo que sucede en los dos casos anteriores, no siempre se puede garantizar la existencia de un único candidato para la solución del problema ni tampoco la convexidad de la función $T(Q)$. Por ejemplo, si la demanda tiene una distribución normal con parámetros μ y σ (es decir $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$), entonces es fácil comprobar que $f'(Q + y_k) = -\frac{Q+y_k-\mu}{\sigma^2} f(Q + y_k)$ y por tanto la expresión (2.31) para la derivada segunda es

$$\begin{aligned} T''(Q) &= [h + p + (\omega - p) \beta_o] f(Q) \\ &\quad - (\omega - p) \sum_{k=1}^n (\beta_{k-1} - \beta_k) \left[1 + y_k \frac{Q + y_k - \mu}{\sigma^2} \right] f(Q + y_k). \end{aligned}$$

De esta expresión se deduce que, si $Q < \mu - y_k - \frac{\sigma^2}{y_k}$, entonces $T''(Q) < 0$ si elegimos adecuadamente los valores de los parámetros que intervienen en el modelo y, por tanto, la función $T(Q)$ es localmente cóncava.

2.6.3. Casos especiales

A continuación se analizan algunas situaciones especiales en las que la función $T(Q)$ no es convexa y, además, tiene más de un extremo local. Para ello utilizaremos una función $\beta(y)$ escalonada con un único escalón.

Ejemplo 1. Supongamos que la función de densidad de la demanda es $f(x) = \frac{1}{100} [1 + \cos(\frac{\pi x}{25})]$ con $x \in [0, 100]$ y por tanto $F(x) = \frac{1}{100} [x + \frac{25}{\pi} \text{sen}(\frac{\pi x}{25})]$ para $x \in [0, 100]$ y $F(x) = 1$ para $x > 100$. Se considera la función escalonada con un único escalón definida como $\beta(y) = 1$ si $y \in [0, 50]$ y $\beta(y) = 0$ si $y \geq 50$ (es decir, $n = 1$, $y_1 = 50$, $\beta_o = 1$ y $\beta_1 = 0$). Finalmente seleccionamos los siguientes parámetros para el sistema de inventario: $c = 50$, $c_B = 60$, $c_H = c_G = 10$ y $v = 70$. Los parámetros auxiliares son $p = 30$, $\omega = 10$ y $h = 60$ y el valor esperado para la demanda es $\mu = 50$.

Por ser $b < \infty$, en este caso la expresión (2.28) para la derivada primera es

$$T'(Q) = \begin{cases} 70F(Q) - 30 + 20 [F(Q + 50) - 50f(Q + 50)] & \text{si } 0 \leq Q < 50 \\ 70F(Q) - 10 & \text{si } 50 < Q \leq 100 \end{cases} \quad (2.32)$$

Ahora, teniendo en cuenta que $f(Q + 50) = f(Q)$ y, si $0 \leq Q < 50$, $F(Q + 50) = F(Q) + 0.5$, podemos escribir esta derivada como

$$T'(Q) = \begin{cases} 90F(Q) - 20 - 1000f(Q) & \text{si } 0 \leq Q < 50 \\ 70F(Q) - 10 & \text{si } 50 < Q \leq 100 \end{cases}$$

Por tanto, $T'_+(50) = 25$ y $T'_-(50) = T'_+(50) - 1000f(100) = 5$, y la función $T(Q)$ no es derivable en el punto $Q = 50$. Para el resto de puntos la derivada segunda es

$$T''(Q) = \begin{cases} 90f(Q) + \frac{2\pi}{5} \text{sen}(\frac{\pi Q}{25}) & \text{si } 0 \leq Q < 50 \\ 70f(Q) & \text{si } 50 < Q \leq 100 \end{cases}$$

Además, $T'(Q) > 25$ para todo $Q \in (50, 100)$ y se puede asegurar que la solución del problema se alcanza en un punto $Q \in (0, 50)$ con $T'(Q) = 0$. Sustituyendo los valores de $F(Q)$ y $f(Q)$ en la expresión de $T'(Q)$ obtenemos que, para $Q \in (0, 50)$, esta derivada es

$$T'(Q) = 0.9Q + \frac{45}{2\pi} \text{sen}\left(\frac{\pi Q}{25}\right) - 30 - 10 \cos\left(\frac{\pi Q}{25}\right).$$

Resolviendo la ecuación $0.9Q + \frac{45}{2\pi} \text{sen} \left(\frac{\pi Q}{25} \right) - 30 - 10 \cos \left(\frac{\pi Q}{25} \right) = 0$ hemos encontrado tres soluciones en el intervalo $(0, 50)$: $Q_1 = 19.7$, $Q_2 = 31.5$ y $Q_3 = 46.7$. Evaluando la derivada segunda en estos puntos tenemos que $T''(Q_1) = 0.97$, $T''(Q_2) = -0.63$ y $T''(Q_3) = 1.22$. Por tanto, Q_1 y Q_3 son mínimos locales mientras que Q_2 es un máximo local. Finalmente, evaluando la función $T(Q)$ hemos comprobado que $T(Q_3) = 867.27 < 886.25 = T(Q_1)$ y por tanto la solución del problema es $Q^* = Q_3 = 46.7$. Además, el beneficio esperado óptimo será

$$B(Q^*) = (v - c) \mu - T(Q^*) = 1000 - 867.27 = 132.73.$$

En la Figura 2.4 se representa la función de beneficio esperado $B(Q)$, junto con la función de distribución de la demanda $F(Q)$ y la función fractil $\Psi(Q)$ definida en la sección 2.4. Podemos comprobar que los puntos de corte de la función de distribución y la función fractil coinciden con los posibles candidatos para maximizar la función del beneficio esperado. Observar también que la función $B(Q)$ es continua pero no es derivable en el punto $Q = 50$ y la función fractil $\Psi(Q)$ es discontinua en dicho punto.

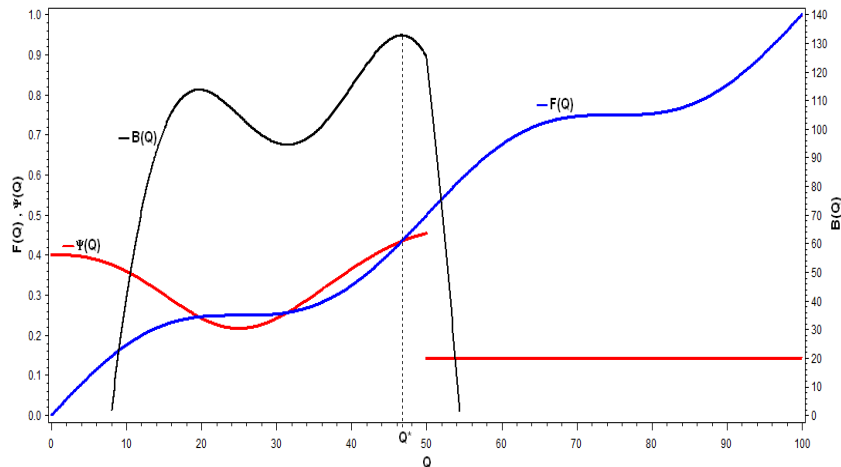


Figura 2.4. Representación gráfica para el ejemplo 1

A la vista de este gráfico parece claro que pudiera ocurrir que el óptimo para $B(Q)$ se alcanzase en un punto donde la función fractil fuese discontinua, es decir, en un punto donde la función $T(Q)$ no es derivable. El siguiente ejemplo muestra un caso en el que esto ocurre.

Ejemplo 2. Consideramos el mismo problema que en el ejemplo 1 pero cambiando $y_1 = 50$ por $y_1 = 55$. En este caso la función $T(Q)$ no es derivable en el punto $Q = 45$

y además la solución obtenida es $Q^* = 45$ con $B(Q^*) = 232.81$. En la Figura 2.5 podemos comprobar que efectivamente es así.

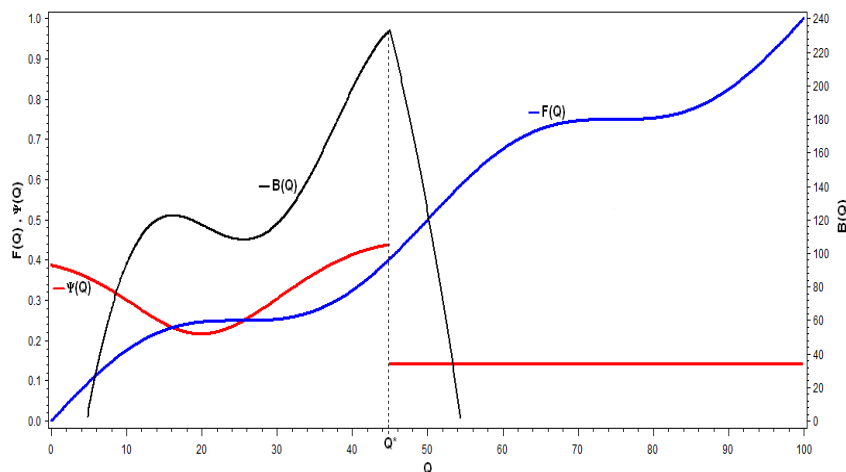


Figura 2.5. Representación gráfica para el ejemplo 2

En los dos ejemplos anteriores hemos observado que la solución se alcanza siempre en el valor Q más grande entre los candidatos, pero en general esto no tiene por qué ser siempre así. El siguiente ejemplo lo muestra.

Ejemplo 3. Se considera otra vez el mismo problema que en el ejemplo 1 pero cambiando el valor $c_H = 10$ por $c_H = 15$. En este caso la solución obtenida ha sido $Q^* = 18.6$, que es el más pequeño de los candidatos, con $B(Q^*) = 99.14$. En la Figura 2.6 se representa gráficamente el problema en este caso.

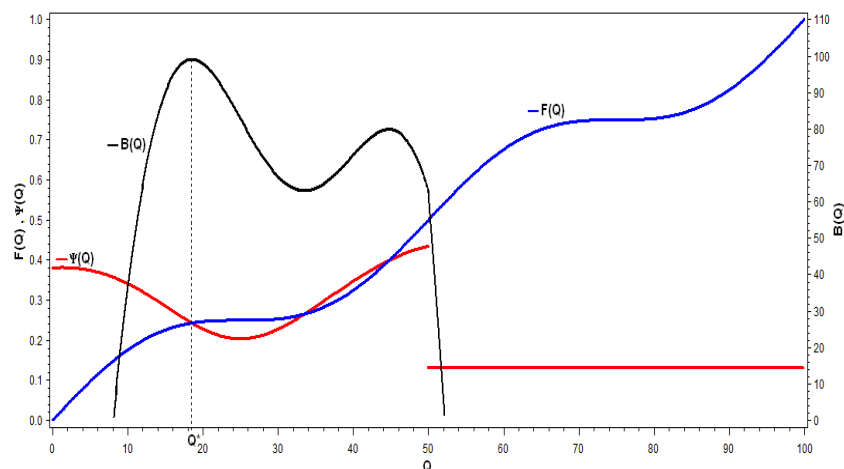


Figura 2.6. Representación gráfica para el ejemplo 3

En todos los casos anteriores la función $T(Q)$ no era de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$. Podemos plantearnos entonces la posibilidad de que estas situaciones

puedan ocurrir también siendo la función $T(Q)$ de clase C^1 . El siguiente ejemplo demuestra que efectivamente esto es así.

Ejemplo 4. Supongamos ahora que la función de densidad de la demanda es $f(x) = \frac{1}{100} [1 + \cos(\pi + \frac{2\pi x}{25})]$ con $x \in [0, 100]$ y por tanto la función de distribución es $F(x) = \frac{1}{100} [x + \frac{25}{2\pi} \text{sen}(\pi + \frac{2\pi x}{25})]$ para $x \in [0, 100]$ y $F(x) = 1$ para $x > 100$. Igual que en el ejemplo 1, consideramos la función escalonada con un único escalón definida como $\beta(y) = 1$ si $y \in [0, 50)$ y $\beta(y) = 0$ si $y \geq 50$ (es decir, $n = 1$, $y_1 = 50$, $\beta_o = 1$ y $\beta_1 = 0$) y los mismos parámetros para el sistema de inventario: $c = 50$, $c_B = 60$, $c_H = c_G = 10$ y $v = 70$. Por tanto, también en este caso los parámetros auxiliares son $p = 30$, $\omega = 10$ y $h = 60$. Además, también ahora el valor esperado para la demanda es $\mu = 50$, $f(Q + 50) = f(Q)$ y, si $0 \leq Q < 50$, $F(Q + 50) = F(Q) + 0.5$. Entonces, de nuevo la expresión para la derivada primera viene dada por (2.32) y observamos que, por ser $f(100) = 0$, se tiene que $T'_+(50) = T'_-(50) = 25$. Por tanto, en este caso la función $T(Q)$ sí es de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$. Además, la derivada segunda es

$$T''(Q) = \begin{cases} 90f(Q) + \frac{4\pi}{5} \text{sen}(\pi + \frac{2\pi Q}{25}) & \text{si } 0 \leq Q < 50 \\ 70f(Q) & \text{si } 50 < Q \leq 100 \end{cases}$$

Entonces podemos utilizar el mismo razonamiento que en el ejemplo 1 para asegurar que la solución del problema se alcanza en un punto $Q \in (0, 50)$ con $T'(Q) = 0$. Sustituyendo los valores de $F(Q)$ y $f(Q)$ en la expresión de $T'(Q)$ obtenemos que, para $Q \in (0, 50)$, esta derivada es

$$T'(Q) = 0.9Q + \frac{45}{4\pi} \text{sen}\left(\pi + \frac{2\pi Q}{25}\right) - 30 - 10 \cos\left(\pi + \frac{2\pi Q}{25}\right).$$

Resolviendo la ecuación $0.9Q + \frac{45}{4\pi} \text{sen}\left(\pi + \frac{2\pi Q}{25}\right) - 30 - 10 \cos\left(\pi + \frac{2\pi Q}{25}\right) = 0$ hemos encontrado también tres soluciones en el intervalo $(0, 50)$: $Q_1 = 22.2$, $Q_2 = 28.0$ y $Q_3 = 40.0$. Evaluando la derivada segunda en estos puntos tenemos que $T''(Q_1) = 1.84$, $T''(Q_2) = -1.48$ y $T''(Q_3) = 3.11$. Por tanto, Q_1 y Q_3 son mínimos locales mientras que Q_2 es un máximo local. Finalmente, evaluando la función $T(Q)$ hemos comprobado que $T(Q_3) = 720.84 < 776.65 = T(Q_1)$ y por tanto podemos asegurar que la solución del problema es $Q^* = Q_3 = 40.0$. Además, el beneficio esperado óptimo

será

$$B(Q^*) = (v - c) \mu - T(Q^*) = 1000 - 720.84 = 279.16.$$

En la Figura 2.7 se representa gráficamente el problema en este caso y se observa que ahora la función fractil $\Psi(Q)$ es continua y la función de beneficio esperado $B(Q)$ es de clase C^1 .

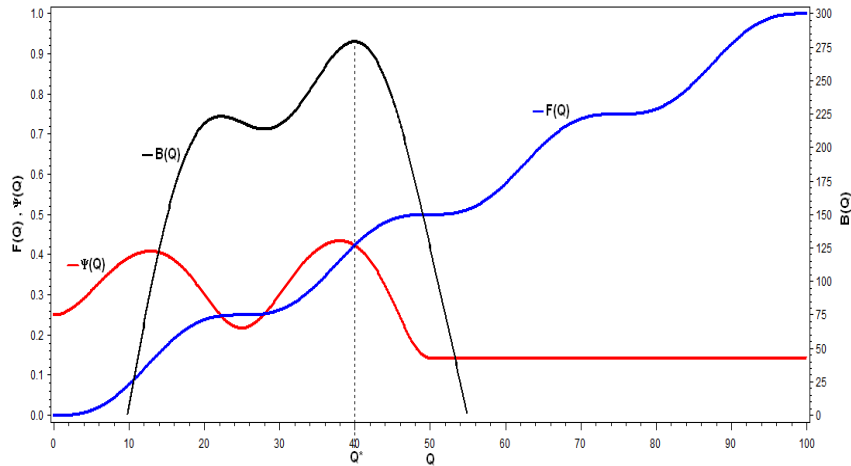


Figura 2.7. Representación gráfica para el ejemplo 4

También ahora, cuando la función $T(Q)$ es de clase C^1 , pudiera ocurrir que el óptimo no fuese el mayor de los candidatos. Esta es la situación que se da en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Se considera el mismo problema que en el ejemplo 4, pero cambiando el valor $c_H = 10$ por $c_H = 30$. En este caso obtenemos que $Q^* = 20.2$, que es el más pequeño de los candidatos, con $B(Q^*) = 179.96$. En la Figura 2.8 se representa gráficamente el problema en este último caso.

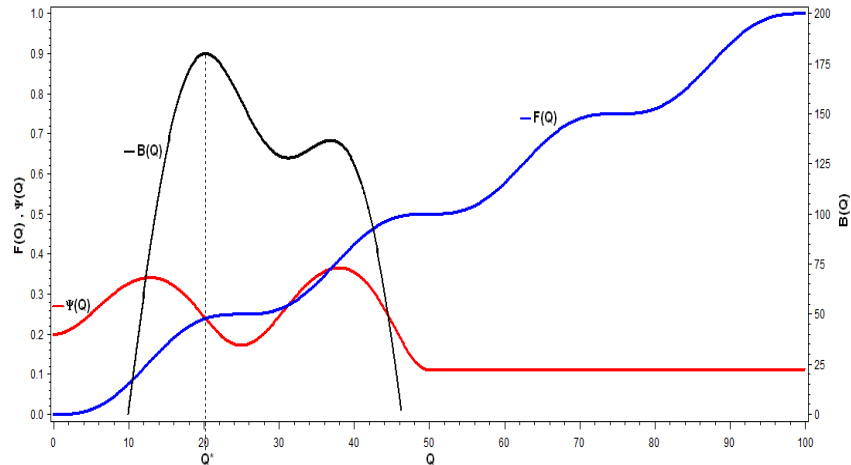


Figura 2.8. Representación gráfica para el ejemplo 5

2.7. Modelo con umbral de pérdida de ventas

En esta sección se analiza un caso particular del problema planteado en la sección 2.2. Se trata de un problema tipo *newsboy* con pedido de emergencia y umbral de pérdida de ventas que generaliza el estudiado en Lee y Lodree (2010). Se supone que existe un cierto umbral M , con $0 < M < \infty$, a partir del cual el cliente ya no está dispuesto a admitir un pedido de emergencia, pero por debajo del cual sí lo está. Teniendo en cuenta que $\beta(y)$ es una función no creciente con valores en el intervalo $[0, 1]$, se sigue que $M = \sup \{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$ y, por tanto, $\beta(y) = 0$ para $y > M$.

Si $M \geq b - a$, es claro que la suposición anterior no añade nada a las hipótesis H1 a H4 dadas en la sección 2.3 ya que, como se ha señalado en su motivación, lo importante es “considerar todos los puntos $y \in (0, b - a)$ en los cuales la función $\beta(y)$ presenta un comportamiento especial” (ver página 119). En cambio, si $M < b - a$, la suposición anterior sí añade matices a las hipótesis H1 a H4. Por todo ello, en línea con lo considerado en Lee y Lodree (2010), en esta sección vamos a añadir una nueva hipótesis a la anterior sobre el umbral M y a las ya citadas H1 a H4.

Concretamente, si $M \geq b - a$ supondremos que la función $\beta(y)$ es de clase C^2 en el intervalo $(0, b - a)$. Con estas seis condiciones, es claro que, en este caso, $n_1 = n_2 = 0$ e $i_1(Q) = i_2(Q) = 0$ para todo $Q \in (a, b)$. En consecuencia, aplicando el Corolario 2.9 con la condición (iii), se puede asegurar que la función $T(Q)$ es de clase C^2 en el intervalo soporte $I_{a,b}$. Además, sus dos primeras derivadas vienen dadas, respectivamente, por las expresiones (2.14) y (2.19) con $i_1(Q) = i_2(Q) = 0$ y $S_1(Q) = S_2(Q) = 0$ para todo $Q \in (a, b)$. Es decir, ahora se tiene:

$$T'(Q) = (h + p) F(Q) - p - (\omega - p) \int_Q^b [\beta(x - Q) + (x - Q) \beta'(x - Q)] f(x) dx \quad (2.33)$$

y

$$\begin{aligned} T''(Q) &= [h + p + \beta_o(\omega - p)] f(Q) \\ &\quad + (\omega - p) \int_Q^b [2\beta'(x - Q) + (x - Q) \beta''(x - Q)] f(x) dx \end{aligned} \quad (2.34)$$

Luego, por el Corolario 2.11, si $2\beta'(y) + y\beta''(y) \leq 0$ para todo $y \in (0, b - a)$,

entonces $T(Q)$ es una función convexa de clase C^2 en el intervalo soporte $I_{a,b}$. Además, si $f(x) > 0$ para todo $x \in I_{a,b}$ se verifica que la función $T(Q)$ es estrictamente convexa en el intervalo soporte $I_{a,b}$. Por tanto, en este caso se tienen ya propiedades adecuadas para poder determinar el mínimo global de la función $T(Q)$.

En consecuencia, a efectos de estudiar las propiedades de la función $T(Q)$, basta limitar nuestro estudio al caso $M < b - a$ que, por otro lado, es el razonable en los problemas prácticos.

2.7.1. Propiedades de la función $T(Q)$ cuando $M < b - a$

Ahora, si $M < b - a$, supondremos que la función $\beta(y)$ es de clase C^2 en el intervalo $(0, M)$. Luego, se tiene que, o bien $\beta(y)$ es de clase C^2 en $y = M$ y, por tanto, no hay puntos especiales en el intervalo $(0, b - a)$, o bien $y = M$ es el único punto especial de $\beta(y)$ en el intervalo $(0, b - a)$.

En consecuencia, cuando $M < b - a$, admitiendo *a priori* las dos nuevas condiciones anteriormente dadas sobre la función $\beta(y)$ (es decir, sobre el umbral M y clase C^2 en $(0, M)$), las hipótesis H1 a H4 pueden reformularse en la siguiente forma equivalente:

Hipótesis H2M. *En los extremos del intervalo $(0, M)$ existen y son finitos los límites laterales $\lim_{y \downarrow 0} [y\beta'(y)]$ y $\lim_{y \uparrow M} [y\beta'(y)]$.*

Hipótesis H4M. *En los extremos del intervalo $(0, M)$ existen y son finitos los límites laterales $\lim_{y \downarrow 0} [2\beta'(y) + y\beta''(y)]$ y $\lim_{y \uparrow M} [2\beta'(y) + y\beta''(y)]$.*

Probaremos la anterior afirmación en el siguiente lema:

Lema 2.23 *Sea $M = \sup \{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$ con $M < b - a$. Supongamos que la función $\beta(y)$ es de clase C^2 en el intervalo $(0, M)$. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) $\beta(y)$ verifica las hipótesis H1 a H4 en el intervalo $(0, b - a)$.

(ii) $\beta(y)$ verifica las hipótesis H2M y H4M en el intervalo $(0, M)$.

Demostración. Supongamos primero que $\beta(y)$ verifica la condición (i). Entonces, por las hipótesis H1 y H3, se tiene que $\beta'(M-)$ y $\beta''(M-)$ son finitos y por tanto los límites $\lim_{y \uparrow M} [y\beta'(y)]$ y $\lim_{y \uparrow M} [2\beta'(y) + y\beta''(y)]$ existen y son finitos. Del mismo modo, utilizando las hipótesis H2 y H4, se tiene que los límites $\lim_{y \downarrow 0} [y\beta'(y)]$ y

$\lim_{y \downarrow 0} [2\beta'(y) + y\beta''(y)]$ existen y son finitos. En consecuencia, las hipótesis H2M y H4M son ciertas y se verifica la condición (ii).

Recíprocamente, supongamos ahora que $\beta(y)$ verifica la condición (ii). En este caso, si $\beta(y)$ es de clase C^2 en el punto $y = M$, es evidente que las hipótesis H1 y H3 son ciertas con $n_1 = n_2 = 0$. Del mismo modo, si $\beta(y)$ no es de clase C^2 en el punto $y = M$, por las hipótesis H2M y H4M, podemos asegurar que $\lim_{y \uparrow M} \beta'(y) = \beta'(M-)$ y $\lim_{y \uparrow M} \beta''(y) = \beta''(M-)$ son finitos y, además, $\beta'(M+) = \beta''(M+) = 0$. Por tanto, las hipótesis H1 y H3 son ciertas con $n_1 = n_2 = 1$ e $y_1 = M$. Finalmente, por ser $M = \sup \{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$ con $M < b - a$, es evidente que $\lim_{y \uparrow b-a} [y\beta'(y)] = \lim_{y \uparrow b-a} [2\beta'(y) + y\beta''(y)] = 0$ y también H2 y H4 son ciertas. Por tanto, podemos afirmar que se verifica la condición (i). ■

A continuación, teniendo en cuenta el resultado anterior, vamos a matizar las propiedades sobre la función $T(Q)$ estudiadas en la sección 2.3 para el modelo introducido al inicio de esta sección.

Para la derivada primera de la función $T(Q)$ tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.24 *Sea $M = \sup \{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$, con $M < b - a$. Supongamos que la función $\beta(y)$ es de clase C^2 en el intervalo $(0, M)$ y verifica las hipótesis H2M y H4M. Entonces:*

1. $T(Q)$ es una función de clase C^1 en $(a, b - M)$ y, en este intervalo,

$$T'(Q) = (h + p)F(Q) - p - (\omega - p) \int_Q^{Q+M} [\beta(x - Q) + (x - Q)\beta'(x - Q)] f(x) dx + (\omega - p)M\beta(M-)f(Q + M) \quad (2.35)$$

2. Si $b < \infty$, $T(Q)$ es una función de clase C^1 en $(b - M, b)$ y, en este intervalo,

$$T'(Q) = (h + p)F(Q) - p - (\omega - p) \int_Q^b [\beta(x - Q) + (x - Q)\beta'(x - Q)] f(x) dx \quad (2.36)$$

3. Si $b < \infty$, las derivadas laterales $T'_-(b - M)$ y $T'_+(b - M)$ se obtienen con las expresiones (2.35) y (2.36), respectivamente, y verifican que

$$T'_+(b - M) - T'_-(b - M) = (p - \omega)M\beta(M-)f(b) \geq 0 \quad (2.37)$$

4. Las derivadas laterales, $T'_+(a)$ y $T'_-(b)$ se obtienen, respectivamente, con las expresiones (2.35) y (2.36), siendo además $T'_-(b) = h$.

Demostración. Por las hipótesis consideradas, teniendo en cuenta el Lema 2.23, se verifican las condiciones para aplicar el Teorema 2.4.

1. Si $Q \in (a, b - M)$ y $\beta(y)$ no es de clase C^1 en el punto $y = M$, entonces $i_1(Q) = 1$ y el resultado se deduce aplicando el apartado 1 del Teorema 2.4 con $S_1(Q) = M\beta(M-)f(Q + M)$, porque $\beta(M+) = 0$. Del mismo modo, si $\beta(y)$ es de clase C^1 en el punto $y = M$, entonces $i_1(Q) = 0$, $\beta(M-) = \beta(M+) = 0$ y el resultado también se deduce aplicando el apartado 1 del Teorema 2.4 con $S_1(Q) = 0$.

2. Si $Q \in (b - M, b)$ entonces $i_1(Q) = 0$ y el resultado se deduce aplicando el apartado 1 del Teorema 2.4 con $S_1(Q) = 0$.

3. Se sigue directamente de los apartados 3 y 5 del Teorema 2.4.

4. Se sigue directamente de los apartados 2 y 4 del Teorema 2.4. ■

Como consecuencia de este corolario se tienen las siguientes observaciones:

- (i) Si $b = \infty$, la derivada $T'(Q)$ siempre está definida por la expresión (2.35) y por tanto $T(Q)$ es de clase C^1 en (a, b) .
- (ii) Si $b < \infty$, por el apartado 3 del corolario anterior, $T(Q)$ no es siempre una función de clase C^1 en (a, b) , aunque sí se puede asegurar que lo es en el conjunto $(a, b - M) \cup (b - M, b)$.

Teniendo en cuenta estas observaciones y el Corolario 2.5, se pueden encontrar condiciones necesarias y suficientes para que la función $T(Q)$ sea de clase C^1 , como se muestra en el siguiente resultado.

Corolario 2.25 *Sea $M = \sup \{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$, con $M < b - a$. Supongamos que la función $\beta(y)$ es de clase C^2 en el intervalo $(0, M)$ y verifica las hipótesis H2M y H4M. Entonces, $T(Q)$ es una función de clase C^1 en $I_{a,b}$ si y sólo si se verifica que $\beta(M-)f(b) = 0$.*

Demostración. Por las hipótesis consideradas y teniendo en cuenta el Lema 2.23, se verifican las hipótesis H1 y H2 exigidas en el Corolario 2.5. Además, es evidente que $\beta(M-)f(b) = 0$ si y sólo si al menos una de las dos condiciones del citado corolario

es cierta. Por tanto, dicha igualdad es una condición necesaria y suficiente para que la función $T(Q)$ sea de clase C^1 en $I_{a,b}$. ■

Utilizando también el Lema 2.23, y suponiendo que la función $f(x)$ es de clase C^1 , el siguiente corolario analiza la existencia de la derivada segunda de la función $T(Q)$ a partir del Teorema 2.7.

Corolario 2.26 *Sea $M = \sup \{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$, con $M < b - a$. Supongamos que la función de densidad $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y la función $\beta(y)$ es de clase C^2 en $(0, M)$ verificando además las hipótesis $H2M$ y $H4M$. Entonces:*

1. $T(Q)$ es una función de clase C^2 en $(a, b - M)$ y, en este intervalo,

$$\begin{aligned} T''(Q) &= [h + p + \beta_o(\omega - p)] f(Q) \\ &\quad + (\omega - p) \int_Q^{Q+M} [2\beta'(x - Q) + (x - Q) \beta''(x - Q)] f(x) dx \\ &\quad - (\omega - p) [\beta(M-) + M\beta'(M-)] f(Q + M) \\ &\quad + (\omega - p) M\beta(M-) f'(Q + M) \end{aligned} \quad (2.38)$$

2. Si $b < \infty$, $T(Q)$ es una función de clase C^2 en $(b - M, b)$ y, en este intervalo,

$$\begin{aligned} T''(Q) &= [h + p + \beta_o(\omega - p)] f(Q) \\ &\quad + (\omega - p) \int_Q^b [2\beta'(x - Q) + (x - Q) \beta''(x - Q)] f(x) dx \end{aligned} \quad (2.39)$$

3. Si $b < \infty$, las derivadas laterales $T''_{--}(b - M)$ y $T''_{++}(b - M)$ vienen dadas respectivamente por las expresiones (2.38) y (2.39) y verifican que

$$\begin{aligned} T''_{++}(b - M) - T''_{--}(b - M) &= (\omega - p) [\beta(M-) + M\beta'(M-)] f(b) \\ &\quad - (\omega - p) M\beta(M-) f'(b) \end{aligned}$$

Demostración. Por las hipótesis consideradas, teniendo en cuenta el Lema 2.23, se verifican las condiciones para aplicar el Teorema 2.7. Entonces, si $Q \in (a, b - M)$ y $\beta(y)$ no es de clase C^2 en el punto $y = M$, basta utilizar el apartado 1 de dicho teorema con $i_2(Q) = 1$, $y_1 = M$ y $\beta(M+) = \beta'(M+) = 0$ para obtener (2.38). Del mismo modo, si $Q \in (a, b - M)$ y $\beta(y)$ es de clase C^2 en el punto $y = M$ basta también aplicar dicho

apartado con $i_2(Q) = 0$ y $\beta(M-) = \beta'(M-) = 0$. Finalmente, si $Q \in (b - M, b)$, entonces $i_2(Q) = S_2(Q) = 0$ y basta utilizar de nuevo el apartado 1 de dicho teorema para obtener (2.39). Por último, el apartado 3 se deduce directamente de los apartados 3 y 5 del Teorema 2.7 teniendo en cuenta que $\beta(M+) = \beta'(M+) = 0$. ■

A partir de este corolario, tal y como se hizo con la derivada primera, pueden establecerse las siguientes conclusiones:

- (i) Si $b = \infty$, la derivada segunda $T''(Q)$ siempre está definida por la expresión (2.38) y por tanto $T(Q)$ es de clase C^2 en (a, b) .
- (ii) Si $b < \infty$, por el apartado 3 del corolario anterior, $T(Q)$ no es siempre una función de clase C^2 en (a, b) , aunque sí se puede asegurar que lo es en el conjunto $(a, b - M) \cup (b - M, b)$.

Por otro lado, es importante señalar que, si $\beta(M-) = 0$, puede enunciarse un resultado similar al del Corolario 2.26 sin suponer que la función de densidad $f(x)$ sea de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$. Esto es lo que se hace en el siguiente corolario.

Corolario 2.27 *Sea $M = \sup \{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$, con $M < b - a$. Supongamos que la función $\beta(y)$ es de clase C^2 en $(0, M)$ y verifica las hipótesis $H2M$ y $H4M$ con $\beta(M-) = 0$. Entonces:*

1. $T(Q)$ es una función de clase C^2 en $(a, b - M)$ y, en este intervalo,

$$\begin{aligned} T''(Q) &= [h + p + \beta_o(\omega - p)] f(Q) \\ &\quad + (\omega - p) \int_Q^{Q+M} [2\beta'(x - Q) + (x - Q) \beta''(x - Q)] f(x) dx \\ &\quad - (\omega - p) M \beta'(M-) f(Q + M) \end{aligned} \quad (2.40)$$

2. Si $b < \infty$, $T(Q)$ es una función de clase C^2 en $(b - M, b)$ y, en este intervalo,

$$\begin{aligned} T''(Q) &= [h + p + \beta_o(\omega - p)] f(Q) \\ &\quad + (\omega - p) \int_Q^b [2\beta'(x - Q) + (x - Q) \beta''(x - Q)] f(x) dx \end{aligned} \quad (2.41)$$

3. Si $b < \infty$, las derivadas laterales $T''_{--}(b - M)$ y $T''_{++}(b - M)$ vienen dadas respectivamente por las expresiones (2.40) y (2.41) y verifican que

$$T''_{++}(b - M) - T''_{--}(b - M) = (\omega - p) M \beta'(M-) f(b) \geq 0$$

Demostración. Se deduce inmediatamente del Teorema 2.8 razonando del mismo modo que en el Corolario 2.26. ■

Una vez analizada la derivabilidad de $T(Q)$, el siguiente corolario permite obtener condiciones necesarias y suficientes para que esta función sea de clase C^2 en el intervalo soporte $I_{a,b}$.

Corolario 2.28 *Sea $M = \sup \{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$, con $M < b - a$. Supongamos que la función de densidad $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y la función $\beta(y)$ es de clase C^2 en $(0, M)$ verificando además las hipótesis $H2M$ y $H4M$. Entonces la función $T(Q)$ es de clase C^2 en $I_{a,b}$ si y sólo si se verifica al menos una de las siguientes condiciones:*

- (i) $f(b) = f'(b) = 0$.
- (ii) $\beta(M-) = f(b) = 0$.
- (iii) $\beta(M-) = \beta'(M-) = 0$.

Demostración. Si $T(Q)$ es de clase C^2 en $I_{a,b}$, utilizando el Corolario 2.25, necesariamente se verifica que $\beta(M-) f(b) = 0$. Además, por el Corolario 2.26, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{T''_{++}(b - M) - T''_{--}(b - M)}{M(\omega - p)} &= \frac{[\beta(M-) + M\beta'(M-)] f(b) - M\beta(M-) f'(b)}{M} \\ &= \frac{\beta(M-) f(b)}{M} + \beta'(M-) f(b) - \beta(M-) f'(b) \\ &= \beta'(M-) f(b) - \beta(M-) f'(b) = 0. \end{aligned}$$

Entonces, si $\beta(M-) = 0$, necesariamente $\beta'(M-) f(b) = 0$ y por tanto se verifica al menos una de las condiciones (ii) o (iii). En cambio, si $f(b) = 0$, entonces necesariamente $\beta(M-) f'(b) = 0$ y por tanto se verifica al menos una de las condiciones (i) o (ii). Recíprocamente, si al menos una de las tres condiciones es cierta, teniendo en cuenta que $\beta(y)$ es continua en $(0, b - a)$ si $\beta(M-) = 0$ y es de clase C^1 en $(0, b - a)$

si $\beta(M-) = \beta'(M-) = 0$, entonces, aplicando el Corolario 2.9, se deduce que la función $T(Q)$ es de clase C^2 en $I_{a,b}$. ■

También ahora, si $\beta(M-) = 0$, se puede encontrar una condición necesaria y suficiente para que la función $T(Q)$ sea de clase C^2 sin suponer que la función de densidad $f(x)$ sea de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$. Esto es lo que se hace en el siguiente corolario.

Corolario 2.29 *Sea $M = \sup \{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$, con $M < b - a$. Supongamos que la función $\beta(y)$ es de clase C^2 en $(0, M)$ y verifica las hipótesis $H2M$ y $H4M$ con $\beta(M-) = 0$. Entonces la función $T(Q)$ es de clase C^2 en $I_{a,b}$ si y sólo si se verifica que $\beta'(M-) f(b) = 0$.*

Demostración. Si $\beta(M-) = 0$, por el Corolario 2.27, $T(Q)$ es de clase C^2 en el conjunto $(a, b - M) \cup (b - M, b)$ y también $T''_{++}(b - M) = T''_{--}(b - M)$ si y sólo si $\beta'(M-) f(b) = 0$. Por tanto $T(Q)$ es de clase C^2 en $I_{a,b}$ si y sólo si se verifica que $\beta'(M-) f(b) = 0$. ■

Además, el análisis anterior permite también encontrar condiciones suficientes para que $T(Q)$ sea convexa. El siguiente resultado proporciona algunas condiciones utilizando el Corolario 2.11.

Corolario 2.30 *Sea $M = \sup \{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$, con $M < b - a$. Supongamos que la función $\beta(y)$ es de clase C^2 en $(0, M)$ y verifica las hipótesis $H2M$ y $H4M$. Si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$(i) \quad 2\beta'(y) + y\beta''(y) \leq 0 \text{ para todo } y \in (0, M).$$

$$(ii) \quad \beta(M-) = \beta'(M-) = 0.$$

entonces $T(Q)$ es una función convexa de clase C^2 en $I_{a,b}$. Además, si se verifica la condición adicional $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $T(Q)$ es una función estrictamente convexa en $I_{a,b}$.

Demostración. Si se verifica la condición (ii), utilizando el corolario anterior, se deduce que $T(Q)$ es una función de clase C^2 . El resto de la prueba es una consecuencia

inmediata del Corolario 2.11 teniendo en cuenta que $\beta(y)$ es una función de clase C^1 en $(0, b - a)$ si se verifica la condición (ii). ■

El siguiente lema también proporciona condiciones suficientes para la convexidad de la función $T(Q)$ en el caso de que $\beta(y)$ no verifique la condición (ii) del corolario anterior, pero la función de densidad $f(x)$ sea de clase C^1 en $I_{a,b}$.

Lema 2.31 *Sea $M = \sup \{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$, con $M < b - a$. Supongamos que la función de densidad $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y la función $\beta(y)$ es de clase C^2 en $(0, M)$ verificando además las hipótesis $H2M$ y $H4M$. Si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$(i) \quad 2\beta'(y) + y\beta''(y) \leq 0 \text{ para todo } y \in (0, M).$$

$$(ii) \quad [\beta(M-) + M\beta'(M-)] f(x) - M\beta(M-)f'(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in (a + M, b).$$

entonces la función $T(Q)$ es convexa en $I_{a,b}$. Además, si se verifica la condición adicional $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $T(Q)$ es una función estrictamente convexa en $I_{a,b}$.

Demostración. Utilizando las expresiones (2.38) y (2.39) del Corolario 2.26, es evidente que, si se verifican las dos condiciones dadas, entonces se puede asegurar que $T''(Q) \geq 0$ para todo $Q \neq b - M$. Además, si $b < \infty$, teniendo en cuenta la expresión (2.37) del Corolario 2.24, se verifica que $T'_+(b - M) \geq T'_-(b - M)$. Por tanto, se puede asegurar que la función $T(Q)$ es convexa en $I_{a,b}$. Finalmente, si además $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, se tiene que $T''(Q) > 0$ para todo $Q \neq b - M$ y por tanto la función $T(Q)$ es estrictamente convexa en $I_{a,b}$. ■

A la vista de los resultados obtenidos para este modelo *newsboy*, hemos podido detectar algunos errores en el trabajo de Lee y Lodree (2010), el cual, como ya se dijo, es un caso particular del aquí estudiado. Concretamente, las derivadas que se dan en el Apéndice A del citado trabajo no son correctas, porque no incluyen el último sumando de la expresión (2.35) para la derivada primera ni los dos últimos sumandos de la expresión (2.38) para la derivada segunda. Como consecuencia de ello, el Teorema 1 del citado trabajo sobre la convexidad de la función $T(Q)$ no es cierto y todos los resultados posteriores que se derivan de él tampoco tienen por qué serlo.

A continuación, en las siguientes subsecciones estudiamos tres casos especiales de la función $\beta(y)$ para los que se pueden obtener nuevos resultados interesantes.

2.7.2. El caso de la función $\beta(y)$ lineal

A continuación se analiza un caso particular del problema del *newsboy* con pedido de emergencia y umbral de pérdida de ventas presentado al inicio de esta sección. Concretamente, supondremos que la tasa de cambio en la fracción de demanda que se satisface con el pedido de emergencia es constante cuando la escasez está por debajo del umbral de pérdida de ventas M y, además, $M < b - a$. Con esta hipótesis, si β_o es la intensidad de emergencia, la función $\beta(y)$ está definida por

$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_o(1 - y/M) & \text{si } 0 \leq y \leq M \\ 0 & \text{si } y > M \end{cases}, \text{ con } 0 < M < b - a. \quad (2.42)$$

Esta función es una extensión de la función lineal considerada en Lee y Lodree (2010), puesto que, si $\beta_o = 1$, obtenemos el caso considerado por los citados autores en la Proposición 1 de dicho trabajo.

Como $\beta(M-) = 0$, utilizando el Corolario 2.25, se puede asegurar que la función $T(Q)$ es de clase C^1 . Además, por ser $\beta'(y) = -\beta_o/M$ para todo $y \in (0, M)$, las expresiones (2.35) y (2.36) para la derivada $T'(Q)$ pueden escribirse de forma conjunta como

$$T'(Q) = (h + p)F(Q) - p - \beta_o(\omega - p) \int_Q^{\min\{b, Q+M\}} \left[1 - 2\frac{x-Q}{M}\right] f(x)dx \quad (2.43)$$

Del mismo modo, por ser $\beta''(y) = 0$ para todo $y \in (0, M)$, las expresiones (2.38) y (2.39) para $T''(Q)$ en los puntos $Q \neq b - M$ son, respectivamente,

$$\begin{aligned} T''(Q) &= [h + p + \beta_o(\omega - p)] f(Q) - \frac{2\beta_o(\omega - p)}{M} [F(Q + M) - F(Q)] \\ &\quad + \beta_o(\omega - p) f(Q + M) \end{aligned} \quad (2.44)$$

y

$$T''(Q) = [h + p + \beta_o(\omega - p)] f(Q) - \frac{2\beta_o(\omega - p)}{M} [1 - F(Q)] \quad (2.45)$$

Teniendo en cuenta que el último sumando de la expresión (2.44) es siempre menor o igual que cero, se sigue que el Teorema 4 de Lee y Lodree (2010) no es cierto. Además, estas expresiones permiten encontrar condiciones suficientes para que la función $T(Q)$ sea convexa, tal y como se establece en el siguiente resultado.

Teorema 2.32 *Supongamos que la función $\beta(y)$ está definida por (2.42) con $M < b - a$. Si se verifica la condición*

$$2[F(Q + M) - F(Q)] - Mf(Q + M) \geq 0 \text{ para todo } Q \in (a, b - M) \quad (2.46)$$

entonces la función $T(Q)$ es convexa en $I_{a,b}$. Además, si se cumple la condición adicional $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $T(Q)$ es una función estrictamente convexa en $I_{a,b}$.

Demostración. Si $Q \in (a, b - M)$, $T''(Q)$ viene dada por la expresión (2.44) y por tanto, si se verifica (2.46), se puede asegurar que $T''(Q) \geq 0$ para todo $Q \in (a, b - M)$. Por otro lado, de (2.45) se sigue que $T''(Q) \geq 0$ para todo $Q \in (b - M, b)$. Además, como la función $T(Q)$ es de clase C^1 , se sigue que $T(Q)$ es una función convexa en $I_{a,b}$. Por último, si además $f(Q) > 0$ para todo $Q \in (a, b)$, se tiene que $T''(Q) > 0$ para todo $Q \neq b - M$ y, por tanto, $T(Q)$ es estrictamente convexa en $I_{a,b}$. ■

Un caso concreto en el cual puede aplicarse el teorema anterior para garantizar la convexidad de la función $T(Q)$ se tiene cuando la función de densidad de la demanda $f(x)$ es no creciente, como ocurre, por ejemplo, con las distribuciones uniforme, exponencial, gamma con parámetro de forma menor que 1 o Weibull con parámetro de forma menor que 1. En efecto, en estos casos, aplicando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, se puede asegurar que existe $\xi \in (0, M)$ tal que $F(Q + M) - F(Q) = Mf(Q + \xi)$. Además, como $f(x)$ es una función no creciente, se tiene que $f(Q + \xi) \geq f(Q + M)$. Por consiguiente, $2[F(Q + M) - F(Q)] - Mf(Q + M) \geq Mf(Q + \xi) - Mf(Q + M) \geq 0$ y la condición (2.46) del teorema anterior es cierta.

Otro ejemplo en el cual podemos aplicar el teorema anterior se tiene cuando la función de densidad de la demanda $f(x)$ es cóncava, como ocurre por ejemplo con

las distribuciones triangular, trapezoidal, beta con parámetros $m = 1$ y $1 < n < 2$, o beta con parámetros $n = 1$ y $1 < m < 2$. En efecto, en estos casos, aplicando la desigualdad de Hermite-Hadamard (por ejemplo, ver Niculescu y Persson 2006, página 50) se puede asegurar que $F(Q + M) - F(Q) \geq \frac{1}{2}Mf(Q + M)$ y por tanto la condición (2.46) del teorema anterior es cierta.

No obstante, la expresión (2.44) permite encontrar también condiciones suficientes para la concavidad local de la función $T(Q)$ en un entorno a la derecha del punto $Q = a$, tal y como se establece en el siguiente resultado.

Teorema 2.33 *Supongamos que la función $\beta(y)$ está dada por (2.42) con $M < b - a$. Si se verifica la condición $[h + p + \beta_o(\omega - p)]f(a) - \frac{\beta_o(\omega - p)}{M}\{2F(a + M) - Mf(a + M)\} < 0$, entonces $T(Q)$ es una función estrictamente cóncava en un entorno a la derecha del punto $Q = a$.*

Demostración. Si Q está en un entorno a la derecha del punto a , entonces $T''(Q)$ está definida por la expresión (2.44) y, además, es continua por serlo las funciones $f(x)$ y $F(x)$. Por tanto, utilizando la condición dada, se verifica que

$$\lim_{Q \downarrow a} T''(Q) = [h + p + \beta_o(\omega - p)]f(a) - \frac{\beta_o(\omega - p)}{M} [2F(a + M) - Mf(a + M)] < 0$$

y se puede asegurar que la función $T(Q)$ es estrictamente cóncava en un entorno a la derecha del punto a . ■

El siguiente corolario es el caso particular del teorema anterior para funciones de densidad con $f(a) = 0$.

Corolario 2.34 *Supongamos que la función de densidad verifica que $f(a) = 0$ y la función $\beta(y)$ está dada por (2.42) con $M < b - a$. Si se verifica que $2F(a + M) < Mf(a + M)$, entonces $T(Q)$ es una función estrictamente cóncava en un entorno a la derecha del punto $Q = a$.*

Demostración. Basta aplicar el teorema anterior con $f(a) = 0$. ■

Como consecuencia del corolario anterior, para cualquier función de densidad con $f(a) = 0$ que sea estrictamente convexa en el intervalo $(a, a + M)$ con $M < b - a$,

se puede asegurar que la función $T(Q)$ es estrictamente cóncava en un entorno a la derecha del punto $Q = a$. En efecto, aplicando de nuevo la desigualdad de Hermite-Hadamard, se tiene que

$$\frac{1}{M}F(a+M) = \frac{1}{M}[F(a+M) - F(a)] < \frac{f(a+M) + f(a)}{2} = \frac{f(a+M)}{2}$$

y por tanto $2F(a+M) < Mf(a+M)$.

Por ejemplo, supongamos que $f(x) = 3x^2/8M^3$ si $x \in [0, 2M]$ y $f(x) = 0$ si $x > 2M$. Entonces, si $\beta(y)$ está dada por (2.42), usando las expresiones (2.45) y (2.44) se tiene, respectivamente, $T''(Q) = \frac{3(h+p)Q^2 - \beta_o(p-\omega)M^2}{8M^3}$ si $Q \in (0, M)$ y $T''(Q) = \frac{[h+p+\beta_o(\omega-p)]3Q^2}{8M^3} + \frac{2\beta_o(p-\omega)}{M}[1 - \frac{Q^3}{8M^3}] > 0$ si $Q \in (M, 2M)$. Como consecuencia de ello es fácil comprobar que $T(Q)$ es estrictamente cóncava para $Q \in (0, Q_o)$ y estrictamente convexa para $Q \in (Q_o, 2M)$, siendo $Q_o = M\sqrt{\frac{\beta_o(p-\omega)}{3(h+p)}} \in (0, M)$.

Antes de finalizar esta subsección, vamos a estudiar la función lineal $\beta(y)$ cuando $M \geq b - a$. Para ser consistentes con la idea de que sólo necesitamos conocer la función $\beta(y)$ cuando $y \in (0, b - a)$, como hemos dicho al inicio de esta sección, ahora podemos redefinir la ecuación (2.42) en la forma

$$\beta(y) = \beta_o(1 - y/M) \text{ si } 0 \leq y \leq b - a \quad (2.47)$$

sin explicitar el valor de $\beta(y)$ para $y > b - a$.

Teniendo ahora en cuenta las ecuaciones (2.33) y (2.34), se sigue

$$T'(Q) = (h+p)F(Q) - p - \beta_o(\omega-p) \int_Q^b \left[1 - 2\frac{x-Q}{M}\right] f(x)dx$$

y

$$T''(Q) = [h+p+\beta_o(\omega-p)]f(Q) - \frac{2\beta_o(\omega-p)}{M}[1 - F(Q)]$$

Por tanto, $T''(Q) \geq 0$ y se puede asegurar que la función $T(Q)$ es convexa en $I_{a,b}$. Además, es estrictamente convexa si se cumple la condición adicional $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.

A la vista de este último resultado y del Teorema 2.32, se puede afirmar que el Teorema 4 de Lee y Lodree (2010) sólo es cierto cuando $b < \infty$ y $M \geq b - a$, pero no lo es necesariamente en el resto de los casos con $M < \infty$.

Un caso práctico

Para ilustrar los resultados anteriores, a continuación resolveremos un supuesto práctico de este modelo utilizando la función lineal $\beta(y)$ dada por (2.42) y una distribución de probabilidad de tipo beta para la demanda. Esta distribución puede ser muy adecuada para modelar la demanda por su gran diversidad de formas y diferentes casos de asimetría, tanto a la izquierda como a la derecha, dependiendo de los parámetros utilizados. Además el hecho de que tenga un soporte finito y sólo con valores positivos le confiere un interés especial.

Supongamos que los costes unitarios de adquisición para el distribuidor son $c = 50$ en el lote inicial y $c_B = 75$ en el pedido de emergencia. Se considera que el precio unitario de venta del producto es $v = 90$, los productos sobrantes al final de la temporada tienen un coste unitario $c_H = 5$ y el coste unitario por pérdida de confianza del cliente por los productos no suministrados se estima en $c_G = 20$.

Para poder analizar los cambios en la solución con respecto a los parámetros β_o y M , suponemos que la función $\beta(y)$ está dada por (2.42) o (2.47) con distintos valores $\beta_o \in [0, 1]$ y $M > 0$. Finalmente, se considera que la demanda durante la temporada está modelada por una distribución de probabilidad beta en el intervalo $[a, b] = [200, 900]$ con parámetros de forma $m = 1.5$ y $n = 2$. Es decir, que la función de densidad para la demanda está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-200)^{0.5}(900-x)}{\beta(1.5, 2)700^{2.5}} & \text{si } 200 \leq x \leq 900 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $\beta(1.5, 2) = \int_0^1 x^{0.5}(1-x)dx = \frac{4}{15}$. Con estos datos iniciales se tiene, por tanto, que el valor esperado para la demanda es $\mu = a + \frac{m(b-a)}{m+n} = 500$ y los parámetros auxiliares para el problema son $h = c_H + c = 55$, $p = c_G + v - c = 60$ y $\omega = c_B - c = 25$.

Por ser $\beta(M-) = f(b) = 0$, aplicando el Corolario 2.28, se puede asegurar que la función $T(Q)$ es de clase C^2 en el intervalo $[200, 900]$. Además, $f(x)$ es estrictamente positiva en el intervalo $(200, 900)$ y es fácil comprobar que es cóncava en dicho intervalo. Entonces, aplicando el Teorema 2.32 para el caso $M < b - a$ y, si $M \geq b - a$,

el resultado comentado antes de iniciar el estudio de este caso práctico, se tiene que $T(Q)$ es una función estrictamente convexa para cualquier $\beta_o \in [0, 1]$ y cualquier $M > 0$. Por tanto, se puede afirmar que la ecuación $T'(Q) = 0$ tiene una única raíz $Q^* \in (200, 900)$ y que la función $T(Q)$ alcanza su mínimo global en dicho punto Q^* .

La función de distribución para este problema es $F(x) = \frac{(2050-1.5x)(x-200)^{1.5}}{700^{2.5}}$ para $x \in [200, 900]$ y $F(x) = 1$ para $x > 900$. Además, para la función $\beta(y)$ se tiene que $\beta(y) + y\beta'(y) = \frac{\beta_o}{M}(M - 2y)$ con $y \in (0, M)$. Por tanto, utilizando la expresión (2.43), se obtiene que la derivada de la función $T(Q)$ para $Q \in [200, 900]$ es

$$\begin{aligned} T'(Q) &= (h + p)F(Q) - p - \beta_o(\omega - p) \left\{ \int_Q^{\min\{900, Q+M\}} \left[1 - 2\frac{x-Q}{M} \right] f(x)dx \right\} \\ &= 115F(Q) - 60 + \frac{35\beta_o}{M} \int_Q^{\min\{900, Q+M\}} (M + 2Q - 2x) f(x)dx \\ &= 115F(Q) - 60 + \frac{35\beta_o(M + 2Q)}{M} [F(Q + M) - F(Q)] \\ &\quad - \frac{70\beta_o}{M} \int_Q^{\min\{900, Q+M\}} x f(x)dx \end{aligned}$$

Hemos resuelto la ecuación $T'(Q) = 0$ con diferentes valores de los parámetros β_o y M para obtener el tamaño óptimo del lote Q^* y, después, utilizando sucesivamente las expresiones (2.7) y (2.2), hemos evaluado el beneficio esperado máximo $B(Q^*)$. Los valores obtenidos se muestran en la Tabla 2.2:

Tabla 2.2. Valores óptimos Q^* y $B(Q^*)$ para diferentes parámetros β_o y M

β_o	0.1		0.3		0.5		0.7		0.9	
M	Q^*	$B(Q^*)$	Q^*	$B(Q^*)$	Q^*	$B(Q^*)$	Q^*	$B(Q^*)$	Q^*	$B(Q^*)$
100	500.3	12109.4	500.1	12131.4	500.0	12153.5	499.9	12175.5	499.7	12197.5
300	499.4	12177.1	497.4	12335.2	495.5	12494.2	493.6	12654.1	491.7	12814.8
500	497.2	12239.6	491.1	12528.8	484.9	12826.8	478.8	13133.6	472.7	13449.1
700	496.0	12269.2	487.2	12623.9	478.1	12996.9	468.8	13388.9	459.2	13800.7
900	495.3	12285.7	484.9	12678.3	474.0	13096.1	462.6	13541.3	450.7	14015.8

Las variaciones de los valores Q^* y $B(Q^*)$ con el parámetro β_o para un valor M fijo están representadas en la Figura 2.9 y la Figura 2.10, respectivamente. En todos

los casos se observa que Q^* decrece si el parámetro β_o crece, mientras que $B(Q^*)$ crece con el parámetro β_o . Además, las variaciones tienen un comportamiento casi lineal, con una mayor pendiente para valores más grandes del parámetro M .

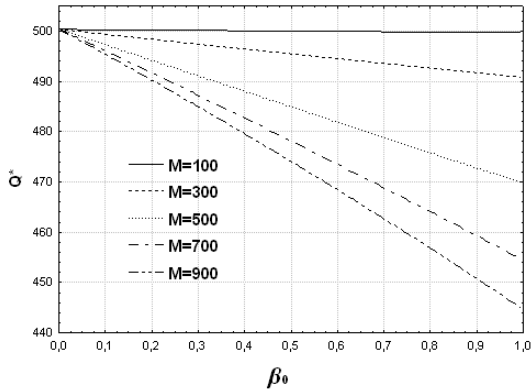


Figura 2.9. Variación de Q^* con β_o

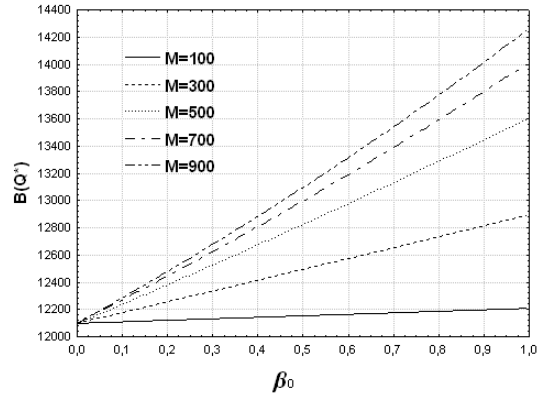


Figura 2.10. Variación de $B(Q^*)$ con β_o

De forma similar, la Figura 2.11 y la Figura 2.12 representan, respectivamente, la variación de Q^* y $B(Q^*)$ con el parámetro M para un valor β_o fijo. Del mismo modo que antes, se observa que Q^* decrece si el parámetro M crece, mientras que $B(Q^*)$ crece con el parámetro M . Sin embargo ahora las variaciones son no lineales.

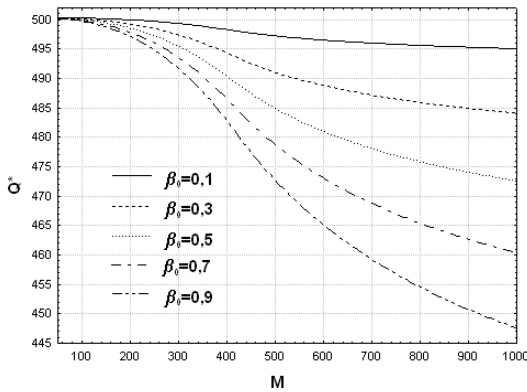


Figura 2.11 Variación de Q^* con M

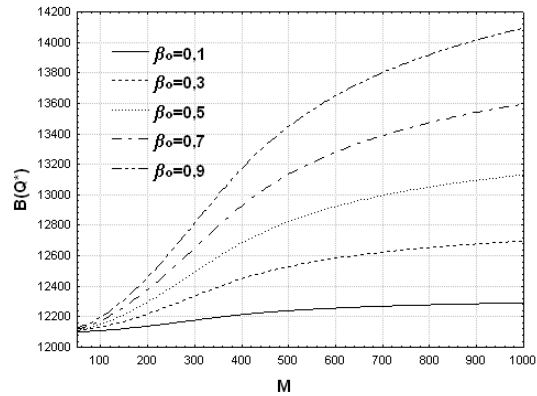


Figura 2.12. Variación de $B(Q^*)$ con M

Resulta interesante analizar qué ocurre con la solución del modelo si el parámetro M tiende hacia 0 o ∞ . Teniendo en cuenta la expresión (2.42) para $\beta(y)$, es evidente que, si M tiende hacia 0, esta función converge hacia $\beta(y) = 0$ para todo $y > 0$. Por tanto, el modelo de *newsboy* que estamos considerando se convierte en el modelo del *newsboy* básico sin pedido de emergencia. Como es conocido, la solución para este modelo se obtiene usando el fractil crítico $\frac{p}{h+p}$. Para el ejemplo numérico considerado

aquí, el fractil crítico es $\frac{p}{h+p} = \frac{60}{115}$ y, por tanto, la solución para el modelo *newsboy* básico es $Q_o^* = F^{-1}\left(\frac{60}{115}\right) = 500.3$ con $B_o(Q_o^*) = 12098.4$. Entonces, todas las funciones representadas en la Figura 2.11 y la Figura 2.12 convergen, respectivamente, hacia esos dos valores cuando M tiende hacia 0. Esto mismo puede observarse en la Figura 2.9 y en la Figura 2.10, para cualquier M , si β_o tiende hacia 0.

De forma similar, teniendo en cuenta la expresión (2.47) para $\beta(y)$, si M tiende hacia ∞ , la función $\beta(y)$ converge hacia $\beta(y) = \beta_o$ para todo $y \geq 0$, que es el modelo estudiado en Khouja (1996). La solución para este modelo se obtiene usando el fractil crítico $\frac{p+(\omega-p)\beta_o}{h+p+(\omega-p)\beta_o}$ introducido por este autor. Por ejemplo, si $\beta_o = 0.1$, el fractil crítico es $\frac{p+(\omega-p)\beta_o}{h+p+(\omega-p)\beta_o} = \frac{56.5}{111.5}$ y la solución óptima para ese modelo es $Q_K^* = F^{-1}\left(\frac{56.5}{111.5}\right) = 492.9$ con $B_K(Q_K^*) = 12344.5$. Estas dos cantidades resultan ser los valores asintóticos hacia los que convergen las funciones representadas con línea continua en la Figura 2.11 y la Figura 2.12 respectivamente.

Para analizar el comportamiento de la solución óptima con respecto a los parámetros iniciales del sistema hemos considerado el caso $\beta_o = 0.9$ y $M = 500$, para el cual se tiene que $Q^* = 472.7$ y $B(Q^*) = 13449.1$. Además, con la expresión (2.45), hemos obtenido $T''(Q^*) = 0.24 > 0$. Utilizando los lemas de la sección 2.5 se han calculado las derivadas del tamaño óptimo del lote Q^* con respecto a los parámetros de coste y se han obtenido los siguientes valores:

$$\left. \frac{dQ^*(c_H)}{dc_H} \right|_{c_H=5} = -2.0 \quad \left. \frac{dQ^*(c_B)}{dc_B} \right|_{c_B=75} = 0.8 \quad \left. \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} \right|_{c_G=20} = \left. \frac{dQ^*(v)}{dv} \right|_{v=90} = 1.5 \quad \left. \frac{dQ^*(c)}{dc} \right|_{c=50} = -4.2$$

Se observa entonces que el tamaño óptimo del lote crece con los parámetros c_B , c_G y v , mientras que decrece cuando aumentan los parámetros c_H o c . Además, en este caso la solución óptima es más sensible a cambios en el parámetro c .

Del mismo modo, utilizando también los lemas de la sección 2.5, se han evaluado las derivadas del beneficio esperado óptimo con respecto a los parámetros y se han obtenido los siguientes valores:

$$\left. \frac{dB(Q^*(c_H))}{dc_H} \right|_{c_H=5} = -55.2 \quad \left. \frac{dB(Q^*(c_B))}{dc_B} \right|_{c_B=75} = -41.1 \quad \left. \frac{dB(Q^*(c_G))}{dc_G} \right|_{c_G=20} = -41.4$$

$$\left. \frac{dB(Q^*(v))}{dv} \right|_{v=90} = 458.6 \quad \left. \frac{dB(Q^*(c))}{dc} \right|_{c=50} = -472.7$$

Como es de esperar, se observa que el beneficio esperado óptimo decrece cuando los parámetros de coste aumentan, mientras que crece con el precio de venta v . Además, en este caso concreto, se obtienen mayores crecimientos en el beneficio esperado óptimo disminuyendo el precio de coste inicial c .

Por otro lado, teniendo en cuenta la interpretación de estas derivadas, podemos decir que, con un tamaño del lote inicial $Q^* = 472.7$, el número esperado de productos sobrantes será 55.2, el tamaño esperado del pedido de emergencia será 41.1 y el número esperado de productos no suministrados será 41.4. Por tanto, como el tamaño esperado de la demanda es $\mu = 500$, se tiene que, en promedio, las ventas perdidas suponen un 8.2% de la demanda esperada y el tamaño del pedido de emergencia supone un 8.3%. El número esperado de productos adquiridos por el distribuidor será $Q^* + 41.1 = 513.8$, un 2.8% más de la demanda esperada. Además, en promedio, el número de productos suministrados por el distribuidor será $513.8 - 55.2 = 458.6$, lo cual supone el 91.7% de la demanda esperada.

Desglosando por conceptos se tiene que: el beneficio esperado del lote inicial es $(v - c)(Q^* - 55.2) = 16699.0$, mientras que el beneficio esperado del pedido de emergencia es $(v - c_B)(41.1) = 616.8$; el coste esperado de los productos sobrantes es $(c_H + c)(55.2) = 3038.7$ y el coste esperado de las ventas perdidas es $c_G(41.4) = 828.1$. Sin el pedido de emergencia, como se ha dicho anteriormente, el tamaño óptimo del lote sería $Q_o^* = 500.3$ y el número esperado de productos suministrados por el distribuidor sería 431.5, lo que supone el 86.2% de la demanda esperada. Además, el beneficio esperado máximo sería $B_o(Q_o^*) = 12098.4$. Como ahora se tiene $B(Q^*) = 13449.1$, se puede afirmar que el pedido de emergencia proporciona un incremento del 11.2% en el beneficio esperado máximo.

Para ilustrar gráficamente el problema y su solución, en la Figura 2.13 hemos representado la función del beneficio esperado $B(Q)$, junto con la función de distribución $F(Q)$ y la función fractil $\Psi(Q)$, y podemos comprobar que la solución óptima Q^* se obtiene en el punto de corte de estas dos últimas funciones. Además, hemos representado también la solución óptima del problema *newsboy* básico $Q_o^* = F^{-1}\left(\frac{p}{h+p}\right)$

y el valor $Q_K^* = F^{-1}\left(\frac{p+(\omega-p)\beta_o}{h+p+(\omega-p)\beta_o}\right)$ correspondiente al fractil crítico generalizado de Khouja que, de acuerdo con el Teorema 2.13, resulta ser una cota inferior para la solución óptima Q^* .

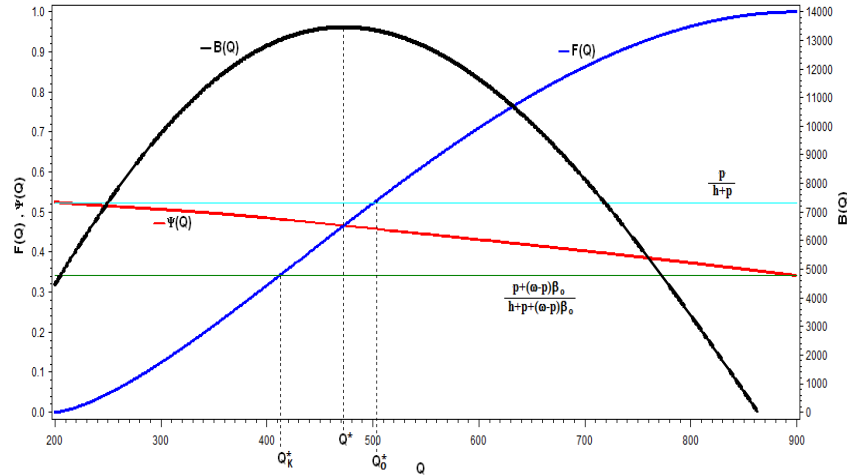


Figura 2.13. Representación gráfica con $\beta(y)$ lineal

2.7.3. El caso de la función $\beta(y)$ exponencial truncada

En esta subsección consideramos la situación en que la tasa relativa de cambio en la fracción de demanda que se satisface con el pedido de emergencia es constante (es decir, $\beta'(y) = -\alpha\beta(y)$), siempre que la escasez esté por debajo del umbral de pérdida de ventas M . Entonces, si β_o es la intensidad de emergencia, la función $\beta(y)$ viene dada por:

$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_o e^{-\alpha y} & \text{si } 0 \leq y \leq M \\ 0 & \text{si } y > M \end{cases}, \text{ con } \alpha \geq 0 \text{ y } M > 0 \quad (2.48)$$

Observar que si $\beta_o = 1$, se obtiene una de las funciones utilizadas en Lee y Lodree (2010). La Figura 2.14 muestra el comportamiento de esta función para diferentes valores del parámetro α manteniendo constante el umbral de pérdida de ventas M .

Es evidente que esta función es de clase C^2 en el intervalo $(0, M)$ y verifica las hipótesis H2M y H4M. Por otro lado, se tiene que $\beta(M-) = \beta_o e^{-\alpha M}$, $\beta'(M-) = -\alpha\beta_o e^{-\alpha M}$ y, además, $2\beta'(y) + y\beta''(y) = \alpha\beta_o e^{-\alpha y} (-2 + \alpha y)$ para todo $y \in (0, M)$.

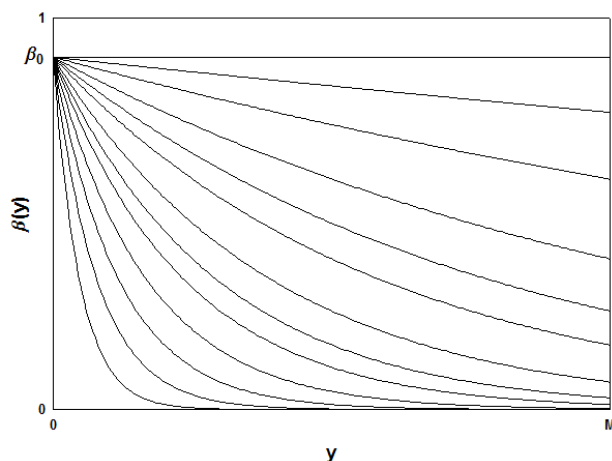


Figura 2.14. Función $\beta(y)$ exponencial con diferentes α

Al igual que en la subsección anterior, empezaremos estudiando las condiciones de convexidad para el caso $M < b - a$, que es el de mayor interés desde el punto de vista práctico. El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes.

Teorema 2.35 *Supongamos que la función de densidad $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y la función $\beta(y)$ está definida por (2.48) con $M < b - a$. Si se verifican las dos condiciones siguientes:*

(i) $\alpha M \leq 2$.

(ii) $(1 - \alpha M) f(x) - M f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a + M, b)$,

entonces la función $T(Q)$ es convexa en $I_{a,b}$. Además, si se verifica la condición adicional $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $T(Q)$ es una función estrictamente convexa en $I_{a,b}$.

Demostración. Si se verifica la condición (i) es evidente que, para todo $y \in (0, M)$, se tiene $2\beta'(y) + y\beta''(y) = \alpha\beta_0 e^{-\alpha y} (-2 + \alpha y) \leq \alpha\beta_0 e^{-\alpha y} (-2 + \alpha M) \leq 0$.

Además, si se verifica la condición (ii), para todo $x \in (a + M, b)$, se tiene

$$\begin{aligned} [\beta(M-) + M\beta'(M-)] f(x) - M\beta(M-) f'(x) &= \beta_0 e^{-\alpha M} (1 - \alpha M) f(x) - \beta_0 e^{-\alpha M} M f'(x) \\ &= \beta_0 e^{-\alpha M} [(1 - \alpha M) f(x) - M f'(x)] \geq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el Lema 2.31, podemos asegurar que la función $T(Q)$ es convexa en $I_{a,b}$ y además, si $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, dicha función es estrictamente convexa. ■

Para analizar el caso $M \geq b - a$, al igual que en la subsección anterior, podemos redefinir la ecuación (2.48) en la forma

$$\beta(y) = \beta_o e^{-\alpha y} \text{ si } 0 \leq y \leq b - a$$

sin explicitar el valor de $\beta(y)$ para $y > b - a$.

Teniendo en cuenta que ahora las derivadas de la función $T(Q)$ vienen dadas por las expresiones (2.33) y (2.34), podemos asegurar que la condición (i) del teorema anterior es suficiente para asegurar la convexidad de la función $T(Q)$, incluso cuando la función de densidad $f(x)$ sea continua pero no sea de clase C^1 en el intervalo soporte $I_{a,b}$. Por tanto, podemos afirmar que el Teorema 5 de Lee y Lodree (2010) sólo es cierto cuando $b < \infty$ y $M \geq b - a$, pero no lo es necesariamente en el resto de los casos con $M < \infty$.

Un caso práctico

Para ilustrar la aplicación de este resultado, resolveremos a continuación un supuesto práctico del modelo utilizando la función $\beta(y)$ dada por (2.48) y una distribución de probabilidad normal para la demanda. Vamos a considerar los mismos valores para los parámetros iniciales del sistema de inventario que en el supuesto práctico anterior, es decir: $c = 50$, $c_B = 75$, $v = 90$, $c_H = 5$ y $c_G = 20$. Suponemos además que la función $\beta(y)$ está dada por (2.48) con $\beta_o = 0.9$, $\alpha = 0.0018$ y $M = 500$, y que la demanda tiene una distribución normal con parámetros $\mu_o = 500$ y $\sigma_o = 150$. Para evitar la posibilidad de valores negativos para la demanda, truncaremos la distribución normal considerando el intervalo soporte $I_{a,b} = [0, \infty)$ y suponiendo por tanto que la función de densidad $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \frac{150^{-1} \phi\left(\frac{x-500}{150}\right)}{1 - \Phi(-500/150)},$$

donde $\phi(z)$ y $\Phi(z)$ son, respectivamente, la función de densidad y la función de distribución para la distribución normal estándar. Se puede deducir fácilmente que entonces el valor esperado para la demanda es $\mu = 500 + \frac{150\phi(-500/150)}{1-\Phi(-500/150)} = 500.002$ y la función de distribución está dada por

$$F(x) = \frac{\Phi\left(\frac{x-500}{150}\right) - \Phi(-500/150)}{1 - \Phi(-500/150)}$$

Teniendo en cuenta que en este caso se tiene $\alpha M = 0.9$ y $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a + M, b) = (500, \infty)$, es evidente que se verifican las condiciones necesarias para poder aplicar el Teorema 2.35 y concluir que la función $T(Q)$ es convexa en el intervalo soporte $I_{a,b} = [0, \infty)$. Por tanto, la solución se obtiene calculando la única raíz de la ecuación $T'(Q) = 0$, donde $T'(Q)$ viene dada por la expresión (2.35). En este caso, los parámetros auxiliares son $h = 70$, $\omega = 25$ y $p = 50$, y además, $\beta(M-) = 0.9e^{-0.9}$.

Por ello, la expresión para $T'(Q)$ es:

$$T'(Q) = 120F(Q) - 50 + 25 \int_Q^{Q+500} [\beta(x - Q) + (x - Q) \beta'(x - Q)] f(x) dx - 11250e^{-0.9} f(Q + 500)$$

Haciendo $y = x - Q$ en la integral anterior, y teniendo en cuenta que

$$\beta(y) + y\beta'(y) = 0.9e^{-0.0018y} (1 - 0.0018y),$$

la ecuación $T'(Q) = 0$ puede expresarse como

$$120F(Q) - 50 + 22.5 \int_0^{500} (1 - 0.0018y) e^{-0.0018y} f(Q + y) dy - 11250e^{-0.9} f(Q + 500) = 0$$

La solución de esta ecuación, y por tanto el tamaño óptimo del lote, es $Q^* = 470.8$. Además, utilizando las expresiones (2.7), (2.2) y (2.38), obtenemos, respectivamente, $T(Q^*) = 5408.10$, $B(Q^*) = 14591.96$ y $T''(Q^*) = 0.27 > 0$.

Al igual que en el supuesto práctico anterior, en la Figura 2.15 hemos ilustrado el problema y su solución.

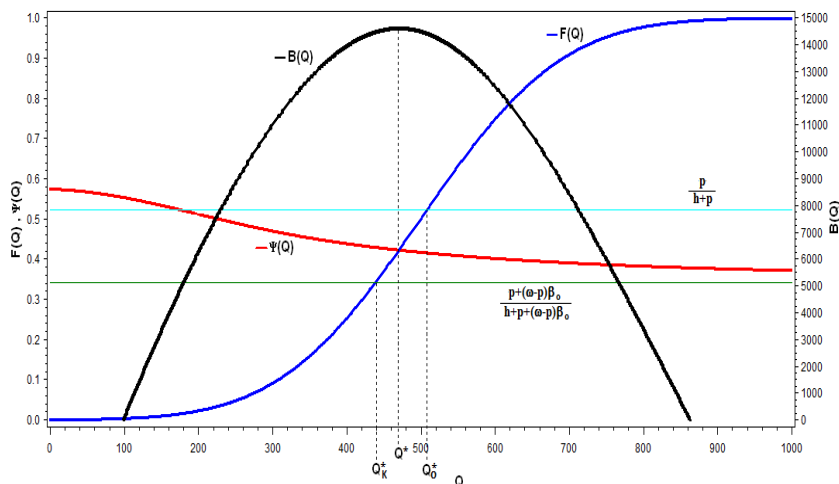


Figura 2.15. Representación gráfica con $\beta(y)$ exponencial truncada

Utilizando los lemas de la sección 2.5, las derivadas parciales del tamaño óptimo del lote Q^* con respecto a los parámetros de coste son:

$$\left. \frac{dQ^*(c_H)}{dc_H} \right|_{c_H=5} = -1.6 \quad \left. \frac{dQ^*(c_B)}{dc_B} \right|_{c_B=75} = 1.2 \quad \left. \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} \right|_{c_G=20} = \left. \frac{dQ^*(v)}{dv} \right|_{v=90} = 0.9 \quad \left. \frac{dQ^*(c)}{dc} \right|_{c=50} = -3.7$$

Por tanto, se observa que el tamaño óptimo del lote crece con los parámetros c_B , c_G y v , mientras que decrece cuando aumentan los parámetros c_H o c . Además, también en este caso, la solución óptima es más sensible a cambios en el parámetro c .

Del mismo modo, utilizando los lemas de la sección 2.5, las derivadas del beneficio esperado óptimo con respecto a los parámetros son:

$$\left. \frac{dB(Q^*(c_H))}{dc_H} \right|_{c_H=5} = -46.4 \quad \left. \frac{dB(Q^*(c_B))}{dc_B} \right|_{c_B=75} = -48.0 \quad \left. \frac{dB(Q^*(c_G))}{dc_G} \right|_{c_G=20} = -27.6$$

$$\left. \frac{dB(Q^*(v))}{dv} \right|_{v=90} = 472.4 \quad \left. \frac{dB(Q^*(c))}{dc} \right|_{c=50} = -470.8$$

Al igual que en la subsección anterior, se observa que el beneficio esperado óptimo decrece cuando los parámetros de coste aumentan, mientras que crece con el precio de venta v . En cambio, en este caso se obtienen mayores crecimientos en el beneficio esperado óptimo aumentando el precio de venta v , siendo además dicho beneficio esperado óptimo más sensible a cambios en el parámetro c_B que en el parámetro c_G , mientras que en la subsección anterior era al contrario, aunque con poca diferencia.

Además, podemos decir que con un tamaño del lote inicial $Q^* = 470.8$, el número esperado de productos sobrantes será 46.4, el tamaño esperado del pedido de emergencia será 48.0 y el número esperado de productos no suministrados será 27.6. Por tanto, como el tamaño esperado de la demanda es $\mu = 500.002$, se tiene que, en promedio, las ventas perdidas suponen un 5.5 % de la demanda esperada y el tamaño del pedido de emergencia supone un 9.6 %. El número esperado de productos adquiridos por el distribuidor será 518.8, un 3.8 % más de la demanda esperada, y el número medio de productos suministrados por el distribuidor será $518.8 - 46.4 = 472.4$, lo cual supone el 94.5 % de la demanda esperada.

En este caso, los beneficios desglosados por conceptos son: el beneficio esperado del lote inicial es $(v - c)(Q^* - 46.4) = 16976.0$; el beneficio esperado del pedido de emergencia es $(v - c_B)(48.0) = 720.0$; el coste esperado de los productos sobrantes

es $(c_H + c)(46.4) = 2552.0$ y el coste esperado de las ventas perdidas es $c_G(27.6) = 552.0$. Sin el pedido de emergencia, el tamaño óptimo del lote (y por tanto el número de productos adquiridos por el distribuidor) sería $Q_o^* = F^{-1}\left(\frac{60}{115}\right) = 508.3$ (sólo un 1.7% por encima de la demanda esperada) y puede comprobarse que el número esperado de productos suministrados por el distribuidor sería 444.2, lo que supone el 88.8% de la demanda esperada. Además, el beneficio esperado máximo sería $B_o(Q_o^*) = 13125.86$. Como ahora se tiene $B(Q^*) = 14591.96$, se puede afirmar que el pedido de emergencia proporciona un incremento del 11.2% en el beneficio esperado máximo.

2.7.4. El caso de la función $\beta(y)$ racional truncada

En esta subsección consideramos la situación en que, si la escasez está por debajo de M , la tasa de cambio en la fracción de demanda satisfecha con el pedido de emergencia es proporcional al cuadrado de dicha fracción (es decir, $\beta'(y) = -k\beta^2(y)$). Entonces, si β_o es la intensidad de emergencia, es fácil demostrar que la función $\beta(y)$ viene dada por:

$$\beta(y) = \begin{cases} \frac{\beta_o}{1 + \alpha y} & \text{si } 0 \leq y \leq M \\ 0 & \text{si } y > M \end{cases}, \text{ con } \alpha = k\beta_o \geq 0 \text{ y } M > 0 \quad (2.49)$$

En la Figura 2.16 se muestra el comportamiento de esta función para diferentes valores del parámetro α manteniendo constante el umbral de pérdida de ventas M .

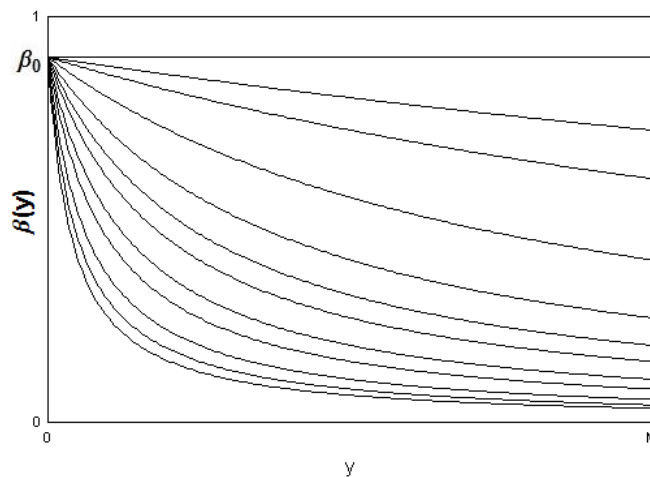


Figura 2.16. Función $\beta(y)$ racional con diferentes α

Es evidente que esta función es de clase C^2 en el intervalo $(0, M)$ y verifica las hipótesis H2M y H4M. Por otro lado, se tiene que $\beta(M-) = \frac{\beta_o}{1+\alpha M}$, $\beta'(M-) = -\frac{\alpha\beta_o}{(1+\alpha M)^2}$ y, además,

$$2\beta'(y) + y\beta''(y) = \frac{-2\alpha\beta_o}{(1+\alpha y)^2} + \frac{2\alpha^2\beta_o y}{(1+\alpha y)^3} = \frac{-2\alpha\beta_o}{(1+\alpha y)^3} \leq 0$$

para todo $y \in (0, M)$.

De nuevo empezamos estudiando las condiciones de convexidad para el caso $M < b - a$ que, como ya hemos indicado anteriormente, es el de mayor interés desde el punto de vista práctico. El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes.

Teorema 2.36 *Supongamos que la función de densidad $f(x)$ es de clase C^1 en $I_{a,b}$ y la función $\beta(y)$ está definida por (2.49) con $M < b - a$. Si se verifica la condición*

$$f(x) - M(1+\alpha M)f'(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in (a+M, b),$$

entonces la función $T(Q)$ es convexa en $I_{a,b}$. Además, si se cumple la condición adicional $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $T(Q)$ es una función estrictamente convexa en $I_{a,b}$.

Demostración. En este caso la condición (i) del Lema 2.31 es siempre cierta. Además, si se verifica la condición del enunciado, para todo $x \in (a+M, b)$, se tiene

$$\begin{aligned} [\beta(M-)+M\beta'(M-)]f(x)-M\beta(M-)f'(x) &= \frac{\beta_o(1+\alpha M)-\alpha\beta_o M}{(1+\alpha M)^2}f(x)-\frac{\beta_o M}{1+\alpha M}f'(x) \\ &= \frac{\beta_o}{(1+\alpha M)^2}[f(x)-M(1+\alpha M)f'(x)] \geq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el Lema 2.31, podemos asegurar que la función $T(Q)$ es convexa en $I_{a,b}$ y además, si $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, dicha función es estrictamente convexa. ■

Para analizar el caso $M \geq b - a$, al igual que en las subsecciones anteriores, podemos redefinir la expresión (2.49) en la forma

$$\beta(y) = \frac{\beta_o}{1+\alpha y} \text{ si } 0 \leq y \leq b-a$$

sin explicitar el valor de $\beta(y)$ para $y > b - a$.

Teniendo en cuenta que ahora las derivadas de la función $T(Q)$ vienen dadas por las expresiones (2.33) y (2.34) y que $2\beta'(y) + y\beta''(y) \leq 0$ para todo $y \in (0, b - a)$, podemos asegurar que la función $T(Q)$ es siempre convexa en $I_{a,b}$, incluso cuando la función de densidad $f(x)$ sea continua y no sea de clase C^1 en $I_{a,b}$.

Un caso práctico

Seguidamente, para ilustrar la aplicación de este resultado, resolveremos un supuesto práctico del modelo utilizando la función $\beta(y)$ dada por (2.49) y una distribución de probabilidad tipo Weibull para la demanda. Al igual que en los supuestos anteriores, consideramos los mismos valores para los parámetros iniciales del sistema de inventario, es decir: $c = 50$, $c_B = 75$, $v = 90$, $c_H = 5$ y $c_G = 20$. Suponemos además que la función $\beta(y)$ está dada por (2.49) con $\beta_o = 0.9$, $\alpha = 0.016$ y $M = 500$, y que la demanda tiene una distribución de Weibull con parámetro de escala $\lambda = 560$ y parámetro de forma $k = 3$.

Para esta distribución de probabilidad las funciones de densidad y de distribución vienen dadas, respectivamente, por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Además, el valor esperado es $\mu = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) = 500.1$ y la moda es $Mo = \lambda \left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = 489.2$, por lo que podemos asegurar que $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (500, \infty)$. Es evidente entonces que $f(x) - M(1 + \alpha M)f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (500, \infty)$, y por tanto se verifican las condiciones dadas en el Teorema 2.36 para poder asegurar que la función $T(Q)$ es convexa en el intervalo soporte $I_{a,b} = [0, \infty)$. Por consiguiente, la solución del problema puede obtenerse calculando la única raíz de la ecuación $T'(Q) = 0$, donde $T'(Q)$ viene dada por la expresión (2.35). En este caso, los parámetros auxiliares son $h = 70$, $\omega = 25$ y $p = 50$, y además, $\beta(M-) = 0.1$. Por ello, la expresión para $T'(Q)$ es:

$$T'(Q) = 120F(Q) - 50 + 25 \int_Q^{Q+500} [\beta(x-Q) + (x-Q)\beta'(x-Q)] f(x) dx - 1250f(Q+500)$$

Al igual que en el caso anterior, haciendo $y = x - Q$ en la integral y teniendo en cuenta que

$$\beta(y) + y\beta'(y) = \frac{\beta_o}{(1 + \alpha y)^2} = \frac{0.9}{(1 + 0.016y)^2}$$

la ecuación $T'(Q) = 0$ puede expresarse como

$$120F(Q) - 50 + 22.5 \int_0^{500} \frac{f(Q + y)}{(1 + 0.016y)^2} dy - 1250f(Q + 500) = 0$$

La solución de esta ecuación, y por tanto el tamaño óptimo del lote, es $Q^* = 493.1$. Además, utilizando las expresiones (2.7), (2.2) y (2.38), respectivamente, obtenemos que $T(Q^*) = 7870.46$, $B(Q^*) = 12132.28$ y $T''(Q^*) = 0.24 > 0$.

Al igual que en los supuestos prácticos anteriores, en la Figura 2.17 hemos ilustrado el problema y su solución.

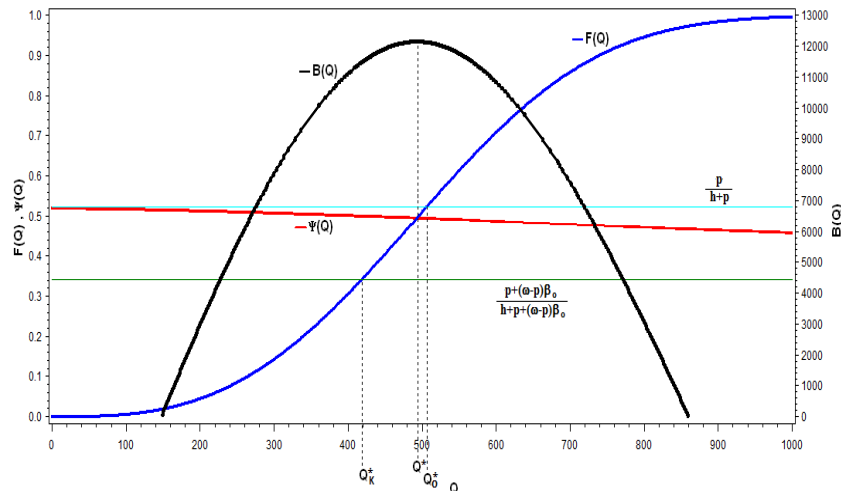


Figura 2.17. Representación gráfica con $\beta(y)$ racional truncada

Utilizando los lemas de la sección 2.5, las derivadas del tamaño óptimo del lote Q^* con respecto a los parámetros de coste son:

$$\left. \frac{dQ^*(c_H)}{dc_H} \right|_{c_H=5} = -2.1 \quad \left. \frac{dQ^*(c_B)}{dc_B} \right|_{c_B=75} = 0.4 \quad \left. \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} \right|_{c_G=20} = \left. \frac{dQ^*(v)}{dv} \right|_{v=90} = 1.8 \quad \left. \frac{dQ^*(c)}{dc} \right|_{c=50} = -4.2$$

Por tanto, se observa que, también en este caso, el tamaño óptimo del lote crece con los parámetros c_B , c_G y v , mientras que decrece cuando aumentan los parámetros c_H o c . Además, la solución óptima es más sensible a cambios en el parámetro c .

Del mismo modo, utilizando los lemas de la sección 2.5, las derivadas del beneficio esperado óptimo con respecto a los parámetros son:

$$\left. \frac{dB(Q^*(c_H))}{dc_H} \right|_{c_H=5} = -70.1 \quad \left. \frac{dB(Q^*(c_B))}{dc_B} \right|_{c_B=75} = -17.2 \quad \left. \frac{dB(Q^*(c_G))}{dc_G} \right|_{c_G=20} = -59.8$$

$$\left. \frac{dB(Q^*(v))}{dv} \right|_{v=90} = 440.3 \quad \left. \frac{dB(Q^*(c))}{dc} \right|_{c=50} = -493.1$$

Al igual que en los dos supuestos anteriores, se observa que el beneficio esperado óptimo decrece cuando los parámetros de coste aumentan, mientras que crece con el precio de venta v . En este caso se obtienen mayores crecimientos en el beneficio esperado óptimo disminuyendo el coste inicial del producto c , siendo además dicho beneficio esperado óptimo más sensible a cambios en el parámetro c_H que en los parámetros c_B o c_G .

Además, podemos decir que con un tamaño del lote inicial $Q^* = 493.1$, el número esperado de productos sobrantes será 70.1, el tamaño esperado del pedido de emergencia será 17.2 y el número esperado de productos no suministrados será 59.8. Por tanto, como el tamaño esperado de la demanda es $\mu = 500.1$, se tiene que, en promedio, las ventas perdidas suponen un 12.0% de la demanda esperada y el tamaño del pedido de emergencia supone un 3.4%. El número esperado de productos adquiridos por el distribuidor será 510.4, un 2.1% más de la demanda esperada, y el número medio de productos suministrados por el distribuidor será 440.3, lo cual supone el 88.0% de la demanda esperada.

En este caso, los beneficios desglosados por conceptos son: el beneficio esperado del lote inicial es $(v - c)(Q^* - 70.1) = 16922.6$; el beneficio esperado del pedido de emergencia es $(v - c_B)(17.2) = 258.6$; el coste esperado de los productos sobrantes es $(c_H + c)(70.1) = 3853.7$ y el coste esperado de las ventas perdidas es $c_G(59.8) = 1195.2$. Sin el pedido de emergencia, el tamaño óptimo del lote (y por tanto el número de productos adquiridos por el distribuidor) sería $Q_o^* = F^{-1}\left(\frac{60}{115}\right) = 506.0$ (sólo un 1.1% por encima de la demanda esperada) y puede comprobarse que el número esperado de productos suministrados por el distribuidor sería 429.4, lo que supone el 85.9% de la demanda esperada. Además, el beneficio esperado máximo sería $B_o(Q_o^*) = 11548.64$. Como ahora se tiene $B(Q^*) = 12132.28$, se puede afirmar que el pedido de emergencia proporciona un incremento del 5.1% en el beneficio esperado máximo.

Todos los cálculos expuestos en esta sección han sido desarrollados utilizando un programa de software escrito en lenguaje SAS (SAS Institute Inc., 2005) que se incluye en la sección A.4 del Apéndice A, al final de este documento.

Además, gran parte de los resultados incluidos en esta sección han sido publicados recientemente en la revista *Top* (Pando et al., 2013^c).

En este capítulo, hasta ahora se ha estudiado el modelo descrito en la sección 2.2. Es claro que dos de los aspectos que más influyen en la dificultad de su resolución son la función $\beta(y)$, que expresa la fracción variable de la demanda que se sirve con retraso cuando hay faltantes, y la función de densidad $f(x)$ asociada a la variable aleatoria continua y no negativa X , que expresa la demanda durante la temporada.

Como puede observarse, en las secciones antes aludidas se ha puesto un mayor énfasis en estudiar la resolución del modelo para diversas hipótesis acerca de la función $\beta(y)$, dejando a la función $f(x)$ en un plano relativamente secundario, ya que sólo hemos exigido de la misma que, o bien sea continua en el intervalo soporte $I_{a,b}$, o bien sea de clase C^1 en dicho intervalo.

En las dos secciones que siguen nos situaremos en una perspectiva diferente. En principio, supondremos que $\beta(y)$ es simplemente una función no creciente y con valores en el intervalo $[0, 1]$, pero precisaremos la función de densidad $f(x)$. Más concretamente, en primer lugar supondremos que $f(x)$ es la función de densidad de una distribución uniforme y, en segundo lugar supondremos que lo es de una distribución exponencial.

2.8. Modelo con demanda uniforme

El propósito de esta sección es abordar la resolución del problema del *newsboy* planteado en este capítulo, para el caso en que la distribución de probabilidad de la demanda sea uniforme en un cierto intervalo $[a, b]$. Como es bien conocido, esta distribución de probabilidad suele utilizarse para expresar los resultados de una demanda cuyos valores son desconocidos, excepto por el hecho de que tales valores se

encuentran entre un valor mínimo a y un valor máximo b . Cuando no se dispone de datos históricos previos para una estimación preliminar de la distribución de probabilidad de la demanda, el uso de la distribución uniforme puede resultar útil porque sólo se necesita una estimación para los valores mínimo y máximo, y no es necesario estimar otros parámetros como la desviación típica, el coeficiente de variación o los coeficientes de asimetría o kurtosis. Esta situación suele presentarse en el entorno de inventarios cuando se maneja un nuevo producto que va a ser introducido en el mercado y se desconoce la posible demanda que va a tener entre los potenciales clientes. El distribuidor podría empezar entonces utilizando el tamaño del lote adecuado para el caso en que la distribución sea uniforme y, posteriormente, cuando disponga de datos históricos de ventas, podrá ajustar otro tipo de distribución y plantear el nuevo modelo con ella. En esta línea, Wanke (2008) observó resultados satisfactorios en un análisis de robustez sobre la hipótesis de la distribución uniforme utilizada en el entorno de modelos estocásticos de inventario.

Se supone que la demanda tiene una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$, con $a < b$. Por tanto, la función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.50)$$

Utilizando esta función de densidad, la expresión general (2.7) para la función $T(Q)$ puede escribirse como

$$T(Q) = \frac{1}{b-a} \left\{ h \int_a^Q (Q-x) dx + \int_Q^b (x-Q) [p + (\omega - p)\beta(x-Q)] dx \right\}$$

Resolviendo la primera integral y haciendo $y = x - Q$ en la segunda, se tiene que

$$T(Q) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{h}{2}(Q-a)^2 + \int_0^{b-Q} W(y) dy \right] \quad (2.51)$$

con $W(y) = y [p + (\omega - p)\beta(y)]$. Además, por ser $0 \leq \beta(y) \leq 1$, $\omega < p$ y $\beta(y)$ una función no creciente, se verifica que $W(y)$ es una función estrictamente positiva y estrictamente creciente en el intervalo $(0, b - a)$. Como consecuencia de ello, podemos asegurar que la función $T(Q)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ (ver, por ejemplo, Apostol 1974, pp. 161-162).

El siguiente lema demuestra la convexidad de la función $T(Q)$ para este modelo.

Lema 2.37 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.50). Entonces, la función $T(Q)$ dada por (2.51) es estrictamente convexa en el intervalo $[a, b]$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $\frac{h}{2}(Q-a)^2$ es estrictamente convexa en $[a, b]$, sólo es necesario probar que la función

$$u(Q) = \int_0^{b-Q} W(y)dy \quad (2.52)$$

es convexa. Sean entonces $Q_1, Q_2 \in [a, b]$ con $Q_1 < Q_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Si definimos $\xi = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ es necesario demostrar que $u(\xi) \leq \lambda_1 u(Q_1) + \lambda_2 u(Q_2)$. Ahora bien, usando (2.52) y teniendo en cuenta que la función $W(y)$ es estrictamente creciente, se verifica que

$$\begin{aligned} \lambda_1 u(Q_1) + \lambda_2 u(Q_2) - u(\xi) &= \lambda_1 [u(Q_1) - u(\xi)] + \lambda_2 [u(Q_2) - u(\xi)] \\ &= \lambda_1 \int_{b-\xi}^{b-Q_1} W(y)dy - \lambda_2 \int_{b-Q_2}^{b-\xi} W(y)dy \\ &> \lambda_1 \int_{b-\xi}^{b-Q_1} W(b-\xi)dy - \lambda_2 \int_{b-Q_2}^{b-\xi} W(b-\xi)dy \\ &= W(b-\xi) [\lambda_1(\xi - Q_1) - \lambda_2(Q_2 - \xi)] = 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $u(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) < \lambda_1 u(Q_1) + \lambda_2 u(Q_2)$ y la función $u(Q)$ es estrictamente convexa en el intervalo $[a, b]$. ■

Como consecuencia del lema anterior y de la continuidad de $T(Q)$, se sigue que esta función alcanza su mínimo global en un único punto del intervalo $[a, b]$. Además, podemos mejorar este resultado debido a que la función $T(Q)$ también tiene las siguientes propiedades:

(i) Existen las derivadas laterales $T'_+(Q)$ y $T'_-(Q)$ y son estrictamente crecientes en los intervalos $[a, b)$ y $(a, b]$, respectivamente.

(ii) Para todo $Q \in (a, b)$ se tiene $T'_-(Q) \leq T'_+(Q)$.

(iii) $T'_+(a) < 0$ y $T'_-(b) > 0$.

En efecto, las propiedades (i) y (ii) se derivan de la convexidad de la función $T(Q)$ (véase Roberts y Varberg 1973, pp 5-6). Por otro lado, la propiedad (iii) se deduce del Teorema la Fundamental del Cálculo Integral para derivadas laterales aplicado a la función $T(Q)$ ya que

$$T'_+(a) = -\frac{W((b-a)-)}{b-a} = -[p + (\omega - p)\beta((b-a)-)] < 0$$

y

$$T'_-(b) = h - \frac{W(0+)}{b-a} = h > 0.$$

Estas propiedades permiten enunciar el siguiente resultado para la función $T(Q)$.

Corolario 2.38 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.50). Entonces, la función $T(Q)$ dada por (2.51) alcanza su mínimo global en un único punto $Q^* \in (a, b)$ verificando $T'_-(Q^*) \leq 0 \leq T'_+(Q^*)$. Además, si existe un punto $Q^* \in (a, b)$ con $T'(Q^*) = 0$, entonces $T(Q)$ alcanza su mínimo global en dicho punto.*

A continuación, antes de dar un procedimiento operativo para el cálculo de Q^* , se exponen algunos resultados previos.

Para $Q \in [a, b]$ la expresión (2.8) puede reescribirse como $T(Q) = L(Q) + (\omega - p)A(Q)$, siendo en este caso

$$L(Q) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{h}{2}(Q-a)^2 + \frac{p}{2}(b-Q)^2 \right]$$

y

$$A(Q) = \frac{1}{b-a} \int_0^{b-Q} y\beta(y)dy$$

Como es bien conocido, $L(Q)$ representa el coste esperado para el problema *newsboy* básico sin pedido de emergencia y es una función estrictamente convexa que alcanza su mínimo global en el punto $Q_o^* = F^{-1}\left(\frac{p}{p+h}\right) = \frac{ah+bp}{h+p} \in (a, b)$.

Por otro lado, es evidente que $A(Q)$ es una función no creciente porque el integrando es positivo y el intervalo de integración se acorta si Q crece. Más concretamente, suponiendo que $M = \sup\{y \in (0, \infty) : \beta(y) > 0\}$, se verifica que: (i) si $M \geq b-a$, entonces $A(Q)$ es una función estrictamente decreciente en el intervalo $[a, b]$ y, (ii) en otro caso, si $M < b-a$, entonces $A(Q)$ es una función constante en el intervalo $[a, b-M]$, con $A(Q) = \frac{1}{b-a} \int_0^M y\beta(y)dy$, y estrictamente decreciente en el intervalo $[b-M, b]$. Resumiendo, si definimos $a_o = \max\{a, b-M\}$, entonces $A(Q)$ es una función constante en $[a, a_o]$ y estrictamente decreciente en $[a_o, b]$.

Por otro lado, usando de nuevo el Teorema Fundamental del Cálculo Integral para las derivadas laterales, se puede afirmar que $A'_+(Q) = -\frac{b-Q}{b-a}\beta((b-Q)-)$ y $A'_-(Q) = -\frac{b-Q}{b-a}\beta((b-Q)+)$.

Como consecuencia de lo anterior, se verifica que:

$$T'_+(Q) = \frac{1}{b-a} [h(Q-a) - p(b-Q) + (p-\omega)(b-Q)\beta((b-Q)-)] \quad (2.53)$$

$$T'_-(Q) = \frac{1}{b-a} [h(Q-a) - p(b-Q) + (p-\omega)(b-Q)\beta((b-Q)+)] \quad (2.54)$$

Además, si la función $\beta(y)$ es continua en el punto $y = b - Q$, entonces la función $T(Q)$ es derivable en Q con

$$T'(Q) = \frac{1}{b-a} [h(Q-a) - p(b-Q) + (p-\omega)(b-Q)\beta(b-Q)] \quad (2.55)$$

El siguiente teorema proporciona el principal resultado para la búsqueda de la solución óptima del modelo.

Teorema 2.39 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.50). Sean $Q_o^* = \frac{ah+bp}{h+p}$ y $a_o = \max\{a, b - M\}$.*

(i) *Si $M \leq \frac{h(b-a)}{h+p}$, entonces $T(Q)$ alcanza su mínimo global en el punto Q_o^* .*

(ii) *Si $M > \frac{h(b-a)}{h+p}$, entonces $T(Q)$ alcanza su mínimo global en el único punto $Q^* \in [a_o, Q_o^*]$ que verifica $T'_-(Q^*) \leq 0 \leq T'_+(Q^*)$.*

Demostración.

(i) Si $M \leq \frac{h(b-a)}{h+p} = b - Q_o^*$, entonces, por ser $L'(Q_o^*) = 0$ y $\beta((b - Q_o^*)+) = 0$, se tiene que

$$T'_-(Q_o^*) = L'(Q_o^*) + \frac{p-\omega}{b-a} (b - Q_o^*) \beta((b - Q_o^*)+) = 0$$

$$T'_+(Q_o^*) = \frac{p-\omega}{b-a} (b - Q_o^*) \beta((b - Q_o^*)-) \geq 0$$

y, aplicando el Corolario 2.38, se deduce la afirmación (i).

(ii) En cambio, si $M > \frac{h(b-a)}{h+p} = b - Q_o^*$, por definición de M , se tiene que

$$T'_-(Q_o^*) = \frac{p-\omega}{b-a} (b - Q_o^*) \beta((b - Q_o^*)+) > 0$$

y se puede asegurar que $Q^* < Q_o^*$. Además, si $M \geq b - a$ entonces $a_o = a$ y $T'_+(a_o) < 0$, mientras que, si $M < b - a$, resulta $a_o = b - M$, luego $a_o < Q_o^*$, $L'(a_o) < 0$ y

$$T'_-(a_o) = L'(a_o) + \frac{p - \omega}{b - a} M \beta(M+) = L'(a_o) < 0 \quad .$$

Por tanto, en cualquier caso, se verifica que $Q^* \geq a_o$ y la afirmación (ii) queda demostrada. ■

Como consecuencia de este teorema se puede enunciar el siguiente resultado:

Corolario 2.40 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.50). Sean $Q_o^* = \frac{ah+bp}{h+p}$ y $a_o = \max\{a, b - M\}$. Si $a_o < Q_o^*$ y $\beta(y)$ es una función continua en el intervalo $(b - Q_o^*, b - a_o]$, entonces la función $T(Q)$ alcanza su mínimo global en la única solución $Q^* \in (a_o, Q_o^*)$ de la ecuación*

$$h(b - a) - (h + p)(b - Q) + (p - \omega)(b - Q)\beta(b - Q) = 0. \quad (2.56)$$

Demostración. Se deduce inmediatamente del teorema anterior teniendo en cuenta que, si $\beta(y)$ es continua en el intervalo $(b - Q_o^*, b - a_o]$, entonces $T(Q)$ es una función de clase C^1 en el intervalo $[a_o, Q_o^*)$ con

$$T'(Q) = \frac{1}{b - a} [h(Q - a) - p(b - Q) + (p - \omega)(b - Q)\beta(b - Q)]$$

y $T'_+(a_o) = T'_-(a_o) < 0$. ■

Los resultados que se dan a continuación permiten obtener la solución óptima del modelo planteado en esta sección para algunas funciones $\beta(y)$ que cubren un amplio abanico de posibilidades. Tales funciones son útiles para modelar el comportamiento del cliente ante una situación de escasez.

2.8.1. Función $\beta(y)$ potencial truncada

En este apartado se considera la siguiente situación para el pedido de emergencia: (i) cuando la escasez está por debajo del umbral de pérdida de ventas $M > 0$, entonces la fracción de demanda atendida con el pedido de emergencia decrece potencialmente con el tamaño de la escasez desde un valor inicial β_o hasta el valor 0; (ii) si la escasez es mayor que el umbral de pérdida de ventas M , entonces toda la demanda se pierde. En esta situación, la función $\beta(y)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_o \left[1 - \left(\frac{y}{M} \right)^\alpha \right] & \text{si } 0 \leq y \leq M \\ 0 & \text{si } y > M \end{cases}, \text{ con } 0 < \beta_o \leq 1, M > 0 \text{ y } \alpha > 0 \quad (2.57)$$

Observar que, si $\beta_o = \alpha = 1$, obtenemos la función lineal definida en la subsección 2.7.2 y utilizada también en Lodree (2007) y en Lee y Lodree (2010). Por otro lado, fijados β_o y M , el parámetro α puede considerarse como un parámetro potencial de paciencia del cliente ya que, cuanto más grande sea α , mayor será la proporción de escasez que el cliente está dispuesto a aceptar con el pedido de emergencia y, por tanto, podemos decir que la paciencia del cliente es mayor. Además, si $0 < \alpha < 1$, entonces $\beta(y)$ es una función convexa en el intervalo $[0, M]$, con una mayor tasa de decrecimiento cuando la escasez es pequeña y, por tanto, un comportamiento impaciente del cliente. Por el contrario, si $\alpha > 1$, entonces $\beta(y)$ es una función cóncava en el intervalo $[0, M]$, con tasas de decrecimiento más bajas cuando la escasez es pequeña y, por tanto, un comportamiento paciente del cliente. Finalmente, si $\alpha = 1$, la tasa de decrecimiento de la función $\beta(y)$ es constante en el intervalo $[0, M]$ y podemos decir que el comportamiento del cliente ante la escasez es neutral. En la Figura 2.18 se muestra el comportamiento de esta función para diferentes valores del parámetro α , confirmándose las anteriores afirmaciones.

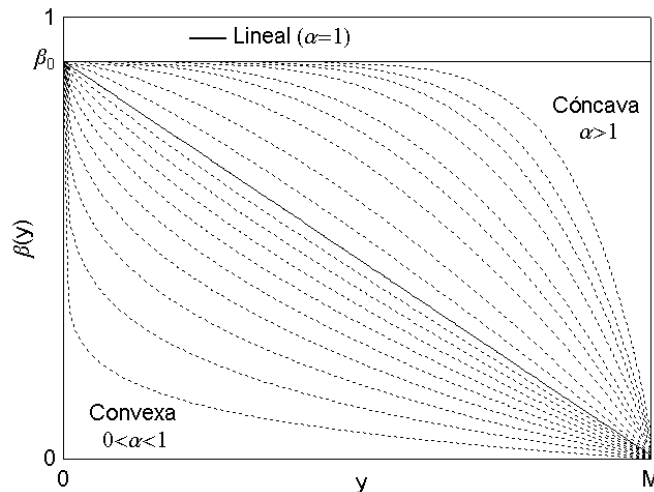


Figura 2.18. Función $\beta(y)$ potencial con diferentes α

El siguiente corolario nos permite obtener el tamaño óptimo del lote Q^* para esta función $\beta(y)$.

Corolario 2.41 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.50) y la función $\beta(y)$ está definida por (2.57). Sea $Q_o^* = \frac{ah+bp}{h+p}$.*

(i) *Si $M \leq \frac{h(b-a)}{h+p}$, el tamaño óptimo del lote es Q_o^* .*

(ii) *Si $M > \frac{h(b-a)}{h+p}$, el tamaño óptimo del lote es la única raíz positiva Q_p^* de la ecuación*

$$\frac{\beta_o(p-\omega)}{M^\alpha}(b-Q)^{1+\alpha} + [h+p+(\omega-p)\beta_o](b-Q) - h(b-a) = 0 \quad (2.58)$$

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 2.39 y del Corolario 2.40 utilizando la expresión (2.57) en la fórmula (2.55) y teniendo en cuenta que $\beta(y)$ es una función continua en el intervalo $(0, \infty)$. ■

Un caso práctico

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del resultado anterior. Supongamos que los costes unitarios de adquisición para el distribuidor son $c = 50$ en el pedido inicial y $c_B = 75$ en el pedido de emergencia. Además, el precio de venta unitario del producto es $v = 90$, el coste unitario de los productos sobrantes es $c_H = 20$ y el coste unitario de pérdida de confianza del cliente es $c_G = 10$. Se supone también que la demanda tiene una distribución uniforme con un valor mínimo $a = 75$ y un valor máximo $b = 925$. Finalmente se estima que la proporción de escasez que puede ser servida con el pedido de emergencia $\beta(y)$ viene dada por la expresión (2.57) con $\beta_o = 0.9$, $\alpha = 1.5$ y $M = 500$.

Con estos parámetros iniciales para el modelo se tiene que $h = 70$, $\omega = 25$, $p = 50$ y $\mu = 500$. Como $M > h(b-a)/(h+p) = 495.8$, usando el Corolario 2.41, se deduce que el valor óptimo para Q es la única raíz positiva de la ecuación $(22.5)(500^{-1.5})(925-Q)^{2.5} + (97.5)(925-Q) - 59500 = 0$, cuya solución es $Q_p^* = 428.3$. Finalmente, evaluando las funciones $L(Q)$ y $A(Q)$, se tiene que $T(Q_p^*) = L(Q_p^*) - 25A(Q_p^*) = 10978.03$ y $B(Q_p^*) = 20000 - T(Q_p^*) = 9021.97$.

En cambio, si consideramos el mismo ejemplo pero cambiando el valor de $M = 500$ por $M = 495$, entonces se verifica que $M \leq h(b-a)/(h+p) = 495.8$ y, utilizando de nuevo Corolario 2.41, se deduce que el tamaño óptimo del lote es $Q_o^* = 429.2$ con $T(Q_o^*) = 11005.99$ y $B(Q_o^*) = 8994.01$.

2.8.2. Función $\beta(y)$ exponencial truncada

Se considera aquí el caso en que la función $\beta(y)$ está definida por la expresión (2.48) dada en la sección anterior. Obsérvese que ahora, en el intervalo $[0, M]$, la función $\beta(y)$ es siempre convexa y podemos decir que, fijados β_o y M , para cualesquiera valores del parámetro α tenemos un comportamiento impaciente del cliente, con mayor impaciencia cuando α es más grande.

El siguiente corolario nos permite obtener el tamaño óptimo del lote Q^* para esta función $\beta(y)$.

Corolario 2.42 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.50) y la función $\beta(y)$ está definida por (2.48). Sea $Q_o^* = \frac{ah+bp}{h+p}$.*

(i) *Si $M \leq \frac{h(b-a)}{h+p}$, entonces el tamaño óptimo del lote es Q_o^* .*

(ii) *Si $\frac{h(b-a)}{h+p} < M \leq \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_o e^{-\alpha M}}$, entonces el tamaño óptimo del lote es $Q^*=b-M$.*

(iii) *Si $M > \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_o e^{-\alpha M}}$, entonces el tamaño óptimo del lote es la única raíz positiva Q_e^* de la ecuación*

$$[h + p + (\omega - p)\beta_o e^{-\alpha(b-Q)}] (b - Q) - h(b - a) = 0 \quad (2.59)$$

Demostración. El apartado (i) se deduce inmediatamente del Teorema 2.39. Si $M \geq b - a$, entonces la función $\beta(y)$ es continua en el intervalo $[0, b - a]$ y, por el Corolario 2.40, se deduce que el tamaño óptimo del lote es la única solución Q_e^* de la ecuación (2.56), que coincide con la expresión dada (2.59) (observar que si $M \geq b - a$, necesariamente se verifica que $M > \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_o e^{-\alpha M}}$).

Consideramos entonces que $h(b - a)/(h + p) < M < b - a$. Como la función $\beta(y)$ es continua excepto en el punto M , se tiene que $T'(Q)$ existe y es continua para todo $Q \in (a, b - M) \cup (b - M, b)$. Además, por ser $\beta_+(M) = 0$ y usando (2.54), se tiene que $T'_-(b - M) = \{h(b - a - M) - pM\}/(b - a) < 0$. Por tanto, aplicando el apartado (ii) del Teorema 2.39, $T(Q)$ alcanza su mínimo global en el punto $Q = b - M$ si $T'_+(b - M) \geq 0$ o en un punto $Q \in (b - M, Q_o^*)$ si $T'_+(b - M) < 0$. Teniendo en cuenta que $T'_+(b - M) = \frac{1}{b-a} \{h(b - a) - [h + p + (\omega - p)\beta_o e^{-\alpha M}] M\}$, se obtiene que $T'_+(b - M) \geq 0$ si y sólo si $\frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_o e^{-\alpha M}} \geq M$, y el apartado (ii) está demostrado. Finalmente, si $\frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_o e^{-\alpha M}} < M$, entonces $T'_+(b - M) < 0$ y, por el Corolario 2.40,

Q^* es la única solución de la ecuación $T'(Q) = 0$ dada por (2.56), que resulta ser la ecuación (2.59). ■

Un caso práctico

Se considera el mismo supuesto que en el caso anterior (es decir, $a = 75$, $b = 925$, $h = 70$, $\omega = 25$, $p = 50$) y la función exponencial truncada $\beta(y) = 0.9e^{-y/200}$ para $y \in [0, 495]$ (es decir, $\beta_o = 0.9$, $\alpha = 0.005$ y $M = 495$). Como $h(b - a)/(h + p) = 495.8 \geq M$, por el apartado (i) del corolario anterior, se tiene que el tamaño óptimo del lote es $Q^* = Q_o^* = 429.2$, con $T(Q^*) = 11646.68$ y $B(Q^*) = 8353.32$. Sin embargo, si cambiamos el valor de $M = 495$ por $M = 500$, se tiene que

$$495.8 = \frac{h(b-a)}{h+p} < M \leq \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_o e^{-\alpha M}} = 503.6$$

y, por el apartado (ii) del corolario anterior, se deduce que $Q^* = b - M = 425$, con $T(Q^*) = 11642.43$ y $B(Q^*) = 8357.57$. Finalmente, si consideramos $M = 505$, se tiene que $M \geq \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\beta_o e^{-\alpha M}} = 503.4$ y, por el apartado (iii) del corolario anterior, se puede asegurar que la solución se obtiene resolviendo la ecuación (2.59), cuya solución es $Q^* = Q_e^* = 421.6$, con $T(Q_e^*) = 11641.57$ y $B(Q_e^*) = 8358.43$.

2.8.3. Función $\beta(y)$ cosinusoidal truncada

Se considera ahora que la función $\beta(y)$ esta dada por la siguiente expresión:

$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_o \cos\left(\frac{y}{2M}\pi\right) & \text{si } 0 \leq y \leq M \\ 0 & \text{si } y > M \end{cases}, \text{ con } 0 < \beta_o \leq 1 \text{ y } M > 0 \quad (2.60)$$

Observar que, si $\beta_o = 1$, obtenemos la función utilizada en Lee y Lodree (2010). En este caso, en el intervalo $[0, M]$, la función $\beta(y)$ es siempre cóncava y podemos decir que para cualesquiera valores de los parámetros tenemos un comportamiento paciente del cliente. Dependiendo de si $M < b - a$ o $M \geq b - a$, en la Figura 2.19 se muestra el comportamiento de esta función para diferentes valores del parámetro M , confirmándose las anteriores afirmaciones.

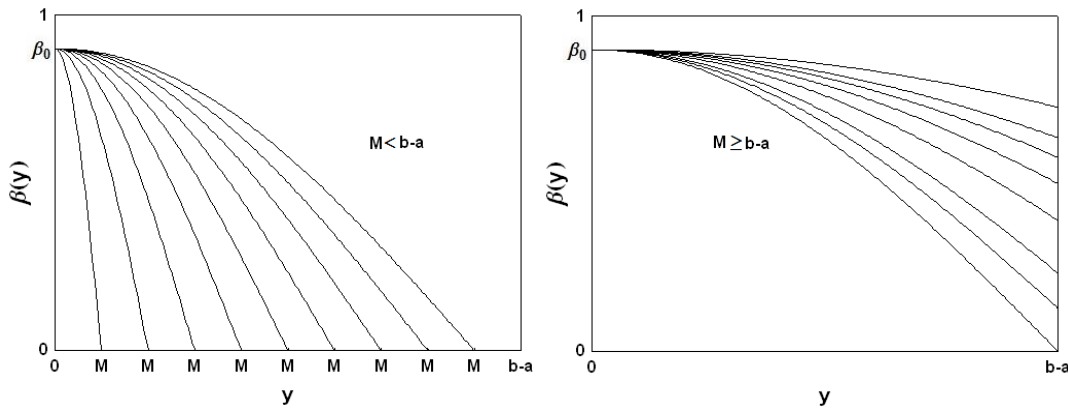


Figura 2.19. Función $\beta(y)$ cosinusoidal con $M < b - a$ y $M \geq b - a$

El siguiente corolario nos permite obtener el tamaño óptimo del lote Q^* para este caso.

Corolario 2.43 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.50) y la función $\beta(y)$ está definida por (2.60). Sea $Q_o^* = \frac{ah+bp}{h+p}$.*

(i) *Si $M \leq \frac{h(b-a)}{h+p}$, entonces el tamaño óptimo del lote es Q_o^* .*

(ii) *Si $M > \frac{h(b-a)}{h+p}$, entonces el tamaño óptimo del lote es la única raíz positiva Q_c^* de la ecuación*

$$\left[h + p + (\omega - p)\beta_o \cos \left(\frac{b - Q}{2M} \pi \right) \right] (b - Q) - h(b - a) = 0. \quad (2.61)$$

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 2.39 y del Corolario 2.40, al igual que en la demostración del Corolario 2.41. ■

Un caso práctico

Se considera el mismo supuesto que en los casos anteriores (es decir, $a = 75$, $b = 925$, $h = 70$, $\omega = 25$, $p = 50$) y la función cosinusoidal $\beta(y)$ dada (2.60) con parámetros $\beta_o = 0.9$ y $M = 495$. Como $h(b - a)/(h + p) = 495.8 \geq M$, por el apartado (i) del corolario anterior, se tiene que el tamaño óptimo del lote es $Q^* = Q_o^* = 429.2$, con $T(Q^*) = 10895.40$ and $B(Q^*) = 9104.60$. En cambio, si se sustituye el valor $M = 495$ por $M = 500$, se tiene que $M > h(b - a)/(h + p)$ y, por el apartado (ii) del corolario anterior, se deduce que el tamaño óptimo del lote se obtiene resolviendo la ecuación (2.61), cuya solución es $Q^* = Q_c^* = 428.2$ con $T(Q_c^*) = 10865.22$ y $B(Q_c^*) = 9134.78$.

2.8.4. Función $\beta(y)$ racional truncada

Se considera ahora el caso en que la función $\beta(y)$ está definida por la expresión (2.49) dada en la sección anterior. Obsérvese que ahora, en el intervalo $[0, M]$, la función $\beta(y)$ es siempre convexa y podemos decir que, fijados β_o y M , para cualesquiera valores del parámetro α , se tiene un comportamiento impaciente del cliente con mayor impaciencia cuanto más grande sea α .

El siguiente corolario permite obtener el tamaño óptimo del lote Q^* para este caso.

Corolario 2.44 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.50) y la función $\beta(y)$ está definida por (2.49). Sea $Q_o^* = \frac{ah+bp}{h+p}$.*

- (i) *Si $M \leq \frac{h(b-a)}{h+p}$, entonces el tamaño óptimo del lote es Q_o^* .*
- (ii) *Si $\frac{h(b-a)}{h+p} < M \leq \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\frac{\beta_o}{1+\alpha M}}$, entonces el tamaño óptimo del lote es $Q^*=b-M$.*
- (iii) *Si $M > \frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\frac{\beta_o}{1+\alpha M}}$, entonces el tamaño óptimo del lote es la única raíz positiva Q_r^* de la ecuación*

$$\alpha(b-Q)^2 + \left[1 - \frac{(p-\omega)\beta_o + \alpha h(b-a)}{h+p}\right] (b-Q) - \frac{h(b-a)}{h+p} = 0$$

Demostración. Como la función $\beta(y)$ es continua excepto en el punto M , se tiene que $T'(Q)$ existe y es continua para todo $Q \in (a, b-M) \cup (b-M, b)$. Además, utilizando la expresión (2.49) en la fórmula (2.55), se obtiene que:

$$\begin{aligned} T'(Q) &= \frac{1}{b-a} \left\{ h(Q-a) - p(b-Q) + \frac{(p-\omega)\beta_o(b-Q)}{1+\alpha(b-Q)} \right\} \\ &= \frac{1}{b-a} \left\{ h(b-a) - (h+p)(b-Q) + \frac{(p-\omega)\beta_o(b-Q)}{1+\alpha(b-Q)} \right\} \\ &= \frac{-(h+p) \left\{ \alpha(b-Q)^2 + \left[1 - \frac{(p-\omega)\beta_o + \alpha h(b-a)}{h+p}\right] (b-Q) - \frac{h(b-a)}{h+p} \right\}}{(b-a) [1 + \alpha(b-Q)]} \end{aligned}$$

Con esta expresión, el corolario se deduce a partir del Teorema 2.39 y el Corolario 2.40, razonando de igual forma que en la demostración del Corolario 2.42. ■

Nota. Es fácil comprobar que, en el último caso del corolario anterior, haciendo $\Lambda = 1 - \frac{(p-\omega)\beta_o + \alpha h(b-a)}{h+p}$, la solución podría expresarse en forma cerrada como:

$$Q_r^* = \begin{cases} b - \frac{h(b-a)}{h+p - (p-\omega)\beta_o} & \text{si } \alpha = 0 \\ b - \frac{-\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \frac{4\alpha h(b-a)}{h+p}}}{2\alpha} & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

Un caso práctico

Se considera el mismo supuesto que en los casos anteriores (es decir, $a = 75$, $b = 925$, $h = 70$, $\omega = 25$, $p = 50$) y la función racional truncada $\beta(y)$ dada por (2.49) con parámetros $\beta_o = 0.9$, $\alpha = 0.05$ y $M = 505$. Como $\frac{h(b-a)}{h+p+(\omega-p)\frac{\beta_o}{1+\alpha M}} = 499.4 < 505 = M$, por el apartado (iii) del corolario anterior, la solución se obtiene resolviendo la ecuación de segundo grado $0.05(925 - Q)^2 + \left[1 - \frac{2997.5}{120}\right](925 - Q) - \frac{59500}{120} = 0$, cuya solución positiva es $Q_r^* = 425.6$. Además, en este caso se obtiene $T(Q_r^*) = 12166.83$ y el beneficio esperado óptimo es $B(Q_r^*) = 7833.17$.

Todos los cálculos expuestos en esta sección han sido desarrollados utilizando un programa de software escrito en lenguaje SAS (SAS Institute Inc., 2005) que se incluye en la sección A.5 del Apéndice A, al final de este documento.

Además, la mayor parte de los resultados incluidos en esta sección forman parte de un artículo de investigación que ha sido publicado recientemente en la revista *Applied Mathematics and Computation* (Pando et al., 2014).

2.9. Modelo con demanda exponencial

El problema del *newsboy* planteado en este capítulo se resuelve en esta sección para el caso en que la distribución de probabilidad de la demanda sea exponencial. Esta distribución es una de las más utilizadas para el estudio de sistemas estocásticos de inventario y su uso ha sido justificado por muchos autores. Limitándonos al entorno del problema del *newsboy*, podemos citar algunos de los artículos más recientes: Abdel-Malek et al. (2004), Lodree (2007), Khouja y Vergara (2008), Wang y Webster (2009) y Huang et al. (2011).

Además, se pretende aquí hacer un análisis del comportamiento de la solución óptima al variar los parámetros iniciales del sistema, o los que intervienen en la función $\beta(y)$.

Se supone que la demanda tiene una distribución exponencial con valor esperado μ . Por tanto la función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} \text{ con } x \in [0, \infty) \quad (2.62)$$

y la función de distribución

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}} \text{ con } x \in [0, \infty) \quad (2.63)$$

En este caso la expresión general (2.7) para la función $T(Q)$ puede escribirse como

$$T(Q) = h(Q - \mu) + \int_Q^\infty [h + p + (\omega - p)\beta(x - Q)](x - Q) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx \quad (2.64)$$

y, haciendo $y = x - Q$, se obtiene

$$T(Q) = h(Q - \mu) + [h + p + (\omega - p)\theta] \mu e^{-\frac{Q}{\mu}} \quad (2.65)$$

siendo

$$\theta = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty y \beta(y) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} dy \quad (2.66)$$

Este valor puede interpretarse como la razón entre el tamaño esperado del pedido de emergencia si $Q = 0$ y la demanda esperada. Es importante observar que $0 \leq \theta \leq \beta_o \leq 1$, ya que $0 \leq \beta(y) \leq \beta_o$ para todo $y \geq 0$.

Usando la expresión (2.65) para la función $T(Q)$ podemos obtener el siguiente resultado, que es la base para la resolución del problema.

Lema 2.45 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62). Entonces, la función $T(Q)$ dada por (2.65) es de clase C^2 , estrictamente convexa y alcanza su mínimo global en un único punto $Q^* \in (0, \infty)$.*

Demostración. Es claro que $T(Q)$ es dos veces diferenciable y sus dos primeras derivadas son

$$T'(Q) = h - [h + p + (\omega - p)\theta] e^{-\frac{Q}{\mu}}$$

$$T''(Q) = \frac{h + p + (\omega - p)\theta}{\mu} e^{-\frac{Q}{\mu}}$$

Como $T''(Q) > 0$, resulta que $T(Q)$ es estrictamente convexa. El resto de la demostración se sigue sin más que tener en cuenta que $T'(0) = -[p + (\omega - p)\theta] < 0$ y $\lim_{Q \rightarrow \infty} T'(Q) = h > 0$. ■

Teniendo en cuenta que $B(Q) = (v - c)\mu - T(Q)$, el siguiente teorema proporciona el tamaño óptimo del lote y el beneficio esperado óptimo para este modelo de una forma cerrada.

Teorema 2.46 Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62) y sea $\theta = \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty y\beta(y)e^{-\frac{y}{\mu}} dy$. Entonces, el tamaño óptimo del lote es

$$Q^* = \mu \ln \left[1 + \frac{p + (\omega - p)\theta}{h} \right] \quad (2.67)$$

y el beneficio esperado máximo es

$$B(Q^*) = (v - c)\mu - hQ^* \quad (2.68)$$

Demostración. Por el Lema 2.45, se tiene que la función $T(Q)$ alcanza su mínimo global en la única solución $Q^* \in (0, \infty)$ de la ecuación $T'(Q) = 0$. Despejando Q en esta ecuación, se deduce (2.67). Además, sustituyendo este valor en (2.65), se tiene

$$T(Q^*) = h(Q^* - \mu) + h\mu = hQ^* \quad (2.69)$$

y, por (2.2) se sigue $B(Q^*) = (v - c)\mu - T(Q^*)$. ■

Notas.

1. Teniendo en cuenta la expresión de la función de distribución $F(x)$ dada en (2.63), de (2.67) se sigue que el tamaño óptimo del lote verifica $F(Q^*) = \frac{p + (\omega - p)\theta}{h + p + (\omega - p)\theta}$. A este mismo resultado se llega usando la teoría desarrollada en la sección 2.4. En efecto, para este modelo, usando (2.10), se tiene que

$$\begin{aligned} A(Q) &= \int_Q^\infty (x - Q)\beta(x - Q)f(x)dx = \int_0^\infty y\beta(y)f(Q + y)dy \\ &= e^{-\frac{Q}{\mu}} \int_0^\infty y\beta(y)f(y)dy = \theta\mu e^{-\frac{Q}{\mu}} \end{aligned}$$

$$\text{y} \quad \Delta(Q) = -\frac{A'(Q)}{1 - F(Q)} = \frac{\theta e^{-\frac{Q}{\mu}}}{e^{-\frac{Q}{\mu}}} = \theta$$

y, por tanto, de (2.24) se sigue

$$F(Q^*) = \frac{p + (\omega - p)\theta}{h + p + (\omega - p)\theta}$$

Además, de (2.25) resulta $\Psi(Q) = \frac{p + (\omega - p)\theta}{h + p + (\omega - p)\theta}$. Es decir, en este caso la función fractil es constante y, evidentemente, Q^* es el punto de corte entre la función de distribución y la función fractil tal y como se ha obtenido en el Teorema 2.46.

2. A partir del Teorema 2.46 y teniendo en cuenta las expresiones (2.67) y (2.68), se deduce fácilmente que el beneficio esperado máximo es positivo si y sólo si los parámetros del sistema de inventario verifican la siguiente condición

$$\theta > \frac{p - h \left[e^{\frac{v-c}{h}} - 1 \right]}{p - \omega} \quad (2.70)$$

y por tanto, en este caso diremos que el sistema es rentable. Es interesante observar que el segundo miembro de esta condición sólo depende de los parámetros monetarios del sistema, mientras que el valor θ depende de los parámetros que definen la distribución de probabilidad de la demanda y la función $\beta(y)$ para el pedido de emergencia. Por tanto la expresión (2.70) no es más que la relación que tiene que existir entre esos dos conjuntos de parámetros para que el sistema sea rentable.

Como casos particulares del teorema anterior, se pueden obtener las soluciones para el modelo *newsboy* básico y el modelo considerado en Khouja (1996) con distribución exponencial para la demanda. En efecto, si se supone que $\beta(y) = 0$ para todo $y \geq 0$, se tiene el modelo básico. Además, $\theta = 0$ y, por tanto, la solución es

$$Q^* = Q_o^* = \mu \ln \left(1 + \frac{p}{h} \right) \quad (2.71)$$

que coincide con $F^{-1} \left(\frac{p}{p+h} \right)$. Del mismo modo, si suponemos que $\beta(y) = \beta_o$ para todo $y \geq 0$, se obtiene el modelo *newsboy* considerado en Khouja (1996) y, en este caso, usando (2.66) se tiene que $\theta = \beta_o$ y la solución es

$$Q^* = Q_K^* = \mu \ln \left(1 + \frac{p + (\omega - p)\beta_o}{h} \right) \quad (2.72)$$

que coincide con $F^{-1} \left(\frac{p + (\omega - p)\beta_o}{h + p + (\omega - p)\beta_o} \right)$.

Con el propósito de comparar la solución general óptima obtenida en el Teorema 2.46 con las dadas por (2.71) y (2.72), a continuación se presenta un resultado que analiza el comportamiento de esta solución general óptima cuando la función $\beta(y)$ se cambia por otra mayor o igual que ella.

Lema 2.47 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62), y sean $\beta_1(y)$ y $\beta_2(y)$ dos funciones no crecientes con valores en el intervalo $[0, 1]$ verificando que $\beta_1(y) \leq \beta_2(y)$ para todo $y \geq 0$ y $\beta_1(y) < \beta_2(y)$ en algún subintervalo abierto de $[0, \infty)$. Sean Q_1^* , Q_2^* los respectivos tamaños óptimos del lote y $B_1(Q_1^*)$, $B_2(Q_2^*)$ los respectivos beneficios esperados máximos. Entonces se verifica:*

(i) $Q_1^* > Q_2^*$.

(ii) $B_1(Q_1^*) < B_2(Q_2^*)$.

Demostración. Si definimos

$$\theta_1 = \frac{\int_0^{\infty} y\beta_1(y)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{y}{\mu}}dy}{\mu} \quad \text{y} \quad \theta_2 = \frac{\int_0^{\infty} y\beta_2(y)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{y}{\mu}}dy}{\mu}$$

entonces $\theta_1 < \theta_2$. Por tanto, de (2.67), se sigue $Q_1^* > Q_2^*$. Finalmente, a partir de (2.68), se obtiene la afirmación (ii). ■

Con este resultado, podemos comparar la solución general dada por el Teorema 2.46 con las soluciones para los modelos *newsboy* básico y de Khouja (1996) comentados anteriormente. Para ello se incluye el siguiente corolario.

Corolario 2.48 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62). Sean Q_o^* y Q_K^* , respectivamente, los tamaños óptimos del lote para el modelo *newsboy* básico y para el modelo *newsboy* considerado en Khouja (1996) con $\beta_o > 0$. Del mismo modo, sean $B_o(Q_o^*)$ y $B_K(Q_K^*)$ los respectivos beneficios esperados máximos. Si Q^* denota el tamaño óptimo del lote para el modelo *newsboy* general con una función $\beta(y)$ no constante, se verifica que:*

- (i) $Q_K^* < Q^* < Q_o^*$.
- (ii) $B_o(Q_o^*) < B(Q^*) < B_K(Q_K^*)$.

Demostración. Para el modelo *newsboy* básico se tiene que $\beta(y) = 0$ para todo $y \geq 0$ y, para el modelo considerado en Khouja (1996), $\beta(y) = \beta_o > 0$ para todo $y \geq 0$. Entonces, por ser $\beta_o > 0$, se verifica que $0 \leq \beta(y) \leq \beta_o$ para todo $y \geq 0$ y $0 < \beta(y) < \beta_o$ para algún subintervalo no vacío de $[0, \infty)$. Por tanto, el resultado se deduce directamente del Lema 2.47. ■

2.9.1. Análisis de sensibilidad

Nos proponemos a continuación analizar la variación del tamaño óptimo del lote y el beneficio esperado máximo con respecto a los parámetros del sistema de inventario. Para ello, teniendo en cuenta que los parámetros auxiliares h , ω y p dependen de los parámetros iniciales c_H , c_B , c_G , c y v , hemos preferido utilizar estos últimos en el análisis.

Reescribiendo las expresiones (2.67) y (2.68) en función de los parámetros iniciales c_H , c_B , c_G , c y v , obtenemos que el tamaño óptimo del lote es

$$Q^* = \mu \ln \left[1 + \frac{\theta c_B + (1 - \theta)(c_G + v) - c}{c_H + c} \right] \quad (2.73)$$

y el beneficio esperado máximo es

$$B(Q^*) = (v - c)\mu - (c_H + c)Q^* \quad (2.74)$$

En primer lugar, el siguiente resultado analiza la variación del tamaño óptimo del lote con respecto a los parámetros iniciales del sistema de inventario.

Lema 2.49 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62), y sea $\theta = \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty y\beta(y)e^{-\frac{y}{\mu}} dy$. Entonces, manteniendo fijos el resto de los parámetros, el tamaño óptimo del lote Q^* verifica:*

- (a) *decrece cuando c_H crece.*
- (b) *crece con c_B si $\theta > 0$, y no depende de c_B si $\theta = 0$.*
- (c) *crece con c_G si $\theta < 1$, y no depende de c_G si $\theta = 1$.*
- (d) *decrece cuando c crece.*
- (e) *crece con v si $\theta < 1$, y no depende de v si $\theta = 1$.*
- (f) *crece cuando μ crece.*

Demostración.

- (a) Es evidente que el cociente $\frac{\theta c_B + (1 - \theta)(c_G + v) - c}{c_H + c}$ decrece si c_H crece. Por lo tanto, de la expresión (2.73), se deduce que Q^* decrece cuando c_H crece.
- (b) Si $\theta = 0$, la expresión (2.73) para Q^* no depende de c_B . En cambio, si $\theta > 0$, el cociente $\frac{\theta c_B + (1 - \theta)(c_G + v) - c}{c_H + c}$ aumenta si c_B crece y, por tanto, Q^* crece con c_B .
- (c) Si $\theta = 1$, la expresión (2.73) para Q^* no depende de c_G . En cambio, si $\theta < 1$, el cociente $\frac{\theta c_B + (1 - \theta)(c_G + v) - c}{c_H + c}$ aumenta si c_G crece y, por tanto, Q^* crece con c_G .
- (d) Es evidente que el cociente $\frac{\theta c_B + (1 - \theta)(c_G + v) - c}{c_H + c}$ disminuye si c crece, porque el denominador aumenta y el numerador disminuye. Por lo tanto, Q^* decrece cuando c crece.

- (e) Si $\theta = 1$, la expresión (2.73) para Q^* no depende de v . En cambio, si $\theta < 1$, el cociente $\frac{\theta c_B + (1-\theta)(c_G+v)-c}{c_H+c}$ aumenta si v crece y, por tanto, Q^* crece con v .
- (f) Si hacemos el cambio de variable $y = \mu z$ en la expresión del parámetro θ , se tiene que $\theta = \int_0^\infty \beta(\mu z) z e^{-z} dz$ y, por tanto, podemos asegurar que θ no aumenta cuando μ crece, porque $\beta(y)$ es una función no creciente. Entonces, teniendo en cuenta que $c_B < c_G + v$, es evidente que el cociente $\frac{\theta c_B + (1-\theta)(c_G+v)-c}{c_H+c}$ no disminuye si μ crece. En consecuencia, de la expresión (2.73), se deduce que Q^* crece cuando μ crece. ■

A continuación, con el propósito de cuantificar las magnitudes de los cambios en el tamaño óptimo del lote para pequeños cambios en los parámetros monetarios del sistema cuando se mantienen fijos el resto de los parámetros, en el siguiente lema se calculan las derivadas de Q^* con respecto a dichos parámetros. Para ello, al igual que en la sección 2.5, para cada parámetro se tratará a éste como la única variable.

Lema 2.50 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62), y sean $\theta = \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty y \beta(y) e^{-\frac{y}{\mu}} dy$ y $\xi = \frac{c+c_H}{\theta c_B + (1-\theta)(c_G+v)+c_H}$. Entonces, manteniendo fijos el resto de los parámetros, el tamaño óptimo del lote Q^* verifica:*

$$(a) \quad \frac{dQ^*(c_H)}{dc_H} = -\frac{\mu}{c_H+c}(1-\xi).$$

$$(b) \quad \frac{dQ^*(c_B)}{dc_B} = \frac{\mu}{c_H+c}\xi\theta.$$

$$(c) \quad \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} = \frac{\mu}{c_H+c}\xi(1-\theta).$$

$$(d) \quad \frac{dQ^*(c)}{dc} = -\frac{\mu}{c_H+c}.$$

$$(e) \quad \frac{dQ^*(v)}{dv} = \frac{\mu}{c_H+c}\xi(1-\theta).$$

Demostración. Derivando la expresión (2.73) con respecto a cada uno de los parámetros se tiene:

$$(a) \quad \frac{dQ^*(c_H)}{dc_H} = \left[\frac{\mu(c_H+c)}{\theta c_B + (1-\theta)(c_G+v)+c_H} \right] \left[-\frac{\theta c_B + (1-\theta)(c_G+v)-c}{(c_H+c)^2} \right] = -\left(\frac{\mu}{c_H+c} \right) \left(\frac{\theta c_B + (1-\theta)(c_G+v)-c}{\theta c_B + (1-\theta)(c_G+v)+c_H} \right) = -\frac{\mu}{c_H+c}(1-\xi).$$

$$(b) \quad \frac{dQ^*(c_B)}{dc_B} = \left[\frac{\mu(c_H+c)}{\theta c_B + (1-\theta)(c_G+v)+c_H} \right] \left(\frac{\theta}{c_H+c} \right) = \frac{\mu}{c_H+c}\xi\theta.$$

$$(c) \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} = \left[\frac{\mu(c_H+c)}{\theta c_B+(1-\theta)(c_G+v)+c_H} \right] \left(\frac{1-\theta}{c_H+c} \right) = \frac{\mu}{c_H+c} \xi(1-\theta).$$

$$(d) \frac{dQ^*(c)}{dc} = \left[\frac{\mu(c_H+c)}{\theta c_B+(1-\theta)(c_G+v)+c_H} \right] \left[-\frac{\theta c_B+(1-\theta)(c_G+v)+c_H}{(c_H+c)^2} \right] = -\frac{\mu}{c_H+c}.$$

$$(e) \frac{dQ^*(v)}{dv} = \left[\frac{\mu(c_H+c)}{\theta c_B+(1-\theta)(c_G+v)+c_H} \right] \left(\frac{1-\theta}{c_H+c} \right) = \frac{\mu}{c_H+c} \xi(1-\theta). \blacksquare$$

De manera similar, el siguiente resultado proporciona las derivadas del beneficio esperado máximo $B(Q^*)$ con respecto a los parámetros monetarios del sistema de inventario.

Lema 2.51 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62), y sean $\theta = \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty y\beta(y)e^{-\frac{y}{\mu}} dy$ y $\xi = \frac{c+c_H}{\theta c_B+(1-\theta)(c_G+v)+c_H}$. Entonces, manteniendo fijos el resto de los parámetros, el beneficio esperado máximo $B(Q^*)$ verifica:*

$$(a) \frac{dB(Q^*(c_H))}{dc_H} = \mu [1 - \xi + \ln(\xi)].$$

$$(b) \frac{dB(Q^*(c_B))}{dc_B} = -\xi\mu\theta.$$

$$(c) \frac{dB(Q^*(c_G))}{dc_G} = -\xi\mu(1-\theta).$$

$$(d) \frac{dB(Q^*(c))}{dc} = \mu \ln(\xi).$$

$$(e) \frac{dB(Q^*(v))}{dv} = \mu [1 - \xi(1-\theta)].$$

Demostración. Derivando la expresión (2.74), y teniendo en cuenta el lema anterior, se tiene:

$$(a) \frac{dB(Q^*(c_H))}{dc_H} = -Q^* - (c_H + c) \frac{dQ^*(c_H)}{dc_H} = -\mu \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) + \mu(1-\xi) = \mu [1 - \xi + \ln(\xi)].$$

$$(b) \frac{dB(Q^*(c_B))}{dc_B} = -(c_H + c) \frac{dQ^*(c_B)}{dc_B} = -\xi\mu\theta.$$

$$(c) \frac{dB(Q^*(c_G))}{dc_G} = -(c_H + c) \frac{dQ^*(c_G)}{dc_G} = -\xi\mu(1-\theta).$$

$$(d) \frac{dB(Q^*(c))}{dc} = -\mu - Q^* - (c_H + c) \frac{dQ^*(c)}{dc} = -\mu - \mu \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) + \mu = \mu \ln(\xi).$$

$$(e) \frac{dB(Q^*(v))}{dv} = \mu - (c_H + c) \frac{dQ^*(v)}{dv} = \mu - \mu\xi(1-\theta) = \mu [1 - \xi(1-\theta)].$$

Como consecuencia del lema anterior se obtiene el siguiente resultado.

Lema 2.52 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62), y sean $\theta = \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty y\beta(y)e^{-\frac{y}{\mu}} dy$ y $\xi = \frac{c+c_H}{\theta c_B+(1-\theta)(c_G+v)+c_H}$. Entonces, manteniendo fijos el resto de los parámetros, el beneficio esperado máximo $B(Q^*)$ verifica:*

- (a) decrece cuando c_H crece.
- (b) decrece cuando c_B crece si $\theta > 0$, y no depende de c_B si $\theta = 0$.
- (c) decrece cuando c_G crece si $\theta < 1$, y no depende de c_G si $\theta = 1$.
- (d) decrece cuando c crece.
- (e) crece cuando v crece.

Demostración. Los apartados (b) a (e) se siguen del lema anterior sin más que tener en cuenta que $0 < \xi < 1$ y, por tanto, $\ln \xi < 0$. Para el apartado (a), por este mismo lema, se tiene que $\text{signo}\left(\frac{dB(Q^*(c_H))}{dc_H}\right) = \text{signo}[g(\xi)]$, donde $g(x) = 1 - x + \ln(x)$. Como $\xi \in (0, 1)$ y $g(x)$ es una función estrictamente creciente en ese intervalo con $g(1) = 0$, concluimos que $\frac{dB(Q^*(c_H))}{dc_H} < 0$ y, por tanto, el beneficio esperado máximo decrece cuando c_H crece. ■

Los resultados que se dan en las siguientes subsecciones permiten obtener la solución óptima del correspondiente modelo planteado con las mismas cuatro funciones $\beta(y)$ utilizadas en el modelo con demanda uniforme de la sección anterior.

2.9.2. Función $\beta(y)$ potencial truncada

Considerando la función potencial truncada $\beta(y)$ de la sección anterior, dada por la expresión (2.57), el siguiente corolario proporciona la solución óptima para el modelo y un análisis de sensibilidad de esta solución con respecto a los parámetros que definen dicha función $\beta(y)$.

Corolario 2.53 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62) y la función $\beta(y)$ está definida por (2.57). Entonces, el tamaño óptimo del lote es*

$$Q_p^* = \mu \ln \left\{ 1 + \frac{p}{h} + \frac{(\omega - p)\beta_o}{h} \left[1 - e^{-M/\mu} - \frac{M}{\mu} e^{-M/\mu} - \left(\frac{\mu}{M}\right)^\alpha \Gamma(2+\alpha) \Lambda_{2+\alpha}(M/\mu) \right] \right\} \quad (2.75)$$

donde $\Gamma(x)$ es la conocida función gamma y $\Lambda_a(x)$ es la función gamma incompleta

$$\Lambda_a(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x z^{a-1} e^{-z} dz, \quad 0 < x < \infty, \quad a > 0.$$

Además, suponiendo que los demás parámetros permanecen fijos, se verifica que:

(i) El tamaño óptimo del lote Q_p^* decrece si β_o o M o α crecen.

(ii) El beneficio esperado máximo $B(Q_p^*)$ crece si β_o o M o α crecen.

Demostración. Computamos primero el valor del parámetro θ definido por (2.66):

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty y\beta(y)e^{-\frac{y}{\mu}} dy = \beta_o \left[\int_0^M \left(\frac{y}{\mu}\right) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} dy - \left(\frac{\mu}{M}\right)^\alpha \int_0^M \left(\frac{y}{\mu}\right)^{1+\alpha} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} dy \right] \\ &= \beta_o \left[\int_0^{M/\mu} z e^{-z} dz - \left(\frac{\mu}{M}\right)^\alpha \int_0^{M/\mu} z^{1+\alpha} e^{-z} dz \right] = \\ &= \beta_o \left[1 - \frac{M}{\mu} e^{-M/\mu} - e^{-M/\mu} - \left(\frac{\mu}{M}\right)^\alpha \Gamma(2+\alpha) \Lambda_{2+\alpha}(M/\mu) \right].\end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo esta expresión en (2.67), se obtiene (2.75). El resto de la prueba se deduce aplicando el Lema 2.47, porque si β_o o M o α crecen, entonces la función $\beta(y)$ se transforma en una nueva función $\tilde{\beta}(y)$ para la cual $\beta(y) \leq \tilde{\beta}(y)$ cuando $y \geq 0$ y $\beta(y) < \tilde{\beta}(y)$ si $y \in (0, M)$. ■

Un caso práctico

El siguiente ejemplo numérico ilustra la aplicación del resultado anterior. Supongamos que los costes unitarios de adquisición para el distribuidor son $c = 75$ en el pedido inicial y $c_B = 95$ en el pedido de emergencia. Además, el precio de venta unitario del producto es $v = 115$, el coste unitario de los productos sobrantes es $c_H = 20$ y el coste unitario de pérdida de confianza del cliente es $c_G = 10$. Se supone también que la demanda tiene una distribución exponencial con valor esperado $\mu = 150$. Finalmente se estima que la proporción de escasez que puede ser servida con el pedido de emergencia $\beta(y)$ viene dada por la expresión (2.57) con $\beta_o = 0.9$, $\alpha = 2$ y $M = 50$.

Con estos parámetros iniciales para el modelo se tiene que $h = 95$, $\omega = 20$ y $p = 50$. En este caso, evaluando el parámetro θ con la expresión (2.66), se tiene que $\theta = 0.021$, es decir, si $Q = 0$ el tamaño esperado del pedido de emergencia representa el 2.1 % del tamaño esperado de la demanda. Además, utilizando la expresión (2.70), deducimos que el sistema es rentable porque $\theta > \frac{p-h \left[e^{\frac{v-c}{h}} - 1 \right]}{p-\omega} = 0.009$. Sustituyendo los parámetros anteriores en (2.75) se obtiene $Q_p^* = 62.78$ y, usando (2.74), se tiene que el beneficio esperado máximo es $B(Q_p^*) = 36.30$.

Además, teniendo en cuenta que para este modelo $\xi = \frac{c+c_H}{\theta c_B+(1-\theta)(c_G+v)+c_H} = 0.658$, hemos utilizado el Lema 2.51 para evaluar las derivadas del beneficio esperado óptimo $B(Q_p^*)$ con respecto a los parámetros del sistema y hemos obtenido los siguientes valores:

$$\begin{array}{ccc} \left. \frac{dB(Q_p^*(c_H))}{dc_H} \right|_{c_H=20} = -11.48 & \left. \frac{dB(Q_p^*(c_B))}{dc_B} \right|_{c_B=95} = -2.07 & \left. \frac{dB(Q_p^*(c_G))}{dc_G} \right|_{c_G=10} = -96.63 \\ \left. \frac{dB(Q_p^*(c))}{dc} \right|_{c=75} = -62.78 & \left. \frac{dB(Q_p^*(v))}{dv} \right|_{v=115} = 53.37 & \end{array}$$

Puede observarse que la mayor mejora en el beneficio esperado máximo se obtendría disminuyendo el coste unitario de pérdida de confianza del cliente c_G o, si esto no es posible, disminuyendo el coste unitario de adquisición inicial c . Un incremento en el precio unitario de venta v produciría un menor incremento en el beneficio esperado máximo que la disminución de los costes unitarios c_G o c .

Finalmente, en las Figuras 2.20a y 2.20b se representan las variaciones del tamaño óptimo del lote y del beneficio esperado máximo, respectivamente, en función de los parámetros M y α para este ejemplo numérico. De acuerdo con el Corolario 2.53, se observa que el tamaño óptimo del lote decrece si M o α aumentan y el beneficio esperado máximo crece con los parámetros M o α .

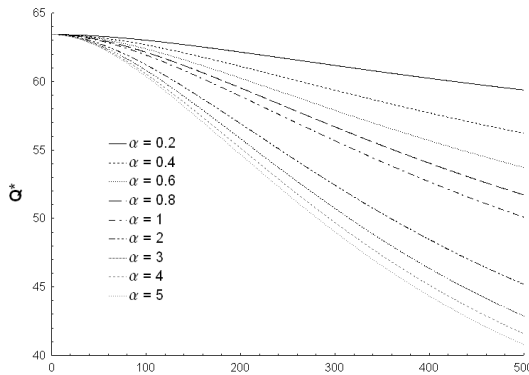


Figura 2.20a. Q_p^* en función de M y α

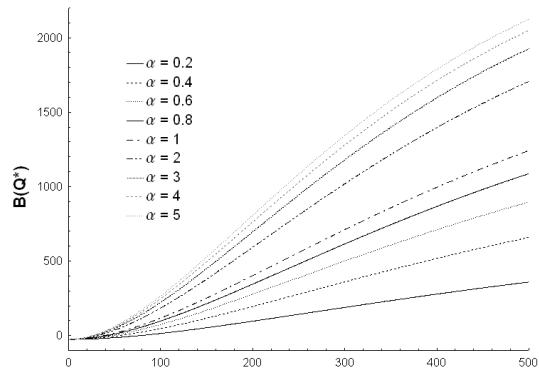


Figura 2.20b. $B(Q_p^*)$ en función de M y α

2.9.3. Función $\beta(y)$ exponencial truncada

Considerando ahora la función $\beta(y)$ exponencial truncada, dada por la expresión (2.48), el siguiente corolario proporciona la solución óptima para el modelo y un

análisis de sensibilidad de esta solución con respecto a los parámetros que definen dicha función $\beta(y)$.

Corolario 2.54 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62) y la función $\beta(y)$ está definida por (2.48). Entonces, el tamaño óptimo del lote es*

$$Q_e^* = \mu \ln \left\{ 1 + \frac{p}{h} + \frac{(\omega - p)\beta_o}{h} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{M(1+\alpha\mu)}{\mu}\right) e^{-\frac{M(1+\alpha\mu)}{\mu}}}{(1 + \alpha\mu)^2} \right] \right\} \quad (2.76)$$

Además, suponiendo que los demás parámetros permanecen fijos, se verifica que:

(i) El tamaño óptimo del lote Q_e^* crece si α crece, y decrece si β_o o M crecen.

(ii) El beneficio esperado máximo $B(Q_e^*)$ decrece si α crece, y crece si β_o o M crecen.

Demostración. Para la función exponencial truncada $\beta(y)$ dada por (2.48), usando el cambio de variable $y = \mu z$, se tiene que

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty y \beta(y) e^{-\frac{y}{\mu}} dy = \beta_o \int_0^M \left(\frac{y}{\mu}\right) e^{-(1+\alpha\mu)\left(\frac{y}{\mu}\right)} \frac{1}{\mu} dy = \beta_o \int_0^{M/\mu} z e^{-(1+\alpha\mu)z} dz \\ &= \beta_o \left[-\frac{M e^{-\frac{M(1+\alpha\mu)}{\mu}}}{\mu(1+\alpha\mu)} + \frac{1}{1+\alpha\mu} \int_0^{M/\mu} e^{-(1+\alpha\mu)z} dz \right] = \beta_o \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{M(1+\alpha\mu)}{\mu}\right) e^{-\frac{M(1+\alpha\mu)}{\mu}}}{(1+\alpha\mu)^2} \right] \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo esta expresión en (2.67), se obtiene (2.76). El resto de la prueba se deduce aplicando el Lema 2.47 y razonando del mismo modo que en el Corolario 2.53. ■

Un caso práctico

A continuación presentamos un ejemplo numérico para ilustrar estos resultados. Se considera el mismo supuesto práctico que en la subsección anterior (es decir, $c = 75$, $c_B = 95$, $v = 115$, $c_H = 20$, $c_G = 10$ y $\mu = 150$) y la función exponencial truncada $\beta(y) = 0.9e^{-0.03y}$ para $y \in [0, 50]$ (es decir, $\beta_o = 0.9$, $\alpha = 0.03$ y $M = 50$). Con estos parámetros iniciales para el modelo se tiene, de nuevo, que $h = 95$, $\omega = 20$ y $p = 50$. En este caso, evaluando el parámetro θ con la expresión (2.66), se tiene que $\theta = 0.016$ y el tamaño esperado del pedido de emergencia para $Q = 0$ representa el 1.6% del tamaño esperado de la demanda. Además, como en el caso práctico anterior, utilizando la expresión (2.70), deducimos que el sistema es rentable porque $\theta > 0.009$.

Entonces, sustituyendo estos valores en (2.76), se tiene $Q_e^* = 62.92$ y, usando (2.74), se obtiene que el beneficio esperado máximo es $B(Q_e^*) = 22.35$. En este caso, teniendo en cuenta que ahora $\xi = 0.657$, las derivadas del beneficio esperado óptimo $B(Q_e^*)$ con respecto a los parámetros del sistema son:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dB(Q_e^*(c_H))}{dc_H} \right|_{c_H=20} &= -11.53 & \left. \frac{dB(Q_e^*(c_B))}{dc_B} \right|_{c_B=95} &= -1.60 & \left. \frac{dB(Q_e^*(c_G))}{dc_G} \right|_{c_G=10} &= -97.00 \\ \left. \frac{dB(Q_e^*(c))}{dc} \right|_{c=75} &= -62.92 & \left. \frac{dB(Q_e^*(v))}{dv} \right|_{v=115} &= 53.00 \end{aligned}$$

Por tanto, al igual que en la subsección anterior, la mayor mejora en el beneficio esperado máximo se obtendría disminuyendo el coste unitario por pérdida de confianza del cliente c_G o, si esto no es posible, disminuyendo el coste unitario de adquisición inicial c .

Finalmente, en las Figuras 2.21a y 2.21b se representan las variaciones del tamaño óptimo del lote y del beneficio esperado máximo, respectivamente, en función de los parámetros M y α para este ejemplo numérico. De acuerdo con el Corolario 2.54, se observa que el tamaño óptimo del lote decrece si M o α aumentan y el beneficio esperado máximo crece con los parámetros M o α .

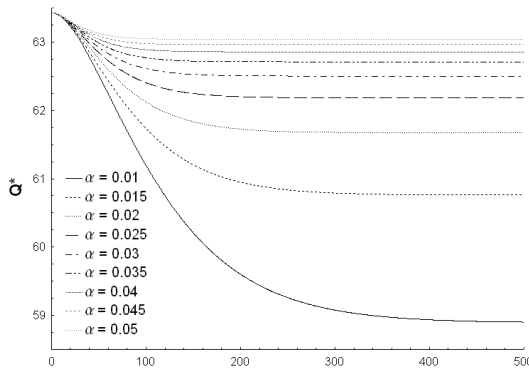


Figura 2.21a. Q_e^* en función de M y α

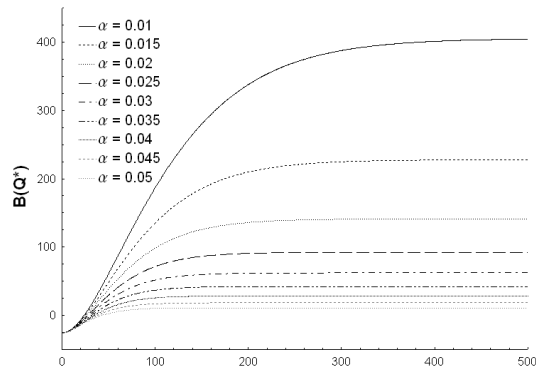


Figura 2.21b. $B(Q_e^*)$ en función de M y α

2.9.4. Función $\beta(y)$ cosinusoidal truncada

Se considera ahora la función $\beta(y)$ cosinusoidal truncada dada por la expresión (2.60), es decir, $\beta(y) = \beta_o \cos\left(\frac{\pi y}{2M}\right)$ con $y \in [0, M]$. La solución del modelo en este caso viene dada por el siguiente corolario.

Corolario 2.55 Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62) y la función $\beta(y)$ está definida por (2.60). Entonces, el tamaño óptimo del lote es

$$Q_c^* = \mu \ln \left\{ 1 + \frac{p}{h} + \frac{(\omega - p)\beta_o}{h} \left[\frac{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-M/\mu} - \frac{2 - \left(\frac{4M}{\pi\mu}\right) e^{-M/\mu}}{1 + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2}}{1 + \left(\frac{\pi\mu}{2M}\right)^2} \right] \right\} \quad (2.77)$$

Además, suponiendo que los demás parámetros permanecen fijos, se verifica que:

- (i) El tamaño óptimo del lote Q_c^* decrece si β_o o M crecen.
- (ii) El beneficio esperado máximo $B(Q_c^*)$ crece si β_o o M crecen.

Demostración. Para la función cosinusoidal truncada $\beta(y)$ dada por (2.60), usando el cambio de variable $y = \mu z$, se tiene que

$$\theta = \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty y \beta(y) e^{-\frac{y}{\mu}} dy = \beta_o \int_0^M \left(\frac{y}{\mu}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2M}\right) e^{-\frac{y}{\mu}} \frac{1}{\mu} dy = \beta_o \int_0^{M/\mu} z e^{-z} \cos\left(\frac{\pi \mu z}{2M}\right) dz$$

Además, es fácil demostrar que

$$\int e^{-z} \cos\left(\frac{\pi \mu z}{2M}\right) dz = \frac{\frac{2M}{\pi\mu} e^{-z} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \mu z}{2M}\right) - \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2 e^{-z} \cos\left(\frac{\pi \mu z}{2M}\right)}{1 + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2}$$

$$\int e^{-z} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \mu z}{2M}\right) dz = \frac{-\frac{2M}{\pi\mu} e^{-z} \cos\left(\frac{\pi \mu z}{2M}\right) - \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2 e^{-z} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \mu z}{2M}\right)}{1 + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2}$$

Por tanto, usando el método de integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{M/\mu} z e^{-z} \cos\left(\frac{\pi \mu z}{2M}\right) dz &= \frac{\frac{2M^2}{\pi\mu^2} e^{-M/\mu} - \frac{2M}{\pi\mu} \int_0^{M/\mu} e^{-z} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \mu z}{2M}\right) dz + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2 \int_0^{M/\mu} e^{-z} \cos\left(\frac{\pi \mu z}{2M}\right) dz}{1 + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{2M^2}{\pi\mu^2} e^{-M/\mu} - \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2 \left[\frac{-\left(\frac{2M}{\pi\mu}\right) e^{-M/\mu} + 1}{1 + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2} \right] + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2 \left[\frac{\left(\frac{2M}{\pi\mu}\right) e^{-M/\mu} + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2}{1 + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2} \right]}{1 + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{2M^2}{\pi\mu^2} e^{-M/\mu} - \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2 \left[\frac{1 - \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2 - \left(\frac{4M}{\pi\mu}\right) e^{-M/\mu}}{1 + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2} \right]}{1 + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2} = \frac{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-M/\mu} - \frac{2 - \left(\frac{4M}{\pi\mu}\right) e^{-M/\mu}}{1 + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2}}{1 + \left(\frac{\pi\mu}{2M}\right)^2} \end{aligned}$$

Es decir, en este modelo el valor del parámetro θ es

$$\theta = \beta_o \left[\frac{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-M/\mu} - \frac{2 - \left(\frac{4M}{\pi\mu}\right) e^{-M/\mu}}{1 + \left(\frac{2M}{\pi\mu}\right)^2}}{1 + \left(\frac{\pi\mu}{2M}\right)^2} \right]$$

y sustituyendo esta expresión en (2.67) se obtiene (2.77). El resto de la prueba se deduce del Lema 2.47, razonando del mismo modo que en el Corolario 2.53. ■

Un caso práctico

A continuación presentamos un ejemplo numérico para ilustrar estos resultados. Se considera el mismo supuesto práctico que en las subsecciones anteriores (es decir, $c = 75$, $c_B = 95$, $v = 115$, $c_H = 20$, $c_G = 10$ y $\mu = 150$) y la función cosinusoidal truncada $\beta(y) = 0.9 \cos\left(\frac{\pi y}{2(50)}\right)$ para $y \in [0, 50]$ (es decir, $\beta_o = 0.9$ y $M = 50$). Con estos parámetros iniciales para el modelo se tiene, de nuevo, que $h = 95$, $\omega = 20$ y $p = 50$. En este caso, evaluando el parámetro θ con la expresión (2.66), se tiene que $\theta = 0.019$ y el tamaño esperado del pedido de emergencia para $Q = 0$ representa el 1.9% del tamaño esperado de la demanda. Además, como en el caso práctico anterior, de (2.70) deducimos que el sistema es rentable porque $\theta > 0.009$.

Sustituyendo los valores de los parámetros en (2.77), se obtiene $Q_c^* = 62.82$ y, utilizando la expresión (2.74), se tiene que $B(Q_c^*) = 31.89$. En este caso, teniendo en cuenta que $\xi = 0.658$, las derivadas del beneficio esperado óptimo $B(Q_c^*)$ con respecto a los parámetros del sistema son:

$$\begin{array}{ccc} \left. \frac{dB(Q_c^*(c_H))}{dc_H} \right|_{c_H=20} = -11.49 & \left. \frac{dB(Q_c^*(c_B))}{dc_B} \right|_{c_B=95} = -1.92 & \left. \frac{dB(Q_c^*(c_G))}{dc_G} \right|_{c_G=10} = -96.75 \\ \left. \frac{dB(Q_c^*(c))}{dc} \right|_{c=75} = -62.82 & \left. \frac{dB(Q_c^*(v))}{dv} \right|_{v=115} = 53.25 & \end{array}$$

Por tanto, se obtienen las mismas conclusiones que en los casos anteriores sobre los parámetros que se deben modificar para mejorar lo más posible el beneficio esperado máximo.

Finalmente, las Figuras 2.22a y 2.22b muestran que, para un valor fijo de β_o , el tamaño óptimo del lote es una función decreciente de M , mientras que el beneficio esperado máximo crece con M . De la misma forma, para un M fijo, si β_o aumenta, el

tamaño óptimo del lote decrece y el beneficio esperado máximo crece. Estos resultados son coherentes con los apartados (i) y (ii) del Corolario 2.55.

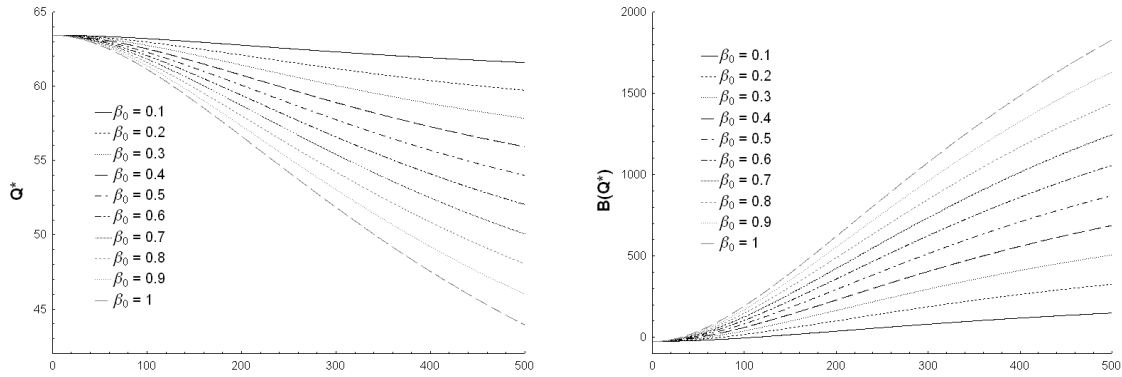


Figura 2.22a. Q_c^* en función de M y β_o Figura 2.22b. $B(Q_c^*)$ en función de M y β_o

2.9.5. Función $\beta(y)$ racional truncada

Se considera ahora la función $\beta(y)$ racional truncada dada por la expresión (2.49), es decir, $\beta(y) = \frac{\beta_o}{1+\alpha y}$ con $y \in [0, M]$. La solución del modelo en este caso viene dada por el siguiente corolario.

Corolario 2.56 *Supongamos que la función de densidad de la demanda viene dada por (2.62) y la función $\beta(y)$ está definida por (2.49). Entonces, el tamaño óptimo del lote es*

$$Q_r^* = \mu \ln \left\{ 1 + \frac{p}{h} + \frac{(\omega - p)\beta_o}{h} \left(\frac{1 - e^{-\frac{M}{\mu}}}{\alpha\mu} - \frac{e^{-\frac{1}{\alpha\mu}}}{(\alpha\mu)^2} \left[E_1 \left(\frac{1}{\alpha\mu} \right) - E_1 \left(\frac{1 + \alpha M}{\alpha\mu} \right) \right] \right) \right\}, \tag{2.78}$$

donde $E_1(a)$ es la función exponencial-integral definida como

$$E_1(a) = \int_1^\infty \frac{e^{-au}}{u} du, \quad a > 0$$

Además, suponiendo que los demás parámetros permanecen fijos, se verifica que:

- (i) El tamaño óptimo del lote Q_r^* crece si α crece y decrece si β_o o M crecen.
- (ii) El beneficio esperado máximo $B(Q_r^*)$ decrece si α crece, y crece si β_o o M crecen.

Demostración. Para la función racional truncada $\beta(y)$ dada por (2.49), usando el cambio de variable $z = \frac{1+\alpha y}{\alpha\mu}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\beta_o}{\mu^2} \int_0^M \frac{y}{1+\alpha y} e^{-\frac{y}{\mu}} dy = \frac{\beta_o e^{\frac{1}{\alpha\mu}}}{\mu^2 \alpha} \int_{\frac{1}{\alpha\mu}}^{\frac{1+\alpha M}{\alpha\mu}} \left(\mu - \frac{1}{\alpha z} \right) e^{-z} dz \\
&= \frac{\beta_o e^{\frac{1}{\alpha\mu}}}{\mu^2 \alpha} \left[\mu e^{-\frac{1}{\alpha\mu}} - \mu e^{-\frac{1+\alpha M}{\alpha\mu}} - \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{1}{\alpha\mu}}^{\frac{1+\alpha M}{\alpha\mu}} \frac{e^{-z}}{z} dz \right] \\
&= \beta_o \left[\frac{1 - e^{-\frac{M}{\mu}}}{\alpha\mu} - \frac{e^{\frac{1}{\alpha\mu}}}{(\alpha\mu)^2} \int_{\frac{1}{\alpha\mu}}^{\frac{1+\alpha M}{\alpha\mu}} \frac{e^{-z}}{z} dz \right]
\end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\alpha\mu}}^{\frac{1+\alpha M}{\alpha\mu}} \frac{e^{-z}}{z} dz &= \int_{\frac{1}{\alpha\mu}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz - \int_{\frac{1+\alpha M}{\alpha\mu}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = \int_1^{\infty} \frac{e^{-(\frac{1}{\alpha\mu})u}}{u} du - \int_1^{\infty} \frac{e^{-(\frac{1+\alpha M}{\alpha\mu})u}}{u} du \\
&= E_1 \left(\frac{1}{\alpha\mu} \right) - E_1 \left(\frac{1+\alpha M}{\alpha\mu} \right),
\end{aligned}$$

se obtiene

$$\theta = \beta_o \left\{ \frac{1 - e^{-\frac{M}{\mu}}}{\alpha\mu} - \frac{e^{\frac{1}{\alpha\mu}}}{(\alpha\mu)^2} \left[E_1 \left(\frac{1}{\alpha\mu} \right) - E_1 \left(\frac{1+\alpha M}{\alpha\mu} \right) \right] \right\}. \quad (2.79)$$

Entonces, sustituyendo esta expresión en (2.67), se llega a (2.78). El resto de la prueba se deduce aplicando el Lema 2.47 y razonando del mismo modo que en el Corolario 2.53. ■

Un caso práctico

Para ilustrar este resultado usamos el mismo ejemplo numérico que en las subsecciones anteriores (es decir, $c = 75$, $c_B = 95$, $v = 115$, $c_H = 20$, $c_G = 10$ y $\mu = 150$) y la función racional truncada $\beta(y) = \frac{0.9}{1+0.1y}$ con $y \in [0, 50]$ (es decir, $\beta_o = 0.9$, $\alpha = 0.1$ y $M = 50$). Con estos parámetros iniciales para el modelo se tiene, de nuevo, que $h = 95$, $\omega = 20$ y $p = 50$. Evaluando la función exponencial-integral se obtiene $E_1 \left(\frac{1}{15} \right) = 2.196406$ y $E_1 \left(\frac{6}{15} \right) = 0.702380$ y, evaluando el parámetro θ con la expresión (2.79), se tiene que $\theta = 0.011$. Es decir, el tamaño esperado del pedido de emergencia para $Q = 0$ representa el 1.1% del tamaño esperado de la demanda. Además, como en el caso práctico anterior, de (2.70) deducimos que el sistema es rentable porque $\theta > 0.009$.

Sustituyendo los valores de los parámetros en la expresión (2.78) se tiene $Q_r^* = 63.10$ y, utilizando la expresión (2.74), se tiene $B(Q_r^*) = 5.85$. En este caso, teniendo

en cuenta que $\xi = 0.657$, las derivadas del beneficio esperado óptimo $B(Q_r^*)$ con respecto a los parámetros del sistema son:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dB(Q_r^*(c_H))}{dc_H} \right|_{c_H=20} &= -11.59 & \left. \frac{dB(Q_r^*(c_B))}{dc_B} \right|_{c_B=95} &= -1.05 & \left. \frac{dB(Q_r^*(c_G))}{dc_G} \right|_{c_G=10} &= -97.44 \\ \left. \frac{dB(Q_r^*(c))}{dc} \right|_{c=75} &= -63.10 & \left. \frac{dB(Q_r^*(v))}{dv} \right|_{v=115} &= 52.56 \end{aligned}$$

Por tanto, se obtienen las mismas conclusiones que en los casos anteriores sobre los parámetros que se deben modificar para mejorar lo más posible el beneficio esperado máximo.

Finalmente, las Figuras 2.23a y 2.23b muestran que, para un valor fijo α , el tamaño óptimo del lote decrece cuando M aumenta y el beneficio esperado máximo crece cuando M aumenta. Sin embargo, para un valor fijo M , el tamaño óptimo del lote crece y el beneficio esperado máximo decrece cuando el parámetro α aumenta. Estos resultados son coherentes con los apartados (i) y (ii) del Corolario 2.56.

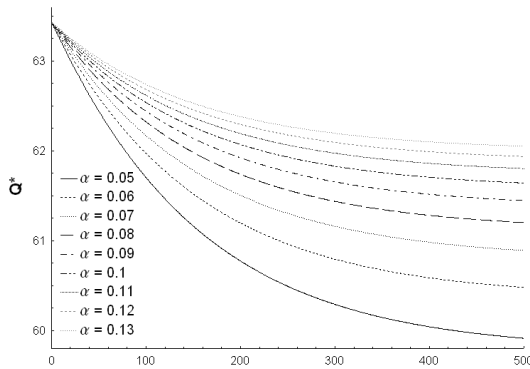


Figura 2.23a. Q_r^* en función de M y α

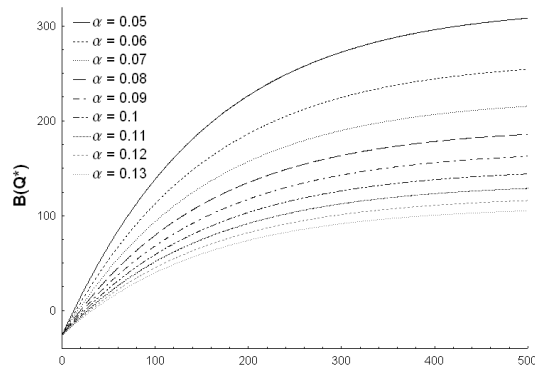


Figura 2.23b. $B(Q_r^*)$ en función de M y α

A la vista de estos cuatro ejemplos resueltos en las subsecciones anteriores, es evidente que el problema podría resolverse del mismo modo para cualquier otra función $\beta(y)$ con la única condición de que fuese una función no creciente. Sólo es necesario evaluar el parámetro θ mediante la expresión (2.66) y utilizar después las fórmulas (2.73) y (2.74) para evaluar el tamaño óptimo del lote Q^* y el beneficio esperado máximo $B(Q^*)$, respectivamente. Por tanto, disponemos de una metodología general para la resolución de este modelo cuando la distribución de la demanda es exponencial y, en la sección A.6 del Apéndice A, al final de este documento, se incluye un programa

escrito en lenguaje SAS (SAS Institute Inc., 2005) que permite dicha resolución para cualquier función $\beta(y)$ no creciente.

La mayor parte de los resultados incluidos en esta sección han sido publicados en la revista *Omega* (Pando et al., 2013^a).

2.10. Conclusiones

En este capítulo se ha analizado un modelo estocástico de inventario de periodo único tipo *newsboy* que incorpora la posible existencia de un pedido adicional de emergencia para satisfacer parte de la demanda no atendida con el pedido inicial. Se ha supuesto que la fracción de demanda satisfecha con dicho pedido adicional, respecto al total de la demanda no atendida, es una función no creciente del tamaño de la escasez originada con el pedido inicial, verificando algunas condiciones fácilmente asumibles en situaciones prácticas reales.

Como es habitual en este tipo de modelos de inventario, se ha considerado como objetivo la maximización del beneficio esperado. Se han encontrado condiciones necesarias y suficientes para que dicha función sea continuamente diferenciable, así como condiciones suficientes para la existencia y continuidad de la derivada segunda. La función objetivo no es siempre convexa, pero se han obtenido condiciones suficientes para asegurar la convexidad, que pueden aplicarse en diversos casos de distribuciones de probabilidad para la demanda y diferentes funciones para la fracción de demanda satisfecha con el pedido adicional.

Las propiedades obtenidas para la función objetivo nos han permitido introducir el concepto de la función fractil del problema, que es una generalización del concepto de fractil crítico utilizado por otros autores para modelos del tipo *newsboy*. La resolución del modelo puede entonces abordarse utilizando métodos numéricos para encontrar los puntos de corte entre la función de distribución de la demanda y la función fractil del problema, ya que ambas funciones toman valores en el intervalo $[0, 1]$.

Este enfoque del problema nos ha permitido también desarrollar un análisis de

sensibilidad del tamaño óptimo del lote y el beneficio esperado máximo con respecto a los parámetros iniciales del modelo. En general, el tamaño óptimo del lote decrece cuando el coste unitario del pedido inicial o el coste unitario de los productos sobrantes aumenta, mientras que crece con el coste unitario de pérdida de ventas o el precio unitario de venta. Sin embargo, cuando aumenta el coste unitario del pedido de emergencia, el tamaño óptimo del lote puede crecer o decrecer dependiendo de que su valor esté por encima o por debajo de la solución óptima para el modelo *newsboy* básico sin pedido de emergencia. En cuanto al beneficio esperado óptimo, como era de esperar, siempre crece con el precio unitario de venta, mientras que decrece cuando cualquiera de los otros parámetros de coste del modelo aumentan.

Se ha analizado el caso especial en que la fracción de demanda atendida con el pedido de emergencia está definida por una función escalonada. Además, se han obtenido expresiones cerradas para la solución óptima en algunos casos concretos de distribuciones de probabilidad de la demanda. En el contexto de esta función escalonada, se han encontrado casos de distribuciones de probabilidad para las que la función objetivo no es convexa.

También se ha analizado de forma particular el modelo que hemos denominado modelo con umbral de pérdida de ventas, en el que se exigen condiciones más fuertes para la función que define la fracción de demanda satisfecha con el pedido de adicional. En este caso hemos encontrado condiciones necesarias y suficientes para la existencia y continuidad de las dos primeras derivadas y también condiciones suficientes que garantizan la convexidad de la función objetivo. Este estudio nos ha permitido detectar y corregir algunos errores existentes en un modelo *newsboy* con pedido de emergencia considerado con anterioridad en la literatura de inventarios. Los resultados teóricos obtenidos se han ilustrado con varios ejemplos utilizando diferentes funciones para la fracción de demanda satisfecha con el pedido adicional y diferentes distribuciones de probabilidad para la demanda, como por ejemplo la distribución beta, la distribución normal o la distribución de Weibull.

Los casos especiales en que la distribución de probabilidad de la demanda es

uniforme o exponencial se han analizado de forma más extensa puesto que en ellos se puede garantizar siempre la convexidad de la función objetivo, sea cual sea la función que define la fracción de demanda satisfecha con el pedido de emergencia. En el caso de la distribución uniforme se ha obtenido una metodología general de resolución, especificando la ecuación que se necesita resolver, y en el caso de la distribución exponencial se ha encontrado una expresión explícita para la solución. Esto nos ha permitido desarrollar un software específico escrito en lenguaje SAS (SAS Institute Inc., 2005) que proporciona la solución del modelo en estos dos casos. Además, en el caso de la distribución exponencial, se han encontrado expresiones sencillas para las derivadas del tamaño óptimo del lote y el beneficio esperado máximo, que permiten un amplio análisis de sensibilidad de la solución óptima con respecto a cada uno de los parámetros del modelo.

Finalmente, como ya se ha comentado con anterioridad, los resultados obtenidos en este capítulo han originado tres artículos científicos publicados en las revistas *Omega* (Pando et al., 2013^a), *Top* (Pando et al., 2013^c) y *Applied Mathematics and Computation* (Pando et al., 2014).

Apéndice A

Códigos de programas en SAS

A.1. Programa para el modelo EOQ con $r = 0$

```
data solucion;
D=1;K=10;h=0.5;p=50;s=62;beta=0.3;gamma1=1.5;gamma2=1.5;tol=0.000001;
alfa=1-beta;
delta=((alfa*D)**gamma1)/(h*gamma1*BETA(gamma1,1+gamma2/alfa));
xi=alfa*gamma1+gamma2;
u=((1-alfa)*(s-p)*delta)/(xi-alfa);
v=(alfa*K*delta)/(xi-alfa);
if u=0 then do;q=v**(1/xi);goto label;end;
if u+v=1 then do;q=1;goto label;end;
q0=(u+v)**(1/(xi-1));
if (u+v<1) then q0=(u+v)**(1/xi);
qi=q0;q=((xi-1)*(qi**xi)+v)/(xi*(qi**(xi-1))-u);
r=(u/xi)**(1/(xi-1));
if tol>=r then tol=r/2;
pq=(q-tol)**xi-u*(q-tol)-v;
do while (pq>=0);
qi=q;
q=((xi-1)*(qi**xi)+v)/(xi*(qi**(xi-1))-u);
pq=(q-tol)**xi-u*(q-tol)-v;
end;
label:t=(q**alfa)/(alfa*D);
gq=(alfa*D/(xi-alfa))*((xi-1)*(s-p)*q-K*xi)/(q**alfa);
cq=(alfa*D/(q**alfa))*(K+(q**xi)/delta);
qmin=v**(1/xi);
tmin=(qmin**alfa)/(alfa*D);
cqmin=(alfa*D/(xi-alfa))*(K*xi)/(qmin**alfa);
gqmin=(alfa*D/(qmin**alfa))*((s-p)*qmin-K-(qmin**xi)/delta);
deno=xi*q**(xi-1)-u;
```

```

derqK=v/(K*deno);dergqK=-alfa*D*q**(-alfa);
derqh=-q**xi/(h*deno);dergqh=-alfa*D*q**(xi-alfa)/(h*delta);
derqs=q*(1-alfa)*delta/((xi-alfa)*deno);dergqs=alfa*D*q**beta;
derqp=-derqs;dergqp=-dergqs;
derqD=gamma1*q**xi/(D*deno);
dergqD=((gamma1+gamma2-1)*(s-p)*q-gamma2*K)/((xi-alfa)*D*t);
diga1=digamma(gamma1);diga2=digamma(gamma2/alfa+1);
diga3=digamma(gamma1+gamma2/alfa+1);
if alfa<1 then derqbeta=
    ((gamma1*log(q)-gamma1/alfa+(gamma1+gamma2-1)/((1-alfa)*(xi-alfa))
    -gamma2*(diga2-diga3)/(alfa**2))*(q**xi)-v/(alfa*(1-alfa)))/deno;
if alfa=1 then derqbeta=(gamma1*log(q)-gamma1-gamma2*(diga2-diga3))*q/xi;
dergbeta=gq*(log(q)-1/alfa)+(q**xi/(delta*t))*(gamma1*log(q)-gamma1/alfa
    -gamma2*(diga2-diga3)/(alfa**2));
derqgam1=-(log(t)+1/gamma1+alfa/(xi-alfa)+diga1-diga3)*(q**xi)/deno;
derggam1=-(q**xi/(delta*t))*(log(t)+1/gamma1+diga1-diga3);
derqgam2=-(log(q)+1/(xi-alfa)+(diga2-diga3)/alfa)*(q**xi)/deno;
derggam2=-(q**xi/(delta*t))*(log(q)+(diga2-diga3)/alfa);
output;
run;
proc print;
var D K h p s beta gamma1 gamma2 q t gq cq qmin tmin gqmin cqmin derqD derqK
    derqh derqp derqs derqbeta derqgam1 derqgam2 dergqD dergqK dergqh dergqp
    dergqs dergbeta derggam1 derggam2;
run;
quit;

```


A.2. Programa para el modelo EOQ con $r \geq 0$

```

data modeloqr;
D=0.5;K=10;h=0.5;p=10;s=20;beta=0.4;gamma1=1;gamma2=1;tmin=0.001;qmax=40;
  tol=0.000001;
alfa=1-beta;
qmin=(alfa*D*tmin)**(1/alfa);taumin=(alfa*D*tmin)/(qmax**alfa);
delta=((alfa*D)**gamma1)/(h*gamma1*BETA(gamma1,gamma2/alfa+1));
e=alfa*gamma1+gamma2-1;
u=((s-p)*(1-alfa)*delta)/(alfa*gamma1+gamma2-alfa);
v=(K*alfa*delta)/(alfa*gamma1+gamma2-alfa);
if u=0 then do;eoq0=v**(1/(1+e));goto label0;end;
q0=(u+v)**(1/e);
if (u+v<1) then q0=(u+v)**(1/(1+e));
qi=q0;eoq0=(e*(qi**(1+e))+v)/((1+e)*(qi**e)-u);
do while (ABS(eoq0-qi)>tol);
qi=eoq0;eoq0=(e*(qi**(1+e))+v)/((1+e)*(qi**e)-u);
end;
label0:
if eoq0>qmax then eoq0=qmax;if eoq0<qmin then eoq0=qmin;
geoq0=-((alfa*D)/delta)*((eoq0**(1+e))-(s-p)*delta*eoq0+k*delta)/(eoq0**alfa);
T0=(eoq0**alfa)/(alfa*D);eoq=eoq0;geoq=geoq0;T=T0;tau=1;num1=0;num2=0;num3=0;
geoqmax=-((alfa*D)/delta)*((qmax**(1+e))*CDF('BETA',taumin,gamma1,gamma2
  /alfa+1)-(s-p)*delta*qmax*(1-(1-taumin)**(1/alfa))+k*delta)/(taumin*(qmax**alfa));
if (geoqmax>geoq) then do;
eoq=qmax;geoq=geoqmax;T=tmin;tau=taumin;
end;
do x=taumin to 1-tol by tol;
taua=x;taub=x+tol;
wxa=((s-p)*delta*(1-(1-taua)**((1-alfa)/alfa)))/((1+e)*CDF('BETA',taua,gamma1,
  gamma2/alfa+1)-alfa*taua*PDF('BETA',taua,gamma1,gamma2/alfa+1))**(1/e);
phi1xa=CDF('BETA',taua,gamma1,gamma2/alfa+1)*(wxa**(1+e))-u*(1-(1-taua)**
  (1/alfa))*wxa-v;
phi2xa=taua*(wxa**alfa)-alfa*D*tmin;
phi3xa=(qmax**(1+e))*(taua*PDF('BETA',taua,gamma1,gamma2/alfa+1)
  -CDF('BETA',taua,gamma1,gamma2/alfa+1))-(s-p)*delta*qmax*((taua/alfa)*
  ((1-taua)**((1-alfa)/alfa))-1+(1-taua)**(1/alfa))-k*delta;
if taub=1 then do;
wxb=((s-p)*delta/(1+e))**(1/e);
phi1xb=wxb**(1+e)-u*wxb-v;
phi2xb=(wxb**alfa)-alfa*D*tmin;
phi3xb=-((qmax**(1+e))+s-p)*delta*qmax-k*delta;
end;
if taub<1 then do;
wxb=((s-p)*delta*(1-(1-taub)**((1-alfa)/alfa)))/((1+e)*CDF('BETA',taub,gamma1,
  gamma2/alfa+1)-alfa*taub*PDF('BETA',taub,gamma1,gamma2/alfa+1))**(1/e);
phi1xb=CDF('BETA',taub,gamma1,gamma2/alfa+1)*(wxb**(1+e))-u*(1-(1-taub)**

```

```

(1/alfa))*wxb-v;
phi2xb=taub*(wxb**alfa)-alfa*D*tmin;
phi3xb=(qmax**(1+e))*(taub*PDF('BETA',taub,gamma1,gamma2/alfa+1)
-CDF('BETA',taub,gamma1,gamma2/alfa+1))-(s-p)*delta*qmax*((taub/alfa)*
((1-taub)**((1-alfa)/alfa))-1+(1-taub)**(1/alfa))-k*delta;
end;
if (phi1xa*phi1xb>0) then goto label2;
tau1=0.5*(taua+taub);
eoq1=((s-p)*delta*(1-(1-tau1)**((1-alfa)/alfa)))/((1+e)*CDF('BETA',tau1,gamma1,
gamma2/alfa+1)-alfa*tau1*PDF('BETA',tau1,gamma1,gamma2/alfa+1))**(1/e);
geoq1=-((alfa*D)/delta)*((eoq1**(1+e))*CDF('BETA',tau1,gamma1,gamma2/alfa+1)
-(s-p)*delta*eoq1*(1-(1-tau1)**(1/alfa))+k*delta)/(tau1*(eoq1**alfa));
T1=tau1*(eoq1**alfa)/(alfa*D);
if ((geoq1>geoq) and (eoq1<qmax) and (tau1*(eoq1**alfa)>(qmin**alfa))) then do;
tau=tau1;eoq=eoq1;geoq=geoq1;T=T1;izqda1=phi1xa;dcha1=phi1xb;end;
num1=num1+1;
label2:
if (phi2xa*phi2xb>0) then goto label3;
tau1=0.5*(taua+taub);
eoq1=((s-p)*delta*(1-(1-tau1)**((1-alfa)/alfa)))/((1+e)*CDF('BETA',tau1,gamma1,
gamma2/alfa+1)-alfa*tau1*PDF('BETA',tau1,gamma1,gamma2/alfa+1))**(1/e);
geoq1=-((alfa*D)/delta)*((eoq1**(1+e))*CDF('BETA',tau1,gamma1,gamma2/alfa+1)
-(s-p)*delta*eoq1*(1-(1-tau1)**(1/alfa))+k*delta)/(tau1*(eoq1**alfa));
T1=tau1*(eoq1**alfa)/(alfa*D);
if ((geoq1>geoq) and (eoq1>=qmin) and (eoq1<=qmax)) then do;tau=tau1;eoq=eoq1;
geoq=geoq1;T=T1;izqda2=phi2xa;dcha2=phi2xb;end;
num2=num2+1;
label3:
if (phi3xa*phi3xb>0) then goto label4;
tau1=0.5*(taua+taub);eoq1=qmax;
geoq1=-((alfa*D)/delta)*((eoq1**(1+e))*CDF('BETA',tau1,gamma1,gamma2/alfa+1)
-(s-p)*delta*eoq1*(1-(1-tau1)**(1/alfa))+k*delta)/(tau1*(eoq1**alfa));
T1=tau1*(eoq1**alfa)/(alfa*D);
if (geoq1>geoq) then do;tau=tau1;eoq=eoq1;geoq=geoq1;T=T1;izqda3=phi3xa;dcha3=
phi3xb;end;
num3=num3+1;
label4:end;
order=eoq;reorder=0;
if tau<1 then do;order=eoq*(1-(1-tau)**(1/alfa));reorder=eoq-order;end;
output;
run;
proc print;
var geoq0 eoq0 t0 tau geoq eoq t order reorder;
run;
quit;

```

A.3. Programa para el modelo EOQ con coste de deterioro

```

data algoritmo;
D=1;K=10;h=0.5;p=50;s=62;beta=0.3;gamma1=1.5;gamma2=1.5;tita=0.05;
tol=0.000001;
alfa=1-beta;
delta=((alfa*D)**gamma1)/(h*gamma1*BETA(gamma1,1+gamma2/alfa));
epsilon=alfa*gamma1+gamma2;
u=(1-alfa)*(s-p)*delta/(epsilon-alfa);
v=alfa*K*delta/(epsilon-alfa);
w=(epsilon+alfa)*delta*((1-alfa)*(s-p)-2*p*alfa)/(gamma2*epsilon*(gamma2+alfa)
*(1+alfa));
c=gamma2*epsilon*(gamma2+alfa)/(2*alfa*D*(epsilon+alfa)*(epsilon-alfa));
if (tita=0 and u=0) then do;tau=v**(1/epsilon);goto label;end;
if (tita=0 and u+v=1) then do;tau=1;goto label;end;
if (tita>0 and u+v=1 and w=1) then do;tau=1;goto label;end;
if (tita>0 and u=0 and v<1 and w=v**((epsilon-1)/epsilon)) then do;tau=v**(1/epsilon);
goto label;end;
if tita=0 then w0=0;else w0=max(0,w);
taui=max((u+v)**(1/epsilon),(u+v)**(1/(epsilon-1)));
taui=max(taui,w0**(1/(epsilon-1)));
if tol>=taui then tol=taui/2;
parar=(taui-tol)**epsilon-u*(taui-tol)-v+c*tita*((taui-tol)**(1+alfa))*((taui-tol)
**((epsilon-1)-w));
do while (taui>tol and parar>0);
tau=((epsilon-1)*(taui**epsilon)+v+c*tita*(taui**(1+alfa))*((epsilon-1+alfa)
*(taui**(epsilon-1))-w*alfa))/(epsilon*(taui**(epsilon-1))-u+c*tita*(taui**alfa)
*((epsilon+alfa)*(taui**(epsilon-1))-w*(1+alfa)));
taui=tau;
if taui-tol>0 then parar=(taui-tol)**epsilon-u*(taui-tol)-v+c*tita*((taui-tol)**(1+alfa))
*((taui-tol)**(epsilon-1)-w));
end;
label:T=(tau**alfa)/(alfa*D);q=((alfa*D*T)**(1/alfa))*(1+0.5*tita*T);
hc=((alfa*D*T)**(gamma1+gamma2/alfa))/delta*(1+tita*gamma2*(gamma2+alfa)*T
/(2*(epsilon+alfa)));
dc=s*tita*((alfa*D*T)**(1/alfa+1))/(D*(1+alfa));
Gtita=((s-p)*q-K-hc-dc)/T;
Ctita=(K+hc+dc)/T;
run;
proc print;
var D K h p s beta gamma1 gamma2 tita tau T q Gtita Ctita;
run;
quit;

```

A.4. Programa para el modelo *newsboy* con pedido de emergencia y umbral de pérdida de ventas

```

data solucion;
/* Definimos los parámetros de costes */
c=50;cb=75;ch=5;cg=20;v=90;
/* Definimos el soporte, los parámetros de la distribución y la esperanza */
a=200;b=900;pe=1.5;qu=2;tope=b;mu=a+(b-a)*(pe/(pe+qu));
/* Definimos la precisión para el Q óptimo */
preci=0.000001;
/* Definimos el paso para las integrales */
epsilon=0.01;
/* Definimos la función de densidad, su derivada, la función de distribución
y su inversa */
let pdf=(pdf('beta',z,pe,qu,a,b));
let dpdf=((pe-1)/(z-a)-(qu-1)/(b-z))*pdf('beta',z,pe,qu,a,b));
let cdf=(cdf('beta',z,pe,qu,a,b));
let quantil=(quantile('beta',z,pe,qu,a,b));
/* Definimos la función de backorder con sus puntos singulares
y sus derivadas laterales */
beta0=0.9;alfa=1;m=500;n=3;
array y{3};y(1)=0;y(3)=tope-a;y(2)=m;
let betad=((x>=0)*(x<m)*(beta0*(1-(x/m)**alfa)));
let betai=((x>0)*(x<=m)*(beta0*(1-(x/m)**alfa)));
let dbetad=((x>=0)*(x<m)*(-(beta0*alfa/m)*((x/m)**((x>0)*(alfa-1)+(x=0)))));
let dbetai=((x>0)*(x<=m)*(-(beta0*alfa/m)*((x/m)**((x>0)*(alfa-1)+(x=0)))));
let ddbetad=((x>=0)*(x<m)*(-(beta0*alfa*(alfa-1)/(m**2))*((x/m)**
((x>0)*(alfa-2)+(x=0)))));
let ddbetai=((x>0)*(x<=m)*(-(beta0*alfa*(alfa-1)/(m**2))*((x/m)**
((x>0)*(alfa-2)+(x=0)))));
/* Calculamos los parámetros auxiliares */
h=c+ch;w=cb-c;p=cg+v-c;
/* Calculamos Q0 y Qk */
z=p/(p+h);Q0=(&quantil);
z=(p+(w-p)*beta0)/(h+p+(w-p)*beta0);Qk=(&quantil);
/* Seleccionamos el punto inicial */
Q=Qk;
/* Iniciamos el algoritmo */
cuenta=0;
bucle:cuenta=cuenta+1;
/* Calculamos S1 */
S1=0;do i=2 to n-1;x=y(i);z=Q+x;if (x<tope-Q) then
S1=S1+((&betai)-(&betad))*x*(&pdf);end;
/* Definimos el límite superior de la integral en A'(Q)*/
topem=tope-Q;
/* Calculamos las integrales del sumatorio */

```

```

i=1;sinteg=0;
do while (y(i+1)<topem);
integ=0;
x=y(i);z=Q+x;integ=((&betad)+x*(&dbetad))*(&pdf);
x=y(i+1);z=Q+x;integ=integ+((&betai)+x*(&dbetai))*(&pdf);
puntos=2*int((y(i+1)-y(i))/(2*epsilon));
do count=1 to puntos-3 by 2;
x=y(i)+count*(y(i+1)-y(i))/puntos;z=Q+x;integ=integ+4*((&betai)
+x*(&dbetai))*(&pdf);
x=y(i)+(count+1)*(y(i+1)-y(i))/puntos;z=Q+x;integ=integ+2*((&betai)
+x*(&dbetai))*(&pdf);
end;
x=y(i)+(puntos-1)*(y(i+1)-y(i))/puntos;z=Q+x;integ=integ+4*((&betai)
+x*(&dbetai))*(&pdf);
integ=((y(i+1)-y(i))/puntos)*integ/3;
sinteg=sinteg+integ;
i=i+1;
end;
/* Calculamos la última integral */
integral=0;
x=y(i);z=Q+x;integral=((&betad)+x*(&dbetad))*(&pdf);
x=topem;z=Q+x;integral=integral+((&betai)+x*(&dbetai))*(&pdf);
puntos=2*int((topem-y(i))/(2*epsilon));
do count=1 to puntos-3 by 2;
x=y(i)+count*(topem-y(i))/puntos;z=Q+x;integral=integral+4*((&betai)
+x*(&dbetai))*(&pdf);
x=y(i)+(count+1)*(topem-y(i))/puntos;z=Q+x;integral=integral+2*((&betai)
+x*(&dbetai))*(&pdf);
end;
x=y(i)+(puntos-1)*(topem-y(i))/puntos;z=Q+x;integral=integral+4*((&betai)
+x*(&dbetai))*(&pdf);
integral=((topem-y(i))/puntos)*integral/3;
/* Calculamos la integral en A'(Q) */
integral=sinteg+integral;
/* Calculamos delta */
z=Q;delta=(integral-S1)/(1-(&cdf));
/* Calculamos el nuevo punto */
z=(p+(w-p)*delta)/(h+p+(w-p)*delta);Qj=(&quantil);
if (abs(Qj-Q)>preci)then do;Q=Qj;goto bucle;end;
/* ¡¡ TENEMOS LA SOLUCIÓN !! */
/* Evaluamos A(Q)*/
/* Definimos el límite superior de la integral en A(Q)*/
topem=tope-Q;
/* Calculamos las integrales del sumatorio */
i=1;sinteg=0;
do while (y(i+1)<topem);
integ=0;
x=y(i);z=Q+x;integ=x*(&betad))*(&pdf);

```

```

x=y(i+1);z=Q+x;integ=integ+x*(&betai)*(&pdf);
puntos=2*int((y(i+1)-y(i))/(2*epsilon));
do count=1 to puntos-3 by 2;
x=y(i)+count*(y(i+1)-y(i))/puntos;z=Q+x;integ=integ+4*x*(&betai)*(&pdf);
x=y(i)+(count+1)*(y(i+1)-y(i))/puntos;z=Q+x;integ=integ+2*x*(&betai)*(&pdf);
end;
x=y(i)+(puntos-1)*(y(i+1)-y(i))/puntos;z=Q+x;integ=integ+4*x*(&betai)*(&pdf);
integ=((y(i+1)-y(i))/puntos)*integ/3;
sinteg=sinteg+integ;
i=i+1;
end;
/* Calculamos la última integral */
integral=0;
x=y(i);z=Q+x;integral=x*(&betad)*(&pdf);
x=topem;z=Q+x;integral=integral+x*(&betai)*(&pdf);
puntos=2*int((topem-y(i))/(2*epsilon));
do count=1 to puntos-3 by 2;
x=y(i)+count*(topem-y(i))/puntos;z=Q+x;integral=integral+4*x*(&betai)*(&pdf);
x=y(i)+(count+1)*(topem-y(i))/puntos;z=Q+x;integral=integral+2*x*(&betai)*(&pdf);
end;
x=y(i)+(puntos-1)*(topem-y(i))/puntos;z=Q+x;integral=integral+4*x*(&betai)*(&pdf);
integral=((topem-y(i))/puntos)*integral/3;
/* Calculamos A(Q) */
AQ=sinteg+integral;
/* Evaluamos L(Q), T(Q), T0(Q) y Tk(Q) */
paso=epsilon;
LQ=0;T0Q=0;TkQ=0;
do x=paso to tope-3*paso by paso;
z=Q+x;LQ=LQ+4*x*(&pdf);
z=Q0+x;T0Q=T0Q+4*x*(&pdf);
z=Qk+x;TkQ=TkQ+4*x*(&pdf);
x=x+paso;
z=Q+x;LQ=LQ+2*x*(&pdf);
z=Q0+x;T0Q=T0Q+2*x*(&pdf);
z=Qk+x;TkQ=TkQ+2*x*(&pdf);
end;
x=tope-paso;
z=Q+x;LQ=LQ+4*x*(&pdf);
z=Q0+x;T0Q=T0Q+4*x*(&pdf);
z=Qk+x;TkQ=TkQ+4*x*(&pdf);
TQ=h*(Q-mu)+(p+h)*paso*LQ/3+(w-p)*AQ;
T0Q=h*(Q0-mu)+(p+h)*paso*T0Q/3;
TkQ=h*(Qk-mu)+(p+h+beta0*(w-p))*paso*TkQ/3;
/* Evaluamos B(Q), B0(Q) y Bk(Q) */
BQ=(v-c)*mu-TQ;
B0Q=(v-c)*mu-T0Q;
BkQ=(v-c)*mu-TkQ;
BQreal=(v-c)*mu-h*(Q-mu)-(h+v-c)*paso*LQ/3-(w-v+c)*AQ;

```

```

/* Calculamos S2(Q*) y las integrales necesarias para el análisis de sensibilidad */
S2=0;do i=2 to n-1;x=y(i);z=Q+x;if (x<tope-Q) then S2=S2-(((&betai)-(&betad))
+x*((&dbetai)-(&dbetad)))*(&pdf)+x*((&betai)-(&betad))*(&pdf);end;
topem=tope-Q;
i=1;sinteg1=0;sinteg2=0;sinteg3=0;
do while (y(i+1)<topem);
integ1=0;integ2=0;integ3=0;
x=y(i);z=Q+x;integ1=(2*(&dbetad)+x*(&ddbetad))*(&pdf);
integ2=x*(&pdf);
integ3=x*(&betad)*(&pdf);
x=y(i+1);z=Q+x;integ1=integ1+(2*(&dbetai)+x*(&ddbetai))*(&pdf);
integ2=integ2+x*(&pdf);
integ3=integ3+x*(&betai)*(&pdf);
puntos=2*int((y(i+1)-y(i))/(2*epsilon));
do count=1 to puntos-3 by 2;
x=y(i)+count*(y(i+1)-y(i))/puntos;z=Q+x;integ1=integ1+4*(2*(&dbetai)
+x*(&ddbetai))*(&pdf);
integ2=integ2+4*x*(&pdf);
integ3=integ3+4*x*(&betai)*(&pdf);
x=y(i)+(count+1)*(y(i+1)-y(i))/puntos;z=Q+x;integ1=integ1+2*(2*(&dbetai)
+x*(&ddbetai))*(&pdf);
integ2=integ2+2*x*(&pdf);
integ3=integ3+2*x*(&betai)*(&pdf);
end;
x=y(i)+(puntos-1)*(y(i+1)-y(i))/puntos;z=Q+x;integ1=integ1+4*(2*(&dbetai)
+x*(&ddbetai))*(&pdf);
integ2=integ2+4*x*(&pdf);
integ3=integ3+4*x*(&betai)*(&pdf);
integ1=((y(i+1)-y(i))/puntos)*integ1/3;
integ2=((y(i+1)-y(i))/puntos)*integ2/3;
integ3=((y(i+1)-y(i))/puntos)*integ3/3;
sinteg1=sinteg1+integ1;sinteg2=sinteg2+integ2;sinteg3=sinteg3+integ3;
i=i+1;
end;
integral=0;integra2=0;integra3=0;
x=y(i);z=Q+x;integral=(2*(&dbetad)+x*(&ddbetad))*(&pdf);
integra2=x*(&pdf);
integra3=x*(&betad)*(&pdf);
x=topem;z=Q+x;integral=integral+(2*(&dbetai)+x*(&ddbetai))*(&pdf);
integra2=integra2+x*(&pdf);
integra3=integra3+x*(&betai)*(&pdf);
puntos=2*int((topem-y(i))/(2*epsilon));
do count=1 to puntos-3 by 2;
x=y(i)+count*(topem-y(i))/puntos;z=Q+x;integral=integral+4*(2*(&dbetai)
+x*(&ddbetai))*(&pdf);
integra2=integra2+4*x*(&pdf);
integra3=integra3+4*x*(&betai)*(&pdf);
x=y(i)+(count+1)*(topem-y(i))/puntos;z=Q+x;integral=integral+2*(2*(&dbetai)

```

```

+x*(&ddbetai))*(&pdf);
integra2=integra2+2*x*(&pdf);
integra3=integra3+2*x*(&betai))*(&pdf);
end;
x=y(i)+(puntos-1)*(topem-y(i))/puntos;z=Q+x;integra1=integra1+4*(2*(&dbetai)
+x*(&ddbetai))*(&pdf);
integra2=integra2+4*x*(&pdf);
integra3=integra3+4*x*(&betai))*(&pdf);
integra1=((topem-y(i))/puntos)*integra1/3;
integra2=((topem-y(i))/puntos)*integra2/3;
integra3=((topem-y(i))/puntos)*integra3/3;
integra1=sinteg1+integra1;integra2=sinteg2+integra2;integra3=sinteg3+integra3;
/* Calculamos las derivadas de Q* respecto a los parámetros */
z=Q;
T2Q=(p+h+beta0*(w-p))*(&pdf)+(w-p)*(integra1+S2);
dqch=-(&cdf)/T2Q;
dqcb=delta*(1-(&cdf))/T2Q;
dqcg=(1-delta)*(1-(&cdf))/T2Q;
dqv=(1-delta)*(1-(&cdf))/T2Q;
dq=-1/T2Q;
/* Calculamos las derivadas de B(Q*) respecto a los parámetros */
dbqch=-(Q-mu+integra2);
dbqcb=-integra3;
dbqcg=-(integra2-integra3);
dbqv=mu-(integra2-integra3);
dbqc=-Q;
run;
proc print;
var c cb ch cg v h w p pe qu a b mu beta0 alfa m Q TQ BQ T2Q Q0 T0Q B0Q Qk
TkQ BkQ BQreal dqch dqcb dqcg dqv dqc dbqch dbqcb dbqcg dbqv dbqc;
run;
quit;

```


A.5. Programa para el modelo *newsboy* con pedido de emergencia y demanda uniforme

```

data solucion;
a=75;b=925;c=50;cb=75;ch=20;cg=10;v=90;beta0=0.9;
h=c+ch;w=cb-c;p=cg+v-c;
/* Beta potencial */
alfa=1.5;m=500;n=1;
array y{1};y(1)=m;
let betad=((x<m)*(beta0*(1-(x/m)**alfa)));
let betai=((x<=m)*(beta0*(1-(x/m)**alfa)));
let dbetad=((x<m)*(-(beta0*alfa/(m**alfa))*(x**(alfa-1))));
let primi=((x<=m)*(beta0*((x**2)/2-(x**(alfa+2))/((alfa+2)*(m**alfa)))));
let primd=((x<m)*(beta0*((x**2)/2-(x**(alfa+2))/((alfa+2)*(m**alfa)))));
/* fin Beta potencial */
/* Beta exponencial */
/*alfa=0.005;m=505;n=1;
array y{1};y(1)=m;
let betad=((x<m)*(beta0*exp(-alfa*x)));
let betai=((x<=m)*(beta0*exp(-alfa*x)));
let dbetad=((x<m)*(-alfa*beta0*exp(-alfa*x)));
let primi=((x<=m)*(-beta0*(1+alfa*x)*exp(-alfa*x)/(alfa**2)));
let primd=((x<m)*(-beta0*(1+alfa*x)*exp(-alfa*x)/(alfa**2)));*/
/* fin Beta exponencial */
/* Beta sinusoidal */
/*m=500;n=1;
array y{1};y(1)=m;
let betad=((x<m)*(beta0*cos(2*atan(1)*x/m)));
let betai=((x<=m)*(beta0*cos(2*atan(1)*x/m)));
let dbetad=((x<m)*(-(beta0**2*atan(1)/m)*sin(2*atan(1)*x/m)));
let primi=((x<=m)*(beta0*m/(2*atan(1))*(x*sin(2*atan(1)*x/m)
+m*cos(2*atan(1)*x/m)/(2*atan(1))));
let primd=((x<m)*(beta0*m/(2*atan(1))*(x*sin(2*atan(1)*x/m)
+m*cos(2*atan(1)*x/m)/(2*atan(1))));*/
/* fin Beta sinusoidal */
/* Beta Nahmias generalizada */
/*m=1000000;beta1=0.4;n=1;
array y{2};y(1)=300;y(2)=1000000;
let betad=((x<y(1))*beta0+(x>=y(1))*beta1);
let betai=((x<=y(1))*beta0+(x>y(1))*beta1);
let dbetad=0;
let primi=((x<=y(1))*(0.5*beta0*x**2)+(x>y(1))*(0.5*beta1*x**2));
let primd=((x<y(1))*(0.5*beta0*x**2)+(x>=y(1))*(0.5*beta1*x**2));*/
/* fin Beta Nahmias generalizada */
/* Beta 2 escalones */
/*m=505;beta1=0.6;n=2;

```

```

array y{2};y(1)=200;y(2)=m;
let betad=((x<y(1))*beta0+(x>=y(1))*(x<m)*beta1);
let betai=((x<=y(1))*beta0+(x>y(1))*(x<=m)*beta1);
let dbetad=0;
let primi=((x<=y(1))*(0.5*beta0*x**2)+(x>y(1))*(x<=m)*(0.5*beta1*x**2));
let primd=((x<y(1))*(0.5*beta0*x**2)+(x>=y(1))*(x<m)*(0.5*beta1*x**2));*/
/* fin Beta 2 escalones */
/* Beta 3 escalones */
/*m=505;beta1=0.6;beta2=0.3;n=3;
array y{3};y(1)=200;y(2)=400;y(3)=505;
let betad=((x<y(1))*beta0+(x>=y1)*(x<y(2))*beta1+(x>=y(2))*(x<m)*beta2);
let betai=((x<=y(1))*beta0+(x>y1)*(x<=y(2))*beta1+(x>y(2))*(x<=m)*beta2);
let dbetad=0;
let primi=((x<=y(1))*(0.5*beta0*x**2)+(x>y(1))*(x<=y(2))*(0.5*beta1*x**2)
+(x>y(2))*(x<=m)*(0.5*beta2*x**2));
let primd=((x<y(1))*(0.5*beta0*x**2)+(x>=y(1))*(x<y(2))*(0.5*beta1*x**2)
+(x>=y(2))*(x<m)*(0.5*beta2*x**2));*/
/* fin Beta 3 escalones */
/* Nueva Beta exponencial */
/*alfa=0.005;m=505;n=1;
array y{1};y(1)=m;
let betad=((x<m)*(beta0*(1-(1-exp(-alfa*x))/(1-exp(-alfa*m)))));
let betai=((x<=m)*(beta0*(1-(1-exp(-alfa*x))/(1-exp(-alfa*m)))));
let dbetad=((x<m)*(-alfa*beta0*exp(-alfa*x)/(1-exp(-alfa*m)))));
let primi=((x<=m)*(-beta0*((1+alfa*x)*exp(-alfa*x)/(alfa**2)+0.5*(x**2)*exp(-alfa*m))
/(1-exp(-alfa*m)))));
let primd=((x<m)*(-beta0*((1+alfa*x)*exp(-alfa*x)/(alfa**2)+0.5*(x**2)*exp(-alfa*m))
/(1-exp(-alfa*m)))));*/
/* fin Nueva Beta exponencial */
/* Beta racional */
/*alfa=0.005;m=505;n=1;
array y{1};y(1)=m;
let betad=((x<y(1))*(beta0/(1+alfa*x)));
let betai=((x<=y(1))*(beta0/(1+alfa*x)));
let dbetad=((x<y(1))*(-alfa*beta0/((1+alfa*x)**2)));
let primi=((x<=y(1))*((beta0/alfa)*(x-(log(1+alfa*x))/alfa)));
let primd=((x<y(1))*((beta0/alfa)*(x-(log(1+alfa*x))/alfa)));*/
/* fin Beta racional */
/* Beta coseno ampliada */
/*m=505;n=1;
array y{1};y(1)=m;
let betad=((x<m)*(0.5*beta0*(1+cos(4*atan(1)*x/m))));
let betai=((x<=m)*(0.5*beta0*(1+cos(4*atan(1)*x/m))));
let dbetad=((x<m)*(-2*beta0*atan(1)/m)*sin(4*atan(1)*x/m));
let primi=((x<=m)*(0.5*beta0*(0.5*(x**2)-x*sin(4*atan(1)*x/m)
-m*cos(4*atan(1)*x/m)/(4*atan(1)))));
let primd=((x<m)*(0.5*beta0*(0.5*(x**2)-x*sin(4*atan(1)*x/m)
-m*cos(4*atan(1)*x/m)/(4*atan(1)))));*/

```

```

/* fin Beta coseno ampliada */
Q0=(a*h+b*p)/(h+p);
S=min(m,b-a);
if (S<=b-Q0) then do;Q=Q0;goto fin;end;
a0=b-S;b0=Q0;
k=n;
if (k=0) then goto paso13;
paso6:x=y(k);
if ((b-b0)>x) or ((b-a0)<x) then goto otro;
dti=h-x*(h+p-(p-w)*&betad)/(b-a);
dtd=h-x*(h+p-(p-w)*&betai)/(b-a);
if (dti>0) then do;b0=b-x;goto paso13;end;
if ((dti<=0) and (dtd>=0)) then do;Q=b-x;goto fin;end;
a0=b-x;
otro:k=k-1;
if (k>0) then goto paso6;
paso13:x=a0;
paso14:xi=(h*(b-a)-(p-w)*(x**2)*&dbetad)/(h+p-(p-w)*(&betad+x*&dbetad));
if (abs(xi-x)>0.000001) then do;x=xi;goto paso14;end;
Q=b-x;
fin:AQ=0;x=b-Q;if (x>m) then x=m;AQ=&primi;x=0;AQ=AQ-&primi;
k=n;
if (k=0) then goto nada;
bucle:x=y(k);if ((x>=b-Q) or (x>=m)) then goto otro2;
AQ=AQ+&primi-&primd;
otro2:k=k-1;
if (k>0) then goto bucle;
nada:TQ=(0.5*h*(Q-a)**2+0.5*p*(b-Q)**2-(p-w)*AQ)/(b-a);
TQ0=(0.5*h*(Q0-a)**2+0.5*p*(b-Q0)**2)/(b-a);
BQ=0.5*(v-c)*(a+b)-TQ;
BQ0=0.5*(v-c)*(a+b)-TQ0;
run;
proc print;
var a b Q0 BQ0 TQ0 Q BQ TQ;
run;
quit;

```

A.6. Programa para el modelo *newsboy* con pedido de emergencia y demanda exponencial

```

data solucion;
mu=150;c=75;cb=95;ch=20;cg=10;v=115;beta0=0.9;
h=c+ch;w=cb-c;p=cg+v-c;
/* Beta potencial */
m=50;alfa=2;
delta=beta0*(1-(m/mu)*exp(-(m/mu))-exp(-(m/mu))-((mu/m)**alfa)*gamma(2+alfa)
  *CDF('gamma',m/mu,2+alfa));
/*Fin Beta potencial */
/* Beta exponencial */
/*m=50;alfa=0.03;
delta=beta0*(1-(1+m*(1+alfa*mu)/mu)*exp(-m*(1+alfa*mu)/mu))/((1+alfa*mu)**2);*/
/*Fin Beta exponencial */
/* Beta sinusoidal */
/*m=50;
delta=beta0*((1+0.5*constant('Pi')*exp(-m/mu)-(2-(4*m/(constant('Pi')*mu))*exp(-m/mu))
  /(1+(2*m/(constant('Pi')*mu)**2)))/(1+(mu*constant('Pi')/(2*m)**2));*/
/*Fin Beta sinusoidal */
/* Beta racional */
/*m=50;alfa=0.1;ei1=2.196406349;ei2=0.7023801189;
delta=beta0*(1/(alfa*mu))*(1-exp(-m/mu)-(exp(1/(alfa*mu)))/((alfa*mu)**2))*(ei1-ei2));*/
/*Fin Beta racional */
/* Beta step */
/*beta1=0.4;m1=20;m2=50;
delta=beta0*(1-(1+m1/mu)*exp(-m1/mu))+beta1*((1+m1/mu)*exp(-(m1/mu))
  -(1+m2/mu)*exp(-(m2/mu)));*/
/*Fin Beta step */
q=mu*log(1+(p-(p-w)*delta)/h);
tq=h*q;
bq=(v-c)*mu-tq;
q0=mu*log(1+p/h);
bq0=(v-c)*mu-h*q0;
qin=mu*log(1+p/h-beta0*(p-w)/h);
bqin=(v-c)*mu-h*qin;
bqq0=(v-c)*mu-h*(q0-mu)-((p+h)*mu-(p-w)*delta)*exp(-q0/mu);
bqqin=(v-c)*mu-h*(qin-mu)-((p+h)*mu-(p-w)*delta)*exp(-qin/mu);
renta=h*log(1+(p-(p-w)*delta)/h);
run;
proc print;
var q tq bq delta renta q0 bq0 qin bqin bqq0 bqqin mu c cb ch cg v beta0 h w p delta;
run;
quit;

```

Bibliografía

- [1] Abad P.L. (1996). Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability and partial backordering. *Management Science* 42, 1093–1104.
- [2] Abad P.L. (2001). Optimal price and order size for a reseller under partial backordering. *Computers and Operations Research* 28, 53–65.
- [3] Abad P.L. (2003). Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability, finite production and partial backordering and lost sale. *European Journal of Operational Research* 144, 676–684.
- [4] Abad P.L. (2008). Optimal price and order size under partial backordering incorporating shortage, backorder and lost sale costs. *International Journal of Production Economics* 114, 179–186.
- [5] Abdel-Malek L., Montanari R., Morales L.C. (2004). Exact, approximate, and generic iterative models for the multi-product Newsboy problem with budget constraint. *International Journal of Production Economics* 91, 189-198.
- [6] Alfares H. K. (2007). Inventory model with stock-level dependent demand rate and variable holding cost. *International Journal of Production Economics* 108, 259-265.
- [7] Apostol T.M. (1974). *Mathematical Analysis*, 2nd ed. Addison-Wesley.
- [8] Arcelus F.J., Kumar S., Srinivasan G. (2012). Risk tolerance and a retailer's pricing and ordering policies within a newsvendor framework. *Omega* 40, 188-198.

- [9] Arrow K. (1958). Historical background, in Arrow K., Karlin S. y Scarf H. (eds.). *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Propuction*. Stanford University Press, Stanford, California 3–15.
- [10] Arrow K., Harris T., Marschak J. (1951). Optimal inventory policy. *Econometrica* 19, 250–272.
- [11] Axsäter S. (2000). *Inventory Control*. Kluwer Academic Publishers.
- [12] Baker R.C., Urban T.L. (1988). A Deterministic Inventory System with an Inventory-Level-Dependent Demand Rate. *Journal of the Operational Research Society* 39, 823-831.
- [13] Bakker M., Riezebos J., Teunter R.H. (2012). Review of inventory systems with deterioration since 2001. *European Journal of Operational Research* 221, 275-284.
- [14] Berman O., Perry P. (2006). An EOQ model with state-dependent demand rate. *European Journal of Operational Research* 171, 255-272.
- [15] Bhunia A.K., Kundu S., Sannigrahi T., Goyal S.K. (2009). An application of tournament genetic algorithm in a marketing oriented economic production lot-size model for deteriorating items. *International Journal of Production Economics* 119, 112–121.
- [16] Brito A.J., de Almeida A.T. (2012). Modeling a multi-attribute utility news vendor with partial backlogging. *European Journal of Operational Research* 220, 820–830.
- [17] Chang C.T. (2004). Inventory models with stock-dependent demand and non-linear holding costs for deteriorating items. *Asia-Pacific Journal of Operational Research* 21, 435–446.
- [18] Chang C.T., Goyal S.K., Teng J.T. (2006). On “An EOQ model for perishable items under stock-dependent selling rate and time-dependent partial back-

- logging” by Dye and Ouyang. *European Journal of Operational Research* 174, 923–929.
- [19] Chang, C.T., Teng, J.T., Goyal, S.K. (2010). Optimal replenishment policies for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand. *International Journal of Production Economics* 123, 62-68.
- [20] Chikán A. (1990). *Inventory Models*. Kluwer Academic Publishers.
- [21] Choi S., Ruszczyński A. (2008). A Risk-Averse Newsvendor with Law Invariant Coherent Measures of Risks. *Operations Research Letters* 36, 77-82.
- [22] Chu P., Yang K.L., Liang S.K., Niu T. (2004). Note on inventory model with a mixture of back orders and lost sales. *European Journal of Operational Research* 159, 470–475.
- [23] Chung C.S., Hum S.H., Kirca O. (2000). An optimal procedure for the coordinated replenishment dynamic lot-sizing problem with quantity discounts. *Naval Research Logistics* 47, 686–695.
- [24] Dominey M.J.G., Hill R.M. (2004). Performance of approximations for compound Poisson distributed demand in the newsboy problem. *International Journal of Production Economics* 92, 145-155.
- [25] Dye C.Y. (2007). Joint pricing and ordering policy for a deteriorating inventory with partial backlogging. *Omega* 35, 184–189.
- [26] Dye C.Y., Chang H.J., Teng J.T. (2006). A deteriorating inventory model with time-varying demand and shortage-dependent partial backlogging. *European Journal of Operational Research* 172, 417–429.
- [27] Dye C.Y., Hsieh T.P., Ouyang L.Y. (2007). Determining optimal selling price and lot size with a varying rate of deterioration and exponential partial backlogging. *European Journal of Operational Research* 181, 668–678.

- [28] Dye C.Y., Ouyang L.Y. (2005). An EOQ model for perishable items under stock-dependent selling rate and time-dependent partial backlogging. *European Journal of Operational Research* 163, 776–783.
- [29] Edgeworth F. (1888). The mathematical theory of banking. *Journal of the Royal Statistical Society* 51, 113–127.
- [30] Fabrycky W. J., Banks J. (1967). *Procurement and Inventory Systems: Theory and Analysis*. Reinhold Book Company.
- [31] Ferguson M., Jayaraman V., Souza G.C. (2007). Note: An application of the EOQ model with nonlinear holding cost to inventory management of perishables. *European Journal of Operational Research* 180, 485-490.
- [32] Fry T. C. (1928) *Probability and its engineering uses*. Van Nostrand Reinhold.
- [33] Gallego G., Katircioglu K., Ramachandran B. (2007). Inventory management under highly uncertain demand. *Operations Research Letters* 35, 281-289.
- [34] Gallego G., Moon I. (1993). The distribution free newsboy problem: review and extensions. *Journal of the Operational Research Society* 44, 825–834.
- [35] Geng W., Zhao X., Gao D. (2010). A Single-Period Inventory System with a General S-Shaped Utility and Exponential Demand. *Journal of Systems Science and Systems Engineering* 19, 227-236.
- [36] Ghare P.M., Schrader G.F. (1963). A model for exponentially decaying inventory. *Journal of Industrial Engineering* 14(5) 238-243.
- [37] Giri B.C., Chaudhuri K.S. (1998). Deterministic models of perishable inventory with stock-dependent demand rate and nonlinear holding cost. *European Journal of Operational Research* 105, 467-474.
- [38] Giri B.C., Pal S., Goswami A., Chaudhuri, K.S. (1996). An inventory model for deteriorating items with stock-dependent demand rate. *European Journal of Operational Research* 95, 604-610.

- [39] Goh, M. (1992). Some results in inventory models having inventory level dependent demand rate. *International Journal of Production Economics* 27, 155-160.
- [40] Goh M. (1994). EOQ models with general demand and holding cost functions. *European Journal of Operational Research* 73, 50-54.
- [41] Goyal S.K., Giri B.C. (2001). Recent trends in modeling of deteriorating inventory. *European Journal of Operational Research* 134, 1-16.
- [42] Grubbstrom R. W. (2010). The Newsboy Problem when Customer Demand is a Compound Renewal Process. *European Journal of Operational Research* 203, 134-142.
- [43] Hadley G., Whitin T.M. (1963). *Analysis of Inventory Systems*. Prentice Hall.
- [44] Harris F.W. (1913). How many parts to make at once. *Factory, The Magazine of Management* 10, 135-136 (Reprinted in: *Operations Research* 38, 947-950).
- [45] Hillier F.S., Lieberman G.J. (2001). *Introduction to Operations Research*, seventh ed. McGraw-Hill, Boston, MA, USA.
- [46] Huang D., Zhou H., Zhao Q.H. (2011). A competitive multiple-product newsboy problem with partial product substitution. *Omega* 39, 302-312.
- [47] Jammernegg W., Kischka P. (2013). The price-setting newsvendor with service and loss constraints. *Omega* 41, 326-335.
- [48] Jörnsten K., Nonås S.L., Sandal L., Ubøe J. (2012). Transfer of risk in the newsvendor model with discrete demand. *Omega* 40, 404-414.
- [49] Jung H., Klein C.M. (2006). Optimal inventory policies for profit maximizing EOQ models under various cost functions. *European Journal of Operational Research* 174, 689-705.
- [50] Khouja M. A. (1996). A Note on the newsboy problem with an emergency supply option. *Journal of the Operational Research Society* 47, 1530-1534.

- [51] Khouja M. A. (1999). The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research. *Omega* 27, 537–553.
- [52] Khouja M., Vergara F.E. (2008). Single-period inventory model with a delayed incentive option for selling excess inventory. *International Transactions in Operational Research* 15, 359–379.
- [53] Kim D.H., Park K.S. (1985). (Q,r) inventory model with a mixture of lost sales and time-weighted backorders. *Journal of the Operational Research Society* 36, 231–238.
- [54] Lau A., Lau H. (1988). Maximizing the probability of achieving a target profit level in a two-product newsboy problem. *Decision Sciences* 19, 392–408.
- [55] Lau H. (1980). The newsboy problem under alternative optimization objectives. *Journal of the Operational Research Society* 31, 525–535.
- [56] Lee H., Lodree E. J. (2010). Modeling customer impatience in a newsboy problem with time-sensitive shortages. *European Journal of Operational Research* 205, 595–603.
- [57] Lee H.L., Nahmias S. (1993). Single-product single-location models, in Graves S.C., Rinnoy A.H.C. y Zipkin P.H.(eds). *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol. 4, Logistics of Production and Inventory. North-Holland, 3–55.
- [58] Lodree E.J. (2007). Advanced supply chain planning with mixtures of backorders, lost sales, and lost contract. *European Journal of Operational Research* 181, 168–183.
- [59] Lodree E., Kim Y., Jang W. (2008). Time and quantity dependent waiting costs in a newsvendor problem with backlogged shortages. *Mathematical and Computer Modeling* 47, 60–71.

- [60] Lodree E., Klein C., Jang W. (2004). Minimizing customer response time in a twostage supply chain system with variable lead time and stochastic demand. *International Journal of Production Research* 42, 2263–2278.
- [61] Mahata G.C., Goswami A. (2009). Fuzzy EOQ Models for Deteriorating Items with Stock Dependent Demand & Non-Linear Holding Costs. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences* 5, 94-98.
- [62] Montgomery D.C., Bazaraa M.S., Keswani A.K. (1973). Inventory models with a mixture of backorders and lost sales. *Naval Research Logistics Quarterly* 20, 255–263.
- [63] Morse P. M., Kimbel G. E. (1951). *Methods in Operations Research*. MIT Press.
- [64] Muhlemann, A.P., Valtis-Spanopoulos, N.P. (1980). A variable holding cost rate EOQ model. *European Journal of Operational Research* 4, 132-135.
- [65] Naddor E. (1982). *Inventory Models*. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida.
- [66] Nahmias S. (1982). Perishable inventory theory: A review. *Operations Research* 30, 680-708.
- [67] Niculescu C., Persson, L.E. (2006). *Convex functions and their applications: a contemporary approach*. Springer, New York, USA.
- [68] Ouyang L.Y., Hsieh T.P. Dye C.Y., Chang H.C. (2003). An inventory model for deteriorating items with stock-dependent demand under the conditions of inflation and time-value of money. *The Engineering Economist* 48, 52–68.
- [69] Padmanabhan G., Vrat P. (1990). Inventory model with a mixture of backorders and lost sales. *International Journal of Systems Sciences* 21, 1721–1726.
- [70] Padmanabhan G., Vrat P. (1995). EOQ models for perishable items under stock dependent selling rate. *European Journal of Operational Research* 86, 281–292.

- [71] Pal A.K., Bhunia A.K., Mukherjee R.N. (2006). Optimal lot size model for deteriorating items with demand rate dependent on displayed stock level (DSL) and partial backordering. *European Journal of Operational Research* 175, 977–991.
- [72] Pal S., Goswami A., Chaudhuri K.S. (1993). A deterministic inventory model for deteriorating items with stock-dependent demand rate. *International Journal of Production Economics* 32, 291-299.
- [73] Pando V., García-Laguna J., San-José L.A. (2012^a). Optimal policy for profit maximising in an EOQ model under non-linear holding cost and stock-dependent demand rate. *International Journal of Systems Science* 43(11), 2160-2171.
- [74] Pando V., San-José L.A., García-Laguna J., Sicilia J. (2012^b). Maximizing profits in an inventory model with both demand rate and holding cost per unit time dependent on the stock level. *Computers & Industrial Engineering* 62(2), 599-608.
- [75] Pando V., San-José L.A., García-Laguna J., Sicilia J. (2013^a). A newsboy problem with an emergency order under a general backorder rate function. *Omega* 41, 1020-1028.
- [76] Pando V., San-José L.A., García-Laguna J., Sicilia J. (2013^b). An economic lot-size model with non-linear holding cost hinging on time and quantity. *International Journal of Production Economics* 145, 294-303.
- [77] Pando V., San-José L.A., García-Laguna J., Sicilia J. (2013^c). Some general properties for the newsboy problem with an extraordinary order. *Top*, DOI 10.1007/s11750-013-0287-7.
- [78] Pando V., San-José L.A., García-Laguna J., Sicilia J. (2014). A newsvendor inventory model with an emergency order to supply a non-increasing fraction of shortage. *Applied Mathematics and Computation* 237, 560-570.

- [79] Papachristos S., Skouri K. (2003). An inventory model with deteriorating items, quantity discount, pricing and time-dependent partial backlogging. *International Journal of Production Economics* 83, 247–256.
- [80] Park K.S. (1982). Inventory model with partial backorders. *International Journal of Systems Sciences* 13, 1313–1317.
- [81] Porteus E.L. (2002). *Stochastic Inventory Theory*. Stanford University Press. Stanford, California.
- [82] Raafat F. (1991). Survey of literature on continuously deteriorating inventory models. *Journal of the Operational Research Society* 42(1), 27-37.
- [83] Roberts A.W., Varberg D.E. (1973). *Convex Functions*. Academic Press.
- [84] Rosenberg D. (1979). A new analysis of a lot size model with partial backlogging. *Naval Research Logistics Quarterly* 26, 346–353.
- [85] Roy A. (2008). An inventory model for deteriorating items with price dependent demand and time-varying holding cost. *Advanced Modeling and Optimization* 10(1), 25-37.
- [86] San José L.A., Sicilia J., García-Laguna, J. (2005a). An inventory system with partial backlogging modeled according to a linear function. *Asia-Pacific Journal of Operational Research* 22, 189–209.
- [87] San José L.A., Sicilia J., García-Laguna, J. (2005b). The lot size-reorder level inventory system with customers impatience functions. *Computers and Industrial Engineering* 49, 349–362.
- [88] San José L.A., Sicilia J., Garcia-Laguna J. (2006). Analysis of an inventory system with exponential partial backordering. *International Journal of Production Economics* 100, 76–86.

- [89] San-José, L.A., Sicilia, J., García-Laguna, J. (2007). An economic lot-size model with partial backlogging hinging on waiting time and shortage period. *Applied Mathematical Modelling* 31, 2149-2159.
- [90] San-José, L.A., Sicilia, J., García-Laguna, J. (2009). A general model for EOQ inventory systems with partial backlogging and linear shortage costs. *International Journal of Systems Science* 40, 59-71.
- [91] Sana, S., Chaudhuri, K.S. (2008). A deterministic EOQ model with delays in payments and price-discount offers. *European Journal of Operational Research* 184, 509-533.
- [92] Sankarasubramanian E., Kumaraswamy, S. (1983). Optimal order quantity for pre-determined level profit. *Management Science* 29, 512-514.
- [93] SAS Institute Inc (2005). *SAS User's Guide: Basics*, Version 9.1. Cary, NC, USA.
- [94] Scarpello, G.M., Ritelli, D. (2008). EOQ when holding costs grow with the stock level: well-posedness and solutions. *Advanced Modeling and Optimization* 10(2), 233-240.
- [95] Shah N.H., Patel A.R., Lou K.R. (2011). Optimal ordering and pricing policy for price sensitive stock-dependent demand under progressive payment scheme. *International Journal of Industrial Engineering Computations* 2(3), 523-532.
- [96] Silver E. A., Pyke D.F., Petersen R. P. (1998). *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, 3rd ed. John Wiley, New York.
- [97] Skouri K., Papachristos S. (2003). Optimal stopping and restarting production times for an EOQ model with deteriorating items and time-dependent partial backlogging. *International Journal of Production Economics* 81-82, 525-531.

- [98] Teng J.T., Chang C.T. (2005). Economic production quantity models for deteriorating items with price- and stock-dependent demand. *Computers & Operations Research* 32, 297-308.
- [99] Urban, G.L. (1969). A mathematical modeling approach to product line decisions. *Journal of Marketing Research* 6 (1), 40-47.
- [100] Urban T.L. (2005). Inventory models with inventory-level-dependent demand: A comprehensive review and unifying theory. *European Journal of Operational Research* 162, 792-804.
- [101] Urban T.L. (2008). An extension of inventory models with discretely variable holding costs. *International Journal of Production Economics* 114, 399-403.
- [102] Wang S.P. (2002). An inventory replenishment policy for deteriorating items with shortages and partial backlogging. *Computers and Operations Research* 29, 2043-2051.
- [103] Wang X.W., Webster S. (2009). The loss-averse newsvendor problem. *Omega* 37, 93-105.
- [104] Wanke P.F. (2008). The uniform distribution as a first practical approach to new product inventory management. *International Journal of Production Economics* 114, 811-819.
- [105] Weiss H.J. (1982). Economic order quantity models with nonlinear holding costs. *European Journal of Operational Research* 9, 56-60.
- [106] Whitin T.M. (1957). *The Theory of Inventory Management*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [107] Wolfe H.B. (1968). A model for control of style merchandise. *Industrial Management Review* 9, 69-82.

- [108] Wu K.S., Ouyang L.Y., Yang C.T. (2006). An optimal replenishment policy for noninstantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging. *International Journal of Production Economics* 101, 369–384.
- [109] Yang, H.L., Teng, J.T., Chern, M.S. (2010). An inventory model under inflation for deteriorating items with stock-dependent consumption rate and partial backlogging shortages. *International Journal of Production Economics* 123, 8–19.
- [110] Yang S., Shi C.V., Zhao X. (2011). Optimal ordering and pricing decisions for a target oriented newsvendor. *Omega* 39, 110–115.
- [111] You, S.P. (2005). Inventory policy for products with price and time-dependent demands. *Journal of the Operational Research Society* 56, 870–873.
- [112] Zhou Y.W. (2003). A multi-warehouse inventory model for items with timevarying demand and shortages. *Computers and Operations Research* 30, 2115–2134.
- [113] Zhou Y.W., Lau H.S., Yang S.L. (2003). A new variable production scheduling strategy for deteriorating items with time-varying demand and partial lost sale. *Computers and Operations Research* 30, 1753–1776.
- [114] Zipkin P.H. (2000). *Foundations of Inventory Management*. McGraw-Hill.