



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**Análisis límite de pórticos 2D mediante el
método cinemático directo. Función
objetivo: máximo factor de carga
aplicable.**

Autor:

López de Frutos, Adrián

Tutor:

Cacho Pérez, Mariano

**Construcciones Arquitectónicas,
Ingeniería del Terreno y Mecánica
de los Medios Continuos y Teoría
de Estructuras**

Valladolid, septiembre 2024

Resumen

En este trabajo se busca el máximo factor de carga aplicable en pórticos de barras esbeltas bidimensionales a través de la optimización de un problema de cálculo plástico en el que se aplica el método directo de análisis límite. El método consiste en encontrar el mecanismo de colapso de la estructura, en este caso un pórtico plano, a partir de una optimización basado en las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

El objetivo es evitar la búsqueda del mecanismo de colapso a través de prueba y error, reduciendo el tiempo invertido en encontrar el mecanismo de colapso final. Para cumplir dicho objetivo se desarrollará y aplicará un código en Wolfram Mathematica.

Palabras clave

Optimización

Cálculo Plástico

Rótulas Plásticas

Factor de carga de colapso.

Mecanismo de Colapso

Abstract

In this work, the maximum load factor applicable in two-dimensional slender bar frames is sought through the optimization of a plastic calculation problem in which the direct method of limit analysis is applied. The method consists of finding the collapse mechanism of the structure, in this case a flat frame, from an optimization based on the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions.

The goal is to avoid searching for the collapse mechanism through trial and error, reducing the time spent finding the final collapse mechanism. To meet this objective, code will be developed and applied in Wolfram Mathematica.

Keywords

Optimization

Plastic Calculation

Plastic Joints

Maximum collapse load factor

Collapse Mechanism

Agradecimientos

Antes de todo me gustaría expresar mi agradecimiento a Mariano Cacho, por su apoyo constante y sabios consejos a lo largo del proyecto. Su dedicación ha sido fundamental para la culminación del trabajo.

Agradecer también a mi familia, a mis padres Enrique y Esther y a mis hermanos Gonzalo y Valeria, por haber confiado en mí y haberme apoyado desde el inicio de mis estudios.

También me gustaría agradecer a mis amigos por su apoyo durante este proceso y haberme ayudado a desconectar cuando lo necesitaba.

Finalmente, agradezco a todas las personas y organizaciones que han contribuido con su apoyo y recursos para que este TFG sea una realidad.

Este trabajo es el resultado del esfuerzo conjunto de muchas personas, y a todas ellas les estoy eternamente agradecido.

Adrián

Valladolid, España
Septiembre, 2024

Índice

Resumen	3
Palabras clave	3
Abstract	4
Keywords	4
Agradecimientos	5
Índice	7
1.Introducción.....	16
1.1. Objetivos del trabajo	16
1.2. Estado del Arte	17
1.3. Justificación del trabajo.....	18
1.4. Herramientas empleadas	18
1.5. Estructura de la memoria	18
2. Teoría del Cálculo plástico en pórticos planos	22
2.1. Análisis de la sección de una barra	22
2.2. Hipótesis del comportamiento elastoplástico.....	24
2.3. Tipos de esfuerzos a los que se van a someter las barras	25
2.3.1. Esfuerzos axiles.....	25
2.3.2. Esfuerzos flectores	26
2.4. Modelo de rótula Plástica	33
2.5. Grados de Hiperestaticidad	35
2.5.1. Estructura Hiperestática	37
2.5.2. Estructura isostática	37
2.5.3. Estructura hipostática o mecanismo.....	38
2.6. Mecanismo de colapso.....	38
2.7. Métodos de resolución.	39
2.7.1. Teoremas fundamentales del análisis plástico	40
2.7.2. Método estático	42
2.7.3. Método cinemático.....	42
2.8. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).....	43
2.8.1. Condiciones necesarias de primer orden	43

2.8.2. Condiciones suficientes	44
2.8.3. Aplicación al código	44
3. Resolución a través del método cinemático	46
3.1. Ejemplo 1. Resolución a mano.....	46
3.1.1 Ejemplo 1. Resolución a través de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker	51
3.1.2. Ejemplo 1. Resolución con código Wolfram Mathematica y SAP2000.	53
3.2. Ejemplo 2. Resolución a mano.....	57
3.2.1. Ejemplo 2. Resolución con código Wolfram Mathematica y SAP2000.	61
4. Resolución de problemas de aplicación	66
4.1. Problema 1. Pórticos anexos bidimensionales de una nave industrial.	66
4.2. Problema 2. Vivienda de dos plantas con garaje.	71
5. Estudio económico	78
5.1 Introducción	78
5.2 Costes directos	78
5.2.1. Mano de obra.....	79
5.2.2. Material amortizable.....	80
5.2.3. Material no amortizable	81
5.2.4. Costes directos totales.....	81
5.3. Costes indirectos	82
5.4. Costes totales.....	83
6. Conclusiones.....	86
6.1. Líneas futuras.....	87
7. Bibliografía.....	90
8. Anexos.....	92
8.1. Código Ejemplo 1.....	92
8.2. Código Ejemplo 2.....	99
8.3. Código Problema 1.....	106
8.4. Código Problema 2.....	115

Índice de Imágenes

Figura 1. Diagrama tensión-deformación.	22
Figura 2. Diagrama tensión-deformación REAL (Izquierda) vs IDEAL (Derecha).....	24
Figura 3. Esfuerzo axial a tracción y compresión.	25
Figura 4. Momentos flectores positivos y negativos con sus líneas neutras.....	27
Figura 5. Distribución de esfuerzos a lo largo de la sección de la barra.....	27
Figura 6. Plastificación de una sección sometida a flexión pura.	29
Figura 7. Sección plastificada cuando llega al momento plástico M_p	29
Figura 8. Distribución de la suma de las tensiones del esfuerzo cortante y momento flector en un perfil doble T (Figura 7.19, bibliografía [5]).....	30
Figura 9. Sección sometida a flexión compuesta. Plastificación parcial (Figura 12.11, Bibliografía [6]).	32
Figura 10. Sección sometida a flexión compuesta. Plastificación parcial (Figura 12.12, Bibliografía [6]).....	32
Figura 11. Proceso de formación de una rótula (Bibliografía [7]).	33
Figura 12. Comparación del diagrama Tensión-deformación y el proceso de formación de una rótula.....	34
Figura 13. Barra biempotrada. Estructura hiperestática.....	37
Figura 14. Barra empotrada. Estructura isostática.	37
Figura 15. Barra empotrada con rótula en voladizo. Estructura hipostática.....	38
Figura 16. Resolución simbólica del límite superior en una viga biempotrada. (Figura punto 5.8.1 de la Bibliografía [4]).....	40
Figura 17. Resolución simbólica de límite inferior en una viga biempotrada. (Figura punto 5.8.2 de la Bibliografía [4]).....	41
Figura 18. Pórtico biempotrado con dos cargas puntuales.....	47
Figura 19. Ejemplo 1. Primer mecanismo de colapso.	48
Figura 20. Ejemplo 1. Segundo mecanismo de colapso.	48
Figura 21. Ejemplo 1. Tercer mecanismo de colapso.....	50
Figura 22. Rótulas Plásticas Ejemplo 1.	56
Figura 23. Factor de carga del Ejemplo 1.....	56
Figura 24. Pórtico empotrado.....	57
Figura 25. Primer mecanismo de colapso.	58
Figura 26. Segundo mecanismo de colapso.....	59
Figura 27. Factor de carga Ejemplo 2.	62
Figura 28. Rótulas Plásticas Ejemplo 2. Instante antes del colapso.....	63
Figura 29. Problema 1. Pórticos anexos de una nave industrial.....	67
Figura 30. Rótulas Plásticas Problema 1. Instante antes del colapso.	69
Figura 31. Factor de carga Problema 1.	69
Figura 32. Factor de carga Problema 1. Representación de los datos de la optimización.	70

Figura 33. Problema 2. Estructura de vivienda con garaje.....	72
Figura 34. Rótulas Plásticas Problema 2. Instante antes del colapso.....	74
Figura 35. Factor de carga Problema 2.	74
Figura 36. Factor de carga Problema 2. Representación de los datos de la optimización.....	75

Índice de Ecuaciones

Ecuación 1. Ley de Hooke.....	23
Ecuación 2.Esfuerzos axiles.....	26
Ecuación 3. Esfuerzos flectores puros.....	27
Ecuación 4. Módulo resistente.....	28
Ecuación 5. Momento plástico.....	28
Ecuación 6. Tensión de una sección sometida a una flexión compuesta.....	31
Ecuación 7. Relación de los grados de hiperestaticidad.....	35
Ecuación 8. Grado de hiperestaticidad global.....	35
Ecuación 9. Grado de hiperestaticidad global. Número de incógnitas.....	36
Ecuación 10. Grado de hiperestaticidad global. Número de ecuaciones.....	36
Ecuación 11. Grado de hiperestaticidad externo.....	36
Ecuación 12. Número de rótulas para formar un mecanismo.....	38
Ecuación 13. Número de mecanismos independientes/Número de ecuaciones de equilibrio.....	39
Ecuación 14. Condiciones necesarias de Primer orden.....	43
Ecuación 15. Condiciones suficientes.....	44
Ecuación 16. Máximo factor de carga.....	51
Ecuación 17. Restricción de momentos plásticos.....	51
Ecuación 18. Ecuaciones de equilibrio.....	51
Ecuación 19. Restricción de axíles.....	55
Ecuación 20. Ecuaciones de compatibilidad.....	60

Índice de Tablas

Tabla 1. Tabla de momentos, giros y ecuaciones.....	60
Tabla 2. Costes de mano de obra.	79
Tabla 3. Número total de horas trabajadas.	80
Tabla 4. Costes del material amortizable.	81
Tabla 5. Costes de material no amortizable.	81
Tabla 6. Costes directos totales.	82
Tabla 7. Costes indirectos.....	82
Tabla 8. Coste final con IVA.....	83

CAPÍTULO 1

Introducción

1.Introducción

1.1. Objetivos del trabajo

El objetivo de este proyecto es el estudio de un problema de cálculo plástico que se imparte en la asignatura de cuarto curso del grado de Ingeniería Mecánica denominada Estructuras y Construcciones Industriales. En esta asignatura se estudia la resolución manual, a través del Método Directo, de diferentes estructuras, entre ellas las estructuras porticadas planas. En este método se busca, vía la combinación de los posibles mecanismos de fallo de la estructura, conseguir el momento de colapso plástico, que varía del tipo de carga aplicada, ya sea puntual o distribuida. Tras ello se podrá optar a la resolución de los valores de las cargas mencionadas anteriormente y los desplazamientos y giros de cualquier punto de cada una de las barras estudiadas en la estructura.

Este trabajo se centrará en los conocimientos aprendidos con anterioridad, con el objetivo de establecer y desarrollar un programa o código a partir de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) que sistematice el cálculo del momento plástico y que nos permita optimizar su resolución, reduciendo tanto el tiempo como los cálculos empleados en resolverlo.

Los ejemplos estudiados en la asignatura son inherentemente fáciles de resolver e intuitivos, perfectos para una aplicación docente. Sin embargo, en las situaciones reales el cálculo plástico puede llegar a ser muy complejo debido a diversas razones que no se admiten en los modelos simplificados.

Uno de ellos es que, aún con la facilidad con la que podemos identificar las rotulas y los grados de hiperestaticidad a través de una simple observación, en estructuras más complejas, estos segundos pueden ser más difíciles de encontrar.

Tras ello se obtienen las ecuaciones de equilibrio necesarias para resolver el Principio de Desplazamientos Virtuales (PDV) con gran facilidad. El problema llega al buscar el mecanismo de colapso, que, para estructuras visualmente sencillas, puede presentar gran complejidad encontrar el mecanismo final para la estructura planteada. Esto se debe a que, dependiendo el mecanismo de

colapso planteado, este nos dará un factor de carga de colapso distinto que tendremos que comprobar a través de las ecuaciones anteriormente planteadas para resolver el problema. Si los valores de este momento en cada una de las rotulas cumplen, lo que indica que el momento plástico en todas las rotulas es inferior o igual al valor absoluto de M_p , el mecanismo planteado es el mecanismo de colapso de la estructura. Sin embargo, si alguno de los momentos en las rotulas es superior a M_p , el mecanismo no sería seguro, lo que implicaría volver a empezar, eligiendo un nuevo mecanismo de colapso.

1.2. Estado del Arte

El concepto de plasticidad aparece en 1713 con Parent cuando demostró la distribución lineal de las tensiones en un elemento recto sometido a un momento flector.

En el siglo XIX se plantan las bases de la teoría de la plasticidad que tiene como punto de partida los resultados experimentales sobre el comportamiento macroscópico de los materiales sometidos a deformación. Gracias a esto, se desarrollan los trabajos de Tresca, Saint-Venant y Bauschinger en el que se introducen los criterios de fallo, el concepto de deformación irreversible, el endurecimiento y elasticidad perfecta. Tras ello, los primeros estudios sobre el comportamiento plástico que demuestran que una viga empotrada sólo colapsa cuando se produzca plastificación en tres secciones, empotramientos y una sección central, surgen a principios del siglo XX, en Hungría y Países Bajos.

Más adelante, a mediados del siglo XX, se avanza en el estudio del fenómeno de la plasticidad con von-Mises, Levy y Prandtl a través de teorías y experimentos.

Todo ello sirve de base para que, a través de la Universidad inglesa de Cambridge, Neal introduzca la teoría del cálculo plástico en su libro de 1985. [1]

En este proyecto además se va a introducir un código programado para la resolución del problema en cuestión, sin embargo, el primero en aplicar código para resolver los diferentes problemas de optimización fue Fourier, que produjo un importante avance en el ámbito.

1.3. Justificación del trabajo

El objetivo principal, como ya se ha comentado, es la elaboración de un código de forma que nos permita obtener los resultados del cálculo plástico sin tener que plantear y resolver ningún mecanismo de colapso. De esta manera, al ser más rápida y sistemática podemos evitar cometer errores a la hora de realizar los cálculos.

Debido a esto, la elaboración de este proyecto está completamente justificada, ya que nos facilita la resolución a través del método directo de análisis límite de estructuras más complejas a las expuestas durante la docencia del procedimiento.

1.4. Herramientas empleadas

La información estará marcada al ser nombrada con una referencia en la bibliografía.

Para el desarrollo del código se usará “Wolfram Mathematica”, que es un entorno de programación que contiene un lenguaje de alto nivel especializado en el cálculo numérico.

Mientras que para la comprobación de resultados se usará Sap2000v25, programa disponible bajo licencia por la Universidad de Valladolid.

1.5. Estructura de la memoria

Primero, se ha comenzado con la introducción, en la que se explican las bases del proyecto y sus objetivos.

A continuación, y como segundo apartado se va a exponer una base teórica del desarrollo del cálculo plástico hasta el teorema del Método Directo de Análisis Límite haciendo hincapié en cada uno de los pasos necesarios.

Seguido de esto, en el tercer capítulo se procederá a la resolución completa a mano de dos ejemplos, para después resolverlos a través de la optimización de manera que se pueda ver de forma práctica la teoría explicada. Tras ello aplicaremos el código desarrollado y su comprobación.

En el cuarto capítulo, procederemos a resolver dos problemas más complejos, aplicados a la vida real, con el código de optimización a partir de las Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Y su posterior comprobación con el modelado de estos en Sap2000v25.

A continuación, en el quinto capítulo realizaremos un estudio económico del proceso del proyecto.

En el sexto capítulo se expondrán las conclusiones.

El séptimo capítulo contendrá la bibliografía.

Y, por último, en el octavo capítulo de anexos se añadirá el código empleado.

CAPÍTULO 2

Teoría del Cálculo plástico en pórticos planos

2. Teoría del Cálculo plástico en pórticos planos

2.1. Análisis de la sección de una barra

En el análisis de la sección podemos distinguir dos situaciones: Un comportamiento elástico o un comportamiento plástico. Estas fases dependen del límite elástico de la sección y en donde nos encontremos. En el caso de que la máxima tensión sea menor o igual al límite elástico se denominará comportamiento elástico.

Sin embargo, en el caso de que dicha tensión supere el valor del límite elástico podremos considerarlo como comportamiento plástico. Entonces, como el valor de la tensión puede variar, la deformación asociada a este también, pero no de manera lineal. Por ello se va a comentar las diferentes fases del diagrama tensión-deformación.

Este diagrama se obtiene del ensayo de una probeta del elemento a estudiar, al que se somete a cargas de tracción conocidas y se estudia la deformación obtenida en cada instante.

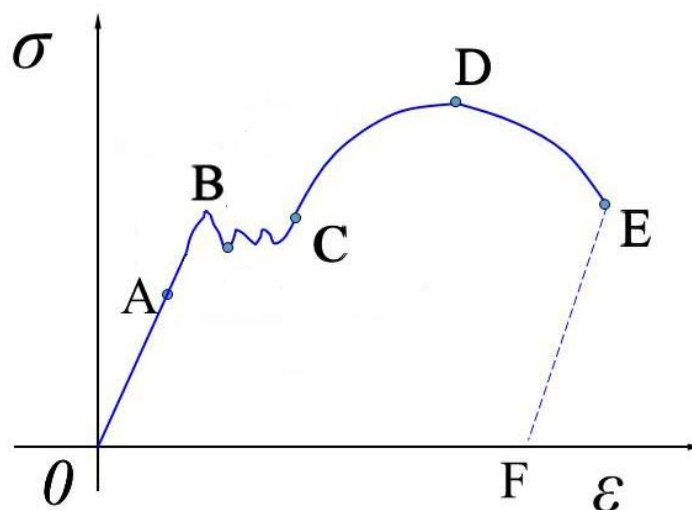


Figura 1. Diagrama tensión-deformación.

Siguiendo los comentarios hechos con anterioridad podemos encontrar los siguientes intervalos. Desde el origen, punto O, hasta el punto A, tenemos un comportamiento elástico, del que se puede obtener el módulo de Young (E) a través de la Ley de Hooke. Esta establece que, para pequeñas deformaciones, la tensión (σ) aplicada a un material es proporcional a la deformación (ϵ) que se produce. Esta se puede escribir como:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Ecuación 1. Ley de Hooke.

donde:

- σ es la tensión en el material.
- E es el Módulo de Young.
- ϵ es la deformación del material.

En el punto A llegamos al límite proporcional. Más allá de este punto la probeta no podrá volver a su forma original, por lo que tanto la tensión de trabajo como la tensión de diseño de la estructura son menores a este valor.

A continuación, en el punto B se observa una caída en la tensión hasta la altura de C. Este tramo entre B y C es la meseta de fluencia, en la que observamos que la deformación crece, en contra de la tensión soportada por la probeta que se mantiene constante. Aquí ya las deformaciones son irreversibles.

Entre el punto C y D hay un endurecimiento de la probeta por lo que la tensión sube de una forma no lineal. Al final de este tramo llegamos al punto D, llamado tensión última o máxima, en la que a partir de aquí la probeta no es capaz de soportar tensiones mayores. Y desde dicho punto baja la tensión hasta el punto E, en el que la probeta se sitúa en un tiempo diferencial anterior a la rotura.

Toda la segunda parte, desde el punto B hasta instantes antes de la rotura en E es la zona de comportamiento plástico.

El punto F es la rotura de la pieza. Por ello en F no se soportan cargas.

2.2. Hipótesis del comportamiento elastoplástico

Para facilitar los cálculos vamos a plantear las hipótesis básicas a aplicar en las barras que conforman las estructuras tipo pórtico plano:

- El material del que están compuestas las barras es homogéneo e isotrópico.
- No se consideran los efectos de las tensiones residuales y deformaciones permanentes.
- Se supone una situación de equilibrio estable, lo que implica que no hay pandeo.
- Se supone una condición de pequeñas deformaciones y desplazamientos.
- Se supone la formación de rótulas plásticas concentradas.
- Se admiten las hipótesis de Navier de deformación.
- Solo se va a trabajar con cargas estáticas.
- Se supone un comportamiento elástico-plástico ideal.
- Se desprecia la deformación axil en los cálculos.

Esta última hipótesis implica que el diagrama a aplicar tensión-deformación es algo distinto al explicado con anterioridad.

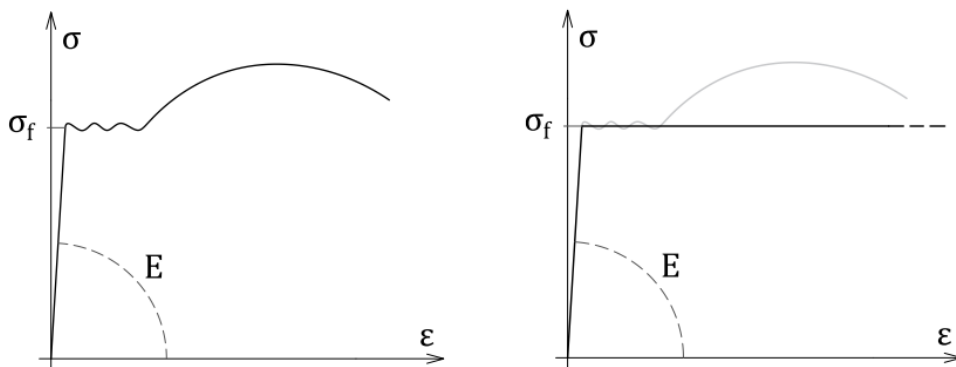


Figura 2. Diagrama tensión-deformación REAL (Izquierda) vs IDEAL (Derecha).

Como podemos observar pasamos del modelo real (el de la izquierda) a un modelo simplificado o ideal (el de la derecha) de tal forma que, en la zona de

deformación plástica, la tensión de fluencia será la aplicada de forma infinita en toda la deformación siguiente.

Debido a esto, tras la plastificación completa o parcial de todos los puntos de una sección, puede no haber continuidad de tipo C1 en la deformada. Lo que da la aparición de rotulas plásticas. Y es este modelo ideal el que se aplicará más tarde en el Sap2000v25 para el comportamiento de las rótulas plásticas.

Esto hace que nuestro objetivo sea encontrar un factor de carga λ_c , y la ubicación de las rotulas plásticas en el mecanismo de colapso.

2.3. Tipos de esfuerzos a los que se van a someter las barras

2.3.1. Esfuerzos axiales.

Un esfuerzo axial actúa sobre el eje longitudinal de un cuerpo a estudiar, en este caso una barra. Este esfuerzo se debe a la aplicación de fuerzas, que tienen una característica de colinealidad con el eje principal del cuerpo.[2]

Dependiendo de la dirección de la fuerza esta puede ser de tracción o de compresión.

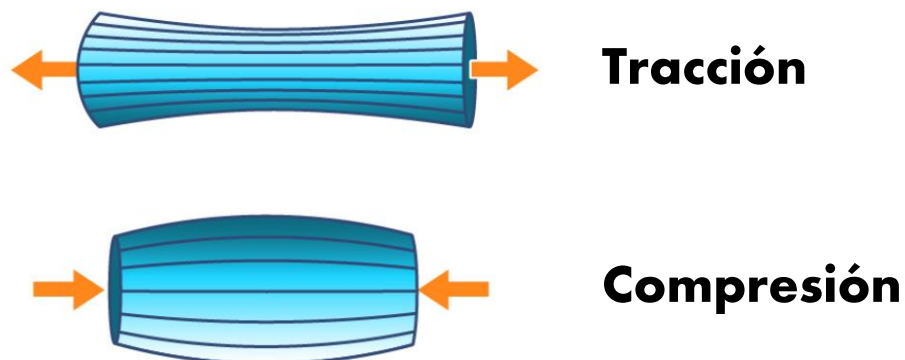


Figura 3. Esfuerzo axial a tracción y compresión.

En términos matemáticos se va a definir el esfuerzo axial como la fuerza normal dividida por el área de la sección transversal sobre la que actúa. Por ello, nos encontramos una relación lineal en la que, al aumentar el valor de la fuerza, como la sección supuesta de nuestro cuerpo es constante, la tensión va a aumentar, por lo que lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Ecuación 2. Esfuerzos axiales.

Donde:

- σ es el esfuerzo axial (tensión o compresión).
- P es la fuerza axial aplicada.
- A es el área de la sección transversal del elemento.

2.3.2. Esfuerzos flectores

En este ámbito podemos encontrar 3 tipos de esfuerzos flectores a comentar, una en la que solo interacciona una fuerza y otras dos en las que interactúan dos fuerzas a la vez.

Esfuerzos de flexión pura

Estos ocurren cuando una sección está sometida a un momento flector en los extremos de la barra sin fuerzas axiales, cortantes u otros tipos de carga.

Esta situación sale de la hipótesis de Navier mencionada en el apartado 2.3 que enuncia que: “Las secciones que son planas y perpendiculares al eje del cuerpo estudiado antes de producirse la deformación serán planas, pero no perpendiculares después de que esta suceda.”

Esto se puede observar en la siguiente imagen en la que se observa que la línea neutra (Dibujada en naranja) es perpendicular a la sección en todo momento, da igual como deformemos la barra lo que permite una gran simplificación a la hora de realizar cálculos.

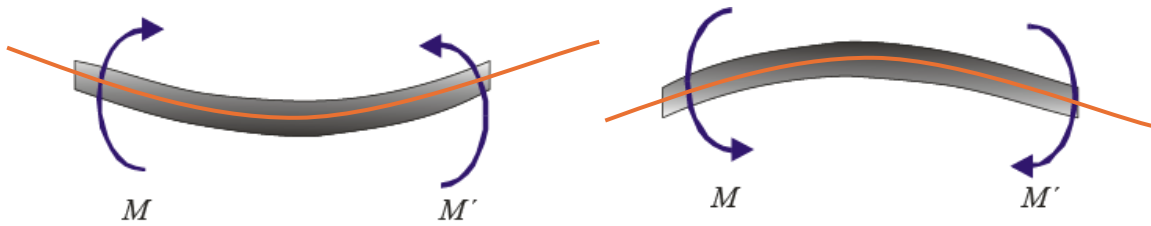


Figura 4. Momentos flectores positivos y negativos con sus líneas neutras.

Este momento flector aplicado será constante a lo largo de la barra, lo que provocará que esta tenga un eje neutro donde este es nulo, que en el caso de flexión pura coincidirá con el eje central de la barra o línea neutra. [3]

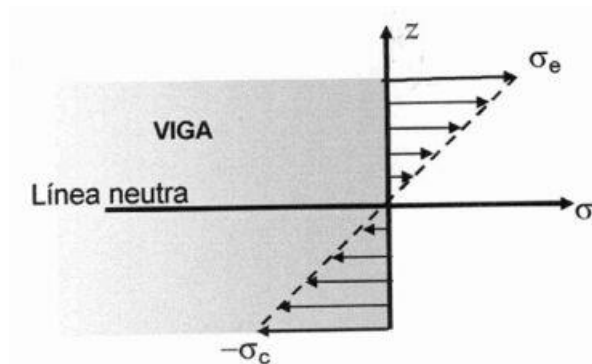


Figura 5. Distribución de esfuerzos a lo largo de la sección de la barra.

Como se puede observar estas tensiones alrededor de la barra estarán linealmente distribuidas y en sus extremos, en Z_{\max} , es donde se alcanzará el momento elástico de la sección, por lo que, si este no supera la tensión máxima, la barra todavía podrá volver a su forma original.

La expresión matemática para su cálculo es la siguiente:

$$\sigma(x) = \frac{M(x) \cdot d}{I_y}$$

Ecuación 3. Esfuerzos flectores puros.

donde:

- σ es la tensión normal en la fibra.
- M es el momento flector constante.
- d es la distancia desde el eje neutro a la fibra en consideración.
- I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga.

Con los siguientes valores podremos calcular de esta forma el módulo resistente:

$$W_x = \frac{Ix}{d_{max}}$$

Ecuación 4. Módulo resistente.

La condición de flexión pura es idealizada como se ha comentado, lo que hace que sea fundamental para el análisis y diseño de estructuras, ya que simplifica el cálculo de tensiones y deformaciones en elementos sometidos a momentos flectores.

Sin embargo, buscamos la optimización de un problema de cálculo plástico, entonces, lo que nos interesa, es qué sucede en el caso de que nuestra tensión normal en fibra, por el módulo plástico de esta, sea igual al M_p , que es el momento plástico de una sección. El valor de M_p es ideal, ya que en realidad este no llega a alcanzarse en una deformación plástica.

Esto se debe a que en la fase elastoplástica la zona elástica debe estar equilibrada con la zona plástica, haciendo que la primera zona soporte la fluencia de la segunda, generando deformaciones en el material que no es capaz de soportar. Sin embargo, al suponerlo ideal, lo obtendremos como se ve en la siguiente ecuación:

$$M_p = \sigma \cdot S$$

Ecuación 5. Momento plástico.

Y es que el punto que llegue a M_p será considerado rótula plástica, debido a que este posee un comportamiento muy similar y el cual analizaremos y usaremos más tarde para el desarrollo del método directo [4]. Las rótulas plásticas se desarrollarán más adelante en el apartado 2.4.

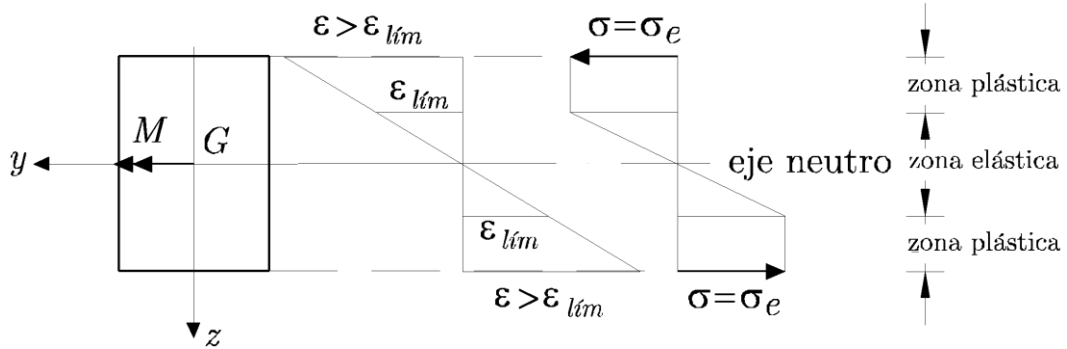


Figura 6. Plastificación de una sección sometida a flexión pura.

Como podemos observar en la figura 6, ya hemos llegado a la tensión límite en parte de las fibras. Cuando esto sucede, en las fibras interiores (Región elástica) no se ha alcanzado todavía σ_e , por lo que la deformación es menor a la del caso límite.

Sin embargo, en las fibras exteriores, aunque la tensión límite no se pueda superar, la deformación sigue creciendo, lo que implica que esta ya es irreversible. (Región plástica)

En el caso de que esta tendencia continúe, el valor de plastificación llegará a la línea neutra, lo que implicará que el momento externo no podrá ser equilibrado.

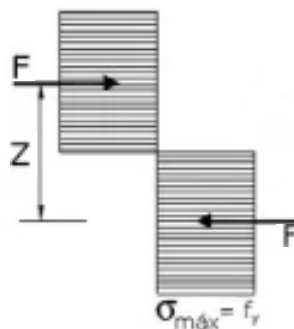


Figura 7. Sección plastificada cuando llega al momento plástico M_p .

Esfuerzos de flexión simple

En esta situación contamos con la presencia de un momento flector y un esfuerzo cortante. Estos esfuerzos causan que la estructura, en este caso una barra, se doble o curve. [5]

En la siguiente imagen podremos observar cómo quedaría la distribución de tensiones sobre el perfil de la barra en el caso de la superposición de estos dos efectos:

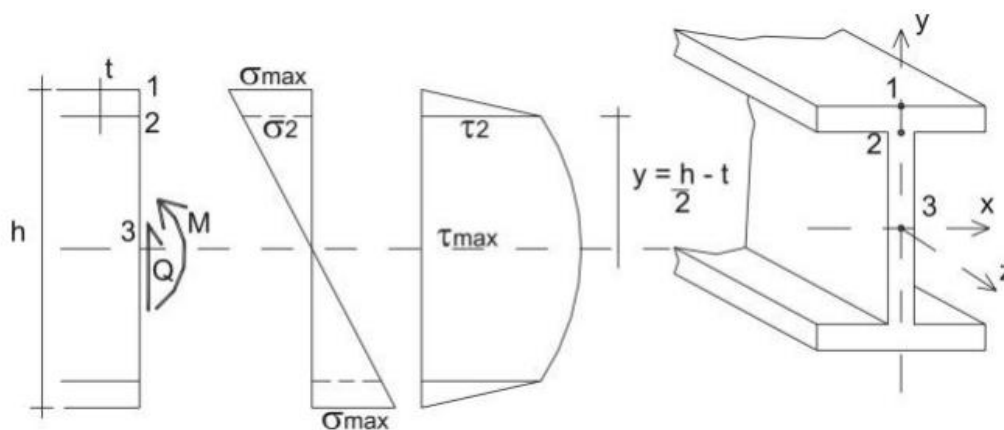


Figura 8. Distribución de la suma de las tensiones del esfuerzo cortante y momento flector en un perfil doble T (Figura 7.19, bibliografía [5]).

En esta situación, debido a los momentos flectores, existen tensiones normales que tienen una distribución lineal y alcanzan un máximo en las fibras más alejadas del eje neutro. Y en cuanto al esfuerzo cortante, este produce un esfuerzo tangencial.

Como podemos observar su ley de distribución depende de la forma de la sección transversal, que en este caso concreto es parabólica, con un máximo en el eje neutro. Misma situación, pero sin aportación solitaria del esfuerzo cortante en los extremos, es lo que nos encontraríamos en una barra de dimensiones a por b maciza.

Esfuerzos de flexión compuestas

En la flexión compuesta la resultante de las tensiones normales no pasa por la línea neutra de la sección.

En esta situación, como esta depende de dos o más aportaciones. Esta se debe a una aportación de un esfuerzo axial y a una de un momento flector. Podemos expresar la fórmula de la siguiente manera:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} z$$

Ecuación 6. Tensión de una sección sometida a una flexión compuesta.

donde:

- σ es la tensión resultante.
- N es la fuerza axial aplicada.
- A es el área de la sección transversal del elemento.
- M es el momento flector constante.
- z es la distancia desde el eje neutro a la fibra en consideración.
- I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga.

Debido a esto podemos distinguir dos situaciones, plastificación parcial y plastificación total de la estructura a analizar [6]:

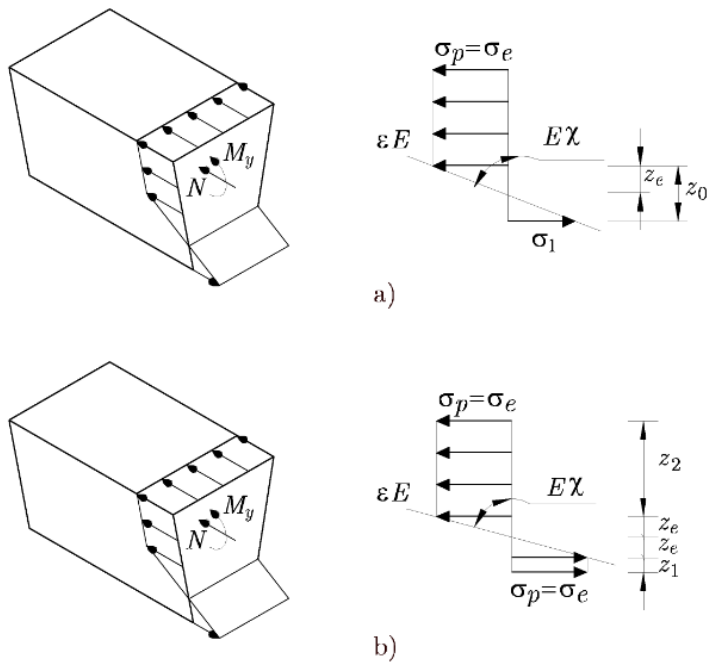


Figura 9. Sección sometida a flexión compuesta. Plastificación parcial (Figura 12.11, Bibliografía [6]).

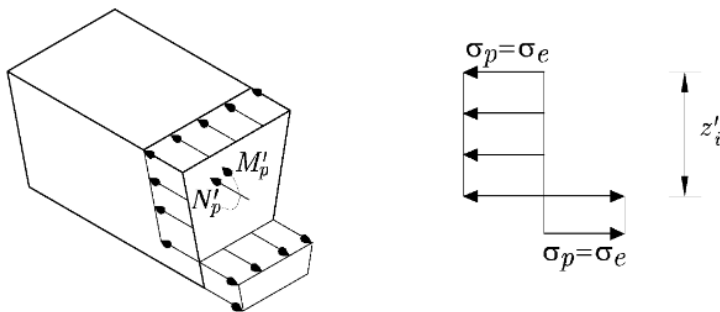


Figura 10. Sección sometida a flexión compuesta. Plastificación parcial (Figura 12.12, Bibliografía [6]).

En la figura 9 se puede observar cómo hay dos situaciones de plastificación, que plastifique una región o ambas.

Mientras tanto en la figura 10 se observa como los valores de ambas secciones han llegado al M_p respectivamente lo que implica que la sección ha plastificado completamente y se podría considerar como una rótula.

2.4. Modelo de rótula Plástica

Para comenzar con el desarrollo del método directo se han de identificar el Número de Posibles Rótulas plásticas en nuestra estructura (NPR).

Primero de todo, antes de encontrarlas, tenemos que saber en qué lugares pueden aparecer, estos son:

- Apoyos empotrados.
- Cambios de sección.
- Zonas con cargas puntuales aplicadas.
- Zonas de unión de barras distintas, nudos, cambios de dirección...
- Secciones medias de las cargas distribuidas.

Estas rótulas pueden ser puntuales o distribuidas dependiendo de su condición. Como se ha comentado con anterioridad en el punto 2.3. la plastificación se comienza a dar en las fibras exteriores, siendo estas las primeras que llegan a M_p . No obstante, todavía no es una rótula. Al seguir subiendo la carga van a seguir plastificando las fibras contiguas a las anteriores.

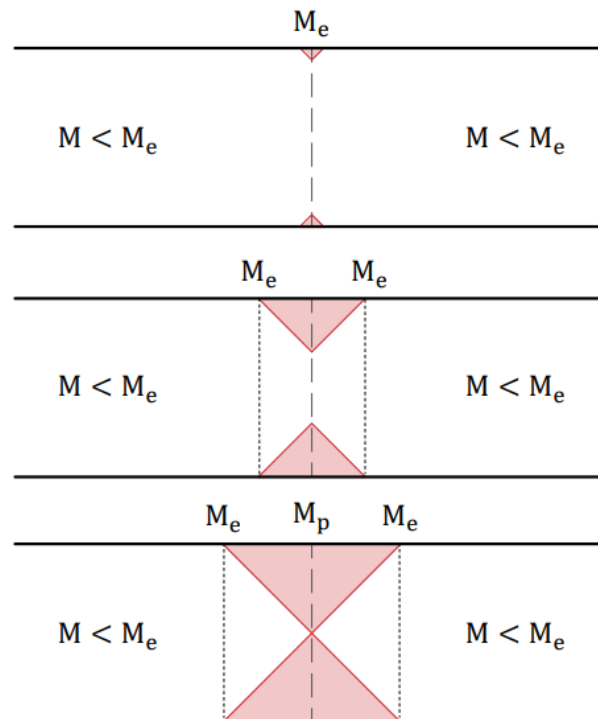


Figura 11. Proceso de formación de una rótula (Bibliografía [7]).

Según como se cita en la transparencia 29 adjuntada en la bibliografía [7] “Debido a esto, la deformación está muy concentrada en las zonas inmediatamente aledañas a la rótula, ya que hasta que no se alcanza el valor de M_p la curvatura no crece significativamente “.

Ahora vamos a comparar la figura 1 (Diagrama Tensión-Deformación) con la figura 11 (Proceso de formación de una rótula) para visualizar lo comentado.

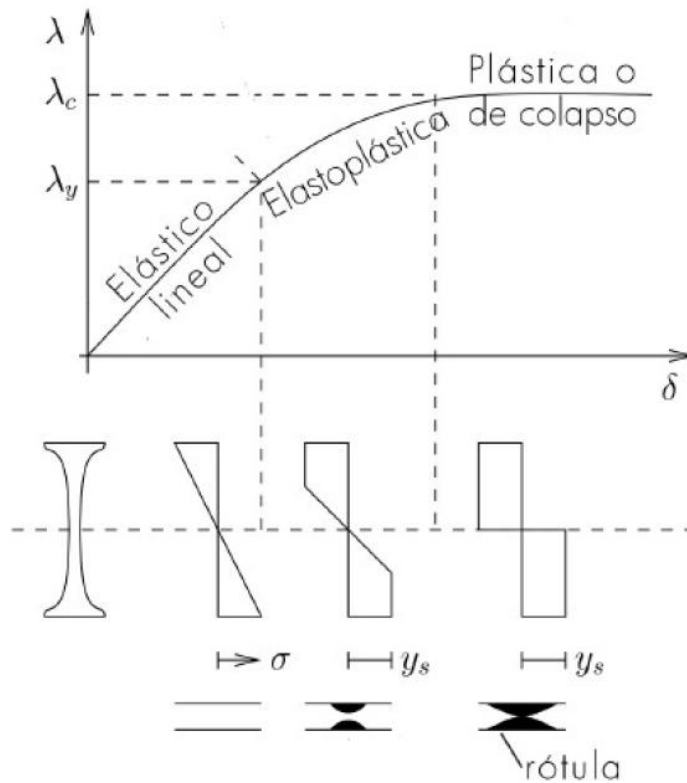


Figura 12. Comparación del diagrama Tensión-deformación y el proceso de formación de una rótula.

donde:

- λ es el factor de carga.
- λ_y es el límite elástico.
- λ_c es la tensión de rotura.
- δ es la deformación.

Región elástico-lineal ($\lambda < \lambda_y$): En este tramo, que se encuentra entre el reposo y el límite elástico, la tensión máxima no se supera en ningún punto de la barra. Esta es la región de aplicación de la Ley de Hooke como se comenta en el punto 2.1. **No se ha formado rótula plástica.**

Región elastoplástica ($\lambda_y < \lambda < \lambda_c$): En este tramo, que se encuentra entre el límite elástico y la tensión de rotura, las deformaciones empiezan a ser permanentes como se ve en la representación de esfuerzos. **No se ha formado rótula plástica.**

Región plástica o de colapso ($\lambda_c < \lambda$): En esta región plastifican todos los puntos de la sección, por lo que la barra se deformará hacia la rotura. **Se forma la rótula plástica.**

Esto confirma lo planteado anteriormente. Hay un proceso de plastificación continua hasta que se alcanza M_p en la sección central, lo que indica la formación de una rótula plástica. Sin embargo, aunque estas realmente sean distribuidas, como se ha comentado en las hipótesis del problema planteado, se va a considerar a las rotulas como puntuales o concentradas.

2.5. Grados de Hiperestaticidad

Se entiende como grado de hiperestaticidad el número de incógnitas que no pueden ser resueltas por las ecuaciones de equilibrio, debido esto, al número de fuerzas redundantes que contiene una estructura.

Para comenzar, se va a dividir el grado de hiperestaticidad en global, interno y externo. Estos están relacionados a través de la siguiente ecuación:

$$GH = GHE + GHI$$

Ecuación 7. Relación de los grados de hiperestaticidad.

Primero vamos a calcular el grado de hiperestaticidad global. Para este cálculo tenemos tres ecuaciones distintas que habrá que valorar según el caso. Entonces, se puede considerar:

$$GH = I - E$$

Ecuación 8. Grado de hiperestaticidad global.

Tenemos 2 valores desconocidos, comenzando por la primera, I es el número de incógnitas que se tienen que calcular, en la que se debe de completar con las fuerzas existentes y las seis reacciones de cada barra (3 en cada extremo de la barra).

$$I = 6B + R$$

Ecuación 9. Grado de hiperestaticidad global. Número de incógnitas.

Y el valor de E es el de ecuaciones disponibles para cada cálculo. Estas son tres ecuaciones por cada nudo (N), tres ecuaciones por barra (B) y el número de ecuaciones extras (Nd). Estas últimas dependen del número de rotulas de la estructura.

$$E = 3N + 3B + Nd$$

Ecuación 10. Grado de hiperestaticidad global. Número de ecuaciones.

A continuación, se expresa como se calcula el grado de hiperestaticidad externo (GHE). En este caso R es el número de reacciones que aporta cada apoyo:

$$GHE = R - 3$$

Ecuación 11. Grado de hiperestaticidad externo.

Por último, el grado de hiperestaticidad interno (GHI) se obtiene en la ecuación 7, a través de la resta de los dos elementos anteriores.

Según el grado de hiperestaticidad de la estructura esta puede ser de tres tipos:

- Estructura Hiperestática: $GH > 0$
- Estructura Isostática: $GH = 0$
- Estructura Hipostática o mecanismo: $GH < 0$

2.5.1. Estructura Hiperestática

El número de ecuaciones de equilibrio es menor que el número de incógnitas estáticas. Esta tiene un número infinito de configuraciones admisibles ya que es estáticamente indeterminada. Debido a esto hay que usar las condiciones de compatibilidad y las leyes de comportamiento para conseguir la configuración real.

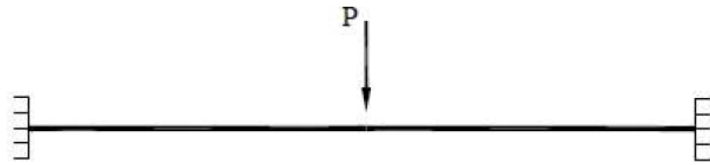


Figura 13. Barra biempotrada. Estructura hiperestática.

2.5.2. Estructura isostática

Tiene el grado de hiperestaticidad igual a cero. Por ello el número de ecuaciones de equilibrio son suficientes. Esto implica que el número de reacciones y esfuerzos internos se pueden sacar a través de estas.



Figura 14. Barra empotrada. Estructura isostática.

2.5.3. Estructura hipostática o mecanismo

El grado de hiperestaticidad es menor que cero, lo que implica que la estructura posee un número menor del mínimo de reacciones necesarias, entonces la estructura no será estable y será susceptible al colapso al ser sometida a cargas o esfuerzos.

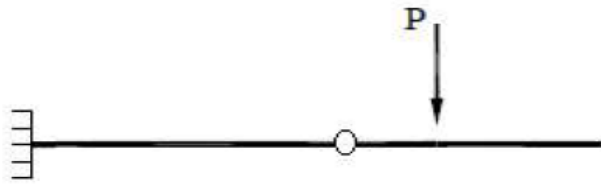


Figura 15. Barra empotrada con rótula en voladizo. Estructura hipostática.

2.6. Mecanismo de colapso

En general, el número de rótulas que se tienen que formar para que un mecanismo lleque a colapsar es:

$$N^{\circ} \text{ Rotulas} = GH + 1$$

Ecuación 12. Número de rótulas para formar un mecanismo.

Este se puede obtener dependiendo de las cargas aplicadas sobre la estructura y su distribución. Por lo que, según las rótulas plásticas que se formen se pueden dar tres tipos de mecanismos:

- **Incompleto:** Se forman menos de $GH+1$ rótulas.
- **Completo:** Se forman $GH+1$ rótulas.
- **Supercompleto:** Se forman más de $GH+1$ rótulas.

Para eliminar problemas, se comprobarán las condiciones de compatibilidad en las rótulas, de tal forma que el colapso de una parte no afecte al resto.

El mecanismo de colapso deberá cumplir los siguientes requisitos:

- **Requisito de plastificación:** El momento flector no puede superar al momento plástico en ninguna sección.
- **Requisito de equilibrio:** Los momentos flectores deberán representar una ley en equilibrio entre las fuerzas aplicadas de la estructura y las fuerzas internas.
- **Requisito de mecanismo:** En el instante de colapso el momento flector y momento plástico deben ser iguales en un número suficiente de secciones para formar un mecanismo en parte o toda la estructura.

Conociendo esto se puede plantear el cálculo que nos dará el número de ecuaciones, por lo que según el teorema de Symons-Neal: El número de mecanismos independientes es igual al número de ecuaciones de equilibrio que se pueden plantear independientemente.

$$N^{\circ} \text{ mecanismos independientes} = EQ = NPR - GH$$

Ecuación 13. Número de mecanismos independientes/Número de ecuaciones de equilibrio.

Donde:

- **EQ** es el número de ecuaciones de equilibrio.
- **NPR** es el número de posibles rotulas.
- **GH** es el grado de hiperestaticidad.

Al conseguir el número de ecuaciones de equilibrio se plantearán los mecanismos de colapso a través del PDV (Problema de desplazamientos virtuales) que se busca evitar a través de una optimización con el uso de código.

2.7. Métodos de resolución.

Se va a hablar sobre 2 métodos para resolver el problema estructural del proyecto. El método estático y el método dinámico. Ambos métodos tienen un planteamiento y desarrollo distintos que se basan en los teoremas que se van a describir a continuación. [4]

2.7.1. Teoremas fundamentales del análisis plástico

En este apartado se van a resumir los teoremas necesarios para explicar los métodos de resolución.

Teorema de la constancia de curvatura durante el colapso

La distribución de momentos flectores no varía durante el colapso de la estructura mientras se producen movimientos como sólido rígido. (Bibliografía, punto 4.3.1 [7])

Teorema del límite superior

La carga crítica P_{cs} que se calcula a través de los mecanismos de colapso va a ser siempre igual o superior a la verdadera carga de colapso P_c de la estructura. Esto hace que únicamente cuando se elige el verdadero mecanismo de colapso estas cargas se igualen. (Bibliografía, punto 5.8.1 [4])

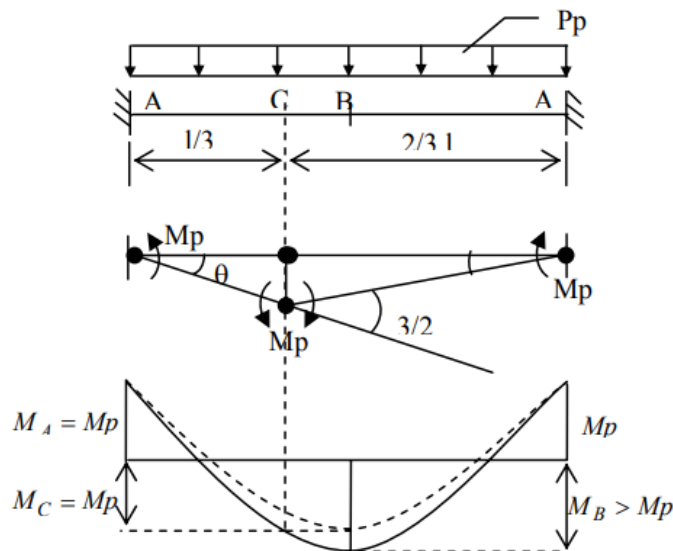


Figura 16. Resolución simbólica del límite superior en una viga biempotrada. (Figura punto 5.8.1 de la Bibliografía [4])

Teorema del límite inferior

La carga P_{ci} se calcula sobre un diagrama de solicitaciones internas en equilibrio en el que los momentos no son superiores a los del M_p . Esto implica que la carga siempre será igual o inferior a la carga de colapso (P_c) verdadera de la estructura. Esto hace que únicamente cuando se elige el verdadero mecanismo de colapso estas cargas se igualen. (Bibliografía, punto 5.8.2 [4])

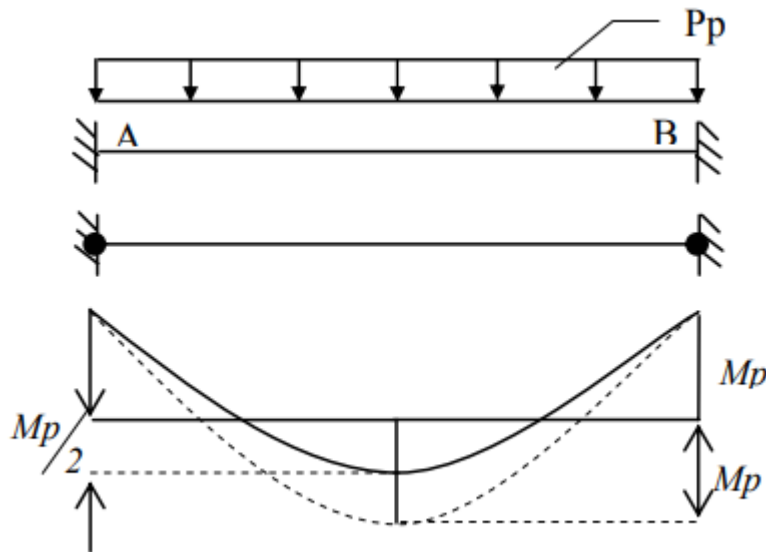


Figura 17. Resolución simbólica de límite inferior en una viga biempotrada.
(Figura punto 5.8.2 de la Bibliografía [4])

Teorema de unicidad

El teorema de unicidad indica que si encontramos una distribución estáticamente en equilibrio de momentos y si alcanzamos un número suficiente de secciones el momento plástico (M_p), para que este mecanismo sea inestable, la carga correspondiente a esa distribución de momentos será la carga de colapso, satisfaciendo los teoremas de límite superior e inferior. (Bibliografía, punto 4.3.1 [7])

2.7.2. Método estático

El método estático está basado en el teorema del Límite Inferior (Definido en el apartado 2.7.1.1.) y se basa en estudiar un diagrama de momentos en equilibrio bajo cargas hiperestáticas que puedan producir el mayor número de rótulas plásticas sin violar la condición de plasticidad.

El procedimiento es que de cada diagrama se obtendrán los puntos en los que $P_e \leq P_c$, de tal forma que la carga de colapso que cumpla $P_e = P_c$ producirá el mecanismo de colapso. [4]

2.7.3. Método cinemático

El método cinemático es el que se va a desarrollar y sistematizar en el proyecto para la resolución de nuestro problema.

Este está basado en el teorema del Límite Superior y se basa en buscar los diferentes mecanismos de rotura por la aparición de rótulas en la estructura. La carga de colapso es la que hace que todos los momentos en la estructura sean igual o inferiores a M_p y será la menor de todos los posibles mecanismos.[7]

El proceso por seguir es el siguiente:

- Primero se buscará el Numero de Posibles Rotulas plásticas. (ver apartado 2.4)
- Segundo se calcularán los grados de hiperestaticidad. (ver apartado 2.5)
- El tercer paso es calcular la carga de equilibrio para cada mecanismo a través del Principio de Trabajos Virtuales. Siendo este paso el objetivo a sistematizar.
- El cuarto paso es sacar el mecanismo de colapso verdadero sacando la mínima de las cargas límite. Si al calcular alguno de los mecanismos propuestos vemos que esta no viola las condiciones, no es necesario seguir probando con otros mecanismos.
- El quinto paso es sacar los diagramas de momentos en la estructura (de máximo M_p) y tras ello los desplazamientos y giros de los puntos deseados.

2.8. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker son requerimientos suficientes y necesarios que permiten abordar la optimización de un problema matemático. Estas restricciones se pueden considerar de igualdad (ecuaciones) y de desigualdad (inecuaciones).

Todo ello para conseguir maximizar o minimizar la función $f(x)$ deseada. El problema que atañe a este proyecto se va a representar de la siguiente forma:

- Función objetivo para maximizar: $f(x)$
- Restricciones de desigualdad: $g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m$
- Restricciones de igualdad: $h_j(x) = 0, j=1, \dots, l$

Donde “i” y “j” son el número de restricciones de desigualdad e igualdad respectivamente.

2.8.1. Condiciones necesarias de primer orden

Las condiciones necesarias de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker explican que las funciones de restricción, junto a la función objetivo, deben ser diferenciables en el punto x^* . Esto implica que si x^* es un mínimo local entonces existen constantes $\lambda \geq 0, \mu_i \geq 0 (i=1, \dots, m)$ y $\nu_j \geq 0 (j=1, \dots, m)$ no todas nulas tales que:

$$\lambda + \sum_{i=1}^m \mu_i + \sum_{j=1}^l |\nu_j| > 0,$$

$$\lambda \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^l \nu_j \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, m.$$

Ecuación 14. Condiciones necesarias de Primer orden.

Entonces x^* es un mínimo local.

2.8.2. Condiciones suficientes

En el caso de que las funciones de desigualdad sean convexas y la función objetivo, las restricciones de igualdad y el punto objetivo x^* sean reales. Entonces existen constantes $\mu_i \geq 0$ ($i=1, \dots, m$) y $\nu_j \geq 0$ ($j=1, \dots, l$) tales que:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^l \nu_j \nabla h_j(x^*) = 0$$
$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, m,$$

Ecuación 15. Condiciones suficientes.

Entonces se puede decir que el punto x^* es un mínimo global.

Debido a esto, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ pueden ser una solución óptima para el problema de programación no lineal, solo si existen m números " $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ " y " $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ " que satisfacen todas las condiciones KKT.[8]

El procedimiento practico se desarrollará en el apartado 3.1.1. del capítulo tres aplicando las condiciones suficientes.

2.8.3. Aplicación al código

Como hemos comentado, buscamos el máximo factor de carga aplicable, por lo que queremos maximizar la función del factor de carga. Esto se va a realizar a través del comando "Nmaximize[]" de Wolfram Mathematica, que utiliza las condiciones suficientes para buscar el valor del máximo global respecto de las condiciones aportadas.

En este comando primero se le va a introducir la función a maximizar, a continuación, todas las restricciones aplicadas, y por ultimo las variables deseadas. El funcionamiento se explicará con mayor detalle en el punto 3.1.2.1.

CAPÍTULO 3

Resolución a través del método cinemático.

3. Resolución a través del método cinemático

En este punto del proyecto ya es conocido el marco teórico del que se va a partir para la resolución de los siguientes problemas de ejemplo. Este ha sido obtenido de los problemas realizados en la asignatura de Estructuras y Construcciones Industriales debido a su sencillez y facilidad de ejemplificación de los distintos problemas que podemos llegar a tener a la hora de resolver estos pórticos.

Para comenzar se va a dar un enunciado creado específicamente para marcar el objetivo de la resolución del problema. Como se busca el cálculo del máximo factor de carga aplicable, este se obtiene a través del M_p (Momento Plástico de colapso) de la estructura. Siendo este específico de cada una de las barras del pórtico a analizar. En el caso de que se propongan distintos espesores, cada barra tendrá un M_p determinado.

3.1. Ejemplo 1. Resolución a mano

Se supone un pórtico biempotrado sometido a dos cargas puntuales. La primera de valor P perpendicular y hacia abajo en el punto "c". La segunda es una carga horizontal aplicada en el punto "d" hacia la derecha como se observa y del mismo valor. Todas las barras tienen un momento plástico de valor M_p . Calcula el máximo factor de carga aplicable. **Se va a suponer $P = P_1 \cdot \lambda_c$, con $P_1 = 1 \text{ N}$**

Datos para el cálculo numérico:

- **Longitud:** $L = 5\text{m}$
- **Material:** Acero S275
- **Momento plástico:** $M_p = 172.700 \text{ Pa}$
- **Inercia:** $I_z = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
- **Módulo de Young:** $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

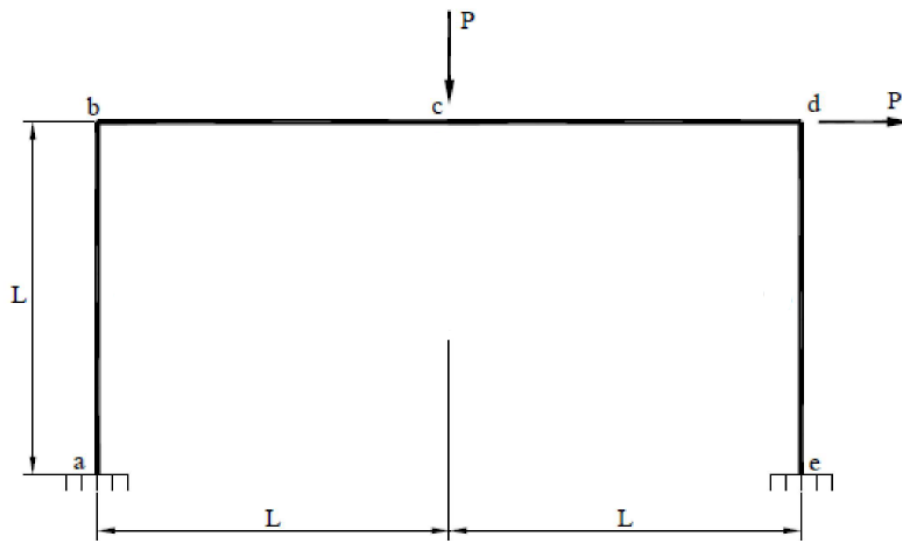


Figura 18. Pórtico biempotrado con dos cargas puntuales.

En el método cinemático se comienza calculando el número de posibles rótulas. En este caso es cinco y corresponden con los siguientes puntos: a, b, c, d, e.

$$NPR = 5$$

Para el cálculo del grado de hiperestaticidad usamos las ecuaciones comentadas en el apartado 2.5, lo que nos da:

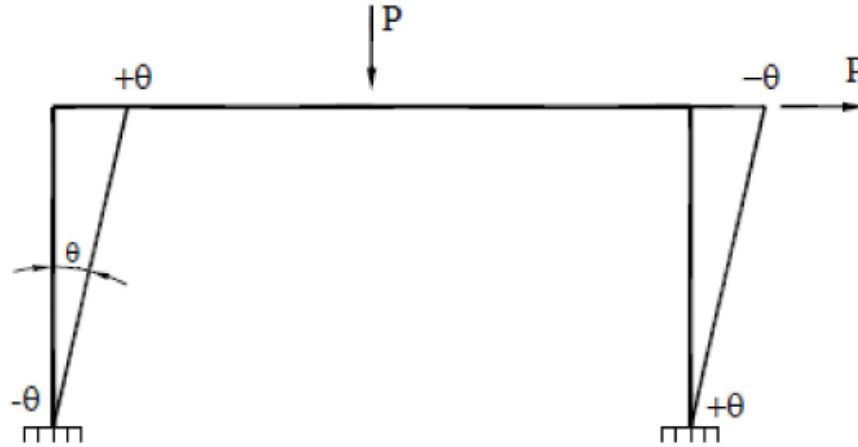
$$GH = 3$$

A continuación, a través de la ecuación número 13, buscamos calcular el número de ecuaciones de equilibrio y mecanismos independientes que posee la estructura:

$$EQ = NPR - GH = 2$$

Según el resultado obtenido hemos de proponer dos mecanismos de colapso para la estructura con sus respectivas ecuaciones. Para simplificar estas ecuaciones buscaremos un mecanismo en el que, en este caso al tener solo dos cargas, una de ellas se pueda hacer nula para mayor facilidad en los cálculos. Este procedimiento se denomina P.D.V (Problema de Desplazamientos Virtuales).

PDV 1: Primer mecanismo de colapso propuesto. En este caso buscamos hacer nula la carga en el punto c, haciendo que no sufra ningún desplazamiento en la dirección de la carga..



19ª Figura. Ejemplo 1. Primer mecanismo de colapso.

$$EQ1 \rightarrow P \cdot L \cdot \theta = Ma \cdot (-\theta) + Mb \cdot (+\theta) + Md \cdot (-\theta) + Me \cdot (+\theta)$$

$$EQ1 \rightarrow P \cdot L = -Ma + Mb - Md + Me$$

PDV 2: Segundo mecanismo de colapso propuesto. En este caso buscamos hacer nula la carga en el punto d, haciendo que no sufra ningún desplazamiento.

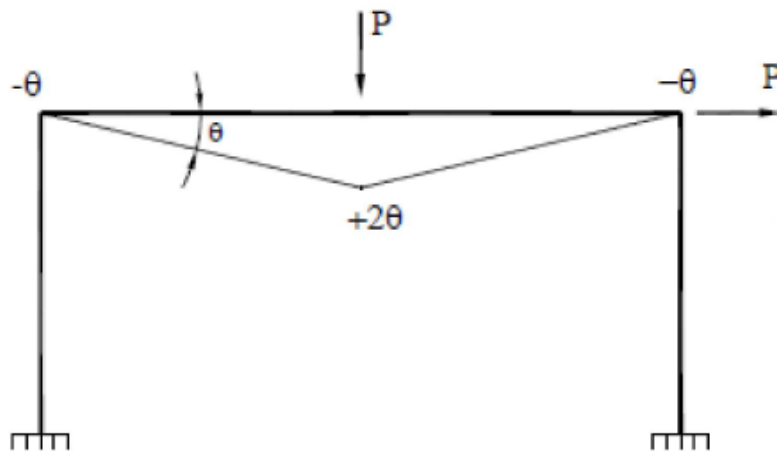


Figura 20. Ejemplo 1. Segundo mecanismo de colapso.

$$EQ2 \rightarrow P \cdot L \cdot \theta = Mb \cdot (-\theta) + Mc \cdot (+2\theta) + Md \cdot (-\theta)$$

$$EQ2 \rightarrow P \cdot L = -Mb + 2 \cdot Mc - Md$$

Ya hemos conseguido las ecuaciones de equilibrio. Ahora a través del método cinemático comentado con anterioridad en el apartado 2.7.3 vamos a buscar resolver el problema. Primero se va a suponer el primer mecanismo como verdadero y establecemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siendo estas Pc_1 y M_p . Antes habrá que modificar las ecuaciones de equilibrio para que todos los valores de los momentos en las rotulas sean iguales a M_p , de la siguiente forma.

$$\begin{cases} Ma = -M_p \\ Mb = +M_p \\ Md = -M_p \\ Me = +M_p \end{cases} \quad Pc_1 \cdot L = +M_p + M_p + M_p + M_p$$

$$Pc_1 = \frac{4M_p}{L} \rightarrow EQ2: Mc = 2M_p > M_p \rightarrow \text{No es seguro}$$

A continuación, se va a suponer el segundo mecanismo como verdadero y estableceremos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas Pc_2 y M_p . Modificando las ecuaciones de equilibrio como se ha comentado con anterioridad y resolviendo, da el siguiente resultado.

$$\begin{cases} Mb = -M_p \\ Mc = +M_p \\ Md = -M_p \end{cases} \quad Pc_2 \cdot L = +M_p + 2M_p + M_p$$

$$Pc_2 = \frac{4M_p}{L} \rightarrow EQ1: 4M_p = Me - Ma \rightarrow |Ma| > M_p, |Me| > M_p$$

$$\rightarrow \text{No es seguro}$$

Como hemos comprobado, ninguno de los mecanismos propuestos es considerado seguro, por lo que se deberá elegir otro (Este es el objetivo, eliminar este paso con el código de optimización) en este caso nuestro nuevo mecanismo a probar será la suma de los dos mecanismos de colapso anteriores. En este caso para la resolución se hará un sistema de dos ecuaciones con 2 incógnitas como con anterioridad.

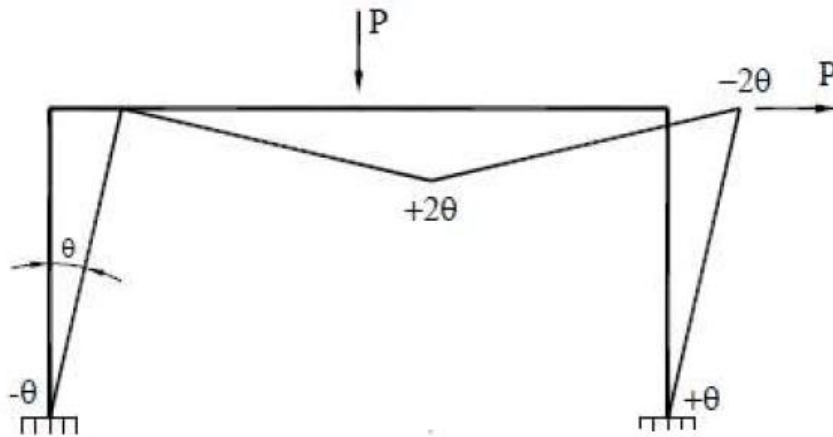


Figura 21. Ejemplo 1. Tercer mecanismo de colapso.

$$EQ1 + EQ2: 2 \cdot P \cdot L = -M_b + 2M_c - M_d - M_a + M_b - M_d + M_e$$

$$\begin{cases} M_a = -M_p \\ M_c = +M_p \\ M_d = -M_p \\ M_e = +M_p \end{cases} \quad 2P \cdot L = 6M_p \rightarrow P_c = \frac{3M_p}{L}$$

$$M_b = 0 < M_p \rightarrow \text{Seguro}$$

Ahora el mecanismo es la suma de los ángulos anteriores en cada rotula, por lo que de esta forma obtenemos los valores de P_c y M_b . Como este último es menor a M_p entonces el mecanismo es seguro. Para simplificar se ha trabajado con $P_1=1$ por lo que el resultado del λ_c máximo es:

$$P_c = \lambda_c = \frac{3M_p}{L} = 103.620$$

3.1.1 Ejemplo 1. Resolución a través de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Para resolver el problema se llevarán a cabo los siguientes pasos:

- Definir la función objetivo (Máximo factor de carga, λ_c).
- Incluir las restricciones de igualdad, en este caso las ecuaciones de equilibrio. Y las restricciones de desigualdad; Todos los momentos tienen que ser menor o iguales a M_p .
- Hacer la función lagrangiana con sus respectivas variables multiplicadoras.
- Aplicar las condiciones de KKT.
- Resolver el sistema de ecuaciones resultante.

1. La ecuación para maximizar el factor de carga es:

$$f_{max} = \lambda c$$

Ecuación 16. Máximo factor de carga.

2. Restricciones:

a. Restricciones de desigualdad:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ma} \leq \mathbf{M}_p; \quad \mathbf{Mb} \leq \mathbf{M}_p; \quad \mathbf{Mc} \leq \mathbf{M}_p \\ \mathbf{Md} \leq \mathbf{M}_p; \quad \mathbf{Me} \leq \mathbf{M}_p \end{aligned}$$

Ecuación 17. Restricción de momentos plásticos.

b. Restricciones de igualdad:

$$\begin{aligned} \lambda c \cdot P \cdot L &= -\mathbf{Ma} + \mathbf{Mb} - \mathbf{Md} + \mathbf{Me} \\ \lambda c \cdot P \cdot L &= -\mathbf{Mb} + 2\mathbf{Mc} - \mathbf{Md} \end{aligned}$$

Ecuación 18. Ecuaciones de equilibrio.

3. La lagrangiana se formula incluyendo las restricciones mediante los multiplicadores de Lagrange λ_i y μ_i :

$$L(\mathbf{Ma}, \mathbf{Mb}, \mathbf{Mc}, \mathbf{Md}, \mathbf{Me}, \lambda_c, \lambda_i, \mu_i) = \lambda_c + \lambda_1(\mathbf{M}_p - \mathbf{Ma}) + \lambda_2(\mathbf{M}_p - \mathbf{Mb}) + \lambda_3(\mathbf{M}_p - \mathbf{Mc}) + \lambda_4(\mathbf{M}_p - \mathbf{Md}) + \lambda_5(\mathbf{M}_p - \mathbf{Me}) + \mu_1(\lambda_c \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{Ma} - \mathbf{Mb} + \mathbf{Md} - \mathbf{Me}) + \mu_2(\lambda_c \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{Mb} - 2\mathbf{Mc} + \mathbf{Md})$$

4. Aplicamos las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Derivamos parcialmente la lagrangiana $L(\mathbf{Ma}, \mathbf{Mb}, \mathbf{Mc}, \mathbf{Md}, \mathbf{Me}, \lambda_c, \lambda_i, \mu_i)$ respecto de sus variables e igualamos a 0:

- a. Derivada respecto a \mathbf{Ma} :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{Ma}} = -\lambda_1 + \mu_1 = 0$$

- b. Derivada respecto a \mathbf{Mb} :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{Mb}} = -\lambda_2 - \mu_1 + \mu_2 = 0$$

- c. Derivada respecto a \mathbf{Mc} :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{Mc}} = -\lambda_3 - 2\mu_2 = 0$$

- d. Derivada respecto a \mathbf{Md} :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{Md}} = -\lambda_4 + \mu_1 + \mu_2 = 0$$

- e. Derivada respecto a \mathbf{Me} :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{Me}} = -\lambda_5 - \mu_1 = 0$$

- f. Derivada respecto a λ_i :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \mathbf{M}_p - \mathbf{M}_i \geq 0$$

$$\begin{cases} \lambda_i > 0 \\ \lambda_i \cdot (\mathbf{M}_p - \mathbf{M}_i) = 0 \text{ (Ecuación de Complementariedad)} \end{cases}$$

- g. Derivada respecto a μ_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = \lambda c \cdot P \cdot L + Ma - Mb + Md - Me = 0$$

h. Derivada respecto a μ_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} = \lambda c \cdot P \cdot L + Mb - 2Mc + Md = 0$$

5. Resolvemos el sistema de ecuaciones.

Esta es la forma de plantear el problema. Ahora y sirviéndonos de base se va a proceder a la creación de un código que nos permita la resolución automática a través de este procedimiento.

3.1.2. Ejemplo 1. Resolución con código Wolfram Mathematica y SAP2000.

El código ha sido desarrollado en Wolfram Mathematica. Tanto este código como los tres siguientes que corresponden al siguiente ejemplo y a los 2 casos reales o problemas aparecerán en el apartado. Antes de comenzar con la resolución se van a comentar las distintas partes que tiene el código, estas se comentarán con más detalle:

- **Parte 1:** Introducción de los datos.
- **Parte 2:** Desarrollo y obtención de las ecuaciones de equilibrio.
- **Parte 3:** Operación de Maximización a través de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Introducción de los datos del Ejemplo 1

El código solo necesita la introducción de los datos en la parte inicial. Estos se dividen en 3 partes.

En la primera parte se introducen los datos generales en el apartado “**Datos**” en el siguiente orden: Longitud (**L0**), Módulo elástico (**vE**), Área de la sección (**A**), Inercia de la sección (**Iy**), Módulo plástico (**Sy**), Límite elástico (**fy**) y Carga (**P**), que puede ser única como en este caso o haber múltiples.

En la segunda parte vamos a introducir los datos del apartado “**nodos**” en el siguiente orden. En el primer paréntesis las coordenadas X e Y del nodo. En el segundo paréntesis se introducen los grados de libertad (x, y, z), siendo 0

cuando no hay restricción en esa dirección y “x” cuando esa dirección está restringida. Por último, en el tercer paréntesis se introducirán las cargas exteriores (x, y, z) aplicadas en cada dirección. Se introducirán de uno en uno los nodos que hay en la estructura. Hay que tener en cuenta que se va a respetar el orden, siendo el primer nodo nombrado en el programa automáticamente como 1, el segundo escrito como 2, y así sucesivamente. Hay que tener esto en cuenta para el tercer apartado de introducción de datos.

En la **tercera parte** se introducirá la información en el apartado “barras” (El primer dato será la barra 1, el segundo la barra 2, etc...), este también cuenta con tres paréntesis. El primero indica de que nodo a que nodo va la barra. El primer ejemplo es {1,2} lo que indica que la barra 1 va del nodo 1 al nodo 2. El segundo el tipo de perfil y material y el tercero la rigidez rotacional.

```
In[*]:=
```

```
In[*]:= datos = {L0 → 5.0, vE → 2.1 × 1011, A → 1012 × 53.8 × 10-4, Iy → 8360.0 × 10-8,  
Sy → 628 × 10-6, fy → 275.0 × 106, Mp → Sy fy, Np → A fy, P → 1};
```

```
In[*]:=
```

```
In[*]:= nodos = {{{0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},  
{{0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
{{L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, -P * Lc, 0}},  
{{2 L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {P * Lc, 0, 0}},  
{{2 L0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}  
} /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)
```

```
material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
```

```
perfil = {{A, Iy, Sy}} /. datos; (* una lista por perfil *)
```

```
barras = {{{1, 2}, {1, 1}, {0, 0}, {}},  
{{2, 3}, {1, 1}, {0, 0}, {}},  
{{3, 4}, {1, 1}, {0, 0}, {}},  
{{4, 5}, {1, 1}, {0, 0}, {}}}  
} /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez  
rotacional secciones extremas (kN·m/rad) *)
```

Tras introducir la información y compilar el código obtendremos los siguientes resultados:

```

In[*]:= sol = NMaximize[Join[{Lc}, eq, Mij, Nij] /. datos, Join[{Lc}, rI]]
           |maximiza a...|junta           |junta
Out[*]:= {103620., {Lc → 103620., Mz[1, 1] → -172700., Mz[1, 2] → 0., Mz[2, 2] → 0.,
           Mz[2, 3] → 172700., Mz[3, 3] → 172700., Mz[3, 4] → -172700., Mz[4, 4] → -172700.,
           Mz[4, 5] → 172700., Nx[1] → -34540., Nx[2] → 34540., Nx[3] → 34540., Nx[4] → -69080.}}

```

Como podemos observar se ve la ecuación “sol” que es la optimización.

- **Lc:** Factor de carga.
- **Eq:** Ecuaciones de equilibrio.
- **Mij:** Ecuaciones de desigualdad de momentos.
- **Nij:** Axíles en cada barra.
- **rl:** Incógnitas del problema (Momentos plásticos en las barras junto al nodo y en nodos y por último axíles)

Para la resolución del problema a código se ha añadido una nueva ecuación de desigualdad. Esto implica que obtendremos a mayores los axíles:

$$|Nx| \leq N_p$$

Ecuación 19. Restricción de axíles.

Por lo tanto, el resultado de los momentos plásticos es el siguiente:

- $Mz[1,1] = Ma = -172.700 = -M_p$
- $Mz[2,2] = Mb = 0$
- $Mz[3,3] = Mc = 172.700 = M_p$
- $Mz[4,4] = Md = -172.700 = -M_p$
- $Mz[4,5] = Me = 172.700 = M_p$
- $Lc = \lambda_c = 103.620$

Como podemos observar los resultados coinciden con los realizados a mano.

A mayores se ha optado por comprobar también el resultado adquirido con “Sap2000v25”.

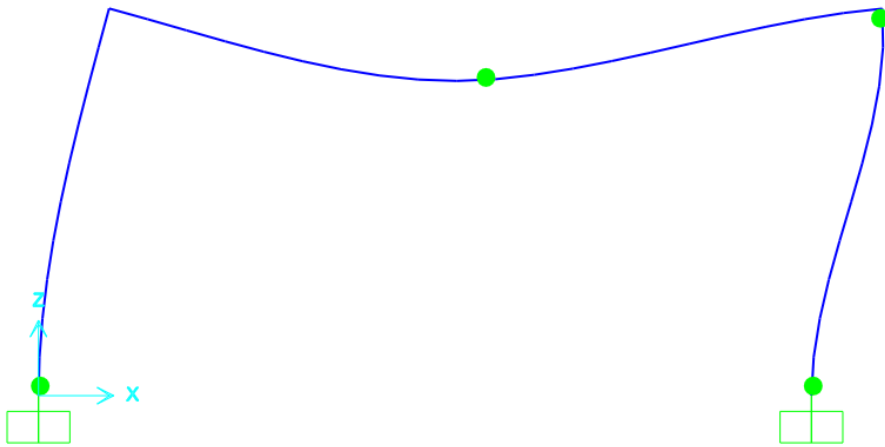


Figura 22. Rótulas Plásticas Ejemplo 1.

SAP2000 v25.1.0 File: PRUEBA P Y P_V1 N, m, C Units PAGE 1
m/d/yy h:mm:ss

UVA

NONLINEAR STATIC DATA

CASE CASO 1

FUNCTION P: Function P

STEP	FUNCTION P
0,	0,
1,	83733,225
2,	88669,824
3,	102118,271
4,	103620,012
5,	103620,038

Figura 23. Factor de carga del Ejemplo 1.

Los resultados del factor de carga y los momentos plásticos coinciden en ambas comprobaciones.

3.2. Ejemplo 2. Resolución a mano.

Tenemos un pórtico biempotrado sometido a dos cargas puntuales. La primera de valor P perpendicular y hacia abajo en el punto "c". La segunda es una carga horizontal aplicada en el punto "d" hacia la derecha como se observa. Todas las barras tienen un momento plástico de valor M_p . Calcula el máximo factor de carga aplicable. **Se va a suponer $P = P_1 \cdot \lambda c$, con $P_1 = 1$**

Datos para el cálculo numérico:

- Longitud: $L = 5\text{m}$
- Material: Acero S275
- Momento plástico: $M_p = 172.700\text{ Pa}$
- Inercia: $I_z = 8360 \cdot 10^{-8}\text{ m}^4$
- Módulo de Young: $E = 2,1 \cdot 10^{11}\text{ Pa}$

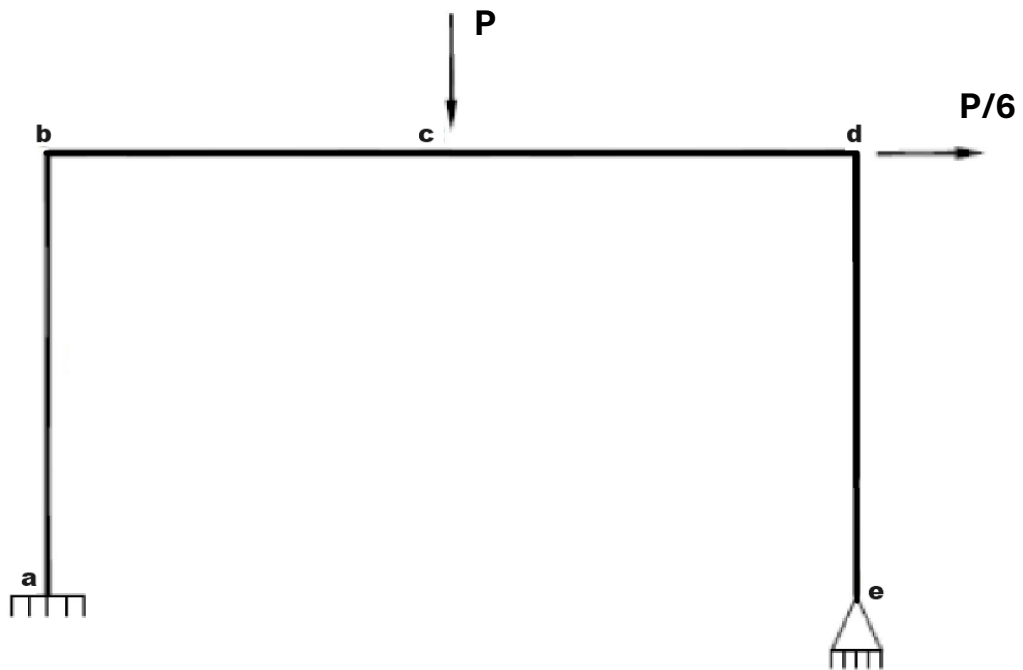


Figura 24. Pórtico empotrado.

El número de posibles rótulas. En este caso es cuatro y corresponden con los siguientes puntos: a, b, c, d.

$$NPR = 4$$

Usando, igual que anteriormente, las ecuaciones del apartado 2.6 calculamos el grado de hiperestaticidad:

$$GH = 6 - 4 = 2$$

A continuación, a través de la ecuación número 13, buscamos calcular el número de ecuaciones de equilibrio y mecanismos independientes que posee la estructura:

$$EQ = NPR - GH = 2$$

Según el resultado obtenido se van a proponer dos mecanismos de colapso para la estructura con sus respectivas ecuaciones.

PDV 1: Primer mecanismo de colapso propuesto:

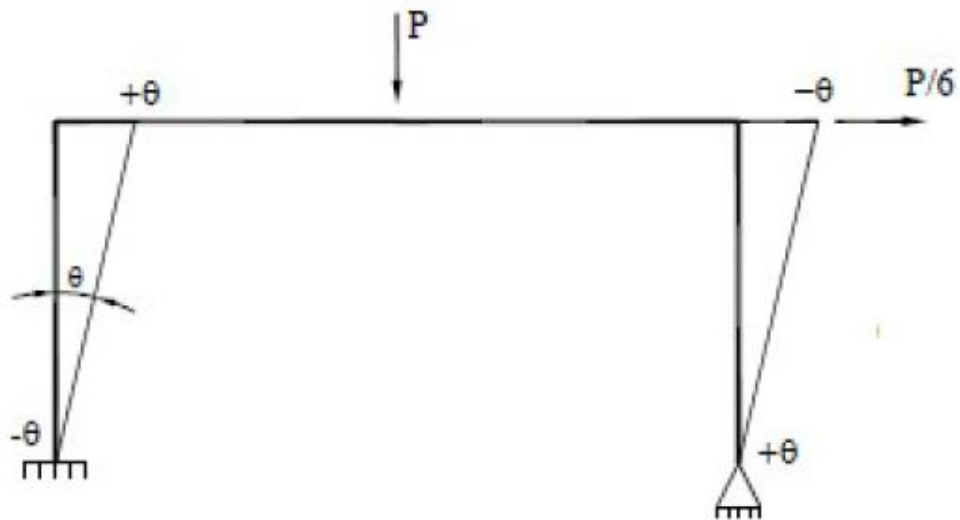


Figura 25. Primer mecanismo de colapso.

$$EQ1 \rightarrow \frac{P}{6} \cdot L \cdot \theta = Ma \cdot (-\theta) + Mb \cdot (+\theta) + Md \cdot (-\theta)$$

$$EQ1 \rightarrow \frac{P}{6} \cdot L = -Ma + Mb - Md$$

PDV 2: Segundo mecanismo de colapso propuesto:

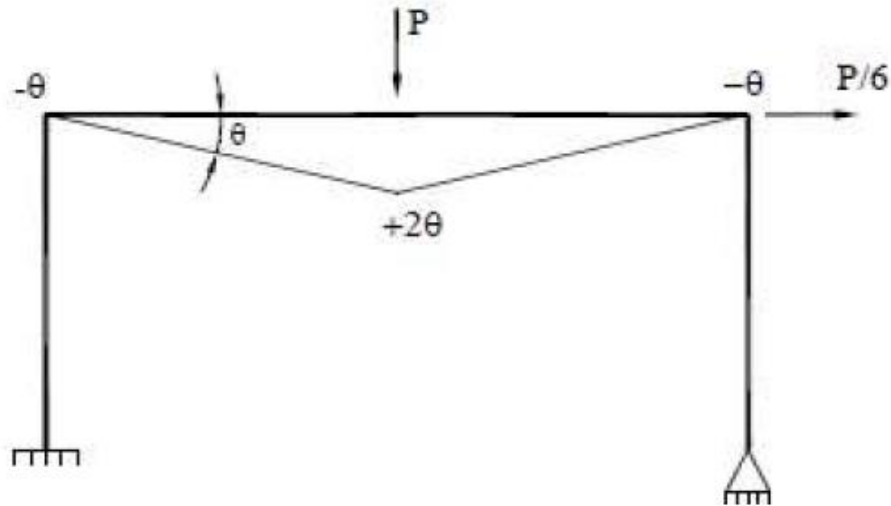


Figura 26. Segundo mecanismo de colapso.

$$EQ2 \rightarrow P \cdot L \cdot \theta = Mb \cdot (-\theta) + Mc \cdot (+2\theta) + Md \cdot (-\theta)$$

$$EQ2 \rightarrow P \cdot L = -Mb + 2 \cdot Mc - Md$$

Tras conseguir las ecuaciones de equilibrio. Vamos a aplicar el método cinemático comentado con anterioridad en el apartado 2.7.3. Continuando de la forma anterior obtenemos lo siguiente para el mecanismo de colapso 1:

$$\begin{cases} Ma = -M_p \\ Mc = +M_p \\ Md = -M_p \\ Me = +M_p \end{cases} \quad \frac{PL}{6} = +M_p + M_p + M_p$$

$$Pc_1 = \frac{18M_p}{L}$$

Para el segundo mecanismo de colapso obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} Mb = -M_p \\ Mc = +M_p \\ Md = -M_p \end{cases} \quad PL = M_p + 2M_p + M_p \rightarrow Pc_2 = \frac{4M_p}{L}$$

El P_c del segundo es menor. Al sustituir este segundo resultado en la ecuación 1 obtenemos una ecuación con dos incógnitas, M_e y M_a :

$$P_c = \frac{4 M_p}{L} \quad y \quad -\frac{2 M_p}{3} = M_a$$

Podemos observar que el mecanismo es seguro, ya que el valor absoluto de M_a siempre será menor que M_p . Para resolver este problema a mano debemos calcular los giros haciendo cero los P . Ahora buscamos tres ecuaciones que cumplan el sistema de ecuaciones. Las vamos a llamar ecuaciones de compatibilidad. Por ello, vamos a crear la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} 0 &= -ma + mb - md \\ 0 &= -mb + 2mc - md \end{aligned}$$

	a	b	c	d	e
M	M_a	$-M_p$	M_p	$-M_p$	M_e
Giros	-	θ_b	θ_c	θ_d	-
EC1	1	1	1/2	0	0
EC2	1	0	1/2	1	0

Tabla 1. Tabla de momentos, giros y ecuaciones.

$$EC1: 0 = -\frac{7M_p}{9EI}L + \theta_b + \theta_c + \theta_d$$

$$EC2: 0 = \frac{M_p}{18EI}L + \frac{1}{2}\theta_c + \theta_d$$

Ecuación 20. Ecuaciones de compatibilidad.

Ahora vamos a calcular a última rótula plástica necesaria para terminar el problema. Para $\theta_b=0$ calculamos.

$$\theta_c = \frac{5M_p L}{3EI} \rightarrow M_c = +M_p, \quad \text{Bien}$$

$$\theta d = -\frac{8MpL}{9EI} \rightarrow Md = -M_p, \text{ Bien}$$

$$Ma = \frac{-2Mp}{3} = -115133 \text{ Nm}$$

$$Me = 0 \text{ Nm}$$

Como se ha comentado, para simplificar se ha trabajado con $P_1=1$ por lo que el resultado del λ_c máximo es:

$$Pc = \lambda c = \frac{4Mp}{L} = 138.160$$

3.2.1. Ejemplo 2. Resolución con código Wolfram Mathematica y SAP2000.

```
datos = {L0 → 5.0, vE → 2.1 × 10^11, A → 10^12 × 53.8 × 10^-4, Iy → 8360.0 × 10^-8,
  Sy → 628 × 10^-6, fy → 275.0 × 10^6, Mp → Sy fy, Np → A fy, P → 1};
```

```
nodos = {{{0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
  {{0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},
  {{L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, -P*Lc, 0}},
  {{2 L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {(P/6) * Lc, 0, 0}},
  {{2 L0, 0}, {0, 0, "x"}, {0, 0, 0}}
} /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)
```

```
material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
```

```
perfil = {{A, Iy, Sy}} /. datos; (* una lista por perfil *)
```

```
barras = {{{1, 2}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
  {{2, 3}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
  {{3, 4}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
  {{4, 5}, {1, 1}, {0, 0}, {}}}
} /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez
rotacional secciones extremas (kN·m/rad) *)
```

Primero introducimos los nuevos datos en el código. En este caso la resolución a mano ha cambiado, sin embargo, la resolución a través del programa sigue siendo igual de sencilla:

```

In[*]:= sol = NMaximize[Join[{Lc}, eq, Mij, Nij] /. datos, Join[{Lc}, rI]]
           [maximiza a...] [junta]

Out[*]:= {138160., {Lc → 138160., Mz[1, 1] → -115133., Mz[1, 2] → -172700., Mz[2, 2] → -172700.,
           Mz[2, 3] → 172700., Mz[3, 3] → 172700., Mz[3, 4] → -172700., Mz[4, 4] → -172700.,
           Mz[4, 5] → 0., Nx[1] → -69080., Nx[2] → -11513.3, Nx[3] → -11513.3, Nx[4] → -69080.}}

In[*]:=

```

Como podemos observar los resultados hechos a mano y los del código coinciden:

- $Mz[1,1] = Ma = -115133 \text{ Nm} = - (2/3) M_p$
- $Mz[2,2] = Mb = -172.700 \text{ Nm} = - M_p$
- $Mz[3,3] = Mc = 172.700 \text{ Nm} = M_p$
- $Mz[4,4] = Md = -172.700 \text{ Nm} = - M_p$
- $Mz[4,5] = Me = 0$
- $Lc = \lambda_c = 138.160$

A mayores se ha optado por comprobar también el resultado adquirido con “Sap2000v25”.

```

SAP2000 v25.1.0 File: PRUEBA P Y PSEXTOS N, m, C Units PAGE 1
m/d/yy h:mm:ss

UVA

NONLINEAR STATIC DATA

CASE CASO 1
FUNCTION P: Function P

STEP FUNCTION
P
0, 0,
1, 115133,271
2, 130032,955
3, 138160,035
4, 138160,037

```

Figura 27. Factor de carga Ejemplo 2.

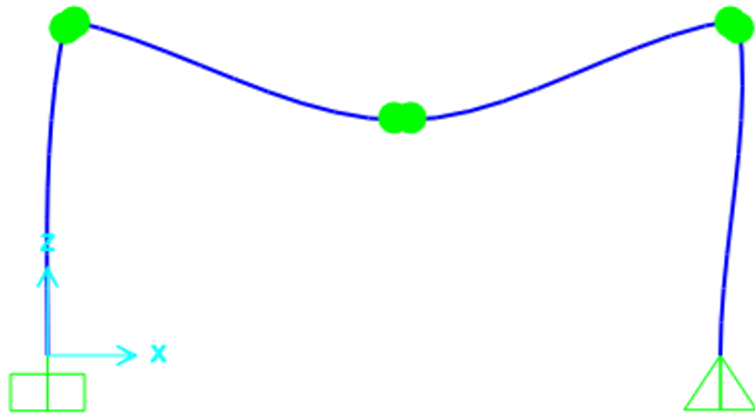


Figura 28. Rótulas Plásticas Ejemplo 2. Instante antes del colapso.

CAPÍTULO 4

Resolución de problemas de aplicación.

4. Resolución de problemas de aplicación

En este apartado se van a resolver dos problemas aplicados reales bidimensionales. Para ello se va a proceder en dos pasos. Primero se va a resolver el problema a través del código desarrollado, y tras ello, como segundo paso se va a comprobar que los resultados obtenidos son los adecuados a través de una simulación de dicho problema en Sap2000v25.

4.1. Problema 1. Pórticos anexos bidimensionales de una nave industrial.

El problema consta de dos pórticos anexos sometidos a dos cargas puntuales en su cumbre y cargas de viento horizontales. Las primeras de valor P perpendicular y hacia abajo en los puntos “c y f”. Las cargas de viento son horizontales aplicadas en los puntos “b y g” hacia la derecha como se observa. Todas las barras tienen un momento plástico de valor M_p . Calcula el máximo factor de carga aplicable. **Se va a suponer $P = P_1 * \lambda c$, con $P_1 = 1$**

Datos para el cálculo numérico:

- **Longitud:** $L = 5\text{m}$
- **Material:** Acero S275
- **Momento plástico:** $M_p = 172.700\text{ Pa}$
- **Inercia:** $I_z = 8360 \cdot 10^{-8}\text{ m}^4$
- **Módulo de Young:** $E = 2,1 \cdot 10^{11}\text{ Pa}$

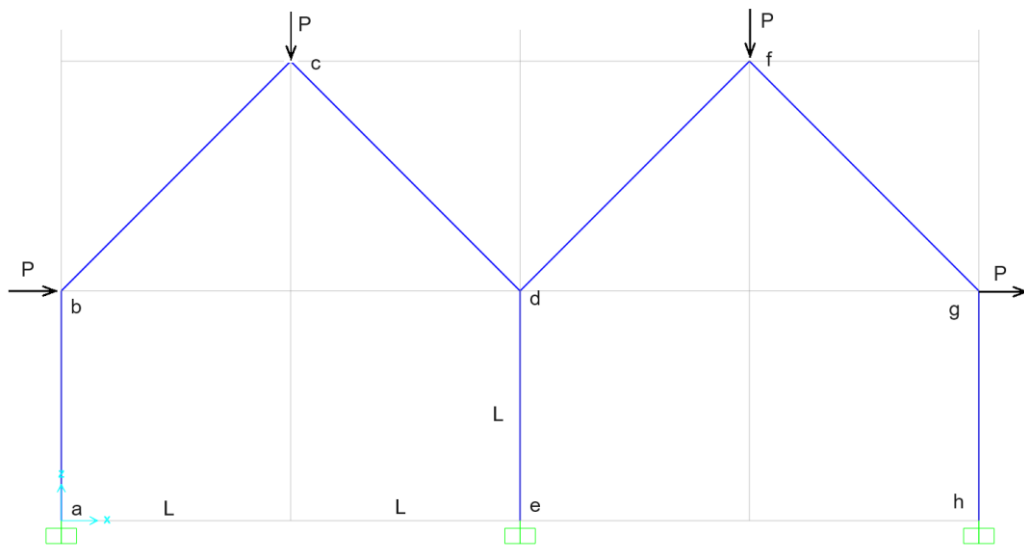


Figura 29. Problema 1. Pórticos anexos de una nave industrial.

Primero se introducen los datos con las posiciones de los nodos y sus cargas aplicadas. También se definen las barras y los datos de estas como su inercia o longitud.

```

In[ ]:= datos = {L0 → 5.0, vE → 2.1 × 1011, A → 1012 × 53.8 × 10-4, Iy → 8360.0 × 10-8, Sy → 628 × 10-6, fy → 275.0 × 106,
Mp → Sy fy, Np → A fy, P → 1};

In[ ]:=

In[ ]:= nodos = {{0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
  {{0, L0}, {"x", "x", "x"}, {P * Lc, 0, 0}},
  {{L0, 2 L0}, {"x", "x", "x"}, {0, -P * Lc, 0}},
  {{2 L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},
  {{2 L0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
  {{3 L0, 2 L0}, {"x", "x", "x"}, {0, -P * Lc, 0}},
  {{4 L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {P * Lc, 0, 0}},
  {{4 L0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
} /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)

material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
perfil = {{A, Iy, Sy}} /. datos; (* una lista por perfil *)

barras = {{1, 2}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
  {{2, 3}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
  {{3, 4}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
  {{4, 5}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
  {{4, 6}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
  {{6, 7}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
  {{7, 8}, {1, 1}, {0, 0}, {}}}
} /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez rotacional secciones extremas (kN·m/rad) *)

```

A continuación, se ejecuta el código para obtener los siguientes resultados tras la optimización.

```
In[*]:= sol = NMaximize[Join[{Lc}, eq, Mij, Nij] //. datos, Join[{Lc}, rI]]
           |maximiza a... |junta           |junta
Out[*]= {89 804., {Lc → 89 804., Mz [1, 1] → -172 700., Mz [1, 2] → 172 700.,
           Mz [2, 2] → 172 700., Mz [2, 3] → 120 890., Mz [3, 3] → 120 890., Mz [3, 4] → -172 700.,
           Mz [4, 4] → -34 540., Mz [4, 5] → 172 700., Mz [5, 4] → -138 160., Mz [5, 6] → 172 700.,
           Mz [6, 6] → 172 700., Mz [6, 7] → -172 700., Mz [7, 7] → -172 700.,
           Mz [7, 8] → 172 700., Nx [1] → -10 362., Nx [2] → -21 981.1, Nx [3] → -70 828.1,
           Nx [4] → -120 890., Nx [5] → -14 654.1, Nx [6] → -19 538.8, Nx [7] → -48 356.}}
```

Como podemos observar estos son los resultados del código:

- $Mz[1,1] = Ma = -172.700 \text{ Nm} = -M_p$
- $Mz[2,2] = Mb = 172.700 \text{ Nm} = M_p$
- $Mz[3,3] = Mc = 120.890 \text{ Nm}$
- $Mz[4,4] = Md = -34.540 \text{ Nm}$
- $Mz[4,5] = Me = 172.700 \text{ Nm} = M_p$
- $Mz[6,6] = Mf = 172.700 \text{ Nm} = M_p$
- $Mz[7,7] = Mg = -172.700 \text{ Nm} = -M_p$
- $Mz[7,8] = Mh = 172.700 \text{ Nm} = M_p$
- $Lc = \lambda_c = 89.804$

Ahora, tras analizar el modelo en Sap2000v25 obtenemos los siguientes resultados:

Como se puede observar en la siguiente imagen se muestran pintadas en verde y magenta las rótulas plásticas formadas justo antes del instante de colapso, que como podemos ver, este sucede en el punto h. También se puede observar que tanto en b como en c no se ha llegado al momento plástico, dando igual resultado que al resolverlo con el código.

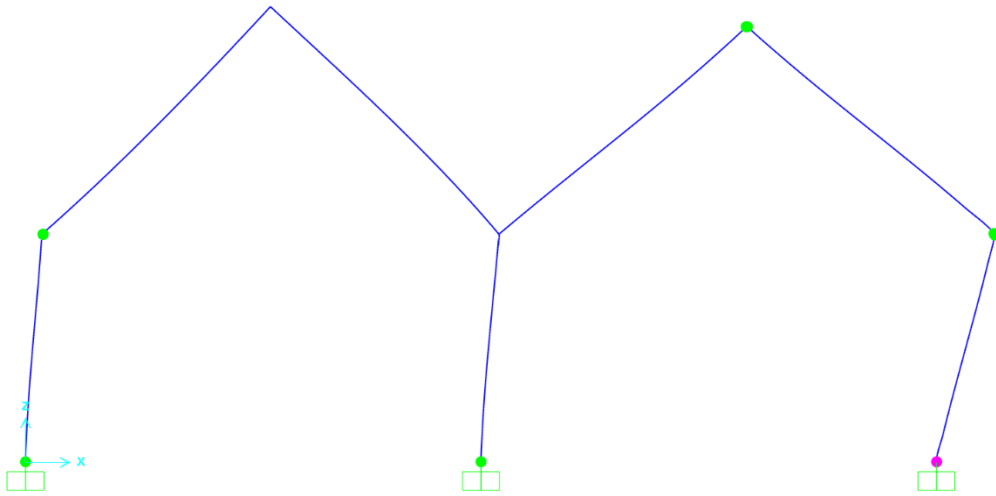


Figura 30. Rótulas Plásticas Problema 1. Instante antes del colapso.

En cuanto al objetivo del problema que es el de calcular el máximo factor de carga aplicable obtenemos los siguientes resultados:

SAP2000 v25.1.0 File: PRUEBA P1_V3 N, m, C Units PAGE 1
m/d/yy h:mm:ss

UVA

NONLINEAR STATIC DATA

CASE CASO 1

FUNCTION P: Function P

STEP	FUNCTION P
0,	0,
1,	0,52169
2,	0,70459
3,	0,83019
4,	0,83887
5,	0,85292
6,	0,86399
7,	0,86399
8,	0,87032
9,	0,87515
10,	0,87515
11,	0,88795
12,	0,88795
13,	0,8908
14,	0,8908
15,	0,89186
16,	0,89187
17,	0,89762
18,	0,89762
19,	0,89762
20,	0,89764

Figura 31. Factor de carga Problema 1.

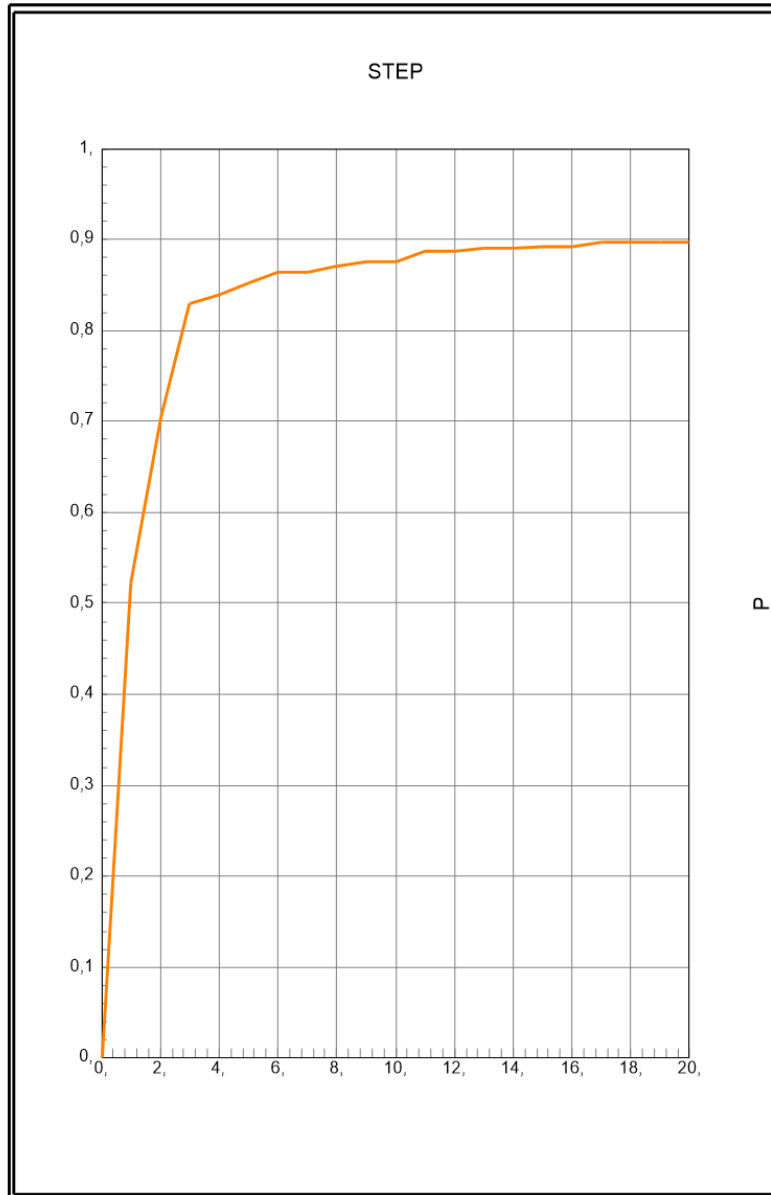


Figura 32. Factor de carga Problema 1. Representación de los datos de la optimización.

El resultado de este problema ha sido comprobado satisfactoriamente ya que el máximo factor de carga obtenida de la optimización con el código de Wolfran Mathematica es el mismo que el obtenido en la comprobación con Sap2000v25.

4.2. Problema 2. Vivienda de dos plantas con garaje.

El problema consta de dos pórticos anexos y otro encima del primero. Estos están sometidos a cargas puntuales verticales debidas a los apoyos del tejado y cargas de viento horizontales aplicadas en los nodos laterales. Las primeras de valor P perpendicular y hacia abajo en los puntos “c, d, e y g”. Las cargas de viento son horizontales y están aplicadas en los puntos “b, c y g” hacia la derecha como se observa.

Todas las barras tienen un momento plástico de valor M_p . Calcula el máximo factor de carga aplicable.

Se va a suponer $P = P_1 \cdot \lambda_c$, con $P_1 = 1$

Datos para el cálculo numérico:

- **Longitud:** $L = 5\text{m}$
- **Material:** Acero S275
- **Momento plástico:** $M_p = 172.700\text{ Pa}$
- **Inercia:** $I_z = 8360 \cdot 10^{-8}\text{ m}^4$
- **Módulo de Young:** $E = 2,1 \cdot 10^{11}\text{ Pa}$

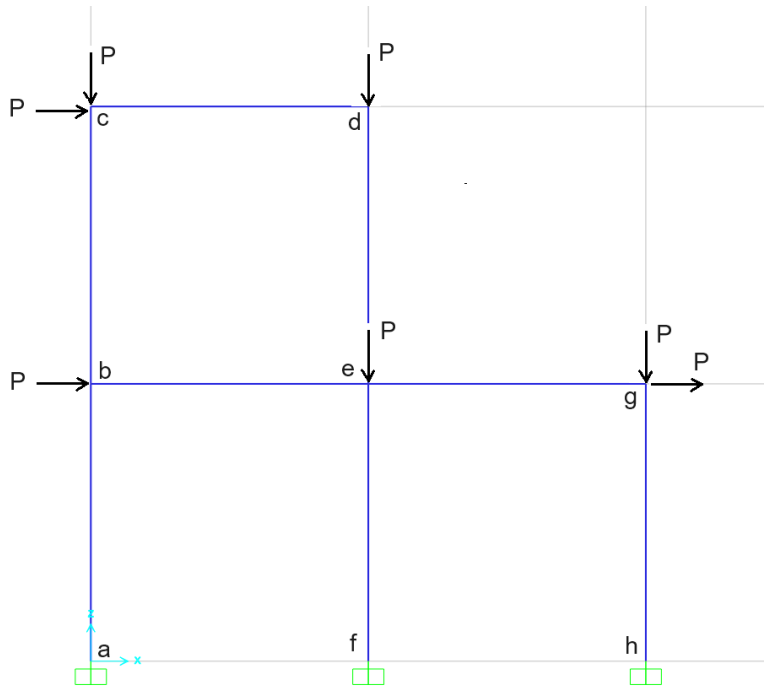


Figura 34. Problema 2. Estructura de vivienda con garaje.

Primero se introducen los datos con las posiciones de los nodos y sus cargas aplicadas. También se definen las barras y los datos de estas como su inercia o longitud al igual que antes.

```

In[*]:= datos = {L0 → 5.0, vE → 2.1 × 1011, A → 1012 × 53.8 × 10-4, Iy → 8360.0 × 10-8, Sy → 628 × 10-6,
fy → 275.0 × 106, Mp → Sy fy, Np → A fy, P → 1};

In[*]:=
In[*]:= nodos = {{0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
{{0, L0}, {"x", "x", "x"}, {P * Lc, 0, 0}},
{{0, 2 L0}, {"x", "x", "x"}, {P * Lc, -P * Lc, 0}},
{{L0, 2 L0}, {"x", "x", "x"}, {0, -P * Lc, 0}},
{{L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, -P * Lc, 0}},
{{L0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
{{2 L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {P * Lc, -P * Lc, 0}},
{{2 L0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
} /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)

material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
perfil = {{A, Iy, Sy}} /. datos; (* una lista por perfil *)

barras = {{1, 2}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
{{2, 3}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
{{3, 4}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
{{4, 5}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
{{5, 6}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
{{2, 5}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
{{5, 7}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
{{7, 8}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
} /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez rotacional secciones
extremas (kN·m/rad) *)

```


A continuación, se ejecuta el código para obtener los siguientes resultados tras la optimización.

```
In[*]:= sol = NMaximize[Join[{Lc}, eq, Mij, Nij] /. datos, Join[{Lc}, rI]]
           [maximiza a...] [junta]
Out[*]:= {69 080., {Lc → 69 080., Mz[1, 1] → -172 700., Mz[1, 2] → 172 700., Mz[2, 2] → 172 700.,
           Mz[2, 3] → 172 700., Mz[3, 3] → 172 700., Mz[3, 4] → -172 700., Mz[4, 4] → -172 700.,
           Mz[4, 5] → 172 700., Mz[5, 5] → -172 700., Mz[5, 6] → 172 700., Mz[6, 2] → 4.35204 × 10-11,
           Mz[6, 5] → -172 700., Mz[7, 5] → 172 700., Mz[7, 7] → -172 700., Mz[8, 7] → -172 700.,
           Mz[8, 8] → 172 700., Nx[1] → 34 540., Nx[2] → -1.30156 × 10-11, Nx[3] → -69 080., Nx[4] → -138 160.,
           Nx[5] → -172 700., Nx[6] → 1.06437 × 10-11, Nx[7] → 2.12875 × 10-11, Nx[8] → -138 160.}}
```

Como podemos observar estos son los resultados del código:

- $Mz[1,1] = Ma = -172.700 \text{ Nm} = -M_p$
- $Mz[2,2] = Mb = 172.700 \text{ Nm} = M_p$
- $Mz[3,3] = Mc = 172.700 \text{ Nm} = M_p$
- $Mz[4,4] = Md = -172.700 \text{ Nm} = -M_p$
- $Mz[5,5] = Me = -172.700 \text{ Nm} = -M_p$
- $Mz[5,6] = Mf = 172.700 \text{ Nm} = M_p$
- $Mz[7,7] = Mg = -172.700 \text{ Nm} = -M_p$
- $Mz[8,8] = Mh = 172.700 \text{ Nm} = M_p$
- $Lc = \lambda_c = 69.080$

Ahora, tras analizar el modelo en Sap2000v25 obtenemos los siguientes resultados:

Como se puede observar en la siguiente imagen se muestran pintadas en verde las rótulas plásticas formadas justo antes del instante de colapso. En este mecanismo, todas las rótulas alcanzan un valor de M_p o $-M_p$ respectivamente.

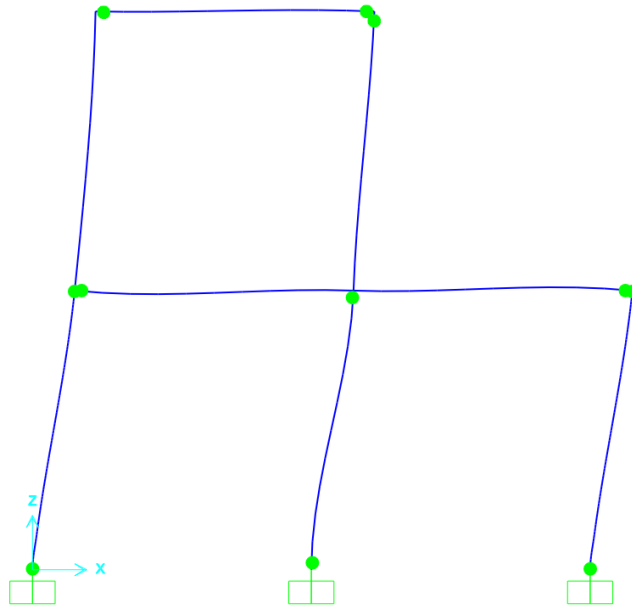


Figura 36. Rótulas Plásticas Problema 2. Instante antes del colapso.

En cuanto al objetivo del problema que es el de calcular el máximo factor de carga aplicable obtenemos los siguientes resultados:

```
SAP2000 v25.1.0 File: PRUEBA P2_V3 N, m, C Units PAGE 1
m/d/yy h:mm:ss

UVA

NONLINEAR STATIC DATA

CASE CASO 1
FUNCTION P: Function P

STEP    FUNCTION
        P
0,      0,
1,      55917,556
2,      60891,178
3,      64213,397
4,      67203,996
5,      69080,072
6,      69080,274
7,      69080,55
8,      69080,62
9,      69080,658
10,     69080,773
11,     69080,845
12,     69080,96
13,     69081,29
14,     69083,51
```

Figura 38. Factor de carga Problema 2.

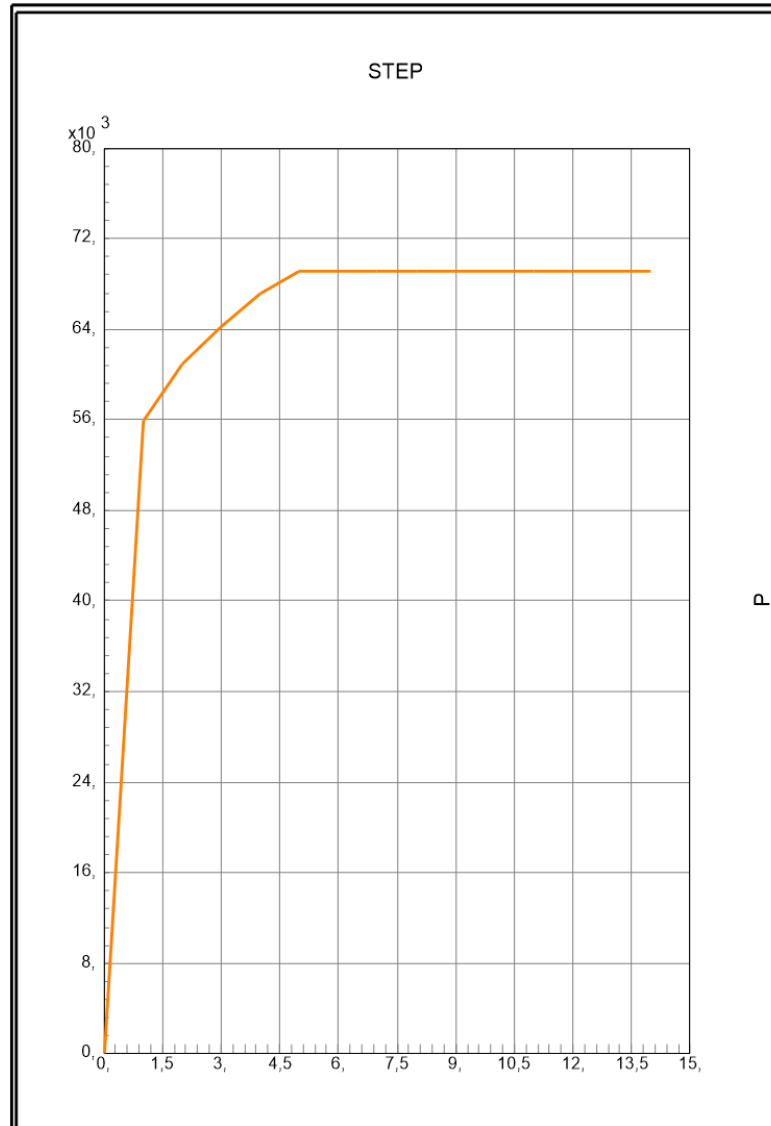


Figura 40. Factor de carga Problema 2. Representación de los datos de la optimización.

El resultado de este problema ha sido comprobado satisfactoriamente ya que el máximo factor de carga obtenida de la optimización con el código de Wolfram Mathematica es el mismo que el obtenido en la comprobación con Sap2000v25.

CAPÍTULO 5

Estudio económico.

5. Estudio económico

5.1 Introducción

En este apartado vamos a determinar los costes teóricos para llevar a cabo el desarrollo de este proyecto.

El proyecto consiste en desarrollar un código en un lenguaje de programación a elegir, en este caso Wolfram Mathematica, que permita a través de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sistematizar el cálculo del momento plástico para obtener el máximo factor de carga aplicable de una manera sencilla y lo más generalizada posible para adicionar variedad en los tipos de estructuras a resolver.

En este tipo de proyecto, podemos encontrar dos tipos de costes: Los directos y los indirectos. Los más importante en este trabajo van a ser los costes directos ya que en ellos se incluye la mano de obra.

- Podemos definir los costes directos como los gastos necesarios para el desarrollo o fabricación de un producto siendo estos imputables a un único elemento contable. Aquí podemos encontrar materias primas, salarios, transporte, hardware, etc...
- Podemos definir los gastos indirectos como los que no se pueden imputar a un único gasto. Aquí podemos englobar marketing, publicidad, luz, agua, gas, etc...

5.2 Costes directos

En este proyecto podemos destacar tres tipos:

- Mano de obra.
- Material amortizable
- Material No amortizable

5.2.1. Mano de obra

En la realización de este proyecto se ha necesitado el trabajo de un ingeniero. A la razón de 222 días laborables en un año y 8 horas diarias de trabajo se pueden obtener 1776 horas/año de trabajo remunerado. A mayores a la presencia de un trabajador hay que añadir los siguientes costes:

Salario bruto	25.000 €/año
Complementos	0€/año
Contingencias Comunes	5.900 €/año
Accidentes de Trabajo y Enfermedades Profesionales (AT y EP)	562,5 €/año
Desempleo	1.375 €/año
Formación Profesional	150€/año
Fondo de garantía salarial (FOGASA)	50 €/año
Total:	33.037,5 €
Coste de mano de obra por hora:	18,60€/hora

Tabla 2. Costes de mano de obra.

Sabiendo el coste por hora de trabajo se van a desglosar las distintas actividades realizadas y su duración para obtener el tiempo total aproximado empleado.

Estudio preliminar y recopilación de información	100h
Aprendizaje de Wolfran Mathematica	45h
Aprendizaje de Sap2000	40h
Desarrollo del programa	70h
Comprobación de resultados	30h
Creación de la Memoria	100h
Número total de horas:	385h

Tabla 3. Número total de horas trabajadas.

Con los resultados obtenidos podemos constatar que el coste de un ingeniero que haya trabajado 385h es de **7161€** de coste de mano de obra.

5.2.2. Material amortizable

En los costes de material amortizable se van a incluir el ordenador en el que se ha trabajado y en el que se va a suponer una amortización lineal de 4 años, que son con los que cuenta actualmente. Además, también se va a incluir la licencia del software de Wolfran Mathematica. Por lo tanto, el material amortizable empleado es el siguiente:

- Ordenador por piezas.
- Periféricos: Ratón, teclado y monitor.
- Licencia de Software de Wolfram Mathematica

El periodo amortizable cuenta con 7.104 horas de trabajo. Con este dato se va a proceder a calcular el coste de amortización.

Material	Coste inicial	Coste por hora	Horas trabajadas	Coste de amortización
Ordenador	1800€	0,2533€/h	345h	87,38€
Periféricos	245€	0,0344€/h	345h	11,86€
Wolfram Mathematica	8520€	1,1993€/h	245h	293,82€
Sap2000	2350€	0,3307€/h	60h	19,84€
Total:				412,84€

Tabla 4. Costes del material amortizable.

5.2.3. Material no amortizable

En este apartado vamos a incluir los costes no amortizables:

Material de apoyo	160€
Papel y encuadernación	45€
Total:	205€

Tabla 5. Costes de material no amortizable.

5.2.4. Costes directos totales

En este apartado se sumarán todos los costes directos obtenidos con anterioridad:

Mano de obra	7161€
Costes directos	412,84€
Costes indirectos	205€
Total:	7.778,84€

Tabla 6. Costes directos totales.

Los costes directos finales son siete mil setecientos setenta y ocho con ochenta y cuatro.

5.3. Costes indirectos

En los costes indirectos se van a incluir todos los gastos no atribuibles a las actividades de la empresa. El apartado de costes de explotación incluye el coste de la electricidad, internet, comunidad, transporte, etc... Mientras que en los costes de administración se recogerán los gastos generales de todos los tramites realizados por el equipo de trabajo.

Costes de explotación	230€
Costes de administración	130€
Total:	360€

Tabla 7. Costes indirectos.

Los costes indirectos finales son trescientos sesenta euros.

5.4. Costes totales

Los costes totales del proyecto es la suma de los costes directos e indirectos. Además, al realizar el trabajo en el Reino de España, es de obligado cumplimiento la aplicación del 21% de IVA.

Costes directos	7.778,84€
Costes indirectos	360€
Costes totales sin IVA	8.138,84€
Coste final con IVA	9.847,99€

Tabla 8. Coste final con IVA.

El coste final del proyecto aplicando el Impuesto sobre el Valor Añadido (IVA) es de nueve mil ochocientos cuarenta y siete con noventa y nueve euros.

CAPÍTULO 6

Conclusiones.

6. Conclusiones

En este apartado se van a recoger las conclusiones del trabajo de fin de grado.

Como se ha observado, el proyecto se ha realizado con éxito en todos sus ámbitos, destacando el principal, que es el de optimizar el factor de carga de la estructura para que su valor sea máximo. Debido a esto podemos obtener las siguientes conclusiones del proyecto.

- El método de resolución a través del código permite resolver problemas más complejos de los usados en enseñanza.
- El código permite obtener el máximo factor de carga aplicable de una manera más rápida y con un menor riesgo de fallo. Debido a esto se puede considerar su desarrollo como un éxito.
- Gracias al código se puede obtener la distribución de los momentos flectores en todos los nodos a analizar, al igual que los esfuerzos axiales en cada una de las barras en el instante de colapso.
- El código permite una gran personalización y variación a mayores de la actual, como diferentes secciones, cargas aplicadas, etc...

Tras exponer los anteriores resultados se puede afirmar que la resolución a través del código es mucho más completa y rápida que una resolución a mano.

Además, este permite, para personas que no sepan o puedan acceder a programas externos de resolución de estructuras, la posibilidad de acceder a una resolución rápida y sencilla de aplicar.

En esta última parte se puede resumir la motivación para realizar el proyecto. Ya que toda persona con acceso a la herramienta de Wolfram Mathematica puede resolver desde problemas más sencillos como otros más complejos que simulan en mayor medida la realidad.

6.1. Líneas futuras

El proyecto se ha basado en la realización de un código, que en su mayor parte se centra en buscar las ecuaciones de equilibrio para que en su parte final ya se haga el proceso de optimización. Estas ecuaciones de equilibrio están obtenidas de estructuras con cargas puntuales en los nodos. Por lo tanto, como una posible ampliación se podrían plantear cuatro objetivos simples pero que completan bastante más el proyecto.

El primero sería la resolución de estructuras con cargas distribuidas a lo largo de las barras, lo que añadiría complejidad a la obtención de estas ecuaciones de equilibrio.

Incluso y a mayores de lo que se ha propuesto antes, se pueden llegar a añadir cargas variables en el tiempo. Lo que incluiría un análisis dinámico, añadiendo mayor complejidad.

También se puede proponer la resolución de pórticos en tres dimensiones, lo que permitiría generalizar bastante para estructuras reales.

Y por último se puede proponer, la introducción de barras de sección variable.

CAPÍTULO 7

Bibliografía.

7. Bibliografía

[1] Neal, B.G., (1985) The Plastic Methods of Structural Analysis. Chapman & Hall.

[2] Santiago Torrano & D. Herrero Pérez (2011) El esfuerzo axial. (c).
Universidad de Cartagena.

Enlace asociado:

https://ocw.bib.upct.es/pluginfile.php/5476/mod_resource/content/1/T8-esfuerzo-axil_v1.pdf

[3] Cálculo de Estructuras de Acero: Caso de las Vigas. Construmática, Área de Cálculo. (agosto 2018).

Enlace asociado:

<https://www.construmatica.com/construpedia/index.php?title=Cálculo de Estructuras de Acero: Caso de las Vigas&mobileaction=toggle view desktop>

[4] Análisis plástico de estructuras. Universidad Nacional del Nordeste.

Enlace asociado:

http://ing.unne.edu.ar/pub/e3_cap5.pdf

[5] Tensiones de corte en la flexión. Universidad Nacional del Nordeste.

Enlace asociado:

<http://ing.unne.edu.ar/pub/Capitulo07-A05.pdf>

[6] Plastificación de una sección en flexión compuesta. Universidad politécnica de Cartagena.

Enlace asociado:

https://ocw.bib.upct.es/pluginfile.php/10714/mod_resource/content/2/resistencia/node123.html

[7] Álvaro Magdaleno González. Cálculo plástico de pórticos planos.
Universidad de Valladolid

[8] Avriel, Mordecai (2003). Nonlinear Programming: Analysis and Methods.
Dover Publishing. ISBN 0-486-43227-0.

CAPÍTULO 8

Anexos.

8. Anexos

8.1. Código Ejemplo 1

```
In[ ]:= (*definiciones*)

In[ ]:= (* unidades: m, N *)

In[ ]:= (*matriz de paso: globales → locales*)
T[x_, y_] := {{x, y, 0, 0, 0, 0}, {-y, x, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
              {0, 0, 0, x, y, 0}, {0, 0, 0, -y, x, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}};
MatrixForm[T[λx, λy]]
[forma de matriz

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1. & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0. & -1. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. & 0. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


In[ ]:=

In[ ]:=

In[ ]:=

In[ ]:= datos = {L0 → 5.0, vE → 2.1 × 1011, A → 1012 × 53.8 × 10-4, Iy → 8360.0 × 10-8,
              Sy → 628 × 10-6, fy → 275.0 × 106, Mp → Sy fy, Np → A fy, P → 1};

In[ ]:=

In[ ]:= nodos = {{0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
              {{0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},
              {{L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, -P*Lc, 0}},
              {{2 L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {P*Lc, 0, 0}},
              {{2 L0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
              } /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)

material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
perfil = {{A, Iy, Sy}} /. datos; (* una lista por perfil *)

barras = {{1, 2}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{2, 3}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{3, 4}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{4, 5}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          } /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez
rotacional secciones extremas (kN·m/rad) *)
```

```

In[*]:= nd = Length[nodos]; (* numero de nudos *)
      |longitud
nb = Length[barras]; (* numero de barras *)
      |longitud

In[*]:= (*matriz de rigidez elemental (globales)*)
s = 3; (*gdl/nudo, tipo de problema*)
Fe = Table[0, {nb}, {2 s}, {2 s}];
      |tabla
xy = Table[nodos[[i][1]], {i, nd}};
      |tabla

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
|para cada
  Print["Elemento = ", b];
  |escribe
  i = barras[[b][1][1];
  j = barras[[b][1][2];
  L =  $\sqrt{((\mathbf{xy}[[\mathbf{j}][\mathbf{1}] - \mathbf{xy}[[\mathbf{i}][\mathbf{1}]])^2 + (\mathbf{xy}[[\mathbf{j}][\mathbf{2}] - \mathbf{xy}[[\mathbf{i}][\mathbf{2}]])^2)}$ ;
   $\lambda_x = (\mathbf{xy}[[\mathbf{j}][\mathbf{1}] - \mathbf{xy}[[\mathbf{i}][\mathbf{1}]]) / \mathbf{L}$ ;
  Print["     $\lambda_x =$ ", N[[ $\lambda_x$ , 3]]];
  |escribe |valor numérico
   $\lambda_y = (\mathbf{xy}[[\mathbf{j}][\mathbf{2}] - \mathbf{xy}[[\mathbf{i}][\mathbf{2}]]) / \mathbf{L}$ ;
  Print["     $\lambda_y =$ ", N[[ $\lambda_y$ , 3]]];
  |escribe |valor numérico
  kk = {-Nx[b], (Mz[b, j] - Mz[b, i]) / L, -Mz[b, i], Nx[b], - (Mz[b, j] - Mz[b, i]) / L,
    Mz[b, j]}];
  Part[Fe, b] = Transpose[T[[ $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ]].kk];
  |parte |transposición
  Print[MatrixForm[Fe[[b]]]];
  |escribe |forma de matriz
  }
]

```

Elemento = 1

$\lambda_x = 0.$

$\lambda_y = 1.$

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (-\mathbf{Mz}[1, 1] + \mathbf{Mz}[1, 2]) \\ 0. - 1. \mathbf{Nx}[1] \\ 0. - \mathbf{Mz}[1, 1] \\ 0. - 0.2 (\mathbf{Mz}[1, 1] - \mathbf{Mz}[1, 2]) \\ 0. + 1. \mathbf{Nx}[1] \\ 0. + \mathbf{Mz}[1, 2] \end{pmatrix}$$

Elemento = 2

$\lambda_X = 1.$

$\lambda_Y = 0.$

$$\begin{pmatrix} 0. - 1. \text{Nx}[2] \\ 0. + 0.2 (-\text{Mz}[2, 2] + \text{Mz}[2, 3]) \\ 0. - \text{Mz}[2, 2] \\ 0. + 1. \text{Nx}[2] \\ 0. + 0.2 (\text{Mz}[2, 2] - \text{Mz}[2, 3]) \\ 0. + \text{Mz}[2, 3] \end{pmatrix}$$

Elemento = 3

$\lambda_X = 1.$

$\lambda_Y = 0.$

$$\begin{pmatrix} 0. - 1. \text{Nx}[3] \\ 0. + 0.2 (-\text{Mz}[3, 3] + \text{Mz}[3, 4]) \\ 0. - \text{Mz}[3, 3] \\ 0. + 1. \text{Nx}[3] \\ 0. + 0.2 (\text{Mz}[3, 3] - \text{Mz}[3, 4]) \\ 0. + \text{Mz}[3, 4] \end{pmatrix}$$

Elemento = 4

$\lambda_X = 0.$

$\lambda_Y = -1.$

$$\begin{pmatrix} 0. + 0.2 (-\text{Mz}[4, 4] + \text{Mz}[4, 5]) \\ 0. + 1. \text{Nx}[4] \\ 0. - \text{Mz}[4, 4] \\ 0. + 0.2 (\text{Mz}[4, 4] - \text{Mz}[4, 5]) \\ 0. - 1. \text{Nx}[4] \\ 0. + \text{Mz}[4, 5] \end{pmatrix}$$

`In[]:=`

`In[]:= (* ensamblar fuerzas equivalentes *)`

`s = 3;`

`ngdl = s nd;`

`Feqv = Table[0.0, {ngdl}];`

`|tabla`

`For[b = 1, b ≤ nb, b++, {`

`|para cada`

`i = barras[b][1][1];`

`j = barras[b][1][2];`

`(*nudo i*)`

`For[f = 1, f ≤ s, f++, (*filas*)`

`|para cada`

`.....`

```

Part[Feqv, s (j - 1) + f] += Part[Fe, b, s + f];
|parte |parte
];
}
];
MatrixForm[Feqv, 7]
|forma de matriz

```

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) \\ 0. - 1. Nx[1] \\ 0. - Mz[1, 1] \\ 0. - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 1. Nx[2] \\ 0. + 0.2 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2] \\ 0. + 1. Nx[2] - 1. Nx[3] \\ 0. + 0.2 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.2 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) \\ 0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3] \\ 0. + 0.2 (-Mz[4, 4] + Mz[4, 5]) + 1. Nx[3] \\ 0. + 0.2 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. Nx[4] \\ 0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4] \\ 0. + 0.2 (Mz[4, 4] - Mz[4, 5]) \\ 0. - 1. Nx[4] \\ 0. + Mz[4, 5] \end{pmatrix}$$

In[]:=

```

In[ ]:= u = Array[Δ, {ngdl}]; (*desplazamientos *)
|arreglo
F = Array[W, {ngdl}]; (*fuerzas en los nodos*)
|arreglo

```

```

For[i = 1, i ≤ nd, i++, {
|para cada
For[j = 1, j ≤ s, j++, {
|para cada
If[(nodos[[i]][2][j] == "x"), F[[s (i - 1) + j] = nodos[[i]][3][j],
|si
u[[s (i - 1) + j] = nodos[[i]][2][j];
}
];
}
];

```

```

MatrixForm[u] (*desplazamientos*)
|forma de matriz

```

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta[4] \\ \Delta[5] \\ \Delta[6] \\ \Delta[7] \\ \Delta[8] \\ \Delta[9] \\ \Delta[10] \\ \Delta[11] \\ \Delta[12] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} W[1] \\ W[2] \\ W[3] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Lc \\ 0 \\ Lc \\ 0 \\ 0 \\ W[13] \\ W[14] \\ W[15] \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= orden = 0;
For[i = 1, i ≤ ngdl, i++, If[u[[i]] == 0.0, orden++]]
para cada si

cono = Table[0, {orden}]; (*gdl conocidos*)
tabla

For[i = 1; a = 1, i ≤ ngdl, i++, If[u[[i]] == 0.0, {Part[cono, a] = i, a++}]]
para cada si parte

kk = Table[i, {i, 1, ngdl}];
tabla

incog = Complement[kk, cono] (*gdl incognita*)
complemento
```



```
Out[*]= {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
```

```
In[*]:= ecs = Feqv - F;  
MatrixForm[ecs]  
[forma de matriz]
```

```
Out[*]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) - W[1] \\ 0. - 1. Nx[1] - W[2] \\ 0. - Mz[1, 1] - W[3] \\ 0. - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 1. Nx[2] \\ 0. + 0.2 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2] \\ 0. + 1. Nx[2] - 1. Nx[3] \\ 0. + Lc + 0.2 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.2 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) \\ 0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3] \\ 0. - Lc + 0.2 (-Mz[4, 4] + Mz[4, 5]) + 1. Nx[3] \\ 0. + 0.2 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. Nx[4] \\ 0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4] \\ 0. + 0.2 (Mz[4, 4] - Mz[4, 5]) - W[13] \\ 0. - 1. Nx[4] - W[14] \\ 0. + Mz[4, 5] - W[15] \end{pmatrix}$$

```
In[*]:= eq = Table[0, {Length[incog]}];  
[tabla [longitud]]  
Do[  
[repite  
eq[[i]] = ecs[[incog]][[i]] == 0  
, {i, Length[incog]}]  
[longitud]
```

```
eq
```

```
Out[*]= {0. - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 1. Nx[2] == 0,  
0. + 0.2 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + 1. Nx[1] == 0,  
0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2] == 0, 0. + 1. Nx[2] - 1. Nx[3] == 0,  
0. + Lc + 0.2 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.2 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) == 0,  
0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3] == 0, 0. - Lc + 0.2 (-Mz[4, 4] + Mz[4, 5]) + 1. Nx[3] == 0,  
0. + 0.2 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. Nx[4] == 0, 0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4] == 0}
```

```
In[*]:=
```

```
In[*]:= Mij = {}; Nij = {};  
rM = {};  
For[b = 1, b ≤ nb, b++, {  
[para cada
```

```

i = barras[b][1][1];
j = barras[b][1][2];
L = Sqrt[(xy[j][1] - xy[i][1])^2 + (xy[j][2] - xy[i][2])^2];

vEi = material[barras[b][2][1]][1];
Ai = perfil[barras[b][2][2]][1];
Ii = perfil[barras[b][2][2]][2];
Npi = Ai fy;
Mpi = perfil[barras[b][2][2]][3] * material[barras[b][2][2]][2];

Mij = Join[Mij, {-Mpi < Mz[b, i] < Mpi, -Mpi ≤ Mz[b, j] ≤ Mpi}] //. datos;
      junta
Nij = Join[Nij, {-Npi < Nx[b] < Npi}] //. datos;
      junta
rM = Join[rM, {Mz[b, i], Mz[b, j]}];
      junta
}
];
rM

Out[ ] = {Mz[1, 1], Mz[1, 2], Mz[2, 2], Mz[2, 3], Mz[3, 3], Mz[3, 4], Mz[4, 4], Mz[4, 5]}

In[ ] :=

In[ ] := (* incognitas *)
rI = {};
rI = Join[rI, rM, Table[Nx[i], {i, nb}]]
      junta      tabla
rI0 = rI;

Out[ ] = {Mz[1, 1], Mz[1, 2], Mz[2, 2], Mz[2, 3], Mz[3, 3],
          Mz[3, 4], Mz[4, 4], Mz[4, 5], Nx[1], Nx[2], Nx[3], Nx[4]}

In[ ] := sol = NMaximize[Join[{Lc}, eq, Mij, Nij] //. datos, Join[{Lc}, rI]]
      [maximiza a... junta      junta

Out[ ] = {103620.,
          {Lc → 103620., Mz[1, 1] → -172700., Mz[1, 2] → 0., Mz[2, 2] → 0., Mz[2, 3] → 172700.,
           Mz[3, 3] → 172700., Mz[3, 4] → -172700., Mz[4, 4] → -172700., Mz[4, 5] → 172700.,
           Nx[1] → -34540., Nx[2] → 34540., Nx[3] → 34540., Nx[4] → -69080.}}

```

8.2. Código Ejemplo 2

```

In[53]:= (*definiciones*)

In[54]:= (* unidades: m, N *)

In[55]:= (*matriz de paso: globales → locales*)
T[x_, y_] := {{x, y, 0, 0, 0, 0}, {-y, x, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
              {0, 0, 0, x, y, 0}, {0, 0, 0, -y, x, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}};
MatrixForm[T[λx, λy]]
|forma de matriz

Out[56]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1. & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0. & -1. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. & 0. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


In[57]:=

In[58]:=

In[59]:=

In[60]:= datos = {L0 → 5.0, vE → 2.1 × 1011, A → 1012 × 53.8 × 10-4, Iy → 8360.0 × 10-8,
                 Sy → 628 × 10-6, fy → 275.0 × 106, Mp → Sy fy, Np → A fy, P → 1};

In[61]:=

In[62]:= nodos = {{0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
                {{0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},
                {{L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, -P*Lc, 0}},
                {{2 L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {(P/6)*Lc, 0, 0}},
                {{2 L0, 0}, {0, 0, "x"}, {0, 0, 0}}
                } /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)

material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
perfil = {{A, Iy, Sy}} /. datos; (* una lista por perfil *)

barras = {{1, 2}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{2, 3}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{3, 4}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{4, 5}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          } /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez
rotacional secciones extremas (kN·m/rad) *)

In[66]:= nd = Length[nodos]; (* numero de nudos *)
|longitud
nb = Length[barras]; (* numero de barras *)
|longitud

```

```

In[ ]:= (*matriz de rigidez elemental (globales)*)
s = 3; (*gdl/nudo, tipo de problema*)
Fe = Table[0, {nb}, {2 s}, {2 s}];
      |tabla
xy = Table[nodos[[i]][1], {i, nd}];
      |tabla

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
|para cada
  Print["Elemento = ", b];
  |escribe
  i = barras[b][1][1];
  j = barras[b][1][2];
  L = √((xy[j][1] - xy[i][1])^2 + (xy[j][2] - xy[i][2])^2);
  λx = (xy[j][1] - xy[i][1]) / L;
  Print["    λx = ", N[λx, 3]];
  |escribe |valor numérico
  λy = (xy[j][2] - xy[i][2]) / L;
  Print["    λy = ", N[λy, 3]];
  |escribe |valor numérico
  kk = {-Nx[b], (Mz[b, j] - Mz[b, i]) / L, -Mz[b, i], Nx[b], -(Mz[b, j] - Mz[b, i]) / L,
        Mz[b, j]};
  Part[Fe, b] = Transpose[T[λx, λy]].kk;
  |parte |transposición
  Print[MatrixForm[Fe[b]]];
  |escribe |forma de matriz
}
]

```

Elemento = 1

λx = 0.

λy = 1.

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) \\ 0. - 1. Nx[1] \\ 0. - Mz[1, 1] \\ 0. - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) \\ 0. + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 2] \end{pmatrix}$$

Elemento = 2

λx = 1.

λy = 0.

$$\begin{pmatrix} 0. - 1. Nx[2] \\ 0. + 0.2 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) \\ 0. - Mz[2, 2] \\ 0. + 1. Nx[2] \\ 0. + 0.2 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) \\ 0. + Mz[2, 3] \end{pmatrix}$$

Elemento = 3

$\lambda_x = 1.$

$\lambda_y = 0.$

$$\begin{pmatrix} 0. - 1. \text{Nx}[3] \\ 0. + 0.2 (-\text{Mz}[3, 3] + \text{Mz}[3, 4]) \\ 0. - \text{Mz}[3, 3] \\ 0. + 1. \text{Nx}[3] \\ 0. + 0.2 (\text{Mz}[3, 3] - \text{Mz}[3, 4]) \\ 0. + \text{Mz}[3, 4] \end{pmatrix}$$

Elemento = 4

$\lambda_x = 0.$

$\lambda_y = -1.$

$$\begin{pmatrix} 0. + 0.2 (-\text{Mz}[4, 4] + \text{Mz}[4, 5]) \\ 0. + 1. \text{Nx}[4] \\ 0. - \text{Mz}[4, 4] \\ 0. + 0.2 (\text{Mz}[4, 4] - \text{Mz}[4, 5]) \\ 0. - 1. \text{Nx}[4] \\ 0. + \text{Mz}[4, 5] \end{pmatrix}$$

In[*]:=

In[*]:= (* ensamblar fuerzas equivalentes *)

s = 3;

ngd1 = s nd;

Feqv = Table[0.0, {ngd1}];
|tabla

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
|para cada

i = barras[b][1][1];

j = barras[b][1][2];

(*nudo i*)

For[f = 1, f ≤ s, f++, (*filas*)

|para cada

Part[Feqv, s (i - 1) + f] += Part[Fe, b, f];
|parte |parte

];

(*nudo j*)

For[f = 1, f ≤ s, f++, (*filas*)

|para cada

Part[Feqv, s (j - 1) + f] += Part[Fe, b, s + f];
|parte |parte

];

}

];

MatrixForm[Feqv, 7]

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) \\ 0. - 1. Nx[1] \\ 0. - Mz[1, 1] \\ 0. - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 1. Nx[2] \\ 0. + 0.2 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2] \\ 0. + 1. Nx[2] - 1. Nx[3] \\ 0. + 0.2 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.2 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) \\ 0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3] \\ 0. + 0.2 (-Mz[4, 4] + Mz[4, 5]) + 1. Nx[3] \\ 0. + 0.2 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. Nx[4] \\ 0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4] \\ 0. + 0.2 (Mz[4, 4] - Mz[4, 5]) \\ 0. - 1. Nx[4] \\ 0. + Mz[4, 5] \end{pmatrix}$$

In[]:=

```
In[ ]:= u = Array[Δ, {ngdl}]; (*desplazamientos *)
      [arreglo]
F = Array[W, {ngdl}]; (*fuerzas en los nudos*)
      [arreglo]

For[i = 1, i ≤ nd, i++, {
  [para cada]
    For[j = 1, j ≤ s, j++, {
      [para cada]
        If[(nodos[[i]][2][j] == "x"), F[[s (i - 1) + j]] = nodos[[i]][3][j],
          [si]
            u[[s (i - 1) + j]] = nodos[[i]][2][j];
        }
      ]
    }
  ]
];

MatrixForm[u] (*desplazamientos*)
[forma de matriz]
MatrixForm[F]
[forma de matriz]
(*fuerzas*)
```

Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta[4] \\ \Delta[5] \\ \Delta[6] \\ \Delta[7] \\ \Delta[8] \\ \Delta[9] \\ \Delta[10] \\ \Delta[11] \\ \Delta[12] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} W[1] \\ W[2] \\ W[3] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Lc \\ 0 \\ \frac{Lc}{6} \\ 0 \\ 0 \\ W[13] \\ W[14] \\ W[15] \end{pmatrix}$$

In[*]:= **orden = 0;**

For[**i = 1, i ≤ ngdl, i++, If**[**u[[i]] == 0.0, orden++**]]
|para cada |si

cono = Table[**0, {orden}**]; (*gdl conocidos*)
|tabla

For[**i = 1; a = 1, i ≤ ngdl, i++, If**[**u[[i]] == 0.0, {Part**[**cono, a**] = **i, a++**}}]
|para cada |si |parte

kk = Table[**i, {i, 1, ngdl}**];
|tabla

incog = Complement[**kk, cono**] (*gdl incognita*)
|complemento

Out[*]= {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

In[*]:= **ecs = Feqv - F;**

MatrixForm[**ecs**]

Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) - W[1] \\ 0. - 1. Nx[1] - W[2] \\ 0. - Mz[1, 1] - W[3] \\ 0. - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 1. Nx[2] \\ 0. + 0.2 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2] \\ 0. + 1. Nx[2] - 1. Nx[3] \\ 0. + Lc + 0.2 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.2 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) \\ 0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3] \\ 0. - \frac{Lc}{6} + 0.2 (-Mz[4, 4] + Mz[4, 5]) + 1. Nx[3] \\ 0. + 0.2 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. Nx[4] \\ 0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4] \\ 0. + 0.2 (Mz[4, 4] - Mz[4, 5]) - W[13] \\ 0. - 1. Nx[4] - W[14] \\ 0. + Mz[4, 5] - W[15] \end{pmatrix}$$

In[*]:= **eq = Table[0, {Length[incog]}];**
 |tabla |longitud

Do[
 |repite
eq[[i]] = ecs[incog][[i]] == 0
, {i, Length[incog]}]
 |longitud

eq

Out[*]= {0. - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 1. Nx[2] == 0,
0. + 0.2 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + 1. Nx[1] == 0,
0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2] == 0, 0. + 1. Nx[2] - 1. Nx[3] == 0,
0. + Lc + 0.2 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.2 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) == 0,
0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3] == 0, 0. - $\frac{Lc}{6}$ + 0.2 (-Mz[4, 4] + Mz[4, 5]) + 1. Nx[3] == 0,
0. + 0.2 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. Nx[4] == 0, 0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4] == 0}

In[*]:=

In[*]:= **Mij = {}; Nij = {};**

rM = {};

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
 |para cada

i = barras[b][[1]][1];

j = barras[b][[1]][2];

L = $\sqrt{((xy[j][1] - xy[i][1])^2 + (xy[j][2] - xy[i][2])^2)}$;

vEi = material[barras[b][[2]][1]][1];

Ai = perfil[barras[b][[2]][2]][1];

Ii = perfil[barras[b][[2]][2]][2];

Npi = Ai fy;


```

Mpi = perfil[barras[b][2][2]][3] × material[barras[b][2][2][2];

Mij = Join[Mij, {-Mpi < Mz[b, i] < Mpi, -Mpi ≤ Mz[b, j] ≤ Mpi}] // . datos;
      |
      |junta
Nij = Join[Nij, {-Npi < Nx[b] < Npi}] // . datos;
      |
      |junta
rM = Join[rM, {Mz[b, i], Mz[b, j]}];
      |
      |junta
  }
  ];
rM

Out[*]= {Mz[1, 1], Mz[1, 2], Mz[2, 2], Mz[2, 3], Mz[3, 3], Mz[3, 4], Mz[4, 4], Mz[4, 5]}

In[*]:=

In[*]:= (* incognitas *)
rI = {};
rI = Join[rI, rM, Table[Nx[i], {i, nb}]]
      |
      |junta      |tabla
rI0 = rI;

Out[*]= {Mz[1, 1], Mz[1, 2], Mz[2, 2], Mz[2, 3], Mz[3, 3],
        Mz[3, 4], Mz[4, 4], Mz[4, 5], Nx[1], Nx[2], Nx[3], Nx[4]}

In[*]:= sol = NMaximize[Join[{Lc}, eq, Mij, Nij] // . datos, Join[{Lc}, rI]]
      |
      |maximiza a...|junta      |junta

Out[*]= {138160., {Lc → 138160., Mz[1, 1] → -115133., Mz[1, 2] → -172700.,
        Mz[2, 2] → -172700., Mz[2, 3] → 172700., Mz[3, 3] → 172700.,
        Mz[3, 4] → -172700., Mz[4, 4] → -172700., Mz[4, 5] → 0.,
        Nx[1] → -69080., Nx[2] → -11513.3, Nx[3] → -11513.3, Nx[4] → -69080.}}

In[*]:=

```

8.3. Código Problema 1

```

In[*]:= (*definiciones*)

In[*]:= (* unidades: m, N *)

In[*]:= (*matriz de paso: globales → locales*)
T[x_, y_] := {{x, y, 0, 0, 0, 0}, {-y, x, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
             {0, 0, 0, x, y, 0}, {0, 0, 0, -y, x, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}};
MatrixForm[T[λx, λy]]
|forma de matriz

Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. & -1. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1. & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0. & -1. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. & 0. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


In[*]:=

In[*]:=

In[*]:=

In[*]:= datos = {L0 → 5.0, vE → 2.1 × 1011, A → 1012 × 53.8 × 10-4, Iy → 8360.0 × 10-8,
              Sy → 628 × 10-6, fy → 275.0 × 106, Mp → Sy fy, Np → A fy, P → 1};

In[*]:=

In[*]:= nodos = {{0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
              {{0, L0}, {"x", "x", "x"}, {P * Lc, 0, 0}},
              {{L0, 2 L0}, {"x", "x", "x"}, {0, -P * Lc, 0}},
              {{2 L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},
              {{2 L0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
              {{3 L0, 2 L0}, {"x", "x", "x"}, {0, -P * Lc, 0}},
              {{4 L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {P * Lc, 0, 0}},
              {{4 L0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
              } /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)

material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
perfil = {{A, Iy, Sy}} /. datos; (* una lista por perfil *)

barras = {{1, 2}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{2, 3}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{3, 4}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{4, 5}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{4, 6}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{6, 7}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{7, 8}, {1, 1}, {0, 0}, {}}}
          } /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez rotacional
secciones extremas (kN·m/rad) *)

```

```

In[*]:= nd = Length[nodos]; (* numero de nudos *)
      |longitud
nb = Length[barras]; (* numero de barras *)
      |longitud

In[*]:= (*matriz de rigidez elemental (globales)*)
s = 3; (*gdl/nudo, tipo de problema*)
Fe = Table[0, {nb}, {2 s}, {2 s}];
      |tabla
xy = Table[nodos[[i][1]], {i, nd};
      |tabla

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
|para cada
  Print["Elemento = ", b];
  |escribe
  i = barras[[b][1][1];
  j = barras[[b][1][2];
  L =  $\sqrt{((\mathbf{xy}[[\mathbf{j}][1] - \mathbf{xy}[[\mathbf{i}][1]])^2 + (\mathbf{xy}[[\mathbf{j}][2] - \mathbf{xy}[[\mathbf{i}][2]])^2)}$ ;
   $\lambda_x = (\mathbf{xy}[[\mathbf{j}][1] - \mathbf{xy}[[\mathbf{i}][1]]) / \mathbf{L}$ ;
  Print["     $\lambda_x =$ ", N[[ $\lambda_x$ , 3]];
  |escribe          |valor numérico
   $\lambda_y = (\mathbf{xy}[[\mathbf{j}][2] - \mathbf{xy}[[\mathbf{i}][2]]) / \mathbf{L}$ ;
  Print["     $\lambda_y =$ ", N[[ $\lambda_y$ , 3]];
  |escribe          |valor numérico
  kk = {-Nx[b], (Mz[b, j] - Mz[b, i]) / L, -Mz[b, i], Nx[b], - (Mz[b, j] - Mz[b, i]) / L,
    Mz[b, j]}];
  Part[Fe, b] = Transpose[T[[ $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ]].kk];
  |parte          |transposición
  Print[MatrixForm[[Fe[[b]]]];
  |escribe |forma de matriz
  }
}
]

Elemento = 1
 $\lambda_x = 0.$ 
 $\lambda_y = 1.$ 

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) \\ 0. - 1. Nx[1] \\ 0. - Mz[1, 1] \\ 0. - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) \\ 0. + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 2] \end{pmatrix}$$


```

Elemento = 2

$$\lambda_x = 0.707107$$

$$\lambda_y = 0.707107$$

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.1 (-Mz [2, 2] + Mz [2, 3]) - 0.707107 Nx [2] \\ 0. + 0.1 (-Mz [2, 2] + Mz [2, 3]) - 0.707107 Nx [2] \\ 0. - Mz [2, 2] \\ 0. - 0.1 (Mz [2, 2] - Mz [2, 3]) + 0.707107 Nx [2] \\ 0. + 0.1 (Mz [2, 2] - Mz [2, 3]) + 0.707107 Nx [2] \\ 0. + Mz [2, 3] \end{pmatrix}$$

Elemento = 3

$$\lambda_x = 0.707107$$

$$\lambda_y = -0.707107$$

$$\begin{pmatrix} 0. + 0.1 (-Mz [3, 3] + Mz [3, 4]) - 0.707107 Nx [3] \\ 0. + 0.1 (-Mz [3, 3] + Mz [3, 4]) + 0.707107 Nx [3] \\ 0. - Mz [3, 3] \\ 0. + 0.1 (Mz [3, 3] - Mz [3, 4]) + 0.707107 Nx [3] \\ 0. + 0.1 (Mz [3, 3] - Mz [3, 4]) - 0.707107 Nx [3] \\ 0. + Mz [3, 4] \end{pmatrix}$$

Elemento = 4

$$\lambda_x = 0.$$

$$\lambda_y = -1.$$

$$\begin{pmatrix} 0. + 0.2 (-Mz [4, 4] + Mz [4, 5]) \\ 0. + 1. Nx [4] \\ 0. - Mz [4, 4] \\ 0. + 0.2 (Mz [4, 4] - Mz [4, 5]) \\ 0. - 1. Nx [4] \\ 0. + Mz [4, 5] \end{pmatrix}$$

Elemento = 5

$$\lambda_x = 0.707107$$

$$\lambda_y = 0.707107$$

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.1 (-Mz [5, 4] + Mz [5, 6]) - 0.707107 Nx [5] \\ 0. + 0.1 (-Mz [5, 4] + Mz [5, 6]) - 0.707107 Nx [5] \\ 0. - Mz [5, 4] \\ 0. - 0.1 (Mz [5, 4] - Mz [5, 6]) + 0.707107 Nx [5] \\ 0. + 0.1 (Mz [5, 4] - Mz [5, 6]) + 0.707107 Nx [5] \\ 0. + Mz [5, 6] \end{pmatrix}$$

Elemento = 6

$$\lambda_x = 0.707107$$

$$\lambda_y = -0.707107$$

$$\begin{pmatrix} 0. + 0.1 (-Mz [6, 6] + Mz [6, 7]) - 0.707107 Nx [6] \\ 0. + 0.1 (-Mz [6, 6] + Mz [6, 7]) + 0.707107 Nx [6] \\ 0. - Mz [6, 6] \\ 0. + 0.1 (Mz [6, 6] - Mz [6, 7]) + 0.707107 Nx [6] \\ 0. + 0.1 (Mz [6, 6] - Mz [6, 7]) - 0.707107 Nx [6] \\ 0. + Mz [6, 7] \end{pmatrix}$$

```

Elemento = 7
λx = 0.
λy = -1.

```

$$\begin{pmatrix} 0. + 0.2 (-Mz[7, 7] + Mz[7, 8]) \\ 0. + 1. Nx[7] \\ 0. - Mz[7, 7] \\ 0. + 0.2 (Mz[7, 7] - Mz[7, 8]) \\ 0. - 1. Nx[7] \\ 0. + Mz[7, 8] \end{pmatrix}$$

```
In[*]:=
```

```

In[*]:= (* ensamblar fuerzas equivalentes *)
s = 3;
ngdl = s nd;
Feqv = Table[0.0, {ngdl}];
      [tabla

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
  [para cada
    i = barras[b][[1]][[1]];
    j = barras[b][[1]][[2]];

    (*nudo i*)
    For[f = 1, f ≤ s, f++, (*filas*)
      [para cada
        Part[Feqv, s (i - 1) + f] += Part[Fe, b, f];
        [parte [parte
      ];

    (*nudo j*)
    For[f = 1, f ≤ s, f++, (*filas*)
      [para cada
        Part[Feqv, s (j - 1) + f] += Part[Fe, b, s + f];
        [parte [parte
    ];
  }
];
MatrixForm[Feqv, 7]
[forma de matriz

```

Out[]:=MatrixForm=

```
0. - 0.2 (-Mz[1, 1] + Mz[1, 2])
0. - 1. Nx[1]
0. - Mz[1, 1]
0. - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 0.1 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) - 0.707107 Nx[2]
0. + 0.1 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + 1. Nx[1] - 0.707107 Nx[2]
0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2]
0. - 0.1 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.1 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) + 0.707107 Nx[2] - 0.707
0. + 0.1 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.1 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) + 0.707107 Nx[2] + 0.707
0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3]
0. + 0.1 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 0.2 (-Mz[4, 4] + Mz[4, 5]) - 0.1 (-Mz[5, 4] + Mz[5, 6]) + 0.70710
0. + 0.1 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 0.1 (-Mz[5, 4] + Mz[5, 6]) - 0.707107 Nx[3] + 1. Nx[4] -
0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4] - Mz[5, 4]
0. + 0.2 (Mz[4, 4] - Mz[4, 5])
0. - 1. Nx[4]
0. + Mz[4, 5]
0. - 0.1 (Mz[5, 4] - Mz[5, 6]) + 0.1 (-Mz[6, 6] + Mz[6, 7]) + 0.707107 Nx[5] - 0.707
0. + 0.1 (Mz[5, 4] - Mz[5, 6]) + 0.1 (-Mz[6, 6] + Mz[6, 7]) + 0.707107 Nx[5] + 0.707
0. + Mz[5, 6] - Mz[6, 6]
0. + 0.1 (Mz[6, 6] - Mz[6, 7]) + 0.2 (-Mz[7, 7] + Mz[7, 8]) + 0.707107 Nx[6]
0. + 0.1 (Mz[6, 6] - Mz[6, 7]) - 0.707107 Nx[6] + 1. Nx[7]
0. + Mz[6, 7] - Mz[7, 7]
0. + 0.2 (Mz[7, 7] - Mz[7, 8])
0. - 1. Nx[7]
0. + Mz[7, 8]
```

In[]:=

```
In[ ]:= u = Array[Δ, {ngdl}]; (*desplazamientos *)
      |arreglo
F = Array[W, {ngdl}]; (*fuerzas en los nodos*)
      |arreglo

For[i = 1, i ≤ nd, i++, {
  |para cada
    For[j = 1, j ≤ s, j++, {
      |para cada
        If[(nodos[[i]][2][j] == "x"), F[[s (i - 1) + j]] = nodos[[i]][3][j],
          |si
            u[[s (i - 1) + j]] = nodos[[i]][2][j];
        }
      ]];
  }
];

MatrixForm[u] (*desplazamientos*)
|forma de matriz
MatrixForm[F]
|forma de matriz
(*fuerzas*)
```

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta[4] \\ \Delta[5] \\ \Delta[6] \\ \Delta[7] \\ \Delta[8] \\ \Delta[9] \\ \Delta[10] \\ \Delta[11] \\ \Delta[12] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta[16] \\ \Delta[17] \\ \Delta[18] \\ \Delta[19] \\ \Delta[20] \\ \Delta[21] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} W[1] \\ W[2] \\ W[3] \\ Lc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Lc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ W[13] \\ W[14] \\ W[15] \\ 0 \\ -Lc \\ 0 \\ Lc \\ 0 \\ 0 \\ W[22] \\ W[23] \\ W[24] \end{pmatrix}$$

In[]:= orden = 0;

For[i = 1, i ≤ ngdl, i++, If[u[[i]] == 0.0, orden++]]
para cada |si

```

cono = Table[0, {orden}]; (*gdl conocidos*)
      |tabla
For[i = 1; a = 1, i ≤ ngdl, i++, If[u[[i]] == 0.0, {Part[cono, a] = i, a++}]]
      |para cada           |si           |parte

kk = Table[i, {i, 1, ngdl}];
      |tabla
incog = Complement[kk, cono] (*gdl incognita*)
      |complemento

```

```
Out[*]= {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 20, 21}
```

```

In[*]:= ecs = Feqv - F;
MatrixForm[ecs]
      |forma de matriz

```

```
Out[*]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix}
 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) - W[1] \\
 0. - 1. Nx[1] - W[2] \\
 0. - Mz[1, 1] - W[3] \\
 0. - Lc - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 0.1 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) - 0.707107 Nx \\
 0. + 0.1 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + 1. Nx[1] - 0.707107 Nx[2] \\
 0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2] \\
 0. - 0.1 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.1 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) + 0.707107 Nx[2] - 0.707 \\
 0. + Lc + 0.1 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.1 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) + 0.707107 Nx[2] + 0.7 \\
 0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3] \\
 0. + 0.1 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 0.2 (-Mz[4, 4] + Mz[4, 5]) - 0.1 (-Mz[5, 4] + Mz[5, 6]) + 0.70710 \\
 0. + 0.1 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 0.1 (-Mz[5, 4] + Mz[5, 6]) - 0.707107 Nx[3] + 1. Nx[4] - \\
 0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4] - Mz[5, 4] \\
 0. + 0.2 (Mz[4, 4] - Mz[4, 5]) - W[13] \\
 0. - 1. Nx[4] - W[14] \\
 0. + Mz[4, 5] - W[15] \\
 0. - 0.1 (Mz[5, 4] - Mz[5, 6]) + 0.1 (-Mz[6, 6] + Mz[6, 7]) + 0.707107 Nx[5] - 0.707 \\
 0. + Lc + 0.1 (Mz[5, 4] - Mz[5, 6]) + 0.1 (-Mz[6, 6] + Mz[6, 7]) + 0.707107 Nx[5] + 0.7 \\
 0. + Mz[5, 6] - Mz[6, 6] \\
 0. - Lc + 0.1 (Mz[6, 6] - Mz[6, 7]) + 0.2 (-Mz[7, 7] + Mz[7, 8]) + 0.707107 Nx \\
 0. + 0.1 (Mz[6, 6] - Mz[6, 7]) - 0.707107 Nx[6] + 1. Nx[7] \\
 0. + Mz[6, 7] - Mz[7, 7] \\
 0. + 0.2 (Mz[7, 7] - Mz[7, 8]) - W[22] \\
 0. - 1. Nx[7] - W[23] \\
 0. + Mz[7, 8] - W[24]
 \end{pmatrix}$$

```

In[*]:= eq = Table[0, {Length[incog]}];
      |tabla           |longitud
Do[
      |repite
eq[[i]] = ecs[[incog]][[i]] == 0
      , {i, Length[incog]}]
      |longitud

```


eq

```
Out[*]= {0. - Lc - 0.2 (Mz [1, 1] - Mz [1, 2]) - 0.1 (-Mz [2, 2] + Mz [2, 3]) - 0.707107 Nx [2] == 0,
0. + 0.1 (-Mz [2, 2] + Mz [2, 3]) + 1. Nx [1] - 0.707107 Nx [2] == 0, 0. + Mz [1, 2] - Mz [2, 2] == 0,
0. - 0.1 (Mz [2, 2] - Mz [2, 3]) + 0.1 (-Mz [3, 3] + Mz [3, 4]) + 0.707107 Nx [2] - 0.707107 Nx [3] ==
0, 0. + Lc + 0.1 (Mz [2, 2] - Mz [2, 3]) + 0.1 (-Mz [3, 3] + Mz [3, 4]) +
0.707107 Nx [2] + 0.707107 Nx [3] == 0, 0. + Mz [2, 3] - Mz [3, 3] == 0,
0. + 0.1 (Mz [3, 3] - Mz [3, 4]) + 0.2 (-Mz [4, 4] + Mz [4, 5]) -
0.1 (-Mz [5, 4] + Mz [5, 6]) + 0.707107 Nx [3] - 0.707107 Nx [5] == 0,
0. + 0.1 (Mz [3, 3] - Mz [3, 4]) + 0.1 (-Mz [5, 4] + Mz [5, 6]) - 0.707107 Nx [3] +
1. Nx [4] - 0.707107 Nx [5] == 0, 0. + Mz [3, 4] - Mz [4, 4] - Mz [5, 4] == 0,
0. - 0.1 (Mz [5, 4] - Mz [5, 6]) + 0.1 (-Mz [6, 6] + Mz [6, 7]) + 0.707107 Nx [5] - 0.707107 Nx [6] ==
0, 0. + Lc + 0.1 (Mz [5, 4] - Mz [5, 6]) + 0.1 (-Mz [6, 6] + Mz [6, 7]) +
0.707107 Nx [5] + 0.707107 Nx [6] == 0, 0. + Mz [5, 6] - Mz [6, 6] == 0,
0. - Lc + 0.1 (Mz [6, 6] - Mz [6, 7]) + 0.2 (-Mz [7, 7] + Mz [7, 8]) + 0.707107 Nx [6] == 0,
0. + 0.1 (Mz [6, 6] - Mz [6, 7]) - 0.707107 Nx [6] + 1. Nx [7] == 0, 0. + Mz [6, 7] - Mz [7, 7] == 0}
```

In[*]:=

```
In[*]:= Mij = {}; Nij = {};
rM = {};
For [b = 1, b ≤ nb, b++, {
|para cada
    i = barras[[b][1][1];
    j = barras[[b][1][2];
    L = √((xy[[j][1] - xy[[i][1])^2 + (xy[[j][2] - xy[[i][2])^2);
    vEi = material[barras[[b][2][1][1];
    Ai = perfil[barras[[b][2][2][1];
    Ii = perfil[barras[[b][2][2][2];
    Npi = Ai fy;
    Mpi = perfil[barras[[b][2][2][3] × material[barras[[b][2][2][2];
    Mij = Join[Mij, {-Mpi < Mz [b, i] < Mpi, -Mpi ≤ Mz [b, j] ≤ Mpi}] // . datos;
|junta
    Nij = Join[Nij, {-Npi < Nx [b] < Npi}] // . datos;
|junta
    rM = Join[rM, {Mz [b, i], Mz [b, j]}];
|junta
    }
};
rM
Out[*]= {Mz [1, 1], Mz [1, 2], Mz [2, 2], Mz [2, 3], Mz [3, 3], Mz [3, 4], Mz [4, 4],
Mz [4, 5], Mz [5, 4], Mz [5, 6], Mz [6, 6], Mz [6, 7], Mz [7, 7], Mz [7, 8]}
```

```
In[ ]:= (* incognitas *)
```

```
rI = {};
```

```
rI = Join[rI, rM, Table[Nx[i], {i, nb}]]  
      |junta      |tabla
```

```
rI0 = rI;
```

```
Out[ ]:= {Mz[1, 1], Mz[1, 2], Mz[2, 2], Mz[2, 3], Mz[3, 3],  
          Mz[3, 4], Mz[4, 4], Mz[4, 5], Mz[5, 4], Mz[5, 6], Mz[6, 6], Mz[6, 7],  
          Mz[7, 7], Mz[7, 8], Nx[1], Nx[2], Nx[3], Nx[4], Nx[5], Nx[6], Nx[7]}
```

```
In[ ]:= sol = NMaximize[Join[{Lc}, eq, Mij, Nij] //. datos, Join[{Lc}, rI]  
                    |maximiza a... |junta
```

```
Out[ ]:= {89804., {Lc → 89804., Mz[1, 1] → -172700., Mz[1, 2] → 172700.,  
              Mz[2, 2] → 172700., Mz[2, 3] → 120890., Mz[3, 3] → 120890., Mz[3, 4] → -172700.,  
              Mz[4, 4] → -34540., Mz[4, 5] → 172700., Mz[5, 4] → -138160., Mz[5, 6] → 172700.,  
              Mz[6, 6] → 172700., Mz[6, 7] → -172700., Mz[7, 7] → -172700.,  
              Mz[7, 8] → 172700., Nx[1] → -10362., Nx[2] → -21981.1, Nx[3] → -70828.1,  
              Nx[4] → -120890., Nx[5] → -14654.1, Nx[6] → -19538.8, Nx[7] → -48356.}}
```

```
In[ ]:=
```

8.4. Código Problema 2

```

In[ ]:= (*definiciones*)

In[ ]:= (* unidades: m, N *)

In[ ]:= (*matriz de paso: globales → locales*)
T[x_, y_] := {{x, y, 0, 0, 0, 0}, {-y, x, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
              {0, 0, 0, x, y, 0}, {0, 0, 0, -y, x, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}};
MatrixForm[T[λx, λy]]
[forma de matriz

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


In[ ]:=

In[ ]:=

In[ ]:=

In[ ]:= datos = {L0 → 5.0, vE → 2.1 × 10^11, A → 10^12 × 53.8 × 10^-4, Iy → 8360.0 × 10^-8,
                Sy → 628 × 10^-6, fy → 275.0 × 10^6, Mp → Sy fy, Np → A fy, P → 1};

In[ ]:=

In[ ]:= nodos = {{(0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0)},
                 {(0, L0), {"x", "x", "x"}, {P*Lc, 0, 0}},
                 {(0, 2 L0), {"x", "x", "x"}, {P*Lc, -P*Lc, 0}},
                 {(L0, 2 L0), {"x", "x", "x"}, {0, -P*Lc, 0}},
                 {(L0, L0), {"x", "x", "x"}, {0, -P*Lc, 0}},
                 {(L0, 0), {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
                 {(2 L0, L0), {"x", "x", "x"}, {P*Lc, -P*Lc, 0}},
                 {(2 L0, 0), {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
                } /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)

material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
perfil = {{A, Iy, Sy}} /. datos; (* una lista por perfil *)

barras = {{(1, 2), (1, 1), {0, 0}, {}},
          {(2, 3), (1, 1), {0, 0}, {}},
          {(3, 4), (1, 1), {0, 0}, {}},
          {(4, 5), (1, 1), {0, 0}, {}},
          {(5, 6), (1, 1), {0, 0}, {}},
          {(2, 5), (1, 1), {0, 0}, {}},
          {(5, 7), (1, 1), {0, 0}, {}},
          {(7, 8), (1, 1), {0, 0}, {}}}
        } /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez
rotacional secciones extremas (kN·m/rad) *)

```

```

In[*]:= nd = Length[nodos]; (* numero de nudos *)
      |longitud
nb = Length[barras]; (* numero de barras *)
      |longitud

In[*]:= (*matriz de rigidez elemental (globales)*)
s = 3; (*gd1/nudo, tipo de problema*)
Fe = Table[0, {nb}, {2 s}, {2 s}];
      |tabla
xy = Table[nodos[[i][1]], {i, nd}];
      |tabla

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
|para cada
  Print["Elemento = ", b];
  |escribe
  i = barras[b][1][1];
  j = barras[b][1][2];
  L = √((xy[[j][1]] - xy[[i][1]])^2 + (xy[[j][2]] - xy[[i][2]])^2);
  λx = (xy[[j][1]] - xy[[i][1]]) / L;
  Print[" λx = ", N[λx, 3]];
  |escribe |valor numérico
  λy = (xy[[j][2]] - xy[[i][2]]) / L;
  Print[" λy = ", N[λy, 3]];
  |escribe |valor numérico
  kk = {-Nx[b], (Mz[b, j] - Mz[b, i]) / L, -Mz[b, i], Nx[b], -(Mz[b, j] - Mz[b, i]) / L,
  Mz[b, j]};
  Part[Fe, b] = Transpose[T[λx, λy]] . kk;
  |parte |transposición
  Print[MatrixForm[Fe[b]]];
  |escribe |forma de matriz
  }
]

Elemento = 1
λx = 0.
λy = 1.

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) \\ 0. - 1. Nx[1] \\ 0. - Mz[1, 1] \\ 0. - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) \\ 0. + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 2] \end{pmatrix}$$


```

Elemento = 2

$$\lambda_X = 0.$$

$$\lambda_Y = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) \\ 0. - 1. Nx[2] \\ 0. - Mz[2, 2] \\ 0. - 0.2 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) \\ 0. + 1. Nx[2] \\ 0. + Mz[2, 3] \end{pmatrix}$$

Elemento = 3

$$\lambda_X = 1.$$

$$\lambda_Y = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0. - 1. Nx[3] \\ 0. + 0.2 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) \\ 0. - Mz[3, 3] \\ 0. + 1. Nx[3] \\ 0. + 0.2 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) \\ 0. + Mz[3, 4] \end{pmatrix}$$

Elemento = 4

$$\lambda_X = 0.$$

$$\lambda_Y = -1.$$

$$\begin{pmatrix} 0. + 0.2 (-Mz[4, 4] + Mz[4, 5]) \\ 0. + 1. Nx[4] \\ 0. - Mz[4, 4] \\ 0. + 0.2 (Mz[4, 4] - Mz[4, 5]) \\ 0. - 1. Nx[4] \\ 0. + Mz[4, 5] \end{pmatrix}$$

Elemento = 5

$$\lambda_X = 0.$$

$$\lambda_Y = -1.$$

$$\begin{pmatrix} 0. + 0.2 (-Mz[5, 5] + Mz[5, 6]) \\ 0. + 1. Nx[5] \\ 0. - Mz[5, 5] \\ 0. + 0.2 (Mz[5, 5] - Mz[5, 6]) \\ 0. - 1. Nx[5] \\ 0. + Mz[5, 6] \end{pmatrix}$$

Elemento = 6

$$\lambda_X = 1.$$

$$\lambda_Y = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0. - 1. Nx[6] \\ 0. + 0.2 (-Mz[6, 2] + Mz[6, 5]) \\ 0. - Mz[6, 2] \\ 0. + 1. Nx[6] \\ 0. + 0.2 (Mz[6, 2] - Mz[6, 5]) \\ 0. + Mz[6, 5] \end{pmatrix}$$

Elemento = 7

$\lambda_X = 1.$

$\lambda_Y = 0.$

$$\begin{pmatrix} 0. - 1. \text{Nx}[7] \\ 0. + 0.2 (-\text{Mz}[7, 5] + \text{Mz}[7, 7]) \\ 0. - \text{Mz}[7, 5] \\ 0. + 1. \text{Nx}[7] \\ 0. + 0.2 (\text{Mz}[7, 5] - \text{Mz}[7, 7]) \\ 0. + \text{Mz}[7, 7] \end{pmatrix}$$

Elemento = 8

$\lambda_X = 0.$

$\lambda_Y = -1.$

$$\begin{pmatrix} 0. + 0.2 (-\text{Mz}[8, 7] + \text{Mz}[8, 8]) \\ 0. + 1. \text{Nx}[8] \\ 0. - \text{Mz}[8, 7] \\ 0. + 0.2 (\text{Mz}[8, 7] - \text{Mz}[8, 8]) \\ 0. - 1. \text{Nx}[8] \\ 0. + \text{Mz}[8, 8] \end{pmatrix}$$

In[*]:=

In[*]:= (* ensamblar fuerzas equivalentes *)

s = 3;

ngdl = s nd;

Feqv = Table[0.0, {ngdl}];
|tabla

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
|para cada

i = barras[b][1][1];

j = barras[b][1][2];

(*nudo i*)

For[f = 1, f ≤ s, f++, (*filas*)

|para cada

Part[Feqv, s (i - 1) + f] += Part[Fe, b, f];

|parte |parte

];

(*nudo j*)

For[f = 1, f ≤ s, f++, (*filas*)

|para cada

Part[Feqv, s (j - 1) + f] += Part[Fe, b, s + f];

|parte |parte

];

}

];

MatrixForm[Feqv, 7]

|forma de matriz

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) \\ 0. - 1. Nx[1] \\ 0. - Mz[1, 1] \\ 0. - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 0.2 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) - 1. Nx[6] \\ 0. + 0.2 (-Mz[6, 2] + Mz[6, 5]) + 1. Nx[1] - 1. Nx[2] \\ 0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2] - Mz[6, 2] \\ 0. - 0.2 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) - 1. Nx[3] \\ 0. + 0.2 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) + 1. Nx[2] \\ 0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3] \\ 0. + 0.2 (-Mz[4, 4] + Mz[4, 5]) + 1. Nx[3] \\ 0. + 0.2 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. Nx[4] \\ 0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4] \\ 0. + 0.2 (Mz[4, 4] - Mz[4, 5]) + 0.2 (-Mz[5, 5] + Mz[5, 6]) + 1. Nx[6] - 1. Nx[7] \\ 0. + 0.2 (Mz[6, 2] - Mz[6, 5]) + 0.2 (-Mz[7, 5] + Mz[7, 7]) - 1. Nx[4] + 1. Nx[5] \\ 0. + Mz[4, 5] - Mz[5, 5] + Mz[6, 5] - Mz[7, 5] \\ 0. + 0.2 (Mz[5, 5] - Mz[5, 6]) \\ 0. - 1. Nx[5] \\ 0. + Mz[5, 6] \\ 0. + 0.2 (-Mz[8, 7] + Mz[8, 8]) + 1. Nx[7] \\ 0. + 0.2 (Mz[7, 5] - Mz[7, 7]) + 1. Nx[8] \\ 0. + Mz[7, 7] - Mz[8, 7] \\ 0. + 0.2 (Mz[8, 7] - Mz[8, 8]) \\ 0. - 1. Nx[8] \\ 0. + Mz[8, 8] \end{pmatrix}$$

In[]:=

In[]:= **u = Array[Δ, {ngdl}];** (*desplazamientos *)
|arreglo

F = Array[W, {ngdl}]; (*fuerzas en los nodos*)
|arreglo

For[i = 1, i ≤ nd, i++, {
|para cada

For[j = 1, j ≤ s, j++, {
|para cada

If[(nodos[[i]][2][j] == "x"), F[s (i - 1) + j] = nodos[[i]][3][j],
|si

u[s (i - 1) + j] = nodos[[i]][2][j];

}

];

}

];

MatrixForm[u] (*desplazamientos*)
|forma de matriz

MatrixForm[F]
|forma de matriz

(*fuerzas*)

```
Out[*]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta[4] \\ \Delta[5] \\ \Delta[6] \\ \Delta[7] \\ \Delta[8] \\ \Delta[9] \\ \Delta[10] \\ \Delta[11] \\ \Delta[12] \\ \Delta[13] \\ \Delta[14] \\ \Delta[15] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta[19] \\ \Delta[20] \\ \Delta[21] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
Out[*]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} W[1] \\ W[2] \\ W[3] \\ Lc \\ 0 \\ 0 \\ Lc \\ -Lc \\ 0 \\ 0 \\ -Lc \\ 0 \\ 0 \\ -Lc \\ 0 \\ W[16] \\ W[17] \\ W[18] \\ Lc \\ -Lc \\ 0 \\ W[22] \\ W[23] \\ W[24] \end{pmatrix}$$

```
In[*]:= orden = 0;
For[i = 1, i ≤ ngdl, i++, If[u[[i]] == 0.0, orden++]]
|para cada |si
```



```

cono = Table[0, {orden}]; (*gdl conocidos*)
      |tabla

For[i = 1;
     |para cada
     a = 1, i ≤ ngdl, i++, If[u[[i]] == 0.0, {Part[cono, a] = i, a++}]]
      |si |parte

kk = Table[i, {i, 1, ngdl}];
      |tabla

incog = Complement[kk, cono] (*gdl incognita*)
      |complemento

Out[*]= {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 21}

In[*]:= ecs = Feqv - F;
MatrixForm[ecs]
      |forma de matriz

Out[*]//MatrixForm=
      (
          0. - 0.2 (-Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) - W[1]
          0. - 1. Nx[1] - W[2]
          0. - Mz[1, 1] - W[3]
          0. - Lc - 0.2 (Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 0.2 (-Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) - 1. Nx[6]
          0. + 0.2 (-Mz[6, 2] + Mz[6, 5]) + 1. Nx[1] - 1. Nx[2]
          0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2] - Mz[6, 2]
          0. - Lc - 0.2 (Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) - 1. Nx[3]
          0. + Lc + 0.2 (-Mz[3, 3] + Mz[3, 4]) + 1. Nx[2]
          0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3]
          0. + 0.2 (-Mz[4, 4] + Mz[4, 5]) + 1. Nx[3]
          0. + Lc + 0.2 (Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. Nx[4]
          0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4]
          0. + 0.2 (Mz[4, 4] - Mz[4, 5]) + 0.2 (-Mz[5, 5] + Mz[5, 6]) + 1. Nx[6] - 1. Nx[7]
          0. + Lc + 0.2 (Mz[6, 2] - Mz[6, 5]) + 0.2 (-Mz[7, 5] + Mz[7, 7]) - 1. Nx[4] + 1. Nx[5]
          0. + Mz[4, 5] - Mz[5, 5] + Mz[6, 5] - Mz[7, 5]
          0. + 0.2 (Mz[5, 5] - Mz[5, 6]) - W[16]
          0. - 1. Nx[5] - W[17]
          0. + Mz[5, 6] - W[18]
          0. - Lc + 0.2 (-Mz[8, 7] + Mz[8, 8]) + 1. Nx[7]
          0. + Lc + 0.2 (Mz[7, 5] - Mz[7, 7]) + 1. Nx[8]
          0. + Mz[7, 7] - Mz[8, 7]
          0. + 0.2 (Mz[8, 7] - Mz[8, 8]) - W[22]
          0. - 1. Nx[8] - W[23]
          0. + Mz[8, 8] - W[24]
      )

In[*]:= eq = Table[0, {Length[incog]}];
      |tabla |longitud

Do[
     |repite
     eq[[i]] = ecs[[incog]][[i]] == 0
     , {i, Length[incog]}]
      |longitud

eq

```

```

Out[*]= {0. - Lc - 0.2 (Mz [1, 1] - Mz [1, 2]) - 0.2 (-Mz [2, 2] + Mz [2, 3]) - 1. Nx [6] == 0,
0. + 0.2 (-Mz [6, 2] + Mz [6, 5]) + 1. Nx [1] - 1. Nx [2] == 0,
0. + Mz [1, 2] - Mz [2, 2] - Mz [6, 2] == 0, 0. - Lc - 0.2 (Mz [2, 2] - Mz [2, 3]) - 1. Nx [3] == 0,
0. + Lc + 0.2 (-Mz [3, 3] + Mz [3, 4]) + 1. Nx [2] == 0,
0. + Mz [2, 3] - Mz [3, 3] == 0, 0. + 0.2 (-Mz [4, 4] + Mz [4, 5]) + 1. Nx [3] == 0,
0. + Lc + 0.2 (Mz [3, 3] - Mz [3, 4]) + 1. Nx [4] == 0, 0. + Mz [3, 4] - Mz [4, 4] == 0,
0. + 0.2 (Mz [4, 4] - Mz [4, 5]) + 0.2 (-Mz [5, 5] + Mz [5, 6]) + 1. Nx [6] - 1. Nx [7] == 0,
0. + Lc + 0.2 (Mz [6, 2] - Mz [6, 5]) + 0.2 (-Mz [7, 5] + Mz [7, 7]) - 1. Nx [4] + 1. Nx [5] == 0,
0. + Mz [4, 5] - Mz [5, 5] + Mz [6, 5] - Mz [7, 5] == 0,
0. - Lc + 0.2 (-Mz [8, 7] + Mz [8, 8]) + 1. Nx [7] == 0,
0. + Lc + 0.2 (Mz [7, 5] - Mz [7, 7]) + 1. Nx [8] == 0, 0. + Mz [7, 7] - Mz [8, 7] == 0}

```

In[*]:=

```

In[*]:= Mij = {}; Nij = {};
rM = {};
For [b = 1, b ≤ nb, b++, {
|para cada
    i = barras[b][1][1];
    j = barras[b][1][2];
    L = √((xy[j][1] - xy[i][1])^2 + (xy[j][2] - xy[i][2])^2);

    vEi = material[barras[b][2][1][1];
    Ai = perfil[barras[b][2][2][1];
    Ii = perfil[barras[b][2][2][2];
    Npi = Ai fy;
    Mpi = perfil[barras[b][2][2][3] × material[barras[b][2][2][2];

    Mij = Join[Mij, {-Mpi < Mz [b, i] < Mpi, -Mpi ≤ Mz [b, j] ≤ Mpi}] //. datos;
    |junta
    Nij = Join[Nij, {-Npi < Nx [b] < Npi}] //. datos;
    |junta
    rM = Join[rM, {Mz [b, i], Mz [b, j]}];
    |junta
}
];
rM

```

```

Out[*]= {Mz [1, 1], Mz [1, 2], Mz [2, 2], Mz [2, 3], Mz [3, 3], Mz [3, 4], Mz [4, 4], Mz [4, 5],
Mz [5, 5], Mz [5, 6], Mz [6, 2], Mz [6, 5], Mz [7, 5], Mz [7, 7], Mz [8, 7], Mz [8, 8]}

```

In[*]:=

```
In[*]:= (* incognitas *)
```

```
rI = {};
```

```
rI = Join[rI, rM, Table[Nx[i], {i, nb}]]  
      |_____|      |_____|  
      junta      tabla
```

```
rI0 = rI;
```

```
Out[*]:= {Mz[1, 1], Mz[1, 2], Mz[2, 2], Mz[2, 3], Mz[3, 3], Mz[3, 4], Mz[4, 4],  
          Mz[4, 5], Mz[5, 5], Mz[5, 6], Mz[6, 2], Mz[6, 5], Mz[7, 5], Mz[7, 7],  
          Mz[8, 7], Mz[8, 8], Nx[1], Nx[2], Nx[3], Nx[4], Nx[5], Nx[6], Nx[7], Nx[8]}
```

```
In[*]:= sol = NMaximize[Join[{Lc}, eq, Mij, Nij] /. datos, Join[{Lc}, rI]]  
          |_____|_____|_____|_____|_____|_____|_____|_____|_____|_____|  
          |maximiza a...|junta                                     |junta
```

```
Out[*]:= {69080., {Lc → 69080., Mz[1, 1] → -172700., Mz[1, 2] → 172700.,  
              Mz[2, 2] → 172700., Mz[2, 3] → 172700., Mz[3, 3] → 172700., Mz[3, 4] → -172700.,  
              Mz[4, 4] → -172700., Mz[4, 5] → 172700., Mz[5, 5] → -172700., Mz[5, 6] → 172700.,  
              Mz[6, 2] → 4.35204 × 10-11, Mz[6, 5] → -172700., Mz[7, 5] → 172700.,  
              Mz[7, 7] → -172700., Mz[8, 7] → -172700., Mz[8, 8] → 172700., Nx[1] → 34540.,  
              Nx[2] → -1.30156 × 10-11, Nx[3] → -69080., Nx[4] → -138160., Nx[5] → -172700.,  
              Nx[6] → 1.06437 × 10-11, Nx[7] → 2.12875 × 10-11, Nx[8] → -138160.}}
```