Topología: Notas de un curso

Segundo del grado en matemáticas de la UVa

Felipe Cano & María Martín-Vega
& Beatriz Molina-Samper

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID. FACULTAD DE CIENCIAS

Felipe Cano, Maria Martín-Vega, Beatriz Molina-Samper[1]

e-mail: beatriz.molina@uva.es

Fecha de esta versión: 20 de Octubre de 2024

[1]Autor de correspondencia

Índice general

Repaso

Definición 0.0.1 Dados dos conjuntos A y B, decimos que A *es un subconjunto de* B, y escribimos $A \subset B$, si todo elemento de A está en B, esto es

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Definición 0.0.2 Dado un conjunto X, su *conjunto de partes* o *conjunto potencia* $\mathscr{P}(X)$ es el conjunto formado por todos los subconjuntos de X.

Definición 0.0.3 Sean A y B dos conjuntos. La *diferencia* $A \setminus B$ es el conjunto

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Cuando B es un subconjunto de A, decimos que $A \setminus B$ es el *complementario de* B *en* A.

Definición 0.0.4 Dados dos conjuntos A y B, su *producto cartesiano* $A \times B$ es el conjunto formado por todos los pares ordenados, esto es

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Definición 0.0.5 Sea A un conjunto. Una *relación binaria en* A es un subconjunto $R \subset A \times A$. Dados dos elementos $a, b \in A$, diremos que *a está relacionado con b mediante* R si $(a,b) \in R$. Frecuentemente escribiremos aRb o $a \sim b$.

Definición 0.0.6 Una *relación binaria* R en un conjunto A se dice *de equivalencia* si cumple las siguientes propiedades:

- *Reflexiva*: aRa, para todo $a \in A$.
- *Transitiva*: Si aRb y bRc, entonces aRc.
- *Simétrica*: Si aRb, entonces bRa.

Definición 0.0.7 Sea R una relación binaria de equivalencia en un conjunto A. Dado $a \in A$, la *clase de equivalencia de a por R* es el conjunto

$$[a] = \{b \in A : aRb\}.$$

El *conjunto cociente A/R de A por R* es el conjunto $A/R = \{[a] : a \in A\}$.

Definición 0.0.8 Un *preorden* $\prec$ en un conjunto A es una relación binaria que cumple las siguientes propiedades:

- *Reflexiva*: $a \prec a$, para todo $a \in A$.
- *Transitiva*: Si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces $a \prec c$.

Un *orden parcial* $\leq$ en un conjunto A es un preorden que además cumple la propiedad:

- *Antisimétrica*: Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

■ **Ejemplo 0.1** Sea X un conjunto y $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación (véase definición 0.0.10). Consideremos la relación binaria

$$x \prec y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y),$$

donde $\leq$ es el orden habitual en $\mathbb{R}$. Tenemos que $\prec$ es un preorden, pero no necesariamente un orden parcial.

Definición 0.0.9 Sea $(A, \prec)$ un conjunto preordenado. Decimos que $\prec$ es un *preorden total en A* si para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que

$$(a \prec b) \vee (b \prec a).$$

Un *orden total* es un orden parcial que es preorden total.

Definición 0.0.10 Sea A y B dos conjuntos. Una *aplicación* $f : A \to B$ es un subconjunto $f \subset A \times B$ con la siguiente propiedad:

Para cada $a \in A$, existe un único $b \in B$ que satisface $(a,b) \in f$.

Si $(a,b) \in f$, escribimos $b = f(a)$.

Habitualmente pensamos en f como una regla que envía cada elemento $a \in A$ en un único elemento $b \in B$ y cuando pensamos en f como subconjunto de $A \times B$, hablamos del *grafo (o la gráfica) de f*.

■ **Observación 0.1** Nótese que no existe ninguna aplicación con llegada en el conjunto vacío. En cambio, hay una única aplicación $\emptyset \to B$, con $B \neq \emptyset$: la dada por $f = \emptyset = \emptyset \times B$.

Definición 0.0.11 Sea $f : A \to B$ una aplicación entre conjuntos. Entonces:

1) Para cada $X \subset A$, la *imagen $f(X)$ de X por f* es el conjunto

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset B.$$

2) Para cada $Y \subset B$, la *imagen inversa $f^{-1}(Y)$ de Y por f* es el conjunto

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\} \subset A.$$

Cuando $Y = \{y\}$ escribiremos también $f^{-1}(y)$ para denotar $f^{-1}(\{y\})$.

Definición 0.0.12 Dadas dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, definimos su *composición* como la aplicación $g \circ f : A \to C$ dada por:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Definición 0.0.13 Decimos que una aplicación $f : A \to B$ es:

- *Inyectiva* si dados $a, b \in A$ con $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$ (elementos distintos tienen imágenes distintas).
- *Sobreyectiva* si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ (todo elemento de b tiene imagen inversa).
- *Biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Definición 0.0.14 Dos conjuntos X e Y son *equipotentes* si existe una biyección entre ellos.

Definición 0.0.15 Sea Λ un conjunto no vacío tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ tenemos un conjunto A_α. La colección $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ se llama *familia de conjuntos* y Λ es el *conjunto índice* para la familia. Usaremos también la escritura $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$

A veces, para evitar ambigüedades y hacer énfasis en que $\Lambda \neq \emptyset$, especificaremos que la familia en la definición 0.0.15 es no vacía.

Definición 0.0.16 Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos:

- La *unión* $\cup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es el conjunto dado por

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in \Lambda \text{ con } x \in A_\alpha\}$$

- La *intersección* $\cap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es el conjunto dado por

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha,\ \forall \alpha \in \Lambda\}$$

En algunos textos es común convenir que la intersección de una familia vacía de subconjuntos de uno dado es igual al conjunto total y así lo consideraremos nosotros cuando sea necesario. Si observamos con detenimiento la definición de intersección, está convención es totalmente oportuna, pero esto es una finura lógica en la que no queremos hacer hincapié.

Teoría de conjuntos

1. Axiomática

Aunque para la mayoría de nuestros propósitos la idea intuitiva de conjunto podría ser suficiente, si no se establecen de forma explícita los axiomas que nos dicen "qué es un conjunto" podemos caer rápidamente en contradicciones. El ejemplo clásico es la *paradoja de Rusell*, conocida como "la paradoja del barbero". Sea

$$\mathscr{R} = \{x : (x \text{ conjunto}) \wedge x \notin x\}.$$

Si $\mathscr{R}$ fuese un conjunto, tendríamos

$$\mathscr{R} \in \mathscr{R} \Leftrightarrow \mathscr{R} \notin \mathscr{R}.$$

Para desbloquear esta paradoja lógica, nosotros adoptamos la posición de que el problema reside en suponer que $\mathscr{R}$ es un conjunto. Para ello seguimos la versión axiomática de la teoría de conjuntos presentada en el libro de *Dugundji*, que está basada en la de *Bernayds-Gödel-von Neumann (BGN)*. Cabe decir que existen otras axiomáticas alternativas en la teoría de conjuntos, cada una con sus ventajas y sus inconvenientes.

Los *conceptos primitivos* en el desarrollo de la axiomática son las *clases* y existe una relación binaria de *pertenencia* "$\in$" entre ellas; todas las variables que aparecen: $\mathscr{A}, A, x, \ldots$, representan clases. Una propiedad o enunciado "p" será una fórmula construida por:

1. Negación $\neg$
2. Conjunción $\wedge$
3. Disyunción $\vee$
4. Cuantificación ($\exists$, $\forall$) de variables mediante cálculo de predicados.

Dada una clase x, el enunciado $p(x)$ puede ser verdadero o falso.

Definición 1.0.1 Dos clases $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son *iguales*, y lo escribimos $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, si tienen exactamente los mismos elementos. Esto es:

$$(x \in \mathscr{A}) \wedge (\mathscr{A} = \mathscr{B}) \Rightarrow x \in \mathscr{B}.$$

Definición 1.0.2 Dadas dos clases $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, decimos que $\mathscr{A}$ *es una subclase de* $\mathscr{B}$, y lo escribiremos $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, si todo elemento de $\mathscr{A}$ está en $\mathscr{B}$, esto es

$$(\mathscr{A} \subset \mathscr{B}) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Nótese que $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ si, y solamente si, se tiene $(\mathscr{A} \subset \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{B} \subset \mathscr{A})$.
AI (Individualidad) $(x \in \mathscr{A}) \wedge (x = y) \Rightarrow (y \in \mathscr{A})$.

Definición 1.0.3 Un *conjunto* es una clase que pertenece a otra clase. Una clase que no es un conjunto se llama *clase propia*.

AII (De formación de clases) Para cada propiedad "p" en la que las únicas variables cuantificadas son conjuntos, existe una clase $\mathscr{A}$ cuyos elementos son los conjuntos que tienen la propiedad p. En fórmulas:

$$(x \in \mathscr{A}) \Leftrightarrow ((x \text{ es un conjunto}) \wedge p(x)).$$

Mediante este segundo axioma podemos concluir que

$$\mathscr{R} = \{x : (x \text{ conjunto}) \wedge x \notin x\}$$

es una clase propia, llamada *clase de Russell*. Notemos a su vez que la clase de todas las clases no tiene sentido, pues se estarían cuantificando variables que no son conjuntos. De hecho, la *clase universal* $\mathscr{U}$ es la clase de todos los conjuntos. Formalmente

$$\mathscr{U} = \{x : \ (x \text{ es conjunto}) \wedge (x = x)\}.$$

La *clase vacía* $\emptyset$ se define como

$$\emptyset = \{x : \ (x \text{ es conjunto}) \wedge (x \neq x)\}.$$

Nótese que $\emptyset \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{U}$, para toda clase $\mathscr{A}$.

■ **Observación 1.1** Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ dos clases, el axioma de formación de clases AII), permite definir las clases $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, etc. También tienen sentido las aplicaciones entre clases y relaciones binarias en una clase; en particular relaciones binarias de equivalencia, orden y preorden.

Los siguientes axiomas garantizan la existencia de por lo menos un conjunto y que ciertas construcciones dan lugar a conjuntos.
AIII (Conjunto vacío) La clase $\emptyset$ es un conjunto.
AIV (Pares) Si A y B son conjuntos distintos, entonces la clase

$$\{x : (x = A) \vee (x = B)\}$$

es un conjunto (con exactamente dos elementos), que denotamos $\{A, B\}$.
Diremos que $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una *f*amilia de conjuntos si cada uno de los A_α es un conjunto y también lo es Λ.
AV (Unión) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de conjuntos, entonces la clase

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in \Lambda \text{ con } x \in A_\alpha\}$$

es un conjunto.
AVI (Reemplazamiento) Sea A un conjunto. Si $f : A \to \mathscr{A}$ es una aplicación entre clases, entonces $f(A)$ es un conjunto.
AVII (Separación) Si A es un conjunto, entonces $A \cap \mathscr{A}$ es un conjunto, para cualquier clase $\mathscr{A}$.

Del axioma de separación se deduce que si A es un conjunto y "p" es una propiedad en la que las únicas variables cuantificadas son conjuntos, entonces también es un conjunto

$$\{x : (x \in A) \wedge p(x)\}.$$

En particular se deduce que si A es un conjunto y $\mathscr{B} \subset A$, entonces $\mathscr{B}$ es un conjunto.

Dada una clase $\mathscr{A}$, la *clase potencia* $\mathscr{P}(\mathscr{A})$ se define como

$$\mathscr{P}(\mathscr{A}) = \{B : (B \text{ conjunto }) \wedge (B \subset \mathscr{A})\}.$$

Cuando A es un conjunto, por el axioma de separación, tenemos directamente que

$$\mathscr{P}(A) = \{B : B \subset A\}.$$

AVIII (Partes) Si A es un conjunto, entonces $\mathscr{P}(A)$ es un conjunto.

El axioma de fundación nos dice que cada conjunto no vacío debe contener "átomos" que lo funden. De manera precisa:
AIX (Fundación) En cada conjunto no vacío A, existe un elemento $a \in A$ tal que $a \cap A = \emptyset$.

Definición 1.0.4 Un conjunto A es *infinito* si existe $a \in A$ tal que A y $A \setminus \{a\}$ son equipotentes.

El siguiente axioma proporciona la existencia de conjuntos infinitos (ejercicio).
AX (Infinito) Existe un conjunto A *inductivo*, es decir, que satisface:
1) $\emptyset \in A$
2) Si $a \in A$, entonces $a \cup \{a\} \in A$

Teorema 1.0.1 Existe un único conjunto inductivo $\mathbb{N}$ que no tiene subconjuntos propios inductivos. Además $\mathbb{N}$ es la intersección de todos los conjuntos inductivos.

Previa a la demostración del teorema, veamos el siguiente lema:

Lema 1.0.2 Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia no vacía de conjuntos inductivos. Entonces la intersección $B = \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es un conjunto inductivo.

Demostración. Probar que B es un conjunto queda como ejercicio. Veamos que B cumple las dos propiedades de ser inductivo:
1) $\emptyset \in A_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $\emptyset \in B$.
2) Sea $a \in B$, entonces $a \in A_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$. Por tanto $a \cup \{a\} \in A_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$. y así $a \cup \{a\} \in B$. ■

Demostración del teorema 1.0.1. Supongamos que tenemos dos conjuntos inductivos A y B que no tienen subconjuntos propios inductivos. Como $A \cap B$ es inductivo, necesitamos que necesariamente

$$A \cap B = A = B.$$

Así, queda probada la unicidad.
Veamos ahora la existencia. Por el axioma del infinito, existe un conjunto inductivo, llamémoslo A. La intersección $\mathbb{N} = \bigcap\{C : (C \subset A) \wedge (C \text{ es inductivo})\}$ es a su vez un conjunto inductivo. Que $\mathbb{N}$ no tiene subconjuntos propios inductivos es claro por definición.
Finalmente, si B es cualquier conjunto inductivo, tenemos que $B \cap \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ también es inductivo y por tanto $B \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, de lo que se concluye que $\mathbb{N} \subset B$. De esta manera $\mathbb{N}$ es la intersección de todos los conjuntos inductivos. ■

Definición 1.0.5 Al conjunto $\mathbb{N}$ en el teorema 1.0.1 lo llamamos *conjunto de los números naturales*.

Los "primeros" elementos de $\mathbb{N}$ son

$$\begin{array}{ccccc} \emptyset & & & =: & 0 \\ \{\emptyset\} & = & \{0\} & =: & 1 \\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\} & = & \{0,1\} & =: & 2 \\ \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\} & = & \{0,1,2\} & =: & 3 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \end{array}$$

La escritura $0,1,2,\ldots$ es solamente una representación, que puede variar; de hecho, cuando tratemos con los números naturales vistos como ordinales tenderemos a decir que su primer elemento se llama 1, es decir, usaremos la convención $1 := \emptyset$, $2 := \{\emptyset\}$, etc. Estas dos formas habituales de "llamar a los números naturales" no deben generarnos ninguna confusión ni preocupación.

La aplicación *sucesor* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}$ dada por $s(a) = a \cup \{a\}$ está bien definida. En efecto, que $s(a) \in \mathbb{N}$ es claro por ser $\mathbb{N}$ un conjunto inductivo y $\emptyset$ no tiene preimagen pues si existiera $a \in A$ con $\emptyset = s(a) = a \cup \{a\}$, entonces $a \in \emptyset$, lo cual es absurdo. Además s es biyectiva (ejercicio). Habitualmente escribiremos $n+1$ para denotar al sucesor de n. También escribiremos $n-1$ para denotar al antecesor inmediato de un número natural n distinto del vacío.

Proposición 1.0.3 La terna $(\mathbb{N},\emptyset,s)$ satisface los axiomas de Peano:

- $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}$ es una aplicación inyectiva.
- (Principio de inducción) Sea $A \subset \mathbb{N}$ un subconjunto que tiene la propiedad

$$(\emptyset \in A) \wedge (b \in A \Rightarrow s(b) \in A),$$

entonces $A = \mathbb{N}$.

Demostración. Demostrar que s es una aplicación inyectiva queda como ejercicio. Ahora, decir que $A \subset \mathbb{N}$ es un subconjunto tal que

$$(\emptyset \in A) \wedge (a \in A \Rightarrow s(a) \in A),$$

es exactamente decir que A es un conjunto inductivo, pues $s(a) = a \cup \{a\}$. Como $\mathbb{N}$ no tiene subconjuntos inductivos propios, tenemos que $A = \mathbb{N}$, como queríamos. ■

■ **Observación 1.2** Podríamos definir los números naturales como cualquier terna (N,O,s) que cumple los axiomas de Peano. Dedekind probó que esta definición es "categórica", más precisamente, que dadas dos ternas (N,O,s) y (N',O',s') que cumplen los axiomas de Peano, existe una única aplicación biyectiva $\phi : N \to N'$ que satisface:

$$\phi(O) = O', \quad s' \circ \phi = \phi \circ s.$$

El siguiente ejemplo, debido a Russell, muestra que todavía hay colecciones que podríamos querer que fuesen conjuntos: Sea A una colección infinita de pares de zapatos. Podemos construir un subconjunto que consiste en exactamente un zapato de cada par mediante la propiedad "zapato derecho". Si ahora A es una colección de pares de calcetines, como los calcetines son idénticos, no hay ninguna propiedad razonable que permita extraer exactamente uno de cada par. Para ello adoptamos otro método para producir conjuntos: el dado por el axioma de elección.

AXI (Axioma de elección AC) Dada una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de conjuntos no vacíos, existe un conjunto que tiene exactamente un elemento de cada A_α.

Definición 1.0.6 El *producto* $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ de una familia de conjuntos $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es el conjunto dado por

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{c : \Lambda \to \bigcup_\alpha A_\alpha : \ \forall \alpha \in \Lambda, c(\alpha) \in A_\alpha\}.$$

A veces escribimos $c = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ para denotar un elemento del producto, es decir $a_\alpha = c(\alpha)$, para todo $\alpha \in \Lambda$, donde $c \in \prod_\alpha A_\alpha$. La aplicación

$$p_\alpha : \prod_\alpha A_\alpha \to A_\alpha, \quad (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \mapsto a_\alpha$$

se llama *proyección sobre el α-ésimo factor*.

Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de conjuntos no vacíos. Una *aplicación de elección* para dicha familia es un elemento de $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. Se puede comprobar que la siguiente es una formulación equivalente del axioma de elección:

> Dada una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de conjuntos no vacíos, el producto $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es no vacío (y por tanto existe una aplicación de elección).

Presentamos ahora dos formulaciones más equivalentes (no vamos a probarlo) del axioma de elección: El lema de Zorn y el teorema de Zermelo.

Recordemos que un preorden $\prec$ en un conjunto A es una relación binaria reflexiva y transitiva.

Definición 1.0.7 Sea $\prec$ un preorden en A. Un elemento $m \in A$ se dice que es:
- *máximo o último elemento* si $a \prec m$ para todo $a \in A$.
- *maximal* si para todo $a \in A$ tal que $m \prec a$, entonces $a \prec m$.
- *mínimo o primer elemento* si $m \prec a$ para todo $a \in A$.
- *minimal* si para todo $a \in A$ tal que $a \prec m$, entonces $m \prec a$.

Sea B un subconjunto de A. Un elemento $a_0 \in A$ se dice que es:
- *cota superior* si $b \prec a_0$ para todo $b \in B$.
- *cota inferior* si $a_0 \prec b$ para todo $b \in B$.

Definición 1.0.8 Sea $\prec$ un preorden en A. Una *cadena en A* es cualquier subconjunto $B \subset A$ tal que $\prec$ induce un preorden total en B.

Lema de Zorn: Sea X un conjunto preordenado por $\prec$. Si cada cadena tiene cota superior, entonces X tiene por lo menos un elemento maximal.

El lema de Zorn es una versión muy útil del axioma de elección. Como aplicación a éste, tenemos el siguiente resultado de álgebra lineal.

Teorema 1.0.4 Todo espacio vectorial tiene base.

Demostración. Ejercicio ■

Definición 1.0.9 Un orden parcial $\leq$ en A se dice *buen orden* si cada subconjunto no vacío $B \subset A$ tiene primer elemento.

Teorema de Zermelo Todo conjunto admite un buen orden.

■ **Observación 1.3** El teorema de Zermelo es existencial, pero no constructivo. No se conoce ninguna construcción específica para ordenar bien un conjunto no numerable (por ejemplo los reales). Incluso hay conjuntos no numerables para los que no se conoce una construcción específica de un orden total.

1.1 Procedimiento diagonal de Cantor

Dados dos conjuntos A y B, denotamos por A^B el conjunto de aplicaciones de B en A. Los siguientes son algunos ejemplos:

1) $A^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de sucesiones de elementos en A.
2) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos con $A_\alpha = A$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $A^\Lambda = \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$.
3) $2^X = \{X \to \{0,1\}\}$.

Cuando hablemos de cardinalidad, especificaremos qué es el "tamaño" de un conjunto. Para hacernos una idea, podemos pensar que dos conjuntos tienen el mismo tamaño si son equipotentes y uno tiene un tamaño menor o igual a otro si hay una aplicación inyectiva del primero en el segundo.

Definición 1.1.1 Sea X un conjunto y $A \in \mathscr{P}(X)$. La *aplicación característica* $c_A : X \to \{0,1\}$ es el elemento de 2^X dado por

$$c_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

Recíprocamente, dada $\xi \in 2^X$, definimos $A_\xi = \{x \in X : \xi(x) = 1\}$. Es sencillo comprobar (ejercicio) que, dados $A \in \mathscr{P}(X)$ y $\xi \in 2^X$, se tiene

$$c_{A_\xi} = \xi, \quad A_{c_A} = A.$$

De esta manera, hay una biyección natural entre el conjunto $\mathscr{P}(X)$ y 2^X.

Ahora, es claro que existe una aplicación inyectiva entre X y $\mathscr{P}(X)$, por ejemplo la dada por $x \mapsto \{x\}$. Veamos que no existe ninguna biyección entre estos conjuntos, y que por tanto son conjuntos no equipotentes. Para ello, usamos el *procedimiento diagonal de Cantor*.

Teorema 1.1.1 Los conjuntos X y 2^X no son equipotentes.

Demostración. Sea $\Phi : X \to 2^X$ una aplicación cualquiera. Veamos que no es sobreyectiva construyendo un elemento $\xi \in 2^X$ con $\xi \notin \Phi(X)$. Definimos

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \Phi(x)(x) = 1, \\ 1 & \text{si} \quad \Phi(x)(x) = 0. \end{cases}$$

Así, dado cualquier $x \in X$ tenemos que

$$\xi(x) = 1 \Leftrightarrow \Phi(x)(x) = 0$$

y por tanto $\xi \neq \Phi(x)$, como queríamos. ■

La siguiente imagen ilustra el principio diagonal de Cantor para el caso $A = \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lcccccccccc}
\Phi(0) & = & \color{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\
\Phi(1) & = & 1 & \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\
\Phi(2) & = & 0 & 1 & \color{red}{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\
\Phi(3) & = & 1 & 0 & 0 & \color{red}{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
\Phi(4) & = & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\Phi(5) & = & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} & 1 & 0 & \dots \\
\Phi(6) & = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \color{red}{1} & 1 & \dots \\
\Phi(7) & = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \color{red}{1} & \dots \\
\dots & & & & \dots & & & \dots & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
\color{red}{\xi} & \color{red}{=} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{\dots}
\end{array}$$

Concluimos, por tanto, que existen conjuntos infinitos que no son equipotentes, como por ejemplo $\mathbb{N}$ y $2^{\mathbb{N}}$.

Terminamos esta sección proporcionando una realización del conjunto $2^{\mathbb{N}}$, también llamado *conjunto de Cantor*, dentro del intervalo $[0,1]$: el *conjunto triádrico de Cantor*. Intuitivamente, vamos a quedarnos con los números en $[0,1]$ cuya expansión ternaria o triádrica no emplea 1's.

El *conjunto triádrico de Cantor* se define como la intersección $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$, donde los T_n son los subconjuntos de $[0,1]$ descritos a continuación. Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$ escribamos $S_n = 2^{\{1,2,\dots,n\}}$. Para cada $\delta \in S_n$ sea I_δ el intervalo definido como sigue:

1. Si $n = 1$, tomamos $I_0 = [0,1/3]$ e $I_1 = [2/3,1]$.
2. Si $n \geq 2$ y suponemos definido $I_{\bar{\delta}} = [a,b]$, para $\bar{\delta} = \delta|_{\{1,2,\dots,n-1\}}$ y tomamos

$$I_\delta = [a, a+1/3^n], \text{ si } \delta(n) = 0, \quad I_\delta = [b-1/3^n, b], \text{ si } \delta(n) = 1.$$

Ahora, el conjunto T_n es la unión $T_n = \bigcup_{\delta \in S_n} I_\delta$. A modo ilustrativo, describimos explícitamente T_1 y T_2.

$$T_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad T_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Las siguientes propiedades no son difíciles de comprobar:

1. Si $\delta, \gamma \in S_n$ con $\delta \neq \gamma$, entonces $I_\delta \cap I_\gamma = \emptyset$.
2. Si $n \geq 2$, $\delta \in S_n$ y $\bar{\gamma} \in S_{n-1}$, se tienen las siguientes equivalencias:

$$I_\delta \cap I_{\bar{\gamma}} \neq \emptyset \Leftrightarrow I_\delta \subset I_{\bar{\gamma}} \Leftrightarrow \delta|_{\{1,2,\dots,n-1\}} = \bar{\gamma}.$$

Para cada $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ escribamos $\sigma_n = \sigma|_{\{1,2,\dots,n\}}$. Esto da lugar a una sucesión de intervalos cerrados encajados

$$I_{\sigma_1} \supset I_{\sigma_2} \supset \cdots \supset I_{\sigma_n} \supset I_{\sigma_{n+1}} \supset \cdots$$

cuya longitud tiende a cero. Por una de las propiedades básicas de los números reales, existe un único número real x_σ en la intersección de todos ellos, esto es

$$\{x_\sigma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\sigma_n} \subset T.$$

Proposición 1.1.2 La aplicación $\Phi : 2^{\mathbb{N}} \to T$ dada por $\Phi(\sigma) = x_\sigma$ es biyectiva

Demostración. Veamos que Φ es inyectiva. Dados dos elementos distintos $\sigma, \gamma \in 2^{\mathbb{N}}$, existe un índice $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_n \neq \gamma_n$. Por definición $\Phi(\gamma) = x_\gamma \in I_{\gamma_n}$ y $\Phi(\sigma) = x_\sigma \in I_{\sigma_n}$. Ahora, como $\sigma_n \neq \gamma_n$, por la primera propiedad sabemos que $I_{\gamma_n} \cap I_{\sigma_n} = \emptyset$, y por tanto se tiene que $x_\gamma \neq x_\sigma$.

Veamos que Φ es suprayectiva. Tomamos $x \in T$ y buscamos una sucesión $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ con $\Phi(\sigma) = x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único $\alpha^n \in S_n$ tal que

$$x \in I_{\alpha^n} \subset T_n$$

Como $x \in I_{\alpha^{n+1}} \cap I_{\alpha^n}$, se tiene que α^n es la restricción de α^{n+1} a $\{1, 2, \ldots, n\}$ en vista de la segunda propiedad. Como esto lo hacemos para todo número natural, podemos construir un elemento $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ cuya restricción a $\{1, 2, \ldots, n\}$ coincide con α^n. Tenemos que $\Phi(\sigma) = x$. ■

2. Ordinales y números ordinales

En gran parte de este capítulo trataremos con conjuntos parcialmente ordenados: conjuntos acompañados de una relación binaria de orden. Por comodidad, siempre omitiremos el orden de las notaciones y usaremos el símbolo $\leq$ para denotar el orden dentro del conjunto correspondiente. Solamente cuando necesitemos usar dos órdenes distintos para el mismo conjunto lo haremos notar explícitamente.

2.1 Ordinales. Comparación

Definición 2.1.1 Sean A y A' dos conjuntos parcialmente ordenados. Una aplicación $f : A \to A'$ es un *morfismo* si se tiene que

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

Un *monomorfismo* es un morfismo inyectivo y un *isomorfismo* es uno biyectivo.

Definición 2.1.2 Un *ordinal* o *conjunto bien ordenado* es un conjunto parcialmente ordenado, donde el orden es un buen orden.

Definición 2.1.3 Sea W un ordinal y $z \in W$. El *intervalo inicial de W determinado por z* es el conjunto

$$W(z) = \{x \in W;\ x \leq z,\ x \neq z\}.$$

Un *ideal* I de W es un subconjunto $I \subset W$ tal que para cualesquiera $x \in I$ e $y \in W$, con $y \leq x$, se tiene que $y \in I$. Denotaremos por $J(W)$ el conjunto de todos los intervalos iniciales y por $I(W)$ el conjunto de todos los ideales.

Nótese que $\emptyset$ es un intervalo inicial, pero no lo es W. En cambio W sí es un ideal. Obsérvese a su vez que los intervalos iniciales son automáticamente ideales. De hecho, se tiene que

$$I(W) = J(W) \cup \{W\}.$$

Lema 2.1.1 Sea W un ordinal. Dados $a, b \in W$, tenemos que $a \leq b$ si y solamente si $W(a) \subset W(b)$.

Demostración. Que $a \leq b$ implica $W(a) \subset W(b)$ se sigue por la transitividad del orden. Supongamos que $W(a) \subset W(b)$. Como $b \notin W(b)$, también tenemos que $b \notin W(a)$, es decir que $(b = a) \vee (b \not\leq a)$. Como el orden es total, concluimos que $a \leq b$ necesariamente. ■

El siguiente resultado se concluye directamente del lema anterior:

Proposición 2.1.2 Sea W un ordinal. Los conjuntos $J(W)$ e $I(W)$ están bien ordenados por la inclusión y la aplicación $W \to J(W)$ dada por $z \mapsto W(z)$ es un isomorfismo entre ordinales.

El objetivo en esta sección es probar que, dados dos ordinales, uno de ellos es isomorfo a un ideal del otro, mediante un isomorfismo único. Más precisamente, queremos probar el siguiente resultado:

Teorema 2.1.3 — De comparación de ordinales. Sean W y W' dos ordinales. Entonces una, y solo una, de las siguientes afirmaciones se cumple:
1) Hay un isomorfismo único entre W y W'.
2) Hay un isomorfismo único entre W y un intervalo inicial de W'.
3) Hay un isomorfismo único entre W' y un intervalo inicial de W.

Antes de demostrar el teorema, veamos las siguientes afirmaciones:

Proposición 2.1.4 Sea W un ordinal y sea $\Sigma \subset I(W)$ cualquier conjunto de ideales con $\emptyset \in \Sigma$ y que cumple las siguientes propiedades:
i) (cerrada por la unión) Cada unión de miembros de Σ está en Σ.
ii) Si $W(a) \in \Sigma$, entonces $W(a) \cup \{a\} \in \Sigma$.
Se tiene que $\Sigma = I(W)$.

Demostración. Supongamos que $I(W) \setminus \Sigma \neq \emptyset$. Como $I(W)$ está bien ordenado, existe un primer elemento $I_0 \in I(W)$ con $I_0 \notin \Sigma$. Sabemos que $I_0 \neq \emptyset$. Distinguiremos dos casos: I_0 tiene máximo o no.

– Si I_0 tiene máximo, llamémoslo b^*, entonces $I_0 = W(b^*) \cup \{b^*\}$. Por la minimalidad de I_0, tenemos que $W(b^*) \in \Sigma$ y, por la propiedad ii) concluimos que $W(b^*) \cup \{b^*\} \in \Sigma$, lo cual es absurdo.

– Si I_0 no tiene máximo, podemos escribir I_0 (ejercicio) como

$$I_0 = \bigcup_{b \in I_0} W(b).$$

De nuevo, la minimalidad de I_0 nos garantiza que $W(b) \in \Sigma$ para todo $b \in I_0$ y por la propiedad i) también $I_0 \in \Sigma$, lo cual es contradictorio. ■

Lema 2.1.5 Sean W y W' dos ordinales y sea $\varphi : W \to W'$ un monomorfismo tal que $\varphi(W)$ es un ideal de W'. Para cualquier otro monomorfismo $f : W \to W'$ se tiene que

$$\varphi(w) \leq f(w), \quad \forall w \in W.$$

Demostración. Sea $A = \{w \in W : \varphi(w) \leq f(w)\}$. Veamos que $A = W$. Supongamos que $W \setminus A \neq \emptyset$. Existe un primer elemento $w_0 \in W \setminus A$. Es decir, con

$$(\varphi(w_0) \neq f(w_0)) \wedge (f(w_0) \leq \varphi(w_0)).$$

Escribimos condensadamente $f(w_0) < \varphi(w_0)$.

Dado que $\varphi(W)$ es un ideal, debe existir $w_1 \in W$ tal que $\varphi(w_1) = f(w_0)$. Sabemos que $w_1 \neq w_0$, pues tienen imagen distinta por φ. Distinguimos los casos $w_1 \leq w_0$ y $w_0 \leq w_1$ y buscamos en cada uno de ellos una contradicción.

– Si $w_1 \leq w_0$, por la minimalidad de w_0, entonces $w_1 \in A$. Así

$$f(w_0) = \varphi(w_1) \leq f(w_1) \leq f(w_0),$$

por tanto $f(w_1) = f(w_0)$, lo que contradice la inyectividad de f.

– Si $w_0 \leq w_1$, entonces $\varphi(w_0) \leq \varphi(w_1) = f(w_0) < \varphi(w_0)$, que es absurdo. ■

■ **Observación 2.1** La condición de que φ sea inyectiva la podríamos haber obviado, pues no ha sido necesario usarla.

Corolario 2.1.6 Si $\varphi, \psi : W \to W'$ son dos monomorfismos con $\varphi(W)$ y $\psi(W)$ ideales, entonces $\varphi = \psi$ y, en particular, tenemos la igualdad $\varphi(W) = \psi(W)$. Como consecuencia, dados dos ideales I e I' de W y W' respectivamente, como mucho hay un isomorfismo entre ellos.

Demostración. Para todo $w \in W$, tenemos que

$$(\varphi(w) \leq \psi(w)) \wedge (\psi(w) \leq \varphi(w)) \Rightarrow \varphi(w) = \psi(w),$$

por tanto son la misma aplicación. La segunda parte se sigue automáticamente. ■

Ahora ya tenemos todos los ingredientes necesarios para realizar la prueba del teorema de comparación de ordinales.

Demostración del teorema. La unicidad de los isomorfismos se sigue directamente del corolario 2.1.6. También es directo de este corollary que las posibilidades 1) y 2) (análogamente 1) y 3)) son mutuamente excluyentes. Veamos que también lo son 2) y 3). Supongamos que existen isomorfismos

$$f : W \to W'(b), \quad f' : W' \to W(a).$$

La composición $i \circ f' \circ f : W \to W$, donde i denota la inclusión de $W(a)$ en W, sería un monomorfismo cuya imagen es un ideal, al igual que también es un monomorfismo la identidad $\mathrm{Id} : W \to W$. De nuevo el corolario 2.1.6 nos diría que estas dos aplicaciones deben coincidir, lo cual no es cierto.

Veamos ahora que se da una de las situaciones del enunciado. Sea

$$\Sigma = \{I \in I(W) : I \text{ es isomorfo a algún } I' \in I(W')\}$$

Si $W \in \Sigma$, estamos en los casos 1) o 2). Así que supongamos que $W \notin \Sigma$ y veamos que se cumple la alternativa 3).

Paso 1: La unión de elementos de Σ está de nuevo en Σ. Tomamos una familia $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de elementos de Σ. Sabemos que existen monomorfimos

$$\varphi_\alpha : I_\alpha \to X, \quad \varphi_\alpha(I_\alpha) = I'_\alpha \in I(W').$$

La unión de ideales es un ideal (ejercicio). Veamos que $I = \cup_\alpha I_\alpha$ es isomorfo al ideal de W' dado por $I' = \cup_\alpha I'_\alpha$ construyendo "por pegado" un isomorfismo. Dados $\alpha, \beta \in \Lambda$ sabemos que o bien $I_\alpha \subset I_\beta$ o $I_\beta \subset I_\alpha$. Supongamos lo primero, otra vez por el corolario 2.1.6 podemos asegurar que

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(x), \quad \forall x \in I_\alpha.$$

De esta manera, la aplicación $\varphi : I \to X$ dada por $x \mapsto \varphi_\alpha(x)$, si $x \in I_\alpha$ está bien definida y proporciona el isomorfismo deseado (compruébese).

Paso 2: Es claro que $\emptyset \in \Sigma$, así que existe $a^* \in W$ tal que

$$W(a^*) \in \Sigma, \quad W(a^*) \cup \{a^*\} \notin \Sigma,$$

si no por la proposición 2.1.4 tendríamos $\Sigma = I(W)$, lo que nos da una contradicción.

Como $W(a^*) \in \Sigma$, sabemos que existe un isomorfismo $\varphi : W(a^*) \to I'$, donde I' es un ideal de W'; veamos que I' es el total. Supongamos que no lo es, es decir que $I' = W(b^*)$, con $b^* \in W'$. Podemos extender el isomorfismo φ a un isomorfismo $\tilde{\varphi} : W(a^*) \cup \{a^*\} \to W(b^*) \cup \{b^*\}$ enviando a^* en b^*. Esto hace que $W(a^*) \cup \{a^*\} \in \Sigma$ lo cual es absurdo. ■

Corolario 2.1.7 Ningún intervalo inicial de un ordinal es isomorfo a él mismo.

Corolario 2.1.8 Sea W un ordinal. Cualquier subconjunto A de W es isomorfo a W o a un intervalo inicial de W.

Demostración. Para ello veamos que W no puede ser isomorfo a un intervalo inicial de A. Si existiese un isomorfismo $f : W \to A(a)$, la composición

$$g = i \circ f : W \to W,$$

donde i es la inclusión de $A(a)$ en W, estaría en las condiciones del lema de comparación. Así g debería ser igual a la identidad $\mathrm{Id}_W : W \to W$, pero no lo es. ■

Terminamos esta sección enunciando y demostrando el siguiente resultado:

Proposición 2.1.9 — Inducción transfinita. Sea W un ordinal y sea $Q \subset W$. Si para todo $x \in W$ se cumple la propiedad:

(*) $W(x) \subset Q$ *implica* $x \in Q$,

entonces $Q = W$.

Demostración. Supongamos que $W \setminus Q \neq \emptyset$ y sea w su primer elemento. Tenemos que $W(w) \subset Q$, o bien porque $W(w) = \emptyset$ o bien porque si no se contradice la minimalidad de w. En cambio $w \notin Q$, y esto contradice la propiedad $(*)$. ■

Una forma equivalente de establecer la inducción transfinita es la siguiente: Sea "p" un enunciado, que toma valores en $w \in W$. Supongamos que

$$\forall w \in W, \quad (p(x), \forall x \in W(w)) \Rightarrow p(w).$$

Entonces $p(w)$ es cierta para todo $w \in W$.

2.2 Números ordinales

Podríamos definir un número ordinal como una clase de equivalencia de ordinales, pero con esta aproximación tenemos la desventaja de estar trabajando con clases, en lugar de conjuntos. Así que vamos a definir número ordinal dentro del marco de la teoría de conjuntos. Veremos que existe una clase bien ordenada $\mathscr{L}$, cuyos elementos se llamarán *números ordinales*, que representarán las clases de isomorfía de ordinales.

Definición 2.2.1 Un *número ordinal* es un conjunto a que cumple las siguientes propiedades:

i) $(x \in a) \wedge (y \in a) \Rightarrow (x \in y) \vee (y \in x) \vee (x = y)$.

ii) $(y \in a) \Rightarrow (y \subset a)$.

El ejemplo más sencillo de número ordinal es $a = \emptyset$, ya que satisface las condiciones trivialmente; otros ejemplos son $\{\emptyset\}$ o $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Nuestro siguiente objetivo es probar que el conjunto de los números naturales es un número ordinal, de hecho veremos que es el número ordinal infinito más pequeño. Para ello necesitamos unos lemas previos.

Lema 2.2.1 Si $x \in \mathbb{N}$, entonces $(\emptyset \in x) \vee (x = \emptyset)$.

Demostración. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} : \emptyset \in x\} \cup \{\emptyset\}$. Veamos que es un conjunto inductivo. Que $\emptyset \in A$ es claro. Veamos que si $x \in A$, entonces $x \cup \{x\} \in A$.

- Si $x = \emptyset$, entonces $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
- Si $x \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \in x \subset x \cup \{x\}$. ■

Lema 2.2.2 Sean $x, y \in \mathbb{N}$. Si $y \in x$, entonces $(y \cup \{y\} = x) \vee (y \cup \{y\} \in x)$.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N},\ (y \in x) \Rightarrow (y \cup \{y\} = x) \vee (y \cup \{y\} \in x)\}.$$

Queremos ver que $A = \mathbb{N}$. Para ello, veamos que A es un conjunto inductivo. Que $\emptyset \in A$ es claro, pues el vacío no tiene elementos. Sea $x \in A$ y probemos que $x \cup \{x\} \in A$. Tomamos $y \in \mathbb{N}$ tal que $y \in x \cup \{x\}$, es decir, $y \in x$ o $y = x$. Distinguimos ambos casos:

- Si $y = x$, tenemos que $y \cup \{y\} = x \cup \{x\}$ y hemos terminado.
- Si $y \in x$, entonces, como $x \in A$, tenemos dos posibilidades:
  - $y \cup \{y\} = x$, hemos terminado, pues $x \in x \cup \{x\}$.
  - $y \cup \{y\} \in x$, hemos terminado, pues $x \subset x \cup \{x\}$. ■

Teorema 2.2.3 El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un número ordinal.

Demostración. Veamos que $\mathbb{N}$ cumple las dos propiedades de número ordinal.

ii) Sea $A = \{x \in \mathbb{N} : x \subset \mathbb{N}\}$. Queremos ver que $A = \mathbb{N}$. Para ello, veamos que A es un conjunto inductivo. Que $\emptyset \in A$ es claro. Sea $x \in A$, y probemos que $x \cup \{x\} \in A$. Por definición de A, sabemos que $x \subset \mathbb{N}$, por otro lado $x \in \mathbb{N}$. Así que $x \cup \{x\} \subset \mathbb{N}$, como queríamos.

i) Sea $A = \{y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N}, (x \in y) \vee (y \in x) \vee (x = y)\}$. De nuevo, queremos ver que $A = \mathbb{N}$ y para ello probaremos que es un conjunto inductivo.
   - $\emptyset \in A$ es cierto por el lema 2.2.1.
   - Sea $y \in A$. Veamos que $y \cup \{y\} \in A$. Dado $x \in \mathbb{N}$, nos preguntamos si

   $$(x \in y \cup \{y\}) \vee (y \cup \{y\} \in x) \vee (y \cup \{y\} = x).$$

   Sabemos que $(x \in y) \vee (x = y) \vee (y \in x)$. Si $(x \in y) \vee (x = y)$, es directo que $x \in y \cup \{y\}$. Si $y \in x$, concluimos por el Lema 2.2.2. ■

Si a es cualquier número ordinal, entonces $a \cup \{a\}$ también lo es (ejercicio). Los números ordinales que no son de esta forma, como por ejemplo $\mathbb{N}$ se llaman *números ordinales límite*, y se caracterizan por no tener un antecesor inmediato (no tienen un elemento máximo).

Presentamos ahora algunas propiedades importantes que cumplen los números ordinales.

Proposición 2.2.4 Sea a un número ordinal y $A \subset a$ un subconjunto no vacío. Existe un elemento $x_0 \in A$, llamado *primer elemento* tal que para cada $x \in A$ se cumple $(x_0 \in x) \vee (x_0 = x)$.

Demostración. Si tuviésemos dos elementos $a,b \in A$ con la propiedad deseada, tendríamos que $a \in b$ y $b \in a$, lo cual contradice la fundación, así que la unicidad se tiene. Probemos ahora la existencia. De nuevo por el axioma de fundación, sabemos que existe un elemento $x_0 \in A$ con $x_0 \cap A = \emptyset$, es decir, para todo $x \in A$, se tiene que $x \notin x_0$. Ahora, por la propiedad i) de ser a un ordinal, tenemos que, o bien $x_0 \in x$, o bien $x_0 = x$. ■

Proposición 2.2.5 Para cualquier número ordinal a tenemos que $\emptyset \in a$, y además es el primer elemento.

Demostración. Sabemos que existe $x_0 \in a$ primer elemento de a. Por la propiedad ii), sabemos que $x_0 \subset a$. Supongamos que $x_0 \neq \emptyset$ y tomemos $y \in x_0$. Por ser x_0 el primer elemento tenemos a su vez que $(x_0 \in y) \vee (x_0 = y)$, lo cual es absurdo. ■

Proposición 2.2.6 Los elementos de un número ordinal son números ordinales.

Demostración. Sea a un número ordinal y $b \in a$. Veamos que b es, a su vez, un número ordinal, es decir, que cumple i) y ii).

i) Sean $x,y \in b$. Por la propiedad ii) aplicada a a, tenemos que $x,y \in a$ y por tanto, aplicando i) a a tenemos que $x \in y$ o $y \in x$ o $x = y$, como queríamos.

ii) Sean $y \in b$ y $x \in y$, queremos comprobar que $x \in b$. Con un argumento similar al anterior, podemos comprobar que $x \in a$, así, la propiedad i) aplicada al número ordinal a nos asegura que $(x \in b) \vee (b \in x) \vee (x = b)$. Veamos que las dos últimas opciones nos llevan a una contradicción:

– Supongamos que $b \in x$. Tenemos que

$$\{b,x,y\} \cap b \ni y, \ \{b,x,y\} \cap x \ni b, \ \{b,x,y\} \cap y \ni x$$

lo cual contradice la fundación del conjunto $\{b,x,y\}$.

– Si $b = x$, entonces $(y \in x) \wedge (x \in y)$, que contradice la fundación. ■

Corolario 2.2.7 Todos los números naturales son números ordinales.

Proposición 2.2.8 Dados dos números ordinales a y b, tenemos que $a \subset b$ si y solamente si $(a \in b) \vee (a = b)$.

Demostración. Si $a = b$ es claro que $a \subset b$. Si $a \in b$, por ser b un número ordinal, tenemos que $a \subset b$.

Supongamos ahora que $a \subset b$, que $a \neq b$, y veamos que $a \in b$. Como b es un número ordinal, el conjunto $b \setminus a \neq \emptyset$ tiene primer elemento, digamos x_0, en vista de la proposición 2.2.4. Veamos que $x_0 = a$, y por tanto $a \in b$. Probaremos las dos contenencias $x_0 \subset a$ y $a \subset x_0$.

- Consideremos un elemento $y \in x_0$ y veamos que $y \in a$. Como $x_0 \in b$ y b es un número ordinal, sabemos que $x_0 \subset b$, y por tanto $y \in b$. Si y fuese un elemento de $b \setminus a$, por ser x_0 el primer elemento, tendríamos que $(x_0 \in y) \vee (x_0 = y)$, pero ambas cosas contradicen la fundación.

- Consideremos un elemento $y \in a$ y veamos que $y \in x_0$. Tanto y como x_0 son elementos de b y por ser b un número ordinal, se tiene

$$(y \in x_0) \vee (x_0 = y) \vee (x_0 \in y).$$

Si $x_0 = y$, automáticamente $x_0 \in a$, lo que es absurdo. Si $x_0 \in y$, por ser a un número ordinal, tenemos que $y \subset a$, y por tanto $x_0 \in a$, lo que de nuevo, es absurdo. De esta manera $y \in x_0$, como queríamos probar. ■

Teorema 2.2.9 Un número ordinal tiene un buen orden intrínseco (el dado por la inclusión). Por tanto, es un ordinal.

Demostración. La inclusión entre conjuntos siempre es un orden parcial. Debemos ver que estamos ante un buen orden. Dado un conjunto no vacío $A \subset a$, sabemos por la proposición 2.2.4 que existe un elemento $x_0 \in A$ tal que

$$\forall x \in A \quad (x_0 \in x) \vee (x_0 = x).$$

Veamos que este x_0 es el mínimo para el orden dado por la inclusión. Esto es, queremos ver que para todo $x \in A$ se cumple $x_0 \subset x$. Dado $x \in A$, por la proposición 2.2.6 sabemos que tanto x como x_0 son números ordinales, así que cumplen las hipótesis en la proposición 2.2.8 y por tanto $x_0 \subset x$. ■

La última de las propiedades que vamos a establecer es la siguiente comparación de números ordinales.

Proposición 2.2.10 Dados cualesquiera dos números ordinales a, b se tiene que $(a \subset b) \vee (b \subset a)$. Dicho de otro modo $(a \in b) \vee (a = b) \vee (b \in a)$.

Demostración. Es inmediato comprobar que la intersección de números ordinales es un número ordinal, así $a \cap b$ es un número ordinal. Supongamos que es distinto tanto de b como de a. Entonces, por la proposición 2.2.8 tenemos

$$(b \cap a \subset b) \wedge (b \cap a \neq b) \Rightarrow b \cap a \in b$$

y análogamente $b \cap a \in a$. De esta manera, llegamos a que $b \cap a \in b \cap a$, que contradice la fundación. Así $(b \cap a = b) \vee (b \cap a = a)$. Si $b \cap a = b$, entonces $b \subset a$ y si $b \cap a = a$, entonces $a \subset b$. ■

Proposición 2.2.11 La clase $\mathscr{L}$ de los números ordinales ordenada por la inclusión cumple las siguientes propiedades:

1) $\mathscr{L}$ no es un conjunto.
2) $\mathscr{L}$ está bien ordenada por la relación de inclusión.
3) Para cada $a \in \mathscr{L}$, el intervalo inicial $\mathscr{L}(a)$ es el propio a. En particular, dado cualquier $b \in a$, tenemos que $a(b) = b$. Como consecuencia, dos números ordinales distintos no son isomorfos.
4) Dado cualquier conjunto de números ordinales, existe un número ordinal mayor que todos ellos.
5) Toda sucesión decreciente $\varphi : \mathbb{N} \to \mathscr{L}$ de números ordinales estabiliza, es decir, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(n) = \varphi(n_0)$ para todo $n \geq n_0$.

Demostración. Veamos cada una de las afirmaciones:

1. Si $\mathscr{L}$ fuera un conjunto, verificaría las dos condiciones de número ordinal, por tanto tendríamos que $\mathscr{L} \in \mathscr{L}$, lo cual nos lleva a una contradicción con el axioma de fundación.
2. Veamos que toda subclase $\mathscr{Q} \subset \mathscr{L}$ no vacía tiene mínimo. Sea $a \in \mathscr{Q}$ y consideremos el conjunto
$$A_a = \{b \in \mathscr{Q} : (b \subset a) \wedge (b \neq a)\} = \{b \in \mathscr{Q} : b \in a\} = a \cap \mathscr{Q}$$
Que $A_a = \emptyset$ significa que a es el mínimo en $\mathscr{Q}$.
Si $A_a \neq \emptyset$, sabemos que tiene un primer elemento x_0; veamos que x_0 también es el primer elemento en $\mathscr{Q}$. Si $b \in a \cap \mathscr{Q} = A_a$, ya sabemos que $x_0 \subset b$. Supongamos que $b \in \mathscr{Q} \setminus a$, en vista de la proposición 2.2.10 concluimos que $a \subset b$ y como $x_0 \in a$, en particular $x_0 \subset a$. Llegamos así a que $x_0 \subset b$.

3. Dado un número ordinal $a \in \mathscr{L}$, tenemos que

$$\mathscr{L}(a) = \{b \in \mathscr{L} : (b \subset a) \wedge (b \neq a)\} = \{b \in \mathscr{L} : b \in a\} = a \cap \mathscr{L},$$

pero esto es el propio a, pues todos sus elementos son números ordinales. Ahora, tenemos que $\mathscr{L}(b) = (\mathscr{L}(a))(b) = a(b)$. Que dos números ordinales no son isomorfos se sigue ahora por el corolario 2.1.7.

4. Sea $E \subset \mathscr{L}$ un conjunto de números ordinales. Consideremos el conjunto

$$b = \bigcup_{a \in E} a$$

Se puede verificar (ejercicio) que b es un número ordinal. Se tiene que $a \subset b$, para todo $a \in E$. Ahora $b \cup \{b\}$ es otro número ordinal que proporciona la desigualdad estricta.

5. Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathscr{L}$ una sucesión decreciente de números ordinales y consideremos el subconjunto $A = \{\varphi(n) : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{L}$. Sabemos que A tiene primer elemento x_0, que se alcanza para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, esto es $x_0 = \varphi(n_0)$. Al ser la sucesión decreciente, tenemos que necesariamente $\varphi(n) = \varphi(n_0) = x_0$ para todo $n \geq n_0$. ■

Corolario 2.2.12 El número ordinal infinito más pequeño es $\mathbb{N}$.

Demostración. Ya sabemos que $\mathbb{N}$ es un número ordinal infinito. Ahora, un número ordinal más pequeño que $\mathbb{N}$ es uno de sus elementos (o un intervalo inicial), es decir, un número natural, que sabemos que es finito. ■

Terminamos este capítulo con el siguiente resultado que afirma que cada número ordinal representa una clase de isomorfía de ordinales.

Teorema 2.2.13 Dado un ordinal W, existe un número ordinal al que es isomorfo. Usaremos la notación $\operatorname{ord}(W)$ para denotar dicho número ordinal.

Para realizar esta demostración nos apoyamos en el siguiente resultado cuya demostración dejamos para más adelante.

Proposición 2.2.14 — Construcción transfinita. Sea W un ordinal y $\mathscr{A}$ una clase arbitraria. Si para todo $x \in W$ se cumple la propiedad:

hay una regla R_x que asocia a cada $\varphi : W(x) \to \mathscr{A}$, un único conjunto $R_x[\varphi] \in \mathscr{A}$,

entonces hay una única $F : W \to \mathscr{A}$ tal que $F(x) = R_x[F|_{W(x)}]$ para cada $x \in W$.

Demostración del teorema 2.2.13. Sea W un ordinal. Para cada $x \in W$ y para cada aplicación $\varphi : W(x) \to \mathscr{L}$, definimos $R_x[\varphi]$ como el número ordinal más pequeño que es mayor que cada elemento de $\varphi(W(x))$. Observamos que aquí hemos usado que la inclusión es un buen orden en $\mathscr{L}$, que $\varphi(W(x))$ es un conjunto y la propiedad 4) en la proposición 2.2.11. Por construcción transfinita, existe

$$F : W \to \mathscr{L}$$

tal que $F(x) = R_x[F|_{W(x)}]$ para cada $x \in W$. Tenemos que:

- F es un morfismo inyectivo. Supongamos que $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$, entonces $x \in W(y)$. Por definición de F, tenemos que $F(y) = R_y[F|_{W(y)}]$, y por tanto para todo $b \in F(W(y))$ se cumple

$$(b \subset F(y)) \wedge (b \neq F(y)).$$

Tomando $b = F(x)$, hemos terminado. Como consecuencia W es isomorfo a $F(W)$.

- Como $F(W)$ es un conjunto, por la propiedad 4) en la proposición 2.2.11, existe $b \in \mathscr{L}$ tal que $F(W) \subset \mathscr{L}(b) = b$. Ahora, por el corolario 2.1.8, tenemos que $F(W)$ es isomorfo a un ideal de b, que en vista de la propiedad 3) es de nuevo un número ordinal. ■

■ **Observación 2.2** En la prueba anterior, de hecho $F(W)$ es directamente un número ordinal. Para verlo, basta probar que $F(W)$ es directamente un ideal de b. Para ello, consideremos el conjunto

$$\Sigma = \{I \in I(W) : F(I) \text{ es un ideal de } b\}$$

y veamos que cumple las hipótesis de la proposición 2.1.4 para concluir que $W \in \Sigma$.

– Como $F(\emptyset) = \emptyset$, que es un ideal, tenemos que $\emptyset \in \Sigma$.

– Σ es cerrada por uniones. Consideremos para ello una familia de ideales $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y sea $I'_\alpha = F(I_\alpha)$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Tenemos que $F(\cup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha) = \cup_{\alpha\in\Lambda} I'_\alpha$ y como la unión de ideales es un ideal, concluimos la propiedad deseada.

– Finalmente, si $W(x) \in \Sigma$, tenemos que $F(W(x)) = b(a) = a$ para algún $a \in b$. Ahora, por definición, tenemos que

$$F(x) = \text{mín}\{c \in \mathscr{L} : c \ni x, \forall x \in a\} = \text{mín}\{c \in \mathscr{L} : c \supset a\} = a.$$

Por tanto $F(W(x) \cup \{x\}) = F(W(x)) \cup F(x) = a \cup \{a\}$, que es un ideal de b.

Demostración de la construcción transfinita. Veamos la existencia y unicidad de F.

Unicidad: Supongamos que existen dos aplicaciones F y G que cumplen la propiedad deseada. Si F y G son distintas, el conjunto $A = \{x \in W : F(x) \neq G(x)\}$ es no vacío, por tanto tiene un mínimo x_0. Por minimalidad de x_0, tenemos que

$$F|_{W(x_0)} = G|_{W(x_0)},$$

por tanto $F(x_0) = R_{x_0}[F|_{W(x_0)}] = R_{x_0}[G|_{W(x_0)}] = G(x_0)$, lo que nos da una contradicción. El conjunto A es vacío necesariamente y $F = G$.

Existencia: Sea Σ el conjunto de los ideales de W para los que existe $F_S : S \to \mathscr{A}$ que satisface la condición. Si probamos que $W \in \Sigma$, hemos terminado. Para ello, veamos que Σ está en las condiciones de la Proposición 2.1.4. Que $\emptyset \in \Sigma$ es evidente.

– (Σ es cerrada por uniones) Notemos que si $S \in \Sigma$ y R es un ideal de W con $R \subset S$, entonces $R \in \Sigma$ y por la unicidad recién probada, tenemos que $F_R = F_S|_R$. Sea $\{S_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de elementos de Σ y $S = \cup_\alpha S_\alpha$. Dados $\alpha, \beta \in \Lambda$, recordemos que $S_\alpha \cap S_\beta$ es un ideal, por tanto

$$F_{S_\alpha}|_{S_\alpha \cap S_\beta} = F_{S_\beta}|_{S_\alpha \cap S_\beta}$$

Esto nos permite "pegar" las F_{S_α} en una sola $F : S \to \mathscr{A}$ que cumple la condición, por tanto $S \in \Sigma$.

– (Si $W(x) \in \Sigma$, también $W(x) \cup \{x\}$) Por hipótesis existe $F : W(x) \to \mathscr{A}$ que cumple la condición. Extendemos F a x definiendo $\tilde{F} : W(x) \cup \{x\} \to \mathscr{A}$ como

$$\tilde{F}(y) = \begin{cases} F(y) & \text{si} \quad y \in W(x) \\ R_x[F] & \text{si} \quad y = x. \end{cases}$$

Se sigue directamente que $\tilde{F}$ cumple la condición requerida y por tanto tenemos $W(x) \cup \{x\} \in \Sigma$, como queríamos. ■

3. Cardinales y su aritmética

Mientras que los números ordinales se relacionan con contar, el concepto de cardinal solamente tiene que ver con el tamaño.

3.1 Números cardinales

Recordemos que dos conjuntos son equipotentes, o tienen el mismo tamaño, si hay una biyección entre ellos.

Definición 3.1.1 Un *número cardinal* es un número ordinal a tal que:

Para todo $b \in a$, tenemos que b y a no son equipotentes.

Denotaremos por $\mathscr{K}$ a la clase de todos los números cardinales, que está bien ordenada por la inclusión, ya que es una subclase de $\mathscr{L}$.

Los números cardinales infinitos, también llamados transfinitos, suelen denotarse con la primera letra del alfabeto hebreo $\aleph$ (“alef”).

■ **Ejemplo 3.1** Cada número natural es un número cardinal (ejercicio).

También $\mathbb{N}$ es un número cardinal, el cual es habitual denotar por $\aleph_0$ para remarcar que se está hablando de él como número cardinal. En efecto, cualquier otro número ordinal más pequeño estrictamente que $\mathbb{N}$ es un número natural que es finito, con lo que no es equipotente a $\mathbb{N}$.

Queremos asociar a cada conjunto X un número cardinal. Gracias al teorema de Zermelo, podemos dotar X de un buen orden. Como todo ordinal es isomorfo a un número ordinal, siempre hay un número ordinal equipotente a X. Ahora, como la clase $\mathscr{L}$ está bien ordenada, tiene sentido la siguiente definición:

Definición 3.1.2 Dado un conjunto X, su *número cardinal* $\aleph(X)$ es

$$\aleph(X) = \min\{a \in \mathscr{L} : a \text{ es equipotente a } X\}.$$

Las siguientes propiedades se siguen de forma directa de la definición:

1) $\aleph(X) \in \mathscr{K}$.

2) Para todo $a \in \mathscr{L}$, tenemos que $\aleph(a) \subset a$.
3) Dados dos conjuntos X e Y, tenemos que $\aleph(X) = \aleph(Y)$ si y solo si X e Y son equipotentes.

■ **Ejemplo 3.2** El número ordinal $\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ no es un número cardinal, pues es equipotente a $\aleph_0$. Así $\aleph(\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}) = \aleph_0$.

Definición 3.1.3 Los conjuntos X tales que $\aleph(X) \leq \aleph_0$ se llamarán *numerables* y el resto se dirá que son *no numerables*.

Proposición 3.1.1 Dados dos conjuntos X e Y, tenemos que $\aleph(X) \leq \aleph(Y)$ si y solo si existe una aplicación inyectiva de X en Y.

Demostración. Sean $\varphi_X : \aleph(X) \to X$, $\varphi_Y : \aleph(Y) \to Y$ biyecciones.

Supongamos primero que $\aleph(X) \leq \aleph(Y)$. La aplicación $\varphi_Y \circ i \circ \varphi_X^{-1} : X \to Y$ donde $i : \aleph(X) \to \aleph(Y)$ denota la inclusión es inyectiva, como queríamos.

Ahora supongamos que existe una aplicación inyectiva $f : X \to Y$. Tenemos que $X' = f(X)$ es un subconjunto de Y con $\aleph(X') = \aleph(X)$, así basta probar que que $\aleph(X') \leq \aleph(Y)$. Podemos dotar a Y de un buen orden de modo que sea isomorfo a $\aleph(Y)$ (trasladando el orden en $\aleph(Y)$ mediante la biyección φ_Y). Como un subconjunto de un ordinal es isomorfo a un ideal de éste, tenemos que

$$\aleph(X') \leq \operatorname{ord}(X') \leq \operatorname{ord}(Y) = \aleph(Y),$$

como queríamos. ■

Una de las consecuencias más importantes de la proposición 3.1.1 es la siguiente:

Teorema 3.1.2 (Bernstein-Schröder) Si existen sendas aplicaciones inyectivas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$, entonces X e Y son equipotentes.

El siguiente lema nos da otra forma de comparar dos cardinales.

Lema 3.1.3 Dados dos conjuntos X e Y, si existe una aplicación sobreyectiva $f : Y \to X$, entonces $\aleph(X) \leq \aleph(Y)$.

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ la familia de subconjuntos no vacíos de Y dada por

$$\mathscr{F} = \{F_x\}_{x \in X}, \quad F_x = f^{-1}(x).$$

Consideremos una aplicación de elección $c \in \prod_{x \in X} F_x$, esto es, una aplicación $c : X \to Y = \cup_{x \in X} F_x$ tal que $c(x) \in F_x$. Tenemos que c es inyectiva; en efecto, si $x \neq z$, entonces $F_x \cap F_z = \emptyset$ y por ende $c(x) \neq c(z)$. ■

■ **Observación 3.1** El recíproco del lema anterior también es cierto cuando X es no vacío, esto es, si X e Y son dos conjuntos tales que $\aleph(X) \leq \aleph(Y)$ y $X \neq \emptyset$, entonces existe una aplicación sobreyectiva $f : Y \to X$.

Resumimos todas las propiedades de los números cardinales.

Teorema 3.1.4 Sea $\mathscr{K} \subset \mathscr{L}$ la clase de todos los números cardinales.
1) $\mathscr{K}$ está bien ordenada.
2) Dado un número cardinal siempre existe uno más grande. En efecto, dado $\aleph = \aleph(X) \in \mathscr{K}$, tenemos que $\aleph(2^X)$ es más grande que $\aleph$.
3) $\mathscr{K}$ no es un conjunto.

Demostración. 1) Es una subclase de $\mathscr{L}$. 2) El principio diagonal de Cantor.

3) Supongamos que $\mathscr{K}$ es un conjunto y consideremos la unión

$$X = \cup_{\aleph \in \mathscr{K}} \aleph,$$

que también sería un conjunto y a su vez 2^X. Tendríamos que $\aleph(2^X) \subset X$, lo cual implica que $\aleph(2^X) \leq \aleph(X)$, y esto contradice el apartado (2). ■

3.2 Aritmética cardinal

Dados dos números cardinales $\aleph_1 = \aleph(X_1)$ y $\aleph_2 = \aleph(X_2)$, escribimos

$$\begin{aligned} \aleph_1 + \aleph_2 &= \aleph\Big((\{0\} \times X_1) \cup (\{1\} \times X_2)\Big) \\ \aleph_1 \cdot \aleph_2 &= \aleph(X_1 \times X_2) \\ \aleph_1^{\aleph_2} &= \aleph(X_1^{X_2}). \end{aligned}$$

En particular, estamos definiendo la suma, el producto y la exponenciación de dos números naturales. Podemos comprobar que con estas definiciones, estas operaciones funcionan de la manera habitual. La suma y producto de familias arbitrarias de números cardinales se define de manera similar.

Es un ejercicio para el lector comprobar que para todo número natural $n \in \mathbb{N}$, distinto de 0 y 1, tenemos que $n \cdot n \neq n$. Por ejemplo $2 \cdot 2 = 4$, pues

$$\{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}.$$

En cambio, con cardinales infinitos, la situación cambia completamente.

Proposición 3.2.1 $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Demostración. Esto lo podemos probar construyendo directamente una aplicación biyectiva de $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Una forma habitual de hacerlo es mediante la "función de emparejamiento de Cantor" dada por

$$f((n,m)) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m.$$

Esta coloca los números naturales como sigue:

$$(0,0),(0,1),(1,0),(0,2),(1,1),(2,0),(0,3),\ldots$$

Otra biyección posible se obtiene gracias a que cada número natural distinto de 0 se puede descomponer de forma única como potencia de dos multiplicado por un número impar. Así, la aplicación

$$f((n,m)) = 2^n(2m+1)-1$$

es biyectiva. ■

Nuestro siguiente objetivo es probar que esta proposición se generaliza a cualquier cardinal infinito. Para ello veremos primero el siguiente resultado.

Lema 3.2.2 Si $\aleph$ es un número cardinal con $\aleph \neq 1$ para el que se cumple $\aleph \cdot \aleph = \aleph$, entonces también se tiene que

$$\aleph = 2 \cdot \aleph = 3 \cdot \aleph.$$

Demostración. Si $\aleph = 0$ el resultado es cierto. Si no, tenemos que

$$\aleph = \aleph + 0 \leq \aleph + \aleph = 2 \cdot \aleph \leq 3 \cdot \aleph \leq \aleph \cdot \aleph = \aleph.$$

Para la última afirmación basta notar que $\aleph \geq 3$. ■

Teorema 3.2.3 Si $\aleph \geq \aleph_0$, entonces $\aleph \cdot \aleph = \aleph$.

Demostración. Basta probar que existen un conjunto M con $\aleph(M) = \aleph$ y una biyección $\psi : M \to M \times M$.

Para ello, tomamos un conjunto X con $\aleph(X) = \aleph$ y consideramos el conjunto

$$\mathscr{Z} = \{(Y, \varphi_Y) : Y \subset X \text{ y } \varphi_Y : Y \to Y \times Y \text{ es biyección}\}.$$

Paso 1: $\mathscr{Z} \neq \emptyset$. Como X es infinito, contiene dentro una copia de $\mathbb{N}$, es decir, existe un conjunto $Z \subset X$ con $\aleph(Z) = \aleph_0$. Por la proposición anterior, existe una biyección $\varphi_Z : Z \to Z \times Z$, así tenemos que $(Z, \varphi_Z) \in \mathscr{Z}$.

Paso 2: Ordenamos $\mathscr{Z}$ como sigue:

$$(Z, \varphi_Z) \leq (Z', \varphi_{Z'}) \Leftrightarrow (Z \subset Z') \wedge (\varphi_{Z'}(z) = \varphi_Z(z), \ \forall z \in Z)$$

Paso 3: Toda cadena en $\mathscr{Z}$ tiene cota superior. Sea

$$\mathscr{C} = \{(Z_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}, \quad (Z_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathscr{Z}, \forall \alpha \in \Lambda.$$

Consideramos $Z = \cup_{\alpha \in \Lambda} Z_\alpha$. Veamos que $\varphi_Z : Z \to Z \times Z$ definida por

$$\varphi_Z(z) = \varphi_\alpha(z), \quad \text{si } z \in Z_\alpha$$

es biyectiva y por tanto $(Z, \varphi) \in \mathscr{Z}$. La primera observación es que φ_Z está bien definida, es decir, si $z \in Z_\alpha \cap Z_\beta$, entonces $\varphi_\alpha(z) = \varphi_\beta(z)$. Podemos suponer que $(Z_\alpha, \varphi_\alpha) \leq (Z_\beta, \varphi_\beta)$ (pues estamos trabajando con una cadena). Por cómo está definido el orden, tenemos que $\varphi_\alpha(z) = \varphi_\beta(z)$, como queríamos. Veamos que es inyectiva. Dados z y z' con $\varphi(z) = \varphi(z')$, existe un $\alpha \in \Lambda$ tal que

$$\varphi_\alpha(z) = \varphi(z) = \varphi(z') = \varphi_\alpha(z') \in Z_\alpha \times Z_\alpha$$

y por la inyectividad de φ_α, tenemos que $z = z'$. Finalmente, para probar la sobreyectividad, dado $(z, z') \in Z \times Z$, existen $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $z \in Z_\alpha$, $z' \in Z_\beta$. Ahora, como estamos trabajando con una cadena, podemos suponer además que $(Z_\alpha, \varphi_\alpha) \leq (Z_\beta, \varphi_\beta)$, por tanto, $z, z' \in Z_\beta$ y por la sobreyectividad de φ_β, existe $x \in Z$ tal que $\varphi(x) = \varphi_\beta(x) = (z, z')$.

Paso 4: Podemos aplicar el lema de Zorn para concluir que $\mathscr{Z}$ tiene un maximal (M, ψ) con $\psi : M \to M \times M$ biyección. Si probamos que $\aleph(M) = \aleph$, hemos terminado, pues tendríamos que $\aleph(M) \cdot \aleph(M) = \aleph(M)$. Dado que $M \subset X$, sabemos que $\aleph(M) \leq \aleph(X) = \aleph$. Supongamos que se da la desigualdad estricta y busquemos una contradicción con la maximalidad de (M, ψ).

Paso 5: Si $\aleph(M) < \aleph(X)$, entonces $\aleph(M) < \aleph(X \setminus M)$. En efecto, supongamos que se tiene $\aleph(M) \geq \aleph(X \setminus M)$. Como $X = M \cup (X \setminus M)$ es una unión disjunta y $\aleph(M)$ está en las condiciones del lema, tenemos que:

$$\aleph(X) = \aleph(M) + \aleph(X \setminus M) \leq \aleph(M) + \aleph(M) = 2 \cdot \aleph(M) = \aleph(M),$$

lo cual no es posible.

Paso 6: Si $\aleph(M) < \aleph(X \setminus M)$, existe $(N, \phi) \in \mathscr{Z}$ con $(M, \psi) \leq (N, \phi)$. Como suponemos que $\aleph(M) < \aleph(X \setminus M)$, existe $Y \subset X \setminus M$ con $\aleph(Y) = \aleph(M)$. Veamos que podemos extender ψ a una biyección

$$\phi : (M \cup Y) \to (M \cup Y) \times (M \cup Y)$$

Escribamos $(M \cup Y) \times (M \cup Y) = (M \times M) \cup (M \times Y) \cup (Y \times M) \cup (Y \times Y)$. Dado que $M \cap Y = \emptyset$, estos cuatro conjuntos son disjuntos. Debemos declarar $\phi(m) = \varphi(m) \in M \times M$, para todo $m \in M$. Así, resta encontrar una biyección

$$Y \to B = (M \times Y) \cup (Y \times M) \cup (Y \times Y)$$

Pero ahora, de nuevo, como $\aleph(M)\cdot\aleph(M)=\aleph(M)$, invocando el lema

$$\aleph(B)=\aleph(M\times Y)+\aleph(Y\times M)+\aleph(Y\times Y)=\aleph(M)\cdot\aleph(Y)+\aleph(Y)\cdot\aleph(M)+\aleph(Y)\cdot\aleph(Y)=$$

$$=\aleph(M)+\aleph(M)+\aleph(M)=3\cdot\aleph(M)=\aleph(M)=\aleph(Y),$$

por tanto la biyección buscada existe. ■

Algunas consecuencias muy notables de este teorema quedan resumidas en los siguientes corolarios.

Corolario 3.2.4 Sean $\aleph$ y $\aleph'$ dos números cardinales distintos de cero y con por lo menos uno de ellos infinito. Entonces:

1) $\aleph+\aleph'=\aleph\cdot\aleph'=\text{máx}\{\aleph,\aleph'\}$.
2) Si $\aleph<\aleph'$, entonces $\aleph'-\aleph=\aleph'$. De manera más precisa, si $\aleph'=\aleph(X)$ y $A\subset X$ con $\aleph(A)=\aleph$, entonces $\aleph(X\setminus A)=\aleph'$.
3) Si $2\leq\aleph\leq\aleph'$, entonces $\aleph^{\aleph'}=2^{\aleph'}$.

Demostración. Probamos cada una de las afirmaciones.

1) Supongamos que $1\leq\aleph\leq\aleph'$ y $\aleph_0\leq\aleph'$. Tenemos que:

$$\aleph'=1\cdot\aleph'\leq\aleph\cdot\aleph'\leq\aleph'\cdot\aleph'=\aleph'$$

$$\aleph'\leq\aleph'+\aleph\leq\aleph'+\aleph'=2\cdot\aleph'=\aleph'.$$

2) Consideramos la unión disjunta $X=A\cup(X\setminus A)$. Por el apartado anterior

$$\aleph'=\aleph(X)=\aleph(A)+\aleph(X\setminus A)=\text{máx}\{\aleph(A),\aleph(X\setminus A)\}.$$

Como $\aleph(A)<\aleph'$, necesariamente $\aleph(X\setminus A)=\aleph'$.

3) Recordemos que $\aleph\leq 2^{\aleph}$ (de hecho, con desigualdad estricta). Tenemos que

$$2^{\aleph'}\leq\aleph^{\aleph'}\leq(2^{\aleph})^{\aleph'}=2^{\aleph\cdot\aleph'}=2^{\aleph'},$$

como queríamos. Para la primera igualdad en la fórmula anterior hemos usado que para la exponenciación de números cardinales se cumple que ${\aleph_1}^{\aleph_2\cdot\aleph_3}=({\aleph_1}^{\aleph_2})^{\aleph_3}$; dejamos la prueba de esta propiedad de la exponenciación al cuidado del lector. ■

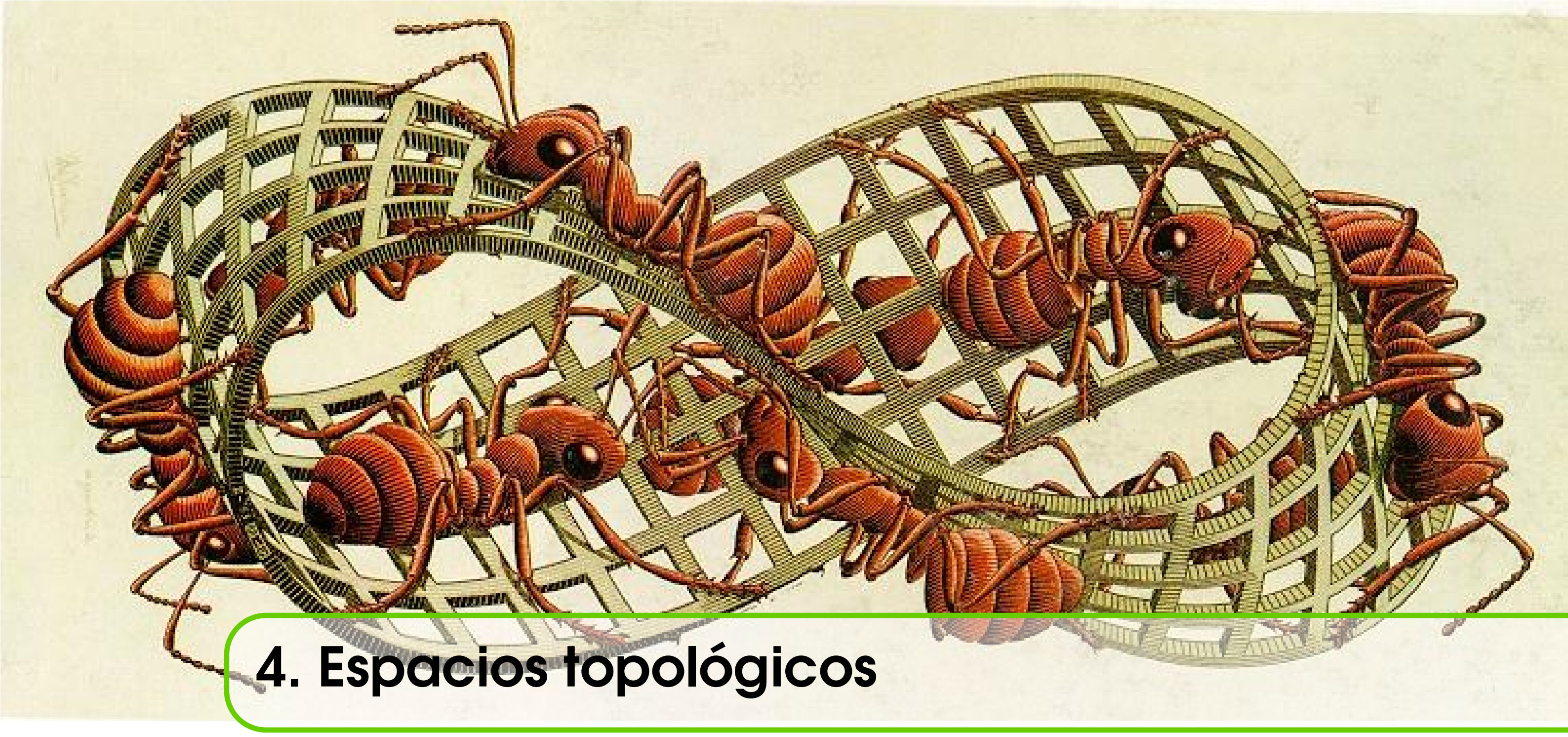
Corolario 3.2.5 Dado $\aleph\geq\aleph_0$, tenemos que $\aleph^n=\aleph$, para todo $n\in\mathbb{N}$ no cero.

Demostración. Veamos que el conjunto $\mathscr{X}=\{n\in\mathbb{N}:\aleph^n=\aleph\}\cup\{0\}$ es inductivo. Sabemos que $0,1\in\mathscr{X}$. Ahora, observando que

$$\aleph^{n+1}=\aleph^n\cdot\aleph$$

concluimos la prueba, pues si $n\in\mathscr{X}$ con $n\geq 1$, entonces $\aleph^{n+1}=\aleph^n\cdot\aleph=\aleph\cdot\aleph=\aleph$, como hemos probado anteriormente. ■

II Topología conjuntista



4. Espacios topológicos

En este primer capítulo introducimos los conceptos básicos relativos a los espacios topológicos.

4.1 Definición y ejemplos

Definición 4.1.1 Sea X un conjunto. Una *topología* τ *sobre* X es una familia de subconjuntos de X (es decir $\tau \subset \mathscr{P}(X)$) que cumple las siguientes propiedades:

A.1) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.

A.2) La familia τ es cerrada para la unión de conjuntos. Es decir, si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de elementos de τ, entonces $\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \tau$.

A.3) La intersección de dos elementos de τ es un elemento de τ.

Un *espacio topológico es un par* (X,τ), donde τ es una topología sobre X. Los elementos de τ se llaman *abiertos del espacio topológico*.

■ **Observación 4.1** Como consecuencia de A.3), la intersección finita de abiertos de una topología es un abierto de la topología (inducción).

A lo largo del curso presentaremos ejemplos de topologías interesantes, así como métodos para definir topologías con sus correspondientes ejemplos.

■ **Ejemplo 4.1** Algunos ejemplos básicos que presentamos de inicio son los siguientes:

a) Topología *grosera* o *indiscreta* $\tau = \{\emptyset, X\}$.

b) Topología *discreta* $\tau = \mathscr{P}(X)$.

c) Si $X = \{a,b\}$, la topología de *Sierpinski* es $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$.

d) Topología *cofinita*

$$\tau = \{A \subset X : X \setminus A \text{ es finito}\}.$$

Nótese que si X es finito, entonces la topología cofinita es la discreta.

e) Topología *conumerable*

$$\tau = \{A \subset X : X \setminus A \text{ es numerable}\}.$$

Si X es numerable, entonces la topología conumerable es la discreta.

Definición 4.1.2 — Comparación de topologías. Sea X un conjunto y τ_1, τ_2 dos topologías sobre X. Decimos que τ_1 es *más fina* que τ_2 si $\tau_2 \subset \tau_1$. También decimos que τ_2 es *menos fina* que τ_1.

■ **Ejemplo 4.2** Tenemos que:

a) Cualquier topología es más fina que la grosera y menos fina que la discreta
b) Sobre un conjunto infinito, la topología conumerable es estrictamente más fina que la topología cofinita.

La intersección de topologías es una topología. De esta manera, las topologías sobre X forman un "subretículo" de $\mathscr{P}(X)$. Concretamente, si tenemos una familia $\mathscr{A} = \{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de topologías sobre X, existe una topología τ_- que es la más fina de todas las que son menos finas que las de la familia $\mathscr{A}$ y que está dada por la intersección de los elementos de $\mathscr{A}$. Por otro lado existe una topología τ^+ que es la menos fina de todas las que son más finas que los elementos de $\mathscr{A}$, dada por la intersección de todas aquellas topologías más finas que los elementos de $\mathscr{A}$.

4.2 Bases para una topología

Definición 4.2.1 Dado un espacio topológico (X,τ), diremos que una familia de abiertos $\mathscr{B} \subset \tau$ es una *base de abiertos para* (X,τ) si todo abierto de (X,τ) es unión de elementos de $\mathscr{B}$.

Nótese que si $\mathscr{B}$ es base para una topología τ, entonces la topología queda totalmente determinada por la base y la recuperamos exactamente como

$$\tau = \{U \subset X : U \text{ es unión de elementos de } \mathscr{B}\}.$$

■ **Ejemplo 4.3** Nótese que cualquier topología es una base de sí misma. En el caso de la topología discreta sobre un conjunto X, una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ de subconjuntos de X es base para la topología discreta si y solamente si $\{x\} \in \mathscr{F}$ para todo $x \in X$; es decir, en este caso, existe la "base más pequeña" y es $\{\{x\} : x \in X\}$. En el caso general no existe tal base.

■ **Ejercicio 4.1** Dado $k \in \mathbb{N}$, la familia $\mathscr{B}_k$ de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ cuyo complementario es finito y tiene más de k elementos es una base para $\mathbb{N}$ con la topología cofinita. Nótese que la intersección de todas estas bases $\mathscr{B}_k$ es vacía; en este caso, no existe la "base más pequeña".

Definición 4.2.2 Sea X un conjunto. Dada una familia $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ de subconjuntos de X, diremos que $\mathscr{B}$ es una *pro-base de abiertos para* X si se cumplen las propiedades siguientes:

1. El conjunto X es unión de todos los elementos de $\mathscr{B}$. Equivalentemente, dado cualquier $x \in X$, existe $U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U$.
2. La intersección $B_1 \cap B_2$ de dos elementos $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, es unión de elementos de $\mathscr{B}$. Equivalentemente, para todo $x \in B_1 \cap B_2$ existe $U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U \subset B_1 \cap B_2$.

■ **Observación 4.2** La equivalencia en la segunda propiedad de pro-base se corresponde con la siguiente observación:

> *Sea X un conjunto y $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$. Un subconjunto $B \subset X$ es unión de elementos de $\mathscr{F}$ si y solo si para todo $x \in B$ existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $x \in A \subset B$.*

En efecto, supongamos que existe una colección $\{F_i\}_{i\in I}$ de elementos en $\mathscr{F}$ tal que $B = \cup_{i\in I} F_i$. Dado $x \in B$, sabemos que $x \in F_{i_0}$, para algún $i_0 \in I$. Tomando $A = F_{i_0}$, tenemos $x \in A \subset B$. Recíprocamente, supongamos que para todo $x \in B$ existe $A_x \in \mathscr{F}$ tal que $x \in A_x \subset B$. Escribimos

$$B = \cup_{x\in B}\{x\} \subset \cup_{x\in B} A_x \subset B$$

Por tanto $B = \cup_{x\in B} A_x$, como queríamos probar.

Proposición 4.2.1 Dado un conjunto X y una familia $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ de subconjuntos de X, las siguientes propiedades son equivalentes:

1. La familia $\mathscr{B}$ es una pro-base de abiertos para X.
2. Existe una (única) topología τ sobre X tal que $\mathscr{B}$ es una base de abiertos para (X,τ).

Demostración. Supongamos primero que $\mathscr{B}$ es una pro-base de abiertos para el conjunto X. Si existe una topología τ sobre X para la cual $\mathscr{B}$ es una base de abiertos, esta debe ser

$$\tau = \{U \subset X : U \text{ es unión de elementos de } \mathscr{B}\}.$$

Veamos que τ es una topología. Tenemos que $\emptyset \in \tau$, pues es la unión de una familia vacía (lo tomamos por convención). Por otro lado, también se tiene que $X \in \tau$, ya que la unión de los elementos de $\mathscr{B}$ es igual a todo el conjunto X. Por definición, la unión de elementos de τ es un elemento de τ. Falta comprobar que la intersección $A \cap B$ de dos elementos $A, B \in \tau$ es también un elemento de τ. Escribamos

$$A = \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha, \quad B = \cup_{\beta\in\Theta} B_\beta,$$

donde $A_\alpha, B_\beta \in \mathscr{B}$. Tenemos que

$$A \cap B = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Theta} (A_\alpha \cap B_\beta).$$

Como, por definición de pro-base de abiertos, sabemos que $A_\alpha \cap B_\beta$ es unión de elementos de $\mathscr{B}$, concluimos que $A \cap B$ es unión de elementos de $\mathscr{B}$ y por tanto $A \cap B \in \tau$.

Supongamos ahora que existe una topología τ sobre X tal que $\mathscr{B}$ es una base de abiertos para (X,τ). Queremos probar que $\mathscr{B}$ es una pro-base de abiertos para X. Como $X \in \tau$, tenemos que X es unión de elementos de $\mathscr{B}$. Por otro lado ya que $\mathscr{B} \subset \tau$, dados dos elementos $A, B \in \mathscr{B}$, tenemos que $A \cap B \in \tau$ y por tanto $A \cap B$ es unión de elementos de $\mathscr{B}$. ■

■ **Ejemplo 4.4** Consideramos $\mathbb{R}$ con su orden usual. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, escribimos (a,b) para denotar el intervalo

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

La colección $\mathscr{B}_u = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una pro-base en $\mathbb{R}$, cuya topología asociada es la *topología usual en* $\mathbb{R}$, que como veremos se obtiene también a partir de una estructura métrica.

De manera más general, dado un conjunto totalmente ordenado X con más de dos elementos, la colección de todos los intervalos de la forma

- $(a,b) = \{x \in X : a < x < b\}$, con $a, b \in X$ y $a < b$.
- $[a_0, b) = \{x \in X : a_0 \leq x < b\}$, con $b \in X$ y $a_0 = \min X$ (solo los consideramos cuando a_0 existe).
- $(a, b_0] = \{x \in X : a < x \leq b\}$, con $a \in X$ y $b_0 = \max X$ (solo los consideramos cuando b_0 existe).

es una pro-base en X (la comprobación de esto se deja para el lector). Por tanto, es base para una topología sobre X, que llamamos *topología del orden*.

Sea X un conjunto y $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Llamamos *topología generada por* $\mathscr{F}$ a la topología $\tau_{\mathscr{F}}$ sobre X obtenida como intersección de todas las topologías sobre X que contienen $\mathscr{F}$. Es decir

$$\tau_{\mathscr{F}} = \bigcap_{\mathscr{F}\subset\tau} \tau.$$

Dicho de otro modo, la topología $\tau_{\mathscr{F}}$ es la topología menos fina de entre aquellas que contienen $\mathscr{F}$.

Nótese que si τ es una topología y $\mathscr{B} \subset \tau$ una base de τ, entonces τ es precisamente la topología generada por $\mathscr{B}$. En efecto, como $\tau \supset \mathscr{B}$, es claro que $\tau \supset \tau_{\mathscr{B}}$. Por otro lado, si τ' es una topología cualquiera conteniendo $\mathscr{B}$, también τ' contiene a las uniones de elementos de $\mathscr{B}$, es decir tenemos que $\tau' \supset \tau$. Por tanto $\tau_{\mathscr{B}} \supset \tau$.

Proposición 4.2.2 Sea $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ y denotemos por $\mathscr{B}_{\mathscr{F}}$ la familia de intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{F}$ (convenimos que $X \in \mathscr{B}_{\mathscr{F}}$). Se tiene que $\mathscr{B}_{\mathscr{F}}$ es una base para la topología generada por $\mathscr{F}$.

Demostración. Es claro que la familia $\mathscr{B}_{\mathscr{F}}$ es una pro-base. De hecho $X \in \mathscr{B}_{\mathscr{F}}$ con lo que la familia recubre X y por otro lado la intersección de dos de sus elementos es de nuevo un elemento de la familia. Así, existe una topología τ para la que $\mathscr{B}_{\mathscr{F}}$ es base, que sabemos que es, de hecho, la topología $\tau_{\mathscr{B}_{\mathscr{F}}}$. Veamos por tanto que $\tau_{\mathscr{B}_{\mathscr{F}}} = \tau_{\mathscr{F}}$.

Como $\mathscr{F} \subset \mathscr{B}_{\mathscr{F}}$, cualquier topología τ' que contiene $\mathscr{B}_{\mathscr{F}}$, también contiene $\mathscr{F}$. Por otro lado, si τ' es una topología que contiene $\mathscr{F}$, también debe contener a las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{F}$, es decir, a $\mathscr{B}_{\mathscr{F}}$. Como consecuencia $\tau_{\mathscr{F}} = \tau_{\mathscr{B}_{\mathscr{F}}}$. ■

■ **Observación 4.3** Como resultado de la discusión anterior, vemos que $\tau_{\mathscr{F}}$ no es ni más ni menos que la topología cuyos abiertos son uniones de intersecciones finitas de $\mathscr{F}$.

4.3 El ejemplo de los espacios métricos

Damos una presentación de los espacios métricos y su topología asociada. A lo largo del curso iremos viendo diferentes propiedades de la topología de estos espacios, frecuentemente utilizadas en el análisis matemático.

Una *distancia o métrica* d en un conjunto X es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que, para todos $x, y, z \in X$, se satisfacen las siguientes propiedades:

a) $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.
b) $d(x,y) = d(y,x)$.
c) $d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,z)$ (*Propiedad triangular*).

Un *espacio métrico* es un par (X,d), con X un conjunto y d una métrica en él.

Dado un espacio métrico (X,d), para cada $x \in X$ y cada $r \in \mathbb{R}_{>0}$, la *bola de centro x y radio r* es el conjunto

$$B(x;r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Estos conjuntos se llaman también bolas abiertas, en coherencia con la topología que construiremos.

Proposición 4.3.1 El conjunto de las bolas en un espacio métrico (X,d) es una pro-base en X.

Demostración. Veamos que $\mathscr{B} = \{B(x;r) : x \in X, r \in \mathbb{R}_{>0}\}$ es una pro-base. Para todo $x \in X$, tenemos que $x \in B(x;1)$, así que $\mathscr{B}$ recubre X. Consideremos ahora dos bolas $B(y_1;r_1), B(y_2;r_2)$ y veamos que dado un punto $x \in B(y_1;r_1) \cap B(y_2;r_2)$, existe una tercera bola conteniendo a x y contenida en la intersección anterior. En primer lugar, notemos que si $r_1' = r_1 - d(x,y_1)$ y $r_2' = r_2 - d(x,y_2)$, se tiene que:

$$x \in B(x;r_1') \subset B(y_1;r_1), \quad x \in B(x;r_2') \subset B(y_2;r_2)$$

(compruébese aplicando la propiedad triangular). De esta manera, tenemos que

$$x \in B(x;r') = B(x;r_1') \cap B(x;r_2') \subset B(y_1;r_1) \cap B(y_2;r_2),$$

donde $r' = \text{mín}\{r_1', r_2'\}$, y hemos terminado. ■

Definición 4.3.1 Dado un espacio métrico (X,d), se llama *topología asociada a la métrica* a la topología generada por la familia de bolas

$$\mathscr{B} = \{B(x;r) : x \in X, r \in \mathbb{R}_{>0}\},$$

(para la cual $\mathscr{B}$ es una base). Un *espacio topológico metrizable* es un espacio topológico para el que existe una métrica que induce su topología.

■ **Ejemplo 4.5** La *topología usual de* $\mathbb{R}^n$ es la asociada a la *distancia euclídea*, que está dada por

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Nótese que en el caso de $\mathbb{R}$, las bolas son los intervalos de la forma $(x-r,x+r)$. Por tanto, en este caso, la topología inducida por la métrica es la topología del orden.

■ **Ejemplo 4.6** En cualquier espacio vectorial normado $(X,||\cdot||)$, podemos considerar la distancia $d(x,y) = ||x-y||$. Por tanto, todo espacio vectorial normado induce un espacio métrico, y por ende un espacio topológico.

■ **Ejemplo 4.7** En todo conjunto X se tiene la distancia discreta, definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

En (X,d) las bolas son $B_d(x,r) = \{x\}$, para todo $0 < r \leq 1$ y $B_d(x,r) = X$ para todo $r > 1$. Así pues, los conjuntos unipuntuales son abiertos y por tanto la topología asociada a esta distancia es la topología discreta.

■ **Ejemplo 4.8** La topología asociada a un espacio métrico finito es siempre la topología discreta, pues los conjuntos unipuntuales son bolas. En particular, no todos los espacios topológicos son metrizables.

La topología de un espacio metrizable no determina la métrica. Sin embargo, muchas propiedades aparentemente métricas, fundamentalmente las relacionadas con la convergencia, son en realidad únicamente de carácter topológico, como desarrollaremos a lo largo del curso.

Definición 4.3.2 Dos espacios métricos sobre un conjunto X son *equivalentes* si definen la misma topología sobre X.

Proposición 4.3.2 Dos espacios métricos (X,d) y (X,d') son equivalentes si y solo si para todo $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que:
a) Existe un $\delta > 0$ tal que $B_d(x;\delta) \subset B_{d'}(x;\varepsilon)$.
b) Existe un $\delta' > 0$ tal que $B_{d'}(x;\delta') \subset B_d(x;\varepsilon)$.

Demostración. Veamos que se cumple a) si y solamente si $\tau_{d'} \subset \tau_d$. Análogamente, b) se cumple si y solamente si $\tau_d \subset \tau_{d'}$. Juntando ambas propiedades, concluimos la prueba de la proposición.

Supongamos que $\tau_{d'} \subset \tau_d$. Tomemos $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. La bola $B_{d'}(x;\varepsilon)$ es un abierto en $\tau_{d'}$ y por ende en τ_d. Existen $y \in X$ y $r > 0$ tales que $B_d(y;r) \subset B_{d'}(x;\varepsilon)$. Ahora, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_d(x;\delta) \subset B_d(y;r) \subset B_{d'}(x;\varepsilon)$$

y hemos terminado (basta considerar $\delta = r - d(x,y)$).

Supongamos que a) se cumple y tomemos $A \in \tau_{d'}$. Como las bolas forman una base de $\tau_{d'}$, para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{d'}(x;\varepsilon) \subset A$. Gracias a la propiedad a), existe $\delta > 0$ tal que

$$B_d(x;\delta) \subset B_{d'}(x;\varepsilon) \subset A.$$

Tenemos que A es unión de bolas para la distancia d, y por ello $A \in \tau_d$. ■

Corolario 4.3.3 Si existen constantes $m, M > 0$ tales que

$$md(x,y) \leq d'(x,y) \leq Md(x,y), \; \forall x,y \in X,$$

las métricas d y d' son equivalentes y aplicamos la proposición anterior.

Demostración. Dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon / M$ y $\delta' = \varepsilon m$. ■

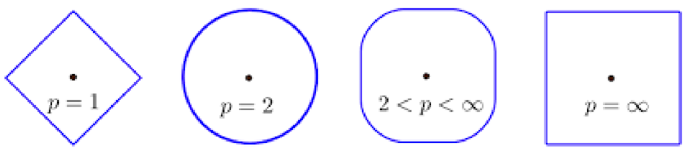
■ **Ejemplo 4.9** En $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, podemos considerar las siguientes normas, donde hemos escrito $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

a) *Norma del taxista o de Manhattan:* $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
b) *Norma euclídea o usual:* $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
c) *Norma p:* $||x||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$, con $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
d) *Norma del supremo*: $||x||_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Todas las distancias asociadas inducen la misma topología en $\mathbb{R}^n$; basta comprobar que

$$d_\infty(x,y) \leq d_p(x,y) \leq n^{1/p} d_\infty(x,y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Pese a ello, las bolas para cada una de ellas son distintas, como se aprecia en la siguiente imagen.



The unit sphere for different metrics: $\|x\|_{l_p} = 1$ in $\mathbb{R}^2$.

La topología asociada a estas métricas equivalentes es la *topología usual* de $\mathbb{R}^n$.

4.4 Cerrados

Los *cerrados* de un espacio topológico (X, τ) son los complementarios de los abiertos. El conocimiento de la familia de cerrados es equivalente, vía los complementarios, al conocimiento de la topología.

Dado un conjunto X y una familia $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ de subconjuntos de X, tenemos que $\mathscr{C}$ es la familia de cerrados de una topología sobre X si y solo si

$$\tau = \{U : X \setminus U \in \mathscr{C}\}$$

es una topología, que será la única para la cual $\mathscr{C}$ es la familia cerrados.

Una aplicación directa de las leyes de DeMorgan nos lleva a ver que $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ es la colección de cerrados para una topología si cumplen las siguientes propiedades:

C.1) $X, \emptyset \in \mathscr{C}$.
C.2) La intersección de elementos de $\mathscr{C}$ pertenece a $\mathscr{C}$. Es decir, si $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de elementos de $\mathscr{C}$, entonces $\cap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha \in \mathscr{C}$.
C.3) La unión de dos elementos de $\mathscr{C}$ pertenece a $\mathscr{C}$.

■ **Observación 4.4** Pueden existir conjuntos abiertos y cerrados simultáneamente, como el vacío y el total. También puede haber conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

■ **Ejemplo 4.10** Sea X un conjunto. La familia de cerrados para la topología grosera (o indiscreta) es $\mathscr{C} = \{\emptyset, X\}$. En el caso de la topología discreta la familia de cerrados es igual a la familia de abiertos y coincide con $\mathscr{P}(X)$. En el caso de la topología cofinita los cerrados son el total y los conjuntos finitos.

■ **Ejemplo 4.11** En un espacio métrico (X,d), la *bola cerrada* de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ dada por $\overline{B}_d(x;r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ es un cerrado para la topología asociada a la métrica. Basta comprobar que dado $y \in U = X \setminus \bar{B}_{d'}(x;\varepsilon)$, existe $\delta > 0$ tal que $B_d(y;\delta) \subset U$. Como $d(x,y) > \varepsilon$, tenemos que $\delta = d(x,y) - \varepsilon > 0$. Ahora, mediante la propiedad triangular, vemos que si $z \in X$ cumple $d(y,z) < \delta$, entonces también cumple $d(x,z) > \varepsilon$.

Definición 4.4.1 Dado un espacio topológico (X,τ) y una familia de cerrados $\mathscr{K}$, diremos que $\mathscr{K}$ es una *base de cerrados* para X si todo cerrado es una intersección arbitraria de elementos de $\mathscr{K}$. Equivalentemente si la familia de los complementarios $\mathscr{B} = \{X \setminus K : K \in \mathscr{K}\}$ es una base de abiertos para τ.

Definición 4.4.2 Sea X un conjunto. Dada una familia $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(X)$ de subconjuntos de X, diremos que $\mathscr{K}$ es una *pro-base de cerrados para* X si se cumplen las propiedades siguientes:

1. El conjunto vacío es intersección de los elementos de $\mathscr{K}$.
2. Dados dos elementos $K_1, K_2 \in \mathscr{K}$, la unión $K_1 \cup K_2$ es intersección de elementos de $\mathscr{K}$.

Equivalentemente si la familia de los complementarios $\mathscr{B} = \{X \setminus K : K \in \mathscr{K}\}$ es una pro-base (de abiertos).

■ **Ejemplo 4.12 — La topología de Zariski.** Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Dado un polinomio

$$P \in \mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

en n variables con coeficientes en $\mathbb{K}$, definimos el conjunto $V(P)$ de ceros de P por

$$V(P) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n : P(\mathbf{a}) = 0\} \subset \mathbb{K}^n.$$

Los conjuntos $V(P)$, cuando P varía sobre el anillo de polinomios, forman una pro-base de cerrados de para $\mathbb{K}$. La topología que definen se llama *topología de Zariski de* $\mathbb{K}^n$. Para ver que efectivamente se tiene una pro-base de cerrados, obsérvese que $V(P) \cup V(Q) = V(PQ)$.

4.5 Interior, adherencia y frontera de un conjunto

Definición 4.5.1 Sea (X,τ) un espacio topológico y consideremos un subconjunto $E \subset X$. El *interior* Int$E$ *de* E es la unión de todos los abiertos contenidos en E. La *adherencia* $\overline{E}$ *de* E es la intersección de todos los cerrados que contienen E. Los puntos de Int$E$ se llaman *puntos interiores de* E y los puntos de $\overline{E}$ se llaman *puntos adherentes a* E.

Nótese que Int$E$ es el abierto "más grande" contenido en E y que $\overline{E}$ es el cerrado "más pequeño" que contiene E. La relación básica entre adherencia, interior y complementario es la siguiente:

$$X \setminus \mathrm{Int}E = \overline{X \setminus E}.$$

En efecto, como $X \setminus \mathrm{Int}E$ es un cerrado que contiene $X \setminus E$, por definición de adherencia, tenemos que $X \setminus \mathrm{Int}E \supset \overline{X \setminus E}$. Por otro lado, tomando complementarios, sabemos que $X \setminus \mathrm{Int}E \subset \overline{X \setminus E}$ si y solamente si se tiene que $\mathrm{Int}E \supset X \setminus \overline{X \setminus E}$. Pero esto último se sigue de que $X \setminus \overline{X \setminus E}$ es un abierto contenido en E.

Definición 4.5.2 Sea (X, τ) un espacio topológico y $E \subset X$. La *frontera* FrE de E está dada por $\mathrm{Fr}E = \bar{E} \cap \overline{X \setminus E}$.

La relación básica entre adherencia, interior y complementario nos lleva a que

$$\mathrm{Fr}E = \overline{E} \setminus \mathrm{Int}E.$$

En efecto, tenemos que $X \setminus \overline{X \setminus E} = \mathrm{Int}(X \setminus (X \setminus E))$ y por tanto $\overline{X \setminus E} = X \setminus \mathrm{Int}(E)$. Así, llegamos a $\mathrm{Fr}E = \bar{E} \cap \overline{X \setminus E} = \bar{E} \cap (X \setminus \mathrm{Int}(E)) = \bar{E} \setminus \mathrm{Int}E$, como queríamos.

■ **Ejemplo 4.13** Presentamos algunos ejemplos de interior, adherencia y frontera para espacios topológicos conocidos.

a) En cualquier espacio topológico (X, τ), tenemos $\mathrm{Int}\emptyset = \emptyset = \bar{\emptyset}$, $\mathrm{Int}X = X = \bar{X}$ y $\mathrm{Fr}\emptyset = \mathrm{Fr}X = \emptyset$.

b) En X con la topología grosera (o indiscreta), para cualquier $E \neq X$ tenemos que $\mathrm{Int}E = \emptyset$ y para cualquier $E \neq \emptyset$, tenemos que $\bar{E} = X$. Para cualquier E distinto del vacío y de X, tenemos que $\mathrm{Fr}E = X$.

c) En X dotado de la topología discreta, para cualquier $E \subset X$ tenemos que $\mathrm{Int}E = E = \bar{E}$ y $\mathrm{Fr}E = \emptyset$.

d) En $\mathbb{R}$ con la topología usual, la adherencia de $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{R}$, el interior de $\mathbb{Q}$ es el vacío y por tanto $\mathrm{Fr}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

4.6 Entornos y sistemas fundamentales de entornos.

Definición 4.6.1 Sea (X, τ) un espacio topológico. Llamamos *entorno de un punto* $x \in X$ a todo subconjunto $A \subset X$ tal que $x \in \mathrm{Int}A$ (es decir, tal que x es un punto interior de A). Escribiremos $\mathscr{E}_x$ para denotar la familia de entornos de x, también llamada *sistema de entornos de* x.

Las siguientes propiedades se siguen directamente de la definición:

- $A \in \mathscr{E}_x$ si y solo si existe un abierto U de (X, τ) tal que $x \in U$ y $U \subset A$.
- Si $A \in \mathscr{E}_x$, entonces $x \in A$.
- Si $A \in \mathscr{E}_x$ y $A \subset B$, entonces $B \in \mathscr{E}_x$.
- La intersección finita de entornos de x es un entorno de x.

■ **Ejemplo 4.14** Para la topología grosera de un conjunto X, tenemos que $\mathscr{E}_x = \{X\}$, para todo $x \in X$. Para la topología discreta, el sistema de entornos de $x \in X$ está dado por $\mathscr{E}_x = \{A \subset X : x \in A\}$.

■ **Ejemplo 4.15** En un espacio métrico (X, d) se tiene que $A \in \mathscr{E}_x$ si y solamente si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Por ejemplo, para la topología usual en $\mathbb{R}$, el intervalo semi-abierto $[a, b)$ es entorno de todo $x \in (a, b)$, pero no de a.

La siguiente caracterización de los abiertos en términos de entornos es muy útil y recurriremos a ella con frecuencia.

Proposición 4.6.1 Un subconjunto E de X es abierto para (X, τ) si y solo si es entorno de cada uno de sus puntos.

Demostración. Si $E \in \tau$, por definición de entorno, tenemos que $E \in \mathscr{E}_x$ para cada $x \in E$. Recíprocamente, supongamos que E es entorno de cada uno de sus puntos. Esto quiere decir que para cada $x \in E$ existe un abierto U_x tal que $x \in U_x \subset E$. Así tenemos que

$$E = \bigcup_{x \in E} \{x\} \subset \bigcup_{x \in E} U_x \subset E.$$

Por tanto $E = \bigcup_{x \in E} U_x$ es unión de abiertos y por ende un abierto para (X, τ). ■

4.6.1 Bases de entornos

Definición 4.6.2 Sea (X,τ) un espacio topológico. Dado un punto $x \in X$, llamamos *sistema fundamental de entornos (o base de entornos) de* x *en* (X,τ) a toda subfamilia $\mathscr{V}_x \subset \mathscr{E}_x$ de modo que para cada $A \in \mathscr{E}_x$ exista $B \in \mathscr{V}_x$ con $B \subset A$.

La propia familia $\mathscr{E}_x$ es una base de entornos de x.

■ **Ejemplo 4.16** En $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, un ejemplo de base de entornos de un punto x es la familia de bolas con radio racional dada por

$$\mathscr{V}_x = \{B(x;r) : r > 0, r \in \mathbb{Q}\},$$

independientemente de la distancia, equivalente a la euclídea, que hayamos considerado. También obtenemos una base de entornos con la familia de bolas cerradas $\overline{B}(x;r)$.

■ **Ejemplo 4.17** Si $\mathscr{B}$ es base de una topología τ, dado $x \in X$ el conjunto $\mathscr{V}_x = \{U \in \mathscr{B} : x \in U\}$ es una base de entornos de x.

■ **Observación 4.5** Dada una base de entornos $\mathscr{V}_x$ de x en (X,τ), un subconjunto $A \subset X$ es un entorno de x si y solamente si existe $B \in \mathscr{V}_x$ con $B \subset A$.

Veamos cómo recuperar la topología a partir de un sistema fundamental de entornos elegido en cada punto.

Proposición 4.6.2 Supongamos seleccionada una base de entornos $\mathscr{V}_x$ en cada punto x de un espacio topológico (X,τ). Entonces, dado $E \subset X$, se tiene que E es abierto si y solo si para cada punto $x \in E$ existe $B_x \in \mathscr{V}_x$ con $B_x \subset E$.

Demostración. Supongamos primero que E es abierto. Tomemos $x \in E$, entonces $E \in \mathscr{E}_x$. Como $\mathscr{V}_x$ es una base de entornos, existe $B_x \in \mathscr{V}_x$ con $B_x \subset E$. Recíprocamente, supongamos que para cada punto $x \in E$ existe $B_x \in \mathscr{V}_x$ con $B_x \subset E$ y seleccionemos abiertos $U_x \subset B_x$ con $x \in U_x$. Tenemos que

$$E = \bigcup_{x\in E}\{x\} \subset \bigcup_{x\in E} U_x \subset E$$

y por tanto $E = \bigcup_{x\in E} U_x$ es abierto en (X,τ). ■

Definición 4.6.3 Sea X un conjunto. Una *pro-base de entornos para* X es una aplicación

$$\mathscr{V} : X \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)), \quad x \mapsto \mathscr{V}_x \subset \mathscr{P}(X)$$

de modo que cada $x \in X$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathscr{V}_x \neq \emptyset$.
2. Para cada $B \in \mathscr{V}_x$, se tiene que $x \in B$.
3. Dados $B_1, B_2 \in \mathscr{V}_x$, existe $B_3 \in \mathscr{V}_x$ con $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Proposición 4.6.3 Sea X un conjunto y $\mathscr{V}$ una pro-base de entornos para X. Existe una única topología τ sobre X tal que para cada $x \in X$ se tenga que $\mathscr{V}_x$ es una base de entornos de x en (X,τ).

Demostración. La unicidad se sigue de la proposición anterior, en efecto, si existe tal topología debe estar dada por

$$\tau = \{U \subset X;\ \text{para cada } x \in U,\ \text{existe } B_x \in \mathscr{V}_x \text{ con } B_x \subset U\}.$$

Veamos que τ es una topología. Por definición de τ tenemos que $\emptyset \in \tau$. Por otro lado, como cada $\mathscr{V}_x$ es no vacío, concluimos que $X \in \tau$. Que la unión de elementos de τ está en τ, se sigue directamente sin más que aplicar la definición. Veamos que la intersección $U_1 \cap U_2$ de dos elementos $U_1, U_2 \in \tau$ está en τ. Para ello, tomemos un punto $x \in U_1 \cap U_2$. Sabemos que existen $B_1, B_2 \in \mathscr{V}_x$ tales que $B_1 \subset U_1$ y $B_2 \subset U_2$. Por la tercera propiedad de $\mathscr{V}$, existe $B_3 \in \mathscr{V}_x$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Tenemos así que $B_3 \subset U_1 \cap U_2$ y por tanto $U_1 \cap U_2 \in \tau$. De este modo se completa la prueba de que τ es una topología. ■

4.6.2 Interior y adherencia en términos de entornos

Sea (X, τ) un espacio topológico. Dado $E \subset X$, de la definición de entorno se sigue que

$$\mathrm{Int}E = \{x \in X : E \in \mathscr{E}_x\}.$$

Proposición 4.6.4 Tenemos que $x \in \mathrm{Int}(X \setminus E)$ si y solamente si existe un entorno $A \in \mathscr{E}_x$ tal que $E \cap A = \emptyset$.

Demostración. Si $x \in \mathrm{Int}(X \setminus E)$, entonces $X \setminus E \in \mathscr{E}_x$ y $X \setminus E$ no corta E. Recíprocamente, supongamos que existe un entorno $A \in \mathscr{E}_x$ con $A \cap E = \emptyset$. Tenemos que $A \subset X \setminus E$ y por ende $X \setminus E$ es un entorno de x. ■

De esta manera, gracias a la relación entre interior adherencia y complementarios, podemos asegurar que

$$\overline{E} = \{x \in X : \forall A \in \mathscr{E}_x,\ A \cap E \neq \emptyset\}.$$

■ **Observación 4.6** Sea $\mathscr{V}_x$ una base de entornos de $x \in X$ y E un subconjunto de X. Tenemos las siguientes propiedades:

1. El punto x es interior a E si y solamente si existe $B \in \mathscr{V}_x$ tal que $x \in B \subset E$.
2. El punto x es adherente a E si y solamente si para todo $B \in \mathscr{V}_x$ se cumple $B \cap E \neq \emptyset$.

Definición 4.6.4 Sea (X, τ) un espacio topológico y $E \subset X$. Diremos que E es *denso* en (X, τ) si su adherencia coincide con todo X, es decir $\overline{E} = X$.

Proposición 4.6.5 Sea (X, τ) un espacio topológico. Tenemos que $E \subset X$ es denso si y solamente si todo abierto no vacío corta E.

Demostración. Supongamos que $\overline{E} = X$ y sea U un abierto no vacío. Dado $x \in U$, tenemos que $U \in \mathscr{E}_x$ y como $x \in \overline{E}$, sabemos que $E \cap U \neq \emptyset$ como queríamos. Recíprocamente tomemos un punto $x \in X$ y $A \in \mathscr{E}_x$ un entorno cualquiera. Queremos ver que $A \cap E \neq \emptyset$. Pero esto es cierto, pues existe un abierto $U \in \tau$ con $x \in U \subset A$ y por hipótesis $U \cap E \neq \emptyset$. ■

4.7 Puntos de acumulación y puntos aislados

Definición 4.7.1 Sea (X, τ) un espacio topológico y $E \subset X$. Un punto $x \in X$ es *de acumulación para* E si $x \in \overline{E \setminus \{x\}}$. El conjunto de puntos de acumulación de E se llama *conjunto derivado de* E y lo denotaremos por $\mathrm{Ac}E$. Los puntos de E que no son de acumulación para E se llaman *puntos aislados en* E. Denotaremos por $\mathrm{Is}E$ el conjunto de puntos aislados.

■ **Observación 4.7** Sea $E \subset X$ un subconjunto, consideremos un punto $x \in X$ y una base de entornos $\mathscr{V}_x$ de x. Tenemos las propiedades siguientes:

1. El punto x es de acumulación para E si y solamente si para todo $A \in \mathscr{V}_x$ se tiene que $A \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.
2. El punto x es un punto aislado en E si y solamente si $x \in E$ y además existe $A \in \mathscr{V}_x$, con $A \cap (E \setminus \{x\}) = \emptyset$.

■ **Ejemplo 4.18** Todos los puntos de acumulación son adherentes, los puntos adherentes que no son de acumulación son precisamente los puntos aislados (esto lo probaremos en la proposición siguiente). Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la topología usual, tomando $E = (a,b) \cup \{c\}$ con $a < b < c$, tenemos que:

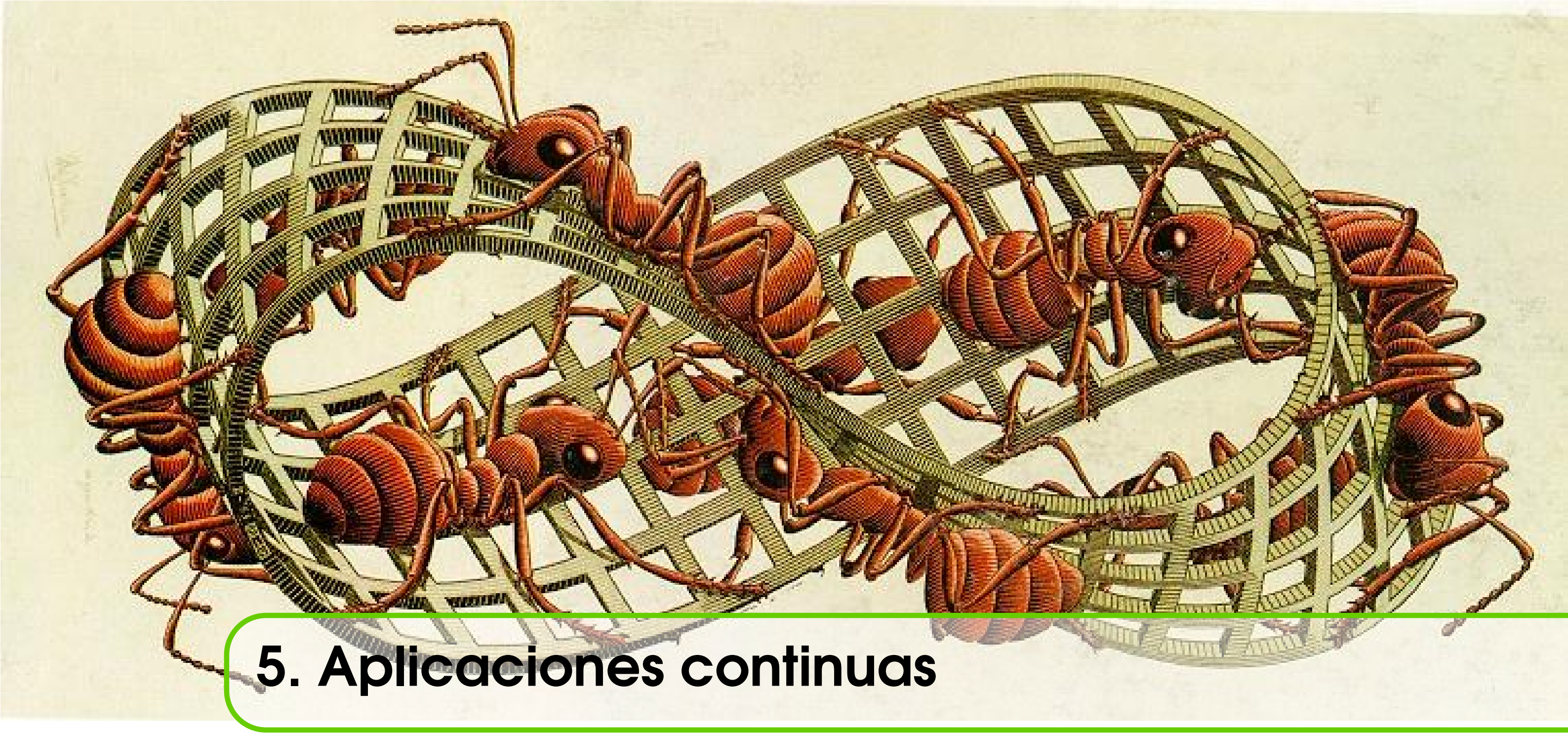
1. La adherencia de E es el conjunto $[a,b] \cup \{c\}$.
2. El conjunto de puntos de acumulación de E es $[a,b]$.
3. El único punto aislado es c.

Proposición 4.7.1 Sea (X,τ) un espacio topológico y $E \subset X$. Tenemos que

$$\bar{E} = \mathrm{Is}E \cup \mathrm{Ac}E, \quad \emptyset = \mathrm{Is}E \cap \mathrm{Ac}E.$$

Demostración. La inclusión $\mathrm{Is}E \cup \mathrm{Ac}E \subset \bar{E}$ ya la tenemos. Veamos ahora que si $x \in \bar{E} \setminus \mathrm{Is}E$, entonces $x \in \mathrm{Ac}E$. Si $x \in E$ es necesariamente de acumulación. Si $x \notin E$, dado $A \in \mathscr{E}_x$, tenemos que $A \cap (E \setminus \{x\}) = A \cap E \neq \emptyset$. Ahora, que $\mathrm{Is}E$ y $\mathrm{Ac}E$ son conjuntos disjuntos se sigue por definición. ■

■ **Ejemplo 4.19** En cualquier espacio topológico (X,τ), el derivado del conjunto vacío es el conjunto vacío. Dado $x \in X$, tenemos que x es aislado en $\{x\}$. Por otro lado, si $\{x\} \in \tau$, entonces x no es de acumulación para ningún $E \subset X$.



5. Aplicaciones continuas

Una “categoría” en matemáticas es, *grosso modo*, una colección de objetos, junto con morfismos (o flechas) entre ellos que admiten composición y de modo que para cada objeto existe el morfismo identidad. En particular, el concepto de isomorfismo es propio de la teoría de categorías, y se definen como aquellos morfismos que admiten inverso (la composición de un isomorfismo con su inverso debe dar la identidad en los dos sentidos). Ejemplos habituales de categorías son:

1. La categoría de conjuntos, cuyos objetos son los conjuntos y sus morfismos las aplicaciones entre ellos.
2. La categoría de grupos, cuyos objetos son los grupos y sus morfimos los homomorfismos de grupos.
3. La categoría de espacios vectoriales, cuyos objetos son los espacios vectoriales y sus morfismos las aplicaciones entre ellos.

Los espacios topológicos serán los objetos de la categoría de espacios topológicos que introducimos a continuación, cuyos morfismos reciben el nombre de *aplicaciones continuas*. En este caso, los isomorfismos reciben el nombre específico de *homeomorfismos*. En este capítulo precisamos estos conceptos.

Definición 5.0.1 Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) dos espacios topológicos. Una *aplicación continua* F de (X,τ_X) en (Y,τ_Y) es una terna

$$F = (f,\tau_X,\tau_Y)$$

donde $f : X \to Y$ es una aplicación entre conjuntos con la propiedad de que la imagen inversa $f^{-1}(V)$ de todo abierto V de (Y,τ_Y) es abierta en (X,τ_X).

Cuando se sobreentiende de qué topologías se trata, se dirá simplemente que la aplicación entre conjuntos f es continua. En muchas ocasiones también se empleará la notación $f : (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$.

■ **Ejemplo 5.1** Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) dos espacios topológicos. Se tiene que:

1. Si τ_X es la topología discreta, toda terna $F = (f : X \to Y,\tau_X,\tau_Y)$ es una aplicación continua.
2. Si τ_Y es la topología grosera, toda terna $F = (f : X \to Y,\tau_X,\tau_Y)$ es una aplicación continua.

Otro ejemplo elemental de aplicaciones continuas son las inducidas por aplicaciones constantes entre conjuntos (la llegada tiene un único elemento).

Proposición 5.0.1 La composición de aplicaciones continuas es continua. Más precisamente, si $F = (f : X \to Y, \tau_X, \tau_Y)$ y $G = (f : Y \to Z, \tau_Y, \tau_Z)$ son aplicaciones continuas, entonces su composición

$$G \circ F = (g \circ f, \tau_X, \tau_Z),$$

es de nuevo una aplicación continua.

Demostración. Sea $U \in \tau_Z$, tenemos que

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)).$$

Como g es continua se tiene $g^{-1}(U) \in \tau_Y$. Ahora, como f es continua, $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau_X$. ■

La *identidad topológica* en (X, τ) es la aplicación continua

$$\mathrm{Idtop}_{(X,\tau)} = (\mathrm{id}_X, \tau, \tau).$$

Nótese que la terna $(\mathrm{id}_X, \tau, \tau')$ es una aplicación continua si y solo si τ es más fina que τ'. Las siguientes propiedades son de directa comprobación:

a) Sea $F = (f : X \to Y, \tau_X, \tau_Y)$ una aplicación continua. Entonces

$$F = F \circ \mathrm{Idtop}_{(X,\tau_X)} = \mathrm{Idtop}_{(Y,\tau_Y)} \circ F.$$

b) Sean $F = (f : X \to Y, \tau_X, \tau_Y)$, $G = (g : Y \to Z, \tau_Y, \tau_Z)$ y $H = (h : Z \to W, \tau_Z, \tau_W)$ aplicaciones continuas. Entonces

$$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F).$$

Definición 5.0.2 Una aplicación continua $F = (f : X \to Y, \tau_X, \tau_Y)$ es un *homeomorfismo* entre (X, τ_X) e (Y, τ_Y) si existe otra aplicación continua

$$G = (g : Y \to X, \tau_Y, \tau_X)$$

de modo que se tenga que

$$G \circ F = \mathrm{Idtop}_{(X,\tau_X)}, \quad F \circ G = \mathrm{Idtop}_{(Y,\tau_Y)}.$$

Dos espacios topológicos son *homeomorfos* si existe un homeomorfismo entre ellos.

Nótese que si $F = (f : X \to Y, \tau_X, \tau_Y)$ es un homeomorfismo, la aplicacion f debe ser una biyección y las topologías τ_X y τ_Y están directamente relacionadas por esta biyección, en el sentido de que dado $U \subset X$ se tiene que $U \in \tau_X$ si y solo si $f(U) \in \tau_Y$ y recíprocamente, dado $V \subset Y$ se tiene que $V \in \tau_Y$ si y solo si $f^{-1}(V) \in \tau_X$. Dicho de otro modo, F es un homeomorfismo si y solo si f es biyectiva, F es continua y $F^{-1} = (f^{-1} : Y \to X, \tau_Y, \tau_X)$ también es continua.

La relación de homeomorfía es una relación de equivalencia (ejercicio), en consonancia con lo que ocurre a nivel general en cualquier categoría.

Proposición 5.0.2 Consideremos dos espacios topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) y una aplicación $f : X \to Y$ entre los conjuntos subyacentes. Las siguientes propiedades son equivalentes:

a) $F = (f, \tau_X, \tau_Y)$ es una aplicación continua.

a') Si τ_Y está generada por una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(Y)$, entonces $f^{-1}(U) \in \tau_X$, para todo $U \in \mathscr{F}$.

b) Para todo cerrado C de (Y, τ_Y), La imagen inversa $f^{-1}(C)$ es un cerrado de (X, τ_X).

c) Para todo punto $x \in X$ se cumple la siguiente propiedad:

"Dado $B \in \mathscr{E}_{f(x)}$, existe $A \in \mathscr{E}_x$ tal que $f(A) \subset B$".

(Esta propiedad se enuncia diciendo que f *es continua an el punto* x).

Demostración. La equivalencia entre a),a') y b) se remite al buen comportamiento de la imagen inversa por complementarios, uniones e intersecciones. Veamos que a) es equivalente a c).

Supongamos primero que F es continua y consideremos un punto $x \in X$, así como un entorno B de $f(x)$ en (Y, τ_Y). Sabemos que existe un abierto $V \in \tau_Y$ tal que $x \in V$ y $V \subset B$. Se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto en (X, τ_X) y además $x \in f^{-1}(V)$. Así pues, el conjunto $U = f^{-1}(V)$ es un entorno de x en (X, τ_X). Tenemos que

$$f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V \subset B.$$

Por consiguiente a) implica c). Recíprocamente, tomemos un abierto V en (Y, τ_Y) y veamos que $f^{-1}(V)$ es abierto en (X, τ_X). Para ello, comprobaremos que $f^{-1}(V)$ es entorno de cada uno de sus puntos. Fijemos $x \in f^{-1}(V)$. Tenemos que $f(x) \in V$ y $V \in \mathscr{E}_{f(x)}$, así que por hipótesis, existe $A \in \mathscr{E}_x$ tal que $f(A) \subset V$. Tomando imágenes inversas obtenemos

$$x \in A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(V).$$

Como $f^{-1}(V)$ contiene un entorno de x, es a su vez un entorno de x. ■

Corolario 5.0.3 Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación. Supongamos que tenemos asignaciones $\mathscr{V}$ y $\mathscr{V}'$ que definen bases de entornos $\mathscr{V}_x$ y $\mathscr{V}'_y$, para cada punto $x \in X$ e $y \in Y$. Entonces $F = (f, \tau_X, \tau_Y)$ es una aplicación continua si y solo si se cumple la siguiente propiedad:

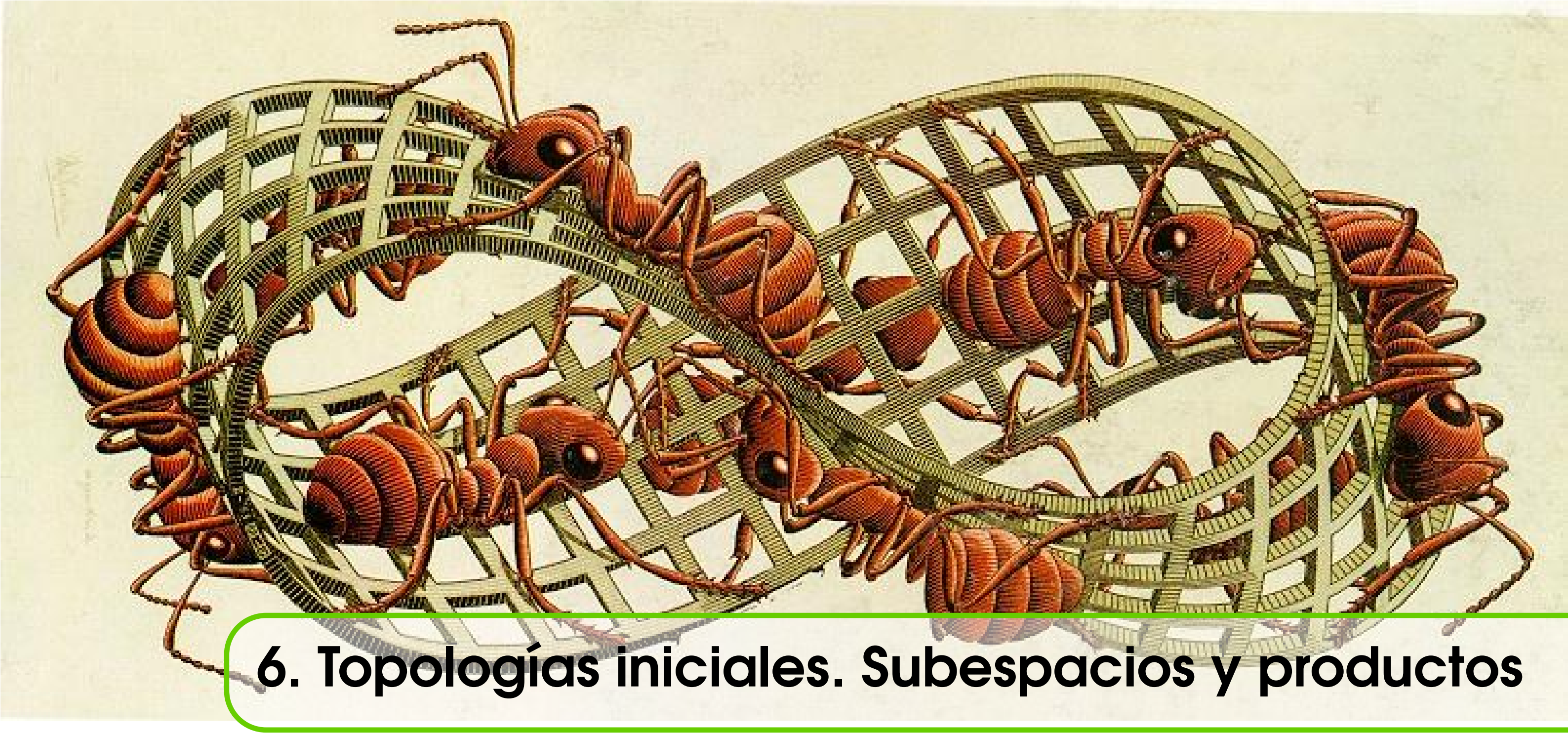
"Dado $B \in \mathscr{V}'_{f(x)}$, existe $A \in \mathscr{V}_x$ tal que $f(A) \subset B$".

Demostración. Es suficiente ver que la propiedad c) de la proposición anterior es equivalente a la enunciada en este corolario. Supongamos que se cumple la propiedad c) de la proposición anterior. Como $\mathscr{V}'_{f(x)} \subset \mathscr{E}_{f(x)}$, entonces $B \in \mathscr{E}_{f(x)}$ y así, existe $A^* \in \mathscr{E}_x$ tal que $f(A^*) \subset B$. Dado que $\mathscr{V}_x$ es una base de entornos en x para (X, τ), existe $A \in \mathscr{V}_x$ con $A \subset A^*$. Se tiene que $f(A) \subset B$, ya que $f(A) \subset f(A^*)$. Recíprocamente, supongamos que se cumple la propiedad enunciada en este corolario y veamos que se cumple la propiedad c) de la proposición anterior. Tomemos $B \in \mathscr{E}_{f(x)}$. Sabemos que existe $B^* \in \mathscr{V}'_{f(x)}$ tal que $B^* \subset B$, aplicando la propiedad del enunciado, existe $A \in \mathscr{V}_x$ con $f(A) \subset B^*$. Concluimos observando que $A \in \mathscr{E}_x$ y que $f(A) \subset B^* \subset B$. ■

■ **Ejemplo 5.2** Consideremos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ con las distancias euclídeas respectivas, dotados de la topología usual (la asociada a estas distancias) y una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. El lector podrá comprobar que la aplicación f es continua si y solamente si, para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple la siguiente propiedad:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ con $d(x,y) < \delta$, se tiene que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Esta propiedad se corresponde con la definición clásica de continuidad en un punto para aplicaciones entre espacios métricos.



6. Topologías iniciales. Subespacios y productos

En este capítulo introducimos el concepto de topología inicial asociada a una familia de aplicaciones que parten de un conjunto prefijado y tienen llegada en espacios topológicos. Presentamos como ejemplos de topologías iniciales la topología de subespacio y la topología producto.

Proposición 6.0.1 Sea X un conjunto y $\mathscr{A} = \{(Y_\alpha, \tau_\alpha),\ f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos (Y_α, τ_α) y de aplicaciones entre conjuntos

$$f_\alpha : X \to Y_\alpha.$$

Existe una única topología τ sobre X con la propiedad (universal) siguiente:

> "Dada cualquier aplicación $g : (Z, \tau_Z) \to (X, \tau)$, se tiene que g es continua si y solo si $f_\alpha \circ g$ es continua, para cada $\alpha \in \Lambda$".

Demostración. Antes de empezar, notemos que de la propiedad universal se sigue que las aplicaciones

$$f_\alpha : (X, \tau) \to (Y, \tau_\alpha), \quad \alpha \in \Lambda,$$

son continuas. En efecto, podemos considerar $(Z, \tau_Z) = (X, \tau)$ y $g = \mathrm{IdTop}_{(X,\tau)}$, que ya sabemos que es una aplicación continua y basta observar que $f_\alpha \circ g = f_\alpha$.

Veamos la unicidad de τ. Supongamos que exista otra topología τ' de X que satisfaga la propiedad universal. Por la observación anterior, sabemos que las ternas $(f_\alpha, \tau, \tau_\alpha)$ son aplicaciones continuas. De esta manera, si aplicamos la propiedad universal de τ' a la terna $(\mathrm{id}_X, \tau, \tau')$, concluimos que es continua, con lo cual $\tau \supset \tau'$. Intercambiando los papeles de τ, τ', concluimos que $\tau \subset \tau'$. Por lo tanto $\tau' = \tau$.

Veamos la existencia. Consideremos, para cada $\alpha \in \Lambda$, la familia $\mathscr{F}_\alpha$ de subconjuntos de X dada por

$$\mathscr{F}_\alpha = \{f_\alpha^{-1}(U);\ U \in \tau_\alpha\}$$

y tomemos la unión $\mathscr{F} = \cup_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}_\alpha$. Veamos que la topología τ sobre X generada por $\mathscr{F}$ cumple la propiedad universal deseada. Observemos que las aplicaciones

$$f_\alpha : (X, \tau) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha)$$

son continuas, pues las imágenes inversas de los abiertos de (Y_α, τ_α) son elementos de $\mathscr{F}$. Tomemos ahora un espacio topológico arbitrario (Z, τ_Z) y una aplicación

$$g : (Z, \tau_Z) \to (X, \tau).$$

Supongamos en primer lugar que g es continua. Fijado un índice $\alpha \in \Lambda$, tenemos que $f_\alpha \circ g$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Supongamos ahora que $f_\alpha \circ g$ es continua, para todo $\alpha \in \Lambda$. Queremos ver que g es continua. Como sabemos, una base para la topología τ está dada por las intersecciones finitas

$$f_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap f_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap f_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}),$$

donde $U_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i}$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Por otro lado, sabemos que una aplicación es continua si y solo si las imágenes inversas de los elementos de una base dada son abiertos. Así pues, basta probar que

$$V = g^{-1}\left(f_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap f_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap f_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k})\right) \in \tau_Z.$$

Dado que la imagen inversa de la intersección es la intersección de las imágenes inversas, tenemos

$$\begin{aligned} & g^{-1}\left(f_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap f_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap f_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k})\right) = \\ = \; & g^{-1}\left(f_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\right) \cap g^{-1}\left(f_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\right) \cap \cdots \cap g^{-1}\left(f_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k})\right) = \\ & (f_{\alpha_1} \circ g)^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap (f_{\alpha_2} \circ g)^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots (f_{\alpha_k} \circ g)^{-1}(U_{\alpha_k}). \end{aligned}$$

Ahora, puesto que los $(f_{\alpha_i} \circ g)^{-1}(U_{\alpha_i})$ son abiertos de (Z, τ_Z), para $i = 1, 2, \ldots, k$, tenemos que V es un abierto de (Z, τ_Z), pues es intersección finita de abiertos. ■

Definición 6.0.1 La topología τ sobre X obtenida en la proposición anterior se llama *topología inicial* asociada a la familia $\mathscr{A} = \{(Y_\alpha, \tau_\alpha),\ f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

■ **Observación 6.1** La topología inicial es la topología menos fina sobre X de entre las que hacen continuas todas la aplicaciones f_α. En efecto, sea τ la topología inicial y sea τ' otra topología sobre X de modo que las aplicaciones

$$f_\alpha : (X, \tau') \to (Y_\alpha, \tau_\alpha)$$

sean continuas, para todo $\alpha \in \Lambda$. La propiedad universal de la topología inicial, aplicada a la terna

$$(\mathrm{id}_X, \tau', \tau)$$

indica que $(\mathrm{id}_X, \tau', \tau)$ es una aplicación continua y por tanto $\tau \subset \tau'$.

6.1 Topología de subespacio

El primer ejemplo de topología inicial que presentamos es la topología de subespacio inducida sobre un subconjunto de un espacio topológico.

Sea (Y, τ) un espacio topológico y X un subconjunto de Y. Denotemos por $\iota : X \to Y$ la aplicación de inclusión. La topología inicial asociada a la familia

$$\{(Y, \tau), \iota : X \to Y\}$$

se denomina *topología de X como subespacio de* (Y, τ) y se denotará frecuentemente por $\tau|_X$. Nótese que $\iota : (X, \tau|_X) \to (Y, \tau)$ es una aplicación continua y que la propiedad universal de la proposición 6.0.1 se lee como:

'Una aplicación $f : (Z, \tau_Z) \to (X, \tau|_X)$ entre espacios topológicos es continua si y solamente si lo es $\iota \circ f : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau)$".

Proposición 6.1.1 Los abiertos de la topología de X como subespacio de (Y, τ) son precisamente los subconjuntos de X de la forma $U \cap X$, donde $U \in \tau$.

Demostración. La familia $\mathscr{F} = \{U \cap X;\ U \in \tau\}$ es, precisamente, la familia $\mathscr{F}$ de la prueba de la proposición 6.0.1, pues dado $U \subset Y$ tenemos que

$$\iota^{-1}(U) = U \cap X.$$

Ahora basta observar que, para este caso, esta familia $\mathscr{F}$ es directamente una topología, y por tanto nuestra proposición queda probada. ■

■ **Ejemplo 6.1** Consideremos $\mathbb{R}$ con su topología usual τ_u y $E = [0,1]$.

1. Los intervalos de la forma $[0, c)$ con $0 < c \leq 1$ son abiertos para la topología de $[0,1]$ como subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$.
2. La topología de $\mathbb{N}$ como subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es la discreta. Esto no es así para la topología de $\mathbb{Q}$ como subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$, pues todo punto de $\mathbb{Q}$ es de acumulación y así, no puede ser abierto para la topología de subespacio.

Consideremos un subespacio topológico $(X, \tau|_X)$ de (Y, τ). Se tienen las siguientes propiedades:

1. Los abiertos de $(X, \tau|_X)$ son los conjuntos de la forma $U \cap X$, donde U es un abierto de (Y, τ) y los cerrados de $(X, \tau|_X)$ son los conjuntos de la forma $C \cap X$, donde C es un cerrado de (Y, τ). Para ver esto último, basta observar que
$$X \setminus (X \cap U) = X \cap (Y \setminus U).$$
2. Dado $x \in X$, los entornos de x en $(X, \tau|_X)$ son los conjuntos de la forma $X \cap A$, donde A es un entorno de x en (Y, τ). Vamos a probarlo. Sea A un entorno de x en (Y, τ). Que $A \cap X$ es entorno para la topología del subespacio se sigue de aplicar las definiciones. Ahora, si $\tilde{A}$ es un entorno de x en $(X, \tau|_X)$, sabemos que contiene un abierto $\tilde{U}$ tal que
$$x \in \tilde{U} \subset \tilde{A}, \quad \tilde{U} = U \cap X,\ U \in \tau.$$
Podemos considerar $A = U \cup \tilde{A}$, que es un entorno de x en (Y, τ), y además cumple que $\tilde{A} = X \cap A$.
3. Si $\mathscr{B}$ es una base de abiertos de (Y, τ), entonces $\mathscr{B}_X = \{U \cap X : U \in \mathscr{B}\}$ es una base para la topología del subespacio $(X, \tau|_X)$. Análogamente, si $x \in X$ y $\mathscr{V}(x)$ es una base de entornos de x para (Y, τ), entonces
$$\mathscr{V}_X(x) = \{A \cap X : A \in \mathscr{V}(x)\}$$
es una base de entornos de x para $(X, \tau|_X)$.
4. Si $U \subset X$ es un abierto en (Y, τ), entonces también lo es en $(X, \tau|_X)$. Análogamente, si $C \subset X$ es un cerrado en (Y, τ), entonces también lo es en $(X, \tau|_X)$. Para verlo, basta poner
$$U = U \cap X, \quad C = C \cap X$$
5. Si X es un abierto de (Y, τ), los abiertos de $(X, \tau|_X)$ son exactamente los abiertos de (Y, τ) contenidos en X. En efecto, si $\tilde{U} \in \tau|_X$, entonces podemos escribir $\tilde{U} = X \cap U$, con $U \in \tau$, pero como $X \in \tau$, tenemos que $\tilde{U}$ es un abierto de (Y, τ) contenido en X.
6. Si X es un cerrado de (Y, τ), los cerrados de $(X, \tau|_X)$ son los cerrados de (Y, τ) contenidos en X.
7. Sea (Z, τ_Z) un tercer espacio topológico. Si $f : (Y, \tau) \to (Z, \tau_Z)$ es una aplicación continua, también lo es la restricción $f|_X : (X, \tau|_X) \to (Z, \tau_Z)$. Basta notar que $f|_X = f \circ \iota$ es composición de aplicaciones continuas.

6.2 Topología producto

La topología producto es otro ejemplo muy importante de topología inicial y la presentamos en esta sección. Consideremos una familia $\{(Y_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ de espacios topológicos y sea X el producto (como conjunto) de la familia. Esto es,

$$X=\prod_{\alpha\in\Lambda}Y_\alpha=\{\sigma:\Lambda\to\cup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha;\ \sigma(\alpha)\in X_\alpha,\alpha\in\Lambda\}.$$

Para cada $\alpha\in\Lambda$, consideramos la proyección α-ésima que viene dada por

$$\pi_\alpha:X\to Y_\alpha,\quad \pi_\alpha(\sigma)=\sigma(\alpha).$$

La *topología producto de la familia* $\{(Y_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es, por definición, la topología inicial de X asociada a la familia

$$\{(Y_\alpha,\tau_\alpha),\ \pi_\alpha:X\to Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$$

Siguiendo la prueba de la proposición 6.0.1, sabemos que la topología producto está generada por la familia $\mathscr{F}=\cup_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}_\alpha$, donde

$$\mathscr{F}_\alpha=\{\pi_\alpha^{-1}(U);U\in\tau_\alpha\}.$$

Por consiguiente, una base por abiertos de la topología producto está dada por las intersecciones finitas de elementos de la familia $\mathscr{F}$, esto es, por todos los conjuntos de la forma

$$C_{U_1,U_2,\dots,U_n}=\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_1)\cap\pi_{\alpha_2}^{-1}(U_2)\cap\cdots\cap\pi_{\alpha_n}^{-1}(U_n),$$

donde $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_i\in\Lambda$, $U_i\in\tau_{\alpha_i}$, para $i=1,2,\dots,n$. En algunos contextos estos conjuntos se llaman *cilindros*, o *cilindros básicos*.

Nótese que, dados $\alpha\in\Lambda$ y un subconjunto $E_\alpha\subset Y_\alpha$, tenemos identificaciones

$$\begin{aligned}\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)&=E_\alpha\times\prod_{\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}}Y_\beta,\\ X\setminus\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)&=(Y_\alpha\setminus E_\alpha)\times\prod_{\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}}Y_\beta\end{aligned}$$

De esta manera, los abiertos básicos $C_{U_1,U_2,\dots,U_n}$ de la topología producto descritos anteriormente, son de la forma

$$C_{U_1,U_2,\dots,U_n}=\prod_{\beta\in\Lambda}U_\beta,\quad\text{donde}\ \begin{cases}U_\beta=U_i, & \text{si }\beta=\alpha_i\\ U_\beta=Y_\beta, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Tomando complementarios, una base por cerrados para la topología producto viene dada por todos los conjuntos de la forma

$$X\setminus C_{U_1,U_2,\dots,U_n}=\bigcup_{i=1}^n\Big((Y_{\alpha_i}\setminus U_i)\times\prod_{\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha_i\}}Y_\beta\Big)=\bigcup_{i=1}^n\pi_{\alpha_i}^{-1}(Y_{\alpha_i}\setminus U_i).$$

Se tienen las siguientes propiedades:

1. Cuando Λ es un conjunto finito, una base de abiertos para la topología producto está formada simplemente por los productos de abiertos.
2. En el caso en que Λ sea un conjunto infinito, el producto de abiertos no vacíos con una cantidad infinita de ellos distintos del total no es un abierto. En efecto, ningún conjunto de este estilo puede contener un cilindro básico, por tanto no es abierto, y de hecho tiene interior vacío.

3. El producto arbitrario de cerrados es un cerrado en la topología producto. En efecto, si $D = \prod_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha$, entonces

$$D = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \pi_\alpha^{-1}(D_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} X \setminus C_{(Y_\alpha \setminus D_\alpha)}$$

■ **Ejemplo 6.2** La topología usual sobre $\mathbb{R}^n$ es la topología producto, pues sabemos que los productos de intervalos abiertos (bolas para la norma infinito) forman una base para la topología usual.

■ **Observación 6.2** Nótese que existen abiertos que no son producto de abiertos, al igual que existen cerrados que no son producto de cerrados. Basta considerar una bola (abierta o cerrada) para la distancia euclídea de $\mathbb{R}^2$.

■ **Observación 6.3** Sea $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos con al menos dos elementos. Sea $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ y denotemos por τ la topología producto en X. Se tiene que:

1. Si Λ es un conjunto finito, entonces (X, τ) es un espacio topológico discreto si y solamente si (Y_α, τ_α) es discreto, para todo $\alpha \in \Lambda$.
2. Si Λ es un conjunto infinito, entonces (X, τ) nunca es un espacio topológico discreto.

6.3 El espacio de Cantor

El espacio de Cantor nos proporciona un ejemplo no trivial de topologías tanto de producto como de subespacio. Por su importancia, le dedicamos esta sección.

El *espacio de Cantor* es el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es

$$2^{\mathbb{N}} = \textstyle\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n, \quad X_n = \{0, 1\},$$

dotado de la topología producto, donde en cada copia de $\{0,1\}$ se toma la topología discreta. En esta sección tomamos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Recordemos que los elementos de $2^{\mathbb{N}}$ son las aplicaciones

$$\sigma : \mathbb{N} \to \{0, 1\},$$

es decir, las sucesiones formadas con ceros y unos. Recordemos a su vez que hay cuatro abiertos en $\{0,1\}$:

$$U = \emptyset, \quad U = \{0,1\}, \quad U = \{0\}, \quad U = \{1\}.$$

Un sistema generador de la topología producto en $2^{\mathbb{N}}$ está dado por las imágenes inversas de abiertos $\pi_n^{-1}(U)$, donde $U \subset \{0,1\}$ es un abierto y $\pi_n : 2^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ es la proyección n-ésima. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos

$$C_n^0 = \pi_n^{-1}(\{0\}), \quad C_n^1 = \pi_n^{-1}(\{1\}).$$

Es decir C_n^0 es el conjunto de sucesiones que toman el valor 0 en el lugar n y C_n^1 es el conjunto de sucesiones que toman el valor 1 en el lugar n. Nótese que

$$C_n^0 \cup C_n^1 = 2^{\mathbb{N}}, \quad C_n^0 \cap C_n^1 = \emptyset.$$

Los cilindros básicos (no vacíos) en este espacio son todos ellos de la forma

$$C_I^\delta = \bigcap_{i \in I} C_i^{\delta(i)},$$

donde $I \subset \mathbb{N}$ es un conjunto finito y $\delta : I \to \{0,1\}$ una aplicación. Si escribimos $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, con $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ y $\varepsilon_j = \delta(i_j)$, para $j = 1, 2, \ldots, k$, también usaremos la notación

$$C_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k}$$

para referirnos a C_I^δ.

Proposición 6.3.1 La familia de cilindros básicos

$$\{C_I^\delta;\, I \subset \mathbb{N} \text{ finito},\, \delta : I \to \{0,1\}\}$$

es una base de la topología del espacio de Cantor, cuyos elementos son simultáneamente abiertos y cerrados.

Demostración. Ya sabemos que los cilindros básicos forman una base para la topología producto. Así, solamente nos queda comprobar que son cerrados. Para ello, nótese que

$$X \setminus C_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k} = \bigcup_{j=1}^{k} C_{i_j}^{\bar{\varepsilon}_j},$$

donde $\{\varepsilon_j, \bar{\varepsilon}_j\} = \{0,1\}$. ■

Como ya se ha dicho antes, esta topología no es discreta, pues los puntos no son abiertos. Indicamos de nuevo el argumento: si un punto fuera abierto, coincidiría con algún cilindro básico; pero los cilindros básicos no son unipuntuales, de hecho, son conjuntos no numerables.

Diremos que un cilindro básico C_I^δ es *completo de longitud* n si el conjunto finito I está dado por

$$I =< 1, n >= \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}.$$

Proposición 6.3.2 La familia de cilindros básicos completos es una base para el espacio de Cantor.

Demostración. Basta probar que todo cilindro básico $C_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_k}$ es unión de cilindros básicos completos. Para ello procedemos por inducción sobre el indicador

$$N = \sum_{j=1}^{k} (i_j - i_{j-1} - 1),$$

suponiendo que $i_0 = 0$. Si $N = 0$, el cilindro básico es completo, pues necesariamente $i_j = j$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Supongamos ahora que $N \geq 1$. Entonces, existe un índice s, con $1 \leq s \leq k$ tal que $i_s - i_{s-1} \geq 2$. Ahora podemos escribir $C_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_k}$ como unión de dos cilindros básicos con indicador estrictamente menor, como se muestra a continuación

$$C_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_k} = C_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1} (i_s - 1) i_s \cdots i_k}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{s-1} 0 \varepsilon_s \cdots \varepsilon_k} \cup C_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1} (i_s - 1) i_s \cdots i_k}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{s-1} 1 \varepsilon_s \cdots \varepsilon_k}.$$

Esto termina la demostración. ■

El *conjunto triádico de Cantor* $T \subset \mathbb{R}$ está definido mediante la intersección $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$, donde los T_n son los subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos a continuación. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto $S_n = \{0,1\}^{<1,n>}$, donde

$$< 1, n >= \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}.$$

Es decir, S_n es el conjunto de sucesiones formadas con 0 y 1 de longitud n. Para cada $\delta \in S_n$, definimos el intervalo $I_\delta \subset \mathbb{R}$ de manera recursiva como sigue:

1. Si $n = 1$, tomamos $I_\delta = [0, 1/3]$, si $\delta(1) = 0$ e $I_\delta = [2/3, 1]$, si $\delta(1) = 1$.
2. Si $n \geq 2$ y suponemos definido $I_{\bar{\delta}} = [a,b]$, para $\bar{\delta} = \delta|_{<1,n-1>}$, tomamos

$$I_\delta = [a, a + 1/3^n], \text{ si } \delta(n) = 0, \quad I_\delta = [b - 1/3^n, b], \text{ si } \delta(n) = 1.$$

Ahora el conjunto T_n es la unión
$$T_n = \bigcup_{\delta \in S_n} I_\delta .$$
A modo ilustrativo, describimos explícitamente T_1 y T_2.
$$T_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad T_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$
Las siguientes propiedades quedan como ejercicio para el lector:

1. Si $\delta \in S_n$, la longitud de I_δ es $1/3^n$ e I_δ es de la forma
$$I_\delta = [\ell_\delta/3^n, (\ell_\delta + 1)/3^n],$$
donde ℓ_δ es un número entero $0 \leq \ell_\delta \leq 3^n - 1$. (Cuidado, no todos los enteros $0 \leq \ell \leq 3^n - 1$ corresponden a un ℓ_δ).
2. Si $\delta, \gamma \in S_n$ con $\delta \neq \gamma$, entonces $I_\delta \cap I_\gamma = \emptyset$.
3. Si $n \geq 2$, $\delta \in S_n$ y $\bar{\gamma} \in S_{n-1}$, se tienen las siguientes equivalencias:
$$I_\delta \cap I_{\bar{\gamma}} \neq \emptyset \Leftrightarrow I_\delta \subset I_{\bar{\gamma}} \Leftrightarrow \delta|_{<1,n-1>} = \bar{\gamma}.$$

El *espacio triádico de Cantor* es el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es T dotado de la topología como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Lema 6.3.3 La familia $\mathscr{B} = \{V_{n,\delta};\ n \in \mathbb{N},\ \ \delta \in S_n\}$ de conjuntos de la forma
$$V_{n,\delta} = I_\delta \cap T = \left[\frac{\ell_\delta}{3^n}, \frac{\ell_\delta + 1}{3^n}\right] \cap T,$$
es una base de abiertos de T con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$. Además, los conjuntos $V_{n,\delta}$ son simultáneamente abiertos y cerrados.

Demostración. Como los intervalos $[\ell_\delta/3^n, (\ell_\delta + 1)/3^n]$ son cerrados en $\mathbb{R}$, los conjuntos $V_{n,\delta}$ son cerrados en T. Veamos que $\mathscr{B}$ es una base para la topología del espacio triádrico de Cantor. La primero que debemos notar es que los conjuntos $V_{n,\delta}$ son abiertos en T. En efecto, de las construcciones previas se sigue que
$$V_{n,\delta} = \left(\frac{\ell_\delta}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}}, \frac{\ell_\delta + 1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) \cap T.$$
Por otro lado, para cada valor fijado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $T = \cup_{\delta \in S_n} V_{n,\delta}$, de modo que $\mathscr{B}$ recubre T. Veamos que todo abierto de la topología del subespacio se puede escribir como unión de elementos de $\mathscr{B}$. Dicho de otro modo, veamos que dado $U = V \cap T$, con V abierto en $\mathbb{R}$ y un punto $x \in U$, existe $V_{n,\delta}$ tal que
$$x \in V_{n,\delta} \subset U.$$
Dado que V es abierto en $\mathbb{R}$ y $x \in V$, existe $r > 0$ tal que
$$(x - r, x + r) \subset V.$$
Tomando n suficientemente grande, por ejemplo, tal que $1/3^n < r$ y eligiendo δ tal que $x \in V_{n,\delta}$ se tiene que $x \in V_{n,\delta} \subset U$, como queríamos demostrar. ■

Veamos ahora que los dos espacios topológicos considerados en esta sección, el espacio de Cantor y el espacio triádrico de Cantor, son espacios homeomorfos.

Proposición 6.3.4 Existe una biyección $\Phi : 2^{\mathbb{N}} \to T$ dada como sigue:

$$\Phi(\sigma) = x_\sigma, \quad \{x_\sigma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\sigma_n}, \quad \sigma_n = \sigma|_{<1,n>}.$$

Además Φ es un homeomorfismo entre el espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ y el espacio triádrico de Cantor T.

Demostración. Para cada $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$, tenemos una sucesión de intervalos cerrados encajados

$$I_{\sigma_1} \supset I_{\sigma_2} \supset \cdots \supset I_{\sigma_n} \supset I_{\sigma_{n+1}} \supset \cdots$$

cuya longitud tiende a cero. Por una de las propiedades básicas de los números reales, existe un único número real x_σ en la intersección de todos ellos, y como dicha intersección está contenida en T, tenemos que Φ está bien definida.

Veamos ahora que Φ es inyectiva. Tomemos dos elementos distintos $\sigma, \gamma \in 2^{\mathbb{N}}$. Como $\sigma \neq \gamma$, existe un índice $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_n \neq \gamma_n$. Por definición $\Phi(\gamma) = x_\gamma \in I_{\gamma_n}$ y $\Phi(\sigma) = x_\sigma \in I_{\sigma_n}$. Ahora, como $\sigma_n \neq \gamma_n$, sabemos que $I_{\gamma_n} \cap I_{\sigma_n} = \emptyset$, y por tanto se tiene que $x_\gamma \neq x_\sigma$.

Veamos que es suprayectiva. Para ello, tomemos $x \in T$ y busquemos una sucesión $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ con $\Phi(\sigma) = x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único $\alpha^n \in S_n$ tal que

$$x \in I_{\alpha^n} \subset T_n$$

Como $x \in I_{\alpha^{n+1}} \cap I_{\alpha^n}$, se tiene que α^n es la restricción de α^{n+1} a $< 1, n >$. Como esto lo hacemos para todo número natural, construimos un elemento $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ cuya restricción a $< 1, n >$ coincide con α^n. Por construcción, tenemos que $\Phi(\sigma) = x$.

Para ver que Φ es un homeomorfismo, basta probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\delta \in S_n$ se tiene que

$$\Phi(C^{\delta}_{<1,n>}) = V_{n,\delta},$$

ya que entonces la biyección Φ envía una base de abiertos en otra base de abiertos. Comprobemos que esta afirmación se cumple.

Veamos en primer lugar que $\Phi(C^{\delta}_{<1,n>}) \subset V_{n,\delta}$. Consideremos $\sigma \in C^{\delta}_{<1,n>}$ y veamos que $\Phi(\sigma) = x_\sigma \in V_{n,\delta}$. Como $\sigma \in C^{\delta}_{<1,n>}$, esto significa que

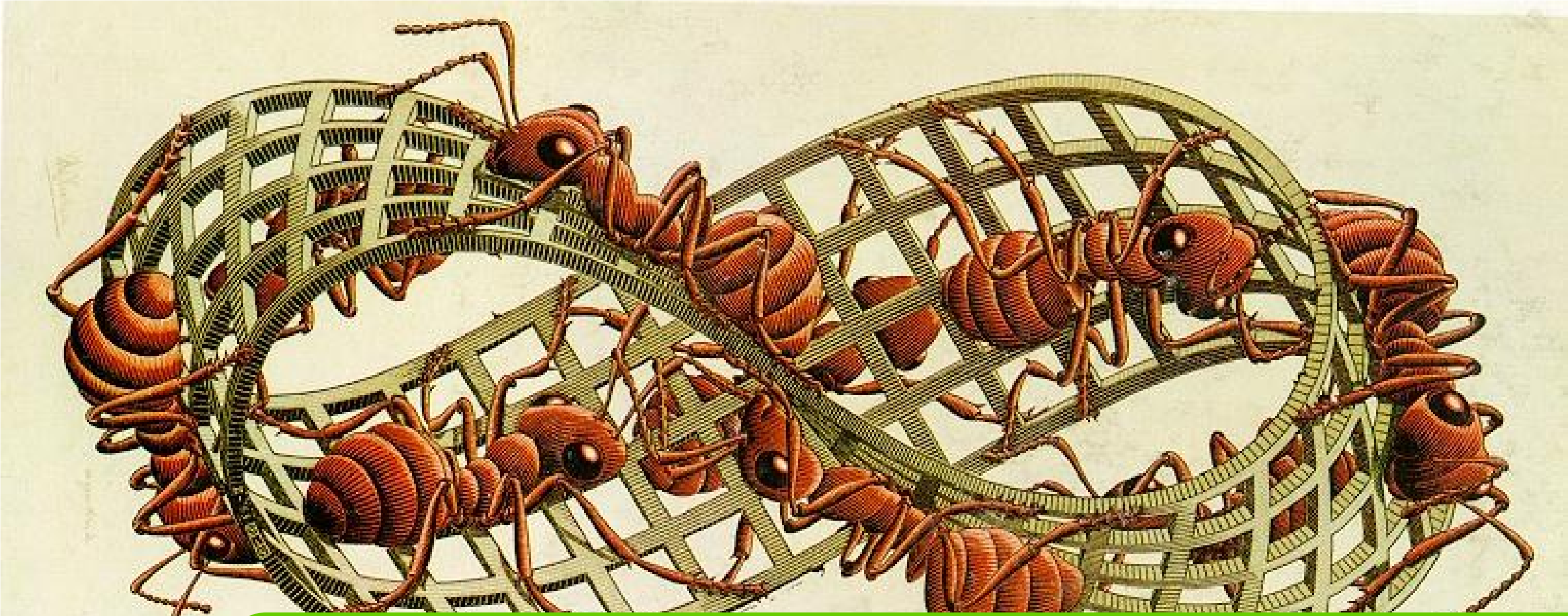
$$\sigma_n = \sigma|_{<1,n>} = \delta.$$

Por consiguiente $x_\sigma \in I_\delta$. Dado que $x_\sigma \in T$, tenemos que $x_\sigma \in V_{n,\delta} = I_\delta \cap T$.

Recíprocamente, veamos que $\Phi(C^{\delta}_{<1,n>}) \supset V_{n,\delta}$. Sea $x \in V_{n,\delta}$ y seleccionemos su preimagen $\Phi^{-1}(x) = \sigma$. Queremos probar que $\sigma \in C^{\delta}_{<1,n>}$, o dicho de otro modo, que $\sigma_n = \delta$. Sabemos que $x \in I_{\sigma_n}$, y por otro lado, también que

$$x \in V_{n,\delta} \subset I_\delta.$$

Así, concluimos que $I_{\sigma_n} \cap I_\delta \neq \emptyset$, y esto solamente puede suceder si $\sigma_n = \delta$. ∎



7. Topologías finales. Cocientes y pegados

En este capítulo introducimos el concepto de topología final asociada a una familia de aplicaciones que parten de espacios topológicos y tienen llegada en un conjunto prefijado. Presentamos como ejemplos de topologías finales la topología cociente y el pegado de topologías.

Proposición 7.0.1 Sean X un conjunto e $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Consideremos una familia $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de aplicaciones

$$h_\alpha : Y_\alpha \to X.$$

Existe una única topología τ sobre X con la propiedad (universal) siguiente:

> "Dada cualquier aplicación $g : (X, \tau) \to (Z, \tau_Z)$ se tiene que g es continua si y solo si la composición $g \circ h_\alpha : (Y_\alpha, \tau_\alpha) \to (Z, \tau_Z)$ es continua, para cada $\alpha \in \Lambda$."

Demostración. Observemos, como en el caso de las topologías iniciales, que las aplicaciones h_α deben ser continuas. En efecto, haciendo $(Z, \tau_Z) = (X, \tau)$ y tomando como $g : (X, \tau) \to (X, \tau)$ la identidad topológica, que es continua, concluimos que las aplicaciones h_α son continuas, por aplicación de la propiedad universal.

Veamos la unicidad de τ. Supongamos que exista otra topología τ' de X que satisfaga la propiedad universal. Por la observación anterior, sabemos que las ternas $(h_\alpha, \tau_\alpha, \tau')$ son aplicaciones continuas. De esta manera, si aplicamos la propiedad universal de τ a la terna $(\mathrm{id}_X, \tau, \tau')$, concluimos que es continua, con lo cual $\tau \supset \tau'$. Intercambiando los papeles de τ, τ', concluimos que $\tau \subset \tau'$. Por lo tanto $\tau' = \tau$.

Finalmente, probemos la existencia de una topología τ sobre X con la propiedad universal. Consideremos la familia

$$\tau = \{U \subset X : \ h_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha, \text{ para todo } \alpha \in \Lambda\}.$$

Es un ejercicio comprobar que se trata de una topología sobre X y, por su definición, hace continuas las aplicaciones $h_\alpha : (Y_\alpha, \tau_\alpha) \to (X, \tau)$. Veamos que τ cumple la propiedad universal deseada. Consideremos una aplicación

$$g : (X, \tau) \to (Z, \tau_Z).$$

Si g es continua, entonces las aplicaciones $g \circ h_\alpha$ son todas ellas continuas, pues son composición de aplicaciones continuas. Recíprocamente, supongamos que las aplicaciones $g \circ h_\alpha$ son continuas y consideremos un abierto $V \in \tau_Z$. Queremos comprobar que $g^{-1}(V) \in \tau$, es decir, que $h_\alpha^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Pero sabemos que

$$h_\alpha^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ h_\alpha)^{-1}(V) \in \tau_\alpha,$$

por la continuidad de $g \circ h_\alpha$. Por tanto $g^{-1}(V) \in \tau$, como queríamos demostrar. ■

Definición 7.0.1 La topología τ de la proposición anterior se llama *topología final asociada a la familia* $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha), h_\alpha : Y_\alpha \to X\}_{\alpha \in \Lambda}$.

■ **Observación 7.1** La topología final τ es la topología más fina que hace continuas todas las h_α. Nótese que esta afirmación la hemos probado al demostrar la unicidad en la proposición anterior. También se observa la propiedad directamente, dada la construcción de τ en la proposición anterior.

7.1 Topología cociente.

Una aplicación suprayectiva $h : Y \to X$ entre conjuntos se llamará también *aplicación (conjuntista) de cociente*. Nótese que la familia de imágenes inversas $h^{-1}(x)$, cuando $x \in X$, define una *partición* de Y (recubrimiento de Y por subconjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos). Sabemos que el dato de una partición en Y define de manera unívoca una relación de equivalencia $\mathscr{R}$ en Y, cuyas clases de equivalencia coinciden con los elementos de la partición. De este modo, el conjunto cociente $Y/\mathscr{R}$ (conjunto de las clases de equivalencia) está en biyección natural con X. Recíprocamente, toda relación de equivalencia $\mathscr{R}$ en Y tiene asociada la aplicación canónica de cociente $c : Y \to Y/\mathscr{R}$, que a cada elemento hace corresponder su clase de equivalencia.

Definición 7.1.1 Consideremos un conjunto X, un espacio topológico (Y, τ_Y) y una aplicación suprayectiva $h : Y \to X$. La *topología cociente en X asociada a* $\{(Y, \tau_Y), h : Y \to X\}$ es la topología final correspondiente. Si (X, τ) es el espacio topológico cociente, la aplicación continua

$$h : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau)$$

se denomina *aplicación (topológica) de cociente*.

Sea $h : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau)$ una aplicación de cociente. Nótese que los abiertos en (X, τ) son exactamente los subconjuntos $U \subset X$ tales que $h^{-1}(U) \in \tau_Y$. Asimismo, los cerrados en (X, τ) son exactamente los subconjuntos $C \subset X$ tales que $h^{-1}(C)$ es cerrado en (Y, τ_Y).

■ **Observación 7.2** Si $h : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau)$ es una aplicación de cociente y biyectiva, entonces h es un homeomorfismo. En efecto, tenemos una biyección entre τ_Y y τ dada por $U \mapsto h(U)$. Esto responde a la idea de que la relación de equivalencia que estamos considerando es trivial (sus clases tienen todas un único elemento).

Recíprocamente, todo homeomorfismo se puede ver como una aplicación de cociente asociada a la relación de equivalencia trivial.

Definición 7.1.2 Sea $h : Y \to X$ una aplicación suprayectiva entre conjuntos y sea $A \subset Y$ un subconjunto. El *saturado de A por h* es el conjunto $h^{-1}(h(A))$. Diremos que A está *saturado por h* si A coincide con su saturado por h.

En la terminología de relaciones de equivalencia, el saturado de A es la unión de las clases de equivalencia de los elementos de A.

■ **Observación 7.3** Sea $h : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau)$ una aplicación de cociente. Los abiertos de (X, τ) son las imágenes por h de los abiertos saturados de (Y, τ_Y).

■ **Observación 7.4** Sea $h : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau)$ una aplicación de cociente. Nótese que h es abierta (es decir, la imagen de un abierto es abierta) si y solamente si el saturado de todo abierto de (Y, τ_Y) es abierto. En este caso, diremos que la relación de equivalencia asociada a h es abierta. De mismo modo tenemos que h es cerrada si y solamente si el saturado de todo cerrado de (Y, τ_Y) es cerrado. En este caso, diremos que la relación de equivalencia asociada a h es cerrada.

Proposición 7.1.1 Sea $h : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau)$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si h es abierta o cerrada, entonces h es una aplicación de cociente.

Demostración. Haremos la prueba en el caso en que h es abierta. De manera análoga se resuelve el caso en que h es cerrada. Denotemos por τ^* la topología cociente en X. Que $\tau \subset \tau^*$ se sigue de la propiedad universal. Ahora, tomemos $U \in \tau^*$ y veamos que $U \in \tau$. Sabemos que $h^{-1}(U) \in \tau_Y$ y por ser (h, τ_Y, τ) abierta, concluimos que $h(h^{-1}(U)) \in \tau$. Finalmente tenemos que $U = h(h^{-1}(U))$ por ser h sobreyectiva. ■

■ **Ejemplo 7.1** Nótese que las aplicaciones de cociente no son necesariamente abiertas o cerradas, como muestran los siguientes ejemplos. Consideremos $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con su topología usual.

1. Sea $f : [0,1] \to \{0,1\}$ la aplicación suprayectiva dada por $f(x) = 1$ si $x \in [0,1/2)$ y $f(x) = 0$ si $x \in [1/2,1]$. La relación de equivalencia inducida por f no es ni abierta ni cerrada. En efecto, el saturado del abierto $(1/2,1]$ es $[1/2,1]$, que no es abierto; el saturado del cerrado $[0,1/4]$ es $[0,1/2)$, que no es cerrado. En este caso, la topología cociente sobre $\{0,1\}$ está dada por $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$.
2. Sea $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$. La relación de equivalencia en $[0,1]$ que identifica los puntos de A no es ni abierta ni cerrada. En efecto, el saturado del cerrado unipuntual $\{1\}$ es el conjunto A, que no es cerrado. Del mismo modo el saturado del abierto $(1/2,1]$ es el conjunto $(1/2,1] \cup A$, que no es abierto.

El siguiente resultado asegura que el espacio cociente no depende (salvo homeomorfismo) del espacio de llegada en el que “realizamos” la relación de equivalencia como aplicación sobreyectiva.

Proposición 7.1.2 Sean $h : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$ y $g : (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_Z)$ dos aplicaciones cociente tales que h y g inducen la misma relación de equivalencia sobre Y, entonces (X, τ_X) y (Z, τ_Z) son homeomorfos.

Demostración. Que h y g induzcan la misma relación de equivalencia sobre Y significa que $h(y) = h(y')$ si y solamente si $g(y) = g(y')$. Esto implica (ejercicio) que existe una única aplicación biyectiva $f : X \to Z$ tal que $g = f \circ h$, dada por

$$f(x) = g(y), \quad \text{si } x = h(y).$$

Nótese que $h = f^{-1} \circ g$. Por simetría, para ver que f es un homeomorfismo, basta probar que f es continua (pues del mismo modo veríamos que f^{-1} es continua). Tomemos un abierto $U \in \tau_Z$. Sabemos que $g^{-1}(U)$ es un abierto en (Y, τ_Y), saturado para la relación inducida por g. Como esta relación de equivalencia es la misma que la inducida por h, tenemos que $g^{-1}(U)$ es un abierto en (Y, τ_Y), saturado para la relación inducida por h. Se concluye que $h(g^{-1}(U))$ es abierto en (Z, τ_Z). Finalmente, tenemos que

$$h(g^{-1}(U)) = (f^{-1} \circ g)(g^{-1}(U)) = f^{-1}(g(g^{-1}(U))) = f^{-1}(U) \in \tau_Z.$$

Nótese que $g(g^{-1}(U)) = U$, porque g es suprayectiva. ■

En los ejemplos que siguen consideramos $\mathbb{R}^n$ con su topología usual y dotamos sus subconjuntos de la topología de subespacio. Los productos los consideramos a su vez dotados de la topología producto. En estos casos, no explicitaremos la topología en las notaciones.

■ **Ejemplo 7.2 — Circunferencia.** La circunferencia $\mathbb{S}^1$ se define por

$$\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Vamos a dar dos presentaciones clásicas de la topología de $\mathbb{S}^1$ como topología cociente. La primera asociada a la aplicación exponencial

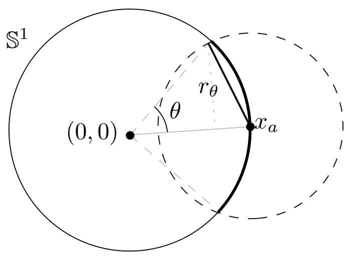
$$\begin{array}{rccl} \exp: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 \\ & \theta & \mapsto & e^{i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta), \end{array}$$

y la segunda asociada a la restricción $\exp|_{[0,2\pi]}$ de la aplicación exponencial al intervalo cerrado $[0,2\pi]$. Nótese que la relación de equivalencia inducida por exp identifica dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$ si y solamente si $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$. En ambos casos estas aplicaciones son suprayectivas y continuas. Veremos que en el primer caso la aplicación es abierta, aunque no cerrada y en el segundo caso es cerrada, aunque no abierta. Así, concluimos que la topología de $\mathbb{S}^1$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$ es una topología cociente en $\mathbb{S}^1$, tanto la asociada a exp como la asociada a $\exp|_{[0,2\pi]}$.

1. Veamos que la aplicación exponencial es abierta. Es suficiente probar que las imágenes de los elementos de una base de abiertos son abiertas. Tomemos la base de abiertos para $\mathbb{R}$ dada por

$$\{I_{a,\theta} : \ a \in \mathbb{R}, \ 0 < \theta < \pi\},$$

donde $I_{a,\theta} = (a-\theta, a+\theta)$. Sean $x_a = \exp(a)$ y $r_\theta = \sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2\sin(\theta/2)$, tenemos que $\exp(I_{a,\theta}) = B(x_a, r_\theta) \cap \mathbb{S}^1$. La aplicación exponencial no es cerrada, pues el saturado $\mathrm{Sat}C$ del



cerrado $C = \{2\pi n + 1/n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \subset \mathbb{R}$ no es cerrado. En efecto, tenemos que

$$\mathrm{Sat}C = \{2\pi k + 1/n : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}.$$

2. Veamos que $\exp|_{[0,2\pi]}$ es cerrada. Es suficiente probar que las imágenes de los elementos de una base de cerrados en $[0,2\pi]$ son cerradas. Una base de cerrados en $\mathbb{R}$ viene dada por los complementarios de los $I_{a,\theta}$. Ahora bien, tenemos que

$$(\mathbb{R} \setminus I_{a,\theta}) \cap [0,2\pi] = [0, \text{mín}\{a-\theta, 2\pi\}] \cup [\text{máx}\{0, a+\theta\}, 2\pi]$$

(algún término en la unión podría ser vacío). Así, es suficiente ver que la imagen de los intervalos $[0,t]$ y $[t,2\pi]$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ es cerrada, pero esto es cierto pues

$$\begin{array}{rcll} \exp([0,t]) & = & \overline{B}\left(x, \frac{t}{2}\right) \cap \mathbb{S}^1, & x = \exp(\frac{t}{2}) \\ \exp([t,2\pi]) & = & \overline{B}(x, \frac{2\pi - t}{2}) \cap \mathbb{S}^1, & x = \exp(\frac{2\pi - t}{2}) \end{array}$$

Que no es abierta se sigue tomando el abierto $U = [0,\pi)$, cuyo saturado viene dado por $\mathrm{Sat}U = [0,\pi) \cup \{2\pi\}$, que no es abierto.

■ **Ejemplo 7.3 — Cilindro.** Sea $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y consideramos la aplicación

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to C, \quad h(t,x) = (e^{it}, x)$$

Nótese que para cada $x \in \mathbb{R}$ y para cada $t \in \mathbb{R}$, la relación de equivalencia inducida por h identifica los puntos $(2\pi k + t, x)$, para $k \in \mathbb{Z}$. Como $t \mapsto e^{it}$ y $x \mapsto x$ son aplicaciones sobreyectivas, continuas y abiertas, también lo es h. Así, la topología de C como producto, que es también la topología de C como subespacio de $\mathbb{R}^3$, coincide con la topología cociente dada por h.

■ **Ejemplo 7.4 — Toro.** Consideramos la aplicación

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \quad h(t,s) = (e^{it}, e^{is})$$

La clase de equivalencia de un punto $(t,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el conjunto

$$\{(t + 2\pi k, s + 2\pi \ell) : (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Como la aplicación $\theta \mapsto e^{i\theta}$ es sobreyectiva, continua y abierta, también lo es h. Así, la topología de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ como producto, es la topología cociente asociada a h. Llamaremos *toro topológico* a cualquier espacio homeomorfo a este.

Por otro lado, más adelante, en el tema de compacidad, veremos que la restricción

$$h_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

es una aplicación cerrada (esto es consecuencia de que las aplicaciones continuas de compactos en espacios de Hausdorff son siempre cerradas). Como consencuencia obtenemos también el toro topológico como cociente de esta aplicación.

Otra presentación del toro topológico, que llamaremos toro sumergido es la siguiente. Dados $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$ con $r < R$, el *toro sumergido* $T_{r,R} \subset \mathbb{R}^3$ *de radios* r *y* R es el subespacio imagen de la aplicación

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,2\pi]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (t,s) & \mapsto & ((R + r\cos t)\cos s, (R + r\cos t)\sin s, r\sin t). \end{array}$$

La aplicación $\tilde{g} : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to T_{r,R}$ dada por $(t,s) \mapsto g(t,s)$ es sobreyectiva y continua (pues g es continua). Con el mismo argumento de antes, cuando hablemos de compacidad, veremos que $\tilde{g}$ también es cerrada y por tanto una aplicación de cociente. Nótese que las relaciones inducidas por $\tilde{g}$ y por $h_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ son la misma (ejercicio). Como consecuencia obtenemos que el toro sumergido $T_{r,R} \subset \mathbb{R}^3$ es un toro topológico.

7.2 Pegado de topologías

Consideremos una familia $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ de espacios topológicos y sea

$$X = \bigcup\nolimits_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha.$$

Para cada $\alpha \in \Lambda$, denotemos por $\iota_\alpha : Y_\alpha \to X$ la inclusión. La *topología "de pegado" en* X *de la familia* $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es la topología final de X asociada a la familia

$$\{(Y_\alpha, \tau_\alpha),\ \iota_\alpha : Y_\alpha \to X\}_{\alpha\in\Lambda}.$$

■ **Observación 7.5** Nótese que los abiertos para la topología "de pegado" son exactamente los subconjuntos $U \subset X$ tales que $U \cap Y_\alpha$ es abierto en (Y_α, τ_α), para todo $\alpha \in \Lambda$. Análogamente, los cerrados para la topología "de pegado" son exactamente los subconjuntos $C \subset X$ tales que $C \cap Y_\alpha$ es cerrado en (Y_α, τ_α), para todo $\alpha \in \Lambda$.

Una pregunta natural es saber cuándo la topología en Y_α como subespacio del espacio de pegado es la topología τ_α original, es decir, que de alguna manera el pegado que hemos hecho es "bueno". En el siguiente resultado damos condiciones suficientes para ello.

Proposición 7.2.1 Sea (X,τ) el espacio de pegado de una familia de espacios topológicos $\{(Y_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$. Sea $\tau_{\alpha\beta}$ la topología en $Y_\alpha\cap Y_\beta$ como subespacio de (Y_α,τ_α) y sea $\tau_{\beta\alpha}$ la topología en $Y_\alpha\cap Y_\beta$ como subespacio de (Y_β,τ_β). Supongamos que ambas topologías son la misma. Se tiene que:

1. Si $Y_\alpha\cap Y_\beta\in\tau_\alpha$, para todos $\alpha,\beta\in\Lambda$, entonces Y_α es un abierto de (X,τ), para todo $\alpha\in\Lambda$ y τ_α es la topología de Y_α como subespacio de (X,τ).
2. Si $Y_\alpha\cap Y_\beta$ es un cerrado de (Y_α,τ_α), para todos $\alpha,\beta\in\Lambda$, entonces Y_α es un cerrado de (X,τ), para todo $\alpha\in\Lambda$ y τ_α es la topología de Y_α como subespacio de (X,τ).

Demostración. Sea $\tau|_{Y_\alpha}$ la topología de Y_α como subespacio de (X,τ). Comprobemos primero que $\tau|_{Y_\alpha}\subset\tau_\alpha$. Sea $V\in\tau|_{Y_\alpha}$, sabemos que existe $U\in\tau$ tal que $V=Y_\alpha\cap U$. Por otro lado, como $U\in\tau$ se tiene que $U\cap Y_\alpha\in\tau_\alpha$. Así pues

$$V=Y_\alpha\cap V=Y_\alpha\cap(Y_\alpha\cap U)=Y_\alpha\cap U\in\tau_\alpha.$$

Nótese que la propiedad $\tau|_{Y_\alpha}\subset\tau_\alpha$ es general y no requiere de ninguna de las hipótesis impuestas.

Supongamos ahora que se cumplen las hipótesis del apartado 1), es decir, que $\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha}$ y que $Y_\alpha\cap Y_\beta$ es abierto en (Y_α,τ_α), para todos $\alpha,\beta\in\Lambda$. Probaremos la siguiente afirmación:

"Todo abierto de (Y_α,τ_α) es abierto de (X,τ), para todo $\alpha\in\Lambda$".

Como consecuencia se concluye que Y_α es abierto en (X,τ) y que $\tau_\alpha\subset\tau|_{Y_\alpha}$. Uniendo esto con lo anterior tenemos además que se da la igualdad $\tau_\alpha=\tau|_{Y_\alpha}$.

Probemos pues que todo abierto V en (Y_α,τ_α) es abierto en (X,τ). Dado cualquier otro índice $\beta\in\Lambda$, debemos comprobar que $V\cap Y_\beta\in\tau_\beta$. Escribamos, por simplificar $Y_{\alpha\beta}=Y_\alpha\cap Y_\beta$. Puesto que $V\subset Y_\alpha$, tenemos

$$V\cap Y_\beta=V\cap(Y_\alpha\cap Y_\beta)=V\cap Y_{\alpha\beta}.$$

Como V es abierto en (Y_α,τ_α), entonces $V\cap Y_{\alpha\beta}$ es abierto en $(Y_{\alpha\beta},\tau_{\alpha\beta})$. Ahora, ya que $\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha}$, se tiene que $V\cap Y_\beta$ es abierto en $(Y_{\alpha\beta},\tau_{\beta\alpha})$. Puesto que $Y_{\alpha\beta}$ es un abierto de (Y_β,τ_β), todo abierto de $(Y_{\alpha\beta},\tau_{\beta\alpha})$ es abierto de (Y_β,τ_β). Por tanto $V\cap Y_\beta$ es abierto en (Y_β,τ_β), como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que se cumplen las hipótesis del apartado 2), es decir, que $\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha}$ y que $Y_\alpha\cap Y_\beta$ es cerrado en (Y_α,τ_α), para todos $\alpha,\beta\in\Lambda$. Probaremos la siguiente afirmación:

"Todo cerrado de (Y_α,τ_α) es cerrado de (X,τ), para todo $\alpha\in\Lambda$".

Como consecuencia se concluye que Y_α es cerrado en (X,τ) y que $\tau_\alpha\subset\tau|_{Y_\alpha}$. Como antes, tenemos además que se da la igualdad $\tau_\alpha=\tau|_{Y_\alpha}$.

La prueba de que todo cerrado de (Y_α,τ_α) es cerrado de (X,τ), se hace "mutatis mutandis" como en el caso de abiertos. ■

■ **Observación 7.6** En la proposición anterior, si no se cumplen las hipótesis de 1) o 2), puede ocurrir que τ_α no sea la topología de subespacio de (X,τ), como veremos en el siguiente ejemplo. Tomemos

$$X=\{a,b,c\},\quad Y_1=\{a,c\},\quad Y_2=\{a,b\},\quad Y_3=\{b,c\}.$$

y sean τ_1 la topología discreta de Y_1 y τ_2,τ_3 las topologías groseras de Y_2 e Y_3, respectivamente. Las topologías τ_{ij} con $i\neq j$ e $i,j\in\{1,2,3\}$ son siempre la única posible en un conjunto unipuntual.

Así pues, se cumple la hipótesis general de la proposición. Nótese que $Y_1 \cap Y_2$ no es ni abierto ni cerrado en (Y_2, τ_2).

Sea τ la topología de pegado de X y denotemos por $\tau|_{Y_1}$ la topología de Y_1 como subespacio de (X,τ). Sabemos que $\tau|_{Y_1} \subset \tau_1$. Veamos que, sin embargo, no se da la igualdad. El conjunto unipuntual $\{a\}$ es un abierto en (Y_1, τ_1). Veamos que no lo es en $(Y_1, \tau|_{Y_1})$. Sea $W \in \tau|_{Y_1}$ con $a \in W$, es decir, existe $U \in \tau$ con $a \in U$ y $W = Y_1 \cap U$. Como $a \in U \cap Y_2$ y $U \cap Y_2 \in \tau_2$, se tiene que $b \in U$; como $b \in U \cap Y_3$ y $U \cap Y_3 \in \tau_3$, se tiene que $c \in U$. Pero entonces $U = X$ y $W = Y_1$. Nótese que, de hecho, la topología τ es la grosera en X.

Existe un recíproco parcial de la proposición anterior, que enunciaremos en la siguiente proposición. Pero antes, daremos la siguiente caracterización de los cerrados en una topología cualquiera.

Lema 7.2.2 Sea (X,τ) un espacio topológico y $C \subset X$ un subconjunto. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. C es un cerrado en (X,τ).
2. Existe un recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de X por abiertos U_i en (X,τ) de modo que $U_i \cap C$ es cerrado en la topología de U_i como subespacio de (X,τ), para todo $i \in I$.

Demostración. Si C es cerrado, tomando el recubrimiento cuyo único abierto es el propio X, hemos terminado. Recíprocamente, sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X por abiertos en (X,τ) de modo que $U_i \cap C$ sea cerrado en U_i. Tenemos que

$$X \setminus C = \bigcup_{i\in I}(U_i \setminus C) = \bigcup_{i\in I}(U_i \setminus (U_i \cap C)),$$

que es un abierto de (X,τ) por ser unión de los abiertos $U_i \setminus (U_i \cap C)$ de U_i. ∎

Proposición 7.2.3 Sea (X,τ) un espacio topológico y consideremos una familia de subespacios $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ que recubren todo X (los Y_α son subconjuntos de X y las topologías τ_α son las topologías de subespacio). Tenemos que τ es la topología final de X asociada a las inclusiones $\iota_\alpha : (Y_\alpha, \tau_\alpha) \to X$ en los siguientes supuestos:

a) Si Y_α es abierto en (X,τ), para todo $\alpha \in \Lambda$.

b) Si Y_α es cerrado en (X,τ), para todo $\alpha \in \Lambda$, y además se cumple la propiedad de *finitud local* siguiente:

> "Para todo $x \in X$, existe un abierto $U \in \tau$ con $x \in U$ de modo que el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : U \cap Y_\alpha \neq \emptyset\}$ sea finito."

Demostración. Sean $\iota_\alpha : (Y, \tau_\alpha) \to (X,\tau)$ las inclusiones, para todo $\alpha \in \Lambda$. Debemos probar que una aplicación

$$g : (X,\tau) \to (Z, \tau_Z)$$

es continua si y solo si lo son las composiciones $g \circ \iota_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Supongamos primero que g es continua. Dado $\alpha \in \Lambda$, sabemos que la aplicación ι_α es continua, así que la composición $g \circ \iota_\alpha$ también lo es. Recíprocamente, supongamos que las composiciones $g \circ \iota_\alpha$ son continuas, para todo $\alpha \in \Lambda$ y veamos que g es continua en los supuestos del enunciado.

a) Consideramos el caso en que los Y_α son todos abiertos en (X,τ). Sea V un abierto de (Z,τ_Z), queremos ver que $g^{-1}(V)$ es abierto en (X,τ). Tenemos

$$g^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} g^{-1}(V) \cap Y_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (g \circ \iota_\alpha)^{-1}(V).$$

Sabemos que $(g \circ \iota_\alpha)^{-1}(V)$ es abierto en (Y_α, τ_α) y por tanto en (X,τ), puesto que los Y_α son abiertos en (X,τ). Por tanto $g^{-1}(V)$ es unión de abiertos en (X,τ), luego abierto en (X,τ).

b) Supongamos ahora que $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia localmente finita de cerrados en (X,τ). Esto es, para cada punto $x\in X$ existe un abierto $U_x\in\tau$ con $x\in U$ y un subconjunto finito $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\}\subset\Lambda$ de modo que

$$U_x\subset Y_{\alpha_1}\cup Y_{\alpha_2}\cup\cdots\cup Y_{\alpha_k}.$$

Dado un cerrado C en (Z,τ_Z), queremos ver que $g^{-1}(C)$ es cerrado en (X,τ). Como antes, tenemos que $g^{-1}(C)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(g^{-1}(C)\cap Y_\alpha)$, donde los $g^{-1}(C)\cap Y_\alpha$ son cerrados en (Y_α,τ_α). De esta manera

$$g^{-1}(C)\cap U_x=(\textstyle\bigcup_{j=1}^k(g^{-1}(C)\cap Y_{\alpha_j}))\cap U_x$$

es un cerrado de U_x (pues es la intersección de U_x con una unión finita de cerrados). Aplicando el lema previo al recubrimiento $\{U_x\}_{x\in X}$ se concluye que $g^{-1}(C)$ es cerrado en (X,τ). ■

7.3 Topología del espacio proyectivo

Dado $n\in\mathbb{N}$, consideremos $\mathbb{R}^{n+1}$ con su topología usual (la asociada a la distancia euclídea en $\mathbb{R}^{n+1}$) que, como sabemos, coincide con la topología producto de la topología usual en $\mathbb{R}$. Con el fin de no sobrecargar la notación, cada vez que consideremos un espacio topológico que sea $\mathbb{R}^m$ con la topología usual, para $m\in\mathbb{N}$, o bien un subespacio del mismo, no indicaremos explícitamente que estamos considerando la topología usual. El lector sabrá perdonarnos esta licencia en aras de la limpieza de notación.

El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ es el conjunto de rectas vectoriales de $\mathbb{R}^{n+1}$. Tenemos una aplicación suprayectiva

$$\Lambda:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}\to\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}},$$

que envía cada $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ en la recta vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ generada por $\mathbf{x}$ (que pasa por $\mathbf{x}$ y por $\mathbf{0}$, en una terminología afín). La aplicación suprayectiva Λ define una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$, cuyo conjunto cociente se identifica con $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Nótese que

$$\Lambda(\mathbf{x})=\Lambda(\mathbf{y})\Leftrightarrow \text{ existe } \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \text{ tal que } \mathbf{y}=\lambda\mathbf{x}.$$

Así, la relación de equivalencia inducida por Λ es la de proporcionalidad.

La *n-esfera* $\mathbb{S}^n$ es el cerrado de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$\mathbb{S}^n=\{\mathbf{x}=(x_0,x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1};\ \textstyle\sum_{i=0}^n x_i^2=1\}.$$

Se tiene que $\mathbf{0}\notin\mathbb{S}^n$ y así $\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$. La restricción $\Lambda|_{\mathbb{S}^n}:\mathbb{S}^n\to\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ es también una aplicación suprayectiva, pues cada punto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ tiene una anteimagen formada por exactamente dos puntos diametralmente opuestos (antipodales), así $\Lambda|_{\mathbb{S}^n}$ define una relación de equivalencia en $\mathbb{S}^n$.

A continuación, introducimos tres topologías τ_1,τ_2 y $\tilde\tau$ sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. En lo que sigue, probaremos que son la misma topología, esto es

$$\tau_1=\tau_2=\tilde\tau,$$

que es lo que denominaremos "topología usual" del espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

En primer lugar podemos dotar $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ de la topología cociente asociada a la aplicación Λ, a esta topología la llamaremos τ_1. La topología τ_2 será también una topología cociente, la asociada a la aplicación restringida $\Lambda|_{\mathbb{S}^n}$. Finalmente construyamos una tercera topología "de pegado", que llamamos $\tilde\tau$, sobre $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Dados $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ con $\Lambda(\mathbf{x})=\Lambda(\mathbf{y})$ y un índice $i=0,1,\dots,n$, nótese que $x_i\neq 0$ si y solamente si $y_i\neq 0$. Así, el subconjunto U_i de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ dado por

$$U_i=\{\Lambda(\mathbf{x}):\ x_i\neq 0\}\subset\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$$

está bien definido. Además, la familia de conjuntos $\{U_i\}_{i=0}^n$ recubre $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, esto es

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \bigcup_{i=0}^n U_i.$$

Para cada $i = 0,1,\ldots,n$, podemos establecer aplicaciones biyectivas $\phi_i : \mathbb{R}^n \to U_i$, dadas por $\phi_i(u_1,u_2,\ldots,u_n) = \Lambda((u_1,u_2,\ldots,u_i,1,u_{i+1},u_{i+2},\ldots,u_n))$. En los casos particulares en los que $i = 0$ o $i = n$ se tiene

$$\begin{array}{rcl} \phi_0(u_1,u_2,\ldots,u_n) & = & \Lambda((1,u_1,u_2,\ldots,u_n)) \\ \phi_n(u_1,u_2,\ldots,u_n) & = & \Lambda((u_1,u_2,\ldots,u_n,1)). \end{array}$$

La biyecciones ϕ_i nos permiten dotar U_i de una topología, que denotaremos $\tilde{\tau}_i$, de manera que ϕ_i induzca un homeomorfismo entre $(U_i,\tilde{\tau}_i)$ y $\mathbb{R}^n$ con su topología usual. Esto es, la topología $\tilde{\tau}_i$ está dada por

$$\tilde{\tau}_i = \{V \subset U_i : \ \phi_i^{-1}(V) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n\}.$$

En esta situación, las inclusiones

$$\iota_i : (U_i,\tilde{\tau}_i) \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

permiten dotar $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ de una topología de pegado, que denotaremos $\tilde{\tau}$.

Antes de comenzar con la prueba de que las tres topologías introducidas son iguales, presentemos dos criterios generales de continuidad.

Proposición 7.3.1 Sea $f : (Y,\tau) \to (Z,\tau')$ una aplicación entre espacios topológicos. Si $\{V_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de Y por abiertos de (Y,τ), entonces f es continua si y solamente si las restricciones

$$f|_{V_i} : (V_i,\tau|_{V_i}) \to (Z,\tau'),$$

son aplicaciones continuas, para cada $i \in I$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 7.2.3 a). ■

Proposición 7.3.2 Sea $f : (Y,\tau) \to (Z,\tau')$ una aplicación entre espacios topológicos. Si $\{W_j\}_{j\in J}$ es un recubrimiento de Z, tal que $f^{-1}(W_j)$ es abierto en (Y,τ), para cada $j \in J$, entonces f es continua si y solamente si las aplicaciones

$$g_j : (f^{-1}(W_j),\tau|_{f^{-1}(W_j)}) \to (W_j,\tau'|_{W_j}),$$

dadas por $g_j(y) = f(y)$, son continuas, para cada $j \in J$.

Demostración. Escribamos para simplificar $V_j = f^{-1}(W_j)$; por hipótesis la familia $\{V_j\}_{j\in J}$ es un recubrimiento por abiertos de (Y,τ). Denotemos por

$$\iota_j : (V_j,\tau|_{V_j}) \to (Y,\tau), \quad \iota'_j : (W_j,\tau'|_{W_j}) \to (Z,\tau')$$

las inclusiones correspondientes, para todo $j \in J$. Escribamos

$$h_j = \iota'_j \circ g_j = f \circ \iota_j : (V_j,\tau|_{V_j}) \to (Z,\tau').$$

Por la propiedad universal de la topología del subespacio, sabemos que g_j es continua si y solamente si h_j es continua. Por la proposición anterior, tenemos que f es continua si y solamente si las h_j son continuas, para todo $j \in J$. Se concluye que f es continua si y solamente si las aplicaciones g_j son continuas. ■

■ **Observación 7.7** Obsérvese que en la proposición anterior, los conjuntos W_j no tienen por qué ser abiertos.

El siguiente resultado nos permite colocarnos en las condiciones de la Proposición 7.2.1. De esta manera aseguramos que cada U_i es abierto en $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \tilde{\tau})$ y que un subconjunto W de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ es abierto en $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \tilde{\tau})$ si y solamente si las intersecciones $W \cap U_i$ son abiertas en $(U_i, \tilde{\tau}_i)$, para cada $i = 0, 1, \dots, n$.

Lema 7.3.3 Dados $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$, se tiene que la intersección $U_i \cap U_j$ es abierta en $(U_i, \tilde{\tau}_i)$ y en $(U_j, \tilde{\tau}_j)$ y la topología de subespacio de $U_i \cap U_j$ como subespacio de $(U_i, \tilde{\tau}_i)$ es la misma que como subespacio de $(U_j, \tilde{\tau}_j)$.

Demostración. Veamos este resultado para el caso particular de $i = 0, j = n$; el lector será capaz de reproducir la prueba para cualquier pareja i, j de la misma manera (aunque con algo más de complicación en las notaciones). Tenemos que

$$U_0 \cap U_n = \{\Lambda(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} : \ x_0 \neq 0 \neq x_n\}.$$

Notemos que $\phi_0^{-1}(U_0 \cap U_n)$ y $\phi_n^{-1}(U_0 \cap U_n)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$, dado que

$$\begin{aligned} \phi_0^{-1}(U_0 \cap U_n) &= \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : \ u_n \neq 0\}, \\ \phi_n^{-1}(U_0 \cap U_n) &= \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : \ u_1 \neq 0\}. \end{aligned}$$

Por tanto, la intersección $U_0 \cap U_n$ es abierta en $(U_0, \tilde{\tau}_0)$ y en $(U_n, \tilde{\tau}_n)$. Ahora, para probar la igualdad de las topologías de subespacio, es suficiente ver que un subconjunto $W \subset U_0 \cap U_n$ es abierto en $(U_0, \tilde{\tau}_0)$, si y solamente si, lo es en $(U_n, \tilde{\tau}_n)$. Para ello, basta probar que la biyección

$$h : \phi_0^{-1}(U_0 \cap U_n) \to \phi_n^{-1}(U_0 \cap U_n),$$

dada por $h(\mathbf{u}) = \phi_n^{-1}(\phi_0(\mathbf{u}))$, es un homeomorfismo. Pero se tiene que

$$\begin{aligned} h((u_1, u_2, \dots, u_n)) &= \left(\frac{1}{u_n}, \frac{u_1}{u_n}, \dots, \frac{u_{n-1}}{u_n}\right), \\ h^{-1}((u_1, u_2, \dots, u_n)) &= \left(\frac{u_2}{u_1}, \dots, \frac{u_n}{u_1}, \frac{1}{u_1}\right), \end{aligned}$$

que son aplicaciones continuas. Así que h es un homeomorfismo. ■

Prueba de $\tau_1 = \tilde{\tau}$. Veamos primero que $\tilde{\tau} \subset \tau_1$. Sabemos que esto equivale a probar que la terna $(\mathrm{id}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}}, \tau_1, \tilde{\tau})$ es una aplicación continua. Por la propiedad universal de la topología cociente τ_1, es suficiente comprobar que la aplicación

$$\Lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to (\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \tilde{\tau})$$

es continua. Lo haremos aplicando el criterio de continuidad establecido en la proposición 7.3.2. Así, para cada $i = 0, 1, \dots, n$, debemos comprobar que:

- El conjunto $\Lambda^{-1}(U_i)$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- La aplicación $g_i : \Lambda^{-1}(U_i) \to (U_i, \tilde{\tau}|_{U_i})$, dada por $g_i(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x})$ es continua.

La primera afirmación se sigue de que

$$\Lambda^{-1}(U_i) = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_i \neq 0\}.$$

En cuanto a la segunda afirmación, dado que $\tilde{\tau}|_{U_i} = \tilde{\tau}_i$ y, por construcción, tenemos que $(U_i, \tilde{\tau}_i)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ vía ϕ_i, es suficiente probar que

$$f_i = \phi_i^{-1} \circ g_i : \Lambda^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$$

es continua. Pero esto se se sigue de la expresión:

$$f_i(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

Veamos ahora que $\tau_1 \subset \tilde{\tau}$. De nuevo, esto equivale a comprobar que la terna $(\mathrm{id}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}}, \tilde{\tau}, \tau_1)$ es una aplicación continua. Veámoslo usando el criterio de continuidad establecido en la proposición 7.3.1, o sencillamente invocando la propiedad universal de la topología de pegado. Sabemos que $\{U_i\}_{i=0}^n$ es un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Así, es suficiente probar que las inclusiones

$$\iota_i : (U_i, \tilde{\tau}_i) \to (\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \tau_1)$$

son aplicaciones continuas. Pasando a través del homeomorfismo ϕ_i, esto es equivalente a probar que las aplicaciones

$$b_i = \iota_i \circ \phi_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \tau_1)$$

son continuas. Lo probaremos, por comodidad en las notaciones para el caso $i = 0$. El lector sabrá hacerlo para el resto de los índices i. Nótese que $b_0 = \Lambda \circ c_0$, donde $c_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ es la aplicación dada por

$$c_0((u_1, u_2, \ldots, u_n)) = (1, u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

que es continua: lo es al verla con llegada en $\mathbb{R}^{n+1}$, por serlo cada una de sus componentes (propiedad universal de la topología producto) y por tanto lo es ella misma (propiedad universal de la topología del subespacio). A su vez, la aplicación

$$\Lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to (\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \tau_1)$$

es continua por ser una aplicación de cociente. Como consecuencia b_0 es continua, que es lo que queríamos demostrar.

■

Prueba de $\tau_1 = \tau_2$. Como es habitual, para ver que $\tau_1 \subset \tau_2$, es suficiente probar que la terna $(\mathrm{id}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}}, \tau_2, \tau_1)$ es una aplicación continua. Por la propiedad universal de la topología cociente τ_2, sabemos que esto es equivalente a probar que la aplicación

$$\Lambda|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to (\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \tau_1)$$

es continua, pero esto es la restricción de una aplicación continua a un subespacio, que sabemos que es continua.

Finalmente, veamos que $\tau_2 \subset \tau_1$, es decir, que la terna $(\mathrm{id}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}}, \tau_1, \tau_2)$ es una aplicación continua. Por la propiedad universal de la topología cociente τ_1, esto es equivalente a probar que la aplicación

$$\Lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to (\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \tau_2)$$

es continua. Veamos que ésta es composición de dos aplicaciones continuas. En efecto, $\Lambda = \Lambda|_{\mathbb{S}^1} \circ r$, donde

$$r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{S}^n, \quad r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|,$$

que es una aplicación continua: lo es al verla con llegada en $\mathbb{R}^n$, por serlo cada una de sus componentes (propiedad universal de la topología producto) y por tanto lo es ella misma (propiedad universal de la topología del subespacio $\mathbb{S}^n$). A su vez, la aplicación

$$\Lambda|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to (\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \tau_2)$$

es continua por ser una aplicación de cociente. De esta manera concluimos la prueba de que $\tau_1 = \tau_2$. ■

■ **Observación 7.8** Sea (X,τ) un espacio topológico, $A \subset X$ y denotemos por $\tau|_A$ la topología de A como subespacio de (X,τ). Una aplicación continua $r:(X,\tau)\to(A,\tau|_A)$ se llama *retracto* si su restricción $r_A:(A,\tau|_A)\to(A,\tau|_A)$ es la identidad topológica $\mathrm{Idtop}_{(A,\tau|_A)}$. Nótese que la aplicación

$$r:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}\to\mathbb{S}^n,\quad r(\mathbf{x})=\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|,$$

de la demostración anterior es un retracto.

7.3.1 Sobre la topología del plano proyectivo real

El objetivo que perseguimos en esta subsección es justificar la siguiente afirmación:

> *E*l plano proyectivo real es unión de dos cerrados que comparten una circunferencia, uno de ellos es homemorfo al disco y la circunferencia es su borde, el otro es una banda de Möebius y la circunferencia también es su "borde".

Ya sabemos dotar el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ de su topología usual $\tau_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}$. Hemos visto tres formas de obtener dicha topología:

a) Como cociente de la topología de $\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ por la aplicación $\Lambda:\mathbf{x}\mapsto L(\mathbf{x})$, donde $L(x)$ es la recta vectorial de $\mathbb{R}^3$ generada por $\mathbf{x}$.
b) Como cociente de la aplicación $\Omega=\Lambda|_{\mathbb{S}^2}:\mathbb{S}^2\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, restricción de la anterior, donde recordamos que $\mathbb{S}^2$ es la *superficie esférica*

$$\mathbb{S}^2=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}\subset\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$$

   La aplicación Ω induce en $\mathbb{S}^2$ la relación de equivalencia *antipodal*, que identifica $\mathbf{x}$ con $-\mathbf{x}$.
c) Como una topología de pegado de espacios homeomorfos a $\mathbb{R}^2$ (las tres cartas del plano proyectivo).

Lema 7.3.4 La aplicación $\Omega:\mathbb{S}^2\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ es cerrada y también abierta.

Demostración. Vamos a caracterizar como son los saturados $A\subset\mathbb{S}^2$ por la relación antipodal inducida por Ω. Tenemos que

$$\mathrm{Sat}A=A\cup a(A),$$

donde $a:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ es la aplicación antipodal dada por $a(\mathbf{x})=-\mathbf{x}$. Nótese que a es un homeomorfismo, por consiguiente, si A es cerrado, también lo es $a(A)$ y si A es abierto, también $a(A)$ es abierto. Por tanto, el saturado de todo cerrado es cerrado y también el saturado de todo abierto es abierto, como queríamos demostrar. ■

El plano proyectivo como cociente de un disco

Consideremos el *hemisferio norte* $\mathbb{H}_+$ definido por

$$\mathbb{H}_+=\mathbb{S}^2\cap\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ x_3\geq 0\}\subset\mathbb{S}^2.$$

Se trata de un cerrado de $\mathbb{S}^2$ y, por restricción de Ω, tenemos una aplicación continua

$$\Phi=\Omega|_{\mathbb{H}_+}:\mathbb{H}_+\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

Esta aplicación es continua, por ser restricción de una aplicación continua y es suprayectiva, pues toda recta vectorial de $\mathbb{R}^3$ corta $\mathbb{H}_+$. Además, también es cerrada, pues todo cerrado K de $\mathbb{H}_+$ es también cerrado de $\mathbb{S}^2$ y se tiene que $\Phi(K)=\Omega(K)$. Así pues, dado que toda aplicación continua, sobre y cerrada tiene como llegada la topología cociente correspondiente (es una aplicación de cociente), observamos que la topología usual de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ es de hecho la topología cociente asociada a la aplicación

$$\Phi = \Omega|_{\mathbb{H}_+} : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}.$$

Esta aplicación induce la relación de equivalencia en el hemisferio norte $\mathbb{H}_+$ que identifica los puntos antipodales del ecuador

$$\mathbb{E} = \mathbb{S}^2 \cap \{x_3 = 0\} = \mathbb{H}_+ \cap \{x_3 = 0\} = \{(x_1, x_2, 0) : \ (x_1, x_2) \in \mathbb{S}^1\},$$

donde recordamos que $\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Así pues, el ecuador $\mathbb{E}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ por el homeomorfismo

$$(x_1, x_2, 0) \mapsto (x_1, x_2).$$

Resumiendo, tenemos que:

> *L*a topología usual del plano proyectivo se identifica con la topología cociente del hemisferio norte $\mathbb{H}_+$ por la relación que identifica los pares de puntos antipodales del ecuador.

Consideremos ahora el *disco (o círculo)*:

$$\mathbb{D} = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : \ v_1^2 + v_2^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

y la aplicación $\pi : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{D}$ dada por $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$. Esta aplicación es continua y tiene inversa continua dada por

$$\pi^{-1} : (v_1, v_2) \mapsto \left(v_1, v_2, \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}\right).$$

En conclusión, la aplicación π es un homeomorfismo entre $\mathbb{H}_+$ y $\mathbb{D}$, que identifica el ecuador $\mathbb{E}$ con la circunferencia $\mathbb{S}^1$. A través de este isomorfismo tenemos una aplicación de cociente

$$\tilde{\Phi} = \Phi \circ \pi^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

y la relación de relación de equivalencia inducida identifica las parejas de puntos antipodales de la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Así pues, podemos ver la topología del plano proyectivo como una topología cociente de una figura plana:

> *E*l plano proyectivo, con su topología usual, es homeomorfo al cociente del disco $\mathbb{D}$ por la relación de equivalencia que identifica los puntos antipodales de la circunferencia $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}$.

Retirando un disco del plano proyectivo

(Para simplificar nuestra analogía con la superficie de la Tierra, nos tomaremos la licencia de suponer que el eje de la Tierra está inclinado 45 grados respecto del plano de la eclíptica). Consideremos el *casquete polar ártico* $\mathbf{C}_+ \subset \mathbb{H}_+$ definido como sigue:

$$\mathbf{C}_+ = \mathbb{H}_+ \cap \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 \geq r\}, \quad r = 1/\sqrt{2}.$$

La imagen por π de $\mathbf{C}_+$ está dada por

$$\pi(\mathbf{C}_+) = \mathbb{D}_r = \{(v_1, v_2) : \ v_1^2 + v_2^2 \leq 1/2\}.$$

Dado que π es un homeomorfismo, tenemos que $\mathbf{C}_+$ es homeomorfo al disco $\mathbb{D}_r$ y por consiguiente, también a $\mathbb{D}$ (mediante una homotecia). Por otro lado, podemos considerar el cerrado

$$\mathbf{D} = \Phi(\mathbf{C}_+) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}},$$

con su topología de subespacio de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Como $\mathbf{C}_+$ no corta el ecuador, la aplicación $\mathbf{C}_+ \to \mathbf{D}$ inducida por Φ es continua, cerrada y también es biyectiva. Por consiguiente $\mathbf{D}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ homeomorfo a un disco. El *borde del disco* $\partial\mathbf{D}$, visto en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ es homeomorfo a una circunferencia y está definido por

$$\partial\mathbf{D} = \Phi(\pi^{-1}(\mathbb{S}_r)), \quad \mathbb{S}_r = \{(v_1, v_2) :\ v_1^2 + v_2^2 = 1/2\}.$$

La banda intertropical en el plano proyectivo como banda de Möebius

Consideremos ahora la *banda intertropical* $\mathbf{B} \subset \mathbb{S}^2$ dada por

$$\mathbf{B} = \mathbb{S}^2 \cap \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ -1/\sqrt{2} \leq x_3 \leq 1/\sqrt{2}\},$$

que es un cerrado en $\mathbb{S}^2$. Su imagen $\mathbf{M} = \Omega(\mathbf{B}) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ es, por tanto, un cerrado del plano proyectivo real al que podemos dotar de la topología de subespacio de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. La aplicación

$$\Omega_{\mathbf{B}} : \mathbf{B} \to \mathbf{M},$$

inducida por Ω es continua, suprayectiva y cerrada, por tanto es una aplicación de cociente. Es decir, la topología de $\mathbf{M}$ como subespacio de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ es la topología cociente asociada a $\Omega_{\mathbf{B}}$. Notemos que la relación de equivalencia inducida es la restricción de la relación antipodal a $\mathbf{B}$, así, cada clase de equivalencia tiene exactamente dos elementos, que son antipodales. Observemos que

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbf{M} \cup \mathbf{D}, \quad \mathbf{M} \cap \mathbf{D} = \partial\mathbf{D}.$$

A continuación, daremos una descripción de $\mathbf{M}$ como cociente de una región plana de $\mathbb{R}^2$ por una relación de equivalencia que identifica los puntos de su borde de manera muy conocida: la relación de equivalencia típica que se usa para describir una banda de Möebius.

En primer lugar, descompongamos la banda intertropical $\mathbf{B}$ en dos regiones $\mathbf{B}_+$ y $\mathbf{B}_-$, dadas como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_+ &= \mathbf{B} \cap \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 \geq 0\}, \\ \mathbf{B}_- &= \mathbf{B} \cap \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 \leq 0\}. \end{aligned}$$

Se podría decir que son las regiones con “longitudes geográficas” no negativa y no positiva, respectivamente. La unión del meridiano cero $\mathbf{G}_{-1}$ con su antimeridiano $\mathbf{G}_{+1}$ estaría dada por

$$\mathbf{G}_{-1} \cup \mathbf{G}_{+1} = \mathbb{S}^2 \cap \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 = 0\}.$$

Nótese que la intersección $\mathbf{B}_+ \cap \mathbf{B}_-$ está dada por

$$\mathbf{B}_+ \cap \mathbf{B}_- = \mathbf{B} \cap \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 = 0\} = \Gamma_{-1} \cup \Gamma_1,$$

donde $\Gamma_{-1} = \mathbf{G}_{-1} \cap \mathbf{B}$ y $\Gamma_{+1} = \mathbf{G}_{+1} \cap \mathbf{B}$. Argumentando como en situaciones anteriores, tenemos que la aplicación

$$\Omega_{\mathbf{B}}|_{\mathbf{B}_+} : \mathbf{B}_+ \to \mathbf{M}$$

es continua, sobreyectiva y cerrada, por tanto una aplicación de cociente y la relación de equivalencia que induce es la antipodal entre los puntos de $\Gamma_{-1} \cup \Gamma_1$.

Por otro lado, consideramos la figura plana

$$\Delta = \{(0, x_2, x_3);\ -1/\sqrt{2} \leq x_3 \leq 1/\sqrt{2},\ x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} \subset \{0\} \times \mathbb{R}^2$$

que interseca a $\mathbf{B}_+$ exactamente en $\Gamma_{-1} \cup \Gamma_1$. Tenemos un homeomorfismo $\mathbf{B}_+ \to \Delta$, que fija los puntos de $\Gamma_{-1} \cup \Gamma_1$, y está dado por

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (0, x_2, x_3).$$

De este modo se tiene que $\mathbf{M}$ es homeomorfo al cociente de Δ por la relación de equivalencia antipodal en $\Gamma_{-1} \cup \Gamma_1$. Se trata pues de una banda de Moebius.

Apéndice al capítulo: Espacios dados por atlas

En este apéndice, consideramos el dato de una familia de conjuntos que, con unas ciertas condiciones de compatibilidad, se reúnen como subconjuntos de un solo espacio. Si dotamos a cada uno de ellos una topología, obtenemos la topología "de pegado" como la topología natural asociada a este espacio.

Atlas de conjuntos

Sea $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de conjuntos. Para cada pareja $(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda$, supongamos fijados un subconjunto $Y_{\alpha\beta}\subset Y_\alpha$ y una biyección

$$\phi_{\alpha\beta}: Y_{\alpha\beta}\to Y_{\beta\alpha}$$

de manera que se cumplan las siguientes propiedades:

a) Para todo $\alpha\in\Lambda$, se tiene que $Y_{\alpha\alpha}=Y_\alpha$ y $\phi_{\alpha\alpha}=\mathrm{id}_{Y_\alpha}$.

b) Para todos $\alpha,\beta\in\Lambda$, se tiene que $\phi_{\alpha\beta}^{-1}=\phi_{\beta\alpha}$.

c) (Condición de cociclo). Para todos $\alpha,\beta,\gamma\in\Lambda$ se tiene que

$$\phi_{\alpha\beta}(Y_{\alpha\beta}\cap Y_{\alpha\gamma}) \quad = \quad Y_{\beta\alpha}\cap Y_{\beta\gamma},$$

y además, para todo $y\in Y_{\alpha\beta}\cap Y_{\alpha\gamma}$ se cumple que $\phi_{\alpha\gamma}(y)=\phi_{\beta\gamma}(\phi_{\alpha\beta}(y))$.

Llamaremos *atlas de conjuntos* $\mathscr{A}$ a todo dato

$$\mathscr{A}=\big(\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda},\ \{\phi_{\alpha\beta}:Y_{\alpha\beta}\to Y_{\beta\alpha}\}_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda}\big)$$

cumpliendo las propiedades anteriores.

El dato de un atlas de conjuntos se puede interpretar como una manera (al estilo de la descripción de los mares y las tierras mediante cartas naúticas o mapas) de describir un determinado conjunto X, cuya construcción detallamos a continuación.

Denotemos por $Y=\cup_{\alpha\in\Lambda}\{\alpha\}\times Y_\alpha$ la unión disjunta de los conjuntos Y_α y consideremos la relación binaria $\sim$ en Y que "identifica" $\{\alpha\}\times Y_{\alpha\beta}$ con $\{\beta\}\times Y_{\beta\alpha}$, vía la biyección $\phi_{\alpha\beta}$. Es decir, la relación $\sim$ está dada por

$$(\alpha,y)\sim(\beta,y')\Leftrightarrow y\in Y_{\alpha\beta},\ \phi_{\alpha\beta}(y)=y'\in Y_{\beta\alpha}.$$

Proposición 7.3.5 La relación binaria introducida en el párrafo anterior es una relación de equivalencia.

Demostración. Se cumple la propiedad reflexiva: dado $(\alpha,y)\in Y$, tenemos que $(\alpha,y)\sim(\alpha,y)$, pues $y\in Y_\alpha=Y_{\alpha\alpha}$ e $y=\phi_{\alpha\alpha}(y)$, ya que $\phi_{\alpha\alpha}=\mathrm{id}_{Y_\alpha}$.

Veamos la propiedad simétrica. Supongamos que $(\alpha,y)\sim(\beta,y')$. Sabemos que $y\in Y_{\alpha\beta}$, y también que $y'=\phi_{\alpha\beta}(y)\in Y_{\beta\alpha}$. Como $\phi_{\beta\alpha}=\phi_{\alpha\beta}^{-1}$, obtenemos que

$$\phi_{\beta\alpha}(y')=\phi_{\alpha\beta}^{-1}(y')=y,$$

y por tanto se concluye que $(\beta,y')\sim(\alpha,y)$.

Finalmente, para probar la propiedad transitiva, supongamos que $(\alpha,y)\sim(\beta,y')\sim(\gamma,y'')$. Queremos ver que $y\in Y_{\alpha\gamma}$ y que $\phi_{\alpha\gamma}(y)=y''$. Sabemos que

$$y\in Y_{\alpha\beta},\ \phi_{\alpha\beta}(y)=y'\in Y_{\beta\alpha},\qquad y'\in Y_{\beta\gamma},\ \phi_{\beta\gamma}(y')=y''\in Y_{\gamma\beta}.$$

Así, tenemos que $y'\in Y_{\beta\gamma}\cap Y_{\beta\alpha}$, y como $y=\phi_{\alpha\beta}^{-1}(y')=\phi_{\beta\alpha}(y')$, por la condición de cociclo tenemos además que

$$y\in\phi_{\beta\alpha}(Y_{\beta\gamma}\cap Y_{\beta\alpha})=Y_{\alpha\beta}\cap Y_{\alpha\gamma}.$$

En particular tenemos $y\in Y_{\alpha\gamma}$. Finalmente, la condición de cociclo también nos asegura que $\phi_{\alpha\gamma}(y)=\phi_{\beta\gamma}(\phi_{\alpha\beta}(y))=\phi_{\beta\gamma}(y')=y''$. ■

Tenemos establecida, por tanto, una relación de equivalencia en la unión disjunta Y. Denotemos por X el conjunto cociente de Y por esta relación de equivalencia, al que llamaremos *el espacio del atlas de conjuntos* $\mathscr{A}$. Sea $c : Y \to X$ la aplicación natural de paso al cociente. Para cada $\alpha \in \Lambda$, denotemos mediante $j_\alpha : Y_\alpha \to Y$ la aplicación inyectiva dada por $j_\alpha(y) = (\alpha, y)$, y sea $\phi_\alpha = c \circ j_\alpha : Y_\alpha \to X$.

Proposición 7.3.6 Con las notaciones anteriores, sean $X_\alpha = \phi_\alpha(Y_\alpha) \subset X$ y $X_{\alpha\beta} = X_\alpha \cap X_\beta$, para todos $\alpha, \beta \in \Lambda$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. La familia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ recubre X.
2. Las aplicaciones ϕ_α son inyectivas, para todo $\alpha \in \Lambda$.
3. Para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$, se tiene que $\phi_\alpha(Y_{\alpha\beta}) = X_{\alpha\beta}$.
4. Para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$ y cada $y \in Y_{\alpha\beta}$ se tiene que $\phi_\alpha(y) = \phi_\beta(\phi_{\alpha\beta}(y))$.

Demostración. Veamos la primera afirmación. Tenemos que

$$X = c(Y) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} c(\{\alpha\} \times Y_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} c(j_\alpha(Y_\alpha)) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha.$$

Probemos la inyectividad de ϕ_α, para $\alpha \in \Lambda$ fijado. Consideremos $y, y' \in Y_\alpha$. Como $Y_{\alpha\alpha} = Y_\alpha$ y $\phi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{Y_\alpha}$, tenemos que

$$\phi_\alpha(y) = \phi_\alpha(y') \Leftrightarrow (\alpha, y) = (\alpha, y') \Leftrightarrow y = y'.$$

Veamos que $\phi_\alpha(Y_{\alpha\beta}) = X_{\alpha\beta} = X_\alpha \cap X_\beta$, probando las dos inclusiones. Consideremos en primer lugar $y \in Y_{\alpha\beta} \subset Y_\alpha$ y escribamos $x = \phi_\alpha(y)$; queremos ver que $x \in X_{\alpha\beta}$. Ya sabemos que $x \in X_\alpha$, así que falta ver que $x \in X_\beta$. Sea $y' = \phi_{\alpha\beta}(y) \in Y_{\beta\alpha} \subset Y_\beta$. Por definición, tenemos que $(\alpha, y) \sim (\beta, y')$, así que

$$x = \phi_\beta(y') \in X_\beta.$$

Tomemos ahora $x \in X_{\alpha\beta}$ y veamos que $x \in \phi_\alpha(Y_{\alpha\beta})$. Sabemos que existen $y \in Y_\alpha$ y también $y' \in Y_\beta$ tales que

$$x = \phi_\alpha(y) = \phi_\beta(y').$$

Esto significa exactamente que $(\alpha, y) \sim (\beta, y')$. Por lo tanto $y \in Y_{\alpha\beta}$ y entonces $x \in \phi_\alpha(Y_{\alpha\beta})$, como queríamos.

Comprobemos finalmente que para todo $y \in Y_{\alpha\beta}$ se tiene que $\phi_\alpha(y) = \phi_\beta(\phi_{\alpha\beta}(y))$. Escribamos $x = \phi_\alpha(y)$ y hagamos $y' = \phi_{\alpha\beta}(y)$, sabemos que (α, y) y (β, y') están relacionados, por lo tanto $\phi_\beta(y') = x$. ■

La proposición anterior se interpreta diciendo que el conjunto X es unión de "copias" de cada Y_α (las X_α). Además, la intersección $X_{\alpha\beta} = X_\alpha \cap X_\beta$ se lee en Y_α como $Y_{\alpha\beta}$ y en Y_β como $Y_{\beta\alpha}$. Más aún, un punto y de $Y_{\alpha\beta}$ y otro y' de $Y_{\beta\alpha}$ se asocian al mismo punto de $X_{\alpha\beta}$ si y solo si $y' = \phi_{\alpha\beta}(y)$. En este sentido, podemos imaginar que cada Y_α es una "carta" que representa una parte del espacio X y que la "compatibilidad" entre las cartas está dada por las aplicaciones $\phi_{\alpha\beta}$.

Topología dada por un atlas de espacios topológicos

Consideremos un atlas de conjuntos

$$\mathscr{A} = \left(\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda},\ \{\phi_{\alpha\beta} : Y_{\alpha\beta} \to Y_{\beta\alpha}\}_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda}\right)$$

y sea X el espacio del atlas $\mathscr{A}$. Sabemos que tenemos aplicaciones inyectivas

$$\phi_\alpha : Y_\alpha \to X, \quad \alpha \in \Lambda,$$

cuyas imágenes denotamos $X_\alpha = \phi_\alpha(Y_\alpha)$. Supongamos ahora que tenemos fijadas topologías τ_α en cada Y_α. El dato $(\mathscr{A}, \{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ se llamará *pseudo-atlas de espacios topológicos*. Las aplicaciones ϕ_α inducen la topología final τ sobre X, que se llamará *topología del pseudo-atlas*.

Proposición 7.3.7 Sea $(\mathscr{A}, \{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ un pseudo-atlas de espacios topológicos y sea τ la topología del pseudo-atlas sobre el espacio X de $\mathscr{A}$. Consideremos sobre cada $X_\alpha = \phi_\alpha(Y_\alpha)$ la topología $\tilde{\tau}_\alpha$ obtenida a partir de τ_α como sigue

$$\tilde{\tau}_\alpha = \{\phi_\alpha(V) : V \in \tau_\alpha\}.$$

Entonces, la topología τ es la topología de pegado de la familia $\{(X_\alpha, \tilde{\tau}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Demostración. Ejercicio para el lector. ■

Diremos que $(\mathscr{A}, \{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ es un *atlas de espacios topológicos por abiertos*, respectivamente *por cerrados,* si se cumple que:

1. Cada $\phi_{\alpha\beta} : Y_{\alpha\beta} \to Y_{\beta\alpha}$ es un homeomorfismo, donde se consideran en $Y_{\alpha\beta} \subset Y_\alpha$ y en $Y_{\beta\alpha} \subset Y_\beta$ las topologías de subespacio.
2. Cada $Y_{\alpha\beta} \subset Y_\alpha$ es un abierto, respectivamente un cerrado, de (Y_α, τ_α).

Proposición 7.3.8 Supongamos que $(\mathscr{A}, \{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ es un atlas de espacios topológicos por abiertos, respectivamente por cerrados. Entonces los conjuntos X_α son abiertos, respectivamente cerrados, de (X, τ) y las aplicaciones

$$\varphi_\alpha : (Y_\alpha, \tau_\alpha) \to (X_\alpha, \tau|_{X_\alpha}) \quad \alpha \in \Lambda,$$

son homeomorfismos, donde $\varphi_\alpha(y) = \phi_\alpha(y)$ y $\tau|_{X_\alpha}$ es la topología de subespacio de X_α en (X, τ).

Demostración. A la vista de las proposiciones 7.2.1 y 7.3.7, es suficiente comprobar que la familia $\{(X_\alpha, \tilde{\tau}_\alpha)\}$ está en la situación descrita en la proposición 7.2.1.

Se tienen las siguientes afirmaciones:

1. Las aplicaciones
$$\phi_{\alpha\beta} : (Y_{\alpha\beta}, \tau_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}}) \to (Y_{\beta\alpha}, \tau_\beta|_{Y_{\beta\alpha}})$$
son homeomorfismos si y solo si coinciden las topologías de $X_{\alpha\beta}$ como subespacio de $(X_\alpha, \tilde{\tau}_\alpha)$ y como subespacio de $(X_\beta, \tilde{\tau}_\beta)$.
2. Cada $Y_{\alpha\beta}$ es abierto en Y_α si y solo si $X_{\alpha\beta}$ es abierto en $(X_\alpha, \tilde{\tau}_\alpha)$.
3. Cada $Y_{\alpha\beta}$ es cerrado en Y_α si y solo si $X_{\alpha\beta}$ es cerrado en $(X_\alpha, \tilde{\tau}_\alpha)$.

Las afirmaciones 2 y 3 son directas de la construcción de la topología $\tilde{\tau}_\alpha$. Veamos la afirmación 1. Supongamos que $\phi_{\alpha\beta}$ es un homeomorfismo. Entonces se tiene que

$$\text{Dado } U \subset Y_{\alpha\beta}, \quad U \in \tau_\alpha|_{Y_\alpha\beta} \Leftrightarrow \phi_{\alpha\beta}(U) \in \tau_\beta|_{Y_\beta\alpha}.$$

Consideremos $V \subset X_{\alpha\beta}$. Tenemos

$$\begin{aligned} V \in \tau_{X_\alpha}|_{X_{\alpha\beta}} &\Leftrightarrow \varphi_\alpha^{-1}(V) \in \tau_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \\ &\Leftrightarrow \phi_{\alpha\beta}(\varphi_\alpha^{-1}(V)) = \phi_\beta(V) \in \tau_\beta|_{Y_{\beta\alpha}} \\ &\Leftrightarrow V \in \tau_{X_\beta}|_{X_{\alpha\beta}}. \end{aligned}$$

Razonando del mismo modo se concluye que si $\tau_{X_\alpha}|_{X_{\alpha\beta}} = \tau_{X_\beta}|_{X_{\alpha\beta}}$, entonces $\phi_{\alpha\beta}$ es un homeomorfismo. ■

Composición de topologías finales

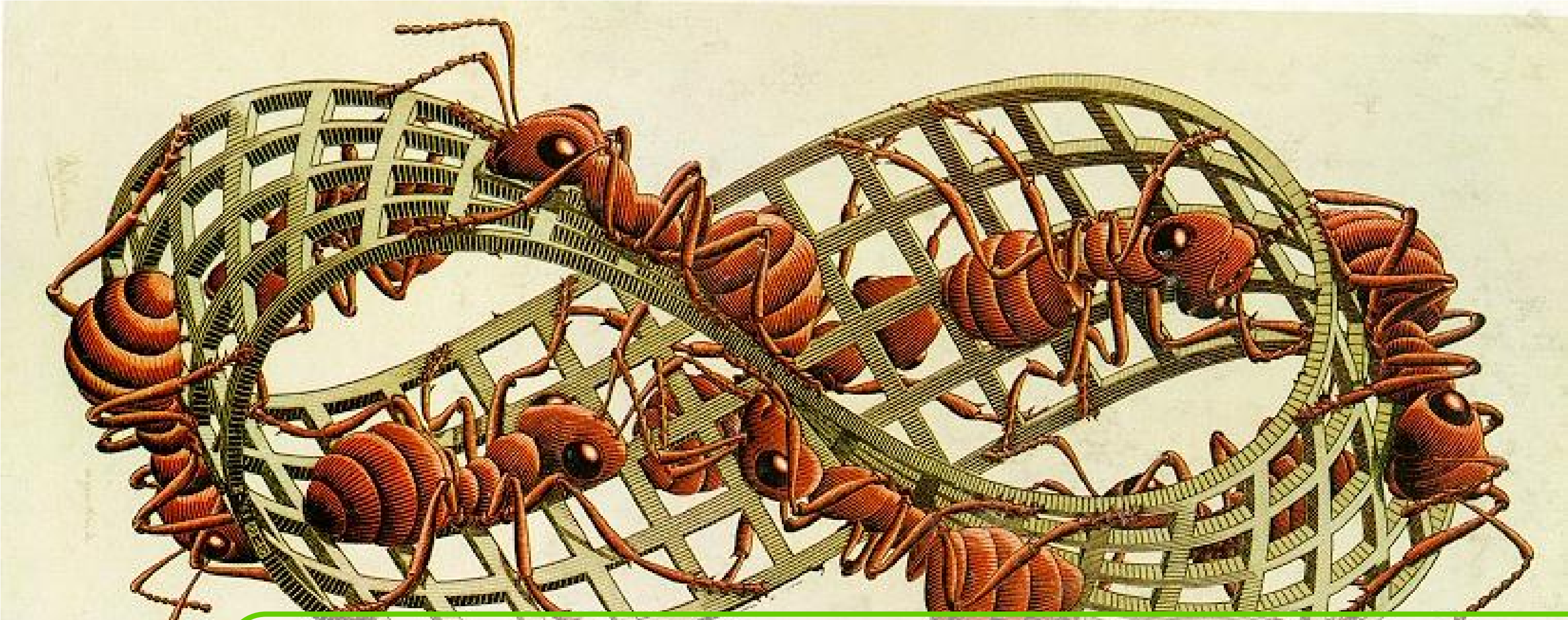
La topología del espacio de un pseudo-atlas topológico puede construirse no directamente como topología final, si no como cociente de una topología final más sencilla sobre la unión disjunta Y. Esto es consecuencia de un resultado más general, que enunciamos y probamos a continuación.

Proposición 7.3.9 Sea $\{h_\alpha : (Y_\alpha, \tau_\alpha) \to Y\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de aplicaciones y denotemos por τ_Y la topología final sobre Y asociada a esta familia. Consideremos una aplicación $\pi : Y \to X$ y denotemos $f_\alpha = \pi \circ h_\alpha$. Sobre X podemos considerar la topología τ final asociada a la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y la topología τ' final asociada a la única aplicación $\pi : (Y, \tau_Y) \to X$. Entonces $\tau = \tau'$.

Demostración. Sabemos que

$$\begin{array}{rcl} \tau & = & \{U \subset X : f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha,\ \text{para todo } \alpha \in \Lambda\} \\ \tau_Y & = & \{V \subset Y : h_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha,\ \text{para todo } \alpha \in \Lambda\} \\ \tau' & = & \{U \subset X : \pi^{-1}(U) \in \tau_Y\}. \end{array}$$

Se concluye observando que $f_\alpha^{-1}(U) = h_\alpha^{-1}(\pi^{-1}(U))$. ■



8. Axiomas de numerabilidad y separación

Muchos de los espacios topológicos habituales, por ejemplo los espacios métricos, tienen propiedades que limitan el cardinal de su topología, o de los sistemas de entornos, y que asimismo permiten separar de diferentes maneras puntos unos de otros, puntos de cerrados y cerrados entre sí. De hecho, algunas de estas propiedades fueron originalmente introducidas en la definición de espacio topológico por Hausdorff. El conjunto de estas propiedades es útil para determinar en qué condiciones un espacio topológico proviene de un espacio métrico, aunque nosotros no entraremos de lleno en este problema. Introduciremos también brevemente los conceptos relativos a convergencia secuencial, que son de uso habitual es espacios métricos.

Terminaremos el capítulo con el *lema de Urysohn*, que tiene importancia propia ya que en él aparece la construcción de una función real continua a partir de un espacio topológico abstracto.

8.1 Axiomas de numerabilidad

8.1.1 Primer axioma de numerabilidad

Un espacio topológico (X,τ) cumple el *primer axioma de numerabilidad* o es 1-*numerable* si todo punto x de X admite un sistema fundamental de entornos numerable.

Lema 8.1.1 Si (X,τ) es un espacio topológico 1-numerable, todo punto $x\in X$ admite una base numerable de entornos encajados.

Demostración. Dado $x\in X$, sea $\mathscr{V}_x=\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de entornos numerable de x en (X,τ). Escribamos

$$B_n=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n,\quad n=1,2,\ldots$$

La familia $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema fundamental de entornos de x en (X,τ). En efecto, si $U\in\mathscr{E}_x$, sabemos que existe $m\geq 1$ tal que $A_m\subset U$, pero entonces $B_m\subset A_m\subset U$. Por construcción $B_n\supset B_{n+1}$, para cada $n=1,2,\ldots$, como buscábamos. ■

■ **Ejemplo 8.1** La topología asociada a un espacio métrico satisface el primer axioma de numerabilidad: basta considerar las bolas con radio racional. En particular, todo espacio con la topología discreta es 1-numerable, así como $\mathbb{R}^n$ con su topología usual.

■ **Ejemplo 8.2** La recta de Sorgenfrey también satisface el primer axioma de numerabilidad; dado $x \in \mathbb{R}$, basta considerar $\mathscr{V}_x = \{[x,p) : p \in \mathbb{Q}_{>x}\}$.

■ **Ejemplo 8.3** Si X es un conjunto no numerable dotado de la topología cofinita, entonces no es 1-numerable. De hecho, ningún punto tiene una base de entornos numerable. Veámoslo. Supongamos que existe una base de entornos numerable $\mathscr{V}_x = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ para un punto x de X. Para todo $y \neq x$, sabemos que $X \setminus \{y\} \in \mathscr{E}_x$, por tanto, existe $B_n \in \mathscr{V}_x$ tal que $B_n \subset X \setminus \{y\}$. Así, podemos escribir

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus B_n).$$

Como $X \setminus B_n$ es un conjunto finito, tenemos expresado $X \setminus \{x\}$ como unión numerable de conjuntos finitos, y es por tanto un conjunto numerable, lo cual contradice que X fuera no numerable.

■ **Ejemplo 8.4** Otros ejemplos de espacios topológicos, que desarrollaremos como ejercicios, son los siguientes:

- Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia numerable de espacios topológicos que satisfacen el primer axioma de numerabilidad, entonces el espacio topológico producto también es 1-numerable.
- Todo subespacio de un espacio 1-numerable es 1-numerable.
- El pegado por abiertos de espacios 1-numerables también es 1-numerable.
- El pegado por cerrados de espacios 1-numerables no tiene por qué ser 1-numerable.

■ **Ejemplo 8.5** El cociente de un espacio 1-numerable no tiene por qué ser 1-numerable, como ilustra el siguiente ejemplo. Sea $Y \subset \mathbb{R}^2$ la unión de las rectas

$$\ell_k = \{(x,k) :\ x \in \mathbb{R}\}, \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

y sea $\mathscr{R}$ la relación de equivalencia que identifica los puntos $(0,k)$ entre sí. Escribamos $X = Y/\mathscr{R}$ el conjunto cociente y sea $c : Y \mapsto X$ la aplicación canónica de paso al cociente. Dotamos Y con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$ con su topología usual, que por tanto, es un espacio 1-numerable. En cambio X con la topología cociente asociada a la aplicación $c : Y \to X$ no es 1-numerable. Veámoslo.

Probaremos que $\mathbf{x}_0 = c((0,0))$ no tiene una base numerable de entornos. Consideremos una familia numerable cualquiera $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ de entornos de $\mathbf{x}_0$. Vamos a construir un entorno V de $\mathbf{x}_0$ que no contiene dentro ninguno de los U_i; por tanto, la familia elegida no es un sistema fundamental de entornos. Para cada par $(i,k) \in \mathbb{N}^2_{\geq 1}$, existe un intervalo abierto no vacío $(-\varepsilon_{ik}, \varepsilon_{ik})$ de $\mathbb{R}$ tal que

$$c^{-1}(U_i) \supset (-\varepsilon_{ik}, \varepsilon_{ik}) \times \{k\}.$$

Consideremos el abierto saturado de Y dado por

$$W = \bigcup_{i=0}^{\infty}\left((-\tfrac{\varepsilon_{ii}}{2}, \tfrac{\varepsilon_{ii}}{2}) \times \{i\}\right)$$

Sabemos que $V = c(W)$ es un entorno abierto de $\mathbf{x}_0$. Además, dado $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tenemos que $U_i \not\subset V$, pues para cualquier $x \in (\frac{\varepsilon_{ii}}{2}, \varepsilon_{ii})$ observamos que $c((x,i)) \in U_i \setminus V$.

8.1.2 Sucesiones y convergencia

Sea (X,τ) un espacio topológico. Recordemos que llamamos *sucesión en* X a toda aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to X$. Esto es, las sucesiones en X son los elementos del conjunto $X^{\mathbb{N}}$. Llamaremos *soporte* de σ a la imagen de σ, que es un subconjunto de X.

Definición 8.1.1 Consideremos una sucesión σ en X y un punto $x \in X$.

1. Diremos que x es un *punto límite de σ en* (X,τ) si y solo si para cada entorno A de x existe un entero n_A con la propiedad de que $\sigma(n) \in A$ para todo $n \geq n_A$. También diremos que σ *converge hacia* x y lo denotaremos a veces $\sigma \rightsquigarrow x$.
2. Diremos que x es un *punto de acumulación de σ en* (X,τ) si y solo si para cada entorno

A de x y cada $m \in \mathbb{N}$ existe un entero $n \geq m$ con la propiedad de que $\sigma(n) \in A$.

■ **Observación 8.1** La comprobación de que un punto x es límite o de acumulación para una sucesión puede efectuarse utilizando cualquier base de entornos del punto x.

Todo punto límite de una sucesión es también punto de acumulación. El recíproco no es cierto: por ejemplo la sucesión $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dada por $\sigma(n) = (-1)^n$, donde en $\mathbb{R}$ tenemos la topología usual no tiene puntos límite, pero tanto -1 como 1 son puntos de acumulación. Para incidir más en esta observación, introducimos el concepto de subsucesión.

Definición 8.1.2 Sea X un conjunto y $\sigma : \mathbb{N} \to X$ una sucesión. Llamamos *subsucesión de* σ a toda composición $\sigma \circ \rho$, donde $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente.

La siguiente proposición caracteriza los puntos de acumulación de sucesiones en espacios topológicos 1-numerables.

Proposición 8.1.2 Sea σ una sucesión es un espacio topológico (X, τ) que cumple el primer axioma de numerabilidad y sea x un punto de X. Son equivalentes:
1. Existe una subsucesión σ' de σ de manera que x es un punto límite de σ'.
2. El punto x es de acumulación para σ.

Demostración. Veamos primero $1 \Rightarrow 2$, que es completamente general y no requiere del primer axioma de numerabilidad. Escribamos $\sigma' = \sigma \circ \rho$. Dado $A \in \mathscr{E}_x$ y $n \in \mathbb{N}$, buscamos $m \geq n$ tal que $\sigma(m) \in A$. Sabemos que existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma'(k) \in A$, para todo $k \geq \ell$. Ahora, tomando

$$m \in \rho(\mathbb{N}) \cap \{k \in \mathbb{N} : \ k \geq \text{máx}\{n, \rho(\ell)\}\} \neq \emptyset,$$

hemos terminado. Probaremos ahora $2 \Rightarrow 1$. Como (X, τ) es 1-numerable, podemos seleccionar $\mathscr{V}_x = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base de entornos encajados de x. Nótese que para cada $i, j \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$A_{ij} = \{k > i : \sigma(k) \in B_j\} \subset \mathbb{N}$$

es no vacío, por ser x un punto de acumulación de σ. Definiremos $\sigma' = \sigma \circ \rho$ de manera recursiva. Tomamos $\rho(1) = \text{mín} A_{11}$. Dado $i \geq 1$, supongamos definido $\rho(i) = m_i$, con $\sigma(m_i) \in B_i$, entonces tomamos

$$\rho(i+1) = \text{mín} A_{m_i, i+1}.$$

Por construcción ρ es estrictamente creciente, así σ' es una subsucesión de σ. Ahora, dado un elemento de la base $B_i \in \mathscr{V}_x$, también por construcción tenemos que

$$\sigma'(j) = \sigma(\rho(j)) \in B_j \subset B_i, \quad \forall j \geq i,$$

por tanto x es un punto límite de σ'. ■

Señalamos a continuación algunos aspectos, quizá anti-intuitivos, de las definitiones de puntos límite y de acumulación de una sucesión:
- Una sucesión no tiene por qué ser convergente. Por ejemplo, cualquier sucesión no asintóticamente constante en X con la topología discreta. (Diremos que σ es *asintóticamente constante* o que *estabiliza* si existe n_0 tal que $\sigma(n) = \sigma(n_0)$ para todo $n \geq n_0$).
- Una sucesión puede tener varios límites. Por ejemplo, toda sucesión en X con la topología grosera converge a cualquiera de los puntos de X. Veremos más adelante que la unicidad de los límites estará garantizada si pedimos al espacio topológico la propiedad adicional de poder separar dos puntos dados mediante sendos abiertos disjuntos (propiedad de Hausdorff).

- No es lo mismo que un punto sea de acumulación de una sucesión σ a que sea de acumulación de su soporte. Por ejemplo, si σ es constante igual a x, entonces x es punto de acumulación de σ, y de hecho punto límite de σ; en cambio, si $\{x\}$ es un abierto en (X,τ), entonces x es un punto aislado del soporte de σ. Por otro lado, si consideramos $X = \{x_1,x_2,y\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{x_1,x_2\}, \{y\}\}$ y σ la sucesión dada por $\sigma(1) = x_1$, $\sigma(2) = x_2$ y $\sigma(n) = y$, para todo $n \geq 3$. Tenemos que x_1 es punto de acumulación del soporte, pero no de la sucesión.

Proposición 8.1.3 Sea (X,τ) un espacio topológico. Consideremos un subconjunto $E \subset X$ y sea x un punto de acumulación de una sucesión $\sigma = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \in E$ para todo $n \geq 1$. Entonces $x \in \overline{E}$. En particular, todo punto límite de σ es adherente a E.

Demostración. Dado una entorno A de x y dado $m \in \mathbb{N}$, sabemos que existe $n \geq m$ tal que $x_n \in A$. Como $x_n \in E$, se tiene que $A \cap E \neq \emptyset$. Por tanto $x \in \overline{E}$. ■

Proposición 8.1.4 Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Para toda sucesión σ que tenga $x \in X$ como punto límite, se cumple que la sucesión $f \circ \sigma$ tiene $f(x)$ como punto límite.

Demostración. Sea B un entorno de $f(x)$. Como f es continua en x, existe un entorno A de x con $f(A) \subset B$. Como σ converge a x, existe n_0 tal que $\sigma(n) \in A$, para todo $n \geq n_0$. Se sigue que $f(\sigma(n)) \in f(A) \subset B$, para todo $n \geq n_0$, por tanto $f \circ \sigma$ converge a $f(x)$. ■

8.1.3 Espacios topológicos secuenciales y de Fréchet-Urysohn

Daremos aquí una introducción a los espacios secuenciales, más generales que los espacios 1-numerables, que son aquellos en los que la topología está determinada por los límites de sucesiones, en un sentido que precisaremos.

Definición 8.1.3 Dado un espacio topológico (X,τ) y un subconjunto $E \subset X$, decimos que E es *secuencialmente cerrado* si dada cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ con términos en E que converja hacia un punto $x \in X$, entonces $x \in E$. Decimos que (X,τ) es *secuencial* si todo subconjunto secuencialmente cerrado es cerrado.

Definición 8.1.4 Diremos que un espacio topológico (X,τ) es *de Fréchet-Urysohn* si se cumple la siguiente propiedad:

> *Para todo subconjunto $E \subset X$ y todo $x \in \overline{E}$ existe una sucesión σ con soporte contenido en E, de modo que x sea punto límite de σ.*

Proposición 8.1.5 Todo espacio topológico de Fréchet-Urysohn es secuencial.

Demostración. Sea (X,τ) un espacio topológico de Fréchet-Urysohn y sea $E \subset X$ un subconjunto secuencialmente cerrado. Queremos probar que $E = \overline{E}$, es decir, que E es cerrado. Tomemos $x \in \overline{E}$, como (X,τ) es de Fréchet-Urysohn, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$, con $x_n \rightsquigarrow x$. Como E es secuencialmente cerrado, se tiene que $x \in E$. Así, se concluye que $E \supset \overline{E}$ y por tanto $E = \overline{E}$. ■

Proposición 8.1.6 Todo espacio (X,τ) que cumpla el primer axioma de numerabilidad es de Fréchet-Urysohn y por tanto también es secuencial.

Demostración. Tenemos que probar que dado un subconjunto $E \subset X$ y un punto $x \in \overline{E}$ existe una sucesión de puntos de E que converge hacia x. Como (X,τ) es 1-numerable, sabemos que existe un sistema fundamental de entornos $\mathscr{V}_x = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ de x con la propiedad de que

$$B_i \supset B_{i+1}, \quad i = 1,2,\ldots$$

Puesto que $x \in \bar{E}$, podemos elegir $x_i \in B_i \cap E$, para cada $i = 1, 2 \ldots$. Ahora, la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ está formada por puntos de E y tiene x como punto límite. ■

En los espacios secuenciales se tiene la siguiente caracterización de la continuidad:

Proposición 8.1.7 Sea (X, τ_X) un espacio topológico secuencial. Entonces, para toda aplicación $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ son equivalentes:

1. La aplicación f es continua.
2. Para toda sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ en X converge hacia un punto $x \in X$, la sucesión imagen $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ converge hacia $f(x)$.

Demostración. Que $1 \Rightarrow 2$ es la proposición 8.1.4. Veamos ahora que $2 \Rightarrow 1$. Sea $C \subset Y$ un cerrado en (Y, τ_Y), queremos ver que $E = f^{-1}(C)$ es cerrado en (X, τ_X). Para ello basta ver que E es secuencialmente cerrado en (X, τ_X), puesto que es un espacio secuencial. Tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ en E con $x_n \rightsquigarrow x$. Debemos probar que $x \in E$. Sabemos que

$$f(x_n) \rightsquigarrow f(x).$$

Como $f(x_n) \in C$, para todo $n \geq 1$, se tiene que $f(x) \in \overline{C} = C$, en vista de la proposición 8.1.3. Por consiguiente, concluimos que

$$x \in f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(C) = E,$$

como queríamos demostrar. ■

■ **Observación 8.2** El recíproco de la proposición anterior es cierto, pero se sale del margen de estas notas. Por otro lado, la caracterización completamente general de la continuidad en términos de ideas de convergencia precisa de los conceptos de *redes* y *filtros*, que no estudiaremos en este curso.

Proposición 8.1.8 Sean (X, τ_X) un espacio topológico secuencial y

$$f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$$

una aplicación de cociente. Entonces (Y, τ_Y) es secuencial.

Demostración. Sea $A \subset Y$ un subconjunto secuencialmente cerrado. Queremos ver que A es cerrado. Por la definición de topología cociente, esto es equivalente a decir que $E = f^{-1}(A)$ es cerrado. Como (X, τ_X) es secuencial, es suficiente probar que E es secuencialmente cerrado. Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de puntos en E tal que $x_n \rightsquigarrow x$. Queremos ver que $x \in E$. Dado que f es continua, sabemos que $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de puntos en A tal que $f(x_n) \rightsquigarrow f(x)$ y como A es secuencialmente cerrado, tenemos que $f(x) \in A$. Es decir, tenemos que $x \in f^{-1}(f(x)) \subset E$, como queríamos demostrar. ■

■ **Ejemplo 8.6** El ejemplo 8.5 presenta un cociente de un espacio 1-numerable que no es 1-numerable. Sin embargo, a la vista de las proposiciones 8.1.6 y 8.1.8, este cociente sí será secuencial.

■ **Ejemplo 8.7** Sea (X, τ) un espacio topológico no numerable con la topología cofinita. Ya sabemos que (X, τ) no es 1-numerable. A continuación vemos que es un espacio de Fréchet-Urysohn y por consiguiente secuencial.

Veamos primero que $x_n \rightsquigarrow x$ en la topología cofinita si y solamente si el conjunto

$$F_y = \{n \in \mathbb{N} : x_n = y\}$$

es finito, para todo $y \neq x$.

- Supongamos primero que $x_n \rightsquigarrow x$. Dado $y \neq x$, tenemos que $X \setminus \{y\} \in \mathscr{E}_x$, así que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in X \setminus \{y\}$, así que F_y es finito.
- Supongamos ahora que F_y es finito, para todo $y \neq x$. Los entornos de x en la topología cofinita son de la forma $X \setminus H$ con H finito y $x \notin H$. Escribamos $n_y = \text{máx}\, F_y$, para todo $y \in H$ y $n_H = \text{máx}\, n_y$. Tenemos que $x_n \in X \setminus H$, para todo $n \geq n_H + 1$, por tanto $x_n \rightsquigarrow x$.

Veamos ahora que es un espacio de Fréchet-Urysohn. Para ello tomamos $E \subset X$ un punto $x \in \bar{E}$ y distinguimos los casos E finito y E infinito.

- Si E es finito, entonces $\overline{E} = E$ y $x \in E$. Tomamos $x_n = x$, para todo $n \geq 1$.
- Supongamos que E no es finito. Entonces $\overline{E} = X$ y existe una aplicación inyectiva $b : \mathbb{N} \to E$. La sucesión $x_n = b(n)$ converge a cualquier punto del espacio, pues el cardinal de F_y es cero o uno para cualquier $y \in X$.

■ **Observación 8.3** La caracterización anterior de la convergencia de sucesiones en la topología cofinita nos da tres posibilidades: o bien la sucesión no converge, o bien lo hace a un solo punto, o bien lo hace a todos los puntos del espacio.

■ **Ejemplo 8.8** Un conjunto X no numerable dotado de la topología conumerable es un espacio topológico no secuencial.

Veamos primero que $x_n \rightsquigarrow x$ en la topología conumerable si y solamente la sucesión es asintóticamente constante igual a x (es decir, la convergencia es la misma que en la topología discreta, pese a ser topologías distintas). Si la sucesión es asintóticamente constante igual a x, significa que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$, para todo $n \geq n_0$, así que $x_n \rightsquigarrow x$. Recíprocamente, consideramos el conjunto

$$C = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq x\},$$

que es numerable, así que $X \setminus C$ es un entorno (abierto) de x. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in X \setminus C$, para todo $n \geq n_0$. Dicho de otro modo, se tiene que $x_n = x$, para todo $n \geq n_0$, como queríamos probar.

Por cómo hemos caracterizado la convergencia, cualquier subconjunto de X es secuencialmente cerrado. Por otro lado, la topología no es la topología discreta, ya que los subconjuntos no numerables de X distintos de X no son cerrados. Por tanto este espacio no es secuencial.

■ **Ejemplo 8.9** Otro ejemplo de espacio no secuencial es el siguiente. Consideremos en $\{0,1\}$ la topología discreta y sea X el espacio producto $X = 2^{\mathbb{R}}$ con la topología producto. Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, denotemos $c_A \in 2^{\mathbb{R}}$ su función característica (toma el valor 1 en los puntos de A y el valor cero en los puntos de $X \setminus A$). Obsérvese que

$$X = 2^{\mathbb{R}} = \{c_A : A \subset \mathbb{R}\}.$$

Consideremos el conjunto $E = \{c_A;\ A \text{ es numerable }\} \subset 2^{\mathbb{R}}$. Tenemos que $c_{\mathbb{R}} \in \overline{E}$, por tanto E no es cerrado. Sin embargo, sí es secuencialmente cerrado, pues

$$c_{A_n} \rightsquigarrow c_A, \quad c_{A_n} \in E,$$

implica que $A \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es numerable y por tanto $c_A \in E$. Detallemos estas propiedades:

- $c_{\mathbb{R}} \in \overline{E}$. Los abiertos básicos que tienen $c_{\mathbb{R}}$ como elemento son precisamente los de la forma

  $$V_F = \{c_A : F \subset A\}, \quad F \subset \mathbb{R} \text{ es finito }.$$

  Por lo tanto, para cada F finito tenemos que $c_F \in V_F \cap E$ y así $V_F \cap E \neq \emptyset$.
- Si $c_{A_n} \rightsquigarrow c_A$, entonces $A \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Supongamos que no, es decir que existe $t \in A \setminus \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. El abierto

  $$U = \{c_B : t \in B\}$$

  contiene c_A y es tal que $c_{A_n} \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

■ **Observación 8.4** Para completar la batería de ejemplos que estamos proporcionando, deberíamos dar uno de espacio secuencial que no sea de Fréchet-Urysohn, sin embargo, los ejemplos conocidos son algo elaborados y no vamos a entrar en ellos. El lector interesado puede buscar información sobre los llamados *espacios de Arens*.

8.1.4 Segundo axioma de numerabilidad

Un espacio topológico (X,τ) cumple el *segundo axioma de numerabilidad* o es 2-*numerable* si tiene una base numerable de abiertos.

■ **Observación 8.5** Nótese que si (X,τ) cumple el segundo axioma de numerabilidad, también cumple el primer axioma de numerabilidad, pues los elementos de una base de abiertos que contienen un punto forman una base de entornos.

■ **Ejemplo 8.10** No todos los espacios métricos son 2-numerables: por ejemplo los espacios discretos no numerables. Algunos sí lo son: por ejemplo $\mathbb{R}^n$ con su topología usual, pues las bolas de centro con coordenadas racionales y radio racional forman una base de abiertos de $\mathbb{R}^n$.

■ **Ejemplo 8.11** Los subespacios de un espacio 2-numerable son 2-numerables. El producto numerable de espacios 2-numerables es 2-numerable. Como ya hemos visto para el caso 1-numerable, el cociente de espacios 2-numerables no tiene por qué ser 2-numerable.

Proposición 8.1.9 Sea (X,τ) un espacio topológico que cumple el segundo axioma de numerabilidad y consideremos una base de abiertos $\mathscr{B}$ para (X,τ). Entonces, existe una subfamilia numerable $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ que es base de abiertos para (X,τ).

Demostración. Como (X,τ) cumple el segundo axioma de numerabilidad, existe una base numerable de abiertos $\mathscr{C} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de (X,τ).

Consideremos el subconjunto $A \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ por

$$(n,m) \in A \Leftrightarrow \text{ existe } B \in \mathscr{B} \text{ con } V_n \subset B \subset V_m,$$

que es numerable. Para cada $(n,m) \in A$ seleccionemos un elemento $B_{nm} \in \mathscr{B}$ tal que $V_n \subset B_{nm} \subset V_m$ y definamos

$$\mathscr{B}' = \{B_{nm} : (n,m) \in A\}.$$

Veamos que $\mathscr{B}'$ es una base de abiertos para (X,τ). Para ello, hemos de ver que dados un abierto $U \in \tau$ y un punto $x \in U$, existe $(n,m) \in A$ tal que $x \in B_{nm} \subset U$. Como $\mathscr{C}$ es una base de abiertos, existe $V_m \in \mathscr{C}$ tal que

$$x \in V_m \subset U.$$

Ahora, como $\mathscr{B}$ es una base de abiertos, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que

$$x \in B \subset V_m \subset U.$$

De nuevo, como $\mathscr{C}$ es una base de abiertos, existe $V_n \in \mathscr{C}$ tal que

$$x \in V_n \subset B \subset V_m \subset U.$$

Concluimos que $(n,m) \in A$, y por tanto $x \in V_n \subset B_{nm} \subset V_m \subset U$. En particular $x \in B_{nm} \subset U$, como queríamos probar. ■

El segundo axioma de numerabilidad "limita" la cantidad de abiertos de una topología, de acuerdo con la siguiente observación:

■ **Observación 8.6** Sea (X,τ) un espacio topológico que cumple el segundo axioma de numerabilidad, entonces el cardinal de τ es menor que o igual al cardinal del continuo $\mathfrak{c} = \aleph(\mathbb{R}) = \aleph(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$. En efecto, sea $\mathscr{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de abiertos para (X,τ). A cada $U \in \tau$ le asignamos el elemento $I_U \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ dado por

$$I_U = \{n \in \mathbb{N} : B_n \subset U\} \subset \mathbb{N}.$$

Veamos que la aplicación $U \mapsto I_U$ es inyectiva y por tanto $\aleph(\tau) \leq \mathfrak{c}$. Como $\mathscr{B}$ es una base de abiertos, tenemos que

$$U = \bigcup_{n\in I_U} B_n.$$

Así que, si U y V son abiertos distintos de (X,τ) entonces $I_U \neq I_V$.

8.1.5 Espacios separables

Un concepto próximo del segundo axioma de numerabilidad es el de espacio separable. Un espacio topológico (X,τ) es *separable* si existe un subconjunto $D \subset X$ denso y numerable. (Recuérdese que D es denso si y solo si $\overline{D} = X$).

Proposición 8.1.10 Todo espacio topológico que satisface el segundo axioma de numerabilidad es separable.

Demostración. Sea (X,τ) un espacio topológico que satisface el segundo axioma de numerabilidad y sea $\mathscr{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de abiertos (no vacíos) para (X,τ). Seleccionemos un punto $x_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El conjunto

$$D = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$$

es denso en (X,τ). En efecto, dado $x \in X$ y cualquier entorno $A \in \mathscr{E}_x$, existe $B_n \in \mathscr{B}$, con $x \in B_n \subset A$. Por tanto $x_n \in D \cap B_n \subset D \cap A$ y por ende $D \cap A \neq \emptyset$. ■

■ **Ejemplo 8.12** El recíproco de la proposición anterior no es cierto, como muestra el siguiente ejemplo. Consideremos sobre $\mathbb{R}$ la topología τ_{sor} de la recta de Sorgenfrey. Una base de esta topología está dada por los intervalos de la forma

$$[a,b), \quad a,b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

Este espacio topológico es separable, pues $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable que corta cualquier abierto de la base, y por tanto es denso . Veamos que en cambio, no se cumple el segundo axioma de numerabilidad. Si se cumpliera, en virtud de la proposición 8.1.9, podríamos seleccionar una base numerable formada por abiertos de la base anterior, es decir

$$\{[a_n,b_n) : a_n,b_n \in \mathbb{R},\ a_n < b_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Tomemos $a \in \mathbb{R}$ diferente de todos los a_n. El intervalo $[a,a+1)$ es un abierto, y por tanto debería cumplirse que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a \in [a_n,b_n) \subset [a,a+1).$$

Pero esto solo es posible si $a_n = a$, lo que nos lleva a una contradicción. Así, no existe ninguna base numerable de abiertos.

En el caso de espacios topológico metrizables, (es decir, tales que existe una estructura de espacio métrico sobre X que induce la topología τ) el recíproco sí es cierto, como muestra el siguiente resultado:

Proposición 8.1.11 Un espacio topológico metrizable cumple el segundo axioma de numerabilidad si y solamente si es separable.

Demostración. Ya sabemos que si un espacio topológico cumple el segundo axioma de numerabilidad, entonces es separable. Supongamos ahora que (X,τ) es un espacio topológico separable. Es decir, que existe un subconjunto $D \subset X$ denso y numerable. Consideremos la familia numerable de abiertos

$$\mathscr{B} = \{B(x;1/n)\}_{(x,n)\in D\times\mathbb{N}_{\geq 1}},$$

formada por las bolas centradas en puntos de D de radios $1/n$. Veamos que $\mathscr{B}$ es una base de abiertos para (X,τ) y por tanto es un espacio 2-numerable. Para ello, debemos probar que dados $U \in \tau$ e $y \in U$, existen $x \in D$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$y \in B(x;1/n) \subset U.$$

Por la definición de topología asociada a la métrica, sabemos que existe $m \in \mathbb{N}$ para el que se cumple que

$$y \in B(y;1/m) \subset U.$$

Tomemos $n = 2m$. Como D es denso, existe $x \in D \cap B(y;1/n)$. Veamos que la bola $B(x;1/n)$ cumple la propiedad deseada. Como la distancia entre x e y es menor que $1/n$, se tiene que $y \in B(x;1/n)$. Por otro lado si $d(x,z) < 1/n$, entonces $d(y,z) < 1/m$ (úsese la propiedad triangular). Por tanto obtenemos que

$$y \in B(x;1/n) \subset B(y;1/m) \subset U,$$

como queríamos probar. ■

■ **Observación 8.7** Como consecuencia del resultado anterior, podemos afirma que la recta de Sorgenfrey no es un espacio topológico metrizable, ya que es separable, pero no satisface el segundo axioma de numerablidad.

■ **Ejemplo 8.13** El producto de una familia $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ de espacios separables es separable cuando $\aleph(I) \leq \aleph(\mathbb{R}) = c$. No incluiremos la prueba de esta afirmación en este curso. El lector interesado puede remitirse al teorema 16.4c) del libro de Willard.

■ **Ejemplo 8.14** Un subespacio de un espacio separable no tiene por qué ser separable. Tomemos por ejemplo un conjunto X, un punto $x \in X$ y dotemos X de la topología de x-inclusión, es decir

$$\tau = \{U \subset X : x \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

El conjunto unipuntual $\{x\}$ es denso, por tanto (X,τ) es separable. Sin embargo $Y = X \setminus \{x\}$ es no numerable y la topología de Y como subespacio de (X,τ) es la discreta, por tanto no es un subespacio separable.

8.2 Axiomas elementales de separación

En esta sección presentamos los primeros axiomas de separación T_0, T_1.

8.2.1 Espacios T_0

Diremos que un espacio topológico (X,τ) cumple el axioma T_0, o bien que es un *espacio topológico* T_0, si se cumple la siguiente afirmación:

Dados dos puntos distintos $x,y \in X$, o existe un abierto U con $x \in U$, $y \notin U$, o existe un abierto V con $y \in V$, $x \notin V$.

Los espacios T_0 también se llaman de *Kolmogórov*. Un espacio que no sea T_0 es, por ejemplo, un espacio con dos puntos y la topología grosera. El siguiente resultado caracteriza los espacios T_0.

Proposición 8.2.1 Un espacio topológico (X,τ) es T_0 si y solo si se cumple la siguiente propiedad:

Dados dos puntos $x,y\in X$, si $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$, entonces $x=y$.

Demostración. Supongamos primero que (X,τ) es T_0. Debemos probar que si $x\neq y$ entonces $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$. Salvo una reordenación entre x e y, existe un abierto $U\in\tau$ con $x\in U$ e $y\notin U$; entonces $y\in X\setminus U$ y como $X\setminus U$ es cerrado, tenemos

$$\overline{\{y\}}\subset X\setminus U.$$

Por tanto $x\notin\overline{\{y\}}$. Esto implica que $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$, ya que $x\in\overline{\{x\}}$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la propiedad indicada y veamos que (X,τ) es T_0. Tomemos $x,y\in X$ puntos distintos. Tenemos que $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$, así que se cumple una de las siguientes propiedades:

a) Existe $z\in\overline{\{x\}}\setminus\overline{\{y\}}$.
b) Existe $z\in\overline{\{y\}}\setminus\overline{\{x\}}$.

Supongamos que se cumple a). El conjunto $U=X\setminus\overline{\{y\}}$ es un abierto de (X,τ) tal que $z\in U$ e $y\notin U$. Por otro lado, como $z\in\overline{\{x\}}$, tenemos que $U\cap\{x\}\neq\emptyset$, por tanto $x\in U$. Hemos encontrado un abierto U con $x\in U$, tal que $y\notin U$. Argumentando del mismo modo en el caso b), encontramos un abierto V con $y\in V$, tal que $x\notin V$. De esta manera, concluimos que el espacio es T_0. ■

■ **Ejemplo 8.15** Un ejemplo de espacio T_0, que no cumplirá los axiomas de separación más exigentes, es el *espacio de Sierpinski* que presentamos a continuación. Sean $X=\{a,b\}$ y la topología τ sobre X cuyos abiertos son el total, el vacío y el conjunto unipuntual $\{a\}$. En esta topología tenemos que

$$\overline{\{a\}}=X,\quad \overline{\{b\}}=\{b\}.$$

Las adherencias de los dos únicos conjuntos unipuntuales son diferentes, así, en vista de la proposición anterior, se cumple la propiedad T_0.

■ **Ejemplo 8.16** Un ejemplo más sofisticado, pero importante en la geometría algebraica, es el *espectro* $\operatorname{Spec}A$ de un anillo conmutativo y unitario A dotado de la *topología del espectro*, a veces también llamada topología de Zariski. Los elementos del espectro son los ideales primos de A. La topología del espectro está dada por la pro-base de abiertos cuyos elementos los conjuntos $D(f)$, con $f\in A$, donde

$$D(f)=\{\mathfrak{p}\in A: f\notin\mathfrak{p}\}.$$

Para ver que se trata de una pro-base de abiertos, observemos que:

1. $D(0)=\operatorname{Spec}A$.
2. Si $f,g\in A$, entonces $D(f)\cap D(g)=D(fg)$, En efecto dado $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A$, si $fg\notin\mathfrak{p}$, entonces $f\notin\mathfrak{p}$ y $g\notin\mathfrak{p}$, puesto que $\mathfrak{p}$ es un ideal; recíprocamente, si $f\notin\mathfrak{p}$ y $g\notin\mathfrak{p}$ entonces $fg\notin\mathfrak{p}$, puesto que $\mathfrak{p}$ es primo.

En esta topología, tenemos que

$$\mathfrak{q}\in\overline{\{\mathfrak{p}\}}\Leftrightarrow(f\notin\mathfrak{q}\Rightarrow f\notin\mathfrak{p})\Leftrightarrow\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}.$$

Dicho de otro modo, la adherencia de $\{\mathfrak{p}\}$ es el conjunto de ideales primos que contienen $\mathfrak{p}$; en particular $\mathfrak{p}$ es el mínimo, para la inclusión, de los elementos de $\overline{\{\mathfrak{p}\}}$ y por consiguiente

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}}=\overline{\{\mathfrak{q}\}}\Leftrightarrow\mathfrak{p}=\mathfrak{q}.$$

Así pues, el espectro $\operatorname{Spec}A$ es un espacio T_0.

8.2.2 Espacios T_1

Diremos que un espacio topológico (X, τ) cumple el axioma T_1, o bien que es un *espacio topológico* T_1, si se cumple la siguiente afirmación:

> *Dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existe un abierto U con $x \in U$ e $y \notin U$ y existe un abierto V con $y \in V$ y $x \notin V$.*

Los espacios T_1 también se llaman espacios de Fréchet. Nótese que todo espacio T_1 es también T_0.

La siguiente propiedad caracteriza los espacios T_1.

Proposición 8.2.2 Un espacio topológico (X, τ) es T_1 si y solo si todo subconjunto unipuntual de X es cerrado.

Demostración. Supongamos que (X, τ) es T_1 y consideremos el conjunto unipuntual $\{x\}$; queremos ver que $X \setminus \{x\}$ es abierto. Para ello probaremos que es entorno de todos sus puntos. Dado un elemento $y \in X \setminus \{x\}$, como $y \neq x$, existe un abierto $V \in \tau$ con $y \in V$ y $x \notin V$, es decir

$$y \in V \subset X \setminus \{x\}.$$

Recíprocamente, supongamos que todo subconjunto unipuntual de X es cerrado. Dados dos puntos distintos $x, y \in X$, tenemos que

$$x \in X \setminus \{y\}, \quad y \in X \setminus \{x\}$$

y encontramos así abiertos $U = X \setminus \{y\}$ y $V = X \setminus \{x\}$ que separan x e y de acuerdo con el axioma T_1. ∎

■ **Ejemplo 8.17** Un ejemplo que surge directamente de la definición está dado por los espacios topológicos dotados de la topología cofinita, pues todo subconjunto unipuntual en la topología cofinita es cerrado.

■ **Ejemplo 8.18** Los dos ejemplos presentados anteriormente corresponden a espacios T_0 que no son T_1. Veámoslo:

- En el caso del espacio de Sierpinski $X = \{a, b\}$ con la topología que hace abierto $\{a\}$ pero no $\{b\}$, todo abierto que contiene el punto b contiene también el punto a; así a y b no se pueden separar de acuerdo con el axioma T_1. Otra manera de ver que no es T_1 es observando que $\overline{\{a\}} = X$, y por tanto el subconjunto unipuntual $\{a\}$ no es cerrado.
- Consideremos por ejemplo $X = \operatorname{Spec} A$, donde $A = \mathbb{C}[T]$ es el anillo de polinomios en una variable T, dotado de la topología del espectro. Sea $\mathfrak{p} = (0)$ el ideal cero y sea $\mathfrak{q} = (T)$ el ideal generado por la variable T (los elementos del ideal $\mathfrak{q}$ son los polinomios que no tienen término independiente). Ambos son primos y distintos, por tanto dos puntos distintos de X. Tenemos que
$$\overline{\{(0)\}} = \{\mathfrak{s} \in \operatorname{Spec} A : (0) \subset \mathfrak{s}\} = \operatorname{Spec} A = X.$$
Así, todo abierto no vacío de X contiene el punto $\mathfrak{p} = (0)$ (esto es una propiedad general: si en un espacio topológico la adherencia de un conjunto unipuntual es el total, todo abierto no vacío contiene dicho conjunto unipuntual). Por tanto no existe un abierto que contenga el punto $\mathfrak{q} = (T)$ y no contenga $\mathfrak{p}$. Por tanto, este espacio no es T_1. Otra forma de ver que este espacio no es T_1 es simplemente observando que el subconjunto unipuntual asociado al ideal primo (0) no es cerrado, como hemos visto.

■ **Ejemplo 8.19** Un ejemplo importante de espacio T_1 es $\mathbb{R}^n$ con la topología de Zariski, en la que una base de cerrados está dada por los conjuntos

$$V(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}, \quad f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \ldots, X_n].$$

En efecto, si consideramos el punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, se tiene que

$$\{\mathbf{x}\} = \bigcap_{i=1}^n V(X_i - x_i),$$

que es un cerrado.

8.3 Espacios de Haussdorf

Diremos que un espacio topológico (X, τ) cumple el axioma T_2, o bien que es un *espacio topológico T_2*, si se cumple la siguiente afirmación:

> *Dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen sendos abiertos U, V con $x \in U$, $y \in U$ de modo que $U \cap V = \emptyset$.*

Los espacios T_2 también se llaman *espacios de Hausdorff*. Se tiene directamente de la definición que todo espacio de Hausdorff es T_1 y por tanto también T_0.

La siguiente propiedad caracteriza los espacios de Hausdorff:

Proposición 8.3.1 Sea (X, τ) un espacio topológico. Son equivalentes:
1. (X, τ) es un espacio de Hausdorff.
2. La diagonal $\Delta = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$ es un cerrado de $X \times X$ para la topología producto.

Demostración. Supongamos que (X, τ) es un espacio de Hausdorff. Sea

$$(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta.$$

Veamos que el punto (x, y) es interior a $(X \times X) \setminus \Delta$, con lo que obtenemos que la diagonal Δ es un cerrado. Como $(x, y) \notin \Delta$, entonces $x \neq y$ y existen sendos abiertos $U, V \in \tau$ con $x \in U$, $y \in V$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Tenemos que

$$(x, y) \in U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta.$$

Como $U \times V$ es un abierto de $X \times X$, se concluye que (x, y) es interior a $(X \times X) \setminus \Delta$, como deseábamos.

Recíprocamente, supongamos que Δ es un cerrado en $X \times X$. Tomemos x, y puntos distintos de X. Tenemos que $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, que es un abierto en $X \times X$. Así pues, existe un abierto básico $U \times V$ tal que

$$(x, y) \in U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta.$$

Vemos que $U \cap V = \emptyset$, como queríamos demostrar. ■

Corolario 8.3.2 Sean $f, g : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$ dos aplicaciones continuas, donde (X, τ_X) es un espacio de Hausdorff. Entonces, el conjunto

$$\{y \in Y : f(y) = g(y)\}$$

es cerrado en (Y, τ_Y).

Demostración. La aplicación $(f, g) : Y \to X \times X$ es continua y el conjunto deseado es la imagen inversa de la diagonal. ■

■ **Ejemplo 8.20** Las propiedades T_0, T_1, T_2 son hereditarias, en el sentido de que los subespacios heredan estas propiedades (ejercicio).

■ **Ejemplo 8.21** La topología cofinita de un conjunto infinito es T_1 pero no es T_2, pues la intersección de dos abiertos no vacíos siempre es no vacía. La topología de Zariski de $\mathbb{R}^n$ es también T_1 pero no T_2; en efecto, si fuera T_2, la topología inducida sobre

$$\mathbb{R}\times\{(0,0,\ldots,0)\}\subset\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$$

debería ser T_2, pero esta topología es la cofinita sobre $\mathbb{R}$.

■ **Ejemplo 8.22** La topología de los espacios métricos es T_2, pues dos puntos distintos se pueden separar por dos bolas abiertas centradas en ellos y radio la mitad de la distancia entre los puntos.

■ **Ejemplo 8.23** El producto de espacios de Hausdorff es de nuevo un espacio de Hausdorff. En cambio, la propiedad de ser espacio de Hausdorff no pasa a los cocientes, en general. Un ejemplo que se considera frecuentemente es la "recta con dos orígenes", obtenida como cociente de $\{0,1\}\times\mathbb{R}$ por la relación de equivalencia que identifica los puntos $(0,t)$ y $(1,t)$ para $t\neq 0$.

Finalmente, en relación con la convergencia de sucesiones, observamos que la propiedad de Hausdorff implica la unicidad de los límites.

Proposición 8.3.3 Si una sucesión tiene límite en un espacio de Hausdorff, el límite es único.

Demostración. Supongamos que x,x' son dos límites distintos de una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por la propiedad de Hasudorff, existen abiertos U,U' con $x\in U$, $x'\in U'$ y tales que $U\cap U'=\emptyset$. Como se trata de límites de $\{x_n\}$, existen N,N' tales que

$$x_n\in U,\ \ \text{si } n\geq N;\quad x_n\in U',\ \ \text{si } n\geq N'.$$

Así pues, para todo $n\geq \max\{N,N'\}$ se tiene que $x_n\in U\cap U'$, contradicción. ■

8.4 Espacios regulares y normales

8.4.1 Espacios regulares y T3

Un espacio topológico (X,τ) se dice *regular* si dados $x\in X$ y un cerrado $C\subset$ de (X,τ) con $x\notin C$, existen sendos abiertos U,V de (X,τ) tales que

$$U\cap V=\emptyset,\ x\in U,\ C\subset U.$$

Diremos que un espacio topológico *cumple el axioma T3* si es regular y T1.

La siguiente propiedad caracteriza los espacios regulares:

Proposición 8.4.1 Un espacio topológico (X,τ) es regular si y solo si dados un punto $x\in X$ y un abierto $U\in\mathscr{E}_x$, existe otro abierto $V\in\mathscr{E}_x$ de manera que $x\in V$ y $\overline{V}\subset U$.

Demostración. Supongamos primero que (X,τ) es regular, tomemos $x\in X$ y un abierto $U\in\mathscr{E}_x$. Aplicamos la propiedad de regularidad a x y al cerrado $X\setminus U$, así, existen V_1,V_2 abiertos tales que

$$x\in V_1,\ X\setminus U\subset V_2,\ V_1\cap V_2=\emptyset$$

Tomando $V=V_1$, hemos terminado.

Veamos ahora la otra implicación. Tomamos un punto $x\in X$ y un cerrado C con $x\notin C$ y buscamos abiertos V_1,V_2 tales que $x\in V_1$, $C\subset V_2$ y $V_1\cap V_2=\emptyset$. Como $U=X\setminus C$ es un entorno abierto de x, por hipótesis existe V abierto tal que

$$x\in V,\ \overline{V}\subset X\setminus C.$$

Tomando $V_1=V$ y $V_2=X\setminus\overline{V}$, hemos terminado. ■

1. Hay espacios topológicos regulares que no son T3. Por ejemplo, si consideramos $X = \{a,b,c\}$ y la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\}$.
2. Todo espacio cumpliendo la propiedad T3 es también T2.
3. Hay espacios de Hausdorff que no son regulares. Por ejemplo, si consideramos en $\mathbb{R}$ la topología que tiene como base todos los intervalos abiertos (a,b), junto con los conjuntos del tipo $(a,b) \setminus K$, donde $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.
4. Los espacios topológicos metrizables son T3, de hecho, probaremos más adelante que son T4.
5. La propiedad de regularidad es hereditaria, en el sentido de que los subespacios la heredan.
6. El producto de espacios regulares es regular.
7. La propiedad de ser T3 no pasa a los cocientes, en general. La recta con dos orígenes es un ejemplo para esto.

8.4.2 Espacios normales y T4

Un espacio topológico (X,τ) se dice *normal* si dados dos cerrados disjuntos C,D de (X,τ), existen sendos abiertos U,V de (X,τ) tales que

$$U \cap V = \emptyset,\ C \subset U,\ D \subset V.$$

Diremos que un espacio topológico cumple el axioma T4 si es normal y T1.

La siguiente propiedad caracteriza los espacios normales:

Proposición 8.4.2 Un espacio topológico (X,τ) es normal si y solo si dado un cerrado $C \subset X$ y un abierto U que contiene C, existe otro abierto V que contiene C tal que $C \subset V$ y $\overline{V} \subset U$.

Demostración. La prueba es análoga a la del lema 8.4.1 ■

1. Todo espacio T4 también es T3.
2. Hay espacios normales que no son regulares. Por ejemplo, si consideramos en $\mathbb{R}$ la topología donde los abiertos no triviales son los intervalos (a,∞), con $a \in \mathbb{R}$.
3. Hay espacios regulares que no son normales, como el producto de dos rectas de Sorgenfrey.
4. Un subespacio de un espacio T4 no es necesariamente T4.
5. El producto de espacios normales no es normal necesariamente. De nuevo nos vale como ejemplo el producto de dos rectas de Sorgenfrey. También $2^{\mathbb{R}}$ con la topología producto.
6. La propiedad de ser T4 no pasa a los cocientes, en general. De nuevo la recta con dos orígenes es un ejemplo para esto.

■ **Ejemplo 8.24** Si (X,τ) es un espacio topológico metrizable, entonces es T4. En efecto, sean C,D dos cerrados disjuntos de (X,τ). Como D es cerrado, para todo $c \in C \subset X \setminus D$ existe $\varepsilon_c > 0$ tal que $B(c,\varepsilon_c) \cap D = \emptyset$. Análogamente, para todo $d \in D$ existe $\delta_d > 0$ tal que $B(d,\delta_d) \cap C = \emptyset$. Tomamos

$$U = \bigcup_{c \in C} B(c,\varepsilon_c/2), \quad V = \bigcup_{d \in D} B(d,\delta_d/2)$$

Por definición U y V son abiertos de (X,τ) con $C \subset U$ y $D \subset V$. Veamos que son disjuntos. Si $z \in U \cap V$, existen $c \in C$ y $d \in D$ tales que

$$d(z,c) < \varepsilon_c/2, \quad d(z,d) < \delta_d/2$$

Aplicando la desigualdad triangular tenemos que $d(c,d) < (\varepsilon_c + \delta_d)/2$. Ahora, si $\varepsilon_c \leq \delta_d$, tenemos que $d(c,d) < \delta_d$ y por tanto $c \in B(d,\delta_d)$, lo que es absurdo. Análogamente, si $\delta_d \leq \varepsilon_c$, tenemos que $d(c,d) < \varepsilon_c$ y por tanto $d \in B(c,\varepsilon_c)$, lo que nos lleva de nuevo a una contradicción.

8.4.3 El lema de Urysohn

El lema de Urysohn establece lo siguiente:

Teorema 8.4.3 En un espacio topológico normal (X,τ), para cualquier par de cerrados disjuntos C,D, existe una función continua $f:(X,\tau)\to[0,1]$ tal que $f(C)=\{0\}$ y $f(D)=\{1\}$.

Para probarlo, primero veamos el siguiente resultado.

Lema 8.4.4 Sea (X,τ) un espacio topológico normal. Dado un par de cerrados disjuntos C,D, existe una familia de abiertos $\{U_p\}_{p\in\mathbb{Q}}$ cumpliendo:

1. $U_p=\emptyset$, para todo $p<0$ y $U_p=X$, para todo $p>1$.
2. $C\subset U_0$, $U_1\cap D=\emptyset$.
3. Dados $p,q\in\mathbb{Q}$ con $p<q$, se tiene $\overline{U_p}\subset U_q$.

Demostración. Definamos $U_p=\emptyset$, para todo $p<0$ y $U_p=X$, para todo $p>1$. Escribimos ahora $P=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Nos queda definir U_p, para los valores $p\in P$. Como P es infinito numerable, existe una biyección $\varphi:\mathbb{N}\to P$. Esto permite definir los abiertos U_p por inducción (definición recursiva). Podemos suponer sin perder generalidad que los dos primeros términos de la sucesión son $\varphi(1)=1$ y $\varphi(2)=0$.

Tomamos $U_1=X\setminus D$. Ahora, como C es un cerrado y $C\subset U_1$, usando la normalidad del espacio, existe V abierto tal que $C\subset V$ y $\overline{V}\subset U_1$. Tomamos $U_0=V$. De esta manera hemos garantizado la propiedad 2).

Dado $n\geq 2$, sea $P_n=\varphi(\{1,2\ldots,n\})$, y supongamos que hemos definido la familia $\{U_p\}_{p\in P_n}$, de modo que se cumple la propiedad 3). Construyamos U_r, con $r=\varphi(n+1)$. El conjunto $P_{n+1}=P_n\cup\{r\}$ es finito, así que, con su orden usual, es isomorfo al número natural $n+1$. Es decir, todo elemento distinto del mínimo y el máximo (0 y 1, respectivamente) tiene antecesor inmediato y sucesor inmediato; en particular r. Sean r_- y r_+ el antecesor y sucesor inmediatos de r en P_{n+1}, respectivamente. Por hipótesis de inducción U_{r_-} y U_{r_+} están definidos y cumplen

$$\overline{U_{r_-}}\subset U_{r_+}.$$

De nuevo, la normalidad del espacio topológico permite encontrar un abierto V tal que $\overline{U_{r_-}}\subset V$ y $\overline{V}\subset U_{r_+}$. Tomamos $U_r=V$. Comprobemos que dados $p,q\in P_{n+1}$, con $p<q$, se cumple $\overline{U_p}\subset U_q$. Si $p,q\in P_n$ es cierto por hipótesis de inducción. Si no, uno de ellos es r y concluimos como sigue:

- Si $p=r$, sabemos que $q\geq r_+$. Así $\overline{U_r}\subset U_{r_+}\subset U_q$.
- Si $q=r$, sabemos que $p\leq r_-$. Así $\overline{U_p}\subset \overline{U_{r_-}}\subset U_r$. ■

Demostración del lema de Urysohn. Consideremos una familia de abiertos $\{U_p\}_{p\in\mathbb{Q}}$ en las condiciones del lema anterior. Para cada $x\in X$, definimos

$$Q(x)=\{p\in\mathbb{Q}:\ x\in U_p\}.$$

Nótese que $(1,\infty)\subset Q(x)\subset[0,\infty)$, que para todo $x\in D$ se tiene $Q(x)=(1,\infty)$ y que para todo $x\in C$ se tiene $Q(x)=[0,\infty)$. Definimos

$$f(x)=\operatorname{ínf}\{p\in\mathbb{Q}:\ p\in Q(x)\}.$$

Veamos que $f:X\to[0,1]$ cumple las propiedades deseadas. Por las observaciones que ya hemos hecho, tenemos que $f(x)\in[0,1]$, para todo $x\in X$, que $f(c)=0$, para todo $c\in C$ y que $f(d)=1$, para todo $d\in D$. Así que nos queda probar que f es una aplicación continua. Por la propiedad universal de la topología del subespacio, basta probar que es continua cuando la vemos con llegada en $\mathbb{R}$. Probaremos que f es continua en cada uno de sus puntos. Fijemos $x \in X$ y un entorno $(a,b) \subset \mathbb{R}$ de $f(x)$. Buscamos $U \in \mathscr{E}_x$ tal que $f(U) \subset (a,b)$. Elijamos $p,q \in \mathbb{Q}$ tales que

$$a < p < f(x) < q < b,$$

y veamos que $U = U_q \setminus \overline{U_p}$ cumple con lo deseado. Para ello vamos a usar las siguientes observaciones, que probaremos después:

1) Si $x \in \overline{U_r}$, entonces $f(x) \leq r$. Equivalentemente, si $f(x) > r$, entonces $x \notin \overline{U_r}$

2) Si $x \notin U_r$, entonces $f(x) \geq r$. Equivalentemente, si $f(x) < r$ entonces $x \in U_r$

– Comprobemos primero que $U \in \mathscr{E}_x$. Dado que es abierto, basta ver que $x \in U$. Que $x \in U_q$ se sigue de 2) y que $x \notin \overline{U_p}$ se sigue de 1).

– Comprobemos ahora que $f(U) \subset (a,b)$. Sea $x \in U$, entonces $x \in U_q \subset \overline{U_q}$ y por 1) tenemos que $f(x) \geq q$. Por otro lado $x \notin \overline{U_p}$, por tanto $x \notin U_p$, así que por 2) tenemos que $f(x) \geq p$. Así $f(x) \in [p,q] \subset (a,b)$.

Hagamos la prueba de 1). Si $x \in \overline{U_r}$, entonces $x \in U_q$, para todo $q > r$. Así que $(r,\infty) \subset Q(x)$ y por tanto $f(x) = \text{ínf}\{p \in \mathbb{Q} : \ p \in Q(x)\} \leq r$.

Hagamos la prueba de 2). Si $x \notin U_r$, entonces $x \notin U_q$, para todo $q \leq r$, así que $Q(x) \subset (r,\infty)$ y por tanto $f(x) = \text{ínf}\{p \in \mathbb{Q} : \ p \in Q(x)\} \geq r$. ■

■ **Observación 8.8** El recíproco del lema de Urysohn es directo, es decir, si para cualquier par de cerrados disjuntos C,D de un espacio topológico (X,τ), existe una función continua

$$f : (X,\tau) \to [0,1]$$

cumpliendo que $f(C) = \{0\}$ y $f(D) = \{1\}$, entonces el espacio es normal. Nótese que basta tomar $U = f^{-1}((1/2,1])$ y $V = f^{-1}([0,1/2))$.

■ **Observación 8.9** El lema de Urysohn no funciona al cambiar normal por regular, pues el lema 8.4.4 no es necesariamente cierto, ya que en el paso de inducción no se puede cambiar normalidad por regularidad. Los espacios regulares para los que se pueden separar puntos de cerrados mediante aplicaciones continuas se llaman *completamente regulares*.

Otros resultados importantes que no vamos a probar en este curso son los siguientes:

Proposición 8.4.5 Todo espacio regular que satisface el segundo axioma de numerabilidad es normal.

Teorema 8.4.6 — Teorema de extensión de Tietze. Sea (X,τ) un espacio topológico normal y $C \subset X$ un cerrado. Para toda función continua $f : C \to \mathbb{R}$ existe una función continua $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F|_C = f$. Además, si f está acotada, se puede tomar F también acotada.

Teorema 8.4.7 — Teorema de metrización de Urysohn. Todo espacio T3 que satisfaga el segundo axioma de numerabilidad es metrizable.

9. Espacios compactos y localmente compactos

9.1 Casi-compacidad y compacidad

Recodemos que un *recubrimiento* de un conjunto X es una familia $\mathscr{R} = \{E_i\}_{i\in I}$ de subespacios $E_i \subset X$ tales que $\cup_{i\in I} E_i = X$. Un *subrecubrimiento de* $\mathscr{R}$ es un recubrimiento de X que es a su vez un subconjunto de $\mathscr{R}$.

Definición 9.1.1 Un espacio topológico (X,τ) es *casi-compacto* si todo recubrimiento de X por abiertos de (X,τ) tiene un subrecubrimiento finito. Diremos que (X,τ) es *compacto* si es casi-compacto y de Hausdorff.

■ **Ejemplo 9.1**

1. Todo espacio topológico con una topología finita es compacto.
2. $\mathbb{R}$ con su topología usual no es casi-compacto, pues no podemos extraer ningún subrecubrimiento finito del recubrimiento $\mathscr{R} = \{(-n,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
3. $(0,1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con su topología usual tampoco es casi-compacto. Basta considerar el recubrimiento por abiertos $\mathscr{R} = \{(1/n,1]\}_{n\in\mathbb{N}}$.

■ **Observación 9.1** En un espacio de Hausdorff los subespacios compactos son los mismos que los casi-compactos.

9.1.1 Propiedades básicas

En esta subsección detallamos algunas propiedades básicas de los espacios casi-compactos y compactos. Empezamos dando una caracterización de la compacidad en términos de cerrados.

Definición 9.1.2 Una colección de subconjuntos de X satisface la *condición de intersección finita (c.i.f.)* si toda subcolección finita tiene intersección no vacía.

Proposición 9.1.1 Un espacio topológico (X,τ) es casi-compacto si y solamente si para toda colección $\mathscr{F} = \{C_i\}_{i\in I}$ de cerrados en X que satisfaga la condición de intersección finita se cumple que $\cap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $\mathscr{F} = \{C_i\}_{i\in I}$ una colección de subconjuntos de X y sea $\mathscr{R} = \{X \setminus C_i\}_{i\in I}$. Nótese que:

i) $\mathscr{F}$ es una colección de cerrados si y solamente si $\mathscr{R}$ lo es de abiertos.

ii) $\mathscr{R}$ recubre X si y solamente si $\cap_{i\in I}C_i = \emptyset$.

Supongamos que (X,τ) es un espacio casi-compacto y tomemos $\mathscr{F} = \{C_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados tal que $\cap_{i\in I}C_i = \emptyset$. Veamos que $\mathscr{F}$ no cumple la c.i.f.. Tenemos que $\mathscr{R} = \{X\setminus C_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de X por abiertos de (X,τ), que es casi-compacto, así que admite un subrecubrimiento finito $\{X\setminus C_{i_j}\}_{j=1}^k \subset \mathscr{R}$. Esto implica que

$$C_{i_1}\cap C_{i_2}\cap\cdots\cap C_{i_k} = \emptyset,$$

y por tanto $\mathscr{F}$ no tiene la c.i.f..

Recíprocamente, sea $\mathscr{R} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X por abiertos de (X,τ) y veamos que admite un subrecubrimiento finito. Tenemos que $\mathscr{F} = \{X\setminus U_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados tal que

$$\bigcap_{i\in I}(X\setminus U_i) = \emptyset,$$

así que, por hipótesis no cumple la c.i.f., es decir, existe $\{X\setminus U_{i_j}\}_{j=1}^k \subset \mathscr{F}$ tal que la intersección de todos sus elementos es vacía. Esto significa que $\{U_{i_j}\}_{j=1}^k \subset \mathscr{R}$ es el subrecubrimiento que buscábamos. ■

Sabemos que la propiedad de ser o no casi-compacto un espacio topológico solamente depende de la topología y no de cómo se ha obtenido esta, pero si nuestro espacio es un subespacio de uno dado, podemos ver la casi-compacidad del pequeño usando abiertos del grande. Vamos a precisar esta afirmación.

Sea (X,τ) un espacio topológico e $Y\subset X$. Tenemos que $(Y,\tau|_Y)$ es casi-compacto si y solo si todo recubrimiento de Y por abiertos de X (es decir, una familia $\mathscr{R} = \{\tilde{U}_i\}_{i\in I}$ de abiertos $\tilde{U}_i$ de (X,τ) tales que $Y\subset \cup_{i\in I}\tilde{U}_i$) admite un subrecubrimiento (de Y por abiertos de X) finito. Para verlo basta recordar la definición de topología del subespacio y observar que

$$Y = \bigcup_{i\in I}(\tilde{U}_i\cap Y) \Leftrightarrow Y\subset \bigcup_{i\in I}\tilde{U}_i.$$

Proposición 9.1.2 Un subespacio cerrado en un espacio casi-compacto también es casi-compacto. Un subespacio cerrado en un compacto es un espacio compacto.

Demostración. Sean (X,τ) un espacio topológico casi-compacto y $(C,\tau|_C)$ un subespacio cerrado. Tomemos un recubrimiento $\mathscr{R} = \{U_i\}_{i\in I}$ de C por abiertos de (X,τ). Como C es cerrado, tenemos que $\mathscr{R}\cup\{X\setminus C\}$ es un recubrimiento de X por abiertos de (X,τ) y admite un subrecubrimiento finito

$$\{U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}, X\setminus C\}$$

por ser (X,τ) casi-compacto. Tenemos que $C\subset U_{i_0}\cup U_{i_1}\cup\ldots\cup U_{i_n}$ y por tanto $\mathscr{R}$ admite un subrecubrimiento finito, como queríamos probar. ■

Lema 9.1.3 Sea (X,τ) un espacio topológico Hausdorff y (K,τ') un subespacio compacto. Para todo $x\in X\setminus K$, existen abiertos U,V de (X,τ) tales que

$$x\in U,\ K\subset V,\ U\cap V = \emptyset.$$

Demostración. Por ser X un espacio de Hausdorff, para todo $y\in K$ existen sendos abiertos $U_y, V_y \in \tau$ tales que $x\in U_y$, $y\in V_y$, $U_y\cap V_y = \emptyset$. Tenemos que $\mathscr{R} = \{V_y\}_{y\in K}$ es un recubrimiento de K por abiertos de X. La casi-compacidad de K nos asegura que existe un subrecubrimiento finito

$$\{V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_k}\}\subset \mathscr{R}.$$

Veamos que basta elegir $U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \ldots \cap U_{y_k}$ y $V = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \ldots \cup V_{y_k}$. En efecto, si $z \in V$, existe $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ tal que $z \in V_{y_i}$. Como $V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$, tenemos que $z \notin U_{y_i}$ y, por tanto, tenemos que $z \notin U$. ■

Proposición 9.1.4 En un espacio de Hausdorff todo subespacio compacto es también cerrado.

Demostración. Tomemos K un compacto en un espacio de Hausdorff (X,τ) y veamos que $\overline{K} = K$. Por el lema anterior sabemos que para todo punto $x \notin K$ existe un abierto U con $x \in U$ tal que $U \cap K = \emptyset$, y por tanto $x \notin \overline{K}$. ■

Probaremos ahora que el producto finito de compactos es compacto, para ello es muy útil el siguiente resultado, conocido como lema del tubo.

Lema 9.1.5 — del tubo. Sean (X,τ) e (Y,τ') dos espacios topológicos con (Y,τ') casi-compacto y consideremos el espacio producto $X \times Y$. Si N es un abierto en $X \times Y$ conteniendo una "rodaja" $\{x_0\} \times Y$, entonces N contiene algún "tubo" $W \times Y$, donde W es un entorno de x_0 en X.

Demostración. N es abierto en $X \times Y$, así que lo podemos poner como unión de los elementos de una familia de abiertos básicos $\mathscr{R} = \{U_i \times V_i\}_{i\in I}$. Ahora, esta familia $\mathscr{R}$ recubre el espacio $\{x_0\} \times Y$ por abiertos de $X \times Y$. Este espacio $\{x_0\} \times Y$ es homeomorfo a Y, y por tanto casi-compacto, así que podemos extraer un subrecubrimiento finito de $\mathscr{R}$, llamémoslo

$$\mathscr{F} = \{U_{i_1} \times V_{i_1}, U_{i_2} \times V_{i_2}, \cdots, U_{i_k} \times V_{i_k}\}$$

(suponemos que todos los elementos en $\mathscr{F}$ intersecan $\{x_0\} \times Y$, si no los podríamos eliminar). Consideramos ahora el entorno abierto de x_0 dado por

$$W = U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \cdots \cap U_{i_k}.$$

Veamos que $\mathscr{F}$ recubre todo el tubo $W \times Y$, y como cada elemento en $\mathscr{F}$ está contenido en N, tendremos que $W \times Y \subset N$. Sea $(x,y) \in W \times Y$. Por un lado, tenemos que $x \in U_{i_j}$ para todo $j = 1,2\ldots,k$. Por otro lado, sabemos que el punto $(x_0,y) \in U_{i_{j_0}} \times V_{i_{j_0}}$, para algún $j_0 \in \{1,2\ldots,k\}$, y como consecuencia $y \in V_{i_{j_0}}$. Concluimos que $(x,y) \in U_{i_{j_0}} \times V_{i_{j_0}}$, como queríamos comprobar. ■

Proposición 9.1.6 El producto finito de espacios casi-compactos también es casi-compacto para la topología producto.

Demostración. Haremos la prueba para el caso de dos espacios topológicos (X,τ) e (Y,τ'), el resto se sigue por inducción.

Consideramos $\mathscr{R} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de $X \times Y$. Dado $x \in X$, como $\{x\} \times Y$ es casi-compacto, existe $I_x \subset I$ finito tal que $\mathscr{F}_x = \{U_i\}_{i\in I_x}$ recubre $\{x\} \times Y$. Aplicamos el lema del tubo a

$$N_x = \bigcup_{i\in I_x} U_i$$

y concluimos que existe un entorno W_x de x con $W_x \times Y \subset N_x$. Ahora tenemos que $\{W_x\}_{x\in X}$ es un recubrimiento por abiertos de X. Como X es casi-compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ tales que $\{W_{x_1}, W_{x_2}, \cdots, W_{x_k}\}$ recubre todo X. Así que los tubos

$$W_{x_1} \times Y,\ W_{x_2} \times Y,\ \ldots,\ W_{x_k} \times Y$$

recubren $X \times Y$. Como cada uno de estos tubo está cubierto por una cantidad finita de elementos de nuestro recubrimiento inicial $\mathscr{R}$, hemos terminado. De hecho $\mathscr{F}_{x_1} \cup \mathscr{F}_{x_2} \cup \cdots \mathscr{F}_{x_k} \subset \mathscr{R}$ es el subrecubrimiento finito que buscábamos. ■

En la próxima sección probaremos que este mismo resultado se extiende a productos arbitrarios de compactos (teorema de Tychonoff).

Proposición 9.1.7 En un espacio casi-compacto toda sucesión tiene un punto de acumulación.

Demostración. Supongamos que σ es una sucesión en un espacio (X,τ) que no tiene puntos de acumulación. Vamos a construir un recubrimiento por abiertos de X que no admite un subrecubrimiento finito.

Que σ no tenga puntos de acumulación significa que para todo $x \in X$ existen $A_x \in \mathscr{E}_x$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq m$ se tiene que $x_n \notin A_x$. Por tanto

$$\aleph(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A_x\}) < \aleph_0.$$

Podemos suponer que cada A_x es abierto (si no, lo cambiamos por un abierto dentro de él). Tenemos que $\{A_x\}_{x\in X}$ no admite un subrecubrimiento finito. En efecto, si existiesen $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ tales que $X = \cup_{j=1}^k A_{x_j}$, estaríamos diciendo que

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in X\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in \bigcup_{j=1}^k A_{x_j}\} = \bigcup_{j=1}^k \{n \in \mathbb{N} : x_n \in A_{x_j}\},$$

pero esta última unión es finita. ■

9.1.2 Compacidad y aplicaciones continuas

La última de las propiedades básicas, a la que le dedicamos una subsección, es que la casi-compacidad se preserva por aplicaciones continuas, es decir, que si $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ es una aplicación continua y (X,τ) es casi-compacto, entonces $(f(X), \tau'|_{f(X)})$ también es casi compacto.

Vamos a probarlo. Fijemos $\mathscr{R} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $f(X)$ por abiertos de (Y,τ'). Como f es continua, tenemos que

$$\mathscr{R}' = \{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$$

es un recubrimiento de X por abiertos de (X,τ). Por la casi-compacidad de (X,τ), existe un subrecubrimiento finito $\{f^{-1}(U_{i_j})\}_{j=1}^k \subset \mathscr{R}'$. Ahora, como

$$\bigcup_{i=1}^k f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^k U_i)$$

tenemos que $f(X) \subset f(f^{-1}(\cup_{i=1}^k U_i)) \subset \cup_{i=1}^k U_i$, y por tanto $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_k}\} \subset \mathscr{R}$ es el subrecubrimiento finito buscado.

Una consecuencia de este resultado y de las proposiciones 9.1.2 y 9.1.4 es que:

> *T*oda aplicación continua desde un espacio casi-compacto a un espacio de Hausdorff es cerrada.

Ciertamente, sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una aplicación continua con (X,τ) casi-compacto e (Y,τ') de Hausdorff y sea C un cerrado de (X,τ). Como (X,τ) es casi-compacto, también $(C,\tau|_C)$ lo es. Ahora, como f es continua, tenemos que $(f(C),\tau'|_{f(C)})$ es casi-compacto en (Y,τ'), que es de Hausdorff, por tanto $f(C)$ es un cerrado de (Y,τ').

■ **Observación 9.2** Si el producto de espacios no vacíos es casi-compacto, cada uno de estos espacios es casi-compacto, pues son la imagen de un casi-compacto por una aplicación continua (las proyecciones).

■ **Observación 9.3** Los cocientes de espacios casi-compactos son también espacios casi-compactos

■ **Ejemplo 9.2** (véase capítulo 7, ejemplo 7.4) Recordemos que el *toro topológico* es cualquier espacio homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con la topología producto producto y el *toro sumergido* $T_{r,R} \subset \mathbb{R}^3$ *de radios r y R* es el subespacio imagen de la aplicación

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,2\pi]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (t,s) & \mapsto & ((R+r\cos t)\cos s,(R+r\cos t)\sin s, r\sin t). \end{array}$$

En el ejemplo 7.4 dijimos que las aplicaciones

$$\begin{array}{lcll} h:[0,2\pi]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1, & h(t,s)=(e^{it},e^{is}), \\ \tilde{g}:[0,2\pi]\times[0,2\pi] & \to & T_{r,R}, & \tilde{g}(t,s)=g(t,s) \end{array}$$

inducen el mismo cociente sobre $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ y que además este cociente es un toro topológico. Para probarlo, nos quedaba justificar que estas dos aplicaciones son cerradas. Ahora lo acabamos de hacer, pues es una aplicación continua entre un compacto y un Hausdorff. Notemos también que el toro es casi-compacto; por otro lado, como es un producto de espacios de Hausdorff es también de Hausdorff, así que es de hecho compacto.

9.1.3 Compacidad en espacios métricos

Vamos a dedicar esta sección a probar que un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solamente si es cerrado y acotado para las distancias d_p, con $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ o d_∞.

Una de las implicaciones es cierta en cualquier espacio métrico.

Proposición 9.1.8 Sea (X,d) un espacio métrico. Todo compacto en el espacio topológico asociado a la métrica es cerrado y acotado.

Demostración. Los espacios metrizables son de Hausdorff, así que todo compacto es cerrado. Veamos que un compacto K es acotado. Recubrimos K mediante la colección de bolas encajadas

$$\{B(0;n)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Sabemos que con una cantidad finita de ellas basta, así que existe $N>0$ tal que $A \subset B(0;N)$, como queríamos probar. ■

La otra implicación se basa fundamentalmente en el hecho de que el intervalo $[0,1]$ es compacto y en que el producto finito de compactos es compacto.

Proposición 9.1.9 El intervalo cerrado $[0,1]$ es compacto.

Demostración. Ya sabemos que es de Hausdorff, veamos ahora que es casi-compacto. Para ello, tomemos un recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de $[0,1]$ y consideremos el subconjunto $\Lambda \subset [0,1]$ cuyos elementos son los valores λ para los que existe $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}\subset I$ con

$$[0,\lambda] \subset U_{i_1}\cup U_{i_2}\cup\cdots U_{i_k}.$$

Nuestro objetivo es probar que $1\in\Lambda$. En primer lugar, observamos que $\Lambda\neq\emptyset$, pues existe i_0 tal que $0\in U_{i_0}$ y $r>0$ tal que $[0,r]\subset U_{i_0}$, así $r\in\Lambda$. Denotemos mediante λ_0 el supremo en Λ, que ya sabemos que es positivo y menor o igual a uno. Veamos primero que $\lambda_0\in\Lambda$ y en segundo lugar que $\lambda_0=1$.

Como $\lambda_0>0$, existen $j\in I$ y $c<\lambda_0$ tales que $(c,\lambda_0]\subset U_j$. Ahora, como λ_0 es el supremo en Λ, existe necesariamente $\lambda_1\in(c,\lambda_0]\cap\Lambda$. Por tanto, hay un conjunto finito $F\subset I$ con $[0,\lambda_1]\subset\cup_{i\in F}U_i$. Pero entonces

$$[0,\lambda_0]=[0,\lambda_1]\cup[\lambda_1,\lambda_0]\subset(\bigcup_{i\in F}U_i)\cup U_j,$$

y por tanto $\lambda_0 \in \Lambda$.

Ahora, sabemos que existe un conjunto finito $G \subset I$ con $[0,\lambda_0] \subset \cup_{i\in G} U_i$. Si $\lambda_0 < 1$, existiría d con $\lambda_0 < d \leq 1$ tal que $[\lambda_0, d] \subset U_j$, pero entonces tendríamos

$$[0,d] = [0,\lambda_0] \cup [\lambda_0, d] \subset (\bigcup_{i\in F} U_i) \cup U_j,$$

lo que contradice que λ_0 sea el supremo en Λ. ■

■ **Observación 9.4** La propiedad de ser o no un conjunto acotado no es topológica, si no que depende de la métrica considerada. Así, debemos llevar mucho cuidado con la conocida propiedad en $\mathbb{R}^n$ de “compacto es equivalente a cerrado y acotado”, pues podemos encontrar distancias en $\mathbb{R}^n$ definiendo la topología usual para las que no todo cerrado y acotado es compacto. De forma más precisa, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 9.1.10 — Teorema de Heine-Borel. Un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solamente si es cerrado y acotado para las distancias d_p, con $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ o d_∞.

Demostración. Recordemos que entre estas distancias se tiene la relación (más fuerte que ser métricas equivalentes)

$$d_\infty(x,y) \leq d_p(x,y) \leq n^{1/p} d_\infty(x,y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Como consecuencia, un conjunto es acotado para la métrica d_p si y solamente si lo es para la métrica d_∞. Vamos a trabajar con la d_∞, pues aquí las bolas son cubos, y los cubos son compactos, por ser producto finito de compactos.

Si K está acotado, existe $N > 0$ tal que $A \subset \overline{B}(0;N) = [-N,N]^n$, si K es además cerrado de $\mathbb{R}^n$, también es cerrado en el cubo $[-N,N]^n$ y tenemos un cerrado dentro de un compacto, por tanto también K es compacto. ■

■ **Observación 9.5** Para tener un resultado de este estilo en otros espacios métricos es fundamental garantizar que las bolas cerradas son compactas. Por ejemplo, si consideramos un conjunto infinito y la métrica discreta, cualquier subconjunto es cerrado y acotado, pero no necesariamente compacto.

■ **Ejemplo 9.3** La esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es compacta, pues es cerrada y acotada (para la métrica euclídea) en $\mathbb{R}^{n+1}$. También el espacio proyectivo real es compacto, pues es un cociente de la esfera.

9.2 El teorema de Tychonoff

> *E*l teorema de Tychonoff puede presumir de ser el más importante de la topología general (no geométrica). Desempeña un papel central en teoremas de la topología y en las aplicaciones de la topología a otros campos. El teorema de Tychonoff es equivalente al axioma de elección, y esto nos da una idea de la fuerza de este resultado.
>
> Stephen Willard

Teorema 9.2.1 — de Tychonoff. El producto de espacios casi-compactos es casi-compacto para la topología producto.

Haremos la prueba usando la caracterización establecida en la proposición 9.1.1, pero previamente, necesitamos varios resultados de teoría de conjuntos.

Sea $\mathbb{A}$ la clase cuyos elementos son colecciones $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X con la condición de intersección finita y ordenemos $\mathbb{A}$ mediante la inclusión.

Lema 9.2.2 En $\mathbb{A}$ hay por lo menos un elemento maximal. Además, dado $\mathscr{F} \in \mathbb{A}$, existe un $\mathscr{M} \in \mathbb{A}$ maximal tal que $\mathscr{F} \subset \mathscr{M}$.

Demostración. Veamos que $\mathbb{A}$ con el orden de la inclusión está en las hipótesis del lema de Zorn. Para ello, probaremos que toda cadena en $\mathbb{A}$ tiene cota superior. Sea $\mathbb{C}$ una cadena en $\mathbb{A}$. Veamos que $\mathscr{M} = \cup_{\mathscr{F} \in \mathbb{C}} \mathscr{F}$ es un elemento de $\mathbb{A}$, y por tanto es la cota superior buscada. Tomamos una subcolección finita

$$\{F_1, F_2, \dots, F_k\} \subset \mathscr{M}$$

Para cada $i = 1, 2, \dots, k$, existe $\mathscr{F}_i \in \mathbb{C}$ tal que $F_i \in \mathscr{F}_i$. Por ser $\mathbb{C}$ una cadena, hay uno de ellos que es más grande que todos los demás, digamos $\mathscr{F}_{i_0}$, y por tanto $F_i \in \mathscr{F}_{i_0}$, para todo $1 \leq i \leq k$. Ahora, gracias a la c.i.f. en $\mathscr{F}_{i_0}$ tenemos que la intersección $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k \neq \emptyset$, como queríamos ver. Para probar la segunda parte, podemos repetir el mismo argumento anterior para probar que la subclase $\mathbb{A}_{\mathscr{F}} = \{\mathscr{G} \in \mathbb{A} : \ \mathscr{F} \subset \mathscr{G}\} \subset \mathbb{A}$ tiene elemento maximal. ■

Lema 9.2.3 Sea $\mathscr{M}$ una colección de subconjuntos de X con la c.i.f. que es maximal para la inclusión. Se cumple que:

1. Toda intersección finita de elementos de $\mathscr{M}$ está en $\mathscr{M}$.
2. Si A es un conjunto que corta a todo elemento en $\mathscr{M}$, entonces $A \in \mathscr{M}$.

Demostración. Veamos 1. Sea $\mathscr{F} \subset \mathscr{M}$ finita y sea $B \neq \emptyset$ la intersección de todos sus elementos. Consideremos $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \cup \{B\}$. Veamos que $\mathscr{M}' \in \mathbb{A}$ y entonces necesariamente $\mathscr{M}' = \mathscr{M}$. Como conclusión obtenemos que $B \in \mathscr{M}$. Sea $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ una colección finita de elementos de $\mathscr{M}'$. Si todos ellos están en $\mathscr{M}$, por la c.i.f. en $\mathscr{M}$ hemos terminado; si no, uno de ellos es B, digamos F_1, pero como B ya es una intersección finita $B = \cap_{F \in \mathscr{F}} F$, tenemos que

$$B \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k \neq \emptyset,$$

por ser de nuevo una intersección finita en $\mathscr{M}$.

Veamos 2. De nuevo basta ver que $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \cup \{A\} \in \mathbb{A}$. Sea $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ una colección finita de elementos de $\mathscr{M}'$. Si todos ellos están en $\mathscr{M}$, por la c.i.f. en $\mathscr{M}$ hemos terminado; si no, uno de ellos es A, digamos F_1. Ahora por el apartado anterior sabemos que

$$D = F_2 \cap F_3 \cap \cdots F_k \in \mathscr{M}$$

y por hipótesis $D \cap A \neq \emptyset$. ■

Estamos ahora en condiciones de concluir la prueba del teorema de Tychonoff.

Sea $\mathscr{F} = \{C_i\}_{i \in I}$ una colección de cerrados en X con la c.i.f.. Veamos que se cumple que $Z = \cap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$. Así, concluimos la prueba de la compacidad de X. Por el lema 9.2.2 podemos elegir $\mathscr{M}$ maximal con $\mathscr{F} \subset \mathscr{M}$. Si probamos que

$$\bigcap_{D \in \mathscr{M}} \overline{D} \neq \emptyset$$

hemos terminado, pues esta intersección contiene Z.

Dado $\alpha \in \Lambda$, sea $\mathrm{pr}_\alpha : X \to X_\alpha$ la proyección α-ésima. La colección

$$\mathscr{M}_\alpha = \{\mathrm{pr}_\alpha(D) : \ D \in \mathscr{M}\}$$

cumple la c.i.f. (pues $\mathscr{M}$ la cumple). Ahora, como X_α es compacto, podemos asegurar que existe un punto

$$x_\alpha \in \bigcap_{D \in \mathscr{M}} \overline{\mathrm{pr}_\alpha(D)}$$

Sea $x \in X$ el punto dado por $x(\alpha) = x_\alpha$. Veamos que $x \in \bigcap_{D \in \mathscr{M}} \overline{D}$.

Recordemos que

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\{\mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

es una familia generadora para la topología producto. Si probamos que los conjuntos $\mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ que contienen x cortan a todos los elementos en $\mathscr{M}$ hemos terminado. Efectivamente, tendríamos que $\mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathscr{M}$ y también sus intersecciones finitas. Es decir, tendríamos un sistema fundamental de entornos de x dentro de $\mathscr{M}$. Ahora, como $\mathscr{M}$ tiene la c.i.f., cada uno de estos entornos básicos de x corta a cualquier D dado de $\mathscr{M}$, y por ende $x \in \overline{D}$, como queríamos.

Para terminar, veamos que si $\mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ contiene x, entonces corta a cualquier D dado en $\mathscr{M}$. Tenemos que U_α es un entorno de x_α, y como $x_\alpha \in \overline{\mathrm{pr}_\alpha(D)}$, concluimos que existe un elemento $z_\alpha \in U_\alpha \cap \mathrm{pr}_\alpha(D) \neq \emptyset$. Así $z_\alpha = \mathrm{pr}_\alpha(z)$ con $z \in D \cap \mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha)$.

■ **Observación 9.6** El teorema de Tychonoff prueba que el espacio de Cantor es compacto, aunque esto ya lo sabíamos, ya que es homeomorfo a un cerrado acotado de $[0,1]$ (el triádrico de Cantor). También nos da una prueba de que todo cubo es compacto, donde por cubo entendemos un producto arbitrario de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$.

9.3 Compacidad local

En esta sección estudiamos las nociones de compacidad local y probamos el teorema básico que asegura que todo espacio localmente compacto se puede "sumergir" en un compacto añadiendo un solo punto: su *compactificación de Alexandroff.*

Definición 9.3.1 Un espacio topológico es *localmente casi-compacto* si todo punto tiene un sistema fundamental de entornos casi-compactos.

Proposición 9.3.1 Un espacio topológico de Hausdorff es localmente casi-compacto si y solamente si todo punto tiene un entorno compacto.

Demostración. Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff.

Si (X,τ) es localmente casi-compacto, todo punto tiene un sistema fundamental de entornos casi-compactos (y Hausdorff); en particular, tiene un entorno compacto.

Supongamos ahora que un punto $x \in X$ dado tiene un entorno $K \in \mathscr{E}_x$ compacto. Probemos que x también tiene un sistema fundamental de entornos compacto. Para ello, dado un entorno $U \in \mathscr{E}_x$ (que podemos suponer abierto), buscamos un compacto $L \in \mathscr{E}_x$ con $L \subset U$. Como (X,τ) es de Hausdorff, sabemos que K es cerrado en X, así que $Z = K \setminus U$ también es cerrado tanto en X como en K. Como Z es un cerrado dentro de K que es compacto, también Z es compacto. Por el lema 9.1.3 sabemos que existen abiertos V, W en X tales que

$$x \in V, \quad Z \subset W, \quad V \cap W = \emptyset.$$

Tomemos $L = \overline{V \cap K}$, que es un cerrado dentro de K; así que es también un compacto. Veamos que $L \in \mathscr{E}_x$ y que $L \subset U$. Lo primero es claro, pues $L \supset V \cap K$, que es una intersección (finita) de entornos de x. Veamos lo segundo. Sabemos que $V \cap K \subset K \setminus W$, por tanto $L \subset K \setminus W$. Por otro lado, tenemos que

$$Z = K \setminus U \subset W \Rightarrow U \supset K \setminus W,$$

así que $L \subset U$, como queríamos. ■

Definición 9.3.2 Un espacio *localmente compacto* será un espacio de Hausdorff localmente casi-compacto.

Nótese que todo espacio compacto es localmente compacto, pues podemos tomar como entorno compacto de cada punto el total.

■ **Ejemplo 9.4** $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ con sus topologías usuales son localmente compactos, pues todo punto tiene un entorno compacto.

Veamos que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto. Para ello probaremos que no existe un entorno compacto alrededor del 0, aunque el argumento es cierto para cualquier número racional. Supongamos que $K \subset \mathbb{Q}$ es un entorno compacto de 0, así que existe $r > 0$ tal que

$$(-r,r) \cap \mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}$$

Como K es compacto, es cerrado en $\mathbb{R}$ y por tanto tendríamos que $\overline{(-r,r) \cap \mathbb{Q}} \subset K$, pero esto es absurdo, pues

$$[-r,r] = \overline{(-r,r) \cap \mathbb{Q}},$$

gracias a la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

■ **Ejemplo 9.5** Una *n-variedad topológica* es un espacio topológico de Hausdorff tal que para todo $x \in X$ existe un homeomorfismo

$$\phi_x : U \to V,$$

donde U es un abierto en X y V es un abierto en $\mathbb{R}^n$. Las variedades topológicas son localmente compactas.

9.3.1 Compactificación de Alexandroff

Sea (X,τ) un espacio topológico. Una *compactificación de* (X,τ) es un espacio topológico compacto (Y,τ') tal que (X,τ) es un subespacio denso de él. Cuando $Y \setminus X$ consiste en un solo punto (habitualmente denotado por ∞), se dice que (Y,τ') es una *compactificación de Alexandroff o compactificación por un punto*.

Diremos que dos compactificaciones (Y,τ_1') e (Y,τ_2') de (X,τ) son *equivalentes* si existe un homeomorfismo $h : Y_1 \to Y_2$ tal que $h(x) = x$, para todo punto $x \in X$.

■ **Ejemplo 9.6** El plano proyectivo real $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ y la esfera $\mathbb{S}^n$ son compactificaciones de $\mathbb{R}^n$. De hecho, la esfera es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ (vía la proyección estereográfica). Cuando se identifica $\mathbb{R}^2$ con los números complejos $\mathbb{C}$, la compactificación $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^2$ se llama *esfera de Riemann*.

Damos a continuación una serie de condiciones que son necesarias para la existencia de compactificación de Alexandroff:

1. El espacio (X,τ) debe ser de Hausdorff. Si no lo fuese, no se podría sumergir en un espacio de Hausdorff como subespacio, así que no se podría compactificar el espacio de ninguna manera.
2. El espacio (X,τ) debe ser no compacto. Si (X,τ) es compacto, la única compactificación que tiene es él mismo; en efecto, si otro compacto lo contiene, X sería cerrado dentro de él y por tanto no denso.
3. El espacio (X,τ) debe ser localmente compacto. Nótese que si (Y,τ') con $Y = X \cup \{\infty\}$ es una compactificación, entonces X es abierto en (Y,τ'), y todo abierto de un compacto es localmente compacto (ejercicio).

Veamos ahora que, de hecho, estas condiciones son también suficientes para que exista compactificación de Alexandroff.

Proposición 9.3.2 Todo espacio localmente compacto y no compacto tiene compactificación de Alexandroff.

Demostración. Sea (X,τ) un espacio localmente compacto y no compacto. Consideremos $Y = X \cup \{\infty\}$, con $\infty \notin X$ y sea

$$\tau' = \tau \cup \{Y \setminus K : \ K \subset X \text{ compacto}\}$$

Debemos comprobar: i) τ' es una topología en Y. ii) (Y,τ') es compacto. iii) (X,τ) es un subespacio denso de (Y,τ')

Veamos i). Para ello comprobemos las tres propiedades de ser topología:

- Tenemos $\emptyset \in \tau \subset \tau'$ e $Y \in \tau'$ por ser $\emptyset$ compacto.
- Nótese que una unión arbitraria de elementos en τ está de nuevo en τ. Por otro lado, como todo compacto en X es cerrado, por ser X de Hausdorff, dada una colección $\{K_i\}_{i\in I}$ de compactos de X, su intersección K es un cerrado de X contenido en cada uno de los compactos K_i, así que K es de nuevo un compacto. De esta manera
$$\cup_{i\in I} Y \setminus K_i = Y \setminus \cap_{i\in I} K_i = Y \setminus K \in \tau'$$
Nos queda comprobar que ocurre con $U \cup (Y \setminus K)$, donde $U \in \tau$ y $K \subset X$ es compacto. Queremos ver que $Y \setminus (U \cup (Y \setminus K))$ es un compacto en X.
$$Y \setminus (U \cup Y \setminus K) = (Y \setminus U) \cap K = (X \setminus U) \cap K \subset X$$
Tenemos un cerrado (intersección de cerrados) dentro del compacto K, por tanto un compacto.
- Veamos que la intersección de dos elementos en τ' está de nuevo en τ'. Si ambos están en τ no hay nada que decir, pues τ es topología. Si ambos son de la forma $Y \setminus K_1$, $Y \setminus K_2$, entonces $K_1 \cup K_2$ es compacto (unión finita de subespacios compactos) y por tanto $(Y \setminus K_1) \cap (Y \setminus K_2) = Y \setminus (K_1 \cup K_2) \in \tau'$. Por último tomamos $U \in \tau$ e $Y \setminus K$ y hacemos su intersección tenemos
$$(Y \setminus K) \cap U = (X \setminus K) \cap U$$
que está en τ por ser la intersección de dos abiertos en X.

Veamos ii). Probemos primero que (Y,τ') es de Hausdorff. Nos queda comprobar que podemos separar el punto ∞ de un punto $x \in X$. Como X es localmente compacto, existe $K \in \mathscr{E}_x^X$ compacto. Sea $V \in \tau$ con $V \in \mathscr{E}_x$ y $V \subset K$. Tenemos que
$$x \in V, \quad \infty \in Y \setminus K, \quad Y \setminus K \cap V = \emptyset,$$
como queríamos. Probemos que el espacio es casi-compacto. Tomemos $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de Y' y busquemos un subrecubrimiento finito. Existe i_0 tal que $U_{i_0} = Y \setminus K$, con $K \subset X$ compacto, pues el punto ∞ debe estar recubierto. Ahora la familia $\{U_i\}_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ es un recubrimiento de K por abiertos de Y, y la topología considerada en K es la de subespacio de Y. Como tenemos compacidad para K, existe una colección finita de índices $F \subset I \setminus \{i_0\}$ tal que $\{U_i\}_{i\in F}$ recubre K. Así, obtenemos que $\{U_i\}_{i\in F\cup\{i_0\}}$ es el subrecubrimiento buscado.

Finalmente, veamos iii). Para ver que $\tau = \tau'|_X$, basta observar que
$$(Y \setminus K) \cap X = X \setminus K,$$
y esto es el complementario de un cerrado en X, por tanto un elemento de τ. Ahora X es necesariamente denso en Y; si no lo fuera, sería un cerrado dentro de un compacto y por ende compacto. ■

Para terminar, veamos que cualquier compactificación de Alexandroff se obtiene de la manera anterior y que, por tanto, esta es única (salvo equivalencia). Por eso tendrá sentido hablar de "la compactificación de Alexandroff".

Proposición 9.3.3 Sea (X,τ) un espacio topológico para el que existe una compactificación de Alexandroff

1. Si (Y,τ') es una compactificación de Alexandroff, entonces τ' está dada por
$$\tau' = \tau \cup \{Y \setminus K : K \subset X \text{ compacto}\}.$$

2. Si (Y_1, τ_1') e (Y_2, τ_2') son dos compactificaciones de Alexandroff de (X, τ), entonces son equivalentes.

Demostración. Veamos la primera afirmación. Escribamos $Y = X \cup \{\infty\}$. Como Y es un espacio de Hausdorff, tenemos que $\{\infty\}$ es cerrado en Y y por tanto X es abierto. Así que los abiertos de Y que no contienen ∞ son exactamente los abiertos de X. Veamos ahora que los abiertos de Y que sí contienen ∞ son exactamente los de la forma $Y \setminus K$ con $K \subset X$ compacto. Dado un compacto $K \subset X \subset Y$, como Y es de Hausdorff, tenemos que necesariamente K es cerrado en Y y por tanto $Y \setminus K$ es abierto. Ahora, dado un abierto V en Y con $\infty \in V$ tenemos que $K = Y \setminus V \subset X$ es cerrado en Y, pero como Y es compacto, también K es compacto; así que $V = Y \setminus K$.

Veamos la segunda afirmación. Escribamos $Y_1 = X \cup \{\infty_1\}$ e $Y_2 = X \cup \{\infty_2\}$. Vamos a probar que $f : Y_1 \to Y_2$ dada por

$$f(x) = x, \ \forall x \in X, \quad f(\infty_1) = \infty_2$$

es un homeomorfismo. Veamos que f es continua. Tomamos $U \in \tau_2'$. Si $\infty_2 \notin U$, entonces $f^{-1}(U) = U \in \tau \subset \tau_1'$. Si $\infty_2 \in U$, entonces $U = (\{\infty_2\} \cup X) \setminus K$, con $K \subset X$ compacto. Tenemos que $f^{-1}(U) = (\{\infty_1\} \cup X) \setminus K$ y por tanto también es un elemento de τ_1'. La prueba de que f^{-1} es continua es completamente análoga. ■

Terminamos la sección con la siguiente observación que se sigue de los resultados vistos anteriormente: “Un espacio es localmente compacto si y solamente si es homeomorfo a un abierto de un compacto”. Por ejemplo $\mathbb{R}$ es homeomorfo al intervalo $(0,1)$ que es un abierto dentro del compacto $[0,1]$.

10. Espacios conexos y localmente conexos

10.1 Conexión

Intuitivamente, un conjunto conexo es el que aparece como una sola pieza, que no se puede “partir”. Vamos a formalizar esta idea.

Definición 10.1.1 Un espacio topológico (X,τ) es *disconexo* si existen dos abiertos disjuntos no vacíos $U,V\in\tau$ tales que $X=U\cup V$. Un espacio topológico se dice *conexo* si no es disconexo.

■ **Observación 10.1** Nótese que en la definición anterior podemos cambiar abierto por cerrado. Así, un espacio topológico es conexo si y solamente si los únicos abiertos y cerrados son el vacío y el total. Equivalentemente, no hay subconjuntos no triviales cuya frontera sea vacía.

■ **Ejemplo 10.1** El intervalo $[0,1]$ es conexo. Supongamos que no lo es y escribamos $[0,1]=U\cup V$ con U y V abiertos disjuntos, Asumamos que $1\in U$, por tanto existirá $r<1$ tal que $(r,1]\subset U$. Como consecuencia podemos asegurar que $c=\sup V<1$. Si $c\in V$, existiría $\varepsilon>0$ tal que $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\subset V$, pero esto contradice que c sea el supremo en V, pues hay elementos más grandes que c en V. Así que necesariamente c tendría que estar en U, pero entonces, existiría $\delta>0$ tal que $(c-\delta,c+\delta)\subset U$, lo cual nos diría que $\sup V\leq t<c$. Consecuentemente, la desconexión pretendida para $[0,1]$ no puede existir.

Con una prueba similar concluimos que cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ es conexo.

Otros ejemplos son los siguientes:

1. Todo espacio con la topología grosera es conexo.
2. Los espacios discretos con más de un punto son disconexos. Más generalmente, un espacio T1 con un punto aislado es disconexo.
3. $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgrenfrey es disconexo.

■ **Ejemplo 10.2** $\mathbb{Q}$ no es conexo, de hecho es un espacio *totalmente disconexo*; es decir, los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$ son los unipuntuales. En efecto, si $X\subset\mathbb{Q}$ tiene más de un punto, digamos q_1,q_2 con $q_1<q_2$, existe un irracional $i\in(q_1,q_2)$. Ahora, tomando

$$U=(-\infty,i)\cap X,\quad V=(i,\infty)\cap X$$

conseguimos desconectar X.

Otro ejemplo de espacio totalmente disconexo es el espacio de Cantor.

Los subespacios de espacios conexos no son en general conexos. El único resultado concerniente a subespacios que tenemos es el siguiente, que simplemente consiste en una manera útil de estudiar la conexión en subespacios sin tener que pasar a la topología relativa. Este resultado se puede interpretar diciendo que un espacio es disconexo si y solo si está formado por "dos piezas separadas entre sí".

Proposición 10.1.1 Sea (X,τ) un espacio topológico. Un subespacio $Y \subset X$ es disconexo si y solamente si existen dos subconjuntos no vacíos A,B tales que $A \cup B = Y$ y además

$$A \cap \overline{B}^X = \emptyset, \quad \overline{A}^X \cap B = \emptyset.$$

Demostración. Si el espacio es disconexo, sabemos que existen U,V abiertos en Y cumpliendo $U \cup V = Y$ y $U \cap V = \emptyset$. Tenemos que

$$U \cap \overline{V}^X = (U \cap Y) \cap \overline{V}^X = U \cap (Y \cap \overline{V}^X) = U \cap \overline{V}^Y = U \cap V = \emptyset.$$

Análogamente $V \cap \overline{U}^X$ es vacío.

Supongamos ahora que se da la condición en el enunciado. Veamos que tanto A como B son cerrados en Y, y por tanto Y es disconexo. En efecto

$$\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}^X = (A \cup B) \cap \overline{A}^X = (A \cap \overline{A}^X) \cup (B \cap \overline{A}^X) = A$$

y del mismo modo $\overline{B}^Y = B$. ■

Corolario 10.1.2 Sea (X,τ) un espacio topológico y sean $A,B \subset X$ dos subconjuntos no vacíos tales que $A \cup B = X$, $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Si Y es un subespacio conexo de (X,τ), entonces o bien $Y \subset A$, o bien $Y \subset B$.

Demostración. Los subconjuntos $\tilde{A} = A \cap Y$ y $\tilde{B} = B \cap Y$ cumplen que $\tilde{A} \cup \tilde{B} = Y$ y además como $\tilde{A} \subset A$ y $\overline{\tilde{B}} \subset \overline{B}$, tenemos que

$$\tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}} \subset A \cap \overline{B} = \emptyset$$

y análogamente $\tilde{B} \cap \overline{\tilde{A}} = \emptyset$. Como Y es conexo tenemos que o bien $\tilde{A}$, o bien $\tilde{B}$ es vacío y por tanto o bien $Y \subset B$, o bien $Y \subset A$. ■

10.1.1 Propiedades básicas de la conexión

Proposición 10.1.3 Si $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ es una aplicación continua y (X,τ) es conexo, entonces $(f(X), \tau'|_{f(X)})$ también es conexo.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que f es sobreyectiva. Supongamos que (Y,τ') es disconexo. Hay dos abiertos disjuntos U,V en Y cumpliendo que $U \cup V = Y$. Tenemos que $\tilde{U} = f^{-1}(U)$ y $\tilde{V} = f^{-1}(V)$ son abiertos no vacíos y disjuntos en X cuya unión es todo X, contradiciendo la conexión de X. ■

Como consecuencia de la proposición anterior los cocientes de conexos son conexos. En particular la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$ es conexa (es un cociente de $[0,1]$).

Proposición 10.1.4 Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de subespacios, todos ellos conexos, con por lo menos un punto común. Entonces la unión $Y = \cup_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ también es conexa.

Demostración. Supongamos que podemos escribir $Y = U \cup V$ como unión de dos abiertos disjuntos. El objetivo es probar que uno de ellos es el total. Sea p un punto común a todos los Y_α y supongamos que $p \in U$. Escribamos

$$Y_\alpha = (U \cap Y_\alpha) \cup (V \cap Y_\alpha),$$

para cada $\alpha \in \Lambda$. Por la conexión de cada Y_α deducimos que $U \cap Y_\alpha = Y_\alpha$ y por ende $U = Y$, como queríamos probar. ■

Corolario 10.1.5 Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios, todos ellos conexos tales que $Y_n \cap Y_{n+1} \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la unión $Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ también es conexa.

Demostración. Consideremos $A_n = \cup_{j=1}^n Y_j$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y apliquémosle la proposición anterior (complétense los detalles como ejercicio). ■

■ **Ejemplo 10.3** Podemos escribir $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]$, así, como consecuencia de la proposición anterior, tenemos que $\mathbb{R}$ es conexo.

También $\mathbb{R}^n$ es conexo pues lo podemos escribir como la unión de todas las rectas que pasan por el origen y aplicar el resultado anterior.

El siguiente resultado viene a decir que si a un conexo le “pegamos” unos cuantos de sus puntos adherentes, no deja de ser conexo.

Proposición 10.1.6 Si A es conexo en (X,τ) y B cumple que $A \subset B \subset \bar{A}$, entonces B también es conexo.

Demostración. Supongamos que existen C, D tales que

$$B = C \cup D, \quad C \cap \overline{D} = \overline{C} \cap D = \emptyset.$$

Veamos que o bien $C = \emptyset$, o bien $D = \emptyset$; por tanto B es conexo. Como A es conexo, por el corolario 10.1.2, sabemos que o bien $A \subset C$, o bien $A \subset D$. Supongamos que $A \subset C$. Tenemos que $\overline{A} \subset \overline{C}$, y por ende $\overline{A} \cap D = \emptyset$. Entonces B no corta a D y esto significa que D es vacío. ■

10.1.2 Componentes conexas

Dado un espacio topológico (X,τ) y un punto $x \in X$, llamamos *componente conexa de* x, y la denotamos por C_x, a la unión de todos los conexos en X que contienen a x. Nótese que:

1. Toda componente conexa es un conexo, pues es una unión de conexos con un punto en común.
2. Dados dos puntos x e y, o bien $C_x = C_y$, o bien $C_x \cap C_y = \emptyset$. En efecto, si existe $z \in C_x \cap C_y$, entonces $C = C_x \cup C_y$ es un conexo que contiene tanto a x como a y. Así que $C \subset C_x$ y también $C \subset C_y$. Como consecuencia $C = C_x = C_y$.
3. La unión de las componentes conexas de todos los puntos de X es todo X.

En definitiva, el conjunto de componentes conexas define una partición del espacio. Esta partición se corresponde con las clases de equivalencia de la relación dada por $x \sim y$ si y solo si existe un subconjunto conexo de X que contenga a x y a y. Veamos esta última afirmación.

Vamos a llamar A_x a la clase de equivalencia de x por la relación anterior. Queremos probar que $C_x = A_x$. Si $z \in C_x$, entonces x y z están en un conexo común y por tanto $z \in A_x$. Recíprocamente, si $z \in A_x$, existe un conexo D de X conteniendo tanto a z como a x. Como C_x es la unión de todos los conexos que contienen x, tenemos que $z \in D \subset C_x$.

■ **Observación 10.2** Un espacio es conexo si y solamente si tiene una sola componente conexa.

Proposición 10.1.7 Las componentes conexas son cerradas.

Demostración. Sea $C = C_x$ una componente conexa. Por la proposición 10.1.6 sabemos que $\overline{C_x}$ es un conexo que contiene a x y por tanto $\overline{C_x} \subset C_x$. ■

Ya hemos probado que los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$ son los unipuntuales; es decir, los conjuntos unipuntuales son las componentes conexas de $\mathbb{Q}$. En particular, observamos que las componentes conexas no son, en general, abiertas. Es un ejercicio probar que si hay una cantidad finita de ellas, entonces sí son abiertas.

10.1.3 Producto de espacios conexos

Dedicamos esta subsección a probar que un producto de espacios topológicos no vacíos es conexo si y solamente si cada uno de los espacios es conexo. La demostración que presentamos a continuación es la que aparece en el libro de Willard, y hace la prueba direcatemente para el caso de un producto arbitrario.

Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos no vacíos y sea (X, τ) su producto. Si (X, τ) es conexo, entonces cada uno de los (X_α, τ_α) lo es también, gracias a que las proyecciones son continuas y sobreyectivas.

Recíprocamente, supongamos que cada uno de los (X_α, τ_α) es conexo. Tomemos un punto $\mathbf{a} = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de X y sea C la componente conexa que contiene $\mathbf{a}$. Si probamos que C es denso en X hemos terminado, pues entonces C es todo X (las componentes conexas son cerradas) y C es un conexo. Denotemos mediante $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ las proyecciones y sea

$$U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

un cilindro básico. Veamos que $C \cap U \neq \emptyset$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, tomemos $b_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$ y definamos $E_i = A_i \cap B_i$, donde

$$A_i = \bigcap_{\alpha\in\Lambda\setminus\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}\}} \pi_\alpha^{-1}(a_\alpha)$$

$$B_i = \pi_{\alpha_1}^{-1}(b_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(b_{\alpha_2}) \cap \cdots \pi_{\alpha_{i-1}}^{-1}(b_{\alpha_{i-1}})$$

Nótese que la coordenada α_i es libre en cada E_i, así que E_i es homeomorfo a X_{α_i}, y por lo tanto es un espacio conexo. Tenemos además que:

- $E_i \cap E_{i+1} \neq \emptyset$, pues el elemento $\mathbf{c} = (c_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de X dado por $c_{\alpha_j} = b_{\alpha_j}$, para $j = 1, 2 \ldots, i$ y $c_\alpha = a_\alpha$ en otro caso, está en esta intersección.
- $\mathbf{a} \in E_1$.
- $E_n \cap U \neq \emptyset$, pues comparten los puntos $\mathbf{c} = (c_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de X de la forma $c_{\alpha_j} = b_{\alpha_j}$, para $j = 1, 2 \ldots, n$.

Como consecuencia obtenemos que $F = \cup_{i=1}^n E_i$ es un conjunto conexo con $\mathbf{a} \in F$, por tanto $F \subset C$. Por otro lado, como $F \cap U \neq \emptyset$, también tenemos que $C \cap U \neq \emptyset$, como queríamos probar.

Vamos a presentar ahora una prueba más sencilla, donde separamos primero el caso finito y después nos valemos de éste para probar el caso arbitrario.

- Supongamos que $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$. Haremos la prueba para el caso $n = 2$, siguiéndose el resto por inducción. Tomamos $y \in X_2$ y sea $L = X_1 \times \{y\}$, que es conexo por ser homeomorfo a X_1. Ahora, para cada $x \in X_1$ consideramos $R_x = \{x\} \times X_2$, que también es conexo y $A_x = R_x \cup L$, que es conexo por ser unión de conexos con un punto en común. Escribimos

  $$X_1 \times X_2 = \bigcup_{x\in X_1} A_x,$$

  que es unión de conexos todos ellos conteniendo L, por ende conexo.

- Veamos el caso en que Λ es arbitrario. Sea $\mathbf{a} = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in X$ y sea C la componente conexa que contiene $\mathbf{a}$. Veamos que C corta a todo cilindro básico de la forma

$$U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}).$$

Para ello, vamos a probar que U corta un conexo F, con $\mathbf{a} \in F$, y por tanto $C \cap U \supset F \cap U \neq \emptyset$. Basta tomar

$$F = \bigcap_{\alpha\in\Lambda\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}} \pi_\alpha^{-1}(a_\alpha)$$

que es homeomorfo a $X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots X_{\alpha_n}$, y por ende conexo. En efecto, tenemos que todo punto de la forma $\mathbf{c} = (c_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de la forma $c_{\alpha_j} \in U_{\alpha_j}$, para $j = 1, 2\dots, n$ y $c_\alpha = a_\alpha$ en otro caso, está en $U \cap F$.

10.2 Conexión por caminos

Sea (X, τ) un espacio topológico. Dados dos puntos $x, y \in X$, llamamos *camino entre x e y* a toda aplicación continua $\gamma : [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. La siguiente noción de conexión, llamada *conexión por caminos* es un poco más fuerte.

Definición 10.2.1 Un espacio topológico es *conexo por caminos* si cualesquiera dos puntos se pueden conectar por un camino.

Proposición 10.2.1 Todo espacio topológico conexo por caminos es conexo.

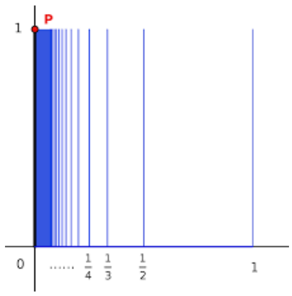
Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo por caminos. Escribamos $X = U \cup V$ como unión de abiertos disjuntos y supongamos que U es no vacío, es decir, existe $x \in U$. Veamos que $U = X$. Dado $y \in X$, existe un camino $\gamma : [0,1] \to X$ que conecta x e y. Como el intervalo $[0,1]$ es conexo y la conexión se preserva por aplicaciones continuas, tenemos que $\mathrm{Im}\gamma \subset X$ es conexo, así que necesariamente $\mathrm{Im}\gamma \subset U$; en particular $y \in U$. ■

■ **Ejemplo 10.4** Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si dados dos puntos $x, y \in X$, el segmento L_{xy} que los une está contenido en X. Todo convexo de $\mathbb{R}$ es conexo por caminos y por ende es conexo.

■ **Ejemplo 10.5** Damos ahora un ejemplo de espacios conexo que no es conexo por caminos. Sea $L_0 = \{0\} \times [0,1]$ y $L_n = \{1/n\} \times [0,1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Llamamos *peine del topólogo* al subconjunto C de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$C = \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n \cup L_0 \cup F, \quad \text{donde } F = [0,1] \times \{0\}.$$

A cada L_i lo llamamos "púa" y a F lo llamamos el "forzal". El peine del topólogo es conexo por caminos, pues cualquier punto de una púa se puede conectar con el punto del forzal donde arranca esa púa, y moviéndonos por el forzal podemos cambiar de púa.



El *peine punteado* P consiste en eliminar en C el punto $(0,0)$. Nótese que

$$P \setminus L_0 \subset P \subset \overline{P \setminus L_0} = C$$

y $P \setminus L_0$ es conexo, pues es conexo por caminos (razonamiento anterior), por tanto P también es conexo. Veamos que en cambio P no es conexo por caminos, probando que cualquier camino partiendo de $L_0^* = L_0 \setminus \{(0,0)\}$ no puede abandonar L_0^*.

Sea $\gamma : [0,1] \to P$ un camino con $\gamma(0) \in L_0^*$. Probaremos que $G = \gamma^{-1}(L_0^*)$ es abierto y cerrado, y por conexión del intervalo $[0,1]$ concluiremos que $G = [0,1]$.

- Como L_0^* es cerrado dentro de P, ya tenemos que G es cerrado.
- Veamos que G es abierto. Queremos comprobar que para cualquier $t \in G$, hay un entorno de t contenido en G. Fijemos V un entorno alrededor de $\gamma(t)$ que no corte F; esto lo podemos hacer siempre gracias a haber quitado el punto $(0,0)$. Por la continuidad de γ en el punto t, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma(U) \subset V$, con $U = (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Veamos que $U \subset G$, es decir que $\gamma(U)$ no contiene puntos fuera de L_0^*. Fijemos cualquier punto $(1/n, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ y un número real r con $0 < r < 1/n$, que no sea el inverso de ningún número natural. El único punto en que $\gamma(U) \subset P$ podría cortar la recta $x = r$ es el $(r,0)$, pero $\gamma(U) \subset V$ y V no corta F. Así que $\gamma(U) = W_- \cup W_+$, donde

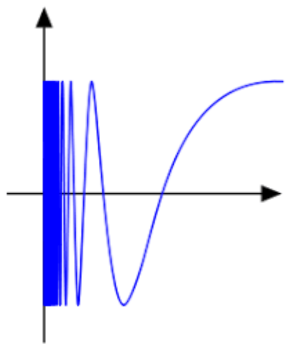
$$W_- = ((-\infty, r) \times \mathbb{R}) \cap \gamma(U), \quad W_+ = ((r,\infty) \times \mathbb{R}) \cap \gamma(U).$$

  Como $\gamma(t) \in W_-$ y $\gamma(U)$ es conexo, tenemos que $W_+ = \emptyset$. En particular, tenemos que el punto $(1/n, y_0) \notin \gamma(U)$ y por tanto $\gamma(U) \subset L_0^*$ como queríamos.

Otro ejemplo muy clásico de espacio conexo que no es conexo por caminos es el *seno del topólogo*. Consideremos la función continua

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(1/x)$$

y sean $S = \mathrm{Gr}(f)$, $L = \{0\} \times [-1,1]$ y $X = S \cup L$. La prueba de que X no es conexo por caminos es muy similar a la anterior, que X es conexo se sigue de que $X = \overline{S}$ y S es conexo, pues el grafo de una aplicación continua es homeomorfo al dominio de la aplicación y el intervalo $(0,\infty)$ es conexo.



Presentamos ahora propiedades básicas de la conexión por caminos, muy similares a las dadas probadas para la conexión.

Proposición 10.2.2 Si $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ es una aplicación continua y sobreyectiva y (X,τ) es conexo por caminos, también (Y,τ') es conexo por caminos.

Demostración. Dados $y_1, y_2 \in Y$, buscamos un camino en Y que los una. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$ y sea $\gamma : [0,1] \to X$ un camino que une x_1 con x_2. Tenemos que $f \circ \gamma : [0,1] \to f(X)$ es el camino buscado. ■

Proposición 10.2.3 Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de subespacios, todos ellos conexos por caminos, con por lo menos un punto común. Entonces la unión $Y=\cup_{\alpha\in\Lambda}Y_\alpha$ también es conexa por caminos.

Demostración. Llamemos p a un punto común a todos los Y_α y sean x_1,x_2 dos puntos en Y. Tenemos que $x_1\in Y_{\alpha_1}$ y $x_2\in Y_{\alpha_2}$. Podemos unir x_1 con p por un camino $\gamma_1:[0,1]\to Y_{\alpha_1}$ y unir p con x_2 por otro camino $\gamma_2:[0,1]\to Y_{\alpha_2}$. La *concatenación* de estos dos caminos

$$\gamma:[0,1]\to Y,\quad \gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t), & t\in[0,1/2]\\ \gamma_2(1-2t), & t\in[1/2,1].\end{cases}$$

nos da el camino entre x_1 y x_2 buscado. ■

■ **Observación 10.3** La operación de concatenación introducida en la prueba de la proposición anterior es muy importante, pues será la operación con la que definir el grupo fundamental.

Definición 10.2.2 Dado un espacio topológico (X,τ) y un punto $x\in X$, llamamos *componente conexa por caminos de* x, y la denotamos por P_x, a la unión de todos los conexos por caminos en X que contienen a x.

Del mismo modo que para las componentes conexas, tenemos que:

1. Toda componente conexa por caminos es un conexo por caminos, pues es una unión de conexos por caminos con un punto en común.
2. Dados dos puntos x e y, o bien $P_x=P_y$, o bien $P_x\cap P_y=\emptyset$.
3. La unión de las componentes conexas por caminos de todos los puntos de X es todo X.

El conjunto de componentes conexas por caminos define una partición del espacio que se corresponde con las clases de equivalencia de la relación dada por $x\sim y$ si y solo si existe un subconjunto conexo por caminos de X que contenga a x y a y.

■ **Observación 10.4** Un espacio es conexo por caminos si y solamente si tiene una sola componente conexa por caminos. Además, en vista de la proposición 10.2.1, toda componente conexa es unión de componentes conexas por caminos.

■ **Ejemplo 10.6** En el peine del topólogo punteado P encontramos una sola componente conexa y dos componentes conexas por caminos. Una es la púa punteada L_0^*, que es cerrada en P, pero no abierta. La otra es su complementario, que es abierto, pero no cerrado.

Nótese que se puede puntear un poco más el peine del topólogo considerando solo los irracionales de la púa L_0. De esta manera obtendríamos un espacio conexo con una cantidad no numerable de componentes conexas por caminos.

10.3 Conexión local y conexión local por caminos

Definición 10.3.1 Un espacio topológico es *localmente conexo* si todo punto tiene un sistema fundamental de entornos conexo. Del mismo modo, un espacio topológico es *localmente conexo por caminos* si todo punto tiene un sistema fundamental de entornos conexo por caminos.

Nótese que todo espacio localmente conexo por caminos es localmente conexo.

Proposición 10.3.1 Un espacio localmente conexo por caminos es conexo si y solamente si es conexo por caminos.

Demostración. Ya sabemos que todo espacio conexo por caminos es conexo. Supongamos ahora que (X,τ) es un espacio localmente conexo por caminos y conexo. Dado un punto $x\in X$, vamos a ver que el conjunto

$$A_x=\{y\in X:\ \text{existe un camino entre } x \text{ e } y\}$$

es abierto y cerrado, y por tanto es el total. Como consecuencia tendremos que (X,τ) es conexo por caminos.

– A_x es abierto. Dado $y \in A_x$, existe un entorno B de y conexo por caminos, por ende $B \subset A_x$, pues cualquier punto de B se puede unir con y por un camino, y este camino se puede concatenar con otro que una y con x.

– A_x es cerrado. Tomemos un punto $y \notin A_x$ y sea B un entorno de y conexo por caminos. Tenemos que $B \cap A_x = \emptyset$. En efecto, si $z \in B \cap A_x$, podríamos conectar z con y y también x con z. Concatenando estos dos caminos, conseguiríamos uno entre y y x, pero esto es absurdo, pues $y \notin A_x$. ■

Proposición 10.3.2 Todo abierto de un localmente conexo (por caminos) es localmente conexo (por caminos).

Demostración. La prueba es análoga a la de los localmente compactos. ■

Corolario 10.3.3 En un espacio localmente conexo por caminos las componentes conexas coinciden con las componentes localmente conexas por caminos. En particular, para los abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 10.3.4 Un espacio es localmente conexo si y solamente si las componentes conexas de sus abiertos son abiertas.

Demostración. Supongamos que (X,τ) es un espacio localmente conexo. Sea U un abierto en x y C una componente conexa de U. Dado un punto $x \in C$, buscamos un entorno de x estrictamente contenido en C. Observemos que $C = C_x$. Dado que X es localmente conexo, podemos escoger un entorno A de x conexo y con $A \subset U$ (aquí usamos que U es abierto). Automáticamente $A \subset C$, pues es un conexo que contiene a x.

Supongamos ahora que (X,τ) es un espacio para el que las componentes conexas de sus abiertos son conexas. Dado un punto $x \in X$ y un entorno A de x, buscamos otro entorno de x que sea conexo y que esté contenido en A. Sea U un abierto tal que $x \in U \subset A$ y sea C_x la componente conexa de x en U. Por hipótesis es abierta y, por tanto, un entorno de x. Así, tenemos que

$$x \in C_x \subset U \subset A$$

como queríamos. ■

Corolario 10.3.5 Las componentes conexas de un espacio localmente conexo son abiertas y cerradas

Corolario 10.3.6 Cualquier espacio localmente conexo y casi-compacto tiene una cantidad finita de componentes conexas.

Proposición 10.3.7 Un espacio es localmente conexo por caminos si y solamente si las componentes conexas por caminos de sus abiertos son abiertas.

Demostración. Es análoga a la proposición 10.3.4 ■

Proposición 10.3.8 Todo cociente de un espacio localmente conexo es localmente conexo

Demostración. Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una aplicación de cociente. Fijemos un abierto U en Y y una componente conexa D en U. Para probar que D es un abierto, basta comprobar que $f^{-1}(D)$ lo es, por definición de topología cociente. Tomemos $x \in f^{-1}(D)$ y sea C_x la componente conexa de x en $f^{-1}(U)$, que sabemos que es abierta por ser (X,τ) localmente conexo. Ahora $f(C_x)$ es conexo y contiene el punto $f(x) \in D$, así que $f(C_x) \subset D$, y por ende $C_x \subset f^{-1}(D)$. Haciendo esto para cada punto en $f^{-1}(D)$, concluimos que es abierto, como queríamos. ■

A continuación resumimos la relación que hay entre los conceptos: conexo, localmente conexo, conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Las comprobaciones que no se hayan realizado se dejan como ejercicio

1. Todo conexo por caminos es conexo.
2. El peine del topólogo punteado es un conexo que no es conexo por caminos.
3. El peine del topólogo es conexo por caminos pero no localmente conexo por caminos (me tengo que mover "lejos" para conectar por un camino dos puntos cercanos). Como consecuencia es conexo pero no localmente conexo.
4. El espacio $X = [1,2] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ es localmente conexo por caminos (y por tanto localmente conexo), pero no es ni conexo por caminos ni conexo.
5. El espacio $[0,1] \times [0,1]$ con la topología inducida por el orden lexicográfico es localmente conexo, pero no localmente conexo por caminos.

III Topología algebraica

11. Grupo fundamental

La topología algebraica versa sobre el estudio de propiedades de los espacios topológicos a través de objetos algebraicos asociados a dichos espacios. En este capítulo introducimos uno de estos objetos algebraicos: el grupo fundamental de un espacio topológico "con punto base".

A partir de ahora, si no hay lugar confusión omitiremos por comodidad la topología en las notaciones de espacios topológicos.

11.1 Homotopía de caminos y grupo fundamental

El objetivo principal en esta sección es establecer un *functor* (adoptando el lenguaje de la teoría de categorías) entre la categoría de espacios topológicos "con punto base" y la categoría de grupos. Más precisamente, asignamos:

1. A cada espacio topológico con punto base (X,x_0) un grupo: su grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$.
2. A cada aplicación continua $f:(X,x_0)\to(Y',y_0)$ un morfismo de grupos

$$f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0),$$

de modo que se cumpla:

a) Si f es la identidad topológica en X, entonces f_* es el homomorfismo identidad en $\pi(X,x_0)$, para cualquier $x_0\in X$.

b) Dada otra aplicación continua $g:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$, entonces

$$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$$

Como ya venimos haciendo habitualmente, el intervalo $[0,1]$ lo consideramos dotado de la topología usual como subespacio de $\mathbb{R}$. La existencia de una homotopía entre dos caminos responde a la idea de que se puede "deformar" de manera continua uno en el otro. De manera precisa:

Definición 11.1.1 Sean γ,γ' dos caminos en X. Una *homotopía de caminos de γ en γ'* es cualquier aplicación continua

$$H:[0,1]\times[0,1]\to X$$

cumpliendo las siguientes propiedades:

- $H(s,0)=\gamma(s)$
- $H(s,1)=\gamma'(s)$
- $H(0,t)=\gamma(0)=\gamma'(0)=x_0$, para todo $t\in[0,1]$.
- $H(1,t)=\gamma(1)=\gamma'(1)=x_1$, para todo $t\in[0,1]$.

Usaremos la notación $\gamma\sim_{\{0,1\}}\gamma'$ para indicar que existe una homotopía de caminos de γ en γ' y diremos que γ y γ' son *caminos homótopos*. Esto tiene sentido, pues la relación $\sim_{\{0,1\}}$ es simétrica: si $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ es una homotopía de caminos de γ en γ', entonces $F:[0,1]\times[0,1]\to X$ dada por $F(s,t)=H(s,1-t)$ es una homotopía de caminos de γ' en γ.

■ **Observación 11.1** Asociada a una homotopía $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ entre dos caminos en X que empiezan en x_0 y terminan en x_1, obtenemos una familia $\{H_t\}_{t\in[0,1]}$ de caminos en X que empiezan en x_0 y terminan en x_1, dados por

$$H_t(s)=H(s,t).$$

La continuidad de H indica que esta familia varía de forma continua con el parámetro t, lo cual se corresponde a la idea intuitiva de deformar.

Proposición 11.1.1 La relación de homotopía de caminos es una relación binaria en el conjunto de caminos en X que empiezan en x_0 y terminan en x_1.

Demostración. Sean $\gamma,\gamma',\gamma'':[0,1]\to X$ tres caminos que empiezan en x_0 y terminan en x_1. La propiedad simétrica ya hemos visto que se cumple, y la reflexiva se sigue tomando la homotopía $H(s,t)=\gamma(s)$, para todo $t\in[0,1]$.

Veamos la propiedad transitiva. Supongamos que $H,H':[0,1]\times[0,1]\to X$ son homotopías de caminos de γ en γ' y de γ' en γ'', respectivamente. Se puede comprobar que la aplicación $F:[0,1]\times[0,1]\to X$ dada por

$$F(s,t)=\begin{cases} H(s,2t) & t\in[0,1/2],\\ H'(s,2t-1) & t\in[1/2,1]\end{cases}$$

es una homotopía de caminos de γ en γ''. ■

Dado un camino $\gamma:[0,1]\to X$, definimos su *inverso* γ^{-1} como el camino que se obtiene al recorrer γ de forma inversa, es decir $\gamma^{-1}:[0,1]\to X$ está dado por

$$\gamma^{-1}(s)=\gamma(1-s)$$

Recordemos ahora que, dados dos caminos $\gamma_1,\gamma_2:[0,1]\to X$ con $\gamma_1(1)=\gamma_2(0)$, su *concatenación* es el camino $\gamma_1*\gamma_2:[0,1]\to X$ dado por

$$\gamma_1*\gamma_2(t)=\begin{cases} \gamma_1(2s) & s\in[0,1/2],\\ \gamma_2(2s-1) & s\in[1/2,1].\end{cases}$$

Proposición 11.1.2 Sea X un espacio topológico, sean γ_1,γ_1' caminos en X empezando en x_0 y terminando en x_1 y sean γ_2,γ_2' caminos en X empezando en x_1 y terminando en x_2. Se tiene que:

a) Si los caminos γ_1 y γ_1' son homótopos y también γ_2 y γ_2' son homótopos entonces $\gamma_1*\gamma_2$ es homótopo a $\gamma_1'*\gamma_2'$.
b) Los caminos γ_1 y γ_1' son homótopos si y solamente si los caminos γ_1^{-1} y $(\gamma_1')^{-1}$ también son homótopos.

Demostración. Si H_i es una homotopía de caminos de γ_i en γ_i', para $i=1,2$, entonces la aplicación

$$H(t,s)=\begin{cases} H_1(2s,t) & s\in[0,1/2],\\ H_2(2s-1,t) & s\in[1/2,1],\end{cases}$$

es una homotopía de caminos de $\gamma_1 * \gamma_2$ en $\gamma_1' * \gamma_2'$.

Para la prueba de b), basta considerar $F(t,s) = H(t,1-s)$, donde H es una homotopía de γ_1 en γ_2 y recíprocamente. ■

Un espacio topológico con punto base es una pareja (X,x_0), donde x_0 es un punto en X. Un *lazo en X basado en x_0* es un camino en X que empieza y termina en el punto x_0. Los elementos del *grupo fundamental* $\pi_1(X,x_0)$ son las clases de homotopía de lazos basados en x_0. La operación interna que le da estructura de grupo es la *concatenación* "$\cdot$" (con un pequeño abuso de lenguaje la llamamos igual que a la operación $*$ de concatenación de caminos), y tiene sentido entre los elementos de $\pi_1(X,x_0)$ gracias a la proposición 11.1.2.a), es decir, definimos

$$[\gamma_1]\cdot[\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2], \quad \forall\, [\gamma_1],[\gamma_2] \in \pi(X,x_0)$$

Teorema 11.1.3 La pareja $(\pi_1(X,x_0),\cdot)$ es un grupo.

Antes de entrar de lleno en la demostración, recordemos la siguiente construcción básica de geometría afín que nos resultará útil para la prueba. Dados números reales a,b,c,d con $a<b$, la aplicación $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$L(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a)+c \tag{11.1}$$

es la una única aplicación afín tal que $L(a)=c$ y $L(b)=d$. Si $c=d$ esta aplicación es constante, si no, es biyectiva en su imagen que es el intervalo $[\text{mín}\{c,d\},\text{máx}\{c,d\}]$.

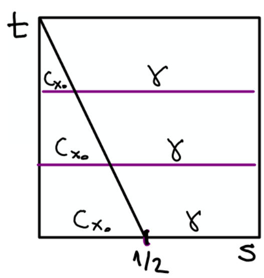
Demostración del teorema 11.1.3. Ya hemos visto que la operación de concatenación "$\cdot$" está bien definida. Ahora debemos comprobar la existencia de elemento neutro, de elemento inverso y la asociatividad.

Elemento neutro: Veamos que el elemento neutro en $\pi_1(X,x_0)$ es la clase de homotopía del lazo constante c_{x_0} dado por $c_{x_0}(t)=x_0$, para todo $t\in[0,1]$. Para ello, se debe probar que

$$[c_{x_0}]\cdot[\gamma] = [\gamma]\cdot[c_{x_0}] = [\gamma], \quad \text{para todo } [\gamma]\in\pi_1(X,x_0).$$

Veamos que $c_{x_0}*\gamma$ y γ son caminos homótopos. De manera análoga se comprobará que $\gamma * c_{x_0}$ y γ también son caminos homótopos. Recordemos que

$$(c_{x_0}*\gamma)(s) = \begin{cases} x_0 & s\in[0,1/2],\\ \gamma(2s-1) & s\in[1/2,1].\end{cases}$$



Una homotopía de caminos de $c_{x_0}*\gamma$ en γ responde a la imagen anterior y viene dada explícitamente mediante la expresión

$$H(t,s) = \begin{cases} x_0, & 0\le s\le \frac{1-t}{2},\\[2ex] \gamma\left(\dfrac{2s+t-1}{1+t}\right), & \frac{1-t}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

El rango en el que se mueve s en la fórmula anterior, se obtiene, como indica la figura aplicando la ecuación (11.1) a los valores $a = 0$, $b = 1$, $c = 1/2$, $d = 0$. El término dentro del paréntesis de γ en la fórmula anterior se obtiene aplicando la ecuación (11.1) a los valores $a = \frac{1-t}{2}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.

Elemento inverso: Dado un elemento en $\pi_1(X, x_0)$, tiene sentido, gracias a la proposición 11.1.2.b), considerar la clase de homotopía del lazo inverso de uno de sus representantes. Veamos que este es el elemento inverso para la operación de concatenación. Así, dado $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, queremos comprobar que

$$[\gamma] \cdot [\gamma^{-1}] = [\gamma^{-1}] \cdot [\gamma] = [c_{x_0}]$$

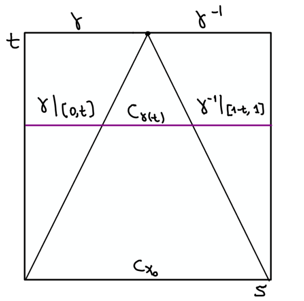
Probemos que $\gamma * \gamma^{-1}$ y c_{x_0} son caminos homótopos, de modo análogo se tendrá que $\gamma^{-1} * \gamma$ y c_{x_0} también son caminos homótopos. Recordemos que

$$(\gamma * \gamma^{-1})(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & s \in [0, 1/2], \\ \gamma^{-1}(2s-1) = \gamma(2-2s) & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Una homotopía de $\gamma * \gamma^{-1}$ en c_{x_0} viene dada explícitamente mediante la expresión

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma(2s) & 0 \le s \le \frac{t}{2}, \\ \gamma(t) & \frac{t}{2} \le s \le \frac{2-t}{2} \\ \gamma(2-2s) & \frac{2-t}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

(Para cada $t \in [0, 1]$, recorremos γ hasta llegar al punto $\gamma(t)$, ahí esperamos un rato y después volvemos a recorrer el mismo pedazo de γ de manera inversa).



Asociatividad: Veamos que $([\gamma] \cdot [\gamma']) \cdot [\gamma''] = [\gamma] \cdot ([\gamma'] \cdot [\gamma''])$. Para ello, debemos comprobar que los caminos

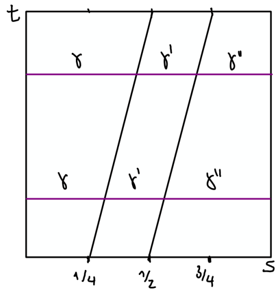
$$\sigma = (\gamma * \gamma') * \gamma'', \quad \sigma' = \gamma * (\gamma' * \gamma'')$$

son homótopos. Sus expresiones como aplicaciones definidas a trozos son

$$\sigma(s) = \begin{cases} \gamma(4s) & s \in [0, 1/4], \\ \gamma'(4s-1) & s \in [1/4, 1/2], \\ \gamma''(2s-1) & s \in [1/2, 1], \end{cases} \qquad \sigma'(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & s \in [0, 1/2], \\ \gamma'(4s-2) & s \in [1/2, 3/4], \\ \gamma''(4s-3) & s \in [3/4, 1] \end{cases}$$

Una homotopía de σ en σ' es la dada por

$$H(s,t) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{4s}{1+t}\right) & 0 \le s \le \frac{1+t}{4}, \\ \gamma'(4s-1-t) & \frac{1+t}{4} \le s \le \frac{2+t}{4}, \\ \gamma''\left(\frac{4s-2-t}{2-t}\right) & \frac{2+t}{4} \le s \le 1. \end{cases}$$



Tanto los rangos en los que se mueve s como los términos en los que evaluar γ, γ' y γ'' se obtienen utilizando la Ecuación (11.1) de modo análogo a como hemos hecho para el elemento neutro. ■

■ **Observación 11.2** La homotopía presentada para el elemento opuesto no puede consistir en: para cada instante t recorrer todo γ, esperar en x_0 y después volver con γ^{-1}, pues no se puede hacer de forma continua cuando t converge a 0.

■ **Ejemplo 11.1** El grupo fundamental de cualquier convexo C de $\mathbb{R}^n$ con punto base $p \in C$ es trivial, es decir $\pi_1(C,p) = \{[c_p]\}$. En particular $\pi_1(\mathbb{R}^n,p) = \{[c_p]\}$. En efecto, dos caminos σ,τ ambos con punto inicial x_0 y punto final x_1 son automáticamente homótopos mediante la homotopía de caminos

$$H(t,s) = t\cdot\sigma(s) + (1-t)\cdot\tau(s) \in C$$

En particular, todo lazo γ basado en p es homótopo al lazo constante igual a p.

Notemos en el ejemplo anterior que los grupos fundamentales en los distintos puntos $p \in C$ son isomorfos y recordemos que los convexos son en particular conexos por caminos. Veamos que de manera general, los grupos fundamentales para todos los puntos de una misma componente conexa por caminos de un espacio topológico son isomorfos. Más precisamente, se satisface el siguiente resultado:

Proposición 11.1.4 Sea X un espacio topológico y sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos para los que existe un camino $\alpha : [0,1] \to X$ que va de x_0 en x_1. La aplicación $\alpha^* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$ dada por

$$[\gamma] \mapsto [\alpha]^{-1}\cdot[\gamma]\cdot[\alpha] = [\alpha^{-1} * \gamma * \alpha]$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Que la aplicación α^* está bien definida y es inyectiva se sigue de nuevo por la proposición 11.1.2. Que α^* es homomorfismo de grupos se tiene por definición y es un ejercicio directo comprobar que la inversa viene dada por $(\alpha^*)^{-1} = (\alpha^{-1})^*$, donde α^{-1} es el camino inverso a α. ■

Cuando X es un espacio topológico conexo por caminos, muchas veces hablaremos directamente de su grupo fundamental $\pi_1(X)$ sin especificar el punto base (aunque esto suponga un abuso del lenguaje).

Terminamos esta sección comprobando las propiedades functoriales establecidas anteriormente. Sea $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ una aplicación continua entre espacios topológicos con punto base; esta notación siempre indicará que $f(x_0) = y_0$. Nótese que si γ y γ' son dos caminos en X homótopos, también son homótopos los caminos $f\circ\gamma$ y $f\circ\gamma'$ en Y; en efecto, si F es una homotopía de caminos de γ en γ', entonces $f\circ F$ es una homotopía de caminos de $f\circ\gamma$ en $f\circ\gamma'$. Así, está bien definida la aplicación entre grupos fundamentales $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ dada por

$$f_*([\gamma]) = [f\circ\gamma].$$

La prueba de la siguiente proposición se sigue sin dificultad y se deja como ejercicio.

Proposición 11.1.5 Se tienen las siguientes propiedades:

1. La aplicación f^* es un homomorfismo de grupos.
2. Si f es la identidad topológica en (X,x_0), entonces f_* es la aplicación identidad en $\pi_1(X,x_0)$.
3. Si $g:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$ es otra aplicación continua, entonces $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$.

11.2 Grupo fundamental de la circunferencia

El primer ejemplo de espacio topológico con grupo fundamental no trivial es la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Dedicamos esta sección a probar que $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. De alguna manera, esto significa que la clase de homotopía de un lazo solamente depende de el número de veces que éste “gira” (winding number).

Consideremos $\mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{C}$ la circunferencia unidad con la estructura de grupo inducida por el producto de números complejos. Ya hemos introducido anteriormente la *aplicación exponencial* $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ dada por

$$\exp(r) = e^{2\pi i r} = \cos(2\pi r)+i\sin(2\pi r).$$

que sabemos que es continua y abierta. Si consideramos $\mathbb{R}$ como grupo aditivo, tenemos que además exp es un homomorfismo de grupos.

Recubramos $\mathbb{S}^1$ con los abiertos $U_1=\mathbb{S}^1\setminus\{-1\}$ y $U_2=\mathbb{S}^1\setminus\{1\}$. Tenemos que

$$\exp^{-1}(U_1) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} V_k^1, \quad \exp^{-1}(U_2) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} V_k^2,$$

donde $V_k^1=(k-1/2,k+1/2)$ y $V_k^2=(k,k+1)$. Notemos las siguientes propiedades:

- Dado $i=1,2$, las componentes conexas de $\exp^{-1}(U_i)\subset\mathbb{R}$ son los V_k^i, para cada $k\in\mathbb{Z}$.
- La aplicación $\phi_k^i:V_k^i\to U_i$ dada por $\phi_k^i(r)=\exp(r)$ es un homeomorfismo (pues es continua, abierta y biyectiva)
- Se tiene que $\exp(r)=\exp(r')$ si y solamente si $r-r'\in\mathbb{Z}$. Dicho de otro modo, el núcleo (que tiene sentido por ser homomorfismo de grupos) de $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ es $\ker(\exp)=\mathbb{Z}$.

■ **Observación 11.3** Es recomendable y resulta de utilidad tener en mente la siguiente representación de la aplicación exponencial exp. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ la aplicación continua dada por

$$f(r) = (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r, 2\pi r)$$

Tenemos que f es un homeomorfismo en su imagen $\mathscr{H}=f(\mathbb{R})$, que es una hélice circular. Ahora, tenemos que $\exp = \mathrm{pr}_z|_{\mathscr{H}}\circ f$.

Ahora presentamos los resultados de levantamiento único de caminos y homotopías, que son clave para concluir que el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Lema 11.2.1 — Levantamiento único de caminos. Sean σ un camino en $\mathbb{S}^1$ con punto inicial x_0 y sea $r_0\in\mathbb{R}$ un punto tal que $\exp(r_0)=x_0$. Existe un único camino $\tilde\sigma$ en $\mathbb{R}$ con $\tilde\sigma(0)=r_0$ tal que $\exp\circ\sigma'=\sigma$.

■ **Observación 11.4** Con las notaciones en la observación 11.3, el levantamiento σ' de un camino σ en $\mathbb{S}^1$ se entiende ahora como el levantamiento $\sigma_{\mathscr{H}}$ de σ a la hélice $\mathscr{H}$ empezando en un punto $y_0\in\mathscr{H}$ tal que $\mathrm{pr}(y_0)=x_0$. Más precisamente

$$\sigma_{\mathscr{H}} = f\circ\tilde\sigma, \quad \mathrm{pr}_z|_{\mathscr{H}}(\sigma_{\mathscr{H}}) = \sigma.$$

Lema 11.2.2 — Levantamiento único de homotopías. Sean σ_0, σ_1 dos caminos en $\mathbb{S}^1$ con punto inicial x_0 y punto final x_1 y supongamos que existe una homotopía de caminos $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ llevando σ_0 en σ_1. Sean $\tilde{\sigma}_0$ y $\tilde{\sigma}_1$ los respectivos levantados de σ_0 y σ_1, ambos partiendo de un punto $r_0 \in \exp^{-1}(x_0)$. Entonces, existe una única homotopía de caminos $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ llevando $\tilde{\sigma}_0$ en $\tilde{\sigma}_1$ y cumpliendo que

$$\exp \circ \tilde{H} = H.$$

Antes de probar estos lemas, veamos como concluir nuestro resultado a partir de ellos. Para hacerlo, observamos lo siguiente:

- El punto final del levantado de un camino, depende solamente de la clase de homotopía del camino. De manera más precisa, sean $\sigma, \tau : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ dos caminos homótopos que empiezan en x_0 y sean $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau} : [0,1] \to \mathbb{R}$ sus respectivos levantados empezando en r_0. Como consecuencia del levantado de homotopías sabemos que $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$ son también caminos homótopos y en particular tenemos que $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\tau}(1)$.
- Los levantados de los caminos en $\mathbb{S}^1$ que terminan en 1 tienen como punto final un entero. Esto es, dado un camino $\sigma : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ con punto final 1 y su levantado $\tilde{\sigma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ empezando en r_0, sabemos que $\exp(\tilde{\sigma}(1)) = 1$, pero esto ocurre si y solamente si $\tilde{\sigma}(1) \in \mathbb{Z}$.

Consideremos $x_0 = x_1 = 1$ y $r_0 = 0$. La aplicación

$$\Psi : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}, \quad \Psi([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1)$$

está bien definida gracias a las observaciones anteriores. Veamos que es un isomorfismo de grupos.

- *Homomorfismo*: Sean $[\gamma_1], [\gamma_2]$ dos clases de equivalencia de lazos en $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ y escribamos $n = \tilde{\gamma}_1(1)$, $m = \tilde{\gamma}_2(1)$. Queremos ver que
$$\widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}(1) = n + m.$$
Consideremos el camino $\hat{\gamma}_2(s) = \tilde{\gamma}_2(s) + n$ y sea $\alpha = \tilde{\gamma}_1 * \hat{\gamma}_2$. Tenemos que $\alpha(0) = 0$ y que $\exp \circ \alpha = \gamma_1 * \gamma_2$. Como consecuencia de la unicidad del levantamiento de caminos, tenemos que $\alpha = \widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}$. Ahora $\alpha(1) = n + m$.
- *Sobreyectiva:* Dado un entero $n \in \mathbb{Z}$ consideramos el camino $\bar{\gamma}$ en $\mathbb{R}$ dado por $\bar{\gamma}(s) = ns$. Sea $\gamma = \exp \circ \bar{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{S}^1$. Por definición, tenemos que $\tilde{\gamma} = \bar{\gamma}$ y por tanto $\Psi([\gamma]) = \bar{\gamma}(1) = n$.
- *Inyectiva:* Sean γ_1, γ_2 dos lazos en $\mathbb{S}^1$ tales que $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$. Queremos probar que $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. Sabemos que dos caminos en $\mathbb{R}$ con el mismo punto inicial y punto final son homótopos, así, hay una homotopía $\tilde{H}$ entre $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$. La composición $H = \exp \circ \tilde{H}$ proporciona una homotopía entre γ_1 y γ_2.

Para probar los resultados de levantamiento único de caminos y homotopías, se requiere el siguiente resultado relativo a la compacidad en espacios métricos. Presentamos la demostración que aparece en el libro de Willard.

Proposición 11.2.3 — Número de Lebesgue. Sea X un espacio métrico compacto, y sea $\mathscr{U}$ un recubrimiento de X por abiertos. Entonces, existe $\delta(\mathscr{U}) > 0$, llamado *número de Lebesgue de* $\mathscr{U}$, de forma que para todo $A \subset X$ con $\operatorname{diam}(A) < \delta(\mathscr{U})$, hay algún $U \in \mathscr{U}$ tal que $A \subset U$ (El valor $\operatorname{diam}(A)$ es el supremo de todas las distancias entre puntos en A y se llama *diámetro de* A).

Demostración. Supongamos que no existe tal valor $\delta = \delta(\mathscr{U})$. En particular, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto A_n con $\operatorname{diam}(A_n) < 1/n$, tal que $A_n \not\subset U$ para ningún $U \in \mathscr{U}$. Tomemos $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como X es compacto y 2-numerable, es secuencialmente compacto, por tanto, existe al menos un punto x de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ahora $x \in U$ para algún $U \in \mathscr{U}$. Tomemos $\varepsilon > 0$ para el cual $B(x;\varepsilon) \subset U$ y sea j suficientemente grande tal que $1/j < \varepsilon/2$. Como x es un punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe

$k \geq j$ tal que $x_k \in B(x;\varepsilon/2)$. Veamos que $A_k \subset B(x;\varepsilon) \subset U$, lo que nos da una contradicción. Tomemos $y \in A_k$ y veamos que $d(x,y) < \varepsilon$. Notemos que

$$\operatorname{diam}(A_k) < 1/k \leq 1/j < \varepsilon/2,$$

así $d(x_k,y) < \varepsilon/2$. Por la desigualdad triangular, tenemos que $d(x,y) \leq d(x,x_k) + d(x_k,y) < \varepsilon$, como queríamos. ■

Demostración del lema 11.2.1. El conjunto $\{\sigma^{-1}(U_1), \sigma^{-1}(U_2)\}$ es un recubrimiento del compacto $[0,1]$. Por la existencia del número de Lebesgue, existe $N > 0$ suficientemente grande tal que dado cualquier intervalo I_ℓ de la forma

$$I_\ell = [(\ell-1)/N, \ell/N],$$

para $\ell = 1,\ldots,N$, existe $i_\ell \in \{1,2\}$ tal que $I_\ell \subset \sigma^{-1}(U_{i_\ell})$.

Para cada $\ell = 1,\ldots,N$ vamos a probar, por inducción finita, que existe un único "camino" $\tilde{\sigma}_\ell : J_\ell \to \mathbb{R}$ cumpliendo las propiedades

$$\tilde{\sigma}_\ell(0) = r_0, \quad \exp \circ \tilde{\sigma}_\ell = \sigma_\ell,$$

donde $J_\ell = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_\ell = [0, \ell/N]$ y $\sigma_\ell = \sigma|_{J_\ell}$. El camino $\tilde{\sigma}$ buscado será, precisamente, el camino $\tilde{\sigma}_N$.

Hagamos la prueba para el caso $\ell = 1$. Tenemos que $J_1 = I_1 \subset \sigma^{-1}(U_{i_1})$. Así, existe un único camino $\sigma_1' : I_1 \to U_{i_1}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[r, "\sigma|_{I_1}"] \arrow[dr, "\sigma_1'"'] & \mathbb{S}^1 \\ & U_{i_1} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Consideremos ahora el único índice k_1 tal que $r_0 \in V_{k_1}^{i_1} \subset \exp^{-1}(U_{i_1})$ y recordemos el homeomorfismo $\phi_{k_1}^{i_1} : V_{k_1}^{i_1} \to U_{i_1}$. El "camino" $\tilde{\sigma}_1$ definido por la composición

$$I_1 \xrightarrow{\sigma_1'} U_{i_1} \xrightarrow{(\phi_{k_1}^{i_1})^{-1}} V_{k_1}^{i_1} \overset{\iota_{i_1}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}$$

satisface las propiedades requeridas. Veamos ahora la unicidad. Supongamos que $\tau_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ es otro "camino" levantando σ_1. Por hipótesis, para cualquier valor $s \in I_1$, tenemos que

$$e^{2\pi i \tilde{\sigma}_1(s)} = e^{2\pi i \tau_1(s)}$$

y esto ocurre si y solamente si $\tilde{\sigma}_1(s) - \tau_1(s) \in \mathbb{Z}$. Ahora, como $V_{k_1}^{i_1}$ es una componente conexa de $\exp^{-1}(U_{i_1})$, entonces $\operatorname{Im}\tilde{\sigma}_1, \operatorname{Im}\tau_1 \subset V_{k_1}^{i_1}$. En particular lo están $\tilde{\sigma}_1(s)$ y $\tau_1(s)$. De lo que se sigue que $\tilde{\sigma}_1(s) - \tau_1(s) = 0$ necesariamente, para cualquier $s \in I_1$. Es decir, los caminos $\tilde{\sigma}_1$ y τ_1 son iguales.

Dado $\ell \geq 2$, supongamos probada la existencia de un único "camino" $\tilde{\sigma}_{\ell-1} : J_{\ell-1} \to \mathbb{R}$ levantando σ_ℓ desde r_0. Sea $r_{\ell-1} = \tilde{\sigma}_{\ell-1}(\ell - 1/N) = \tilde{\sigma}_\ell(\ell - 1/N)$ y consideremos (misma prueba que para el caso $\ell = 1$) el único camino $\hat{\sigma}_\ell : I_\ell \to \mathbb{R}$ cumpliendo que $\hat{\sigma}_\ell(\ell - 1/N) = r_{\ell-1}$ y $\exp \circ \hat{\sigma}_\ell = \sigma|_{I_\ell}$. Ahora definimos $\tilde{\sigma}_\ell$ como

$$\tilde{\sigma}_\ell(s) = \begin{cases} \tilde{\sigma}_{\ell-1}(s) & s \in J_{\ell-1}, \\ \hat{\sigma}_\ell(s) & s \in I_\ell, \end{cases}$$

y la unicidad se sigue al tenerla en los dos trozos con los que hemos definido $\tilde{\sigma}_\ell$. ■

Demostración del lema 11.2.2. Vamos a definir primero $\tilde{H}$ en los bordes izquierdo $L = \{0\} \times [0,1]$ e inferior $B = [0,1] \times \{0\}$ del cuadrado. Establecemos

$$\tilde{H}|_L \equiv r_0, \quad \tilde{H}|_B \equiv \tilde{\sigma}_0. \tag{11.2}$$

El conjunto $\{H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)\}$ es un recubrimiento del compacto $[0,1] \times [0,1]$. Usando el teorema del número de Lebesgue y con las notaciones en la demostración anterior, existe $N > 0$ suficientemente grande tal que para cada

$$C_{nm} = I_n \times I_m,$$

existe $i_{nm} \in \{1,2\}$ cumpliendo $C_{nm} \subset H^{-1}(U_{i_{nm}})$.

Ordenamos lexicográficamente el conjunto de índices $\Lambda = [1,N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ y para cada $(n,m) \in \Lambda$ escribimos

$$A_{nm} = \bigcup_{(i,j) \leq (n,m)} C_{ij} \cup B \cup L = A_\star \cup C_{nm},$$

donde $\star$ denota (si existe) el elemento anterior a (n,m); si no, es decir, cuando $n = m = 1$, convenimos que $\star$ es solamente un símbolo y que $A_\star = B \cup L$. Veamos que para cada $(n,m) \in \Lambda$ existe una única aplicación continua $\tilde{H}_{nm} : A_{nm} \to \mathbb{R}$ cumpliendo las propiedades siguientes:

$$\tilde{H}_{nm}|_L \equiv r_0, \quad \tilde{H}_{nm}|_B \equiv \tilde{\sigma}_0, \quad \exp \circ \tilde{H}_{nm} = H_{nm},$$

donde $H_{nm} = H|_{A_{nm}}$. La homotopía $\tilde{H}$ buscada será, precisamente $\tilde{H}_{NN}$.

Sea $(n,m) \in \Lambda$ y supongamos definido $\tilde{H}_\star$. Construyamos $\hat{H}_{nm} : C_{nm} \to \mathbb{R}$ que levante $H|_{C_{nm}}$ y veamos que es única. Escribamos

$$B_{nm} = I_n \times \{m/N\}, \quad L_{nm} = \{n/N\} \times I_m$$

y $E_{nm} = B_{nm} \cup L_{nm}$. Establecemos $\hat{H}_{nm}|_{E_{nm}} = \tilde{H}_\star|_{E_{nm}}$. Sabemos que $\tilde{H}_\star(E_{nm})$ es conexo y que $(\exp \circ \tilde{H}_\star)(E_{nm}) = H(E_{nm}) \subset H(C_{nm}) \subset U_{i_{nm}}$. Así, existe un único índice k_{nm} tal que

$$\tilde{H}_\star(E_{nm}) \subset V_{k_{nm}}^{i_{nm}}.$$

Escribimos por simplificar $i = i_{nm}, k = k_{nm}$. Definimos $\hat{H}_{nm} = \iota_i \circ (\phi_k^i)^{-1} \circ H'_{nm}$ de acuerdo con el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{S}^1 & & \\
C_{nm} \arrow[ur, "H|_{C_{nm}}"] \arrow[r, "H'_{nm}"] & U_i \arrow[u, hook] \arrow[r, "(\phi_k^i)^{-1}"] & V_k^i \arrow[r, hook, "\iota_i"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Si existiera otro levantado $\hat{F}_{nm}$ de $H|_{C_{nm}}$ se debería cumplir que la diferencia $\hat{H}_{nm}(s,t) - \hat{F}_{nm}(s,t) \in \mathbb{Z}$, para cualquier $(s,t) \in C_{nm}$. Puesto que C_{nm} es conexo y que V_k^i es una componente conexa de $H^{-1}(U_i)$, tenemos necesariamente

$$\mathrm{Im}\hat{H}_{nm}, \mathrm{Im}\hat{F}_{nm} \subset V_k^i$$

y por tanto $\hat{H}_{nm}(s,t) = \hat{F}_{nm}(s,t)$, para cualquier $(s,t) \in C_{nm}$. Ahora, basta tomar

$$\tilde{H}_{nm}(s) = \begin{cases} \tilde{H}_\star(s) & s \in A_\star, \\ \hat{H}_{nm}(s) & s \in C_{nm}, \end{cases}$$

y la unicidad se sigue al tenerla en los dos trozos con los que hemos definido $\tilde{H}_{nm}$.

Nos queda comprobar que $\tilde{H}$ es una homotopía. Ya sabemos que

$$\tilde{H}(0,s)=\tilde{\sigma}_0(s), \quad \tilde{H}(t,0)=r_0, \qquad \forall s,t\in[0,1]$$

y es una mera comprobación ver que, por construcción $\tilde{H}(0,s)=\tilde{\sigma}_1(s)$, para todo $s\in[0,1]$. Finalmente, sea $D=\{1\}\times[0,1]$. Sabemos que $\tilde{H}(D)$ es conexo y que

$$\exp(\tilde{H}(D))=H(D)=\{x_1\}.$$

Puesto que el espacio $\exp^{-1}(x_1)$ es discreto, concluimos que $\tilde{H}(D)$ debe reducirse a un solo punto. ■

■ **Observación 11.5** En el libro de Greenberg y Harper encontramos una prueba simultánea de estos lemas apelando a la continuidad uniforme (que solo tiene cabida para espacios métricos). Damos esta prueba más constructiva, pues se puede adaptar sin ninguna dificultad adicional al caso de considerar un revestimiento $\rho:(E,p_0)\to(X,x_0)$ de un espacio topológico con punto seleccionado arbitrario. Entraremos en los detalles del estudio de los revestimientos en el próximo capítulo.

Terminamos esta sección con un resultado importante donde se usa el conocimiento del grupo fundamental de la circunferencia.

Proposición 11.2.4 — Teorema del punto fijo de Brouwer. Sea $\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^2$ el disco centrado en $(0,0)$ y de radio uno. Toda aplicación continua $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ tiene un punto fijo, es decir, existe $p\in\mathbb{D}$ tal que $f(p)=p$.

Demostración. Supongamos que $f(p)\neq p$, para todo $p\in\mathbb{D}$ y definamos $r:\mathbb{D}\to\mathbb{S}^1$ como sigue: dado $p\in\mathbb{D}$, consideramos la semirecta que parte de $f(p)$ y pasa por p y tomamos $r(p)$ siendo el único punto de dicha semirecta que corta a $\mathbb{S}^1$. Analíticamente tenemos que $r(p)$ es la única solución de la forma

$$r(p)=f(p)+\lambda(p)(p-f(p)), \quad \lambda(p)>0$$

satisfaciendo la ecuación de segundo grado $||r(p)||^2=1$. Esto proporciona una aplicación continua que además es un retracto de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{S}^1$, lo cual no es posible. En efecto, tendríamos que

$$(r\circ i)_*=r_*\circ i_*=\mathrm{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1)},$$

donde $i:\mathbb{S}^1\to\mathbb{D}$ es la inclusión, pero sabemos que i_* debe ser constante igual a 1 puesto que $\pi_1(\mathbb{D})=\{1\}$. ■

11.3 Homotopía de aplicaciones. Espacios homotópicamente equivalentes

En esta sección extendemos la idea de homotopía de caminos a aplicaciones continuas arbitrarias entre espacios topológicos. El objetivo principal es probar que dos espacios homotópicamente equivalentes tienen grupos fundamentales isomorfos.

Cuando sustituimos el intervalo $[0,1]$ por un espacio topológico arbitrario, la idea de fijar los puntos inicial y final de los caminos se sustituye por fijar los valores de las funciones en un subconjunto dado del espacio topológico de partida.

Sean $f,g:X\to Y$ dos aplicaciones continuas que toman los mismos valores en los elementos de un subconjunto $A\subset X$ (puede ser vacío). Una *homotopía de f en g relativa a A* es cualquier aplicación continua

$$F:X\times[0,1]\to Y$$

cumpliendo que $F(x,0) = f(x)$, que $F(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$ y que

$$F(a,t) = f(a) = g(a), \quad \forall a \in A, t \in [0,1].$$

Cuando $A = \emptyset$ decimos simplemente que F es una *homotopia de f en g*.

De nuevo, utilizaremos la notación $f \sim_A g$ para indicar que existe una homotopía relativa a A de f en g, y cuando $A = \emptyset$, escribiremos simplemente $f \sim g$. La misma prueba que para el caso de caminos se adapta para ver que la relación $\sim_A$ es de equivalencia. Entonces, tiene sentido hablar de clases de homotopía relativa a A de aplicaciones continuas de X en Y.

■ **Observación 11.6** Nótese que si $A' \subset A$ y $f \sim_A g$, entonces $f \sim_{A'} g$.

■ **Ejemplo 11.2** Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ y sean $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas tales que para todo $x \in X$ el segmento de $\mathbb{R}^n$ que une $f(x)$ con $g(x)$ está contenido en Y. Entonces $f \sim_A g$, donde

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

De hecho, la homotopía $F : [0,1] \times X \to Y$ viene dada por

$$F(t,x) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

En particular tenemos que:

- Si $Y \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, dos aplicaciones continuas cualesquiera $f, g : X \to Y$ son homótopas relativamente al conjunto $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$.
- Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es un *conjunto estrellado* si existe $e_0 \in E$ tal que para todo $e \in E$ el segmento que une e con e_0 está íntegramente contenido en E. Escribiremos (E, e_0) para indicar quién es el punto con la propiedad anterior. Si (E, e_0) es un conjunto estrellado, dos aplicaciones cualesquiera $f, g : X \to E$ son homótopas, pues ambas se pueden hacer homótopas a la aplicación constante c_{e_0}.

■ **Ejercicio 11.1** Sean $f_1, g_1 : X \to Y$ y $f_2, g_2 : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Sea $A \subset X$, $B \subset Y$ tales que $f_1(A) = g_1(A) \subset B$. Prueba que si $f_1 \sim_A g_1$ y $f_2 \sim_B g_2$, entonces $f_2 \circ f_1 \sim_A g_2 \circ g_1$.

Definición 11.3.1 Una aplicación continua $f : X \to Y$ es *equivalencia homotópica* si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ y $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$. Dos espacios X e Y se dicen *homotópicamente equivalentes* o que *tienen el mismo tipo de homotopía* si existe una equivalencia homotópica entre ellos. Usaremos la notación $X \approx Y$.

■ **Observación 11.7** Es una observación inmediata que dos espacios homeomorfos son homotópicamente equivalentes.

Proposición 11.3.1 La relación binaria entre espacios topológicos dada por tener el mismo tipo de homotopía es de equivalencia.

Demostración. Las propiedades simétrica y reflexiva son claras. Para probar la propiedad transitiva, supongamos que $X \approx Y$, $Y \approx Z$ y sean $f_1 : X \to Y$, $g_1 : Y \to X$, $f_2 : Y \to Z$ y $g_2 : Z \to Y$ aplicaciones continuas cumpliendo que

$$f_1 \circ g_1 \sim \mathrm{Id}_Y, \quad g_1 \circ f_1 \sim \mathrm{Id}_X, \quad f_2 \circ g_2 \sim \mathrm{Id}_Z, \quad g_2 \circ f_2 \sim \mathrm{Id}_Y$$

Entonces se cumple $X \approx Z$ mediante las equivalencia homotópicas $f_2 \circ f_1 : X \to Z$, $g_1 \circ g_2 : Z \to X$, pues gracias al ejercicio 11.1, tenemos que

$$(f_2 \circ f_1) \circ (g_1 \circ g_2) = f_2 \circ (f_1 \circ g_1) \circ g_2 \sim f_2 \circ \mathrm{Id}_Y \circ g_2 \sim \mathrm{Id}_Z$$

y de la misma manera $(g_1 \circ g_2) \circ (f_1 \circ f_2) \sim \mathrm{Id}_X$. ■

El siguiente resultado establece la relación entre aplicaciones homótopas y sus homomorfismos de grupos fundamentales asociados.

Proposición 11.3.2 Sean $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones homótopas mediante una homotopía $F : [0,1] \times X \to Y$ de f en g. Sean $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, $y_0' = g(x_0)$. Los homomorfismos inducidos $f_\star : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ y $g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0')$ están relacionados de la siguiente manera:

$$f_* = \alpha^* \circ g_*,$$

donde $\alpha(t) = F(x_0, t)$. En particular f_* es isomorfismo si y solo si g_* lo es.

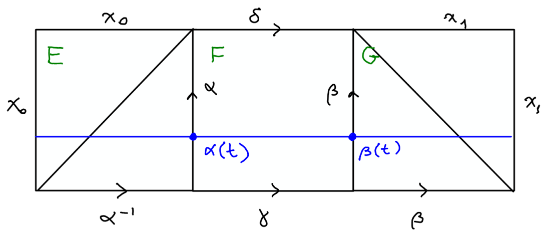
Para la prueba de la proposición 11.3.2 resulta útil el siguiente lema.

Lema 11.3.3 — Lema del cuadrado. Sea $F : I \times I \to X$ una aplicación continua y consideremos los caminos en X dados por

$$\alpha(t) = F(0,t), \quad \beta(t) = F(1,t), \quad \gamma(s) = F(s,0), \quad \delta(s) = F(s,1)$$

Tenemos que $\delta \sim_{\{0,1\}} \alpha^{-1} * \gamma * \beta$.

Demostración. La homotopía de caminos entre $\alpha^{-1} * \gamma * \beta$ y δ se obtiene como "yuxtaposición" de aplicaciones continuas $E, F, G : I \times I \to X$ y queda como ejercicio formalizar su expresión.



La imagen anterior responde al funcionamiento de la homotopía buscada. ■

■ **Ejercicio 11.2** Sea $\gamma : [0,1] \to X$ un lazo en X basado en un punto $x_0 \in X$. Entonces γ es homótopo al lazo constante c_{x_0} si y solamente si existe una aplicación continua $f : \mathbb{D} \to X$ tal que $f(e^{2\pi i t}) = \gamma(t)$.

El ejercicio anterior nos proporciona otra manera de demostrar el lema del cuadrado: sean $\varphi : \mathbb{D} \to [-1,1] \times [-1,1]$ y $t : [-1,1] \times [-1,1] \to [0,1] \times [0,1]$ las aplicaciones

$$\varphi(u,v) = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\text{máx}\{|u|,|v|\}}(u,v), \quad t(a,b) = \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

y sea $g_{\pi/4} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un giro de ángulo $\pi/4$. Entonces, la aplicación continua

$$f = F \circ t \circ \varphi \circ g_{\pi/4} : \mathbb{D} \to X,$$

cumple que $f(e^{2\pi i t}) = (\beta^{-1} * \gamma^{-1} * \alpha * \delta)(t)$.

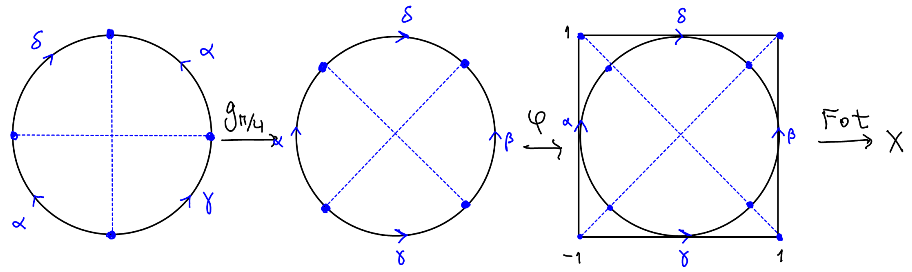
Demostración de la proposición 11.3.2. Tenemos que $\alpha : [0,1] \to Y$ es un camino de y_0 en y_0' y por tanto sabemos que $\alpha^* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_0')$ es un isomorfismo de grupos. Sea $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Tenemos que:

$$\alpha^*(f_*([\gamma])) = [\alpha^{-1} * (f \circ \gamma) * \alpha], \quad g_*([\gamma]) = [\alpha^{-1} * \gamma * \alpha]$$

Así, lo que queremos probar es que

$$\alpha^{-1} * (f \circ \gamma) * \alpha \sim_{\{0,1\}} g \circ \gamma,$$

pero esto se sigue de aplicar el lema del cuadrado a la aplicación continua $H : [0,1] \times [0,1] \to Y$ dada por $H(s,t) = F(\gamma(s), t)$. ■



Proposición 11.3.4 Un espacio topológico X es homotópicamente equivalente a un punto si y solamente si la identidad en X es homótopa a una aplicación constante $c_p : X \to X$ dada por $c_p(x) = p$, para todo $x \in X$.

Demostración. Supongamos que la identidad Id_X es homótopa la aplicación constante c_p. Entonces las aplicaciones

$$\tilde{c}_p : X \to \{p\}, x \mapsto p, \qquad \iota_p : \{p\} \hookrightarrow X, p \mapsto p$$

proporcionan una equivalencia homotópica entre X y $\{p\}$.

Recíprocamente, si X es homotópicamente equivalente a un punto $\{q\}$ (que puede estar en X o no), existen equivalencias homotópicas

$$f : X \to \{q\}, \quad g : \{q\} \to X.$$

Ahora, la única posibilidad para f es que sea la aplicación constante $\tilde{c}_q : X \to \{q\}$. Así, la composición $g \circ f : X \to X$ es igual a la aplicación constante de valor $g(q)$ y estamos pidiendo que sea homótopa a la identidad Id_X. ∎

Definición 11.3.2 Un espacio X se dice *contráctil* si se cumplen las dos condiciones equivalentes de la proposición 11.3.4.

■ **Ejemplo 11.3** Los conjunto estrellados (E, e_0) de $\mathbb{R}^n$ son contráctiles. En efecto, ya hemos probado que cualquier aplicación con llegada en E es homótopa a la aplicación constante c_{e_0}, en particular la identidad id_E.

Definición 11.3.3 Un espacio topológico es *simplemente conexo* si es conexo por caminos y tiene grupo fundamental trivial.

Proposición 11.3.5 Todo espacio contráctil es simplemente conexo.

Demostración. Sea $F : X \times [0,1] \to X$ una homotopía entre Id_X y la aplicación constante $\tilde{c}_p : X \to X$ de valor p. Dado cualquier otro punto $q \in X$, conectamos q con p mediante el camino $\alpha_q : [0,1] \to X$ dado por

$$\alpha_q(t) = F(q,t),$$

así que X es conexo por caminos. Veamos ahora que $\pi_1(X,q) = \{[c_q]\}$, donde denotamos por c_q el lazo constante en q. Por la proposición 11.3.2 sabemos que

$$\alpha_q^* \circ (\tilde{c}_p)_* : \pi_1(X,q) \to \pi_1(X,q)$$

es la identidad, y por tanto $(\tilde{c}_p)_*$ es un isomorfismo. Por otro lado, observamos que

$$(\tilde{c}_p)_*([\gamma]) = [c_p], \quad \forall [\gamma] \in \pi_1(X,q),$$

donde c_p denota el lazo constante en p, así que hay una única posibilidad para $[\gamma]$, como queríamos probar. ∎

Proposición 11.3.6 Si (X,x_0) e (Y,y_0) son espacios homotópicamente equivalentes mediante la equivalencia homotópica $f: X \to Y$, entonces el homomorfismo $f_*: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Por hipótesis existe $g: Y \to X$ tal que

$$g \circ f \sim \mathrm{Id}_X, \quad f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y.$$

Sean $F: X \times [0,1] \to X$ una homotopía de $g \circ f$ en Id_X y $G: Y \times [0,1] \to Y$ una homotopía de $f \circ g$ en Id_Y. Consideramos los caminos $\alpha: [0,1] \to X$ y $\beta: [0,1] \to Y$ dados por

$$\alpha(t) = F(x_0,t), \quad \beta(t) = G(y_0,t).$$

En vista de la proposición 11.3.2 tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[rrd, "\mathrm{id}", "\simeq"'] & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[r, "g_*"] & \pi_1(X,g(f(x_0))) \arrow[d, "\alpha^*", "\simeq"'] \\
 & & \pi_1(X,x_0)
\end{tikzcd} \tag{11.3}$$

De aquí deducimos que f_* es inyectiva y que g^* es sobreyectiva. Si supiésemos que g_* también es inyectiva, es decir, que g_* es un isomorfismo, tendríamos automáticamente que $f_* = (g_*)^{-1} \circ (\alpha^*)^{-1}$ es un isomorfismo. Pero para ver que g^* es también inyectiva, basta considerar este otro diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "g_*"] \arrow[rrd, "\mathrm{id}", "\simeq"'] & \pi_1(X,g(y_0)) \arrow[r, "\tilde{f}_*"] & \pi_1(Y,f(g(y_0))) \arrow[d, "\beta^*", "\simeq"'] \\
 & & \pi_1(Y,y_0)
\end{tikzcd} \tag{11.4}$$

donde hemos escrito $\tilde{f}_*$ para denotar la aplicación inducida por f con punto marcado $g(y_0)$, ya que no es la misma que f_*. ■

Finalizamos esta sección dando una versión especial del teorema de Van-Kampen que permite calcular el grupo fundamental de la esfera $\mathbb{S}^n$ con $n \geq 2$. Las esferas de dimensión $n \geq 2$ son ejemplos de espacios simplemente conexos pero no contráctiles.

Proposición 11.3.7 — Una versión especial de Van-Kampen. Sea X un espacio topológico y supongamos que se puede escribir como unión de dos abiertos U_1, U_2 que son simplemente conexos y cuya intersección $U_1 \cap U_2$ es conexa por caminos. Entonces X es simplemente conexo.

Demostración. Como X es unión de espacios conexos por caminos con intersección no vacía, es conexo por caminos. Veamos ahora que dado $p \in U_1 \cap U_2$, el grupo fundamental $\pi_1(X,p)$ es trivial. Consideremos un lazo

$$\gamma: [0,1] \to X$$

tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Tenemos que $\{\gamma^{-1}(U_1), \gamma^{-1}(U_2)\}$ es un recubrimiento por abiertos del intervalo $[0,1]$. Por la existencia del número de Lebesgue, hay un $n > 0$ suficientemente grande tal que dado cualquier intervalo I_ℓ de la forma

$$I_\ell = [(\ell-1)/n, \ell/n], \quad \ell = 1, \ldots, n,$$

existe $i_\ell \in \{1,2\}$ tal que $I_\ell \subset \gamma^{-1}(U_{i_\ell})$; es decir, tal que $\gamma(I_\ell) \subset U_{i_\ell}$. Vamos a suponer, para simplificar los argumentos que $i_\ell \neq i_{\ell+1}$, para todo $\ell = 1,2,\cdots,n-1$. Si esto no fuese así, fusionaríamos los intervalos I_ℓ e $I_{\ell+1}$ y todo el argumento que sigue funcionaría igual.

Para cada $\ell = 1,2,\ldots,n$, consideremos el camino $\alpha_\ell : [0,1] \to X$ dado por

$$\alpha_\ell(t) = \gamma((t+\ell-1)/n).$$

Se tiene que $\mathrm{Im}\alpha_\ell \subset U_{i_\ell}$ y, gracias a la suposición anterior, también que

$$\alpha_\ell(1) = \alpha_{\ell+1}(0) \in U_1 \cap U_2.$$

Es directo comprobar que $\gamma \sim \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_n$.

Puesto que $U_1 \cap U_2$ es conexa por caminos, para cada índice $\ell = 1,2,\ldots,n-1$, podemos elegir un camino β_ℓ en $U_1 \cap U_2$ conectando los puntos x_0 y $x_\ell = \alpha_\ell(1)$. Por construcción, tenemos que $\alpha_1 * \beta_1^{-1}$ es un lazo en U_{i_1}, que $\beta_{n-1} \circ \alpha_n$ es un lazo en U_{i_n} y que para cada $\ell = 2,\ldots,n-1$, los lazos

$$\beta_{\ell-1} * \alpha_\ell * \beta_\ell^{-1}$$

están contenidos en U_{i_ℓ}. Como consecuencia, todos ellos son homótopos al lazo c_{x_0} constante en x_0. Ahora, tenemos que

$$[\gamma] = [\alpha_1 * \beta_1^{-1}] \cdot [\beta_1 * \alpha_2 * \beta_2^{-1}] \cdots [\beta_{n-2} * \alpha_{n-1} * \beta_{n-1}^{-1}] \cdot [\beta_{n-1} \circ \alpha_n] = [c_{x_0}],$$

como queríamos ver. ■

Corolario 11.3.8 $\mathbb{S}^n$ con $n \geq 2$ es simplemente conexa. Basta considerar como abiertos U_1 y U_2 los complementarios de los casquetes polares. Tanto U_1 como U_2 son homeomorfos a un disco abierto en $\mathbb{R}^n$ mediante la proyección estereográfica y por tanto homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ que es simplemente conexo. Además, su intersección $U_1 \cap U_2$ es homeomorfa a un cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, que es conexo por caminos (pues es producto de conexos por caminos).

■ **Observación 11.8** ¡OJO! NO es válido para justificar que la esfera es simplemente conexa el siguiente argumento: Hay un punto de $\mathbb{S}^n$ que no está en la imagen de nuestro lazo, por tanto podemos trabajar como si nuestro lazo fuese de $\mathbb{R}^n$ mediante la proyección estereográfica y usar que $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo. Esto pasa porque ¡hay lazos que llenan todo el espacio! (véase la curva de Peano).

11.4 Retractos y retractos por deformación

Dedicamos esta última sección a introducir los retractos y los retractos por deformación. La idea de retracción sugiere "colapsar" un espacio en todo un subespacio, la idea de retracto por deformación incluye además el hecho de hacerlo de manera continua. Por ejemplo, una aplicación constante siempre es un retracto, pero solo lo es por deformación si el espacio es contráctil.

Recordemos la definición de retracto que ya conocemos.

Definición 11.4.1 Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que *A es un retracto de X* si existe una aplicación continua $r : X \to A$ llamada *retracción* tal que $r \circ \imath$ es la identidad en A, donde $\imath : A \to X$ es la inclusión.

A nivel de grupos fundamentales, dado $a_0 \in A$, tenemos que $(r \circ \imath)_*$ es la identidad en $\pi_1(A, a_0)$ y como consecuencia $\imath_*$ es inyectiva y r_* es sobreyectiva. Que $\imath_*$ sea inyectiva se puede leer muy *grosso modo* como "el espacio pequeño no puede tener más topología (desde el punto de vista homotópico) que el grande". Por ejemplo, como ya sabemos, la circunferencia $\mathbb{S}^1$ no es un retracto del disco $\mathbb{D}$.

Definición 11.4.2 Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un *retracto por deformación de* X si existe una retracción $r : X \to A$ cumpliendo además que $\iota \circ r$ es homótopa a la identidad en X, donde $\iota : A \to X$ es la inclusión; en este caso decimos que r es una *retracción por deformación*. Si además la homotopía $\iota \circ r \sim \mathrm{Id}_X$ es relativa a A, decimos que A es un *retracto por deformación fuerte de* X y que r es una *retracción por deformación fuerte*.

Observamos que, por definición un retracto por deformación es una equivalencia homotópica. Así, si A es un retracto por deformación de X, ambos tienen grupos fundamentales isomorfos (en un punto $a_0 \in A$ dado).

12. Espacios recubridores

En este capítulo damos una breve introducción a los espacios recubridores, que son una herramienta muy potente para calcular grupos fundamentales. En el capítulo anterior, para determinar el grupo fundamental de la circunferencia, trabajamos con la aplicación exponencial $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\exp(t) = e^{2\pi it}$; éste es un primer ejemplo de aplicación recubridora.

12.1 Revestimientos. Conceptos generales

Consideremos una aplicación continua $\pi : E \to X$ entre espacios topológicos. Un abierto no vacío U de X está *bien cubierto (evenly covered) por* π si su imagen inversa $\pi^{-1}(U)$ admite una descomposición de la forma

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} V_j,$$

con $J \neq \emptyset$, de modo que se cumple:

i) Los V_j son abiertos de E que llamaremos *hojas de* U *por* π.
ii) $V_j \cap V_{j'} = \emptyset$, si $j' \neq j$.
iii) La aplicación $\phi_j : V_j \to U$ dada por $\phi_j(e) = \pi(e)$ es un homeomorfismo.

Definición 12.1.1 Una aplicación continua $\pi : E \to X$ se dice que es un *revestimiento, cubierta, espacio recubridor o aplicación recubridora de* X si cumple las dos propiedades siguientes:

1. La aplicación π es suprayectiva.
2. Existe un recubrimiento de X formado por abiertos bien cubiertos por π.

El espacio E recibirá el nombre de *espacio total de la cubierta* y el espacio X el de *espacio base de la cubierta*.

Definición 12.1.2 Sea $\pi : E \to X$ una aplicación recubridora. Dado un punto $x \in X$, llamamos *fibra* F_x *de* x al conjunto $F_x = \pi^{-1}(x) \subset E$.

Definición 12.1.3 Una aplicación recubridora $\pi : E \to X$ es *universal* si E es simplemente conexo y localmente conexo por caminos.

■ **Observación 12.1** Sea $\pi : E \to X$ una cubierta. Las siguientes observaciones se dejan como ejercicio para el lector:

a) Si U está bien cubierto y $U' \subset U$, entonces U' está bien cubierto. Como consecuencia, hay una base de X formada por abiertos bien cubiertos.
b) Para todo $x \in X$, el espacio $\pi^{-1}(x) \subset E$ es discreto.
c) π es un *homeomorfismo local*, es decir, para todo $e \in E$ existe un abierto $V \ni e$ tal que $\pi(V)$ es abierto y $V \xrightarrow{\pi} \pi(V)$ es un homeomorfismo.
d) π es sobreyectiva continua y abierta. En particular X tiene la topología cociente de E.

■ **Ejercicio 12.1** Sea $\pi : E \to X$ una cubierta. Entonces E es localmente conexo por caminos si y solo si lo es X.

■ **Notación 12.1** Sea $\pi : E \to X$ un espacio recubridor, U un abierto bien cubierto y V una hoja de U, escribiremos $\pi_{UV} : V \to U$ para indicar el homeomorfismo "restricción" de π a V (véase condición iii) arriba).

■ **Ejemplo 12.1** Algunos ejemplos básicos de aplicaciones recubridoras son:

- La aplicación $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $t \mapsto \exp 2\pi i t$.
- La "superficie del logaritmo" $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $z \mapsto \exp(z)$.
- La aplicación de cociente $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ obtenida al identificar los puntos antipodales de $\mathbb{S}^2$.

12.2 Levantamientos

Los resultados de levantamientos en los espacios recubridores permiten conectar con la teoría de homotopía y grupos fundamentales, como ya vimos al hacer el cálculo del grupo fundamental de la circunferencia.

Como venimos haciendo habitualmente, escribiremos (X, x_0) para indicar que hemos señalado el punto $x_0 \in X$ y cuando escribamos $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ significará que f es una aplicación de X en Y cumpliendo que $f(x_0) = y_0$.

Definición 12.2.1 Sea $\pi : (E, e_0) \to (X, x_0)$ una aplicación recubridora y sea $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una aplicación continua cualquiera. Un *levantamiento de f por π* es una aplicación continua $f' : (Y, y_0) \to (E, e_0)$ tal que $\pi \circ f' = f$.

Proposición 12.2.1 Sea $\pi : (E, e_0) \to (X, x_0)$ una aplicación recubridora y sea $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una aplicación continua. Si Y es un espacio conexo, el levantamiento de f si existe es único.

Demostración. Supongamos que $f', f'' : (Y, y_0) \to (E, e_0)$ son dos levantamientos de f. Veamos que el conjunto
$$A = \{y \in Y : f'(y) = f''(y)\}$$
es simultáneamente abierto y cerrado. Como $y_0 \in A$, pues $f'(y_0) = f''(y_0) = e_0$, concluiremos que $A = Y$ y por tanto $f' = f''$.

Dado un punto $y \in Y$, consideramos un abierto bien cubierto $U \ni f(y)$ y llamamos V' y V'' a las hojas de U que contienen $f'(y)$ y $f''(y)$, respectivamente. Consideremos el entorno de y dado por
$$W = (f')^{-1}(V') \cap (f'')^{-1}(V'').$$
Si $y \in A$, veamos que $W \subset A$. Escribamos $V = V' = V''$. Dado $z \in W$ tenemos que
$$\pi_{UV}(f'(z)) = \pi(f'(z)) = f(z) = \pi(f''(z)) = \pi_{UV}(f''(z))$$
y por ser π_{UV} un homeomorfismo, necesariamente $f'(z) = f''(z)$, con lo que $z \in A$. Concluimos que A es abierto. Si $y \in Y \setminus A$, tenemos que $W \subset Y \setminus A$ y por tanto A es cerrado. En efecto $f'(W) \subset V'$ y $f''(W) \subset V''$, y sabemos que $V' \cap V'' = \emptyset$. ■

Recordemos que para el cálculo del grupo fundamental de la circunferencia $\mathbb{S}^1$, en los lemas 11.2.1 y 11.2.2 del capítulo anterior hemos probado el levantamiento único de caminos y de homotopías para el revestimiento $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$. Los argumentos en dichas demostraciones se adaptan sin ninguna dificultad a la prueba de los siguientes resultados (basta cambiar el recubrimiento $\{U_1, U_2\}$ de $\mathbb{S}^1$ por un recubrimiento por abiertos bien cubiertos del espacio X).

Proposición 12.2.2 Sea $\pi : (E, e_0) \to (X, x_0)$ una aplicación recubridora con puntos señalados. Consideremos un camino $\gamma : ([0,1], 0) \to (X, x_0)$; es decir, tenemos que γ es un camino en X que empieza en x_0. Existe un levantamiento único

$$\tilde{\gamma} : ([0,1], 0) \to (E, e_0)$$

de γ, esto es, un camino $\tilde{\gamma}$ en E que empieza en e_0 y tal que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Proposición 12.2.3 Sea $\pi : (E, e_0) \to (X, x_0)$ una aplicación recubridora con puntos señalados y $F : ([0,1] \times [0,1], (0,0)) \to (X, x_0)$ una aplicación continua. Existe un levantamiento único

$$\tilde{F} : ([0,1] \times [0,1], (0,0)) \to (E, e_0)$$

de F, esto es, la aplicación $\tilde{F}$ cumple que $\tilde{F}((0,0)) = e_0$ y $\pi \circ \tilde{F} = F$.

Corolario 12.2.4 Si F es una homotopía de caminos entre γ_1 y γ_2, entonces $\tilde{F}$ es una homotopía de caminos entre los levantados $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ de γ_1 y γ_2 respectivamente, en particular, los levantados $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ tienen el mismo punto final.

Demostración. Estamos suponiendo que $F(s,0) = \gamma_1(s)$, $F(s,1) = \gamma_2(s)$, $F(0,t) = x_0$ y también $F(1,t) = x_1$. Como $\tilde{F}(\,\cdot\,, 0)$ es un camino empezando en e_0 que se proyecta en γ_1 y el levantado de caminos es único, tenemos que $\tilde{F}(s,0) = \tilde{\gamma}_1(s)$. Análogamente $\tilde{F}(s,1) = \tilde{\gamma}_2(s)$. Del mismo modo, tenemos que el camino constante igual a x_0 se levanta por un lado al camino constante igual a e_0 y por otro lado a $\tilde{F}(0,\,\cdot\,)$, así que $\tilde{F}(0,t) = e_0$. Análogamente $\tilde{F}(1,t) = \tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$. ■

Corolario 12.2.5 Sea $\pi : (E, e_0) \to (X, x_0)$ una aplicación recubridora con puntos señalados. Entonces, el homomorfismo de grupos $\pi_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo.

Demostración. Sea γ un lazo de E basado en e_0 y supongamos que $\pi \circ \gamma$ es homótopo al lazo constante c_{x_0}. Tenemos que γ levanta $\pi \circ \gamma$ y que c_{e_0} levanta c_{x_0}. Como $\pi \circ \gamma$ es homótopo al lazo constante c_{x_0}, sus levantados son homótopos, así que $[\gamma] = [c_{e_0}]$. Por consiguiente el núcleo de π_* es trivial. ■

Si γ es un lazo en X basado en x_0 su levantado no será en general un lazo, sino un camino empezando en e_0 cuyo punto final no tiene por qué ser e_0. El corollary 12.2.4 lo que sí nos permite asegurar es que este punto final, que estará en F_{x_0}, solamente depende de la clase de homotopía de γ. Así que la aplicación

$$\Phi_{x_0} : \pi_1(X, x_0) \to F_{x_0}, \quad [\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1)$$

está bien definida (recuérdese que en el caso de $\mathbb{S}^1$ teníamos que $F_1 = \mathbb{Z}$).

12.3 Transformaciones recubridoras, cubierta universal y grupo fundamental

Sea $\pi : E \to X$ una cubierta. Una *transformación recubridora de* π es todo automorfismo $\phi : E \to E$ (es decir un homeomorfismo de E en sí mismo) tal que

$$\pi \circ \phi = \pi.$$

Las transformaciones recubridoras forman un grupo, que denotaremos G_π, con la operación dada por la composición (ejercicio).

■ **Observación 12.2** Sea $\phi : E \to E$ una transformación recubridora y $x \in X$. Nótese que si $e \in F_x$, entonces $\phi(e) \in F_x$. Así, la aplicación $\phi_\pi^x : F_x \to F_x$ inducida por ϕ en la fibra F_x (es decir, dada por $\phi_\pi^x(e) = \phi(e)$) es una biyección.

El objetivo de esta sección es probar la siguiente afirmación.

Teorema 12.3.1 Sea $\pi : (E, e_0) \to (X, x_0)$ una cubierta universal. Entonces existe un isomorfismo entre el grupo de transformaciones recubridoras G_π y el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$.

Nótese que una transformación recubridora $\phi : E \to E$ que envía el punto e_0 en e_1 puede verse como un levantado de la aplicación $\pi : (E, e_0) \to (X, x_0)$ a la cubierta $\pi : (E, e_1) \to (X, x_0)$ (la aplicación π es la misma, pero los puntos señalados son distintos). Esta observación junto con el levantamiento único de aplicaciones establecido en la proposición 12.2.1 nos llevan al siguiente resultado.

Lema 12.3.2 Sea $\pi : (E, e_0) \to (X, x_0)$ una cubierta con E conexo y sean ϕ, ϕ' transformaciones recubridoras de π. Si $\phi'(e_0) = \phi(e_0)$, entonces $\phi' = \phi$.

Sea $\pi : (E, e_0) \to (X, x_0)$ un revestimiento universal. Vamos a asociar a cada punto e_1 de la fibra F_{x_0}, una transformación recubridora $\phi_{e_1} : E \to E$ cumpliendo que $\phi_{e_1}(e_0) = e_1$. Construimos ϕ_{e_1} como indicamos a continuación.

Tomamos un punto $e \in E$ y sea $x = \pi(e)$, queremos definir $\phi_{e_1}(e)$. Como E es conexo por caminos, podemos tomar un camino σ en E desde e_0 hasta e. Proyectemos este camino mediante π para obtener $\tau = \pi \circ \sigma$, que es un camino en X desde x_0 hasta x. Ahora consideramos el levantamiento σ_1 de τ a la cubierta $(E, e_1) \to (X, x_0)$. Finalmente, definimos

$$\phi_{e_1}(e) = \sigma_1(1).$$

Proposición 12.3.3 La aplicación ϕ_{e_1} está bien definida, conmuta con π, cumple que $\phi_{e_1}(e_0) = e_1$, es biyectiva y además es un homeomorfismo. En definitiva, la aplicación ϕ_{e_1} es una transformación recubridora.

Demostración. Veamos primero que dado $e \in E$, el valor $\phi_{e_1}(e)$ está bien definido. Para ello, debemos comprobar que este valor no depende del camino σ uniendo e_0 a e que hayamos elegido. Supongamos que elegimos otro camino σ' que una e_0 y e. Como E es simplemente conexo, sabemos que σ y σ' son caminos homótopos. Esto implica que sus proyecciones τ y τ' son también caminos homótopos. Por tanto, los levantamientos respectivos σ_1 y σ_1' de τ y τ' a $(E, e_1) \to (X, x_0)$ son también homótopos. Así, tenemos que $\sigma_1'(1) = \sigma_1(1)$, como queríamos probar.

Veamos que $\phi_{e_1}(e_0) = e_1$. Como sabemos que la construcción de $\phi_{e_1}(e_0)$ no depende del camino elegido, tomamos $\sigma = c_{e_0}$ el camino constante que une e_0 consigo mismo. El camino τ es el camino constante c_{x_0} y su levantamiento a $(E, e_1) \to (X, x_0)$ es el camino constante $\sigma_1 = c_{e_1}$. Por tanto $\sigma_1(1) = e_1$.

La conmutatividad $\pi \circ \phi_{e_1} = \pi$ es inmediata, pues sabemos que $\phi_{e_1}(e) \in F_x$, por ser σ_1 el levantado de τ (que recordemos que tiene como punto final $x = \pi(e)$).

Probemos que ϕ_{e_1} es inyectiva. Tomemos dos puntos $e, e' \in E$. Si $e \neq e'$ con $\pi(e) \neq \pi(e')$, sabemos que

$$\pi(\phi_{e_1}(e)) = \pi(e),\ \pi(\phi_{e_1}(e')) = \pi(e'),$$

por tanto $\phi_{e_1}(e) \neq \phi_{e_1}(e')$. Supongamos pues que $\pi(e) = \pi(e') = x$ y también que $\phi_{e_1}(e') = \phi_{e_1}(e)$. Queremos comprobar que $e = e'$, necesariamente. Elijamos un camino σ (y, por ende, también τ y σ_1) para calcular $\phi_{e_1}(e)$ y otro camino σ' (y, por ende, también τ' y σ_1') para calcular $\phi_{e_1}(e')$. Como σ_1 y σ_1' son caminos en E, que es simplemente conexo, uniendo los mismos puntos e_1 y $\phi_{e_1}(e') = \phi_{e_1}(e)$, tenemos que σ_1 y σ_1' son caminos homótopos. Por tanto lo son sus proyecciones

τ y τ', y así también son homótopos sus levantamientos respectivos σ y σ' a $(E,e_0) \to (X,x_0)$. Consecuentemente, se concluye que $e = \sigma(1) = \sigma'(1) = e'$.

Probemos que ϕ_{e_1} es suprayectiva. Para ello vamos a hacer una construcción que, de hecho, proporciona la aplicación inversa a ϕ_{e_1}. Dado un punto $e' \in E$, elegimos un camino σ_1' en E que lleve e_1 hasta e'. Consideramos $\tau = \pi \circ \sigma_1'$ su proyección y σ el levantamiento por la cubierta $(E,e_0) \to (X,x_0)$ de τ. Es directo comprobar que $\phi_{e_1}(e) = e'$, donde $e = \sigma(1)$.

Veamos finalmente que la biyección ϕ_{e_1} es abierta y continua y por tanto un homeomorfismo. Dados un punto cualquiera $e \in E$ y su imagen $e' = \phi_{e_1}(e)$, para ver que la biyección ϕ_{e_1} es un homeomorfismo, es suficiente probar que existen sendos sistemas fundamentales de entornos

$$\mathscr{V} = \{V_i : i \in I\}, \quad \mathscr{V}' = \{V_i' : i \in I\}$$

de e y e' respectivamente, de modo que $\phi_{e_1}(V_i) = V_i'$, para cada $i \in I$. Sabemos que E es localmente conexo por caminos y por tanto (véase ejercicio 12.1) también lo es X, esto nos permite considerar un abierto U de X conexo por caminos que contenga $x = \pi(e) = \pi(e')$ y que además esté bien cubierto por π. Sabemos que el abierto $\pi^{-1}(U)$ es unión disjunta de hojas abiertas

$$\pi^{-1}(U) = \textstyle\bigcup_{j \in J} S_j.$$

Sean $S = S_{j_0}$ y $S' = S_{j_1}$ las hojas de U que contienen e y e', respectivamente y consideremos el homeomorfismo $\psi : S \to S'$ inducido por π, es decir, dado por la composición $\psi = \pi_{US'}^{-1} \circ \pi_{US}$. La colección $\mathscr{V} = \{V_i : i \in I\}$ de todos los abiertos de E contenidos en S, que contienen e y son conexos por caminos, determinan un sistema fundamental de entornos del punto e; éste es el que vamos a elegir. Ahora consideramos $\mathscr{V}' = \{V_i' : i \in I\}$ dado por $V_i' = \psi(V_i)$, que es un sistema fundamental de entornos de e', por ser ψ un homeomorfismo. Veamos que

$$S \xrightarrow{\phi_{e_1}} \phi_{e_1}(S)$$

es exactamente la aplicación ψ y como consecuencia $V_i' = \phi_{e_1}(V_i)$, con lo que habremos terminado la demostración. Sean σ, τ y σ_1 caminos utilizados para calcular $\phi_{e_1}(e)$. Dado $\tilde{e} \in S$, tomemos un camino $\gamma_{\tilde{e}}$ en S que una e con $\tilde{e}$. Sea $\tau_{\tilde{e}}$ su proyección por π y $\tilde{\gamma}_{\tilde{e},1}$ el camino en S' dado por la imagen de $\gamma_{\tilde{e}}$ por ψ. Por construcción, los caminos $\sigma * \gamma_{\tilde{e}}, \sigma_1 * \gamma_{1,\tilde{e}}$ sirven para calcular $\phi_{e_1}(\tilde{e})$ y por tanto

$$\phi_{e_1}(\tilde{e}) = \sigma_1 * \gamma_{1,\tilde{e}}(1) = \psi(\tilde{e})$$

como queríamos probar. ■

Final de la demostración del teorema 12.3.1. Veamos que la aplicación

$$[\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1) \mapsto \phi_{\tilde{\gamma}(1)}$$

es un isomorfismo de grupos.

Veamos primero la inyectividad. Consideremos $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X,x_0)$ tales que $\phi_{\tilde{\gamma}_1(1)} = \phi_{\tilde{\gamma}_2(1)}$. En particular se tiene que

$$\tilde{\gamma}_1(1) = \phi_{\tilde{\gamma}_1(1)}(e_0) = \phi_{\tilde{\gamma}_2(1)}(e_0) = \tilde{\gamma}_2(1).$$

Por tanto $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ son caminos dentro de un espacio simplemente conexo empezando ambos en e_0 y terminando ambos en el mismo punto, así que son homótopos. Como las homotopías se proyectan en homotopías, concluimos que también γ_1 y γ_2 son lazos homótopos y por ende $[\gamma_1] = [\gamma_2]$.

Veamos ahora la sobreyectividad. Tomemos una transformación recubridora $\phi : E \to E$ y sea $e_1 = \phi(e_0)$. Sabemos que ϕ_{e_1} y ϕ toman el mismo valor en e_0 y por tanto son iguales gracias al lema 12.3.2. Ahora, queda encontrar un lazo γ basado en x_0 y cumpliendo que $\tilde{\gamma}_1(1) = e_1$; para ello, basta escoger σ un camino en E desde e_0 hasta e_1 y tomar $\gamma = \pi \circ \sigma$ su proyección por π, que es un lazo en x_0. En efecto, tenemos que $\tilde{\gamma} = \sigma$ y por tanto $\tilde{\gamma}(1) = \sigma(1) = e_1$.

Comprobemos finalmente que la aplicación es un homomorfismo de grupos, es decir, es compatible con las operaciones de grupo. Sean $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X, x_0)$ y escribamos $\gamma_3 = \gamma_1 * \gamma_2$. Queremos ver que se tiene la igualdad

$$\phi_{e_3} = \phi_{e_1} \circ \phi_{e_2},$$

donde $e_1 = \tilde{\gamma}_1(1)$, $e_2 = \tilde{\gamma}_2(1)$ y $e_3 = \tilde{\gamma}_3(1)$. Por el lema 12.3.2, basta probar que

$$e_3 = \phi_{e_3}(e_0) = \phi_{e_1}(\phi_{e_2}(e_0)) = \phi_{e_1}(e_2).$$

Notemos en primer lugar que $\tilde{\gamma}_3 = \tilde{\gamma}_1 * \sigma_2$, donde σ_2 es el levantado de γ_2 por el revestimiento $(E, e_1) \to (X, x_0)$. Así que $\sigma_2(1) = e_3$. Ahora, basta notar que para hacer la construcción de $\phi_{e_1}(e_2)$ podemos escoger el camino $\tilde{\gamma}_2$ entre e_0 y e_2, que se proyecta en γ_2 y se levanta al revestimiento $(E, e_1) \to (X, x_0)$ en σ_2. Así que

$$\phi_{e_1}(e_2) = \sigma_2(1) = e_3,$$

como queríamos comprobar. ■

■ **Ejemplo 12.2** El grupo fundamental del plano proyectivo real se obtiene como consecuencia del teorema anterior como sigue. La aplicación de cociente $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ obtenida al identificar los puntos antipodales de $\mathbb{S}^2$ es una cubierta universal. Así, el grupo fundamental (en cualquiera de sus puntos) tiene tantos puntos como la fibra del revestimiento, es decir dos. Por tanto

$$\pi_1(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

El elemento neutro se corresponde a la transformación recubridora dada por la identidad y el otro elemento se corresponde a la transformación recubridora que identifica cada punto con su antipodal.

13. El teorema de Seifert-Van Kampen

En este último capítulo daremos el enunciado y la prueba de un caso simple del clásico teorema de Seifert-Van Kampen.

13.1 Suma amalgamada de grupos y producto libre

Vamos a dar la definición general de *suma amalgamada* de dos homomorfismos de grupos (esta construcción a veces se llama *co-producto fibrado* o en inglés *pushout*). Cuando el dominio de los homorfismo sea el grupo trivial, hablaremos de *producto libre*, y este será el caso que nos interesa estudiar.

Consideremos dos homomorfismos de grupos $\phi_1 : H \to G_1$ y $\phi_2 : H \to G_2$ definidos en el mismo grupo H. Una *suma amalgamada de* (ϕ_1, ϕ_2) es una pareja (ψ_1, ψ_2) de homomorfismos de grupos

$$\psi_1 : G_1 \to P, \quad \psi_2 : G_2 \to P$$

con llegada en el mismo grupo P cumpliendo la propiedad universal siguiente:

> *Se tiene que $\psi_1 \circ \phi_1 = \psi_2 \circ \phi_2$ y para toda pareja (f_1, f_2) de homomorfismos de grupos $f_1 : G_1 \to G$, $f_2 : G_2 \to G$ cumpliendo también que $f_1 \circ \phi_1 = f_2 \circ \phi_2$, existe un único homomorfismo de grupos $f : P \to G$ tal que $f_i = f \circ \psi_i$, para $i = 1, 2$.*

Es un resultado general de la teoría de categorías (que se escapa de los contenidos de este curso) que las soluciones a un problema universal son únicas salvo isomorfismo único. Así, las sumas amalgamadas son únicas salvo isomorfismo único.

En el caso en que $H = \{1_H\}$ sea el grupo trivial, los homomorfismos ϕ_1 y ϕ_2 solo pueden ser $1_H \mapsto 1_{G_1}$ y $1_H \mapsto 1_{G_2}$; así pues, el dato de ϕ_1, ϕ_2 es equivalente al dato de G_1, G_2 y la condición $\psi_1 \circ \phi_1 = \psi_2 \circ \phi_2$ es automática (pues es la aplicación $1_H \mapsto 1_P$). En esta situación, la suma amalgamada de (ϕ_1, ϕ_2) se llama también en muchas ocasiones *producto libre de* (G_1, G_2). Esto es ciertamente un poco confuso, por eso es mejor acudir en cada contexto a las definiciones y así evitar la ambigüedad. Reescribimos la propiedad universal para este caso particular de suma amalgamada.

Para todo par (f_1, f_2) de homomorfismos de grupos $f_1 : G_1 \to G$, $f_2 : G_2 \to G$, existe un único homomorfismo de grupos $f : P \to G$ tal que $f_i = f \circ \psi_i$, para $i = 1, 2$.

13.2 Existencia de productos libres

En esta sección construiremos un producto libre de dos grupos G_1 y G_2, cuyo grupo subyacente (la P en el apartado anterior) denotaremos mediante $G_1 * G_2$ y cuyos elementos se llamarán *palabras reducidas*.

Sea Z la unión disjunta de G_1 y G_2, esto es $Z = (\{1\} \times G_1) \cup (\{2\} \times G_2)$. Dado un número natural $n \geq 1$, llamamos *palabras de longitud n con letras en Z* a los elementos de Z^n, esto es, una palabra p de longitud n es una n-upla

$$p = ((\varepsilon_1, g_1), (\varepsilon_2, g_2), \dots, (\varepsilon_n, g_n)) \in Z^n, \quad \varepsilon_i \in \{1, 2\},\ g_i \in G_{\varepsilon_i}.$$

Denotemos por $\mathscr{P}_n(G_1, G_2)$ el conjunto de palabras de longitud n. Además, postulamos que $\emptyset$ es la única palabra de longitud cero, esto es $\mathscr{P}_0(G_1, G_2) = \{\emptyset\}$ (el conjunto vacío actuará como un cierto "elemento neutro"). El conjunto $\mathscr{P}(G_1, G_2)$ de *palabras con letras en Z* es la unión

$$\mathscr{P}(G_1, G_2) = \textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{P}_n(G_1, G_2).$$

Como es una unión de conjuntos disjuntos dos a dos, la longitud de una palabra está bien definida.

Diremos que una palabra $p \in \mathscr{P}_n(G_1, G_2)$ es *reducida* si $n = 0$ o bien $n \geq 1$ y se cumplen las siguientes propiedades

1. $\varepsilon_{i+1} \neq \varepsilon_i$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$.
2. $g_i \neq 1_{G_{\varepsilon_i}}$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Denotamos por $G_1 * G_2 \subset \mathscr{P}(G_1, G_2)$ el conjunto de palabras reducidas. Veremos a continuación cómo dotar este conjunto de una estructura de grupo que, junto con aplicaciones $\psi_1 : G_1 \to G_1 * G_2$ y $\psi_2 : G_1 \to G_1 * G_2$ cumplirá la propiedad universal del producto libre.

Procedimiento de *reducción de palabras*.

Dada una palabra

$$p = ((\varepsilon_1, g_1), (\varepsilon_2, g_2), \dots, (\varepsilon_n, g_n))$$

de longitud n, una *reducción parcial p' de p* es una palabra

$$p' = ((\varepsilon'_1, g'_1), (\varepsilon'_2, g'_2), \dots, (\varepsilon'_{n-1}, g'_{n-1}))$$

obtenida de una de las dos siguiente maneras:

A) La *reducción parcial $p' = \mathrm{Red}_i^A(p)$ de tipo A*, asociada a $1 \leq i \leq n-1$ con $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ es la palabra de longitud $n-1$ dada por

$$(\varepsilon'_\ell, g'_\ell) = \begin{cases} (\varepsilon_\ell, g_\ell), & 1 \leq \ell \leq i-1 \\ (\varepsilon_i, g_i g_{i+1}) = (\varepsilon_{i+1}, g_i g_{i+1}) & \ell = i \\ (\varepsilon_{\ell+1}, g_{\ell+1}), & i+1 \leq \ell \leq n-1, \end{cases}$$

donde el producto $g_i g_{i+1}$ se realiza en el grupo $G_{\varepsilon_i} = G_{\varepsilon_{i+1}}$.

B) La *reducción parcial $p' = \mathrm{Red}_i^B(p)$ de tipo B*, asociada a $1 \leq i \leq n$ con $g_i = 1_{G_{\varepsilon_i}}$ es la palabra de longitud $n-1$ dada por

$$(\varepsilon'_\ell, g'_\ell) = \begin{cases} (\varepsilon_\ell, g_\ell), & 1 \leq \ell \leq i-1 \\ (\varepsilon_{\ell+1}, g_{\ell+1}), & i+1 \leq \ell \leq n-1, \end{cases}$$

Dicho de otro modo, una reducción parcial de tipo A consiste en “fundir” dos entradas consecutivas de la palabra cuyos grupos de referencia son el mismo y una reducción parcial de tipo B consiste en eliminar una entrada de la palabra que sea el elemento neutro en su grupo correspondiente.

Dada una palabra p, llamamos cadena *cadena de reducciones parciales de longitud N* a una sucesión finita de palabras

$$(p = p_0, p_1, p_2, \ldots, p_N)$$

tal que p_{i+1} es una reducción parcial de p_i, para $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Diremos que la cadena es *maximal* si además se cumple que p_N es una palabra reducida.

■ **Observación 13.1** Nótese que se puede efectuar una reducción parcial de una palabra p si y solamente si p no es una palabra reducida. Así, dada una palabra p, siempre existen cadenas maximales de reducciones parciales cuya longitud es menor o igual a la longitud de la palabra p (tiene longitud $N = 0$ si p ya es reducida).

Proposición 13.2.1 Sea $p \in \mathscr{P}(G_1, G_2)$ una palabra y consideremos dos cadenas maximales de reducciones parciales

$$(p = p_0, p_1, p_2, \ldots, p_N), \quad (p = p_0, p'_1, p'_2, \ldots, p'_{N'}).$$

Entonces se tiene que $N' = N$ y que $p_{N'} = p_N$.

Demostración. Hagamos la prueba por inducción sobre el número k_p que definimos como la longitud más pequeña de entre todas las cadenas maximales de reducciones parciales de p.

Si $k_p = 0$, esto significa que p es una palabra reducida y por lo tanto no se puede hacer ninguna reducción parcial de p; así que la única cadena maximal de reducciones parciales es la formada por el único elemento $p = p_0$.

Supongamos ahora que $k_p = k \geq 1$ y que el resultado es cierto para toda palabra q tal que $k_q \leq k-1$. Consideremos

$$(p = p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k), \quad (p = p_0, p'_1, p'_2, \ldots, p'_{k'})$$

dos cadenas maximales de reducciones parciales para p la primera de longitud mínima k y la segunda de longitud $k' \geq k$. Si $p'_1 = p_1$, tenemos que

$$(p_1, p_2, \ldots, p_k), \; (p_1, p'_2, \ldots, p'_{k'})$$

son sendas cadenas maximales de reducciones parciales para p_1, de longitudes respectivas $k-1$ y $k'-1$ y por inducción se concluye que $k-1 = k'-1$ y que $p_k = p_{k'}$, como deseábamos.

Asumamos por tanto que $p'_1 \neq p_1$. Es un ejercicio para el lector construir dos cadenas (no maximales) de reducciones parciales

$$(p = p_0, p_1, q), \quad (p = p_0, p'_1, q),$$

terminando en la misma palabra q. Nótese que $k_{p_1} = k-1$ y por tanto se le puede aplicar la hipótesis de inducción. Existe una cadena maximal de reducciones parciales de p_1 comenzando con p_1, q, esto es, de la forma $(p_1, q, q_2, q_3, \ldots, q_{k-1})$, donde q_{k-1} es una palabra reducida. Aplicando la hipótesis de inducción, se tiene que $q_{k-1} = p_k$.

Asimismo, podemos utilizar la reducción parcial (p'_1, q) para tener una cadena maximal de reducciones parciales de p'_1 dada por $(p'_1, q, q_2, q_3, \ldots, q_{k-1})$. Esto prueba que $k_{p'_1} = k-1$, y por tanto p'_1 entra dentro de la hipótesis de inducción. Así, si consideramos la cadena maximal de reducciones parciales de p'_1 dada por

$$(p'_1, p'_2, p'_3, q_3, \ldots, p'_{k'})$$

se tiene que $k'-1 = k-1$ y que $p'_{k'} = q_{k-1} = p_k$. ■

Definición 13.2.1 La *reducción de una palabra* $p \in \mathscr{P}(G_1, G_2)$ es la palabra reducida $\mathrm{Red}(p) \in G_1 * G_2$ obtenida a partir de cualquier cadena maximal de reducciones parciales de p.

■ **Observación 13.2** Nótese que $p \in G_1 * G_2$ si y solamente si $\mathrm{Red}(p) = p$.

La aplicación $\mathrm{Red} : \mathscr{P}(G_1, G_2) \to G_1 * G_2$ que envía cada palabra p en su reducción $\mathrm{Red}(p)$ es suprayectiva, ya que, de hecho, deja fijo el conjunto $G_1 * G_2$. Así pues, define una relación de equivalencia en $\mathscr{P}(G_1, G_2)$, que se interpreta diciendo que dos palabras son equivalentes si y solamente si tienen la misma reducción. Dicho de otro modo, podemos identificar el conjunto de palabras reducidas $G_1 * G_2$ como el conjunto cociente de $\mathscr{P}(G_1, G_2)$ por la relación inducida por la aplicación Red. Nótese que la clase de equivalencia de una palabra $p \in \mathscr{P}(G_1, G_2)$ es

$$\mathrm{Red}^{-1}(\mathrm{Red}(p)) \subset \mathscr{P}(G_1, G_2).$$

■ **Observación 13.3** Consideremos una palabra

$$p = ((\varepsilon_1, g_1), (\varepsilon_2, g_2), \ldots, (\varepsilon_n, g_n)) \in Z^n,$$

un índice ℓ con $0 \le \ell \le n$ y $\varepsilon \in \{1, 2\}$. La palabra p' dada por

$$p' = \begin{cases} ((\varepsilon, 1_{G_\varepsilon}), (\varepsilon_1, g_1), (\varepsilon_2, g_2), \ldots, (\varepsilon_n, g_n)), & \text{si } \ell = 0, \\ ((\varepsilon_1, g_1), (\varepsilon_2, g_2), \ldots, (\varepsilon_n, g_n), (\varepsilon, 1_{G_\varepsilon})), & \text{si } \ell = n, \\ ((\varepsilon_1, g_1), \ldots, (\varepsilon_\ell, g_\ell), (\varepsilon, 1_{G_\varepsilon}), (\varepsilon_{\ell+1}, g_{\ell+1}), \ldots, (\varepsilon_n, g_n)), & \text{si } 1 \le \ell \le n-1. \end{cases}$$

es equivalente a p.

■ **Observación 13.4** Toda palabra p de forma

$$p = ((\varepsilon_1, 1_{G_{\varepsilon_1}}), (\varepsilon_2, 1_{G_{\varepsilon_2}}), \ldots, (\varepsilon_N, 1_{G_{\varepsilon_N}})) \quad \varepsilon_i \in \{1, 2\},$$

es equivalente a la palabra vacía.

Yuxtaposición de palabras

Dadas dos palabras $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(G_1, G_2)$ de longitudes n y m respectivamente, definimos la *yuxtaposición* $p_1 p_2 \in \mathscr{P}_{n+m}(G_1, G_2)$ como la palabra obtenida colocando la sucesión finita que define p_2 a continuación de la que define p_1. Se obtiene así una operación binaria en el conjunto de palabras que cumple las siguientes propiedades:

1. *Asociativa:* $(p_1 p_2) p_3 = p_1 (p_2 p_3)$.
2. *Elemento neutro:* $\emptyset p = p \emptyset = p$.
3. *Cancelación por la izquierda:* $p p_1 = p p_2 \Rightarrow p_1 = p_2$.
4. *Cancelación por la derecha:* $p_1 p = p_2 p \Rightarrow p_1 = p_2$.

Nótese que no se tiene el elemento opuesto, ya que la yuxtaposición en general aumenta la longitud de las palabras.

Proposición 13.2.2 La yuxtaposición de palabras es compatible con la reducción de palabras, esto es, si $\mathrm{Red}(p) = \mathrm{Red}(p')$ y $\mathrm{Red}(q) = \mathrm{Red}(q')$, entonces

$$\mathrm{Red}(pq) = \mathrm{Red}(p'q').$$

Como consecuencia, se obtiene una estructura de grupo en $G_1 * G_2$.

Demostración. Trabajando por etapas y alterando, si es necesario, el orden de p, p' y el de q, q', se puede suponer que estamos en uno de los siguientes casos:

1. $q' = q$ y $p' = \mathrm{Red}_i^A(p)$.
2. $q' = q$ y $p' = \mathrm{Red}_i^B(p)$.
3. $p' = p$ y $q' = \mathrm{Red}_i^A(q)$.
4. $p' = p$ y $q' = \mathrm{Red}_i^B(q)$.

Si estamos en los casos 1 o 2, se comprueba directamente que

$$p'q' = \begin{cases} \mathrm{Red}_i^A(pq), \text{ si } p' = \mathrm{Red}_i^A(p), \\ \mathrm{Red}_i^B(pq), \text{ si } p' = \mathrm{Red}_i^B(p). \end{cases}$$

Si estamos en los casos 3 o 4, se comprueba directamente que

$$p'q' = \begin{cases} \mathrm{Red}_{i+n}^A(pq), \text{ si } q' = \mathrm{Red}_i^A(q), \\ \mathrm{Red}_{i+n}^B(pq), \text{ si } q' = \mathrm{Red}_i^B(q), \end{cases}$$

donde n es la longitud de la palabra $p = p'$.

Así, tenemos una operación bien definida en $G_1 * G_2$ definida por

$$\mathrm{Red}(p) \cdot \mathrm{Red}(q) = \mathrm{Red}(pq).$$

Esta es una operación de grupo, donde recordemos que el neutro viene dado por la palabra reducida $\emptyset$. El inverso de $\mathrm{Red}(p)$, donde

$$p = ((\varepsilon_n, g_n), (\varepsilon_{n-1}, g_{n-1}), \dots, (\varepsilon_1, g_1))$$

es igual a $\mathrm{Red}(p^{-1})$, donde $p^{-1} = ((\varepsilon_n, g_n^{-1}), (\varepsilon_{n-1}, g_{n-1}^{-1}), \dots, (\varepsilon_1, g_1^{-1})$. ■

Proposición 13.2.3 Las aplicaciones

$$\psi_1 : G_1 \to G_1 * G_2, \quad \psi_2 : G_2 \to G_1 * G_2,$$

dadas por $\psi_\varepsilon(g) = \mathrm{Red}((\varepsilon, g))$ (la reducción de una palabra de longitud uno), para $\varepsilon = 1, 2$, definen un producto libre de (G_1, G_2).

Demostración. Consideremos una pareja de homomorfismos de grupos

$$f_1 : G_1 \to G, \quad f_2 : G_2 \to G.$$

Queremos ver que existe un único homomorfismo de grupos $\bar{f} : G_1 * G_2 \to G$ tal que $f_\varepsilon = \bar{f} \circ \varphi_\varepsilon$, para $\varepsilon \in \{1, 2\}$. Supongamos que dicho $\bar{f}$ existe. Entonces, para cada letra (ε, g) (palabra de longitud uno) sabemos que

$$\bar{f} \circ \varphi_\varepsilon(g) = \bar{f}(\mathrm{Red}((\varepsilon, g))) = f_\varepsilon(g).$$

Ahora, toda palabra p se escribe como yuxtaposición de sus letras, es decir:

$$p = (\varepsilon_1, g_1)(\varepsilon_2, g_2) \cdots (\varepsilon_N, g_N)$$

y por consiguiente debe ocurrir que $\bar{f}(\mathrm{Red}(p)) = f_{\varepsilon_1}(g_1) f_{\varepsilon_2}(g_2) \cdots f_{\varepsilon_N}(g_N)$. Esto prueba la unicidad de $\bar{f}$.

Veamos ahora que establecer $\bar{f}(\mathrm{Red}(p)) = f_{\varepsilon_1}(g_1) f_{\varepsilon_2}(g_2) \cdots f_{\varepsilon_N}(g_N)$ es independiente del representante en $\mathrm{Red}(p)$; la compatibilidad con las operaciones de grupo se sigue por construcción. Así, habremos probado la existencia.

Queremos ver que si

$$p = (\varepsilon_1, g_1)(\varepsilon_2, g_2) \cdots (\varepsilon_N, g_N), \text{ y } p' = (\varepsilon_1, g_1)(\varepsilon_2, g_2) \cdots (\varepsilon_N, g_N)$$

son palabras equivalentes, entonces se tiene que

$$f_{\varepsilon_1}(g_1) f_{\varepsilon_2}(g_2) \cdots f_{\varepsilon_N}(g_N) = f_{\varepsilon_1'}(g_1') f_{\varepsilon_2'}(g_2') \cdots f_{\varepsilon_{N'}'}(g_{N'}).$$

Trabajando por etapas, basta probar la propiedad cuando p' es una reducción parcial de p. La comprobación de la propiedad en este último caso es directa. ■

■ **Observación 13.5** Nótese que, por construcción tenemos que $\bar{f}$ es la restricción a $G_1 * G_2$ de la aplicación $f : \mathscr{P}(G_1, G_2) \to G$ dada por

$$(\varepsilon_1, g_1)(\varepsilon_2, g_2)\cdots(\varepsilon_N, g_N) \mapsto f_{\varepsilon_1}(g_1) f_{\varepsilon_2}(g_2)\cdots f_{\varepsilon_N}(g_N).$$

Dicho de forma equivalente, tenemos que $\bar{f}$ es la aplicación inducida por f en el conjunto cociente de $\mathscr{P}(G_1, G_2)$ por la relación de equivalencia que identifica palabras con la misma reducción.

13.3 Caso particular del teorema de Van Kampen

El objetivo de esta sección y las siguientes es probar el siguiente resultado.

Teorema 13.3.1 Sea X un espacio topológico conexo por caminos que se puede expresar como unión de dos abiertos $X = U_1 \cup U_2$ conexos por caminos y cuya intersección $U_1 \cap U_2$ es no vacía y simplemente conexa. Dado un punto $x_0 \in U_1 \cap U_2$, consideremos los grupos fundamentales $G = \pi_1(X, x_0)$ y $G_\varepsilon = \pi_1(U_\varepsilon, x_0)$, para $\varepsilon \in \{1,2\}$, así como los homomorfismos de grupos fundamentales

$$f_1 : G_1 \to G, \quad f_2 : G_2 \to G,$$

inducidos por las inclusiones $\iota_1 : U_1 \subset X$, $\iota_2 : U_2 \subset X$ (con las notaciones en el capítulo 11 tenemos que $f_\varepsilon = (\iota_\varepsilon)_*$). Entonces, la pareja (f_1, f_2) es un producto libre de (G_1, G_2). En particular G es isomorfo a $G_1 * G_2$.

Antes de probar este teorema y dado que efectuaremos sistemáticamente manipulaciones con restricciones de caminos, realizamos la siguiente observación.

■ **Observación 13.6** Sea $[a,b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y consideremos una aplicación continua $\sigma : [a,b] \to X$. El *camino normalizado* de σ es la composición $\sigma \circ v_{a,b}$, donde $v_{a,b} : [0,1] \to [a,b]$ es la aplicación afín dada por

$$v_{a,b}(s) = a + s(b-a).$$

Este tipo de manipulaciones ya las hemos hecho anteriormente, pero como aquí van a aparecer con frecuencia, las sistematizamos. Por ejemplo, si $\gamma : [0,1] \to X$ es una camino y tenemos una sucesión estrictamente creciente

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots t_{N-1} < t_N = 1,$$

se tiene que γ es homótopo a $\gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_N$, donde γ_j es el camino normalizado de la restricción de γ a $[t_{j-1}, t_j]$.

■ **Notación 13.1** Dado un camino γ en X denotaremos por $[\gamma]$ la clase de homotopía de caminos en X. Si la imagen de γ está en U_ε, denotaremos asimismo por $[\gamma]_\varepsilon$ la clase de homotopía de caminos de γ en U_ε, para $\varepsilon \in \{1,2\}$.

Dado que $\psi_1 : G_1 \to G_1 * G_2$, $\psi_2 : G_2 \to G_1 * G_2$ definen un producto libre de (G_1, G_2), existe un único homomorfismo $\bar{f} : G_1 * G_2 \to G$ tal que

$$f_1 = f \circ \psi_1, \quad f_2 = f \circ \psi_2.$$

Recordemos que $\bar{f}$ viene definido como sigue. A cada palabra

$$p = ((\varepsilon_1, [\sigma_1]_{\varepsilon_1}), (\varepsilon_2, [\sigma_2]_{\varepsilon_2}), \ldots, (\varepsilon_N, [\sigma_N]_{\varepsilon_N})), \quad \varepsilon_i \in \{1,2\},$$

de $\mathscr{P}(G_1, G_2)$ le asociamos $f(p) \in G$ definido por

$$f(p) = [\sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_N] \in G.$$

Sabemos que $f(p) = f(\mathrm{Red}(p))$ y que $\bar{f}$ es la restricción de f al conjunto de palabras reducidas $G_1 * G_2$ (véase observación 13.5).

Ahora, es suficiente probar (ejercicio) que $\bar{f}$ es un isomorfismo, esto es, que $\bar{f}$ es suprayectiva e inyectiva. Nótese que la suprayectividad de $\bar{f}$ es equivalente a la suprayectividad de f. Por otro lado, tenemos que $\bar{f}$ es inyectiva si y solo si $f(p) = [c_{x_0}]$ implica que la palabra p es equivalente a la palabra vacía.

Proposición 13.3.2 La aplicación $\bar{f}$ es suprayectiva.

Demostración. Basta comprobar la suprayectividad de f. Fijemos un elemento $[\gamma] \in G$, donde γ es un lazo de X en x_0. El objetivo es encontrar una palabra p en $\mathscr{P}(G_1, G_2)$ de la forma

$$p = ((\varepsilon_1, [\sigma_1]_{\varepsilon_1}), (\varepsilon_2, [\sigma_2]_{\varepsilon_2}), \dots, (\varepsilon_N, [\sigma_N]_{\varepsilon_N})), \quad \varepsilon_i \in \{1, 2\},$$

de modo que se tenga $[\sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_N] = [\gamma]$.

Gracias a la existencia de diámetro de Lebesgue, podemos dividir el intervalo unidad $[0,1]$ en subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ asociados a una sucesión creciente

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots t_{N-1} < t_N = 1,$$

de modo que para cada $i = 0, 1, \dots, N$, existe ε_i tal que $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{\varepsilon_i}$. Además, salvo "fundir" algún intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ con los siguientes, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

La normalización de la restricción de γ a $[t_{i-1}, t_i]$ define un camino γ_i en U_{ε_i} de modo que se cumple

$$[\gamma] = [\gamma_1 * \gamma_2 * \cdots \gamma_N] \quad \text{(homotopía en } X\text{)}.$$

Ahora, como cada punto $x_i = \gamma(t_i) \in U_1 \cap U_2$ y la intersección $U_1 \cap U_2$ es conexa pos caminos, podemos tomar un camino h_i desde x_0 hasta x_i, cuya imagen esté contenida en $U_1 \cap U_2$. Tenemos que $\sigma_1 = \gamma_1 * h_1$, $\sigma_N = h_N^{-1} \gamma_N$ y

$$\sigma_i = h_{i-1}^{-1} * \gamma_i * h_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

son lazos de U_{ε_i} en x_0. Estos lazos sirven a nuestro propósito, pues

$$[\gamma] = [\gamma_1 * \gamma_2 * \cdots \gamma_N] = [\sigma_1 * \sigma_2 * \cdots \sigma_N],$$

que es lo que queríamos. ∎

13.4 Mallas homotópicas

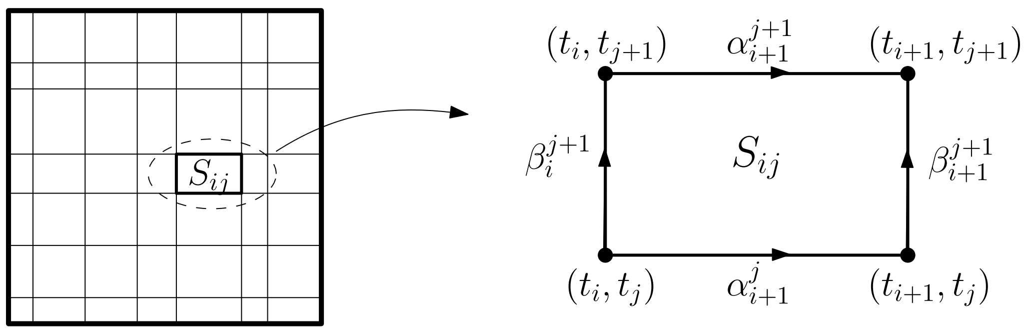
Dedicamos las dos secciones restantes a probar la inyectividad de la aplicación $\bar{f} : G_1 * G_2 \to G$. En esta primera, vamos a estudiar con cierto detalle unas estructuras que llamaremos *mallas homotópicas*.

Recordemos que seguimos en la hipótesis de que $X = U_1 \cup U_2$ es unión de dos abiertos U_1, U_2 conexos por caminos cuya intersección $U_1 \cap U_2$ es simplemente conexa. Tenemos fijado un punto $x_0 \in U_1 \cap U_2$ y denotamos como antes

$$G_1 = \pi_1(U_1, x_0), \quad G_2 = \pi_1(U_2, x_0).$$

Una *malla homotópica* consiste en la siguiente colección de datos:

1. Una sucesión finita y estrictamente creciente de números reales que empieza en el 0 y termina en el 1 y que denotaremos
$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = 1.$$
Así, podemos formar los rectángulos S_{ij} definidos por
$$S_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}] \subset \mathbb{R}^2,$$
para cada $0 \leq i, j \leq k-1$. El cuadrado unidad $[0,1] \times [0,1]$ es unión de dichos rectángulos. Tenemos de esta forma una "malla" en el cuadrado unidad, cuyos vértices son los puntos (t_i, t_j), para $0 \leq i, j \leq k$.
2. Una aplicación continua $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que
$$H(0,t) = H(s,1) = H(1,t) = x_0, \quad s,t \in [0,1].$$
Es decir, pedimos que H sea una homotopía de caminos entre el lazo constante y el lazo $s \mapsto H(s,0)$. Además pedimos que existan índices $\varepsilon_{ij} \in \{1,2\}$ de manera que
$$H(S_{ij}) \subset U_{\varepsilon_{ij}}, \quad 0 \leq i, j \leq k-1.$$
3. Para cada $j = 0,1,\ldots,k$, $i = 1,2,\ldots,k$, denotaremos por α_i^j los caminos normalizados de las aplicaciones
$$a_i^j : [t_{i-1}, t_i] \to X, \quad s \mapsto H(s, t_j).$$
Asignaremos a cada α_i^j un índice $\delta_{ij} \in \{1,2\}$ con la propiedad de que
$$a_i^j([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{\delta_{ij}}.$$
Asimismo, para cada $j = 1,2,\ldots,k$, $i = 0,1,\ldots,k$ denotaremos por β_i^j, los caminos normalizados de las aplicaciones
$$b_i^j : [t_{j-1}, t_j] \to X, \quad t \mapsto H(t_i, t).$$
4. Finalmente, para cada $j = 0,1,\ldots,k-1$, también seleccionaremos índices $\varepsilon_{-1j}, \varepsilon_{kj} \in \{1,2\}$ de modo que $\varepsilon_{-1j} \neq \varepsilon_{0j}$ y $\varepsilon_{kj} \neq \varepsilon_{k-1,j}$.



■ **Observación 13.7** Algunas condiciones en la definición de malla homotópica son de naturaleza técnica y vamos a tratar de explicar su porqué:

- Nótese que solo hay una posible elección para los $\varepsilon_{-1j}, \varepsilon_{kj}$ en el punto 4. La elección de los ε_{-1j} se hace para que los argumentos abajo se puedan aplicar incluso cuando consideramos los rectángulos pegados al borde izquierdo del cuadrado. Análogamente, la elección de los ε_{kj} permite que los argumentos funcionen para los rectángulos pegados al borde derecho.
- La asignación de los δ_{ij} resultará necesaria a la hora de querer "adaptar" una malla homotópica a una palabra dada. Nótese que los δ_{ij} no tienen por qué coincidir con los ε_{ij}.

Definición 13.4.1 Diremos que un malla homotópica *está ajustada a* x_0 si además se cumple que $H(t_i, t_j) = x_0$, para todo $1 \leq i, j \leq k$.

En el caso en que la malla homotópica esté ajustada a x_0, los caminos α_i^j y β_i^j son todos ellos lazos en x_0. Asimismo, tenemos palabras p_j definidas por

$$p_j = \Big((\delta_{1j}, [\alpha_1^j]_{\delta_{1j}}), (\delta_{2j}, [\alpha_2^j]_{\delta_{2j}}), \ldots, (\delta_{kj}, [\alpha_k^j]_{\delta_{kj}}) \Big), \tag{13.1}$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, k$.

Proposición 13.4.1 Supongamos que tenemos una malla homotópica ajustada a x_0. Las palabras p_j definidas anteriormente son todas equivalentes en $\mathscr{P}(G_1, G_2)$. En particular, son equivalentes a p_k, que a su vez es equivalente a la palabra vacía.

Demostración. La segunda parte se sigue de la observación 13.4. Veamos la primera parte en varias etapas.

Paso 1: Notemos que es suficiente probar que p_j es equivalente a p_{j+1} para cualquier índice $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ dado. Consideremos para ello la fila de rectángulos

$$F_j = S_{0j} \cup S_{1j} \cup \cdots S_{k-1,j},$$

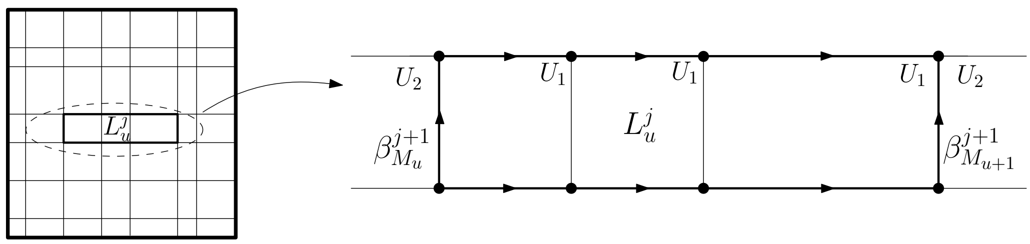
y tomemos los enteros $0 = M_0 < M_1 \cdots < M_r < M_{r+1} = k+1$ definidos por las propiedades siguientes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\varepsilon_{-1j} & \neq & \varepsilon_{0j} & & & & & & \\
\varepsilon_{0j} & = & \varepsilon_{1j} & = & \cdots & = & \varepsilon_{M_1-1j} & \neq & \varepsilon_{M_1j} \\
\varepsilon_{M_1j} & = & \varepsilon_{M_1+1j} & = & \cdots & = & \varepsilon_{M_2-1j} & \neq & \varepsilon_{M_2j} \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\varepsilon_{M_rj} & = & \varepsilon_{M_r+1j} & = & \cdots & = & \varepsilon_{k-1j} & \neq & \varepsilon_{kj}
\end{array}$$

Esto nos permite agrupar los S_{ij}, para $i = 0, 1, \ldots, k-1$ en paquetes rectangulares no vacíos de rectángulos consecutivos

$$L_j^u = S_{M_u,j} \cup S_{M_u+1,j} \cup \cdots \cup S_{M_{u+1}-1,j}, \quad u = 0, 1, \ldots, r.$$

Observemos que los lazos $\beta_{M_u}^{j+1}$ y $\beta_{M_{u+1}}^{j+1}$ tienen su imagen contenida en $U_1 \cap U_2$, para cada índice $u = 0, 1, \ldots, r$. Esto es consecuencia de que $\varepsilon_{M_uj} \neq \varepsilon_{M_u+1j}$ y por tanto las aplicaciones $b_{M_u}^j$ y $b_{M_u}^{j+1}$ tienen llegada en $U_1 \cap U_2$.



Ahora, a cada uno de estos paquetes rectangulares L_u^j le asociamos las sílabas p_j^u y p_{j+1}^u respectivas de las palabras p_j y p_{j+1}, dadas por

$$\begin{aligned}
p_j^u \quad &= \quad \Big((\delta_{M_u+1j}, [\alpha_{M_u+1}^j]_{\delta_{M_u+1j}}), (\delta_{M_u+2j}, [\alpha_{M_u+2}^j]_{\delta_{M_u+2j}}), \ldots, \\
&\quad \ldots, (\delta_{M_{u+1}j}, [\alpha_{M_{u+1}}^j]_{\delta_{M_{u+1}j}}) \Big)
\end{aligned}$$

(de modo similar se escribe p_{j+1}^u, substituyendo j por $j+1$). Dicho de otro modo, la sílaba p_j^u contiene las letras de p_j situadas en los lugares $M_u+1, M_u+2, \ldots, M_{u+1}$ y la palabra p_j se escribe como

$$p_j = p_j^1 p_j^2 \cdots p_j^r.$$

Paso 2: En vista de la proposición 13.2.2, es suficiente probar que las sílabas p_j^u y p_{j+1}^u son equivalentes. Para ello, vamos a cambiar las notaciones con el fin de simplificarlas. El lector sabrá ver que la situación que presentamos responde al resultado deseado.

Supongamos que tenemos una sucesión finita y estrictamente creciente de números reales que $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = 1$ y una aplicación continua

$$F : [0,1] \times [0,1] \to U_1 \subset X,$$

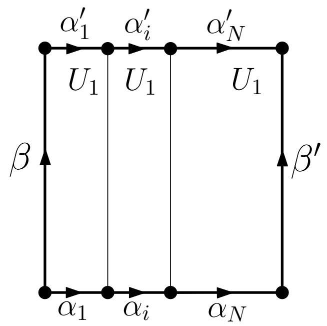
con las propiedades siguientes:

- Las aplicaciones β y β' dadas por $\beta(t) = F(0,t)$ y $\beta'(t) = F(1,t)$, son lazos de $U_1 \cap U_2$ en x_0.
- Los caminos α_i, α_i' obtenidos como normalización de las aplicaciones

$$a_i(s) = F(s,0),\ a_i'(s) = F(s,1), \quad s \in [t_{i-1}, t_i],$$

son lazos de U_1 en x_0, para $i = 1, 2, \ldots, N$.

Supongamos también que nos han fijado ahora $\delta_i, \delta_i' \in \{1,2\}$, para cada índice $i = 1, 2, \ldots, N$, de manera que α_i sea un lazo en U_{δ_i} y que α_i' sea un lazo en $U_{\delta_i'}$.



El objetivo ahora es probar que las palabras

$$\begin{aligned} q &= \left((\delta_1, [\alpha_1]_{\delta_1}), (\delta_2, [\alpha_2]_{\delta_2}), \ldots, (\delta_N, [\alpha_N]_{\delta_N})\right), \\ q' &= \left((\delta_1', [\alpha_1']_{\delta_1'}), (\delta_2', [\alpha_2']_{\delta_2'}), \ldots, (\delta_N', [\alpha_N']_{\delta_N'})\right) \end{aligned}$$

son equivalentes. Notemos que si una letra de q tiene $\delta_i = 2$, entonces α_i es un lazo de $U_1 \cap U_2$ en x_0 y por consiguiente

$$[\alpha_i]_2 = [c_{x_0}]_2, \quad [\alpha_i]_1 = [c_{x_0}]_1,$$

dado que $U_1 \cap U_2$ es simplemente conexo. Por otro lado, sabemos que la palabra con una sola letra $(2, [c_{x_0}]_2)$ es equivalente a la palabra $(1, [c_{x_0}]_1)$, que a su vez es igual a $(1, [\alpha_i]_1)$. Podemos argumentar de manera similar para q'. Así, tenemos que q, q' son respectivamente equivalentes a

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \left((1, [\alpha_1]_1), (1, [\alpha_2]_1), \ldots, (1, [\alpha_N]_1)\right), \\ \bar{q}' &= \left((1, [\alpha_1']_1), (1, [\alpha_2']_1), \ldots, (1, [\alpha_N']_1)\right). \end{aligned}$$

Componiendo en G_1, tenemos que q y q' son respectivamente equivalentes a

$$\tilde{q} = ((1, [\alpha]_1)), \quad \tilde{q}' = ((1, [\alpha']_1)).$$

con $\alpha = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_N$ y $\alpha' = \alpha'_1 * \alpha'_2 * \cdots * \alpha'_N$. La existencia de F nos da una homotopía de caminos en U_1 entre α y $\beta * \alpha' * \beta'^{-1}$ (recuérdese el "lema del cuadrado"). Puesto que

$$[\beta]_1 = [c_{x_0}]_1 = [\beta']_1,$$

se concluye que $[\alpha]_1 = [\alpha']_1$ y por tanto $\tilde{q} = \tilde{q}'$. Esto termina la demostración. ■

Definición 13.4.2 Dada una palabra $p \in \mathscr{P}(G_1, G_2)$, diremos que una malla homotópica ajustada a x_0 está *adaptada a* p si p es equivalente a p_0, donde p_0 está dada en la ecuación (13.1) tomando $j = 0$.

13.5 Existencia de mallas homotópicas ajustadas

Para ver la inyectividad de $\bar{f}$, necesitamos probar que si $p \in \mathscr{P}(G_1, G_2)$ es una palabra tal que $f(p) = [c_{x_0}]$, entonces p es equivalente a la palabra vacía. En vista de la proposición anterior, es suficiente encontrar una malla homotópica ajustada a x_0 y adaptada a la palabra p. A probar la existencia de dicha malla homotópica ajustada a x_0 y adaptada a p dedicamos esta sección.

Sea $p \in \mathscr{P}(G_1, G_2)$ una palabra cumpliendo que $f(p) = [c_{x_0}]$. Esto es,

$$p = ((\varepsilon_1, [\sigma_1]_{\varepsilon_1}), (\varepsilon_2, [\sigma_2]_{\varepsilon_2}), \ldots, (\varepsilon_N, [\sigma_N]_{\varepsilon_N}))$$

y decir que $f(p) = [c_{x_0}]$ equivale a decir que $[\sigma_1 * \sigma_2 * \cdots \sigma_N] = [c_{x_0}]$. Denotemos

$$\gamma = \sigma_1 * \sigma_2 * \ldots * \sigma_N.$$

Estamos suponiendo que γ es homótopo como camino en X al lazo constante c_{x_0}. Consideremos una homotopía de caminos $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ entre el lazo γ y el lazo constante c_{x_0}. Esto es, estamos suponiendo que

$$H(s,0) = \gamma(s), \quad H(s,1) = H(0,t) = H(1,t) = x_0.$$

De nuevo, por la existencia del diámetro de Lebesgue, podemos dividir el intervalo unidad $[0,1]$ en subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ asociados a una sucesión creciente

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots t_{k-1} < t_k = 1,$$

de modo que existen $\varepsilon_{ij} \in \{1,2\}$ tales que $H(S_{ij}) \subset U_{\varepsilon_{ij}}$, para $0 \leq i, j \leq k-1$, donde S_{ij} es el rectángulo

$$S_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}].$$

Además, podemos suponer que los valores de la forma i/N, para $i = 0, 1, \ldots, N$, están entre los t_i. De esta manera, podemos expresar cada lazo σ_p como la concatenación de caminos consecutivos de tipo α_i^0 como sigue:

$$\sigma_p = \alpha^0_{\ell_{p-1}+1} * \alpha^0_{\ell_{p-1}+2} * \cdots * \alpha^0_{\ell_p},$$

donde $0 = \ell_0 < \ell_1 < \cdots < \ell_N < \ell_{N+1} = k$.

Escribamos $H(t_i, t_j) = v_{ij}$, para cualesquiera $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Caso A

Si $v_{ij} = x_0$ para cualesquiera índices $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$, observamos directamente que las palabras

$$((\varepsilon_p, [\alpha^0_{\ell_{p-1}+1}]_{\varepsilon_p}), (\varepsilon_p, [\alpha^0_{\ell_{p-1}+2}]_{\varepsilon_p}), \ldots, (\varepsilon_p, [\alpha^0_{\ell_p}]_{\varepsilon_p})), \quad ((\varepsilon_p, [\sigma_p]_{\varepsilon_p}))$$

son equivalentes. Así, para obtener una malla homotópica ajustada a x_0 y adaptada a p basta considerar como homotopía la propia H, la subdivisión anterior, tomar

$$\delta_{i0} = \varepsilon_p, \quad \ell_{p-1} + 1 \leq i \leq \ell_p, \quad 1 \leq p \leq N$$

y completar la elección del resto de datos de manera coherente.

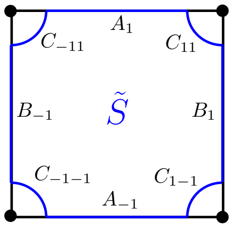
Caso B

Si hay índices para los que $v_{ij} \neq x_0$, vamos a ver cómo a partir de H podemos encontrar una nueva homotopía $\tilde{H}$ cumpliendo que $\tilde{H}(t_i,t_j) = x_0$, para cualesquiera $i,j \in \{0,1,\dots,k\}$. A partir de ésta obtendremos la malla homotópica deseada. Haremos esta prueba en diversas etapas.

Paso 1: Definimos una aplicación afín auxiliar que nos resultará útil para la construcción de $\tilde{H}$. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el cuadrado $S = [-1,1]\times[-1,1]$ y los cuatro cuartos de círculo dados por

$$L_{nm} = S \cap B((n,m);1/3), \quad n,m \in \{-1,1\},$$

donde $B((n,m);1/3)$ denota el disco abierto de centro (n,m) y radio $1/3$. Consideremos ahora el conjunto $\tilde{S}$ obtenido retirando a S los cuatro cuartos de círculo $L_{-1-1}, L_{-11}, L_{1-1}, L_{11}$, que es un cerrado de S. Nótese que $\tilde{S}$ tiene cuatro lados rectos A_{-1}, A_1, B_{-1}, B_1 dados por



$$A_{-1} = \{(s,-1);\ -2/3 \le s \le 2/3\}, \quad A_1 = \{(s,1);\ -2/3 \le s \le 2/3\}$$
$$B_{-1} = \{(-1,t);\ -2/3 \le t \le 2/3\}, \quad B_1 = \{(1,t);\ -2/3 \le t \le 2/3\}.$$

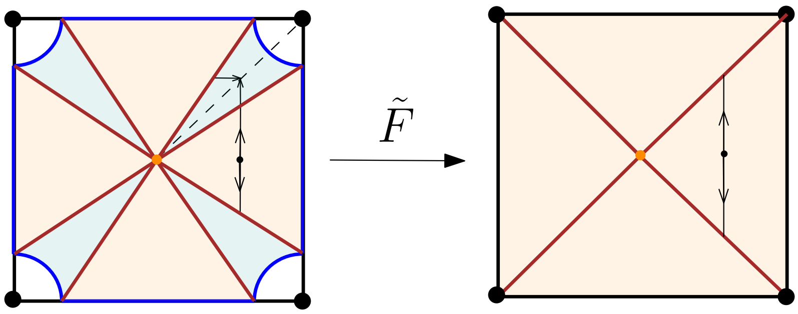
Asimismo, tiene también otros cuatro lados curvos C_{nm} que son cuartos de circunferencia dados por $C_{nm} = \tilde{S} \cap \overline{B}((n,m);1/3)$, para $n,m \in \{-1,1\}$, donde $\overline{B}((n,m);1/3)$ denota el disco cerrado centrado en (n,m) de radio $1/3$.

Es un ejercicio para el lector construir una aplicación continua $\tilde{F}: \tilde{S} \to S$ con las siguientes propiedades:

- $\tilde{F}(C_{nm}) = \{(n,m)\}$, para $n,m \in \{-1,1\}$.
- La restrición de $\tilde{F}$ a los lados rectos A_{-1}, A_1, B_{-1}, B_1 está dada por

$$\begin{array}{rcll} \tilde{F}((s,-1)) &=& (3s/2,-1), & -2/3 \le s \le 2/3, \\ \tilde{F}((s,1)) &=& (3s/2,1), & -2/3 \le s \le 2/3, \\ \tilde{F}((-1,t)) &=& (-1,3t/2), & -2/3 \le t \le 2/3, \\ \tilde{F}((1,t)) &=& (1,3t/2), & -2/3 \le t \le 2/3. \end{array}$$

La siguiente figura puede servir de ayuda para construir dicha aplicación



Paso 2: Para cada $v_{ij} = H(t_i,t_j)$, seleccionamos un camino $h_{ij}: [0,1] \to X$ que una x_0 con v_{ij} cumpliendo que si $v_{ij} \in U_1$, entonces $\mathrm{Im}(h_{ij}) \subset U_1$ y si $v_{ij} \in U_2$, entonces $\mathrm{Im}(h_{ij}) \subset U_2$. Obsérvese que con esto se tiene que si $v_{ij} \in U_1 \cap U_2$, entonces $\mathrm{Im}(h_{ij}) \subset U_1 \cap U_2$. Consideremos la aplicación

$$g_{ij}: \bar{B}(\mathbf{0};1/3) \to X, \quad g_{ij}(x) = h_{ij}(3\|x\|).$$

Observemos que $g_{ij}(\mathbf{0}) = x_0$ y que g_{ij} toma el valor v_{ij} en la circunferencia frontera de $\bar{B}(\mathbf{0};1/3)$.

Paso 3: Vamos a trabajar dentro de uno de nuestros rectángulos S_{ij}. Podemos identificar S_{ij} con S mediante el homeomorfismo afín $K_{ij} : S \to S_{ij}$ dado por

$$K_{ij}((u,v)) = \left(t_i + \frac{u+1}{2}(t_{i+1} - t_i), t_j + \frac{v+1}{2}(t_{j+1} - t_j) \right)$$

Escribamos $\tilde{S}_{ij} = K_{ij}(\tilde{S})$. Tenemos una aplicación $\tilde{F}_{ij} : \tilde{S}_{ij} \to S_{ij}$ definida por

$$\tilde{F}_{ij} = K_{ij} \circ \tilde{F} \circ K_{ij}^{-1}.$$

La restricción de la homotopía H a S_{ij}, nos permite definir $\tilde{H}_{ij}^1 : \tilde{S}_{ij} \to X$ por

$$\tilde{H}_{ij}^1 = (H|_{S_{ij}}) \circ \tilde{F}_{ij}.$$

Paso 4: Consideramos los cuatro cuartos de círculo $C_{nm}^{ij} = K_{ij}(C_{nm})$, para $n,m \in \{-1,1\}$. Vamos a construir aplicaciones

$$\tilde{H}_{ij}^{2,(n,m)} : C_{nm}^{ij} \to X,$$

que por por pegado con $\tilde{H}_{ij}^1$, nos permitan obtener la restricción al rectángulo S_{ij} de la homotopía deseada $\tilde{H}$.

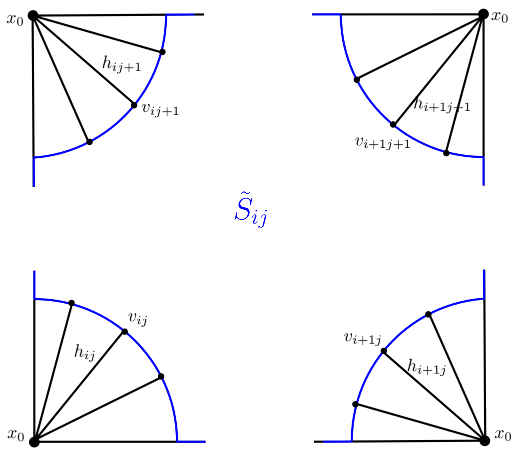
Dado un punto $(x,y) \in C_{nm}^{ij}$, nos lo llevamos hasta el punto de S dado por $(x',y') = K_{ij}^{-1}((x,y))$. Ahora desplazamos (x',y') a un punto (x'',y'') del disco de radio $1/3$ centrado en el origen mediante la traslación

$$t_{nm} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (a,b) \mapsto (a,b) - (n,m)$$

Definimos el par (p,q) que nos sirve para identificar el vértice de la malla que nos interesa como sigue:

$$\begin{array}{lcl}
(n,m) = (-1,-1) & \Rightarrow & (p,q) = (i,j), \\
(n,m) = (-1,1) & \Rightarrow & (p,q) = (i,j+1), \\
(n,m) = (1,-1) & \Rightarrow & (p,q) = (i+1,j), \\
(n,m) = (1,1) & \Rightarrow & (p,q) = (i+1,j+1).
\end{array}$$

Ahora tomamos $(u,v) = \tilde{H}_{ij}^{2,(n,m)}(x,y) = g_{pq}((x'',y''))$.



Paso 5: Observamos que $S_{ij} = \tilde{S}_{ij} \cup C_{-1-1}^{ij} \cup C_{1-1}^{ij} \cup C_{-11}^{ij} \cup C_{11}^{ij}$ y que las aplicaciones continuas $\tilde{H}_{ij}^1$ y $\tilde{H}_{ij}^{2,(n,m)}$ coinciden en las zonas comunes. Esto permite pegarlas en una aplicación continua

$$\tilde{H}_{ij} : S_{ij} \to X.$$

Más aún, la construcción está hecha de tal manera que las aplicaciones $\tilde{H}_{ij}$ y $\tilde{H}_{i'j'}$ coinciden en la intersección de S_{ij} y $S_{i'j'}$. De este modo, de nuevo por pegado tenemos una aplicación continua

$$\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to X,$$

que será la homotopía buscada. Veamos esta última afirmación.

1. Es una comprobación directa ver que $\tilde{H}((t_i,t_j)) = \mathbf{x}_0$ para $0 \leq i, j \leq k$.
2. Gracias a la elección de los h_{ij} realizada en el paso 2, podemos asegurar que se sigue cumpliendo $\tilde{H}(S_{ij}) \subset U_{\varepsilon_{ij}}$.
3. Los lazos $\tilde{\alpha}_i^0$ obtenidos como normalización de los caminos $\tilde{H}|_{[t_i,t_i+1]\times\{0\}}$ son

$$\tilde{\alpha}_i^0 = h_{i-1,0} * \alpha_{i,0} * h_{i,0}^{-1},$$

donde hemos escrito $h_{-1} = h_{k+1} = c_{x_0}$.

Observemos que ahora, para todo $p = 1,2,\ldots,N$ se cumple que

$$\sigma_p = \tilde{\alpha}^0_{\ell_{p-1}+1} * \tilde{\alpha}^0_{\ell_{p-1}+2} * \cdots * \tilde{\alpha}^0_{\ell_p}.$$

De esta manera $\tilde{H}$ está exactamente en las condiciones del Caso A y así acaba la prueba del teorema.

■ **Ejemplo 13.1** Como consecuencia del teorema anterior obtenemos automáticamente que el grupo fundamental "del ocho" (unión de dos circunferencias tangentes en un punto) es el grupo libre con dos generadores $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Aquí tenemos un primer ejemplo de grupo fundamental no conmutativo.

Bibliografía

[1] Crossley, M. *Essential topology*, Springer London Dordrecht Heidelberg New York (2010)

[2] Dugundji, J. *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. Boston (1966)

[3] Greenberg, M.& Harper, J. *Algebraic Topology. A first course* (1981)

[4] Hatcher, A. *Algebraic topology* Cambridge University Press (2002)

[5] Lipschutz, S. *Topología General*, McGraw Hill (1967)

[6] Macho. M. *Topología. Curso 2014/2015* https://www.ehu.eus/ mtwmastm/Topologia1415.pdf

[7] Massey, W.S. *Introducción a la Topología Algebraica*, Reverté, Barcelona (1972)

[8] Maunder, C.R.F. *Algebraic Topology*. Mineola: Dover Publications (1980)

[9] Munkres, J.R. *Topología (2^a ed.)*, Prentice-Hall, Madrid (2002)

[10] Willard, S. *General topology*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1970)