



---

**Universidad de Valladolid**

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

# EL AGUJERO NEGRO DE KERR

Autora:  
Raquel Aller Presencio

Tutores:  
Dr. Bert Janssen  
Dr. José Manuel Izquierdo Rodríguez

2024

*Dedicado a mis padres y a mi abuelo, que siempre han velado por mí y que tanto me han apoyado a lo largo de la carrera.*

# Índice

<b>1. Resumen</b>	<b>3</b>
<b>2. Notación</b>	<b>3</b>
<b>3. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>4. Métrica y cono de luz</b>	<b>4</b>
<b>5. Agujero negro de Schwarzschild</b>	<b>6</b>
5.1. Métrica de Schwarzschild . . . . .	6
5.2. Estructura causal del Schwarzschild . . . . .	7
5.2.1. Singularidades . . . . .	8
5.2.2. Radio de Schwarzschild y horizonte de eventos . . . . .	8
5.2.3. Coordenadas de Eddington-Finkelstein . . . . .	12
<b>6. Movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild</b>	<b>14</b>
<b>7. Agujero negro de Kerr</b>	<b>17</b>
7.1. Generalidades de la métrica de Kerr . . . . .	17
7.2. Estructura causal del agujero negro de Kerr . . . . .	19
7.2.1. Singularidades . . . . .	19
7.2.2. Horizontes y la ergosfera . . . . .	20
7.3. Arrastre de sistemas inerciales. Frame dragging . . . . .	22
7.3.1. Observadores estacionarios . . . . .	22
7.3.2. Observadores ZAMOS's: Arrastre . . . . .	23
7.3.3. Observadores estáticos . . . . .	24
7.4. Viaje al centro de un agujero negro . . . . .	26
7.5. Deducción de la métrica . . . . .	27
7.5.1. Vielbein y tétrada nula . . . . .	28
7.5.2. Algoritmo de Newmann-Janis . . . . .	30
<b>8. Movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Kerr</b>	<b>32</b>
8.1. Geodésicas generales . . . . .	33
8.1.1. Ecuaciones de $\dot{t}$ y $\dot{\varphi}$ . . . . .	33
8.1.2. Ecuaciones de $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ . . . . .	34
<b>9. Geodésicas en el plano ecuatorial</b>	<b>38</b>
9.0.1. Ecuaciones de $\dot{\theta}$ y $\dot{r}$ . . . . .	38
9.0.2. Ecuaciones de $\dot{\varphi}$ y $\dot{t}$ . . . . .	39
9.0.3. Potenciales para geodésicas ecuatoriales . . . . .	39
<b>10. Conclusiones</b>	<b>43</b>

## 1. Resumen

La métrica de Kerr es una de las soluciones de las ecuaciones de Einstein, que describe la geometría del espaciotiempo provocada por un cuerpo masivo en rotación. A lo largo de este trabajo, deduciremos dicha métrica y se estudiará con detenimiento, haciendo especial énfasis en la estructura causal de la solución.

Para hacer este estudio de forma amena, se comenzará introduciendo el agujero negro de Schwarzschild. De esta forma se presentan muchos conceptos y herramientas de forma sencilla, como las singularidades físicas y de coordenadas o los vectores de Killing. Una vez el lector está familiarizado con los conceptos básicos, nos sumergiremos de lleno en el agujero negro de Kerr.

The Kerr metric is a solution of the Einstein's equations which describes the geometry of spacetime around a massive body with rotation. Along this project, the Kerr metric will be deduced and studied deeply, with special emphasis on the causal structure of this solution.

To make this project more pleasant, we will begin introducing the Schwarzschild black hole. Therefore, we will be able to present many concepts and tools, as essential and coordinate singularities or the Killing vectors. Once the reader is used to all these new concepts, it will be time to dive into the Kerr solution.

## 2. Notación

A lo largo de todo el trabajo se utiliza el *convenio de sumación de Einstein*, donde se supone que se suma sobre índices superiores e inferiores repetidos:

$$V_\mu W^\mu \equiv \sum_{\mu=1}^N V_\mu W^\mu. \quad (1)$$

Por otro lado, se trabaja en unidades naturales, de tal forma que  $c = G = 1$ .

En cuanto a la signatura de la métrica, existen distintos convenios en relatividad general. En este texto se usará la convención  $diag(1, -1, -1, -1)$ .

## 3. Introducción

Todos conocemos en mayor o menor medida la historia de la *Relatividad General*, que surge como una teoría de la gravedad formulada por el físico Albert Einstein y publicada en 1915. Esta publicación rompía con todo lo establecido hasta entonces. Lo que Einstein proponía era una nueva cosmovisión en la que reformularía (generalizaría) por completo la gravedad de Isaac Newton.

Albert Einstein publicaba el 25 de noviembre de 1915 el artículo que sentaría las bases de la Relatividad General. Bajo el nombre de *Die Feldgleichungen der Gravitation (Las ecuaciones de campo de la gravitación)*, Einstein desarrolla las ecuaciones siguientes

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  el tensor métrico y  $T_{\mu\nu}$  el tensor energía-momento. También aparece el escalar de Ricci  $R$ , que resulta de contraer el tensor de curvatura con la métrica.

## 4 MÉTRICA Y CONO DE LUZ

---

La igualdad anterior, aunque compacta, se trata de un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales, no lineales acopladas y de segundo orden para la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Debido a la dificultad de estas ecuaciones, Einstein pensó que no se encontrarían soluciones. Hoy sabemos que esto no fue así. Menos de dos meses después, en enero de 1916, Karl Schwarzschild halló la primera solución exacta no trivial: esféricamente simétrica y estática. La solución de Kerr, sin embargo, se haría de rogar durante 48 años. Esta métrica, descubierta por matemático el neozelandés Roy Kerr en 1963, resulta ser mucho más complicada que Schwarzschild, ya que se pierde la simetría esférica a causa de su rotación.

La física en muchas ocasiones causa rechazo ya que el formalismo matemático en el que se sustenta esta disciplina puede llegar a asustar. Sin embargo, detrás de tantas cuentas engorrosas, nos encontramos con resultados absolutamente fascinantes, y muchos de ellos se pueden entender de forma intuitiva y sin necesidad de las matemáticas.

En particular, la relatividad general puede resultar densa, ya que se apoya en la geometría diferencial y una notación muy compacta. La finalidad de este TFG es explicar de forma llevadera el agujero negro de Kerr, de manera que cualquier estudiante de física pueda llegar a seguirlo con facilidad. Se pretende que este trabajo sirva como un puente de conocimiento entre los contenidos que se estudian en la carrera a cerca de relatividad general y los estudios posteriores.

El texto siguiente trata de ser autocontenido. En primer lugar se introduce el agujero negro más sencillo: Schwarzschild. De esta forma, se explican de forma sencilla muchos conceptos que después serán utilizados para la solución de Kerr. Se habla de temas como la métrica, estructura causal, cantidades conservadas y movimiento geodésico. Tras habernos familiarizado con el estudio de este agujero negro, dispondremos de las herramientas necesarias para adentrarnos en Kerr. El núcleo del trabajo consiste en la estructura causal del agujero negro de Kerr, donde sobre todo nos centraremos en entender la física del sistema. En definitiva, se explicará al lector los fenómenos que acontecen cerca de un agujero negro en rotación.

### 4. Métrica y cono de luz

La métrica es el punto de partida para el estudio de un espacio-tiempo particular. Es la herramienta que nos permite medir distancias, normas de vectores, distinguir entre futuro y pasado, y además contiene toda la información necesaria para describir la curvatura de la variedad.

En Relatividad General se trabaja con variedades pseudoriemannianas, es decir, con los pares  $(\mathcal{M}, g)$  donde  $\mathcal{M}$  es una variedad diferenciable y  $g$  un tensor de rango  $(0,2)$  (dos veces covariante) no degenerado (determinante de la métrica distinto de cero). Este tensor se denomina métrica, y se puede expresar mediante el elemento de arco o en forma matricial.

Dados dos vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  pertenecientes al plano tangente de un punto  $p$  en la variedad  $\mathcal{M}$ , es decir  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$  tales que  $\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu$  y  $\mathbf{w} = w^\mu \mathbf{e}_\mu$ . Entonces con la métrica podemos definir el producto escalar de dos vectores

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu \tag{3}$$

así como la norma de un vector

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu|} = \sqrt{|v_\nu v^\nu|}. \tag{4}$$

#### 4 MÉTRICA Y CONO DE LUZ

También podemos clasificar los vectores según el signo de su norma.

$$\text{si } g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \text{ es } \begin{cases} < 0 & v^\mu \text{ es temporal} \\ = 0 & v^\mu \text{ es de tipo luz o nulo} \\ > 0 & v^\mu \text{ es espacial.} \end{cases} \quad (5)$$

El conjunto de todos los vectores nulos que pasan por un punto  $p$  de la variedad, conforman un cono doble llamado **cono de luz** (ver fig. 1). Comprender en qué consiste este cono de luz es fundamental, ya que nos va a permitir comprender las propiedades de causalidad de un espaciotiempo.

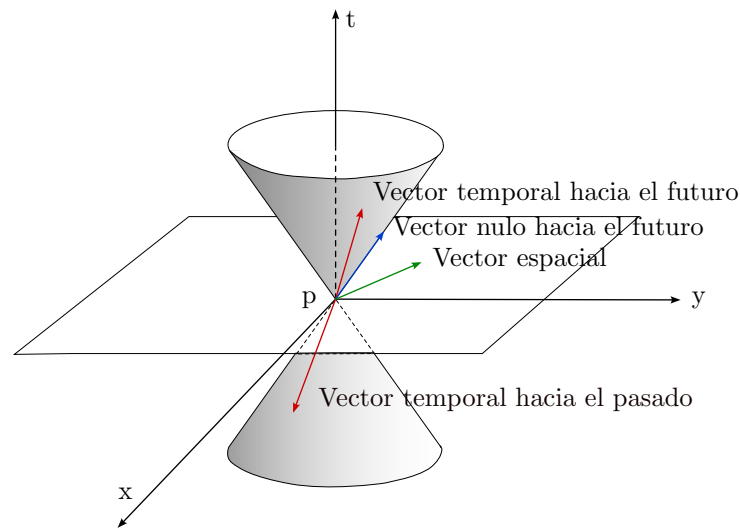


Figura 1: El cono superior es el cono futuro ( $t > 0$ ), y el de abajo el cono pasado ( $t < 0$ ). Por otro lado, el plano  $XY$  representa el instante presente. Para poder representarlo, se ha suprimido la tercera dimensión espacial  $Z$ . Solo los eventos que se encuentran dentro o sobre el cono de luz están causalmente conectados con  $p$ , es decir, los eventos que se encuentran en el cono futuro son aquellos que pueden recibir señales procedentes de  $p$ . De igual forma, los eventos del cono de luz pasado son aquellos que pueden enviar señales a  $p$ .

Será importante para el desarrollo posterior tener en cuenta que la línea universo de cualquier observador quedará recluida al interior del cono de luz. Por otro lado, la de un fotón, transcurre *sobre* el cono de luz, como se aprecia en la figura (2).

5 AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

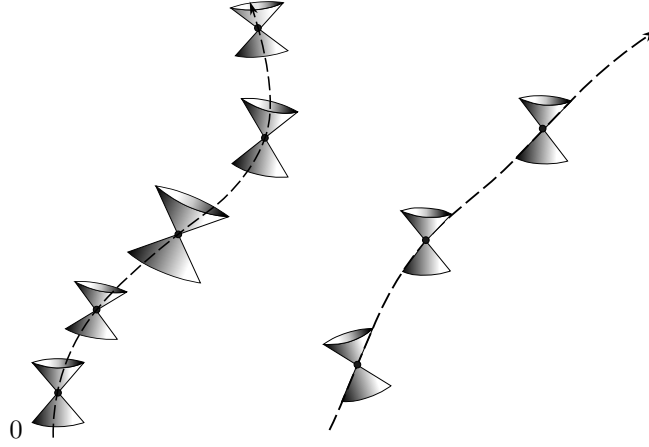


Figura 2: En la figura de la izquierda se esquematiza la línea universo de un cuerpo masivo. Como vemos, la trayectoria discurre siempre dentro del cono de luz. Dicho de otra forma, su trayectoria discurre a lo largo de curvas temporales, es decir aquellas cuyo vector tangente es un vector temporal, y que por tanto siempre queda en el interior del cono de luz. En la figura de la derecha, la línea universo de una partícula sin masa. La trayectoria está sobre la superficie del cono de luz, ya que en este caso la curva es nula y por tanto el vector tangente a la trayectoria es tipo luz. Por otro lado, ninguna partícula física tiene permitido viajar a lo largo de una curva espacial, ya que se saldría del cono de luz y no estaría causalmente conectada con el punto  $p$ .

De la condición matemática de vector nulo y situándonos en el espaciotiempo más sencillo, Minkowski en coordenadas cartesianas, se puede ver que estos deben formar un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $t$  si se consideran unidades tal que  $c = 1$ . De esta forma, para poder salir del cono de luz, la línea universo debería formar más de  $45^\circ$  con el eje  $t$ , superando  $c$ . Dicho de otra manera, no se puede atravesar de vuelta una superficie nula.

## 5. Agujero negro de Schwarzschild

### 5.1. Métrica de Schwarzschild

Antes de adentrarnos en el agujero negro de Kerr, comenzaremos con la segunda solución más sencilla de las ecuaciones de Einstein, el agujero negro de Schwarzschild.

La solución de Schwarzschild es una solución de vacío ( $T_{\mu\nu} = 0$ ), de tal forma que las ecuaciones de Einstein (2) se reducen a

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{6}$$

Cuando una métrica verifica la ecuación anterior, se dice que es *Ricci-plana*. La solución de Schwarzschild viene dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{7}$$

donde  $M$  es un parámetro llamado *masa geométrica*. Se puede demostrar que la solución de Schwarzschild reproduce el potencial gravitatorio causado por un cuerpo masivo esférico, como una estrella o un planeta sin rotación. Como consecuencia, la masa geométrica se puede interpretar como

$$M = mG_N, \tag{8}$$

## 5 AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

donde  $m$  sería la masa del cuerpo esférico que crea dicho potencial gravitatorio. La igualdad (8) es muy relevante ya que nos permite relacionar la métrica con una masa  $m$  a través del parámetro  $M$ , es decir, que la masa del cuerpo considerado dictamina cómo se curva el espaciotiempo. Por otro lado, si hacemos este parámetro cero ( $M = 0$ ) recuperamos la métrica de Minkowski, lo cual era de esperar, ya que si eliminamos la masa se debe recuperar el espaciotiempo plano.

En cuanto al comportamiento de la métrica en  $r \rightarrow \infty$ , nos damos cuenta de que el espaciotiempo tiende a Minkowski en coordenadas esféricas. Esto es lógico ya que a grandes distancias, los efectos del cuerpo masivo son cada vez menores, y estando lo suficientemente lejos, no deberíamos notar nada, es decir, el espaciotiempo debería ser completamente plano. Se dice entonces que la solución es *asintóticamente plana*.

Por otro lado, resulta interesante analizar las simetrías que presenta esta solución. Por ejemplo, los coeficientes métricos son independientes de la variable  $\varphi$ , de tal forma que la métrica es invariante bajo rotaciones  $SO(3)$  de la forma  $\varphi \rightarrow \varphi + \Delta\varphi$ . Esto se traduce en que la solución presenta **simetría esférica**. Ocurre lo mismo con la coordenada  $t$ . Como no aparece en los coeficientes métricos, la solución va a ser **estacionaria**, es decir, invariante bajo traslaciones temporales de la forma  $t \rightarrow t + \Delta t$ . Podemos generalizar aún más esta última afirmación, ya que la métrica es invariante bajo inversiones temporales  $t \rightarrow -t$ , de tal forma que podemos decir que la métrica no solo es estacionaria sino además **estática**.

Las simetrías de la métrica tienen otra consecuencia importante. Como sabemos del teorema de Noether, las simetrías de un sistema llevan consigo asociadas cantidades conservadas. Para su estudio, nos valdremos de los vectores de Killing, los cuales resultan muy útiles.

Para la métrica de Schwarzschild se pueden obtener los vectores de Killing por simple inspección de la métrica. Como los coeficientes métricos no dependen de las coordenadas  $t$  y  $\varphi$ , los vectores de Killing asociados serán simplemente  $k^\mu = (1, 0, 0, 0)^t = \delta_t^\mu$  y  $l^\mu = (0, 0, 0, 1)^t = \delta_\varphi^\mu$ . Las cantidades conservadas asociadas a estos vectores se pueden calcular como

$$\begin{aligned} k_\mu \dot{x}^\mu &= k^\nu \dot{x}^\mu g_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = E \\ l_\mu \dot{x}^\mu &= l^\nu \dot{x}^\mu g_{\mu\nu} = -r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = -L_z, \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $E$  es la energía por unidad de masa medida en el infinito y  $L_z$  es el momento angular por unidad de masa alrededor del eje  $z$ , todo ello considerando que  $x^\mu$  sea una trayectoria geodésica. En el caso de una partícula sin masa,  $E$  se interpretaría como la energía medida en el infinito y  $L_z$  como el momento angular total.

Como sabemos, el agujero negro de Schwarzschild es esféricamente simétrico, por lo cual existen otros dos vectores de Killing asociados a las simetrías de rotación alrededor de los ejes  $x$  e  $y$ , que implican la conservación de las otras dos componentes del momento angular. Los tres vectores de Killing asociados a la invariancia bajo rotaciones satisfacen el álgebra de  $SO(3)$ , verificando las relaciones de conmutación

$$[l_\mu^a, l_\mu^b] = \epsilon_{abc} l_\mu^c. \quad (10)$$

### 5.2. Estructura causal del Schwarzschild

Si nos fijamos en la métrica de Schwarzschild, resulta fácil darse cuenta por simple inspección que existen algunos puntos del espaciotiempo donde los coeficientes de la métrica divergen. Estos puntos se denominan singularidades, y existen dos tipos: las singularidades esenciales y las singularidades de coordenadas. En el próximo apartado nos centraremos en hallar de forma explícita estas singularidades y de estudiar sus características.



### 5.2.1. Singularidades

A simple vista nos damos cuenta de que la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (11)$$

diverge en varios puntos, a saber  $r = 0$  y  $r = 2M$ , ya que para estos valores se anulan denominadores de algunos coeficiente métricos.

Podemos distinguir dos tipos de singularidades. Por una parte las **singularidades de coordenadas**. La métrica se hace singular simplemente debido a las coordenadas en las que está expresada, de tal forma que siempre existirá otro sistema de coordenadas tal que podamos deshacernos de dicha singularidad. Por ejemplo en Schwarzschild, la singularidad en  $r = 2M$  es de coordenadas. Más adelante demostraremos que si se expresa la métrica de Schwarzschild en unas coordenadas llamadas Eddington-Finkelstein, entonces desaparece dicha singularidad.

Por otro lado están las **singularidades físicas**, o también llamadas esenciales, intrínsecas o de curvatura. En este caso, la métrica es singular en cualquier sistema de coordenadas. Un ejemplo es la singularidad en  $r = 0$  para Schwarzschild.

La manera de distinguir entre estos dos tipos de coordenadas es mediante los **invariantes de curvatura**. Son contracciones del tensor de Riemann, es decir, cantidades escalares, lo que nos asegura que su resultado será el mismo en cualquier sistema de coordenadas. Consecuentemente, si el invariante resulta ser singular en un determinado punto del espaciotiempo, podemos asegurar que lo será en todos los sistemas de coordenadas, y por tanto la singularidad será física. Algunos ejemplos de invariantes a los que se suele recurrir son el *invariante de Kretschmann*  $R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}$  o la contracción del *tensor de Ricci*  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ .

Por otro lado, demostrar que una singularidad es de coordenadas resulta más complicado ya que, que un invariante no sea singular en un punto o que muchos invariantes no sean singulares, no es condición suficiente. La única manera de demostrarlo es encontrar el cambio de coordenadas tal que dicho punto se vuelve regular. Sin embargo, no nos centraremos en la demostración rigurosa de las singularidades de coordenadas, ya que queda fuera del objetivo de este trabajo.

Para la métrica de Schwarzschild, podemos calcular el invariante de Kretschmann.

$$R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (12)$$

Como vemos, diverge para  $r = 0$ , luego esta representa una singularidad física del espaciotiempo.

### 5.2.2. Radio de Schwarzschild y horizonte de eventos

Acabamos de ver que para el espaciotiempo de Schwarzschild, el radio  $r = 2M$  representa una singularidad de coordenadas. Este radio especial se denomina *radio de Schwarzschild*, y en sus proximidades, ocurren fenómenos físicos interesantes. Podemos analizar lo que le pasaría a una linterna que manda pulsos de luz y que se aproxima al radio de Schwarzschild. Si denominamos  $T_e$  al periodo de la linterna en el momento de emisión en  $r = r_e$ , y  $T_d$  en el momento de detección en  $r = r_d$ , podemos ver que estos dos periodos se relacionan, atendiendo al efecto Doppler gravitatorio, según

$$T_d = T_e \sqrt{\frac{g_{tt}(r_d)}{g_{tt}(r_e)}} = T_e \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_d}}{1 - \frac{2M}{r_e}}}. \quad (13)$$

## 5 AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

---

Cuando la linterna se acerca al radio de Schwarzschild  $r_e \rightarrow 2M$ , un observador en  $r = r_d$  verá que el periodo que él mide es cada vez mayor, y cuando  $r = 2M$  se anula el denominador, es decir que el periodo sería infinito. Dicho de otra forma, la superficie determinada por  $r = 2M$  es una *superficie de corrimiento infinito hacia el rojo*.

Para entender mejor qué sucede en el radio de Schwarzschild podemos estudiar la geodésicas nulas. Dentro de las geodésicas nulas, nos centramos en las radiales, que son aquellas que van radialmente desde  $r = 0$  a  $r = \infty$  o viceversa. Podemos imponer que las geodésicas sean radiales haciendo  $d\theta = d\varphi = 0$ .

A modo de recordatorio, distinguimos tres tipos de geodésicas según sea la norma del vector tangente a la curva  $\dot{x}^\mu(\tau)$

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \epsilon \quad \text{donde} \quad \epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } x^\mu(\tau) \text{ es temporal} \\ 0 & \text{si } x^\mu(\tau) \text{ es nulo} \\ -1 & \text{si } x^\mu(\tau) \text{ es espacial.} \end{cases} \quad (14)$$

Recordemos que una geodésica afín es una curva  $x^\mu(\tau)$  parametrizada por una parámetro  $\tau$ . Este parámetro no es necesariamente el tiempo propio salvo en el caso de curvas temporales. Por otro lado, el vector tangente a la curva geodésica viene dado por  $u^\mu = \dot{x}^\mu(\tau) = dx^\mu/d\tau$ .

Se deduce entonces que en nuestro caso particular la condición de que sean radiales y nulas se expresará como

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0, \quad (15)$$

donde simplemente se ha sustituido en (14) los valores particulares de los coeficientes métricos  $g_{\mu\nu}$  de Schwarzschild. Reordenando la ecuación anterior obtenemos

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}, \quad (16)$$

cuya solución viene dada por

$$t = \pm \left[ r + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| + C_0 \right]. \quad (17)$$

El signo positivo se corresponde con la congruencia de geodésicas salientes y el negativo con la congruencia de las geodésicas entrantes. Podemos ver estas curvas representadas en la figura 3.

## 5 AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

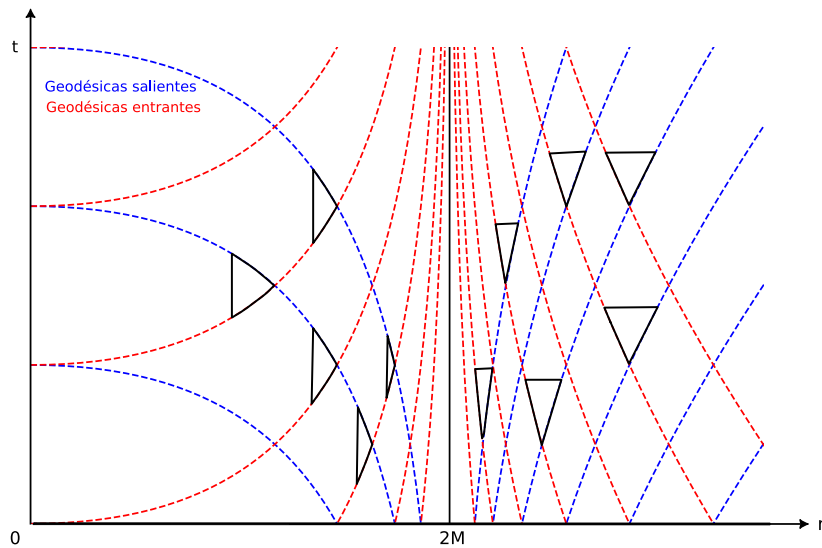


Figura 3: En rojo se representan las geodésicas radiales nulas entrantes y en azul las salientes para la métrica de Schwarzschild. Los conos negros son los conos de luz. Las coordenadas  $\theta$  y  $\varphi$  se suponen fijas en esta representación. Podemos ver como las geodésicas y los conos de luz en  $r \gg 2M$  se asemejan a Minkowski, pero según nos acercamos al radio de Schwarzschild, los conos se van cerrando hasta degenerar completamente en  $r = 2M$ . Por otro lado, resulta interesante ver que en  $r < 2M$ , tanto las geodésicas entrantes como salientes apuntan hacia la singularidad en  $r = 0$ , por lo que cualquier observador que llegase a esa región, estaría avocado a caer en la singularidad.

Podemos ver que las geodésicas y los conos de luz en  $r \gg 2M$  se asemejan a Minkowski. Esto resulta evidente si observamos la ecuación (17), ya que el término logarítmico es despreciable frente a  $r$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . De esta forma, las geodésicas lejos del horizonte tienden a ser rectas que forman  $45^\circ$  con la vertical. Esto era de esperar porque como sabemos, la solución de Schwarzschild es asintóticamente plana, es decir que tiende a la de Minkowski cuando  $r \rightarrow \infty$ .

Según nos acercamos al radio de Schwarzschild, el término logarítmico cobra relevancia, y vemos que los conos de luz comienzan a cerrarse hasta que finalmente degeneran en  $r = 2M$ . Por otra parte, tanto las geodésicas entrantes como las salientes son cada vez más verticales. Se acercan asintóticamente al horizonte pero nunca llegan a tocarlo, por lo que llegaría un punto en el que los rayos de luz no serían capaces de escapar a través de una geodésica. Tampoco un observador masivo cuyo movimiento queda recluido al interior de su cono de luz. Esto nos hace pensar que ni la luz ni un observador en caída libre podrían llegar a adentrarse más allá del radio de Schwarzschild por el mismo motivo<sup>1</sup>.

Dentro del radio de Schwarzschild, tanto las geodésicas entrantes como las salientes apuntan hacia la singularidad. Otra manera de ver esto mismo es fijándose en los conos de luz, que en dicha región cambian su orientación, de tal forma que apuntan hacia  $r = 0$ . Esto es consecuencia de que para  $r < 2M$  los coeficientes  $g_{tt}$  y  $g_{rr}$  cambian de signo, intercambiándose los papeles de coordenada temporal y espacial. Esto conlleva unas consecuencias físicas muy interesantes, que se detallarán en el próximo apartado.

<sup>1</sup>Más adelante se verá que esto no es así. Sí que es posible cruzar el radio de Schwarzschild, y lo que sugieren las geodésicas de la figura (3) no es más que una «ilusión» causada por la elección de coordenadas. En el próximo apartado reinterpretaremos la región  $r = 2M$  usando unas nuevas coordenadas.

## 5 AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

A la vista de los resultados, parece que las coordenadas elegidas para estudiar lo que sucede en  $r = 2M$ , no son del todo adecuadas. El cambio de coordenadas apropiado para solventar este problema, vendría de la mano del físico estadounidense Robert Oppenheimer, que en 1939 se dio cuenta de la necesidad de distinguir entre el tiempo  $t$  medido por un observador en el infinito y el tiempo propio  $\tau$  de una partícula que cae hacia el agujero negro.

Para entender la diferencia entre  $t$  y  $\tau$ , resulta conveniente realizar un estudio de las geodésicas radiales temporales. En primer lugar, planteamos la componente temporal de la ecuación de las geodésicas. Viene dada por

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{t} + 2\Gamma_{tr}^t \dot{t} \dot{r} = 0, \quad (18)$$

donde el punto se refiere a la derivación con respecto al tiempo propio  $\tau$ . Podemos reescribir esta expresión multiplicando toda la ecuación por  $g_{tt}$  y escribiendo el símbolo de Christoffel explícitamente en función de la métrica. La expresión que se obtiene es

$$\frac{d}{d\tau} (g_{tt}\dot{t}) = 0. \quad (19)$$

Sin más que sustituir  $g_{tt}$  e integrar, se obtiene

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\dot{t}\right) = 1. \quad (20)$$

La constante de integración se ha elegido 1, de tal forma que lejos del agujero negro  $r \gg 2M$ , se tiene que  $d\tau \approx dt$ . Esta suposición se hace en base a que, lejos del agujero negro, los efectos de la gravedad no se pueden percibir, y por tanto, ambos tiempos deberían ser el mismo a una distancia lo suficientemente grande. A raíz de esta conclusión y teniendo en cuenta que  $\tau$  es el tiempo propio de la partícula, llegamos a la conclusión de que  $t$  debe de ser el tiempo medido por un observador asintótico en el infinito.

Por otro lado, para terminar de caracterizar por completo las geodésicas temporales, debemos considerar la ecuación (20) junto con la ecuación (14), que en esta ocasión toma la forma

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 = 1. \quad (21)$$

Esta última expresión se puede reescribir como

$$\dot{r}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{2M}{r}, \quad (22)$$

donde en la última igualdad se ha usado (20). Reordenando (22) obtenemos

$$\frac{d\tau}{dr} = -\sqrt{\frac{r}{2M}}, \quad (23)$$

cuya solución viene dada por

$$\tau = \frac{2}{3\sqrt{2M}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2}\right). \quad (24)$$

Analizando esta última ecuación, vemos que un observador en caída libre, partiendo de una posición inicial  $r_0$ , podría llegar al radio de Schwarzschild, e incluso cruzarlo y llegar a la singularidad en un tiempo  $\tau$  finito. Pero para llegar a esta conclusión, tenemos que basarnos en el tiempo propio del observador, ya que otro observador II asintótico en el infinito, aseguraría que el observador I tardaría un tiempo infinito en llegar al radio de Schwarzschild, y por tanto nunca llegaría a cruzarlo. Vemos por tanto la importancia de distinguir entre  $t$  y  $\tau$ .

### 5.2.3. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Hasta ahora hemos estudiado la métrica de Schwarzschild en las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$ , pero como vemos, no describen correctamente la singularidad en  $r = 2M$ . Es por ello que ahora nos plantemos expresar la métrica en otras coordenadas que eliminen esta singularidad. Para ello definimos una nueva coordenada temporal

$$\tilde{t} = t + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \quad (25)$$

Esta expresión está motivada por las geodésicas nulas entrantes (17), definidas para un tiempo  $t$  medido por un observador asintótico en el infinito. En estas nuevas coordenadas  $(\tilde{t}, r, \theta, \varphi)$  llamadas coordenadas de Eddington-Finkelstein avanzadas, la métrica de Schwarzschild toma la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 - \frac{4M}{r} d\tilde{t}dr - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (26)$$

que es regular en  $r = 2M$ .

Existen otras coordenadas en que se puede expresar la métrica de Schwarzschild y que vamos a mencionar, puesto que nos serán de utilidad en apartados posteriores. Surgen de hacer el cambio

$$v = \tilde{t} + r, \quad (27)$$

donde  $v$  es lo que se conoce como una coordenada nula (ver figura 4), y suele llamarse *parámetro de tiempo avanzado*. Se puede demostrar fácilmente que en estas nuevas coordenadas la métrica toma la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (28)$$

Retomando otra vez las coordenadas de Eddington-Finkelstein, las geodésicas entrantes toman la forma

$$\tilde{t} = -r - C_0, \quad (29)$$

y las geodésicas salientes

$$\tilde{t} = r + 4M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| + C_0. \quad (30)$$

Estas curvas se representan en la figura (4).

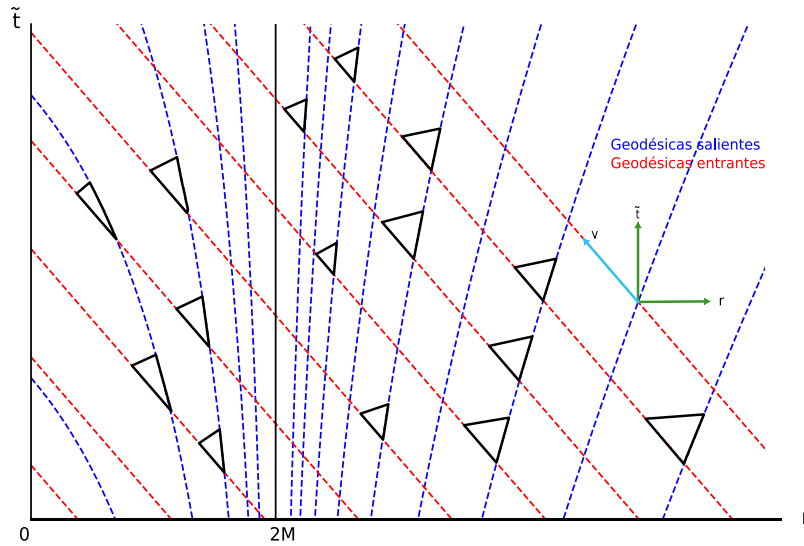


Figura 4: Se representan en rojo las geodésicas entrantes, en azul las geodésicas salientes y en negro los conos de luz para la métrica de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein avanzadas. También se representan tres vectores para explicar las diferencias entre las distintas coordenadas.

Vemos que estas geodésicas presentan algunas diferencias y similitudes con las dadas en las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$ . En cuanto a las geodésicas salientes, vemos que están completamente degeneradas en  $r = 2M$ , pero para  $r \gg 2M$  tienden a formar un ángulo de  $45^\circ$ , es decir, lejos del agujero negro recuperamos el espaciotiempo plano de Minkowski, como cabría esperar.

Por otro lado, las geodésicas entrantes toman una forma muy sencilla. Son rectas que forman un ángulo de  $45^\circ$ , dirigidas desde  $r = \infty$  a  $r = 0$ . Consecuentemente, un observador masivo, cuya trayectoria estaría reclusa al interior de su cono de luz, podría atravesar el radio de Schwarzschild. Por otro lado, a raíz de la forma de las geodésicas en la región  $r < 2M$ , los conos de luz se encuentran inclinados, y apuntan hacia la singularidad, de tal forma que un observador masivo en esta región estaría avocado a dirigirse hacia la singularidad.

En la zona  $r < 2M$  tiene lugar otro suceso interesante. Fijámonos en los coeficientes métricos  $g_{tt}$  y  $g_{rr}$ , nos damos cuenta de que en esta región cambian de signo, de modo que dentro del radio de Schwarzschild, la coordenada  $t$  se vuelve espacial y la coordenada  $r$  se vuelve temporal. Esto tiene como consecuencia que la singularidad en  $r = 0$  es un instante en el futuro de un observador que ha cruzado el radio de Schwarzschild. En resumidas cuentas, una vez se atraviesa esta hipersuperficie definida por  $r = 2M$ , el futuro del observador es avanzar hacia la singularidad hasta desaparecer del espaciotiempo en  $r = 0$ .

Esto se puede entender visualmente analizando los conos de luz en la figura (4) en la región  $r < 2M$ . Se puede apreciar que, debido a la forma que adoptan las geodésicas en esta región, los conos de luz apuntan hacia la singularidad. Consecuentemente, un observador masivo cuyo movimiento queda recluso al interior del cono de luz, no tendrá otra opción que avanzar hasta la singularidad.

En resumidas cuentas nos damos cuenta de que la hipersuperficie en cuestión tiene una característica que la hace muy especial: una vez se cruza, resulta imposible volver a salir. Esto significa que se trata de una hipersuperficie nula. Resulta fácil convencerse de esto si comparamos con los resultados del apartado (4) del

cono de luz, ya que las características del radio de Schwarzschild son análogas a las que se explicaron para la superficie nula definida por los vectores tipo luz en Minkowski.

Consecuentemente, a esta hipersuperficie de no retorno se la conoce como horizonte de eventos. Un observador en  $r < 2M$  queda desconectado causalmente del exterior del agujero negro, ya que la información solo puede cruzar el horizonte en un único sentido, como si de una membrana unidireccional se tratase.

## 6. Movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild

Tras haber estudiado la estructura causal de Schwarzschild, nos puede interesar estudiar que trayectoria seguiría un observador masivo que se aproximase a este agujero negro. Es por ello que en este breve apartado se estudian las trayectorias geodésicas en el espaciotiempo de Schwarzschild para cuerpos masivos y fotones.

Para la deducción de las ecuaciones nos valdremos de las ecuaciones de Euler-Lagrange. A modo de recordatorio, las ecuaciones de Euler-Lagrange vienen dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0, \quad (31)$$

donde  $\mathcal{L}$  denota el lagrangiano de una partícula libre, el cual se puede expresar como

$$\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x^\alpha) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x^\alpha) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (32)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro de la trayectoria geodésica en cuestión.

Si aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange al lagrangiano (32), obtenemos la ecuación de las geodésicas, que viene dada por

$$\ddot{x}^\gamma + \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (33)$$

El desarrollo completo para la obtención de la ecuación de las geodésicas se puede consultar en [7]. En definitiva, las ecuaciones del movimiento para la partícula libre vienen dadas por (33).

A continuación nos proponemos obtener las componentes de la tetravelocidad  $u^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ , para después integrarlas y obtener la trayectoria  $x^\mu(\lambda)$ . Si comenzamos con la componente  $\dot{\theta}$ , esta se puede obtener fácilmente de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \implies \frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2, \quad (34)$$

que desarrollando, nos da la ecuación

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} + \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2. \quad (35)$$

Como la solución de Schwarzschild es esféricamente simétrica, podemos usar esta libertad para «restringir» el movimiento de la partícula test al plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$ , sin perder generalidad. Luego

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \dot{\theta} = 0, \end{cases} \quad (36)$$

es decir,  $\theta(\lambda) = \frac{\pi}{2}$  determina una condición que impondremos en las próximas ecuaciones del movimiento y que nos simplificarán notablemente las expresiones. Por otro lado, se deduce que las **órbitas alrededor de**

## 6 MOVIMIENTO GEODÉSICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD

**objetos esféricamente simétricos son planos.** En Kerr veremos que esto no es así debido a la rotación de la solución.

Las ecuaciones para  $\dot{t}$  y  $\dot{\varphi}$  se pueden derivar a partir de los vectores de Killing y sus cantidades conservadas asociadas. De apartados anteriores sabemos que  $E$  y  $L$  se conservan

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} &= E \\ r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} &= L. \end{aligned} \quad (37)$$

Particularizando para el plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$ , obtenemos las relaciones.

$$\dot{t} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}. \quad (38)$$

Finalmente solo nos queda deducir la componente  $\dot{r}$  de la tetra-velocidad. Para ello podemos usar que, para partículas masivas, la norma de la tetra-velocidad debe cumplir que  $u^\mu u_\mu = -1$ , es decir

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = -1. \quad (39)$$

Sustituyendo (38) e imponiendo  $\theta = \pi/2$  llegamos a

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} - 1\right) = E^2. \quad (40)$$

En resumen, las ecuaciones que describen las trayectorias geodésicas en el espaciotiempo de Schwarzschild son

*Para partículas masivas (Geodésicas temporales)*

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} & \dot{t} &= \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} \\ \dot{\varphi} &= \frac{L}{r^2} & \dot{r}^2 &= E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} - 1\right) = E^2 - V(r) \end{aligned} \quad (41)$$

*Para partículas sin masa (Geodésicas nulas)*

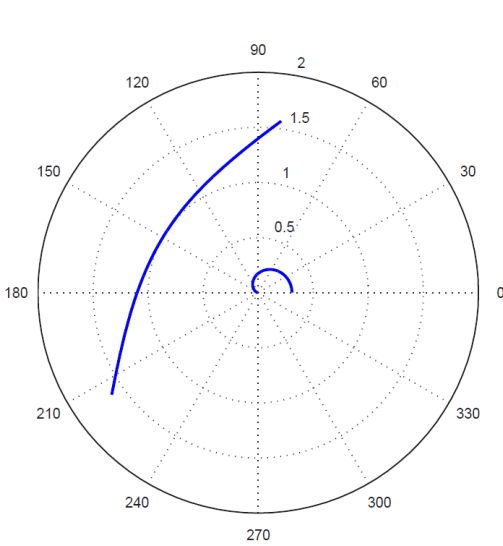
$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} & \dot{t} &= \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} \\ \dot{\varphi} &= \frac{L}{r^2} & \dot{r}^2 &= E^2 - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E^2 - V(r), \end{aligned} \quad (42)$$

donde se han definido unos potenciales efectivos para aligerar la notación.

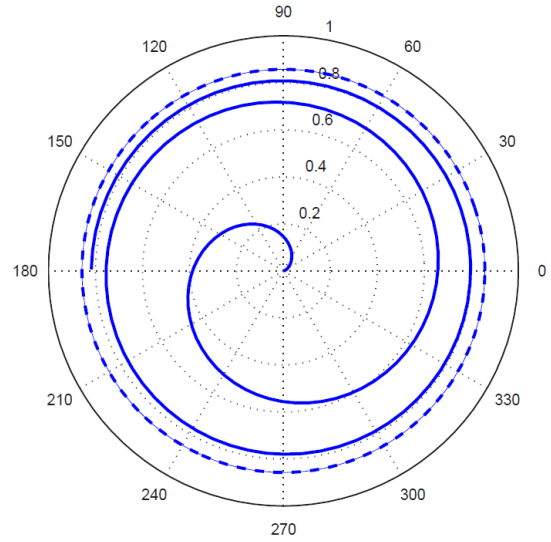
Cabría esperar distintos tipos de trayectorias según la relación entre la energía de la partícula o fotón y el máximo de dicho potencial  $V(r)$ . Efectivamente, ocurre de esta manera como, se aprecia en la figura (5).



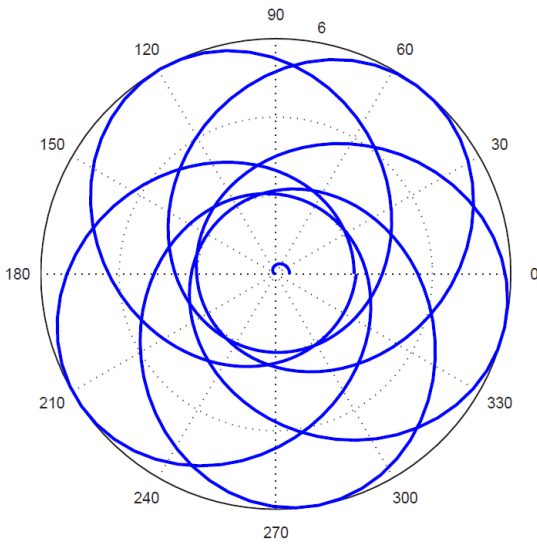
6 MOVIMIENTO GEODÉSICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD



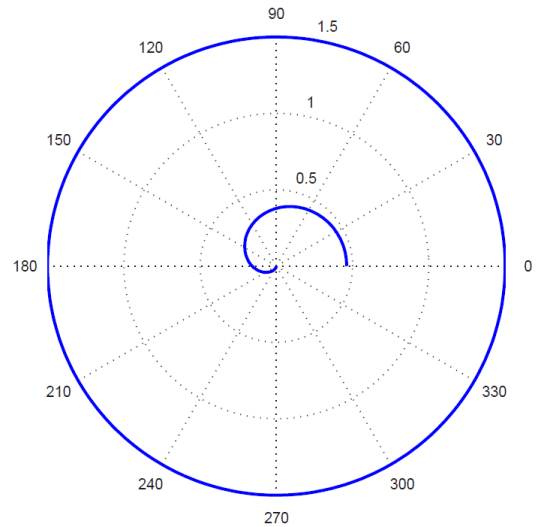
(a) Geodésicas nulas. Se muestra una trayectoria abierta, que viene desde el infinito hasta el perihelio, y tras chocar con la barrera de potencial, escapa nuevamente al infinito. También aparece una trayectoria nula que cae a la singularidad.



(b) Geodésicas temporales. Se muestra una órbita circular inestable y otra órbita que describe varias espirales antes de caer a la singularidad.



(c) Geodésica temporal. Se trata de una trayectoria cerrada y acotada, que se desarrolla entre el afelio y el perihelio.



(d) Geodésica temporal. En este caso se muestran una órbita circular estable y otra órbita que describe una espiral y cae a la singularidad.

Figura 5: Se muestran ejemplos de trayectorias geodésicas para la métrica de Schwarzschild. Las imágenes han sido obtenidas de [12].

## 7. Agujero negro de Kerr

Tras haber trabajado con Schwarzschild, el agujero negro más sencillo, ya estamos familiarizados con muchos conceptos que nos permitirán abordar la solución de Kerr. Como veremos en los próximos apartados, esta solución es mucho más compleja. En primer lugar, la métrica tendrá una expresión menos manejable, lo cual se traducirá en una mayor complejidad en los cálculos. Por otro lado, la estructura causal será mucho más rica e interesante, conformada no solo por uno sino por dos horizontes de eventos, los cuales no coincidirán en general con las superficies de corrimiento infinito al rojo. En cuanto al movimiento geodésico, veremos que las órbitas posibles son más variadas, ya que en general no estarán contenidas en el plano ecuatorial.

Por último, y para finalizar este apartado, deduciremos la métrica de Kerr usando el algoritmo de Newmann-Janis.

### 7.1. Generalidades de la métrica de Kerr

Al igual que ocurre con la solución de Schwarzschild, existen diversas coordenadas en las que se puede expresar la métrica de Kerr. Las más cómodas para investigar las propiedades fundamentales de este espacio-tiempo son las coordenadas de Boyer-Lindquist, en las que la métrica toma la forma

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt^2 + \frac{4Mar \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\varphi - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2} dr^2 \\
 & - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Al igual que ocurría en la métrica de Schwarzschild, Kerr es Ricci-plana, es decir, también es una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío  $R_{\mu\nu} = 0$ .

Lo primero que nos damos cuenta es que la métrica tiene una expresión bastante más complicada que Schwarzschild. Ahora aparece el término  $dt d\varphi$  fuera de la diagonal, de tal forma que todos los cálculos con la métrica se complican mucho más. Por otro lado, los coeficientes métricos no dependen de la coordenada  $t$  ni de la coordenada  $\varphi$ , con lo cual automáticamente la métrica es invariante bajo traslaciones  $t \mapsto t + \Delta t$  y bajo rotaciones  $SO(2)$   $\varphi \mapsto \varphi + \Delta\varphi$ . Esto quiere decir que la métrica es **estacionaria** y además presenta **simetría axial**. Aquí ya vemos una primera gran diferencia con Schwarzschild que, aunque estática, era una solución esféricamente simétrica. Pero ¿por qué pierde la simetría esférica?

Si seguimos indagando en la métrica, vemos que depende de dos parámetros,  $M$  y  $a$ , ambos con dimensión de longitud. Al igual que en Schwarzschild,  $M$  es la masa geométrica  $M = mG_N$ . En cuanto a la constante  $a$ , de momento no sabemos que significado tiene, pero es fácil ver que haciendo  $a = 0$  se recupera la métrica de Schwarzschild.

Indagando más en la métrica para descifrar el significado del parámetro  $a$ , podemos, por ejemplo, estudiar las simetrías que presenta la métrica mediante inversiones temporales o del ángulo azimutal. Vemos que la métrica no es invariante bajo la transformación  $t \mapsto -t$ , con lo cual se **pierde la estaticidad**. Tampoco es invariante bajo la inversión  $\varphi \mapsto -\varphi$ , sin embargo, sí encontramos una simetría si hacemos las inversiones

$$t \mapsto -t \quad \varphi \mapsto -\varphi \tag{44}$$

simultáneamente. Esto nos sugiere que la métrica de Kerr surge de un **cuerpo en rotación**, ya que una dirección de rotación positiva avanzando en el tiempo es equivalente a una dirección de rotación negativa

## 7 AGUJERO NEGRO DE KERR

aplicando una inversión temporal. Este es el motivo por el que la métrica pierde la simetría esférica y pasamos a tener solamente simetría axial. Para entender esto mejor, podemos pensar en nuestro propio planeta. Como bien sabemos, la Tierra es una esfera achatada por los polos, de manera más técnica, un geoide oblato, es decir, un cuerpo con simetría axial. La causa de la pérdida de la simetría esférica no es otra que la fuerza centrífuga, que como bien sabemos, es una fuerza que actúa perpendicularmente al eje de rotación de la Tierra.

Por otro lado, la métrica también es invariante bajo la inversión simultánea

$$a \mapsto -a \quad \varphi \mapsto -\varphi. \quad (45)$$

Esta observación es de vital importancia, ya que nos muestra que la constante  $a$  está directamente relacionada con la variable  $\varphi$ , es decir, con la rotación. Además, si hacemos  $a = 0$ , es decir, si quitamos la rotación en Kerr, obtenemos la métrica de Schwarzschild, como se mencionó anteriormente. En resumidas cuentas, tenemos que la métrica de Kerr se puede interpretar como un agujero negro de Schwarzschild al que le hemos añadido rotación en uno de sus ejes, resultando en una métrica notablemente más complicada. Esto hace que se pierda la simetría esférica, pasando a tener únicamente simetría axial en el eje en que se aplica la rotación. Toda esta información queda codificada en el parámetro  $a$ , que se relaciona directamente con el momento angular de la solución. Se puede demostrar que el parámetro  $a$  y el momento angular del agujero negro  $J$  se relacionan según

$$a = \frac{J}{m}. \quad (46)$$

En función de la relación entre los parámetros  $a$  y  $M$ , podemos distinguir tres casos

- ✳ Caso subextremal si  $a < M$ ,
- ✳ Caso sobreextremal si  $a > M$  y
- ✳ Caso extremal si  $a = M$ .

En apartados posteriores se detallarán brevemente las características particulares de cada caso.

Por otro lado, podemos ver fácilmente que la solución de Kerr es **asintóticamente plana** al igual que lo era Schwarzschild. Haciendo  $r \rightarrow \infty$  en la métrica, llegamos a Minkowski en coordenadas esféricas

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (47)$$

Esto quiere decir que si nos alejamos lo suficiente del agujero negro de Kerr, recuperamos el espaciotiempo plano. Esto resulta intuitivo: lejos del agujero negro no notaríamos sus efectos.

Podemos seguir profundizando en la solución de Kerr. Por ejemplo, haciendo  $M = 0$ , obtenemos la métrica

$$ds^2 = dt^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (48)$$

que, aunque no resulta para nada evidente, es nuevamente el espaciotiempo de Minkowski en *coordenadas esferoidales oblatas*, las cuales se relacionan con las coordenadas cartesianas según

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta. \quad (49)$$

Como bien sabemos, Minkowski es la solución más sencilla de las ecuaciones de Einstein. Este resultado que acabamos de obtener no resulta extraño, ya que si eliminamos la masa, a priori se esperaríamos un espaciotiempo plano.

## 7 AGUJERO NEGRO DE KERR

Cabe mencionar que, a la vista de las ecuaciones (49) resulta evidente que  $r$  no es la coordenada habitual de esféricas. Si denotamos con  $R$  a la coordenada de esféricas, entonces sabemos que se relaciona con las coordenadas cartesianas según

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (50)$$

con lo cual de (49) se deduce que

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta. \quad (51)$$

Es fácil darse cuenta de que para  $r \gg a$  ambas coordenadas coinciden.

Como hemos visto anteriormente, la métrica de Kerr es invariante bajo traslaciones temporales y bajo rotaciones  $SO(2)$ , es decir, presenta **dos simetrías**. Del teorema de Noether sabemos que las simetrías de los sistemas son de suma importancia, ya que a partir de ellas podemos calcular las cantidades conservadas.

Como los coeficientes métricos no dependen de las coordenadas  $t$  y  $\varphi$  podemos definir los vectores de Killing asociados a estas simetrías como

$$\begin{aligned} k^\mu &= (1, 0, 0, 0) = \delta_t^\mu \\ l^\mu &= (0, 0, 0, 1) = \delta_\varphi^\mu. \end{aligned} \quad (52)$$

En Kerr no encontramos más simetrías continuas ya que la solución es axialmente simétrica y no esféricamente simétrica. Las cantidades conservadas asociadas a estos vectores de Killing se calculan fácilmente según  $K^\mu \dot{x}_\mu$ . Particularizando para nuestros vectores de Killing obtenemos

$$\begin{aligned} k^\mu \dot{x}_\mu &= k^\nu g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) \dot{t} - \frac{2aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{\varphi} = E \\ l^\mu \dot{x}_\mu &= l^\nu g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \\ &= \left(\frac{-2aMr \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \dot{t} - \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \dot{\varphi} = -L_z, \end{aligned} \quad (53)$$

donde  $E$  es la energía por unidad de masa medida en el infinito y  $L_z$  el momento angular por unidad de masa alrededor del eje de rotación  $z$ . Estas cantidades conservadas nos serán de gran utilidad en apartados posteriores.

## 7.2. Estructura causal del agujero negro de Kerr

Tras haber estudiado algunas generalidades de la métrica Kerr y ubicar su origen en un cuerpo en rotación, estamos en disposición de estudiar su estructura causal.

### 7.2.1. Singularidades

En primer lugar y como viene siendo costumbre, analizaremos si existen puntos singulares en la métrica. Atendiendo a su forma en coordenadas de Boyer-Lindquist (43) vemos que hay varios puntos singulares. Para mayor claridad, podemos analizar las componentes de la métrica inversa

$$g^{tt} = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta} \quad g^{t\varphi} = \frac{2Mar}{\Sigma \Delta} \quad g^{\varphi\varphi} = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} \quad (54)$$

$$g^{rr} = -\frac{\Delta}{\Sigma} \quad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{\Sigma},$$

## 7 AGUJERO NEGRO DE KERR

donde  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  y  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ . Vemos que la métrica tiene singularidades en  $\Delta = 0$  y en  $\Sigma = 0$ , ya que se anulan los denominadores.

Puesto que la métrica es Ricci-plana, el primer invariante de curvatura no trivial que podemos calcular es el invariante de Kretschmann

$$R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{48M^2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6} [(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 6r^2 a^2 \cos^2 \theta], \quad (55)$$

que diverge únicamente para

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Sigma = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} r = 0 & \text{y} \\ \theta = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (56)$$

Con lo cual  $r = 0 \wedge \theta = \frac{\pi}{2}$  es la única **singularidad física**. Se puede demostrar que  $\Delta = 0$  es una **singularidad de coordenadas**, aunque esta demostración no se estudiará ya que escapa a los propósitos de este trabajo<sup>2</sup>. Podemos reescribir la singularidad física atendiendo a (49) como

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{y} \quad z = 0, \quad (57)$$

donde se ha considerado  $\theta = \pi/2$ . En esta singularidad ya vemos una gran diferencia con Schwarzschild, y es que esta no se restringe a un solo punto, sino que es un anillo de radio  $a$  contenido en el plano ecuatorial  $XY$ .

### 7.2.2. Horizontes y la ergosfera

En el agujero negro de Kerr nos encontramos con una diferencia bastante grande con respecto a Schwarzschild, y es que en la métrica  $g_{tt}$  y  $g_{rr}$  ya no son uno el inverso del otro, de tal forma que los horizontes de eventos ya no coincidirán con las superficies de redshift infinito como ocurría en Schwarzschild.

Para encontrar los **horizontes de eventos** de esta métrica tenemos que buscar superficies nulas, ya que como bien sabemos, los horizontes de eventos son superficies de no retorno. El lector se puede convencer rápidamente de esto recordando el cono de luz en Minkowski. Vimos que para poder salir del cono de luz, se debería superar  $c$ , con lo cual concluimos que las superficies nulas solo se pueden cruzar en un sentido.

Nos interesa calcular las superficies  $r$  constante cuyo vector normal se vuelve nulo (caracterización para las hipersuperficies nulas). Este vector normal a la hipersuperficie debe ser proporcional a  $\partial_\mu r$ , de tal forma que podemos caracterizar las hipersuperficies nulas como

$$g^{\mu\nu}(\partial_\mu r)(\partial_\nu r) = g^{rr} = 0. \quad (58)$$

Usando (54) se puede reescribir esta condición como una ecuación de segundo grado

$$g^{rr} = \frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} = 0 \quad (59)$$

cuyas soluciones son

$$r = R_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (60)$$

Vemos que podemos tener diferentes soluciones según el valor del radicando.

<sup>2</sup>Si se expresa la métrica en unas coordenadas llamadas coordenadas de Kerr-Schild desaparece esta singularidad, quedando demostrado que efectivamente se trata de una singularidad de coordenadas. En apartados posteriores se deducirá la métrica en estas coordenadas.

## 7 AGUJERO NEGRO DE KERR

- ✧ Si  $a < M$  es el caso subextremal, y se obtienen dos soluciones distintas, que representan dos horizontes de eventos diferentes.
- ✧ Si  $a > M$ , se trata del caso sobreextremal. En esta ocasión no existen soluciones reales para  $R_{\pm}$ , de modo que no habría horizonte de eventos y la singularidad estaría desnuda. Este tipo de singularidad resulta muy problemática, ya que cualquier punto del espaciotiempo podría recibir influencia causal de la singularidad. Para solventar este problema, Roger Penrose propuso en 1969 la **conjetura de la censura cósmica**, que establece que es físicamente imposible la existencia de singularidades desnudas partiendo desde unas condiciones iniciales genéricas.
- ✧ Si  $a = M$  es el caso extremal. Ahora existe una solución doble  $r = M$ , de tal forma que los horizontes de eventos se superpondrían.

En el resto del trabajo consideraremos siempre que estamos el caso subextremal, a no ser que se indique lo contrario. Cabe destacar que en los casos  $a \leq M$  podemos definir un límite superior para el momento angular del agujero negro. Como vimos anteriormente  $a = J/M$ , con lo cual  $J \leq M^2$ .

La existencia de dos horizontes de eventos provoca que el espaciotiempo quede dividido en tres regiones distintas. Vemos que la coordenada  $r$  es espacial en  $0 < r < R_-$  y  $r > R_+$ , pero temporal en  $R_- < r < R_+$  ya que en esta última región  $g_{rr}$  cambia de signo. Esto implica que los conos de luz cambian de orientación, haciendo que las coordenadas  $r$  y  $t$  intercambien sus papeles. Esta peculiaridad de la métrica de Kerr presenta una consecuencia sorprendente. Que la coordenada  $r$  pase a ser temporal indica que un observador en la región  $R_- < r < R_+$  estaría avocado a seguir adentrándose en el agujero negro hasta cruzar  $r = R_-$ , ya que el horizonte de eventos interior ya no sería una zona delante de él sino un evento en su futuro. Por otro lado, tras cruzar  $r = R_-$  la coordenada radial vuelve a ser espacial, de tal forma que la singularidad ya no es un punto en el futuro del observador, y por tanto sería evitable.

A continuación podemos buscar las superficies de corrimiento al rojo infinito. Del efecto Doppler gravitacional se deduce que el redshift infinito ocurre cuando el denominador de (13) se anula, es decir, cuando  $g_{tt}$  se hace cero

$$g_{tt} = 0 \iff r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (61)$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado para  $r$  obtenemos

$$r = S_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (62)$$

Como vemos estas superficies ya no coinciden con los horizontes de eventos salvo en el plano ecuatorial  $\theta = 0, \pi$ . Además, esta dependencia con el ángulo  $\theta$  hace que las superficies  $S_{\pm}$  no estén a una distancia  $r$  constante.

En general tenemos que

$$0 \leq S_- \leq R_- \leq R_+ \leq S_+. \quad (63)$$

La primera igualdad solo se cumple en el ecuador, la segunda y la última en los polos y la tercera en el caso extremal  $a = M$ . Por otro lado, vemos que la coordenada  $t$  es temporal en  $0 < r < S_-$  y  $S_+ < r < \infty$ , pero espacial en  $S_- < r < S_+$ . En particular, en la región  $R_+ < r < S_+$  ambas coordenadas  $t$  y  $r$  son espaciales. A esta zona se le denomina ergoregión, y a la superficie  $S_+$  **ergosfera** que, como veremos en apartados posteriores, es también una superficie de límite estático, es decir, una superficie a partir de la cual no puede existir un observador estático.

Cabe destacar de la ergosfera que, si se llega a atravesar, sí es posible volver a cruzarla en el sentido contrario, ya que no es una superficie nula, sino una superficie temporal y por tanto se puede atravesar en

## 7 AGUJERO NEGRO DE KERR

ambos sentidos. En la figura (6) se representa de forma esquemática todas las hipersuperficies del agujero negro de Kerr.

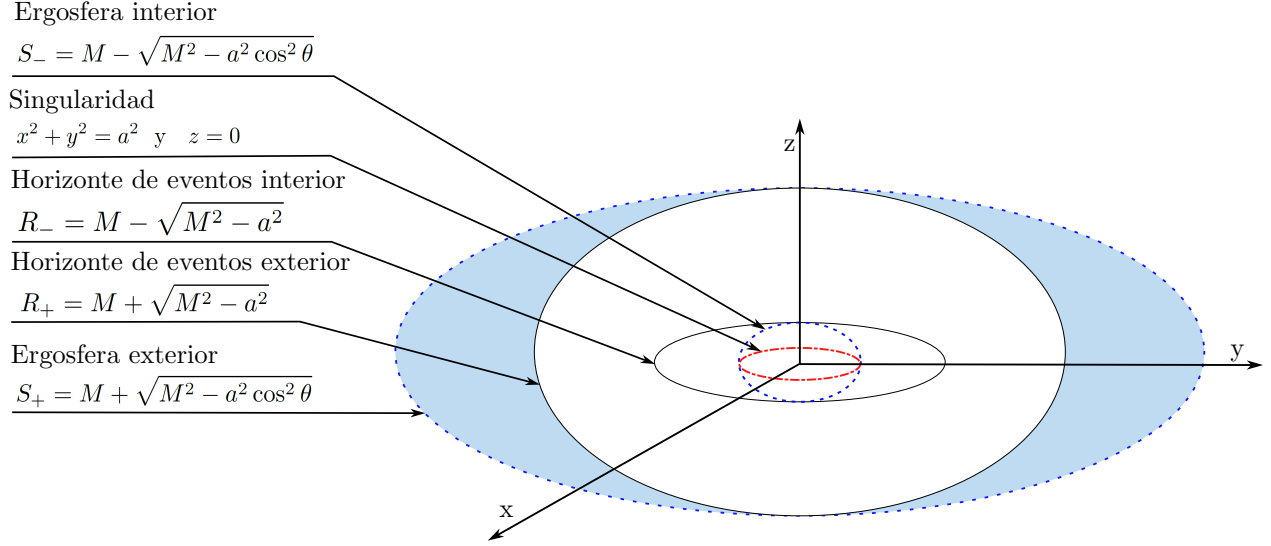


Figura 6: Se representa la estructura causal del agujero negro de Kerr. La solución presenta una singularidad en forma de anillo, dos horizontes de eventos, que viene dados por la condición  $g^{rr} = 0$ . También hay dos ergosferas, superficies de redshift infinito que vienen dadas por la condición  $g_{tt} = 0$ . La zona sombreada es la ergoregión, donde ambas coordenadas  $t$  y  $r$  son de carácter espacial y un observador no puede quedarse en reposo, aunque aún podría escaparse hacia el infinito.

### 7.3. Arrastre de sistemas inerciales. Frame dragging

Tras haber estudiado la estructura causal del agujero negro de Kerr, podemos vernos tentados a pensar cómo sería estar cerca de un agujero negro, qué fenómenos físicos tendrían lugar y que experimentaríamos como observadores. Es por ello que en esta nueva sección definiremos tres tipos de observadores que nos servirán para explicar qué fenómenos tendrían lugar en cada región del espaciotiempo de Kerr.

Como veremos a continuación, el agujero negro de Kerr induce un arrastre sobre cualquier observador que se aproxime desde el infinito, es decir, que la rotación de la métrica tenderá a arrastrar a un observador consigo. Y esto no solo es una propiedad de Kerr, sino de cualquier métrica con momento angular no trivial. Cuando estudiamos Schwarzschild vimos que no existe este efecto, puesto que la métrica no presenta el término cruzado  $g_{t\varphi}$ , que es el que se relaciona con el momento angular del agujero negro.

#### 7.3.1. Observadores estacionarios

Un observador estacionario es aquel que se mueve alrededor del centro de la solución con  $r$  y  $\theta$  constantes a una velocidad angular  $\Omega$  uniforme, y que percibirá que la métrica del espacio que le rodea no cambia. Se pueden definir la velocidad angular y el momento angular del observador como

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \frac{u^\varphi}{u^t} \quad (64)$$

$$L = -g_{\mu\nu}p^\mu = -m_0(g_{t\varphi}\dot{t} + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}),$$

## 7 AGUJERO NEGRO DE KERR

donde el punto representa la derivada con respecto al tiempo propio de un observador asintótico y  $u$  es la cuadrivelocidad del observador estacionario. Por otro lado,  $L$  es el momento angular, que recordemos se trata de una cantidad conservada en Kerr. Como se dedujo en (53), el momento angular se puede calcular como  $L = -l^\mu m_0 \dot{x}_\mu = -l^\nu g_{\mu\nu} p^\mu$ , donde  $l^\nu = \delta^\nu_\varphi$  es el vector de Killing asociado a la simetría de rotación. En cuanto a la tetravelocidad de este observador, podemos definirla como

$$u^\mu = \gamma(t^\mu + \Omega l^\mu), \quad (65)$$

donde  $t^\mu + \Omega l^\mu$  es un vector de Killing, ya que una combinación lineal de vectores de Killing es otro vector de Killing. El parámetro  $\gamma$  es simplemente una constante de normalización. Nótese que la velocidad angular de rotación del observador  $\Omega$  puede tomar cualquier valor, tanto positivo como negativo, siempre y cuando  $u^\mu$  sea un vector temporal. En apartados posteriores veremos que aparecen condiciones e imposiciones para esta velocidad angular, de tal forma que el observador ya no podrá rotar como quiera.

### 7.3.2. Observadores ZAMOS's: Arrastre

Una clase de observador estacionario especial es aquel con  $L = 0$ . De ahí su nombre de ZAMOS (zero angula momentum observer). De (64) se deduce que su velocidad angular viene descrita por

$$\Omega = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \omega. \quad (66)$$

Este resultado llama nuestra atención, porque aunque el observador no tiene un momento angular propio  $L = 0$ , resulta que sí tiene una velocidad angular de rotación  $\omega$ , siempre y cuando el término  $g_{t\varphi}$  no se anule. Es decir, la métrica de Kerr no solo curva el espaciotiempo a su alrededor, sino que además describe cómo el espaciotiempo adquiere una rotación intrínseca. Por otro lado, esta característica surge a raíz del término no diagonal  $g_{t\varphi}$ , por lo cual la capacidad de una métrica para inducir un arrastre sobre un ZAMO's no es exclusiva de Kerr, sino que la encontraríamos en cualquier métrica que presente un momento angular no trivial.

Podemos expresar esta velocidad angular para el caso particular de Kerr. Sustituyendo los coeficientes métricos

$$\begin{aligned} g_{t\varphi} &= -\frac{2Mra}{\Sigma} \sin^2 \theta \\ g_{\varphi\varphi} &= \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta], \end{aligned} \quad (67)$$

obtenemos que la velocidad angular del observador es

$$\omega = \frac{2Mar}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}. \quad (68)$$

Como vemos, esta expresión depende de la variable  $\theta$ . Resulta interesante particularizarla para el plano ecuatorial ( $\theta = \pi/2$ ), obteniéndose

$$\omega = \frac{2Mar}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} = \frac{2Ma}{r^3 + a^2 r + 2Ma^2}. \quad (69)$$

De esta última igualdad se deduce que lejos del agujero negro  $r \rightarrow \infty$  el arrastre desaparece, lo cual es lógico puesto que la solución de Kerr es asintóticamente plana, y lejos del agujero negro, no debíamos notar sus efectos de arrastre de ninguna forma.



### 7.3.3. Observadores estáticos

Los observadores estáticos son una clase de observadores estacionarios especiales con  $\Omega = 0$ , de modo que están en reposo con respecto a un observador asintótico inercial lejos del agujero negro. Debido al arrastre de sistemas inerciales, un observador estático tiene que moverse localmente con cierta velocidad angular en sentido contrario a la rotación de la métrica para que su velocidad angular sea nula con respecto a dicho observador asintótico. La tetravelocidad de este observador podemos expresarla como

$$u^\mu = \gamma t^\mu, \quad (70)$$

donde  $\gamma = (-g_{\mu\nu}t^\mu t^\nu)^{-1/2}$  es un factor de normalización.

A la vista de cómo se define la tetravelocidad, nos damos cuenta de que los observadores estáticos no pueden existir en todo el espaciotiempo, sino solamente en aquellas regiones donde  $u^\mu$  represente un vector temporal. Podemos ver que la tetravelocidad se hace nula cuando  $\gamma^{-2} = -g_{tt} = 0$ , es decir

$$g_{tt} = 0 \iff r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (71)$$

Resolviendo para  $r$ , obtenemos

$$r_{LE}(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (72)$$

Este radio define lo que se conoce como límite estático, una distancia que delimita la región  $r \leq r_{LE}(\theta)$ , en la cual el observador no puede permanecer estático. Si comparamos con el horizonte de eventos (60), vemos que no coinciden en todas partes, solamente en  $\theta = 0, \pi$ . Por otro lado, esta expresión es la misma que la que se derivó para las superficies de corrimiento al rojo infinito (62)  $S_\pm$ , o sea que con este desarrollo hemos sido capaces de deducir que las superficies de redshift infinito son también superficies de límite estático.

Cuando estudiábamos Schwarzschild solo teníamos una superficie notable, un único horizonte de eventos, que era además una superficie de corrimiento infinito al rojo. Ahora en Kerr, tenemos que estas superficies se desdobl原因, lo cual nos brinda una estructura causal más interesante, y que como veremos en apartados posteriores, da lugar a fenómenos muy interesantes.

A continuación nos proponemos demostrar que los horizontes de eventos también tienen una característica a mayores, ya que resultan ser superficies de límite estacionario.

Consideramos ahora un observador estacionario, cuya velocidad viene descrita por (65). La constante de normalización  $\gamma$  se calcula como

$$\begin{aligned} \gamma^{-2} &= -g_{\mu\nu}(t^\mu + \Omega l^\nu)(t^\mu + \Omega l^\nu) \\ &= -g_{tt} - 2\Omega g_{t\varphi} - \Omega^2 g_{\varphi\varphi} \\ &= -g_{\varphi\varphi} \left( \Omega^2 - 2\omega\Omega + \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}} \right), \end{aligned} \quad (73)$$

donde, si recordamos,  $\omega = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}$ .

Los observadores estacionarios tampoco pueden existir en cualquier región del espaciotiempo: solamente en aquellas donde su tetravelocidad  $t^\mu + \Omega l^\mu$  sea un vector temporal. De (65) se deduce que  $u^\mu$  dejará de ser temporal cuando  $\gamma^{-2} < 0$ . Desarrollando (73) es fácil ver que la condición  $\gamma^{-2} > 0$  viene dada por

$$\Omega^2 - 2\omega\Omega + \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}} < 0. \quad (74)$$

## 7 AGUJERO NEGRO DE KERR

Resolviendo esta inecuación llegamos a la condición para la velocidad angular del observador estacionario

$$\Omega_- < \Omega < \Omega_+ \quad \text{siendo} \quad \Omega_{\pm} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}}, \quad (75)$$

donde el signo positivo y negativo se corresponden con la velocidad máxima en corrotación y en contrarrotación respectivamente. Particularizando para Kerr obtenemos

$$\Omega_{\pm} = \omega \pm \frac{\Delta^{1/2}\Sigma}{[(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2\theta] \sin\theta}, \quad (76)$$

y en concreto en el plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$  obtenemos

$$\Omega_{\pm} = \frac{2Ma}{r^3 + a^2r + 2Ma^2} \pm \sqrt{\frac{4M^2a^2}{(r^3 + a^2r + 2Ma^2)^2} + \frac{r - 2M}{r^3 + a^2r + 2Ma^2}}. \quad (77)$$

En el límite donde  $r \rightarrow \infty$  la velocidad lineal  $v_{\pm} = r\Omega_{\pm}$  tiende a  $\pm 1$ , como se deduce fácilmente de (77). Esto tiene una interpretación significativa: los observadores que orbitan lejos del agujero negro pueden moverse a cualquier velocidad, siempre y cuando esta sea menor que la de la luz, y podrán hacerlo tanto en corrotación como en contrarrotación con el agujero negro. Lejos de Kerr, no existe ninguna condición para su velocidad angular, lo cual era de esperar, ya que lejos del agujero negro se recupera el espaciotiempo plano de Minkowski.

Más cerca del agujero negro, el intervalo de velocidades permitidas es cada vez más pequeño. La velocidad angular máxima  $\Omega_+$  va disminuyendo y  $\Omega_-$  va aumentando, haciéndose cada vez menos negativa. Llega un punto en el que  $\Omega_-$  se hace cero. Esto quiere decir que es imposible que el observador se mueva en contrarrotación más allá de este punto, ya que las velocidades  $\Omega$  negativas ya no son factibles. Lo máximo a lo que puede aspirar el observador es a rotar en corrotación con el agujero negro  $\Omega > 0$ , o a mantenerse estático en dicho punto en que  $\Omega_-$  es cero. Para ello tendría que moverse localmente a la velocidad de la luz y en contrarrotación con el agujero negro, consiguiendo así mantenerse estático<sup>3</sup>  $\Omega = 0$ . Por otro lado, para observadores situados en órbitas de menor radio, necesariamente su velocidad angular sería  $\Omega > 0$ . Este punto en el que  $\Omega_- = 0$  se puede deducir fácilmente. Sustituyendo (72) en (76), se comprueba que efectivamente  $\Omega_-$  cambia de signo, y lo hace en  $r = r_{LE}$ .

En resumen, se deduce que un observador a una distancia radial mayor que  $r = r_{LE}(\theta)$  puede moverse en corrotación o en contrarrotación con el agujero negro con una velocidad angular que cumpla  $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$ , y en particular en la superficie de límite estático  $r = r_{LE}(\theta)$ , ocurre que  $\Omega_- = 0 < \Omega < \Omega_+$ . Una vez cruzada esta superficie, la ergosfera, cualquier observador tiene que moverse necesariamente en corrotación con el agujero negro.

Por otro lado, dentro de la ergorregión  $R_+ < r < S_+$ , las velocidades  $\Omega_+$  y  $\Omega_-$ , ambas positivas, se siguen acercando. Llega un punto en el que  $\Omega_- = \Omega_+$ , lo cual implica que  $\Omega = \omega$ , según se deduce de (75). A partir de entonces el observador estacionario está obligado a moverse orbitando el agujero negro con una velocidad angular  $\omega$ . Para calcular a qué distancia tiene lugar que  $\Omega_- = \Omega_+$ , nos fijamos en la ecuación (76). Se deduce fácilmente que esto ocurrirá cuando  $\Delta = 0 \iff r^2 - 2Mr + a^2 = 0$ . Resolviendo para  $r$  obtenemos

$$R_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (78)$$

<sup>3</sup>No hay que confundir el hecho de que  $\Omega_-$  se haga cero en este punto con la posibilidad de que el observador gire en contrarrotación a la velocidad de la luz. A priori parece una contradicción, pero hay que prestar especial atención en la palabra *localmente*. Una cosa es la velocidad que deba adquirir el observador de forma local, y otra la velocidad  $\Omega = 0$  que percibiría un observador asintótico en el infinito.

## 7 AGUJERO NEGRO DE KERR

es decir, que en el horizonte de eventos exterior  $r = R_+$ , el observador necesariamente tiene que moverse en corrotación con una velocidad angular

$$\Omega_H = \omega(R_+) = \frac{2MaR_+}{(R_+^2 + a^2)^2}. \quad (79)$$

Se puede demostrar que todo el horizonte tiene esta misma velocidad angular, independientemente del valor de  $\theta$ , por lo cual  $\Omega_H$  se interpreta como la velocidad angular del agujero negro.

Si seguimos adentrándonos en el agujero negro, para valores más bajos de  $r$  ya no existen valores reales de  $\Omega_{\pm}$ , de modo que no pueden existir observadores estacionarios. Consecuentemente, dentro del horizonte exterior  $r = R_+$  cualquier observador debe moverse hacia la singularidad.

### 7.4. Viaje al centro de un agujero negro

A lo largo de estos apartados hemos visto que la estructura causal de Kerr es muy variada. A continuación, queremos estudiar cómo sería un viaje al centro de un agujero negro. Para ello, en vez de imaginar un observador que se acerca radialmente, resulta más sencillo pensar en una familia de observadores situados a distintas distancias radiales, como se muestra en la figura (7).

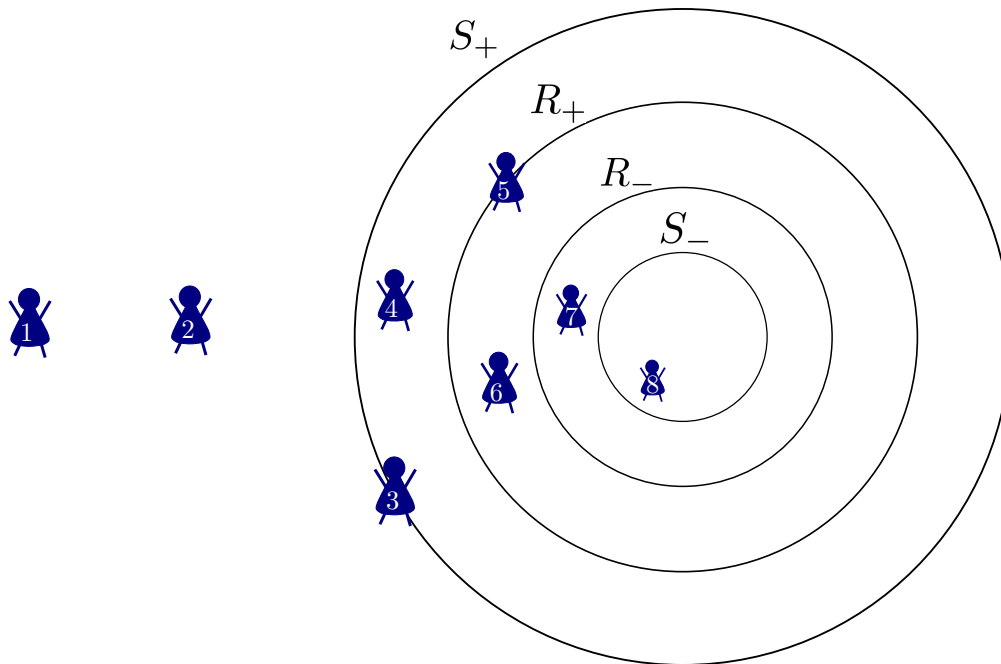


Figura 7: Se representan de forma esquemática las distintas regiones determinadas por los horizontes de eventos y las ergosferas. Aparecen también ocho observadores situados a distintas distancias radiales.

El observador 1 se encuentra en el infinito, de tal forma que la métrica circundante que aplica es Minkowski. Este observador, podría viajar a sus anchas sin notar ningún efecto de arrastre. Podría moverse tanto en corrotación como en contrarrotación, aunque siempre a menos de  $c$ .

Por otro lado, para un observador más cercano, como el situado en 2, ya no sería posible cualquier velocidad angular. El intervalo de las  $\Omega$  posibles se va haciendo más pequeño cuanto más cerca del agujero negro esté el observador. De esta forma, el sujeto 2 comenzaría a notar el arrastre inducido por la métrica de Kerr.

Para radios menores, nos encontramos con el observador 3, situado en la ergosfera. Este sujeto solo podría ser estático si girase a la velocidad de  $a$  luz y en contrarrotación, cosa que solo puede hacer un fotón realmente. A raíz de esto, en la ergosfera, que también es la superficie de límite estático, necesariamente seríamos arrastrados por la rotación del agujero negro.

Si seguimos adentrándonos, nos encontramos con el observador 4 situado en la ergoregión, que estaría girando en el mismo sentido que el agujero negro, y delante de él tendría el horizonte de eventos exterior  $R_+$ .

Para radios menores, nos encontramos con el observador 5, que no solo se tiene que mover en corrotación con el agujero negro sino que su velocidad angular debe ser exactamente  $\Omega_H$ . Este sujeto no puede comunicarse con los observadores anteriores, de 1 a 4, puesto que se encuentran separados de él por una superficie nula  $R_+$ . Esta superficie es un horizonte de eventos, una membrana unidireccional tal que la información solo puede pasar en un sentido: de fuera hacia adentro. Es por ello que el observador 5 no puede mandar señales a 1, 2, 3 ni 4, pero estos últimos sí podrían mandar señales a 5. Ese sentido sí está permitido.

Para valores de  $r$  menores, nos encontramos con el observador 6. En esta región no existen valores reales para  $\Omega$ , por lo que este sujeto ya no puede ser un observador estacionario, y deberá moverse hacia el centro del agujero negro. Otra forma de entender esto es dándose cuenta de que la coordenada  $r$  es temporal en la región  $R_- < r < R_+$ , con lo cual los conos de luz están inclinados, y la superficie  $R_-$  realmente ya no estaría delante de él, sino en su futuro. De esta forma, el observador 6 estará avocado a atravesar el horizonte interior en  $r = R_-$ .

Para el observador 7 todo se vuelve más conjetural, a pesar de que la solución es válida matemáticamente hasta  $r = 0$ . Esto es así porque la superficie  $R_-$  es una superficie de corrimiento al azul infinito, lo cual es sinónimo de que la solución no es fiable a partir de aquí. En esta región la coordenada  $r$  vuelve a ser espacial, de tal forma que el observador 7 no estaría avocado a seguir adentrándose en el agujero negro y podría continuar rotando eternamente sin caer a la singularidad.

En cuanto al observador 8, estaría en una región en donde la coordenada  $r$  es temporal nuevamente, por lo cual no le quedaría más opción que avanzar hacia la inexorable singularidad anular y desaparecer del espacio-tiempo. Cabe mencionar que en el plano ecuatorial,  $S_-$  coincide con la singularidad, de tal forma que no tendría cabida el observador 8.

## 7.5. Deducción de la métrica

Tras haber estudiado la métrica de Kerr en profundidad, ya estamos familiarizados con su expresión, así como con los parámetros que aparecen en ella, como pueden ser la constante  $a$  o la constante  $M$ . También hemos estudiado algunas características generales que se deducen por simple inspección del elemento de arco. Hasta ahora hemos asumido la métrica de Kerr, y eso nos ha llevado bastante lejos. En este apartado nos disponemos a obtener la métrica de Kerr, para una mayor completitud del estudio de esta métrica.

### 7.5.1. Vielbein y tétrada nula

Deducir la métrica de Kerr resulta largo, laborioso y muy engorroso, sin embargo, existe un método conocido con el nombre de **algoritmo de Newmann-Janis**, con el que seremos capaces de deducir la métrica más fácilmente. Para un desarrollo más extenso se puede consultar [3] y [9], o también [11], [14], [13].

De forma resumida, el algoritmo mencionado deduce la métrica de Kerr partiendo de la de Schwarzschild, que como ya vimos, se condensa en una expresión muy sencilla. El primer paso será expresar la métrica de Schwarzschild como suma de productos de cuatro vectores complejos. La dificultad reside en ver cómo podemos descomponer la métrica de esta manera, y cuáles serán los cuatro vectores adecuados que nos proporcionen la expresión de Schwarzschild. El siguiente paso consistirá en aplicar un cambio de variable complejo, dejando que la coordenada  $r$  tome valores complejos. Finalmente, con esta nueva tétrada resultante del cambio de variable complejo, seremos capaces de obtener la métrica de Kerr. Comenzaremos por hablar de estos cuatro vectores que resultan clave para la aplicación del algoritmo.

Dada una variedad  $\mathcal{M}$  podemos considerar el plano tangente en un punto  $p$ , que denotaremos como  $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ . Este espacio tangente es un espacio vectorial en el cual podemos establecer una base curvilínea dada por los vectores  $\{|e_\mu\rangle\}$ . Los vectores de esta base son tangentes a las líneas de coordenadas. Esta base construida de esta forma se denomina *base de coordenadas*, y en general no es una base ortogonal:

$$|e_\mu\rangle \cdot |e_\nu\rangle = g_{\mu\nu}(p). \quad (80)$$

Por otro lado, en  $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$  podemos definir a mayores una base ortonormal, que denotaremos como  $\{|e_a\rangle\}$ . Esta base se conoce como *base local ortonormal*. Los vectores de esta base verifican que su producto escalar

$$|e_a\rangle \cdot |e_b\rangle = \eta_{ab}. \quad (81)$$

Ahora queremos ver cómo se relacionan ambas bases en el espacio tangente  $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ . El cambio de coordenadas y su inversa se pueden expresar como

$$|e_\mu\rangle = e^a_\mu |e_a\rangle, \quad |e_a\rangle = e^\mu_a |e_\mu\rangle, \quad (82)$$

donde los coeficientes  $e^a_\mu$  son las componentes de  $|e_\mu\rangle$  en la base  $\{|e_a\rangle\}$ . La matriz  $e^a_\mu$  se llama *Vielbein*, y  $e^\mu_a$  *Vielbein inverso*. Por otro lado, también resulta evidente que el Vielbein inverso es el inverso del Vielbein, lo cual se puede expresar de forma compacta como

$$e^a_\mu e^\mu_b = \delta^a_b \quad y \quad e^\mu_a e^a_\nu = \delta^\mu_\nu. \quad (83)$$

Los Vielbein nos permiten expresar las coordenadas de un vectores en ambas bases

$$V^a = e^a_\mu V^\mu \quad V^\mu = e^\mu_a V^a, \quad (84)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} |v\rangle &= V^\mu |e_\mu\rangle = V^\mu e^a_\mu |e_a\rangle \\ |v\rangle &= V^a |e_a\rangle, \end{aligned} \quad (85)$$

de donde se deduce fácilmente que  $V^a = e^a_\mu V^\mu$ . Podemos hacer el mismo análisis para tensores y ver como se relacionan las matrices  $g_{\mu\nu}$  y  $\eta_{ab}$

$$g_{\mu\nu}(p) = |e_\mu\rangle |e_\nu\rangle = e^a_\mu |e_a\rangle e^b_\nu |e_b\rangle = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}. \quad (86)$$

## 7 AGUJERO NEGRO DE KERR

Si ahora consideramos todo el haz tangente, la base de coordenadas cambia punto a punto, es decir,  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ , mientras que la base ortonormal es la misma para todos los puntos de la variedad, de tal forma que

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a{}_\mu(x)e^b{}_\nu(x)\eta_{ab}, \quad (87)$$

donde recordemos, se trata de un cambio local, no global, tal que el cambio lineal de base se puede definir para cada punto de la variedad. La relación inversa de (87) se puede escribir como

$$\eta_{ab} = e^\mu{}_a(x)e^\nu{}_b(x)g_{\mu\nu}. \quad (88)$$

Recalamos de esta expresión que los Vielbein no se pueden expresar como la diferencial de ninguna expresión, ya que no existen ningunas coordenadas  $y^a$  tal que

$$e^a{}_\mu = \frac{\partial y^a}{\partial x^\mu}. \quad (89)$$

Además, ahora los Vielbein son función de  $x$ , lo cual quiere decir que codifican de alguna forma la información geométrica contenida en  $g_{\mu\nu}(x)$ .

Tras haber presentado el concepto de Vielbein y la base local ortonormal

$$\{|e_a\rangle\} = \{|e_0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}, \quad (90)$$

nos proponemos definir otra nueva base local ortonormal

$$\{|\tilde{e}_a\rangle\} = \{|l\rangle, |n\rangle, |m\rangle, |\bar{m}\rangle\} \quad (91)$$

cuyos vectores sean una combinación lineal de los vectores  $\{|e_a\rangle\}$ . Por futura conveniencia, definiremos los vectores de  $\{|\tilde{e}_a\rangle\}$  como

$$\begin{aligned} |l\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_0\rangle + |e_1\rangle) \\ |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_0\rangle - |e_1\rangle) \\ |m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_2\rangle + i|e_3\rangle) \\ |\bar{m}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_2\rangle - i|e_3\rangle), \end{aligned} \quad (92)$$

los cuales se pueden expresar en componentes según

$$\begin{aligned} |l\rangle &= l^\mu |e_\mu\rangle & |e_\mu\rangle &= l_\mu |l\rangle \\ |n\rangle &= n^\mu |e_\mu\rangle & |e_\mu\rangle &= n_\mu |n\rangle \\ |m\rangle &= m^\mu |e_\mu\rangle & |e_\mu\rangle &= m_\mu |m\rangle \\ |\bar{m}\rangle &= \bar{m}^\mu |e_\mu\rangle & |e_\mu\rangle &= \bar{m}_\mu |\bar{m}\rangle, \end{aligned} \quad (93)$$

De esta forma, hemos conseguido que los vectores de esta nueva base sean nulos  $|l\rangle \cdot |l\rangle = |n\rangle \cdot |n\rangle = |m\rangle \cdot |m\rangle = |\bar{m}\rangle \cdot |\bar{m}\rangle = 0$  y cumplan las relaciones de ortonormalidad  $|l\rangle \cdot |n\rangle = 1$  y  $|m\rangle \cdot |\bar{m}\rangle = -1$ . Consecuentemente, la matriz  $\tilde{\eta}_{ij}$  ahora toma la forma

$$\tilde{\eta}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (94)$$

## 7 AGUJERO NEGRO DE KERR

y la matriz  $g_{\mu\nu}$  se puede expresar según la ecuación (87) como

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \tilde{e}^a{}_\mu \tilde{e}^b{}_\nu \tilde{\eta}_{ab} \\ &= l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu - m_\mu \bar{m}_\nu - m_\nu \bar{m}_\mu \end{aligned} \quad (95)$$

y su inversa

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - \bar{m}^\mu \tilde{m}^\nu - m^\nu \tilde{m}^\mu. \quad (96)$$

Entonces el procedimiento a seguir para deducir la métrica de Kerr será encontrar una tétrada nula  $\{|l\rangle, |n\rangle, |m\rangle, |\bar{m}\rangle\}$  tal que sustituyendo en (96) se obtenga la métrica contravariante de Kerr.

### 7.5.2. Algoritmo de Newmann-Janis

El procedimiento parte de la conocida métrica de Schwarzschild, y se utiliza la descomposición de la métrica (95). En concreto comenzaremos con Schwarzschild usando el parámetro temporal avanzado (28). Los coeficientes métricos  $g^{\mu\nu}$  contravariantes en estas coordenadas son (??).

$$g^{vr} = -1, \quad g^{rr} = \left(\frac{2M}{r} - 1\right), \quad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2}, \quad g^{\phi\phi} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (97)$$

Utilizando la descomposición de la métrica (96), es fácil ver que podemos escribir  $g^{\mu\nu}$  en términos de los vectores siguientes

$$\begin{aligned} l^\mu &= (0, 1, 0, 0)^t = \delta_1^\mu \\ n^\mu &= \left(-1, -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right), 0, 0\right)^t = -\delta_0^\mu - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\delta_1^\mu \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2r}}\left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right)^t = \frac{1}{\sqrt{2r}}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right) \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2r}}\left(0, 0, 1, \frac{-i}{\sin\theta}\right)^t = \frac{1}{\sqrt{2r}}\left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right). \end{aligned} \quad (98)$$

A continuación permitimos que la coordenada  $r$  tome valores complejos,  $r \in \mathbb{C}$ , y reescribimos los vectores de tal forma que si impusiésemos  $Im(r) = 0$ , se recuperarían los vectores originales reales

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu \\ n^\mu &= -\delta_0^\mu - \frac{1}{2}\left(1 - M(r^{-1} + \bar{r}^{-1})\right)^t \delta_1^\mu \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\bar{r}}}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right)^t \\ \tilde{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2r}}\left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right)^t. \end{aligned} \quad (99)$$

Definidos de esta manera,  $l^\mu$  y  $n^\mu$  continúan siendo reales y  $m^\mu$  y  $\tilde{m}^\mu$  conjugados complejos. Seguidamente hacemos el cambio de coordenadas complejo

$$v \mapsto v' = v + ia \cos(\theta), \quad r \mapsto r' = r + ia \cos(\theta), \quad \theta' = \theta, \quad \varphi' = \phi, \quad (100)$$

## 7 AGUJERO NEGRO DE KERR

donde debemos imponer que  $r'$  y  $v'$  sean reales, ya que las variables que obtengamos finalmente debe ser reales, puesto que hemos partido de una métrica real. De imponer esto y de las relaciones (100) se deduce que

$$\begin{cases} \bar{r} = r' + ia \cos \theta \\ \bar{v} = v' + ia \cos \theta. \end{cases} \quad (101)$$

Finalmente, para poder escribir los vectores  $\{l^\mu, n^\mu, m^\mu, \tilde{m}^\mu\}$  en las nuevas coordenadas solo tenemos que introducir (101) en (99) y aplicar la matriz de transformación

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial v'}{\partial v} & \frac{\partial v'}{\partial r} & \frac{\partial v'}{\partial \theta} & \frac{\partial v'}{\partial \phi} \\ \frac{\partial r'}{\partial v} & \frac{\partial r'}{\partial r} & \frac{\partial r'}{\partial \theta} & \frac{\partial r'}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial v} & \frac{\partial \theta'}{\partial r} & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} & \frac{\partial \theta'}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial v} & \frac{\partial \phi'}{\partial r} & \frac{\partial \phi'}{\partial \theta} & \frac{\partial \phi'}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -ia \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & -ia \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ya que recordemos, son vectores y transforman como tal. Los vectores resultantes de sustituir las nuevas coordenadas y aplicar la matriz de cambio son

$$\begin{aligned} l'^\mu &= \delta_1^\mu \\ n'^\mu &= -\delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right)^t \delta_1^\mu \\ m'^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos \theta)} \left( -ia \sin \theta (\delta_0^\mu + \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu \right)^t \\ \tilde{m}'^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia \cos \theta)} \left( ia \sin \theta (\delta_0^\mu + \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu - \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu \right)^t. \end{aligned} \quad (102)$$

Finalmente, sin más que sustituir estos vectores en la expresión de la métrica (96), obtenemos la matriz siguiente

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{-a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & -1 - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & \frac{a}{\Sigma} \\ -1 - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & \frac{2Mr}{\Sigma} - 1 - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & \frac{a}{\Sigma} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\Sigma} & 0 \\ \frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (103)$$

donde se han eliminado las primas de  $r'$  para aligerar la notación y se ha sustituido  $\Sigma = a^2 \cos^2 \theta + r^2$ . Invirtiendo esta matriz, obtenemos finalmente la métrica de Kerr



$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} & -1 & 0 & \frac{-2aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} \\ -1 & 0 & 0 & -a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ \frac{-2aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} & -a \sin^2 \theta & 0 & -\sin^2 \theta (r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta \frac{2Mr}{\Sigma}) \end{pmatrix} \quad (104)$$

la cual podemos reescribir como el elemento de arco

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dv^2 - 2dvdr - a \sin^2 \theta \frac{4Mr}{\Sigma} dvd\phi - 2a \sin^2 \theta drd\phi - \Sigma d\theta^2 - \sin^2 \theta \left(a^2 + r^2 + a^2 \sin^2 \theta \frac{2Mr}{\Sigma}\right) d\phi^2. \quad (105)$$

Esta es la métrica de Kerr, aunque quizá no nos resulte familiar, ya que no está expresada en sus coordenadas más habituales de Boyer-Lindquist, sino que está expresada en las coordenadas de Eddington-Finkelstein avanzadas para Kerr. Para reescribir la métrica en nuestras coordenadas predilectas, simplemente aplicamos el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{cases} dv = dt + \frac{2Mr + \Delta}{\Delta} dr \\ d\phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr, \end{cases} \quad (106)$$

siendo  $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$ . Entonces la **métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist** resulta

$$ds^2 = \frac{r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\varphi - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left[r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right] \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (107)$$

## 8. Movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Kerr

Tras haber estudiado el agujero negro de Kerr, resulta interesante deducir las ecuaciones de las trayectorias geodésicas que seguirían los fotones o un observador próximo a Kerr.

El proceso de obtención de las ecuaciones del movimiento será parecido a Schwarzschild, con la salvedad de que, a parte de los vectores de Killing asociados a esta métrica,  $k^\mu$  y  $l^\mu$ , usaremos también la constante de Carter, una nueva constante del movimiento que deduciremos en este mismo apartado.

Cabe destacar también que como la solución de Kerr no es esféricamente simétrica, las órbitas, en general, no serán planas, salvo aquellas que comiencen en el plano ecuatorial del agujero negro con  $\theta = 0$ .

## 8.1. Geodésicas generales

Primero nos proponemos obtener las ecuaciones de las geodésicas en general, para cualquier velocidad y posición iniciales.

### 8.1.1. Ecuaciones de $\dot{t}$ y $\dot{\varphi}$

Partimos de las cantidades conservadas en Kerr

$$\begin{aligned}
 E &= \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) \dot{t} + \frac{2Mr}{\Sigma} a \sin^2 \theta \dot{\varphi} \\
 L_z &= -\frac{2Mr}{\Sigma} a \sin^2 \theta \dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta \dot{\varphi},
 \end{aligned} \tag{108}$$

donde, recordemos  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$  y  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  y el punto denota la derivada con respecto del tiempo propio de un observador asintótico. Estas expresiones son, al fin y al cabo, ecuaciones diferenciales, y nos valdremos de ellas para deducir las ecuaciones del movimiento. Para simplificar la notación, definimos las siguientes variables

$$\begin{aligned}
 A &= g_{tt} = 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \\
 B &= g_{t\varphi} = \frac{2Mar}{\Sigma} \sin^2 \theta \\
 C &= -g_{\varphi\varphi} = \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta,
 \end{aligned} \tag{109}$$

de tal forma que las ecuaciones diferenciales resultan simplemente

$$\begin{aligned}
 E &= A\dot{t} + B\dot{\varphi} \\
 L_z &= -B\dot{t} + C\dot{\varphi}.
 \end{aligned} \tag{110}$$

Despejando  $\dot{t}$  y  $\dot{\varphi}$ , se obtienen las ecuaciones deseadas

$$\begin{aligned}
 \dot{t} &= \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} (CE - BL_z) \\
 &= \frac{1}{\Delta} \left[ \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta\right) E - \frac{2Mra}{\Sigma} L_z \right] \\
 \dot{\varphi} &= \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} (AL_z + BE) = \frac{1}{\Delta} \left[ \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) \frac{L_z}{\sin^2 \theta} + \frac{2Mar}{\Sigma} E \right],
 \end{aligned} \tag{111}$$

donde para deducir las expresiones se ha tenido en cuenta que

$$AC + B^2 = -g_{tt}g_{\varphi\varphi} + g_{t\varphi}^2 = \Delta \sin^2 \theta. \tag{112}$$

### 8.1.2. Ecuaciones de $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$

Para deducir las ecuaciones de  $\dot{r}$  y  $\dot{\theta}$ , utilizaremos el formalismo de Hamilton-Jacobi. En primer lugar, definimos el lagrangiano del sistema como

$$\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (113)$$

Entonces, sabemos que podemos calcular el momento conjugado como

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \quad (114)$$

que recordemos, se relaciona con la tetravelocidad  $u^\mu = \dot{x}^\mu$  según

$$u^\mu = g^{\mu\nu} p_\nu. \quad (115)$$

Por otro lado, el Hamiltoniano de la partícula se define como

$$H(x^\mu, p_\nu) = p_\mu \dot{x}^\mu(p_\nu) - \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu(p_\nu)) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu. \quad (116)$$

Una vez determinado el Hamiltoniano, vamos a obtener las ecuaciones del movimiento mediante el formalismo de Hamilton-Jacobi. En este formalismo se define la función principal de Hamilton  $S(x^\mu, \lambda)$ , una transformación canónica que es función de las coordenadas  $x^\mu$  y del parámetro de la geodésica  $\lambda$ . Por otro lado, sabemos que la función principal verifica la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$H\left(x^\mu, \frac{\partial S}{\partial x^\mu}\right) + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0, \quad (117)$$

y que además nos permite calcular el momento de la partícula según

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = p_\mu. \quad (118)$$

Esta igualdad nos será de utilidad próximamente.

A continuación, podemos relacionar  $H$ ,  $p_t$  y  $p_\varphi$  con las constantes del movimiento que conocemos para Kerr

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \frac{1}{2} \delta \quad (119)$$

$$g_{t\mu} p^\mu = p_t = E$$

$$g_{\varphi\mu} p^\mu = p_\varphi = -L_z,$$

donde  $\delta = 0$  para partículas sin masa y  $\delta = 1$  para partículas masivas. Por otro lado, vamos a asumir que la función  $S$  es separable y que podemos expresarla en la forma

$$S(t, r, \theta, \varphi; \lambda) = S_\lambda(\lambda) + S_t(t) + S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\varphi(\varphi). \quad (120)$$

## 8 MOVIMIENTO GEODÉSICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE KERR

Con lo cual, teniendo en cuenta las siguientes igualdades, que se deducen de (118)

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= p_t = E \\ \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= p_\varphi = -L_z\end{aligned}\quad (121)$$

y que para que se verifique la ecuación de Hamilton-Jacobi se debe cumplir

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2}\delta, \quad (122)$$

entonces podemos escribir la función principal de Hamilton como

$$S(t, r, \theta, \varphi; \lambda) = -\frac{1}{2}\delta\lambda + Et - L_z\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta). \quad (123)$$

Si sustituimos esta expresión en la ecuación de Hamilton-Jacobi obtenemos

$$\begin{aligned}-\delta + g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} &= -\delta - \frac{\Delta}{\Sigma} \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{1}{\Sigma} \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2 \theta}{\Sigma\Delta} E^2 \\ &\quad - \frac{4Mra}{\Sigma\Delta} EL_z - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma\Delta \sin^2 \theta} L_z^2 = 0,\end{aligned}\quad (124)$$

donde hemos usado los coeficientes de la métrica inversa (54). A continuación, multiplicamos por  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  y reordenamos, dejando todos los términos que dependen de  $r$  a un lado de la igualdad y los que dependen de  $\theta$  al otro lado

$$\begin{aligned}\Delta \left( \frac{dS_r(r)}{dr} \right)^2 + \delta r^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} E^2 + \frac{4Mra}{\Delta} EL_z - \frac{a^2}{\Delta} L_z^2 \\ = - \left( \frac{dS_\theta(\theta)}{d\theta} \right)^2 - \delta a^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta E^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} L_z^2.\end{aligned}\quad (125)$$

Esta ecuación se puede reescribir de otra forma que nos resultará de conveniencia más adelante. Sumando a ambos lados de la igualdad el término  $a^2 E^2 + L_z^2$  obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta \left( \frac{dS_r(r)}{dr} \right)^2 + \delta r^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} E^2 + \frac{4Mra}{\Delta} EL_z - \frac{a^2}{\Delta} L_z^2 + a^2 E^2 + L_z^2 \\ = - \left( \frac{dS_\theta(\theta)}{d\theta} \right)^2 - \delta a^2 \cos^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta E^2 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} L_z^2.\end{aligned}\quad (126)$$

Puesto que el miembro izquierdo solo depende de  $r$  y el de la derecha de  $\theta$ , la única posibilidad para que se cumpla la igualdad es que ambos miembros sean iguales a una constante  $\mathcal{C}$ , llamada comúnmente *constante de Carter*. Cabe mencionar que, a diferencia de  $E$  y  $L_z$ , esta nueva constante  $\mathcal{C}$  no está asociada a ninguna isometría del espacio-tiempo. Por otro lado, la constante de Carter sí está relacionada con un tensor de Killing llamado *tensor de Killing-Yano*. A veces se dice que este tensor es una simetría escondida en Kerr.

Finalmente, usando la constante de Carter, podemos decir que

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \left( \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \delta a^2 \cos^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta E^2 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} L_z^2 \\ -\mathcal{C} &= \Delta \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + r^2 \delta - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 E^2 + a^2 L_z^2 - 4MarL_z E] + a^2 E^2 + L_z^2.\end{aligned}\quad (127)$$

## 8 MOVIMIENTO GEODÉSICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE KERR

Tenemos por tanto que la constante de Carter surge de forma natural como constante de separación al aplicar el formalismo de Hamilton-Jacobi para la métrica de Kerr. Motivado por las expresiones (127), se pueden definir las funciones  $R(r)$  y  $\Theta(\theta)$  como

$$\Theta(\theta) = \mathcal{C} + \cos^2 \theta \left[ (E^2 - \delta)a^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} L_z^2 \right] \quad (128)$$

$$R(r) = \Delta[-\delta r^2 - (L_z - aE)^2 - \mathcal{C}] + [E(r^2 + a^2) - L_z a]^2.$$

A continuación, sustituyendo (128) en (127) obtenemos

$$\left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 = \Theta \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} = \sqrt{\Theta} \quad (129)$$

$$\left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 = \frac{R}{\Delta^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial S_r}{\partial r} = \frac{\sqrt{R}}{\Delta}.$$

Estas igualdades nos permiten expresar la función principal de Hamilton como

$$S = -\frac{1}{2}\delta\lambda + Et - L_z\varphi + \int \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr + \int \sqrt{\Theta} d\theta. \quad (130)$$

Por otro lado, de las ecuaciones (118), (129) y (114), se deduce que

$$p_\theta^2 = (\Sigma\dot{\theta})^2 = \Theta(\theta) \quad (131)$$

$$p_r^2 = \left( \frac{\Sigma}{\Delta}\dot{r} \right)^2 = \frac{R(r)}{\Delta^2},$$

con lo que, despejando llegamos por fin a las componentes  $\dot{\theta}$  y  $\dot{r}$

$$\dot{\theta} = \pm \frac{1}{\Sigma} \sqrt{\Theta} \quad (132)$$

$$\dot{r} = \pm \frac{1}{\Sigma} \sqrt{R},$$

que conforman junto con las ecuaciones de  $\dot{t}$  y  $\dot{\varphi}$  las ecuaciones diferenciales para el movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de Kerr.

Como vemos, hemos conseguido expresar la función principal de Hamilton en términos de cuatro constantes:  $\delta$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $L$ , y  $E$ .

A partir de aquí, la obtención de las ecuaciones del movimiento es directa. Del formalismo de Hamilton

## 8 MOVIMIENTO GEODÉSICO EN EL ESPACIO-TIEMPO DE KERR

sabemos que estas vendrán dadas por las parciales de  $S$  respecto a las constantes igualadas a cero, es decir

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = 0 &\implies \int^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\Theta}} d\theta = \int^r \frac{1}{\sqrt{R}} dr \\
 \frac{\partial S}{\partial \delta} = 0 &\implies \tau = - \int^{\theta} \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} d\theta - \int^r \frac{r^2}{\sqrt{R}} dr \\
 \frac{\partial S}{\partial E} = 0 &\implies t = \int^{\theta} \frac{a^2 \sin^2 \theta E}{\sqrt{\Theta}} d\theta - \int^r \frac{2(r^2 + a^2)^2 E - 4MarL_z}{\Delta \sqrt{R}} dr \\
 \frac{\partial S}{\partial L_z} = 0 &\implies \varphi = - \int^{\theta} \frac{L_z \sin^{-2} \theta}{\sqrt{\Theta}} d\theta + \int^r \frac{2a^2 L_z - 2MarE}{\Delta \sqrt{R}} dr
 \end{aligned}
 \tag{133}$$

En general, el movimiento geodésico en el espaciotiempo de Kerr es complejo, ya que las trayectorias que nos podemos encontrar no tienen formas sencillas. Esto es una gran diferencia con Schwarzschild, donde llegábamos a unas ecuaciones mucho más simples, ya que cualquier plano de este agujero negro, es un plano de simetría, de tal forma que todas las trayectorias geodésicas que se obtenían eran planas.

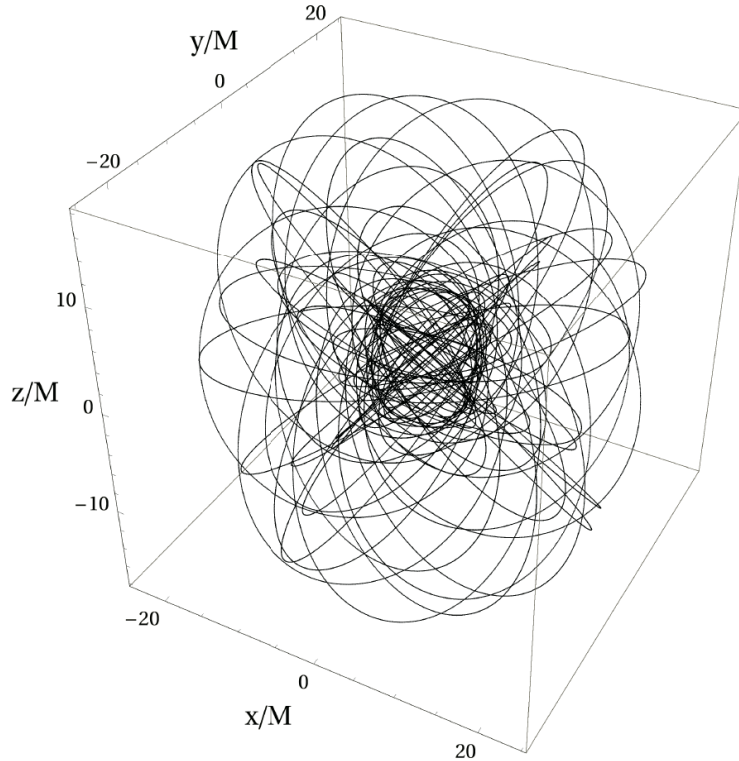


Figura 8: La imagen se ha obtenido de [7]. Para esta trayectoria geodésica, se ha tomado  $a = 0,9M$ , y las constantes del movimiento  $L = 2,539$ ,  $E = 0,969$  y  $\mathcal{C} = 6,470$ .

## 9. Geodésicas en el plano ecuatorial

En este apartado calcularemos las ecuaciones de las geodésicas ecuatoriales, es decir, aquellas contenidas en el plano ecuatorial, que es el único plano de simetría que encontramos en el agujero negro de Kerr. Las cuentas se simplificarán notablemente, ya que partiremos de la condición  $\theta = \pi/2$ .

### 9.0.1. Ecuaciones de $\dot{\theta}$ y $\dot{r}$

Para obtener la ecuación de  $\dot{\theta}$  en el plano ecuatorial, comenzamos sustituyendo  $\theta = \pi/2$  en (128)

$$\Theta(\theta) = \mathcal{C}. \quad (134)$$

Si ahora consideramos la ecuación del movimiento para  $\theta = \pi/2$  (132) y además tenemos en cuenta que en  $\theta = \pi/2$  resulta  $\Sigma = r^2$ , entonces obtenemos

$$\dot{\theta} = \pm \frac{1}{\Sigma} \sqrt{\Theta} \longrightarrow \dot{\theta} = \pm \frac{1}{r^2} \sqrt{\mathcal{C}}. \quad (135)$$

Es decir, de entre todas las geodésicas que comienzan en el plano ecuatorial, solo aquellas con  $\mathcal{C} = 0$  tienen derivada inicial nula  $\dot{\theta} = 0$  y permanecen en el plano ecuatorial.

Para obtener la ecuación de  $\dot{r}$ , simplemente particularizaremos la ecuación obtenida en el apartado anterior. Para ello, hacemos  $\mathcal{C} = 0$  en (128), y obtenemos

$$R(r) = \Delta(-\delta r^2 - (L_z - aE)^2) + (E(r^2 + a^2) - L_z a)^2. \quad (136)$$

Si más que sustituir este resultado en (132), llegamos a la ecuación deseada

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{r^4} [-\Delta\delta r^2 - \Delta(L_z - aE)^2 + (E(r^2 + a^2) - L_z a)^2], \quad (137)$$

donde se ha considerado que para  $\theta = \pi/2$  se tiene que  $\Sigma = r^2$ . Podemos reescribir la ecuación de  $\dot{r}$  de una forma más conveniente. Recordando las variables previamente definidas A, B y C (109), podemos particularizarlas para el caso que nos ocupa haciendo  $\theta = \pi/2$ , obteniéndose

$$\begin{aligned} A &= -g_{tt} = 1 - \frac{2M}{r} \\ B &= g_{t\varphi} = \frac{2Ma}{r} \\ C &= -g_{\varphi\varphi} = r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}. \end{aligned} \quad (138)$$

Se puede demostrar fácilmente que la ecuación del movimiento para  $\dot{r}$  en términos de estas variables es

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{r^2} (CE^2 - 2BL_z E - AL_z^2) - \frac{\delta\Delta}{r^2}. \quad (139)$$

Vemos que queda expresado en función de un polinomio  $P(E)$ , cuadrático en E, con  $P(E) = CE^2 - 2BL_z E - AL_z^2$ , que tiene por tanto dos raíces

$$V_{\pm} = \frac{BL_z \pm \sqrt{B^2 L_z^2 + ACL^2}}{C} = \frac{L}{C} (B \pm \sqrt{\Delta}), \quad (140)$$

## 9 GEODÉSICAS EN EL PLANO ECUATORIAL

donde en la última igualdad se ha usado que  $AC + B^2 = \Delta$ . Consecuentemente, podemos expresar la ecuación para  $\dot{r}$  como

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{C}{r^2}(E - V_+)(E - V_-) - \frac{\delta\Delta}{r^2} \\ &= \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta}{r^4}(E - V_+)(E - V_-) - \frac{\delta\Delta}{r^2}. \end{aligned} \quad (141)$$

De esta forma, la ecuación de  $\dot{r}$  queda expresada de forma compacta en términos de los potenciales efectivos  $V_+$  y  $V_-$ , que de forma explícita se pueden escribir como

$$V_{\pm} = \frac{2Mar \pm r^2\sqrt{\Delta}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta}L_z. \quad (142)$$

### 9.0.2. Ecuaciones de $\dot{\phi}$ y $\dot{t}$

Para obtener estas ecuaciones del movimiento, simplemente particularizamos las ecuaciones generales (111) imponiendo  $\theta = \pi/2$ . Las ecuaciones resultantes son

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \left( r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) E - \frac{2Ma}{r} L_z \right] \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) L_z + \frac{2Ma}{r} E \right]. \end{aligned} \quad (143)$$

Como vemos, hemos sido capaces de expresar todas las ecuaciones del movimiento en función de las constantes del movimiento  $E$  y  $L_z$ .

### 9.0.3. Potenciales para geodésicas ecuatoriales

En el apartado anterior hemos obtenido la ecuación diferencial del movimiento  $\dot{r}$ , expresada en términos de los potenciales efectivos  $V_+$  y  $V_-$ . Cuando estudiamos con detalle el potencial de la ecuación radial (142), nos percatamos de que se pueden distinguir dos casos según si el parámetro  $a$  y la constante  $L_z$  sean positivos o negativos: el caso  $L_z a < 0$ , donde la partícula test está en contrarrotación con el agujero negro, y el caso  $L_z a > 0$  donde la partícula está en corrotación. Cabe destacar que, si se cambian los signos de  $a$  y  $L$ , entonces se intercambian los potenciales  $V_{\pm}$ . Para evitar esta ambigüedad, resulta conveniente redefinir los potenciales como

$$V_{\pm} = \frac{2ML_z ar \pm |L_z| r^2 \sqrt{\Delta}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta}. \quad (144)$$

Por simple inspección de estos potenciales podemos obtener mucha información sobre los mismos. Para el análisis próximo, se asumirá que  $a > 0$ .

- ✱ La desigualdad  $V_+ \geq V_-$  siempre se cumple.
- ✱ Los potenciales se anulan en el infinito, es decir  $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} V_{\pm}$ .
- ✱  $V_+$  y  $V_-$  coinciden para  $\Delta = 0$ , es decir, en el horizonte de eventos exterior.

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0 \iff R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (145)$$



## 9 GEODÉSICAS EN EL PLANO ECUATORIAL

En dicha región, el potencial toma el valor

$$V_+(R_+) = V_-(R_+) = \frac{2MR_+L_za}{(R_+^2 + a^2)^2}, \quad (146)$$

que es positivo si  $L_za > 0$  y negativo si  $L_za < 0$ . Por otra parte, recordando que la velocidad angular del agujero negro (velocidad angular del horizonte de eventos exterior (79)) es

$$\Omega_H = \frac{2MaR_+}{(R_+^2 + a^2)^2}, \quad (147)$$

entonces podemos reescribir los potenciales de forma compacta como

$$V_+(R_+) = V_-(R_+) = \Omega_H L_z. \quad (148)$$

⊛ Si  $L_za > 0$  (órbita en corrotación), entonces  $V_-$  se hace cero cuando

$$r\sqrt{\Delta} = 2Ma \iff r^2(r^2 - 2Mr + a^2) = 4M^2a^2. \quad (149)$$

Desarrollando esta ecuación se obtiene

$$r^4 - 2Mr^3 + a^2r^2 - 4M^2a^2 = (r - 2M)(r^3 + a^2r + 2Ma^2) = 0, \quad (150)$$

es decir,  $V_-$  se hace cero en  $r = 2M$ , que es la distancia radial a la ergosfera en el plano ecuatorial.

⊛ Si  $L_za < 0$  (órbitas en contrarrotación), entonces  $V_+$  se anula de forma análoga en  $r = 2M$ .

⊛ Se puede demostrar fácilmente que  $V_+$  tiene un único máximo y  $V_-$ , un único mínimo.

A continuación, queremos particularizar la ecuación (151) de  $\dot{r}$  para el caso de fotones ( $\delta = 0$ ), ya que entonces la ecuación diferencial del movimiento  $\dot{r}$  toma una forma particularmente sencilla. Como recordaremos, para partículas sin masa  $\delta = 0$ , y con ello la ecuación radial para las geodésicas ecuatoriales nulas es simplemente

$$\dot{r}^2 = \frac{C}{r^2}(E - V_+)(E - V_-). \quad (151)$$

Como  $\dot{r}$  debe ser positivo, y dado  $C > 0$ , entonces se debe de cumplir que  $E < V_-$  o que  $E > V_+$ , es decir, las partículas sin masa no podrán tener energías comprendidas en el intervalo  $V_- < E < V_+$ , que se corresponde con las zonas sombreadas en las figuras (9) y (10).

9 GEODÉSICAS EN EL PLANO ECUATORIAL

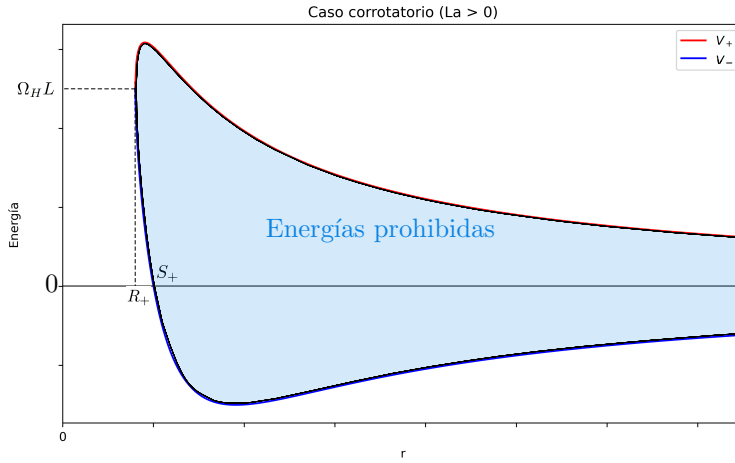


Figura 9: Representación gráfica de los potenciales  $V_+$  y  $V_-$  para el caso corrotatorio. Se han tomado los valores  $M = 1$ ,  $a = 0,8$  y  $L = 1,0$ . Como vemos, en  $r \rightarrow \infty$  ambas funciones tienden a cero, luego los fotones pueden tener cualquier energía si se encuentran lejos del agujero negro. Según se acercan al horizonte de eventos, la región de energías prohibidas, sombreada en azul, se va haciendo cada vez mayor. Por otro lado, vemos que  $V_-$  se hace cero en la ergosfera  $S_+$  (se hace cero realmente en  $r = 2M$ , que coincide con la ergosfera en el plano ecuatorial) y que ambos potenciales coinciden en el horizonte de eventos exterior  $R_+$ .

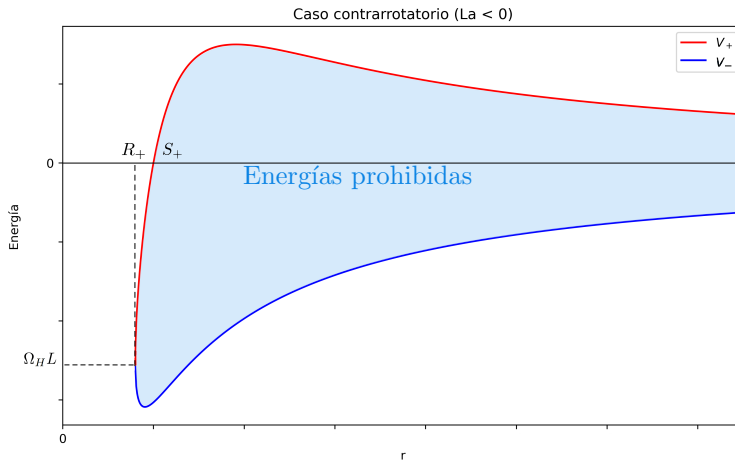


Figura 10: Representación gráfica de los potenciales  $V_+$  y  $V_-$  para el caso contrarrotatorio. Se han tomado los valores  $M = 1$ ,  $a = 0,8$  y  $L = -1,0$ . Como se aprecia en la figura, se sigue cumpliendo que  $V_+ > V_-$ . En esta ocasión, el potencial  $V_+$  se anula en la ergosfera  $S_+$  y ambos potenciales coinciden en el horizonte de eventos exterior  $R_+$ .

Para estudiar las órbitas ecuatoriales de partículas sin masa, nos interesa diferenciar (151) para obtener

## 9 GEODÉSICAS EN EL PLANO ECUATORIAL

la aceleración

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left( \frac{C}{r^2} \right) (E - V_+)(E - V_-) - \frac{C}{2r^2} \left[ \frac{dV_+}{dr} (E - V_-) + \frac{dV_-}{dr} (E - V_+) \right]. \quad (152)$$

A continuación evaluamos la aceleración  $\ddot{r}$  en los puntos donde la velocidad radial se anula  $\dot{r} = 0$ , es decir, en  $E = V_+$  ó  $E = V_-$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{C}{2r^2} \frac{dV_+}{dr} (V_+ - V_-) \quad \text{si } E = V_+ \\ \ddot{r} &= -\frac{C}{2r^2} \frac{dV_-}{dr} (V_- - V_+) \quad \text{si } E = V_-. \end{aligned} \quad (153)$$

Considerando que  $(V_+ - V_-) = 2|L|\sqrt{\Delta}/C$ , llegamos a que la aceleración en estos puntos es

$$\ddot{r} = -\frac{|L|\sqrt{\Delta}}{r^2} \frac{dV_{\pm}}{dr} \quad \text{si } E = V_{\pm}. \quad (154)$$

Ahora podemos clasificar las geodésicas ecuatoriales nulas dependiendo del valor de la constante del movimiento  $E$ . Se pueden distinguir tres casos distintos: órbitas circulares inestables, captura de fotones y deflexión de partículas.

### Órbitas circulares

Para caracterizar las órbitas circulares, imponemos que  $r = r_{max}$ , donde  $r_{max}$  es la distancia radial del máximo de la función  $V_+$ , tanto para el caso corrotatorio como para el contrarrotatorio. Consecuentemente,  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ .

De la condición  $\dot{r} = 0$  se extrae que necesariamente  $E = V_+$  ó  $E = V_-$ . En lo que sigue se considerará solamente el primer caso. Desarrollando la ecuación  $\ddot{r} = 0$  llegamos a

$$\frac{2(L - aE)(L_z(r - 3M) + aE(r + 3M))}{r^4} = 0, \quad (155)$$

cuya solución es

$$\frac{L_z}{E} = -a \frac{r + 3M}{r - 3M}. \quad (156)$$

Esta solución nos permite discernir entre órbitas corrotatorias ( $L_z a > 0$ ) cuando  $r < 3M$  y órbitas contrarrotatorias ( $L_z a < 0$ ) cuando  $r > 3M$ . La ecuación (156) junto con la condición  $E = V_+$  que venimos considerando, se pueden resumir en

$$r(r - 3M)^2 - 4Ma^2 = 0. \quad (157)$$

De las tres soluciones de la ecuación cúbica, una se descarta por ser menor que el horizonte de eventos exterior. Las otras dos soluciones con sentido físico se corresponden con  $r = r_{LR}^i$  con  $i = 1, 2$ , que se conocen con el nombre de *anillo de luz* de la métrica de Kerr. Una de las dos soluciones es corrotatoria y la otra contrarrotatoria. Además, se puede demostrar que ambas órbitas son equilibrios inestables.

Hallar de forma explícita estas dos soluciones resulta complejo, sin embargo, se pueden encontrar soluciones sencillas para el caso extremal  $a = M$

$$\begin{aligned} r_{LR}^{(1)} &= M \\ r_{LR}^{(2)} &= 4M. \end{aligned} \quad (158)$$

La segunda solución es exterior a la ergosfera. Se trataría de un anillo de fotones que conforman una órbita circular inestable fuera del agujero negro. Por otro lado, la primera solución se encuentra sobre el propio horizonte de evento exterior, de tal forma que en  $R_+$  también podría formarse un anillo de luz.

Si consideramos el caso  $a = 0$ , en el que recuperaríamos Schwarzschild, la solución que se obtiene es  $r_{LR}^{(1,2)} = 3M$ , es decir, un único anillo de luz en el exterior del agujero negro.

### Captura de fotones

La captura de fotones ocurriría para un fotón que se acercase desde el infinito con una energía  $E > V_+(r_{max})$  y  $\dot{r}(\infty) < 0$ . En esta situación, la partícula se aproximaría al agujero negro con velocidad radial decreciente hasta alcanzar  $r_{max}$ , y después con velocidad creciente hasta alcanzar el horizonte. El número de vueltas alrededor del agujero negro antes de quedar atrapado, dependerá del valor de  $L^4$ .

### Deflexión de partículas

Sería el caso de un fotón con energía  $0 < E < V_+(r_{max})$  y  $\dot{r}(\infty) < 0$ . Se aproximaría hasta  $E = V_+(r)$ , donde  $\dot{r} = 0$ , que es un punto de retorno, ya que la velocidad radial se anula y además se tendría que  $\ddot{r} > 0$ , luego la partícula invertiría su trayectoria y escaparía al infinito.

## 10. Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos estudiado dos agujeros negros. En primer lugar el de Schwarzschild, el más sencillo. Resulta ser una solución de vacío, esféricamente simétrica, estática y asintóticamente plana. Su estructura causal es la más simple de entre todos los agujeros negros, ya que nos encontramos únicamente con un horizonte de eventos y una singularidad en  $r = 0$ . La singularidad del horizonte es de coordenadas, de tal forma que sí se puede atravesar en un tiempo finito, aunque solo puede atravesarse en un único sentido, es decir, es una membrana unidireccional. Este horizonte de eventos resulta ser además una superficie de corrimiento infinito al rojo.

Por otro lado, las trayectorias geodésicas son relativamente sencillas, ya que al tratarse de una solución esféricamente simétrica, las trayectorias geodésicas resultan ser planas.

Todo esto es el resultado de que la estructura causal del agujero negro de Kerr es mucho más compleja que Schwarzschild. Como hemos visto, la métrica de Kerr se origina a partir de un cuerpo en rotación, causando la pérdida de simetría esférica. Este agujero negro pasa a tener únicamente simetría axial en torno al eje sobre el que rota y deja de ser estática. Toda esta información viene codificada en el parámetro  $a$ , que como vimos, se relaciona directamente con el momento angular de la solución.

A mayores hemos comprendido que esta nueva métrica no solo curva el espaciotiempo, sino que además rota, es decir, la métrica presenta un momento angular intrínseco, que será capaz de inducir una rotación incluso sobre un observador con momento angular nulo.

El hecho de que la métrica rote y la aparición del parámetro  $a$  se traduce en que la expresión de la métrica es notablemente más compleja, y esto a su vez da lugar a una estructura causal más rica. En este agujero negro nos encontramos con un total de cuatro superficies notables: dos ergosferas, que coinciden con las superficies de redshift infinito, y dos horizontes de eventos, aparte de una singularidad anular.

## 10 CONCLUSIONES

---

En lo referente a la ergosfera, hemos visto que además es una superficie de límite estático, a partir de la cual no puede existir un observador estático, mientras que los horizontes de eventos resultan ser superficies de límite estacionario.

Por otro lado, hemos podido comprobar que en la solución de Kerr las trayectorias geodésicas son notablemente más complicadas. De manera general, nos encontramos con que el movimiento no es planar, sino que las trayectorias resultantes son en tres dimensiones y muy complejas. El movimiento recluso a un plano (plano de simetría  $\theta = \pi/2$ ) queda relegado a un caso concreto con unas condiciones iniciales determinadas.

Por último, y para una mayor completitud, se ha usado el algoritmo de Newman-Janis para deducir la expresión de la métrica de Kerr.

## Referencias

- [1] Janssen, B. *Gravitación y geometría: Una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General*, Editorial Universidad de Granada (2022).
- [2] Sean M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity*, Cambridge University Press (2019).
- [3] Ray A. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press (1992).
- [4] Eric Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press (2004).
- [5] David L. Wiltshire, Matt Visser, Susan M. Scott, *The Kerr Spacetime*, Cambridge University Press (2009).
- [6] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press (1983).
- [7] Valeria Ferrari, Leonardo Gualtieri, Paolo Pani, *General Relativity and its Applications: Black Holes, Compact Stars and Gravitational Waves*. CRC Press (2021).
- [8] Infante Adrián, A. Trabajo Fin de Grado: *Estudio de la estructura del espacio-tiempo a través de diagramas de Penrose*, UVaDOC (2023).
- [9] Galvez García, D. Trabajo Fin de Máster: *Aplicación del algoritmo de Janis y Newman a diversas métricas y estudio de los resultados*. Universidad de Granada (2019).
- [10] Guerrero Montero, J.A. Trabajo Fin de Grado: *El agujero negro de Kerr*. Universidad de Granada (2017).
- [11] S.P. Drake, Peter Szekeres. *Uniqueness of the Newman-Janis Algorithm in Generating the Kerr-Newman Metric*, General Relativity and Gravitation (2000).
- [12] Gabriela Slezáková, *Geodesic Motion in Black Holes*, University of Waikato (2006).
- [13] E.T. Newman, A.I. Janis, *Note on the Kerr Spinning-Particle Metric*. Journal of Mathematical Physics (1965).
- [14] Utkarsh Kumar, Sukanta Panda, Avani Patel, *Blackhole in nonlocal gravity: comparing metric from Newman-Janis algorithm with slowly rotating solution*. The European Physical Journal C (2020).