ESTRUCTURA INTERNA DE ESTRELLAS RELATIVISTAS EN EXTENSIONES DE RELATIVIDAD GENERAL

Por

Rodrigo Garrido

Supervisado por

Diego Sáez Gómez

Universidad de Valladolid

Universidad de Valladolid

Julio 2024

Índice general

Resumen

En este trabajo se realiza un breve repaso a la descripción relativista de objetos compactos autogravitantes, obteniendo las ecuaciones de equilibrio hidrostático (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) para un fluido perfecto esféricamente simétrico. Se introduce también el método termodinámico de máxima entropía para alcanzar estas mismas ecuaciones. Posteriormente, se discuten dos teorías de gravedad modificada, $f(R)$ y $f(R,T)$, donde R, T son el escalar de curvatura y la traza del tensor energía-momento, respectivamente. Se estudian las nuevas ecuaciones de equilibrio hidrostático, obteniendo una corrección a las ecuaciones TOV. Es aquí donde se muestra en acción el método de máxima entropía, demostrando su validez en estas teorías extendidas de Relatividad General.

Introducción

Las estrellas relativistas son aquellas que no pueden ser descritas por la mecánica newtoniana debido a sus propiedades. Con esto nos referimos a objetos compactos, remanentes de estrellas luminosas cuando alcanzan los estadíos finales de su ciclo de vida. Sus composiciones y propiedades pueden ser muy variadas, y han sido objeto de estudio desde pricipios del siglo pasado [29][41][17]. Su descripción mediante la teoría de la relatividad general proporciona una serie de ecuaciones diferenciales acopladas que determinan la estructura interna de la estrella, conocidas como las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

La descripción propuesta por Einstein de la gravedad como la curvatura del espacio-tiempo, a pesar de su rotundo éxito y sus excelentes resultados, presenta problemas fundamentales en cosmología y astrofísica. Esto ha motivado la búsqueda de modificaciones a la relatividad general que puedan ajustarse mejor a las observaciones. Mediciones provenientes de diversas fuentes como supernovas o la radiación de fondo cósmico de microondas indican que el contenido energético del universo está compuesto en un 4 % de materia ordinaria, un 20 % de materia oscura (un compuesto similar a la materia usual pero que aún no ha sido observado en un laboratorio) y un 76 % de energía oscura[14][31][38], una forma de energía desconocida, cuya dominancia actual sobre el resto de componentes da lugar a una expansión acelerada del universo. Además, tanto la necesidad de inhomogeneidades primordiales que den lugar a las estructuras a gran escala observadas en nuestro universo [28]; como los conocidos como problemas del horizonte, de planitud y de monopolos [26][23][44][24] apuntan a un período de expansión acelerada durante un tiempo en los inicios de la historia del universo conocida como época de inflación[23][19][24], seguida de un período de expansión decelerada.

El modelo más simple que describe todos estos fenómenos es el conocido como ΛCDM, describiendo la energía oscura mediante una constante cosmológica que impulsa la expansión del universo. Este modelo tiene problemas [8][45], principalmente el conocido como problema de magnitud, es decir, la diferencia abismal entre el valor de esta constante y el que se obtiene a partir de la energía de punto cero de los campos de materia; o el problema de coincidencia, el por qué coincide que el pequeño periodo durante el cual la densidad de energía oscura y la de materia son comparables es justo este en el cual existimos para observarlo.

Ante toda esta problemática, uno de los enfoques adoptados es buscar modificaciones de la teoría de la relatividad general para intentar evitar recurrir a estos componentes oscuros y las complicaciones que conllevan. Otro aspecto que impulsa estas extensiones de la teoría es el intento de construir una cuantización de la gravedad. La teoría de Einstein no es renormalizable, y la inclusión de términos de orden superior en la acción mostró resultados prometedores en este aspecto. [40][42]

En este trabajo se pretende estudiar las configuraciones estables de objetos compactos, obteniendo las ecuaciones de equilibrio hidrostático (TOV) mencionadas anteriormente en relatividad general y en teorías de gravedad modificada. El trabajo está estructurado de la siguiente forma: en el capítulo 2 se obtienen las ecuaciones TOV mediante las ecuaciones de Einstein y se introduce, basado en los trabajos de Cocke[10], Sorkin et al.[35] y Gao[16], un método alternativo para obtener el mismo resultado empleando un procedimiento puramente termodinámico de maximización de la entropía. En las secciones posteriores, se presentan modificaciones a la relatividad general comunes en la literatura y se obtiene las ecuaciones TOV, generalizando por primera vez el método termodinámico a estas teorías en concreto, cosa que no ha sido estudiada aún en la literatura, para posteriormente corroborar su eficacia comparando con las ecuaciones obtenidas anteriormente por otros autores.

Capítulo 1

Elementos de Relatividad General

1.1. Formulación clásica de la gravedad

En esta sección se introducen los elementos básicos que describen la interacción gravitatoria clásica en el marco de la relatividad general (GR). Véase [43] para una descripción más detallada.

Se describe el espacio-tiempo mediante una variedad M de cuatro dimensiones equipada con un campo tensorial g simétrico dos veces covariante. Definimos el producto interno de dos vectores u, v sobre el fibrado tangente como

$$\langle u, v\rangle = g(u, v)$$

De aquí en adelante emplearemos el convenio de Einstein, por simplicidad. Esto es, allá donde aparezcan índices repetidos se asumirá una suma a todos los valores de dicho índice. Asimismo, índices griegos se supone que toman valores enteros de 0 a 3. Por ejemplo

$$A^{\mu}{}_{\nu\rho}B_{\mu}{}^{\rho} = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\rho=0}^{3} A^{\mu}{}_{\nu\rho}B_{\mu}{}^{\rho}$$

Así, si introducimos coordenadas x^{μ} arbitrarias alrededor de un punto p, el producto interno de dos vectores $u = u^{\mu}\partial_{\mu}$, $v = v^{\mu}\partial_{\mu}$ en el espacio tangente a dicho punto está determinado por

$$\langle u, v\rangle = u^{\mu}v^{\nu}g(\partial_{\mu}, \partial_{\nu}) = g_{\mu\nu}u^{\mu}v^{\nu}$$

Donde definimos $g_{\mu\nu} = g(\partial_{\mu}, \partial_{\nu})$ y ∂_{μ} denotan los vectores de la base inducida por la carta x^{μ}. Denotaremos $g^{\mu\nu}$ a la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$. Asimismo, introducimos la derivada covariante ∇, y la conexión localmente como

$$(\nabla_\mu - \partial_\mu)\, v^\nu = \Gamma^\nu_{\mu\rho} v^\rho$$

Si imponemos, de forma estándar

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f = \nabla_\nu \nabla_\mu f, \quad \forall f \in \mathscr{C}^1(M)$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$$

Obtenemos que la conexión corresponde a la de Levi-Civita, que puede expresarse en términos exclusivamente de la métrica

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu})$$

Donde $g^{\lambda\kappa}$ es la inversa de la métrica. Con estos elementos podemos definir el tensor de curvatura, R

$$[\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu] v^\rho = R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} v^\lambda$$

A partir del cual se construye el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ y el escalar de curvatura $R = R^\mu_\mu$. Finalmente, la interacción gravitatoria se describe mediante la siguiente acción (Hilbert-Einstein)

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x + \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x$$

Lo cual lleva a la siguiente ecuación de movimiento, la ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Donde $G_{\mu\nu}$, aquí definido, es el tensor de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento debido a los campos de materia presentes.

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}}$$

Es importante notar que, a pesar de haber expresado estas identidades en componentes por brevedad, es perfectamente posible enunciarlas de forma completamente independiente de coordenadas, por lo que esta teoría es invariante bajo difeomorfismos.

1.2. Convenciones

Son tantas las convenciones de signos y unidades como textos hay sobre relatividad general. A lo largo de este trabajo, la signatura de la métrica será $(+,-,-,-)$, los signos en la ecuación de Einstein tal como se muestra en la sección anterior y el tensor de curvatura, explícitamente, es

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}$$

A partir de ahora, tomaremos un sistema de unidades geometrizado, en el que $G = c = 1$. Cuando sea preciso obtener resultados numéricos, basta con multiplicar por potencias correspondientes de G y c para obtener las dimensiones apropiadas.

Capítulo 2

Estrellas Relativistas

2.1. Derivación dinámica de los perfiles de presión y densidad

En primer lugar, revisemos la descripción en el marco de la relatividad general de objetos compactos estáticos y esféricamente simétricos. En coordenadas apropiadas, la forma más general que puede adquirir una métrica con estas propiedades es la siguiente

$$ds^2 = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\phi(r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{2.1}$$

Donde Ω representa las variables angulares esféricas y los potenciales métricos ν y ϕ se introducen en esta forma por conveniencia operativa. Supongamos ahora, en primera aproximación, que la materia que compone el objeto pueda describirse como un fluido perfecto. Es sabido que el tensor energía-momento que describe dicho sistema puede expresarse como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \tag{2.2}$$

Donde ρ y p representan la densidad de energía y la presión, funciones que dependerán radialmente de la posición. u^μ es la cuadrivelocidad del fluido, localmente en reposo y cumpliendo que $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$. Como suponemos un objeto estático, la trivelocidad del fluido será nula, y $u^\mu = \delta_0^\mu/\sqrt{g_{tt}}$, siendo δ la delta de Kronecker. En términos de los potenciales métricos las componentes relevantes del tensor de Einstein pueden expresarse como

$$G_{tt} = -e^{2(\nu-\phi)}\left(\frac{1}{r^2} - 2\frac{\phi'}{r}\right) + \frac{e^{2\nu}}{r^2} \tag{2.3}$$

$$G_{rr} = -\left(\frac{1}{r^2} + 2\frac{\nu'}{r}\right) + \frac{e^{2\phi}}{r} \tag{2.4}$$

$$G_{\theta\theta} = -r^2 e^{-2\phi}\left(\nu'' + \nu'^2 - \phi'\nu' + \frac{\nu' - \phi'}{r}\right) \tag{2.5}$$

Donde el símbolo de prima significa derivación con respecto a r. Por otra parte,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

Y sus correspondientes componentes relevantes son

$$T_{tt} = \rho e^{2\nu} \tag{2.7}$$

$$T_{rr} = -p e^{2\phi} \tag{2.8}$$

$$T_{\theta\theta} = -p r^2 \tag{2.9}$$

Igualando ambos tensores

$$e^{2(\nu-\phi)}\left(\frac{1}{r^2} - 2\frac{\phi'}{r}\right) - \frac{e^{2\nu}}{r^2} = -8\pi\rho e^{2\nu} \tag{2.10}$$

$$-\left(\frac{1}{r^2} + 2\frac{\nu'}{r}\right) + \frac{e^{2\phi}}{r} = -8\pi p e^{2\phi} \tag{2.11}$$

$$e^{-2\phi}\left(\nu'' + \nu'^2 - \phi'\nu' + \frac{\nu' - \phi'}{r}\right) = 8\pi p \tag{2.12}$$

La ecuación (2.10) puede reescribirse como

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r\left(1 - e^{-2\phi(r)}\right)\right] = 8\pi\rho \tag{2.13}$$

Que puede integrarse para obtener

$$e^{-2\phi(r)} = 1 - \frac{8\pi}{r}\int_0^r \rho(s)s^2 ds = 1 - \frac{2m(r)}{r} \tag{2.14}$$

Donde definimos $m(r)$, representando un equivalente a la masa total contenida en una esfera de radio r

$$m(r) = 4\pi\int_0^r s^2\rho(s)ds \tag{2.15}$$

Las ecuaciones (2.10),(2.11) proporcionan expresiones para ϕ' y ν' en términos de ρ y p exclusivamente. Tomando la derivada de (2.11) podemos obtener una expresión para ν'' y elevando también dicha ecuación al cuadrado, una última expresión para ν'^2. El cálculo no aporta especial interés y ha sido extensamente discutido en la literatura [17]. Recapitulando, a partir de las componentes tt y rr de la ecuación de Einstein obtenemos expresiones para $\phi', \phi, \nu', \nu'^2$ y ν'' en términos exclusivamente de ρ, p' y p. Sustituyendo en la ecuación (2.12) es posible obtener finalmente la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, que determina los perfiles de densidad de energía y presión en el interior de la estrella

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{[m(r) + 4\pi r^3 p(r)]\,[\rho(r) + p(r)]}{r^2\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)} \tag{2.16}$$

Esta ecuación ha de resolverse en conjunto con (2.14) para formar un sistema completo de ecuaciones diferenciales, es decir, junto con la ecuación

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{2.17}$$

Recordando la expresión (2.15), lo único necesario para resolver estas ecuaciones es una ecuación de estado, es decir, una expresión de la forma $p = p(\rho)$ o alternativamente $\rho = \rho(p)$ cuya forma dependerá del contenido de la estrella.

2.2. Derivación termodinámica

En las últimas décadas, diversos resultados parecen apuntar a una interpretación termodinámica en relatividad general. Los trabajos de Hawking invitan a una interpretación de las leyes mecánicas de los agujeros negros en términos de análogos a las leyes ordinarias de la termodinámica[21][3]. Tratando objetos compactos W.J. Cocke [10] describió en 1965 un principio de máxima entropía para esferas fluidas auto-gravitantes. Mostró que las configuraciones que hacían extremal la entropía coincidían con las configuraciones de equilibrio predichas por la ecuación de Einstein. Asimismo, Sorkin, Wald y Zhang [35] desarrollaron en 1981 un principio similar, restringido a esferas de radiación.

Revisaremos aquí esta formulación, con el objetivo de recobrar la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff y más adelante generalizar este procedimiento. Comenzamos con la primera ley de la termodinámica

$$TdS = dE + pdV - \mu dN \tag{2.18}$$

Donde S representa la entropía total, E la energía interna, N el número de partículas, μ el potencial químico y T la temperatura local. En términos de variables intensivas

$$Td(sV) = d(\rho V) + pdV - \mu d(nV) \tag{2.19}$$

Es decir

$$TsdV + TVds = \rho dV + Vd\rho + pdV - \mu ndV - \mu Vdn \tag{2.20}$$

Si aplicamos esta expresión para un volumen unidad obtenemos

$$Tds = d\rho - \mu dn \tag{2.21}$$

Multiplicando (2.21) por V y restando (2.20) llegamos a

$$s = \frac{1}{T}(\rho + p - \mu n) \tag{2.22}$$

La entropía será, recordando la expresión (2.14) para el potencial métrico λ

$$S = \int_0^R s(r)dV^{(3)} = \int_0^R s(r)e^{\phi(r)}r^2 drd\Omega = 4\pi \int_0^R \frac{r^2 s(r)}{\sqrt{1-\frac{2m(r)}{r}}}dr \tag{2.23}$$

De igual forma definimos el número total de partículas

$$N = 4\pi \int_0^R \frac{r^2 n(r)}{\sqrt{1-\frac{2m(r)}{r}}}dr \tag{2.24}$$

Requeriremos que la entropía sea extremal manteniendo constante el número de partículas, por lo que planteamos el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}(m, m', n) = [s(\rho(m')), n) + \lambda n(r)] \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} r^2 \tag{2.25}$$

El símbolo $'$ denota d/dr y λ es un multiplicador de Lagrange. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n} = 0 \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} + \frac{d}{dr}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m'} = 0 \tag{2.27}$$

La ecuación (2.26) queda

$$\frac{\partial s}{\partial n} + \lambda = 0 \tag{2.28}$$

Que, recurriendo a (2.22) se reduce a

$$\frac{\mu}{T} = \lambda \tag{2.29}$$

Por otra parte

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = [s(r) + \lambda n(r)] \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{3}{2}} r \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m'} = \frac{\partial s}{\partial m'} \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} r^2 = \frac{\partial s}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial m'} \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} r^2 \tag{2.31}$$

Usando (2.15), (2.22)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m'} = \frac{1}{T}\frac{1}{4\pi r^2} \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} r^2 = \frac{1}{4\pi T} \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.32}$$

Derivando

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m'} = \frac{\left(\frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2}\right) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{T'}{T}}{4\pi T (r - 2m)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.33}$$

Usando las ecuaciones (2.22) y (2.29) podemos expresar el término $s+\lambda n$ como $(\rho+p)/T$, con lo que finalmente la ecuación (2.30) queda

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = \frac{\rho + p}{T}\left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{3}{2}} r \tag{2.34}$$

En conjunto, la ecuación de Euler-Lagrange queda

$$\frac{T'}{T} r^2 \left[1 - \frac{2m}{r}\right] = -(m + 4\pi r^3 p) \tag{2.35}$$

Ahora falta eliminar la dependencia con T. Partimos de (2.29) para obtener que $\mu' = \lambda T'$. Despejando la presión en (2.22) llegamos a que su diferencial es

$$dp = d(Ts) - d\rho + d(\mu n) = sdT + Tds - d\rho + nd\mu + \mu dn \tag{2.36}$$

Usando la expresión previa para la diferencial de la entropía (2.21) podemos reducir esta última ecuación a

$$dp = sdT + nd\mu \tag{2.37}$$

Con lo cual, derivando con respecto a r y recordando $\mu' = \lambda T'$, así como $s+\lambda n = (\rho+p)/T$

$$\frac{dp}{dr} = sT' + n\mu' = sT' + n\lambda T' = \frac{T'}{T}(\rho + p) \tag{2.38}$$

Con esto podemos eliminar la dependencia con la temperatura en (2.35) para recobrar finalmente la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (2.16).

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{[m(r) + 4\pi r^3 p(r)]\,[\rho(r) + p(r)]}{r^2\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)} \tag{2.39}$$

El interés de este procedimiento, más allá de una posible discusión sobre la analogía termodinámica de la relatividad general, es haber obtenido la ecuación TOV a partir de un procedimiento puramente clásico, únicamente habiendo empleado el elemento de volumen dado por la métrica (2.1), e implícitamente, la componente tt de las ecuaciones de Einstein

(2.10) para relacionar el potencial métrico ϕ con m. En el procedimiento mostrado en la sección 2.1, es necesario trabajar con todos los potenciales métricos y posteriormente realizar manipulaciones *ad hoc* para eliminar la dependencias en ν, ϕ y sus derivadas y obtener así una ecuación en términos de ρ y p. Como veremos en la siguiente sección, en teorías más allá de la relatividad general este procedimiento es más complicado, pues las ecuaciones de campo no son tan sencillas como en este caso.

Capítulo 3

Teorías $f(R)$

3.1. Motivación

Desde el origen de la propia relatividad general han surgido posibles modificaciones a la teoría. Originalmente se mostraron como meras exploraciones para comprender la nueva teoría y ponerla a prueba, sin embargo, posteriores hallazgos motivaron la búsqueda de correcciones al modelo. En la década de los 60, intentos de cuantizar la gravedad probaron que la relatividad general no es renormalizable, y por lo tanto no puede construirse una teoría cuántica al uso. La adición de términos de mayor orden en la curvatura probó ser capaz de proporcionar resultados prometedores [42], algo que fue corroborado por diversos autores [40][5][6]. Además, observaciones cosmológicas como la expansión del universo en tiempos tardíos puede ser explicada considerando también ciertas modificaciones de este tipo [39]. Para más detalles consultar [9][37][33].

Las teorías $f(R)$ consisten en modificar la acción de Hilbert-Einstein, sustituyendo el escalar de curvatura R por una función general del mismo. El interés de estas modificaciones consiste en que son suficientemente generales como para describir las propiedades de las correcciones de mayor orden a la relatividad general, pero siendo a la par suficientemente simples como para trabajar con ellas con facilidad.

3.2. Acción y ecuaciones de campo

Como se ha anticipado, las teorías $f(R)$ consisten en tomar la siguiente modificación de la acción

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}f(R)\mathcal{L} + S_m \tag{3.1}$$

Donde S_m representa la contribución de los campos de materia. Es importante notar que consideraremos variaciones con respecto a la métrica a la hora de obtener las ecuaciones de campo. Existe otro procedimiento, denominado formalismo de Palatini, en el que se consideran variaciones independientes con respecto a la métrica y a la conexión. En relatividad general son equivalentes, mientras que no lo son en otras teorías. No nos ocuparemos aquí de dicho formalismo. Para más detalles consultar [7]. Tomando variaciones con respecto a la métrica, conocido como formalismo de teorías métricas pueden obtenerse las ecuaciones de campo

$$\frac{df(R)}{dR}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \left[\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box\right]\frac{df(R)}{dR} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{3.2}$$

Donde $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ denota el operador d'Alembertiano. La obtención de estas ecuaciones de campo no es para nada trivial, pero un estudio en profundidad se sale del objetivo de este texto. Para una discusión más detallada ver [36].

Un aspecto a considerar es la conservación de la energía en estas teorías. En relatividad general, las identidades de Bianchi garantizan que

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 = \nabla_\mu T^{\mu\nu} \tag{3.3}$$

Y el tensor energía-momento tiene divergencia nula. A priori, este no tiene por qué ser el caso si introducimos una modificación en la acción. Sin embargo, tomando la divergencia del miembro izquierdo en (3.2), definiendo $f' = df/dR$

$$8\pi\nabla^\mu T_{\mu\nu} = (\nabla^\mu f')R_{\mu\nu} + f'\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu f - [\Box\nabla_\nu - \nabla_\nu\Box]f' \tag{3.4}$$

Usando la regla de la cadena y la definición del tensor de Ricci esta expresión se reduce a

$$(\nabla^\mu f')R_{\mu\nu} + f'\nabla^\mu(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R) - R_{\mu\nu}\nabla^\mu f' = 0 \tag{3.5}$$

Los sumandos primero y último se cancelan mutuamente y en el segundo, el término entre paréntesis es precisamente el tensor de Einstein, que tiene divergencia nula, por lo que efectivamente se cumple aquí también la ley usual de conservación de la energía.

Evaluando la traza de las ecuaciones de campo (3.2) podemos observar una diferencia importante con la relatividad general. En GR, la traza de la ecuación de Einstein es $R = 8\pi T$, donde T es la traza del tensor energía momento. Sin embargo, en las teorías $f(R)$

$$Rf(R) - 2\frac{df(R)}{dR} + 3\Box\frac{df(R)}{dR} = 8\pi T \tag{3.6}$$

Aquí, la relación entre T y R no es algebraica, sino diferencial. Para ilustrar la complicación añadida que esto supone, recurramos al teorema de Birkhoff [4]. Este asegura que cualquier solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío ($T = 0$) debe ser estática y asintóticamente plana, es decir, debe ser la solución de Schwarzschild [43]. Esto ya no es cierto, puesto que existen soluciones de la ecuación modificada con $R \neq 0$ para $T = 0$.

Capítulo 4

Ecuación TOV en teorías $f(R)$

4.1. Derivación dinámica

Una vez más, para probar la potencia del método termodinámico, obtendremos el análogo a la ecuación TOV en las teorías $f(R)$ mediante el método clásico. El desarrollo de las ecuaciones de campo ha sido tratado en la literatura [2]. Las componentes tt y rr proporcionan ($'$ denota d/dr)

$$8\pi\rho = \frac{1}{2}f(R)+\left[\frac{1}{r^2}+\frac{e^{-2\phi}(2r\phi'-1)}{r^2}-\frac{R}{2}\right]\frac{df}{dR}+e^{-2\phi}\left(\phi'-\frac{2}{r}\right)\frac{df}{dR}'-e^{-2\phi}\frac{df}{dR}'' \tag{4.1}$$

$$8\pi p = -\frac{1}{2}f(R)+\left[-\frac{1}{r^2}+\frac{R}{2}+\frac{e^{-2\phi}(2r\nu'+1)}{r^2}\right]\frac{df}{dR}+e^{-2\phi}\left(\nu'+\frac{2}{r}\right)\frac{df}{dR}' \tag{4.2}$$

Para eliminar la dependencia con los potenciales métricos, usamos en primer lugar (2.14) para expresar ϕ, ϕ' en términos de m, m'. Luego, dado que hemos probado la ley de conservación de la energía en el capítulo anterior, podemos obtener una expresión para ν' a partir de la divergencia del tensor energía-momento

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad p' = -(\rho+p)\nu' \tag{4.3}$$

Incorporando todos estos elementos obtenemos finalmente la ecuación TOV modificada

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho+p)\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{2}{r}\frac{df}{dR}+\frac{df}{dR}'\right)^{-1}\left[8\pi p+\frac{2m}{r^3}\frac{df}{dR}+\frac{1}{2}f(R)-\frac{R}{2}\frac{df}{dR}-\frac{2}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{df}{dR}'\right] \tag{4.4}$$

La ecuación (4.1) supone el análogo de (2.17), usando (2.14) para sustituir ϕ y, a partir de esta misma relación

$$\phi' = \frac{1}{r}\left(m'-\frac{m}{r}\right)\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} \tag{4.5}$$

4.2. Derivación termodinámica

Procedemos ahora a mostrar un cálculo similar al mostrado en la sección 2.2. Si usamos (2.22), suponiendo una ecuación de estado $p = p(\rho)$

$$Ts = \rho(m, m') + p(\rho(m, m')) - \mu n \tag{4.6}$$

La diferencia con respecto al caso en GR estriba en que ahora ρ no sólo depende de m' como en la ecuación (2.17), sino que, a través de la dependencia mostrada en (4.1) con λ', la densidad de energía depende también de m.

Planteamos el mismo lagrangiano que en la sección 2.2

$$\mathcal{L}(m, m', n) = [s(\rho(m, m')), n) + \lambda n(r)] \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} r^2 \tag{4.7}$$

La ecuación de Euler-Lagrange en la variable n aporta el mismo significado que en el caso de GR

$$\mu = \lambda T \tag{4.8}$$

Por otra parte, para las ecuaciones de Euler-Lagrange en la variable m

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = (s + \lambda n) r \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{3}{2}} + \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} r^2 \frac{\partial s}{\partial m} \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m'} = \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} r^2 \frac{\partial s}{\partial m'} \tag{4.10}$$

Calculamos las derivadas de la entropía. Usando (2.22), (4.1) y (4.5)

$$\frac{\partial s}{\partial m'} = \frac{\partial s}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \phi'} \frac{\partial \phi'}{\partial m'} = \frac{1}{T} \frac{\partial \rho}{\partial \phi'} \frac{1}{(r - 2m)} = \frac{1}{8\pi T} \left[\frac{2}{r^2} \frac{df}{dR} + \frac{1}{r} \frac{df}{dR}'\right] \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial s}{\partial m} = \frac{\partial s}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial m} + \frac{\partial \rho}{\partial \phi'} \frac{\partial \phi'}{\partial m}\right] = \frac{1}{T} \frac{1}{8\pi} \left[\frac{-2}{r} \left(\frac{2r\phi' - 1}{r^2} \frac{df}{dR} - \frac{df}{dR}'' + \left(\phi' - \frac{2}{r}\right) \frac{df}{dR}'\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r} \left(\frac{2}{r} \frac{df}{dR} + \frac{df}{dR}'\right)\right] \tag{4.12}$$

Usando la expresión para ϕ' (4.5) podemos finalmente obtener las derivadas del lagrangiano

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = (s + \lambda n) r \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{8\pi T} \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} \left(3 \frac{df}{dR}'' + 2r \frac{df}{dR}\right) \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m'} = \frac{1}{8\pi T}\left[1-\frac{2m}{r}\right]^{\frac{1}{2}}\left(2\frac{df}{dR}+r\frac{df}{dR}'\right) \tag{4.14}$$

Derivando (4.14) con respecto a r, así como eliminando el término $s+\lambda n$ mediante las ecuaciones (2.22),(4.8) podemos finalmente sustituir en la ecuación de Euler-Lagrange (2.27)

$$\begin{aligned}\frac{T'}{8\pi T^2}\left(\frac{2}{r^2}\frac{df}{dR}+\frac{1}{r}\frac{df}{dR}'\right)r^2 = \frac{1}{8\pi T}\left(-\frac{4}{r^3}\frac{df}{dR}-\frac{1}{r^2}\frac{df}{dR}'+\frac{2}{r^2}\frac{df}{dR}'+\frac{1}{r}\frac{df}{dR}''\right)r^2+ \\ +\frac{1}{8\pi T}\left(\frac{2}{r^2}\frac{df}{dR}+\frac{1}{r}\frac{df}{dR}'\right)(2r+rm'-5m)\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}- \\ -\frac{1}{8\pi T}\left(\frac{2}{r}\frac{df}{dR}''+\frac{3}{r^2}\frac{df}{dR}'\right)r^2-\frac{p+\rho}{T}r\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{4.15}$$

Recordando la relación (2.38) entre p' y T' eliminamos de nuevo la dependencia con T para obtener finalmente la ecuación TOV

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho+p)\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{2}{r}\frac{df}{dR}+\frac{df}{dR}'\right)^{-1}\left[8\pi p+\frac{2m}{r^3}\frac{df}{dR}+\frac{1}{2}f(R)-\frac{R}{2}\frac{df}{dR}-\frac{2}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{df}{dR}'\right] \tag{4.16}$$

Que coincide con (4.4). La obtención directa de esta ecuación mediante el método dinámico, aunque no se ha comentado en profundidad, encierra complicaciones y diversos pasos de cálculo, además de ser necesario usar más de una de las componentes de las ecuaciones de campo. Aquí se ve la potencia de este nuevo método. Simplemente empleando relaciones termodinámicas y la componente tt de las ecuaciones de campo es posible obtener los mismos resultados con una carga de cálculo menor.

Capítulo 5

Teorías $f(R,T)$

5.1. Motivación

Recientemente, Harko et al. [20] propusieron una generalización de las teorías $f(R)$, sustituyendo el escalar de curvatura en la acción de Hilbert-Einstein por una función arbitraria tanto de R como de T, la traza del tensor energía-momento. Diversos trabajos posteriores motivaron el interés por estas teorías para describir objetos compactos [30][25][13][27][11]. Este modelo introduce un acoplamiento no mínimo entre la geometría y la materia, y supone un paso más allá de las teorías $f(R)$ para estudiar los efectos a diversas escalas que surjen al introducir nuevas correcciones a la relatividad general.

5.2. Formulación

Esta teoría se basa en la acción

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}f(R,T) + \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \tag{5.1}$$

Realizando variaciones de la acción con respecto a la métrica se obtienen las ecuaciones de campo

$$\begin{aligned}\partial_R f(R,T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R,T)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\partial_R f(R,T) = \\ = 8\pi T_{\mu\nu} - \partial_T f(R,T)T_{\mu\nu} - \partial_T f(R,T)\Theta_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{5.2}$$

Aquí $\Theta_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}\delta T_{\alpha\beta}/\delta g^{\mu\nu}$. De nuevo, comprobemos la divergencia del tensor energía-momento para esta teoría

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{\partial_T f}{8\pi - \partial_T f}\left[(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu})\nabla^\mu ln(\partial_T f) + \nabla^\mu\Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\nu T\right] \tag{5.3}$$

En este caso, no se conserva el tensor energía-momento, en el sentido habitual en GR. Estudiaremos, como sugieren Harko et al[20], un modelo más simplificado, en el cual la corrección adquiere la siguiente forma

$$f(R,T) = R + 2\chi T \tag{5.4}$$

Donde χ es una constante que cuantifica la desviación con respecto a GR. Numerosos trabajos toman también este modelo [34][32]. Las ecuaciones de campo se reducen a

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \chi T g_{\mu\nu} + 2\chi(T_{\mu\nu} + p g_{\mu\nu}) \tag{5.5}$$

Cuyas componentes relevantes son

$$(8\pi + 3\chi)\rho = \chi p - e^{-2\phi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\phi'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{5.6}$$

$$(8\pi + 3\chi)p = \chi\rho + e^{-2\phi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \tag{5.7}$$

Si definimos variables efectivas

$$8\pi\rho_{eff} = (8\pi + 3\chi)\rho - \chi p \tag{5.8}$$

$$8\pi p_{eff} = (8\pi + 3\chi)p - \chi\rho \tag{5.9}$$

O lo que es lo mismo

$$\rho = \frac{8\pi}{\alpha^2 - \chi^2}(\alpha\rho_{eff} + \chi p_{eff}) \tag{5.10}$$

$$p = \frac{8\pi}{\alpha^2 - \chi^2}(\chi\rho_{eff} + \alpha p_{eff}) \tag{5.11}$$

Donde $\alpha = 8\pi + 3\chi$. Podemos reescribir las ecuaciones (5.6), (5.7) como

$$8\pi\rho_{eff} = e^{-2\phi}\left(\frac{2\phi'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{5.12}$$

$$8\pi p_{eff} = e^{-2\phi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \tag{5.13}$$

La ecuación (5.12) puede integrarse para definir

$$e^{-2\phi} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \tag{5.14}$$

Donde

$$m(r) = \int_0^r 4\pi\rho_{eff}(s)s^2 ds \tag{5.15}$$

La ecuación (5.3) se transforma en este modelo en

$$(4\pi + \chi)\nabla^\mu T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\chi\nabla_\nu(T + 2p) \tag{5.16}$$

Que resulta en

$$-\frac{dp}{dr} - \frac{d\nu}{dr}(\rho + p) + \frac{\chi}{8\pi + 2\chi}(\rho' - p') = 0 \tag{5.17}$$

Capítulo 6

Ecuaciones TOV en teorías $f(R,T)$

La deducción dinámica de las ecuaciones de equilibrio hidrostático para las teorías $f(R,T)$ ha sido extensamente discutida en la literatura [27][12], por lo que sólo citaremos el resultado final

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho+p)\frac{4\pi pr + \frac{m}{r^2} - \frac{\chi(\rho-3p)r}{2}}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left[1-\frac{\chi}{8\pi+2\chi}\left(1-\frac{d\rho}{dp}\right)\right]} \tag{6.1}$$

Procedemos ahora a emplear directamente el método termodinámico desarrollado en las secciones anteriores. Definimos el lagrangiano de la forma usual, recordando que para definir m empleamos esta vez ρ_{eff} en lugar de ρ.

$$\mathcal{L}(m,m',n) = [s(\rho_{eff}(m')),n) + \lambda n(r)]\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} r^2 \tag{6.2}$$

Usando (4.8), en términos de las variables efectivas

$$\mathcal{L}(m,m',n) = k\frac{\rho_{eff}+p_{eff}}{T}\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} r^2 \tag{6.3}$$

Donde $k = 8\pi/(8\pi+2\chi)$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial m} = k\frac{\rho_{eff}+p_{eff}}{T}\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{3}{2}} r \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial m'} = \frac{k}{T}\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} r^2\frac{\partial\rho_{eff}}{\partial m'} \tag{6.5}$$

Usando (5.15)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial m'} = \frac{k}{4\pi T}\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{6.6}$$

Derivando con respecto a r

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial m'} = \frac{k}{4\pi r^2 T}(m'r-m)\left[1-\frac{2m}{r}\right]^{-3/2} - \frac{k}{4\pi T}\frac{T'}{T}\left[1-\frac{2m}{r}\right]^{-1/2} = \tag{6.7}$$

$$= k\frac{\left(\frac{m'}{r}-\frac{m}{r^2}\right)-\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{T'}{T}}{4\pi T\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{3/2}}$$

Finalmente, si recordamos (2.38), la ecuación de Euler-Lagrange queda

$$4\pi p_{eff} + m = -r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{T'}{T} \tag{6.8}$$

Donde se ha usado la definición de m (5.15). Si expresamos (2.38) en variables efectivas

$$\frac{T'}{T} = \frac{p'}{\rho + p} = \frac{1}{8\pi + 4\chi} \left(\frac{\alpha p'_{eff} + \chi \rho'_{eff}}{p_{eff} + \rho_{eff}} \right) \tag{6.9}$$

Si suponemos una ecuación de estado podemos expresar $\rho'_{eff} = p'_{eff} \partial\rho_{eff}/\partial p_{eff}$. Llegamos así finalmente a la ecuación TOV modificada

$$\frac{dp_{eff}}{dr} = -(8\pi + 4\chi) \frac{(4\pi p_{eff} r^3 + m)(p_{eff} + \rho_{eff})}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\alpha + \chi \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial p_{eff}}\right)} \tag{6.10}$$

Que es el equivalente de (6.1) expresado en variables efectivas. La expresión aquí obtenida es más visual que la mostrada habitualmente en la literatura, puesto que se ve rápidamente la conexión con GR: si $f(R,T) = R$, $\chi = 0$, con lo que $\alpha = 8\pi$ y las variables efectivas se reducen a la densidad y presión ordinarias.

Conclusiones

Se han obtenido, para las teorías $f(R)$ y $f(R,T)$, las ecuaciones TOV de una forma completamente nueva. Los resultados concuerdan con los obtenidos mediante la derivación dinámica, estándar en la literatura. Sin embargo, de esta forma no hay que tratar directamente con las ecuaciones de Einstein, se ha mostrado que tan sólo es necesaria la componente tt, que proporciona una expresión de la densidad de energía en función de los potenciales métricos y sus derivadas. Así, la derivación de las ecuaciones de equilibrio hidrostático se simplifica considerablemente.

Las ecuaciones de campo, junto con la ecuación de conservación del tensor energía-momento (más la traza de las ecuaciones de campo (3.6) en el caso de la gravedad $f(R)$), proporcionan un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas con variables los potenciales métricos y la presión (más el escalar de curvatura en el caso $f(R)$). Esto hace posible la obtención de las configuraciones de equilibrio sin necesidad siquiera de la ecuación TOV (o análogos). El interés de esta expresión es simplificar los cálculos numéricos, eliminando variables que no tienen significado físico, como son los potenciales métricos, y obtener así tan sólo unas ecuaciones en las variables de interés. El procedimiento de máxima entropía simplifica aún más este proceso en teorías modificadas de gravedad, donde la obtención ortodoxa de las ecuaciones TOV es bastante más complicado que en el caso de relatividad general.

Más allá del interés que tenga este ahorro en cálculos, es importante una reflexión sobre el significado físico de este método, y lo que pueda suponer para una posible analogía termodinámica de la relatividad general [22][18][1][15]. Queda aún trabajo para averiguar si existe alguna razón más profunda por la que la gravedad y la termodinámica parezcan estar tan relacionadas. Sin ir más lejos, en este trabajo aparecen, de forma aparentemente fortuita, magnitudes y expresiones frecuentes en termodinámica. Por ejemplo, el multiplicador de Lagrange λ resulta ser el logaritmo de la actividad absoluta (2.29), magnitud frecuente en termodinámica y física estadística

$$\mathcal{A} = e^{\mu/T} = e^{\lambda}$$

O por ejemplo, la densidad lagrangiana podría relacionarse con la densidad de entalpía $h = H/V = (U + pV)/V = \rho + p$

$$s + \lambda n = \frac{\rho + p}{T} = \frac{h}{T}$$

De igual forma, podemos observar que el factor $\rho + p$ aparece frecuentemente, de hecho la densidad de energía no aparece de otra forma que no sea esta salvo en la definición de $m(r)$ (2.15). Si estas coincidencias son casuales o conllevan un significado relevante no está claro, y requiere un análisis más profundo desde el punto de vista de la termodinámica clásica.

El siguiente paso sería mejorar el modelo de estrella, puesto que está muy simplificado. En primer, suponer que la configuración sea esféricamente simétrica es una restricción importante, pues descarta que exista rotación alrededor de un eje o deformaciones de la forma esférica. Además, no se ha considerado la existencia de campos magnéticos, ni se ha discutido aquí las propiedades de la materia en el interior de la estrella, es decir, la ecuación de estado. Son temas que han sido estudiados, pero por simplicidad se han omitido en favor de modificaciones a la gravedad y el desarrollo del método de máxima entropía.

En resumen, este trabajo presenta una definición, aparentemente muy simple, de la entropía en el contexto de objetos compactos, que aparenta suponer un atajo interesante para obtener las configuraciones de equilibrio, pero no sin abrir incógnitas sobre el significado físico de tal definición, incógnitas que invitan como poco a un estudio más profundo.

Referencias

[1] M. Akbar and Rong-Gen Cai. Friedmann equations of frw universe in scalar–tensor gravity, f(r) gravity and first law of thermodynamics. *Physics Letters B*, 635(1):7–10, March 2006.

[2] Artyom V. Astashenok, Salvatore Capozziello, and Sergei D. Odintsov. Magnetic neutron stars in f(r) gravity. *Astrophysics and Space Science*, 355(2):333–341, December 2014.

[3] James M. Bardeen, Brandon D. Carter, and Stephen William Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 31:161–170, 1973.

[4] George David Birkhoff and Rudolph Ernest Langer. *Relativity and modern physics*. 1923.

[5] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2 1984.

[6] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, and I. L. Shapiro. *Effective action in quantum gravity*. 1992.

[7] Salvatore Capozziello and Mauro Francaviglia. Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications. *General Relativity and Gravitation*, 40(2–3):357–420, December 2007.

[8] Sean M. Carroll. The cosmological constant. *Living Reviews in Relativity*, 4(1), February 2001.

[9] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, and Constantinos Skordis. Modified gravity and cosmology. *Physics Reports*, 513(1–3):1–189, March 2012.

[10] W. J. Cocke. A maximum entropy principle in general relativity and the stability of fluid spheres. *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, 2(4):283–306, 1965.

[11] Amit Das, Farook Rahaman, B. K. Guha, and Saibal Ray. Compact stars in f(r,t) gravity. *The European Physical Journal C*, 76(12), November 2016.

[12] Debabrata Deb, B. K. Guha, Farook Rahaman, and Saibal Ray. Anisotropic strange stars under simplest minimal matter-geometry coupling in the f(r,t) gravity. *Physical Review D*, 97(8), April 2018.

[13] Debabrata Deb, Farook Rahaman, Saibal Ray, and B.K. Guha. Strange stars in f(r,t) gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(03):044, mar 2018.

[14] Daniel J. Eisenstein, Idit Zehavi, David W. Hogg, Roman Scoccimarro, Michael R. Blanton, Robert C. Nichol, Ryan Scranton, Hee-Jong Seo, Max Tegmark, Zheng Zheng, Scott F. Anderson, Jim Annis, Neta Bahcall, Jon Brinkmann, Scott Burles, Francisco J. Castander, Andrew Connolly, Istvan Csabai, Mamoru Doi, Masataka Fukugita, Joshua A. Frieman, Karl Glazebrook, James E. Gunn, John S. Hendry, Gregory Hennessy, Zeljko Ivezić, Stephen Kent, Gillian R. Knapp, Huan Lin, Yeong-Shang Loh, Robert H. Lupton, Bruce Margon, Timothy A. McKay, Avery Meiksin, Jeffery A. Munn, Adrian Pope, Michael W. Richmond, David Schlegel, Donald P. Schneider, Kazuhiro Shimasaku, Christopher Stoughton, Michael A. Strauss, Mark SubbaRao, Alexander S. Szalay, István Szapudi, Douglas L. Tucker, Brian Yanny, and Donald G. York. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2):560, nov 2005.

[15] Christopher Eling, Raf Guedens, and Ted Jacobson. Nonequilibrium thermodynamics of spacetime. *Physical Review Letters*, 96(12), March 2006.

[16] Sijie Gao. General maximum entropy principle for self-gravitating perfect fluid. *Physical Review D*, 84(10), November 2011.

[17] N. K. Glendenning. *Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity*. 1997.

[18] Yungui Gong and Anzhong Wang. Friedmann equations and thermodynamics of apparent horizons. *Physical Review Letters*, 99(21), November 2007.

[19] Alan H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *prd*, 23(2):347–356, January 1981.

[20] Tiberiu Harko, Francisco S. N. Lobo, Shin'ichi Nojiri, and Sergei D. Odintsov. f(r,t)gravity. *Physical Review D*, 84(2), July 2011.

[21] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43(3):199–220, August 1975.

[22] Ted Jacobson. Thermodynamics of spacetime: The einstein equation of state. *Physical Review Letters*, 75(7):1260–1263, August 1995.

[23] E. Kolb. *The Early Universe*. CRC Press, 2018.

[24] A. Linde. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. Contemporary concepts in physics. Taylor & Francis, 1990.

[25] R. Lobato, O. Lourenço, P.H.R.S. Moraes, C.H. Lenzi, M. de Avellar, W. de Paula, M. Dutra, and M. Malheiro. Neutron stars in f(r,t) gravity using realistic equations of state in the light of massive pulsars and gw170817. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(12):039, dec 2020.

[26] Charles W. Misner. The isotropy of the universe. *apj*, 151:431, February 1968.

[27] P.H.R.S. Moraes, José D.V. Arbañil, and M. Malheiro. Stellar equilibrium configurations of compact stars inf(r,t) theory of gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(06):005–005, June 2016.

[28] V. Mukhanov. Cmb, quantum fluctuations and the predictive power of inflation, 2003.

[29] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55:374–381, Feb 1939.

[30] Juan M.Z. Pretel, Sergio E. Jorás, Ribamar R.R. Reis, and José D.V. Arbañil. Radial oscillations and stability of compact stars in f(r, t) = r+ 2β t gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(04):064, apr 2021.

[31] Adam G. Riess, Louis-Gregory Sirolger, John Tonry, Stefano Casertano, Henry C. Ferguson, Bahram Mobasher, Peter Challis, Alexei V. Filippenko, Saurabh Jha, Weidong Li, Ryan Chornock, Robert P. Kirshner, Bruno Leibundgut, Mark Dickinson, Mario Livio, Mauro Giavalisco, Charles C. Steidel, Txitxo Benítez, and Zlatan Tsvetanov. Type ia supernova discoveries at z >1 from the hubble space telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *Astrophysical Journal Letters*, 607(2 I):665 – 687, 2004. Cited by: 3427; All Open Access, Bronze Open Access, Green Open Access.

[32] Hamid Shabani and Mehrdad Farhoudi. Cosmological and solar system consequences of f(r,t) gravity models. *Physical Review D*, 90(4), August 2014.

[33] S. Shankaranarayanan and Joseph P. Johnson. Modified theories of gravity: Why, how and what? *General Relativity and Gravitation*, 54(5), May 2022.

[34] Vijay Singh and C.P. Singh. Modified f(r,t) gravity theory and scalar field cosmology. *Astrophysics and Space Science*, 356, 12 2014.

[35] Rafael D. Sorkin, Robert M. Wald, and Zhen Jiu Zhang. Entropy of selfgravitating radiation. *Gen. Rel. Grav.*, 13:1127–1146, 1981.

[36] Thomas P. Sotiriou. Modified actions for gravity: Theory and phenomenology, 2007.

[37] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. $f(r)$ theories of gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 82:451–497, Mar 2010.

[38] D. N. Spergel, R. Bean, O. Doré, M. R. Nolta, C. L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, H. V. Peiris, L. Verde, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Implications for cosmology. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 170(2):377, jun 2007.

[39] Alexei A. Starobinsky. Disappearing cosmological constant in f(R) gravity. *JETP Lett.*, 86:157–163, 2007.

[40] K. S. Stelle. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 16:953–969, Aug 1977.

[41] Richard C. Tolman. Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.*, 55:364–373, Feb 1939.

[42] R. Utiyama and Bryce S. DeWitt. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. *J. Math. Phys.*, 3:608–618, 1962.

[43] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984.

[44] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, 1972.

[45] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, Jan 1989.