



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

Manipulación de fermiones de Majorana en sistemas fotónicos

Autor: Ángel Fernández Sánchez

**Tutores: Fernando Javier Gómez-Ruiz y Luis Miguel Nieto Calzada
2023-2024**

Resumen: La Computación Cuántica es una rama dentro de la Mecánica Cuántica cuyo crecimiento se predice que será una revolución en el mundo de la informática. Para alcanzar dicho crecimiento, a lo largo de las últimas décadas no han sido pocos los intentos de hallar un *hardware* adecuado para el desarrollo de esta rama, debido a su alto coste financiero y su extremada sensibilidad a perturbaciones externas. En este trabajo, se realizará un estudio en profundidad de la interacción radiación-materia, base fundamental de los ordenadores cuánticos, y posteriormente se profundizará en el campo de la Computación Cuántica Topológica, donde se introducirá el concepto de fermiones de Majorana. La manipulación de estas cuasipartículas mediante cavidades ópticas, teóricamente, puede dar lugar a un hardware adecuado para el desarrollo de ordenadores cuánticos protegidos topológicamente.

Palabras clave: Computación Cuántica Topológica, Óptica Cuántica, Modelo de Jaynes-Cummings, Qubit, Fermión de Majorana, Cavidad Óptica, Cadena de Kitaev.

Abstract: Quantum Computing is a branch within Quantum Mechanics predicted to revolutionize the world of computing. Achieving this growth has required significant efforts over the past decades to find suitable hardware due to its high financial cost and extreme sensitivity to external disturbances. This study will conduct an in-depth examination of the interaction between radiation and matter, the foundational basis of quantum computers. Subsequently, we will delve into the field of Topological Quantum Computing, introducing the concept of Majorana fermions. The manipulation of these quasiparticles using optical cavities theoretically offers a suitable hardware platform for the development of topologically protected quantum computers.

Key words: Topological Quantum Computing, Quantum Optics, Jaynes-Cummings Model, Qubit, Majorana Fermion, Optical Cavity, Kitaev Chain.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Introducción histórica	8
1.2. Computación Cuántica Topológica	9
2. Modelo de Jaynes-Cummings	11
2.1. Introducción	11
2.2. Diagonalización Exacta modelo de Jaynes-Cummings	13
2.3. Conmutador de H y N	16
2.4. Dinámica del modelo de Jaynes-Cummings	19
3. Fermiones de Majorana	27
3.1. Descripción teórica	28
3.2. Diagonalización exacta del Hamiltoniano de Kitaev	32
Conclusiones	39
A. Códigos Mathematica	41
B. Códigos Python	45
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción

El principal objetivo de este trabajo es llevar a cabo una revisión bibliográfica sobre la interacción radiación-materia, los fermiones de Majorana y su aplicación topológica en el ámbito de la computación cuántica. Para ello, en primer lugar se planteará una introducción histórica, en la cual se comentarán los motivos por los cuales a lo largo del último siglo ha aumentado el interés en el estudio de sistemas fotónicos, y una breve inmersión en la Computación Cuántica Topológica. A continuación, se realizará un análisis detallado del sistema más simple posible mediante el modelo de Jaynes-Cummings, aplicando la aproximación de onda rotante, la cual se explicará más adelante. Una vez establecidos estos conceptos históricos y teóricos y, tras un estudio breve pero preciso de la dinámica de dicho modelo, se introducirá el concepto de fermión de Majorana. Se asentará su correspondiente base teórica y, finalmente, se comprobarán los resultados teóricos esperados mediante algunas simulaciones. Al introducir cavidades (enlazando así con el primer capítulo) en sistemas unidimensionales conformados por estos fermiones, conocidos como cadenas de Kitaev, se podrán obtener conclusiones y resultados tanto experimentales como teóricos sobre los beneficios del uso de este tipo de fermiones en el marco de la computación cuántica topológica. Finalmente, se presentarán las principales conclusiones obtenidas de la elaboración de este trabajo. Estas conclusiones no solo destacarán los conocimientos teóricos adquiridos en óptica cuántica, sino que también harán hincapié en los objetivos alcanzados durante el desarrollo de este estudio.

1.1. Introducción histórica

A comienzos del siglo XX, Max Planck realizó un estudio de la radiación térmica del llamado cuerpo negro, que por aquel entonces era un problema abierto debido a la imposibilidad de modelizar dicho sistema a partir de resultados clásicos. Planck propone la cuantización de la energía, teorizando la ecuación $E = h\nu$. Esto es considerado el nacimiento de la Física Cuántica.

Basándose en el trabajo de Planck, en el año 1905, Albert Einstein propone la teoría del efecto fotoeléctrico, que fue pilar fundamental de la Mecánica Cuántica. Esta fue la primera modelización cuántica de la interacción radiación-materia. De la misma forma, introduce el concepto de fotón para describir la radiación a partir de partículas, idea que se consideró válida por las evidencias experimentales que la respaldaron.

En el año 1913, Niels Bohr introduce los “niveles de energía”, es decir, una cuantización espacial de los electrones dentro de los átomos. La idea principal de este concepto se basa en que, dentro de un átomo, los electrones únicamente pueden existir en estados de energía bien definidos.

Casi diez años más tarde, en el año 1922, Stern y Gerlach descubrieron que los electrones y los átomos poseen propiedades intrínsecas, y además probaron que la orientación del momento angular está cuantizada. No sería hasta el año 1925 que Uhlenbeck y Goudsmit descubrieron a partir de estas ideas el espín del electrón.

En ese mismo intervalo temporal, de Broglie postula la dualidad onda-corpúsculo de la materia, en la que plantea la ecuación $\lambda = h/p$, lo cual afirma que, además de que las ondas tienen naturaleza corpuscular, la materia tiene igualmente naturaleza ondulatoria. Esto, que fue confirmado años más tarde mediante difracción de electrones con rayos X, haría que recibiera un premio Nobel en el año 1929.

Uno de los hitos más importantes de la Mecánica Cuántica fue el postulado de la ecuación de Schrödinger: en el año 1925, Erwin Schrödinger, a partir de los estudios publicados por de Broglie, plantea una ecuación que describe la evolución de cualquier sistema físico a partir de su Hamiltoniano. No fueron pocas las consecuencias de este descubrimiento, entre ellas que finalmente se había encontrado un marco matemático riguroso para estudiar los sistemas cuánticos, o el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Años más tarde, el físico Isidor Isaac Rabi descubre la resonancia magnética nuclear gracias a todos los importantes avances dentro del ámbito de la Mecánica Cuántica, por lo que recibiría un premio Nobel. Nos centraremos en la aproximación que realizó para modelizar este fenómeno mediante un sencillo modelo, llamado modelo de Rabi, utilizado para describir procesos de interacción entre radiación y materia en los cuales el acoplamiento es débil, la denominada aproximación de onda rotante.

A partir de esta aproximación, en el año 1963 Edwin Jaynes y Fred Cummings publican su tesis en la cual desarrollan el modelo de Jaynes-Cummings, donde se describe un sistema de dos niveles cerrado que interactúa con una cavidad óptica. En el primer capítulo profundizaremos en este modelo, en su desarrollo dentro del marco de la Mecánica Cuántica y en sus importantes consecuencias dentro de la teoría de interacción-materia. [6]

1.2. Computación Cuántica Topológica

Con el desarrollo de la ciencia y la tecnología, se descubrieron nuevas formas de explotar diversos recursos físicos. La historia del desarrollo de la computación representa la culminación de años de avances tecnológicos que comenzaron con las ideas iniciales de Charles Babbage y la creación del primer ordenador por el ingeniero alemán Konrad Zuse en 1941. Desde entonces, los ordenadores han pasado de ocupar casi edificios enteros a poder estar contenidos en la palma de una mano gracias al uso de transistores, microchips y circuitos integrados.

La materia a pequeña escala obedece las reglas de la mecánica cuántica, que son bastante diferentes de las reglas clásicas que determinan las propiedades de las puertas lógicas convencionales, base de la computación en la actualidad. Por lo tanto, si los ordenadores cada vez serán más pequeños en el futuro, la nueva tecnología cuántica debe reemplazar o complementar los recursos de los que disponemos ahora mismo.

Con el tamaño de los componentes en los ordenadores clásicos reduciéndose al punto donde su comportamiento está prácticamente dominado por la teoría cuántica en lugar de la teoría clásica, se ha comenzado a investigar el potencial de este comportamiento para la computación. Sorprendentemente, una computadora cuyos componentes funcionen de manera totalmente cuántica

tica es más poderosa de lo que cualquier computadora clásica puede ser hoy día. [9]

Un ordenador cuya memoria es exponencialmente más grande que su tamaño físico aparente y que, además, puede manipular un conjunto exponencial de entradas simultáneamente mediante el uso de los postulados de la mecánica cuántica y de las propiedades cuánticas de la materia es un ordenador cuántico.

En un ordenador cuántico, la unidad fundamental de información se llama bit cuántico o *qubit*. Un *qubit* puede existir no solo en un estado correspondiente al estado lógico 0 o 1 como en un bit clásico, sino también en estados correspondientes a una superposición de esos estados clásicos. Esta característica es, precisamente, lo que los convierte en una herramienta muy poderosa dentro del mundo de la informática y de la computación, ya que dan lugar al entrelazamiento cuántico, concepto en el que no profundizaremos en este documento [8].

En matemáticas, la topología es el estudio de las propiedades globales de las variedades que son invariantes ante pequeñas deformaciones locales. Sin embargo, en el mundo cuántico este tipo de variaciones son de extrema importancia. Para almacenar y evolucionar coherentemente un estado cuántico puro es necesario tener un cuidado excepcional para que ningún ruido externo interfiera y que la evolución sea la deseada. Este es el desafío fundamental clave en la computación cuántica: almacenar de manera robusta estados cuánticos durante largos periodos y evolucionarlos de acuerdo con el estado buscado.

La computación cuántica topológica es un enfoque para almacenar y manipular información cuántica que emplea cuasipartículas exóticas, llamadas anyones. Los anyones son interesantes por sí mismos en la física fundamental, ya que generalizan las estadísticas de los bosones y fermiones. Estas cuasipartículas pueden presentar un comportamiento topológico, es decir, invariable frente a pequeñas alteraciones externas. Cuando se utilizan anyones para codificar y procesar información cuántica, este comportamiento topológico proporciona una resistencia adecuada contra errores de control y perturbaciones [7].

Capítulo 2

Modelo de Jaynes-Cummings

2.1. Introducción

La interacción entre la luz y la materia es uno de los fenómenos naturales más habituales dentro del marco de la física. En este documento, centraremos nuestra atención en estudiar este fenómeno a nivel cuántico. Los postulados de la mecánica cuántica proporcionan el marco conceptual adecuado para dicho estudio.

Desde el punto de vista fundamental, la interacción radiación-materia se produce cuando una onda de radiación electromagnética interacciona de diferentes formas con un sistema determinado. Esta interacción puede producirse de múltiples formas: la materia puede absorber la onda electromagnética, emitirla o dispersarla. Estas ondas electromagnéticas están formadas por partículas elementales llamadas fotones. La absorción por parte de la materia de una onda electromagnética se basa en la colisión de estos fotones de la onda con dicho sistema, mientras que la emisión se basa precisamente en la liberación de un fotón. Esto da lugar a una transferencia de momento y, por tanto, de energía al sistema, dependiente de la energía de los fotones incidentes, que a su vez depende de la frecuencia de dichos fotones ($E = \hbar\nu$).

Pasemos ahora a comentar el modelo de Jaynes-Cummings [2]. Este es un modelo teórico que describe átomos en una cavidad óptica cerrada des-

critico como un sistema de dos niveles o (*qubit*) interaccionando con una onda electromagnética. El esquema es el siguiente:

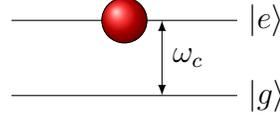


Figura 2.1: Dibujo esquemático del sistema que se va a estudiar

En el esquema de la Figura 2.1, el estado $|g\rangle$ representa el estado fundamental, y el estado $|e\rangle$ el primer estado excitado, y conforman una base del sistema para un solo átomo. Cada átomo únicamente puede estar en uno de esos dos estados. Ahora, para modelizar un sistema con n fotones, utilizaremos la base de Fock $\{|n\rangle\}$, que son autoestados del operador número $n = a^\dagger a$ y representan el número de fotones del sistema.

Una vez definidas estas bases, realizando un producto tensorial de ambas obtenemos una base que nos ayudará a trabajar con un número n de fotones mediante este modelo.

$$|e, n\rangle = |e\rangle \otimes |n\rangle, \quad |g, n\rangle = |g\rangle \otimes |n\rangle.$$

A continuación, se presenta el Hamiltoniano que modeliza la interacción radiación-materia

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1}^{N_q} \frac{\epsilon_\alpha}{2} \hat{\sigma}_\alpha^z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{\alpha=1}^{N_q} \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{N_q}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{\sigma}_\alpha^x, \quad (2.1)$$

donde N_q es el numero de qubits en la cavidad, ϵ_α la frecuencia del qubit α , $\hat{\sigma}_\alpha^z$ la matriz de Pauli asociada al momento angular en el eje Z para la partícula α , ω_c la frecuencia natural de la cavidad, \hat{a}^\dagger y \hat{a} los operadores creación y aniquilación respectivamente, λ_α es el factor de acoplamiento luz-materia, y $\hat{\sigma}_\alpha^x$ la matriz de Pauli asociada al momento angular en el eje X para la partícula α .

Teniendo en cuenta que en todo momento estamos tomando $\hbar = 1$, el primer término del Hamiltoniano da cuenta de la energía debida al estado de excitación de todos y cada uno de los qubits que conforman el sistema

(energía materia), el segundo término es una aproximación a un oscilador armónico de nuestro sistema, utilizando el operador número ($\hat{a}^\dagger \hat{a}$) para contar el número de fotones y multiplicándolo por la frecuencia de la cavidad (energía radiación) y, finalmente, el último término hace referencia a la energía debida a la interacción entre la radiación y la materia.

2.2. Diagonalización Exacta modelo de Jaynes-Cummings

Particularizando la ecuación (2.1) a un único qubit, obtenemos la siguiente expresión:

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2} \hat{\sigma}_z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \lambda (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{\sigma}_x. \quad (2.2)$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-$ y desarrollando la expresión, se tiene que:

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2} \hat{\sigma}_z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \lambda (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a} \hat{\sigma}_-).$$

Llegados a este punto, aplicamos la aproximación de onda rotante, que se basa en que anulamos los operadores que no preservan el estado del sistema, es decir, no conservan el número de excitaciones, que en este caso son $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+$ (sube un nivel y crea un fotón) y $\hat{a} \hat{\sigma}_-$ (baja un nivel y absorbe un fotón). De esta forma, obtenemos el modelo de Jaynes-Cummings:

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2} \hat{\sigma}_z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \lambda (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+). \quad (2.3)$$

Tal y como acabamos de describir, este Hamiltoniano preserva el número de excitaciones; por lo tanto, estamos en un espacio que, necesariamente, solo puede tener dos niveles, que escritos en la base de producto tensorial definida en la introducción teórica serán: $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$. Esto es así excepto cuando $n = 0$, caso en el que solo tendremos el nivel $|g, 0\rangle$. De esta forma, hemos obtenido la base para el modelo de Jaynes-Cummings:

$$\{|g, 0\rangle, |g, n+1\rangle, |e, n\rangle\}.$$

El objetivo de esta sección será diagonalizar el Hamiltoniano de la ecuación 3 en la base que acabamos de definir. En primer lugar, para el estado $|g, 0\rangle$, obtenemos que:

$$\langle g, 0 | \hat{H}_0 | g, 0 \rangle = -\frac{\epsilon}{2}.$$

La notación utilizada para el Hamiltoniano se debe a que, para un sistema de N_q qubits, el Hamiltoniano total del sistema, teniendo en cuenta el obtenido para un único qubit, es el siguiente:

$$\hat{H}_{JC} = \otimes_{n=0}^{N_q} \hat{H}_n.$$

La matriz \hat{H}_{JC} será diagonal por bloques. Por lo tanto, para un n cualquiera en la base $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$, cambiando la notación $\lambda = g$ para que coincida con la bibliografía utilizada, obtenemos que \hat{H}_n es de la forma:

$$\hat{H}_n = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{2} + n\omega_c & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & -\frac{\epsilon}{2} + (n+1)\omega_c \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Por comodidad en las expresiones siguientes, definiremos una nueva constante de nuestro problema, la desintonización, que se define como

$$\Delta = \epsilon - \omega_c.$$

Por lo tanto, podemos reescribir la matriz de la ecuación (2.4) como:

$$\hat{H}_n = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{2} + n\omega_c + \frac{\omega_c}{2} - \frac{\omega_c}{2} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & -\frac{\epsilon}{2} + n + \omega_c + \frac{\omega_c}{2} + \frac{\omega_c}{2} \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta la definición que hemos hecho de Δ , obtenemos:

$$\hat{H}_n = \begin{pmatrix} (n + \frac{1}{2})\omega_c + \frac{\Delta}{2} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & (n + \frac{1}{2})\omega_c - \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora los autovalores de esta matriz, que son los siguientes:

$$E_{\pm}^n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega_c \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(g\sqrt{n+1}\right)^2}.$$

Podemos reescribir esta ecuación de la siguiente forma:

$$E_{\pm}^n = \omega_c \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2\omega_c}\right)^2 + \left(\frac{g}{\omega_c}\right)^2 (n+1)} \right].$$

Definiendo $\tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{\omega_c}$ y $\tilde{g} = \frac{g}{\omega_c}$, obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{E_{\pm}^n}{\omega_c} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{\Delta}}{2}\right)^2 + \tilde{g}^2(n+1)}. \quad (2.5)$$

Hemos obtenido así una dependencia lineal de $\frac{E_{\pm}^n}{\omega_c}$ con \tilde{g} . Podemos hacer una representación de (2.5) para diferentes valores de n y de $\tilde{\Delta}$. Cuando $\tilde{\Delta} = 0$, es decir, cuando la frecuencia del qubit es igual a la frecuencia de la cavidad, diremos que el sistema está en resonancia. Las gráficas obtenidas para resonancia y no resonancia son las Figuras 2.2, 2.3 y 2.4.

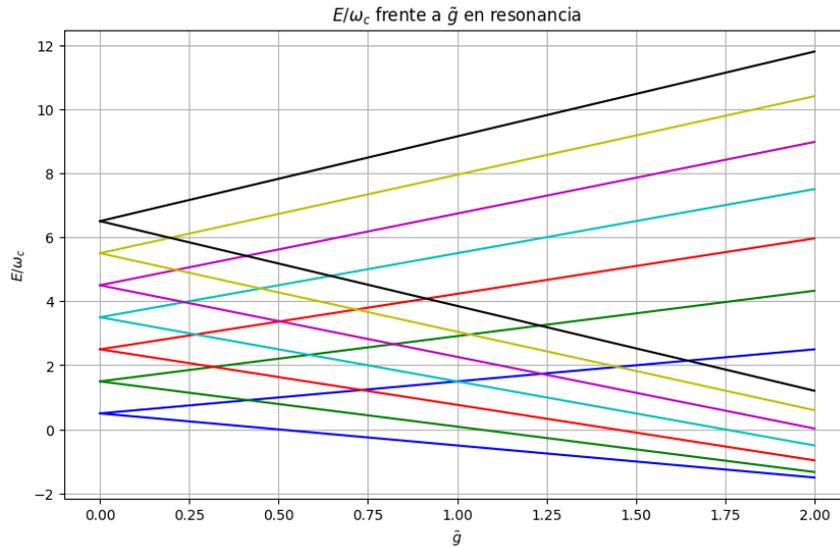


Figura 2.2: E/ω_c frente a \tilde{g} en resonancia para diferentes valores de n

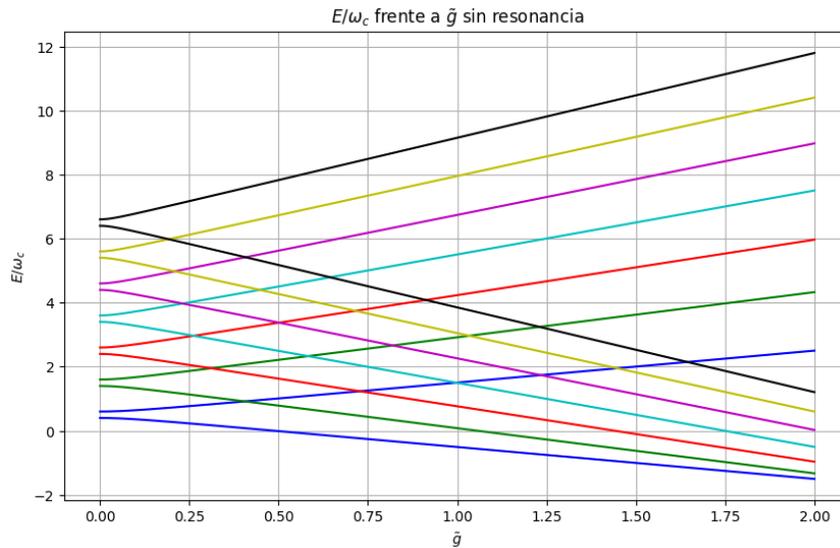


Figura 2.3: E/ω_c frente a \tilde{g} sin resonancia con $\tilde{\Delta} = 0,2$

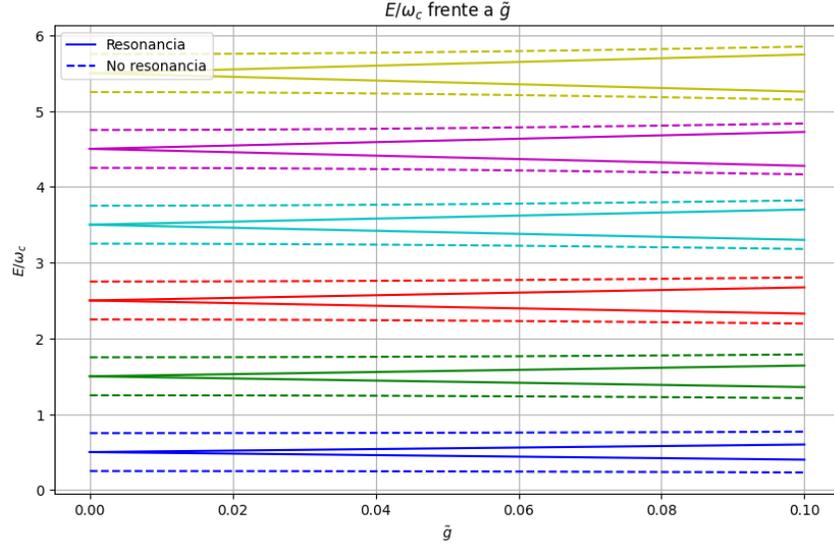


Figura 2.4: E/ω_c frente a \tilde{g} sin y con resonancia con $\tilde{\Delta} = 0,5$

Tal y como podemos observar en estas figuras, existe un estado de degeneración cuando $\tilde{g} = 0$ para los estados de resonancia. Cuando se elimina la resonancia, aparece una diferencia de energía entre ambos niveles anteriormente degenerados, proporcional a $\tilde{\Delta}$. Esto puede observarse con más detalle en la Figura 2.4, en la cual se han juntado ambos casos y se han ampliado los puntos iniciales.

2.3. Conmutador de \hat{H} y \hat{N}

En esta sección veremos que el Hamiltoniano definido en la ecuación (2.2) conmuta con el operador número de excitaciones, el cual se define de la siguiente forma:

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z + \mathbb{I}). \quad (2.6)$$

Podemos visualizar dicha cantidad de la forma siguiente, relacionándola con los niveles de energía y los fotones presentes en el sistema:

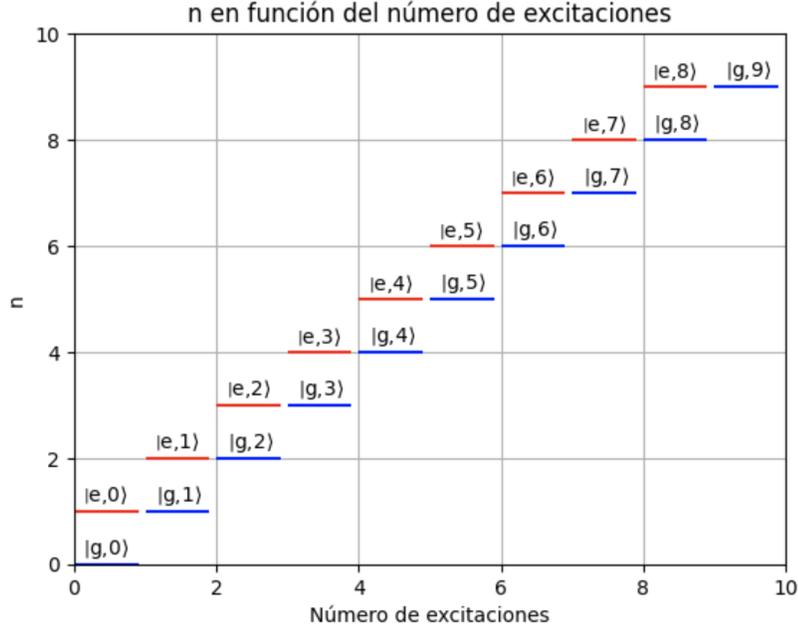


Figura 2.5: Niveles de energía correspondientes a cierto número de excitaciones y a un determinado número de fotones.

En la Figura 2.5 podemos observar qué niveles de energía son posibles para un determinado número de fotones n y para un determinado número de excitaciones, siendo los niveles de energía los definidos en la base del modelo de Jaynes-Cummings.

Planteemos ahora el conmutador siguiente:

$$\left[\hat{H}, \hat{N} \right] = \left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] + \frac{1}{2} \left(\left[\hat{H}, \hat{\sigma}_z \right] + \left[\hat{H}, \mathbb{I} \right] \right).$$

En primer lugar, es obvio que $\left[\hat{H}, \mathbb{I} \right] = 0$. Obtenemos:

$$\left[\hat{H}, \hat{N} \right] = \left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] + \frac{1}{2} \left[\hat{H}, \hat{\sigma}_z \right] \quad (2.7)$$

Calculemos, en primer lugar, el primer conmutador:

$$\left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] = \frac{\epsilon}{2} \left[\hat{\sigma}_z, \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] + \omega_c \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] + g \left(\left[\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-, \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] + \left[\hat{a} \hat{\sigma}_+, \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] \right).$$

Se ha eliminado el primer término por ser el conmutador de un operador que actúa sobre la radiación con otro que actúa sobre la materia y el segundo por ser el conmutador de un operador consigo mismo. Calculemos los términos restantes:

$$[\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{a}] \hat{\sigma}_- = -\hat{a} \hat{\sigma}_-,$$

$$[\hat{a} \hat{\sigma}_+, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] \hat{\sigma}_+ = \hat{a} \hat{\sigma}_+.$$

En ambos casos, se ha usado de nuevo la propiedad de que dos operadores que actúan sobre materia y sobre radiación conmutan. Por tanto, se obtiene que:

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = g (\hat{a} \hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-) \quad (2.8)$$

Desarrollemos ahora el segundo término de la ecuación (2.7):

$$[\hat{H}, \hat{\sigma}_z] = \frac{\epsilon}{2} [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_z] + \omega_c [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\sigma}_z] + g ([\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] + [\hat{a} \hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_z])$$

Los dos primeros términos han sido anulados por el mismo motivo que el visto anteriormente. Teniendo esto en cuenta, se obtiene:

$$[H, \hat{\sigma}_z] = g (\hat{a}^\dagger [\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] + \hat{a} [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_z]).$$

Teniendo en cuenta que $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$, siendo ε_{ijk} el símbolo de Levi-Civita, calculemos ahora los términos restantes por separado:

$$[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] = \frac{1}{2} ([\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z] - i[\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z]) = \frac{1}{2} (-2i\hat{\sigma}_y + 2\hat{\sigma}_x) = 2\hat{\sigma}_-,$$

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_z] = \frac{1}{2} ([\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z] + i[\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z]) = \frac{1}{2} (-2i\hat{\sigma}_y - 2\hat{\sigma}_x) = -2\hat{\sigma}_+.$$

Sustituyendo, finalmente obtenemos:

$$[\hat{H}, \hat{\sigma}_z] = g(2\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- - 2\hat{a} \hat{\sigma}_+) = 2g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- - \hat{a} \hat{\sigma}_+). \quad (2.9)$$

Entonces, juntando las ecuaciones (2.8) y (2.9) en la ecuación (2.7):

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{N}] &= g(\hat{a} \hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-) + \frac{1}{2} \cdot 2g(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- - \hat{a} \hat{\sigma}_+) \\ &\Rightarrow [\hat{H}, \hat{N}] = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

que es precisamente lo que queríamos probar.

2.4. Dinámica del modelo de Jaynes-Cummings

En la ecuación (2.3) se planteó el Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings para un n fijo. Veamos de dónde proviene esta expresión matricial. Recordemos la expresión de dicho Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2} \hat{\sigma}_z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \lambda (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+). \quad (2.11)$$

Veamos, igualmente, cómo actúa cada operador sobre nuestra base:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z |e, n\rangle &= |e, n\rangle, & \hat{\sigma}_z |g, n+1\rangle &= -|g, n+1\rangle, \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} |e, n\rangle &= n |e, n\rangle, & \hat{a}^\dagger \hat{a} |g, n+1\rangle &= (n+1) |g, n+1\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- |e, n\rangle &= \sqrt{n+1} |g, n+1\rangle, & \hat{a} \hat{\sigma}_+ |g, n+1\rangle &= \sqrt{n} |e, n\rangle, \\ \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- |g, n+1\rangle &= \hat{a} \hat{\sigma}_+ |e, n\rangle = 0. \end{aligned}$$

Una vez conocidos estos resultados, para un estado puro, la solución general de la ecuación de Schrödinger se escribe en nuestra base de la siguiente forma:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [c_{e,n}(t) |e, n\rangle + c_{g,n+1}(t) |g, n+1\rangle]. \quad (2.12)$$

Entonces, teniendo en cuenta los valores obtenidos para los operadores actuando sobre esta base (2.12), obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{JC} |\psi(t)\rangle &= \sum_n \left[c_{e,n}(t) \left(\left(\frac{\epsilon}{2} + n\omega_c \right) |e, n\rangle + g\sqrt{n+1} |g, n+1\rangle \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_{g,n+1}(t) \left(g\sqrt{n+1} |e, n\rangle + \left(-\frac{\epsilon}{2} + (n+1)\omega_c \right) |g, n+1\rangle \right) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de Schrödinger y expresando la ecuación anterior de forma matricial, obtenemos:

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_{e,n}(t) \\ \dot{c}_{g,n+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{2} + n\omega_c & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & -\frac{\epsilon}{2} + (n+1)\omega_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{e,n}(t) \\ c_{g,n+1}(t) \end{pmatrix}.$$

Vamos a escribir este sistema en función de la desintonización ($\Delta = \epsilon - \omega_c$) y tomaremos $\hbar = 1$, con lo cual llegamos a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} i \begin{pmatrix} \dot{c}_{e,n}(t) \\ \dot{c}_{g,n+1}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (n + \frac{1}{2})\omega_c + \frac{\Delta}{2} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & (n + \frac{1}{2})\omega_c - \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{e,n}(t) \\ c_{g,n+1}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n + \frac{1}{2})\omega_c & 0 \\ 0 & (n + \frac{1}{2})\omega_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{2} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & -\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hemos separado el problema en dos matrices diferentes: llamaremos a la primera \hat{H}_0 y a la segunda \hat{H}_{int} . Tal y como podemos ver en la ecuación (2.13), la matriz \hat{H}_0 es diagonal. De la misma forma, tal y como hemos visto en la sección anterior, sabemos que $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$. Por este motivo, podemos aplicarle una rotación a nuestro problema ($\hat{U}(\phi) = e^{-i\phi\hat{N}}$), cambiando así a la imagen de interacción, para eliminar la primera matriz y finalmente expresar el nuevo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings como:

$$\hat{H}'_{JC} = \otimes_{n=0}^{N_q} \hat{h}_n \quad \hat{h}_n = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{2} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & -\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Expresando esta matriz como un sistema, obtenemos las siguientes ecuaciones para cada n :

$$\begin{cases} i\dot{c}_{e,n}(t) &= \frac{\Delta}{2}c_{e,n}(t) + g\sqrt{n+1}c_{g,n+1}(t), \\ i\dot{c}_{g,n+1}(t) &= g\sqrt{n+1}c_{e,n}(t) - \frac{\Delta}{2}c_{g,n+1}(t). \end{cases} \quad (2.15)$$

Para poder resolver más fácilmente este sistema de ecuaciones diferenciales, definimos:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{e,n}(t) &= e^{i\frac{\Delta}{2}t}c_{e,n}(t) \Rightarrow c_{e,n}(t) = e^{-i\frac{\Delta}{2}t}\tilde{c}_{e,n}(t), \\ \tilde{c}_{g,n+1}(t) &= e^{-i\frac{\Delta}{2}t}c_{g,n+1}(t) \Rightarrow c_{g,n+1}(t) = e^{i\frac{\Delta}{2}t}\tilde{c}_{g,n+1}(t). \end{aligned}$$

Utilizando estas nuevas variables, reescribimos el sistema de ecuaciones (2.15), obteniéndose así:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{c}}_{e,n}(t) &= -ig\sqrt{n+1} e^{i\Delta t} \tilde{c}_{g,n+1}(t), \\ \dot{\tilde{c}}_{g,n+1}(t) &= -ig\sqrt{n+1} e^{-i\Delta t} \tilde{c}_{e,n}(t). \end{cases} \quad (2.16)$$

Antes de mostrar la solución obtenida, definimos la siguiente constante para simplificar el resultado:

$$\Omega_n = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2(n+1)}.$$

Nótese que este es un término que hemos visto de forma muy similar en la ecuación (2.5), y son las denominadas frecuencias de Rabi. Teniendo en cuenta cómo hemos definido $\tilde{c}_{e,n}(t)$ y $\tilde{c}_{g,n+1}(t)$, tras resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (2.16) obtenemos:

$$c_{e,n}(t) = e^{i\frac{\Delta}{2}t} \left\{ c_{e,n}(0) \left[\cos(\Omega_n t) - \frac{i\Delta}{2\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right] - c_{g,n+1}(0) \frac{ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right\}, \quad (2.17)$$

$$c_{g,n+1}(t) = e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \left\{ c_{g,n+1}(0) \left[\cos(\Omega_n t) + \frac{i\Delta}{2\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right] - c_{e,n}(0) \frac{ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right\}. \quad (2.18)$$

De esta forma, contamos con toda la información requerida para describir el estado del sistema en cualquier tiempo t . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que nuestro átomo está inicialmente en el estado excitado $|e\rangle$. Por tanto, teniendo en cuenta que $c_{g,n}(0) = 0$ para todo n , por la ecuación (2.12) se tiene que en nuestro espacio producto tensorial el estado inicial es de la forma:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^N c_{e,n}(0) |e, n\rangle.$$

Ahora, reescribamos el sistema (2.17) y (2.18), teniendo en cuenta lo que acabamos de comentar:

$$c_{e,n}(t) = e^{i\frac{\Delta}{2}t} c_{e,n}(0) \left[\cos(\Omega_n t) - \frac{i\Delta}{2\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \right], \quad (2.19)$$

$$c_{g,n+1}(t) = e^{-i\frac{\Delta}{2}t} (-c_{e,n}(0)) \frac{ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t).$$

Supongamos ahora que estamos en el caso de resonancia ($\Delta = 0$) para simplificar de nuevo las expresiones, obteniéndose así a partir de las expresiones obtenidas en (2.19):

$$\begin{aligned} c_{e,n}(t) &= c_{e,n}(0) \cos(gt\sqrt{n+1}), \\ c_{g,n+1}(t) &= -ic_{e,n}(0) \sin(gt\sqrt{n+1}). \end{aligned}$$

A partir de estos resultados, podemos obtener las siguientes probabilidades:

$$P_{e,n} = |\langle e, n | \psi(t) \rangle|^2, \quad P_{g,n+1} = |\langle g, n+1 | \psi(t) \rangle|^2.$$

Por tanto, si por ejemplo queremos calcular la probabilidad de que el sistema tenga n fotones en un momento determinado, obtenemos:

$$\begin{aligned} P(n) &= |\langle e, n | \psi(t) \rangle|^2 + |\langle g, n | \psi(t) \rangle|^2 \\ &= |c_{e,n}(0)|^2 \cos^2(gt\sqrt{n+1}) + |c_{e,n-1}(0)|^2 \sin^2(gt\sqrt{n}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

El último dato que necesitamos para representar estos valores es el valor de $|c_{e,n}(0)|^2$. Suponemos un estado coherente inicial que sigue una distribución de Poisson ($\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$) con parámetro de distribución $\lambda = \langle n \rangle$ y número de sucesos $k = n$:

$$|c_{e,n}(0)|^2 = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!}.$$

Por tanto, podemos reescribir la ecuación (2.20) como

$$P(n) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \cos^2(gt\sqrt{n+1}) + \frac{\langle n-1 \rangle^{n-1} e^{-\langle n-1 \rangle}}{(n-1)!} \sin^2(gt\sqrt{n}). \quad (2.21)$$

Para representar gráficamente la ecuación (2.21) en función de n , supongamos que estamos en el instante en el cual se cumple $gt = 1$. Igualmente, podemos suponer que estamos en el caso $\langle n \rangle = 25$, aunque podríamos tomar cualquier otro valor. De esta forma obtenemos:

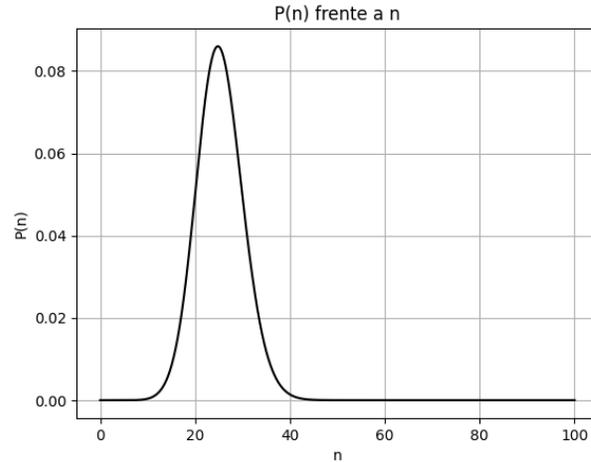


Figura 2.6: $P(n)$ frente a n en resonancia, $gt = 1$ y $\langle n \rangle = 25$

En la Figura 2.6 obtenemos el resultado esperado: para un instante relativamente cercano al inicial el valor más probable de número de fotones es el valor medio, que en este caso es 25. Sin embargo, nos interesa ver cómo varía esto con el tiempo. Para ello, primero lo haremos para tiempos pequeños y posteriormente para tiempos mayores para ver así las diferencias entre ambos en un caso mucho más general que el visto anteriormente.

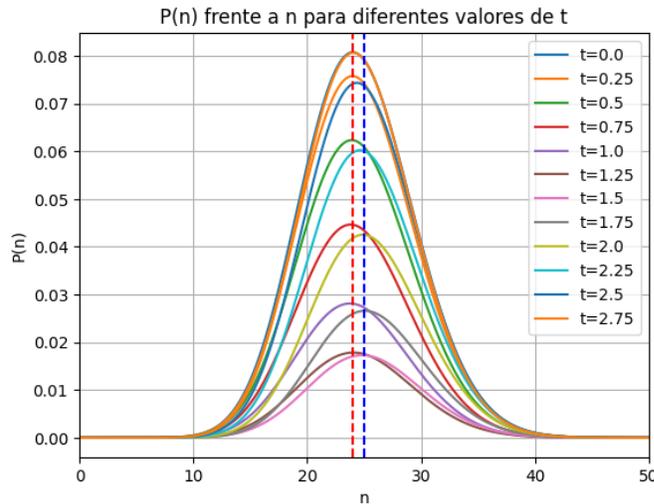


Figura 2.7: $P(n)$ frente a n con $\Delta = 0,1$, $g = 0,1$ y $\langle n \rangle = 24,5$ para tiempos pequeños (en segundos)

En la Figura 2.7 se han representado con dos líneas verticales los valores de $n = 24$ (rojo) y $n = 25$ (azul) para observar así el comportamiento entre los dos valores que se produce debido a la dinámica de nuestro sistema, que no es más que el paso del estado excitado (24 fotones) al estado fundamental (25 fotones) y viceversa, donde se destruye o se crea un fotón respectivamente. Esto puede observarse fácilmente siguiendo la leyenda de la gráfica. Finalmente, vemos que para un tiempo de aproximadamente 2,75 segundos, se vuelve al estado excitado inicial (se superpone la línea de $t = 2,75$ a la de $t = 0$, por eso no se distingue). Sin embargo, vamos a ver a continuación que esto no sucede para tiempos más grandes.

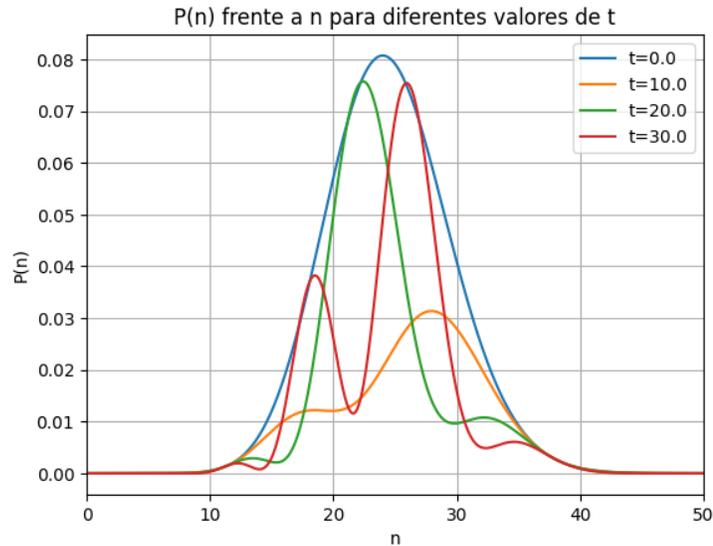


Figura 2.8: $P(n)$ frente a n con $\Delta = 0,1$, $g = 0,1$ y $\langle n \rangle = 24,5$ para tiempos grandes (en segundos)

Podemos ver en la Figura 2.8 que, cuanto más tiempo transcurra en nuestro sistema, aparecerán nuevos picos, es decir, nuevos valores cuya probabilidad es mayor. Esto puede interpretarse como una consecuencia de la propia evolución temporal del sistema: aunque siempre oscila en torno al mismo valor inicial (el valor medio introducido), existe la posibilidad de que el sistema evolucione a un estado energético mayor o menor, siempre manteniendo constante \hat{N} .

Si esperamos un tiempo lo suficientemente prolongado, obtenemos el siguiente resultado:

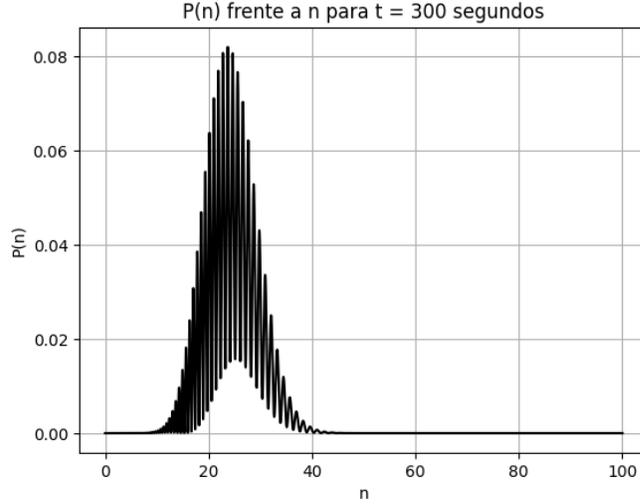


Figura 2.9: $P(n)$ frente a n con $\Delta = 0,1$, $g = 0,1$ y $\langle n \rangle = 24,5$ para $t = 300$ segundos

Tal y como se ha comentado en el párrafo anterior, el estado siempre tiende a oscilar en torno al inicial, de ahí que la gráfica obtenida en la Figura 2.9 sea tan similar a la de la Figura 2.6. Sin embargo, debido a la propia evolución del sistema, comienzan a aparecer los picos que hemos visto en la gráfica anterior, es decir, nuevos estado posibles además del inicial excitado y el fundamental.

Una vez comentados estos resultados, veamos las conclusiones que podemos obtener al trabajar con el operador inversión, que nos proporciona la diferencia de población entre los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$. Este puede ser expresado como:

$$W(t) = \sum_n [|c_{e,n}(t)|^2 - |c_{g,n}(t)|^2] .$$

Usando las ecuaciones obtenidas en (2.19), puede reescribirse como:

$$W(t) = \sum_n |c_{e,n}(0)|^2 \left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos(\Omega_n t) \right] .$$

Tomando un estado inicial similar al que hemos seleccionado anteriormente (que siga una distribución de Poisson), obtenemos la siguiente expresión final

de $W(t)$:

$$W(t) = \sum_n \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos(\Omega_n t) \right] \quad (2.22)$$

Una vez obtenida esta ecuación, podemos seleccionar diferentes valores de las constantes, como por ejemplo $\langle n \rangle = 25$, $g = 0,1$ y $\Delta = 0,1$, para obtener una representación gráfica de la ecuación (2.22):

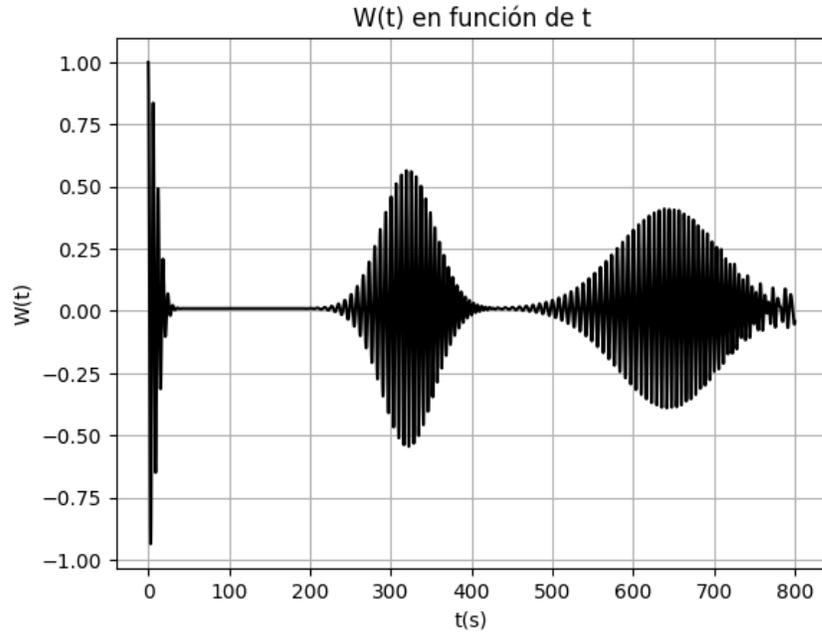


Figura 2.10: $W(t)$ frente a t con $\Delta = 0,1$, $g = 0,1$ y $\langle n \rangle = 25$. En esta gráfica obtenemos que, para tiempos no muy grandes, se produce una extinción. Posteriormente, la función $W(t)$ vuelve a experimentar oscilaciones para luego extinguirse de nuevo y que, posteriormente, experimente otra restauración.

Puede observarse en la Figura 2.10 el fenómeno de restauración (*revival*), característico de este modelo y que se debe a motivos puramente cuánticos relacionados con la cuantización del campo y el momento dipolar del átomo situado dentro de la cavidad. Para obtener una explicación detallada al respecto, consultar [4].

Capítulo 3

Fermiones de Majorana

Uno de los mayores retos dentro de la computación cuántica es la creación de un ordenador cuántico a gran escala. Sería posible obtener un potencial casi ilimitado a partir de esta tecnología si fuera posible que los errores en la implementación de cada qubit estuvieran por debajo de un umbral determinado. Esto es imposible con la tecnología existente actualmente.

El motivo por el cual los estados cuánticos son tan frágiles es su alta sensibilidad a dos tipos de errores: el primero, denominado error clásico, hace que uno de los qubits cambie del estado $|g\rangle$ al estado $|e\rangle$ (o viceversa) de forma espontánea; el segundo, comúnmente denominado como error de fase, produce un cambio de signo de todos los estados en los cuales el qubit está en el estado excitado respecto a aquellos que están en el estado fundamental (cambio de signo de espín para electrones).

Estos errores pueden ser corregidos fácilmente por separado, pero no cuando tratamos de corregir ambos simultáneamente. Sin embargo, la introducción teórica de un fermión que es su propia antipartícula, conocido como fermión de Majorana, puede solventar los problemas anteriormente descritos, dando lugar a un ordenador cuántico a prueba de errores. De ahí surge el enorme interés en el estudio de estos sistemas.

3.1. Descripción teórica

Cada qubit puede ser descrito mediante el par de operadores fermiónicos reales aniquilación y creación $\hat{c}_j, \hat{c}_j^\dagger$. Definimos, convenientemente, los conocidos como *operadores de Majorana*:

$$\hat{\gamma}_{2j-1} = \hat{c}_j + \hat{c}_j^\dagger, \quad \hat{\gamma}_{2j} = i(\hat{c}_j^\dagger - \hat{c}_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

siendo N el número de fermiones. Cada γ_j cumple: $\hat{\gamma}_j = \hat{\gamma}_j^\dagger$ (es su propia antipartícula), $(\hat{\gamma}_j)^2 = (\hat{\gamma}_i^\dagger)^2 = 1$ y $\{\hat{\gamma}_i, \hat{\gamma}_j\} = 2\delta_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, 2N$), siendo este último el anticonmutador entre ambos operadores. Estos operadores plantean el modelado de cada fermión real j como dos fermiones de Majorana, γ_{2j-1} y γ_{2j} . Una idea esquemática puede ser vista en la Figura 3.1:

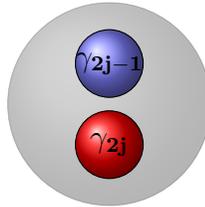


Figura 3.1: Ilustración esquemática de un fermión real j , representado como la esfera gris, con dos fermiones de Majorana dentro del mismo, representado por las esferas azul y roja.

Una de las teorías más extendidas en relación con este tipo de fermiones es la cadena unidimensional de Kitaev de fermiones de Majorana [1]. El esquema gráfico de esta cadena es el siguiente:

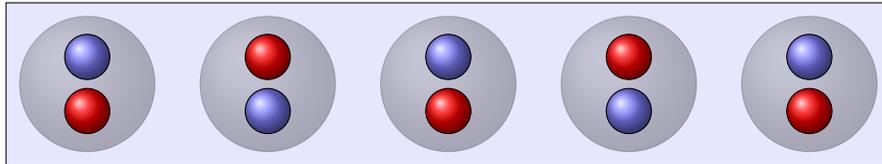


Figura 3.2: Ilustración esquemática de cinco fermiones reales, dispuestos a modo de cadena, cada uno representado por una bola gris con dos fermiones de Majorana dentro, representados por las bolas azules y rojas dentro de un material superconductor de onda p , representado con el rectángulo violeta.

Este modelo de la Figura 3.2, propuesto por A Yu Kitaev, es descrito por el

siguiente Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{MC} = & -\frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N (2\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j - 1) - \omega \sum_{j=1}^{N-1} (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j) \\ & + \Delta \sum_{j=1}^{N-1} (\hat{c}_j \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j^\dagger), \end{aligned} \quad (3.2)$$

el cual representa un sistema unidimensional de fermiones sin spin (que es precisamente una de las características fundamentales de los fermiones de Majorana) que no interactúan entre sí dentro de una cadena abierta, enumerando cada una de las partes de dicha cadena como $j = 1, \dots, N$.

Las constantes que aparecen en la ecuación son: μ el potencial químico, supuesto constante en toda la cadena, ω la amplitud de *salto* entre primeros vecinos, y Δ el gap de enlace de p-onda (energía de enlace del par de Cooper).

Ahora, podemos reescribir el Hamiltoniano de la ecuación (3.2) en términos de los operadores de Majorana descritos en (3.1), obteniéndose así

$$\hat{H}_{MC} = -i\frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N \hat{\gamma}_{2j-1} \hat{\gamma}_{2j} + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{N-1} [(\omega + \Delta) \hat{\gamma}_{2j} \hat{\gamma}_{2j+1} - (\omega - \Delta) \hat{\gamma}_{2j-1} \hat{\gamma}_{2j+2}].$$

Veremos, a continuación, dos límites posibles de este modelo. El primero de ellos sucede cuando $\Delta = \omega = 0$ y $\mu < 0$, que corresponde a la llamada fase topológicamente trivial. A continuación, en la Figura 3.3, se muestra un esquema de este límite.



Figura 3.3: Ilustración esquemática de la fase topológicamente trivial, donde los fermiones reales se han esquematizado como cajas que contienen ambos fermiones de Majorana, y las líneas que unen ambas esferas simbolizan los respectivos enlaces entre ambos fermiones de Majorana. [11]

Podemos, por tanto, escribir el Hamiltoniano planteado en la ecuación (3.2) de una forma más simplificada, obteniéndose así

$$\hat{H}_{MC} = -i\frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N \hat{\gamma}_{2j-1} \hat{\gamma}_{2j}. \quad (3.3)$$

Veamos ahora el segundo caso límite, llamado límite no trivial. Hasta ahora, solo hemos tratado con fermiones reales localizados, cada uno descrito con sus dos correspondientes fermiones de Majorana. Dependiendo de cómo emparejemos estos fermiones virtuales podemos crear fermiones no localizados. Tomar $\mu = 0$, que es precisamente lo que se acaba de comentar, una nueva forma de emparejamiento, da lugar al siguiente sistema:

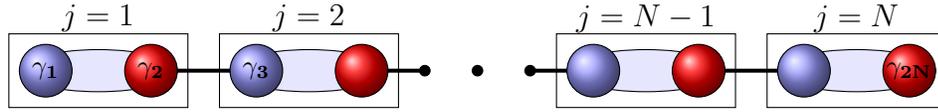


Figura 3.4: Ilustración esquemática del límite no trivial, donde los nuevos fermiones reales, ahora no localizados, están formados por un fermión de Majorana de dos fermiones localizados que hemos podido ver anteriormente. [11]

El Hamiltoniano resultante de aplicar esta aproximación es el siguiente:

$$\hat{H}_{MC} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{N-1} [(\Delta + \omega)\hat{\gamma}_{2j}\hat{\gamma}_{2j+1} - (\omega - \Delta)\hat{\gamma}_{2j-1}\hat{\gamma}_{2j+2}].$$

Esta última expresión puede ser simplificada aún más asumiendo que $\Delta = w > 0$ (fase topológica profunda), obteniéndose así

$$\hat{H}_{MC} = \Delta i \sum_{j=1}^{N-1} \hat{\gamma}_{2j}\hat{\gamma}_{2j+1}, \quad (3.4)$$

que nos indica, tal y como hemos visto en la Figura 3.4, que los fermiones de Majorana están emparejados con sus primeros vecinos de otro fermión real. Esto da lugar a que tanto el primero como el último de los fermiones de Majorana queden desemparejados, y estos son los llamados Modos de Energía Cero de Majorana (*Majorana Zero Energy Modes, MZEM*), cuyo interés teórico es de extrema importancia debido a su estabilidad frente a perturbaciones, que es lo que buscamos.

A continuación, se definirá un nuevo conjunto de operadores que nos ayudará a comprender mejor la nueva estructura obtenida de la no-localización de los fermiones:

$$\hat{\gamma}_{2j-1} = i \left(\hat{d}_{j-1}^\dagger - \hat{d}_{j-1} \right), \quad \hat{\gamma}_{2j} = \hat{d}_j^\dagger + \hat{d}_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

Utilizando estos nuevos operadores, podemos reescribir la ecuación (3.4) como

$$\hat{H}_{MC} = 2\omega \sum_{j=1}^{N-1} \left[\hat{d}_j^\dagger \hat{d}_j - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.6)$$

Hemos obtenido un Hamiltoniano similar al de un oscilador armónico, que podemos interpretar como que los autoestados de energía de esta cadena están compuestos por cuasi-partículas fermiónicas, denotadas por \hat{d}_j^\dagger (no localizados) en lugar de fermiones reales, con una contribución nula de los MZEM. De estos fermiones de Majorana desemparejados podemos formar un nuevo fermión, no localizado, que denotaremos como: $\hat{d}_0 = \frac{1}{2}(i\gamma_1 + \gamma_{2N})$.

Es importante comentar cómo afecta la introducción de una cavidad en la cadena, enlazando así con lo visto en el capítulo anterior. En primer lugar, recordamos que el Hamiltoniano asociado a un fotón dentro de una cavidad de dos niveles es $\hat{H}_C = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}$, donde ω_c es la energía cuántica del fotón y \hat{a}^\dagger y \hat{a} los operadores creación y aniquilación, respectivamente. De la misma forma, el Hamiltoniano referente a la interacción radiación-materia es $\hat{H}_x = \frac{\lambda}{n_{Cav}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \sum_{j \in Cav} \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j$, donde se ha supuesto que la fuerza de acoplamiento λ es constante y positiva, y el acrónimo *Cav* corresponde al conjunto de índices de lugares de la cadena que interaccionan con la cavidad.

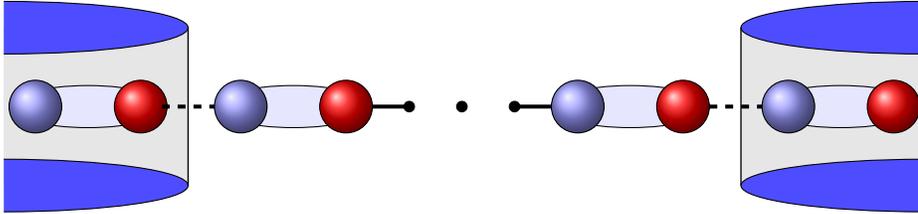


Figura 3.5: Ilustración esquemática del efecto de insertar una cavidad en sendos extremos de la cadena de Kitaev. Esta es la llamada simetría de extremos (*Edge geometry*). Cada fermión real es representado por una elipse de tono violeta. Las líneas continuas representan enlaces reales entre los fermiones de Majorana, mientras que las líneas discontinuas representan enlaces rotos debido al efecto de la cavidad. [11]

Uno de los resultados más importantes relacionado con el efecto de la cavidad en la cadena es la transformación de fermiones virtuales no localizados en fermiones reales localizados, reconfigurando la forma en la que los fermiones de Majorana se enlazan. La cavidad “corta” estados topológica-

mente protegidos y los convierte en fermiones similares a los estudiados en el primer capítulo.

Tal y como podemos observar en la Figura 3.5, los dos extremos de la cadena de Kitaev están contenidos dentro de la cavidad. Esto podría hacerse colocando la cadena de forma circular e introduciendo ambos extremos en la cavidad. De esta forma, partiendo del límite no trivial, se han eliminado dos fermiones no localizados (representados con la línea discontinua) para crear dos fermiones reales dentro de la cavidad y mantener los MZEM justo fuera de la misma. Podemos hacer algo similar situando la cavidad en la parte central de la cadena.

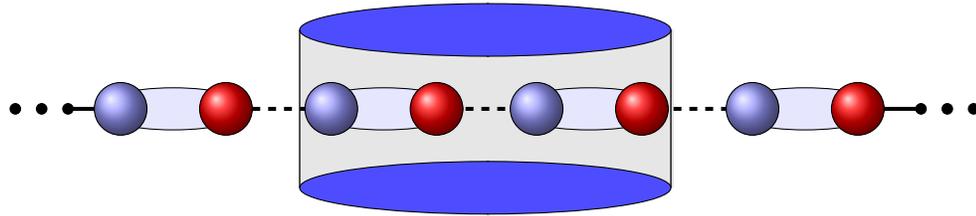


Figura 3.6: Ilustración esquemática del efecto de insertar una cavidad en el interior de la cadena de Kitaev. Esta es la llamada simetría en volumen (*Bulk geometry*). La representación gráfica tiene un simbolismo similar al visto en la Figura 3.5. [11]

El efecto de introducir la cavidad en este caso, tal y como vemos en la Figura 3.6, es la creación de otros dos fermiones de Majorana libres justo en los extremos de la cavidad, correspondientes a cortar la cadena anterior en otras dos cadenas más cortas.

Se puede confirmar que la introducción de la cadena es efectiva y da lugar a los efectos deseados realizando cálculos y simulaciones que nos proporcionen información acerca de ciertas características del sistema, como por ejemplo las correlaciones entre los fermiones de Majorana. Para más detalle acerca de estas correlaciones, consultar [3]. Una vez comentados estos conceptos, proseguiremos con el estudio cualitativo del modelo.

3.2. Diagonalización exacta del Hamiltoniano de Kitaev

Escribimos, a continuación, la expresión para el Hamiltoniano propuesto por Kitaev de la ecuación (3.2) para la cadena de fermiones para posteriormente diagonalizarla y obtener resultados a partir de la misma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{c}_1^\dagger & \hat{c}_1 & \cdots & \hat{c}_N^\dagger & \hat{c}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\Delta & -w & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & w & \Delta & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\Delta & w & -\mu & 0 & -\Delta & -w & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -w & \Delta & 0 & \mu & w & \Delta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta & w & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -w & \Delta & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\Delta & w & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -w & \Delta & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_1^\dagger \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{c}_N \\ \hat{c}_N^\dagger \end{pmatrix}.$$

Mediante el primer código descrito en el Anexo A de Mathematica, podemos diagonalizar esta matriz para diferentes valores de μ , Δ y ω . Tomando $\Delta = \omega = 1$, obtenemos los siguientes valores de la energía en función de μ :

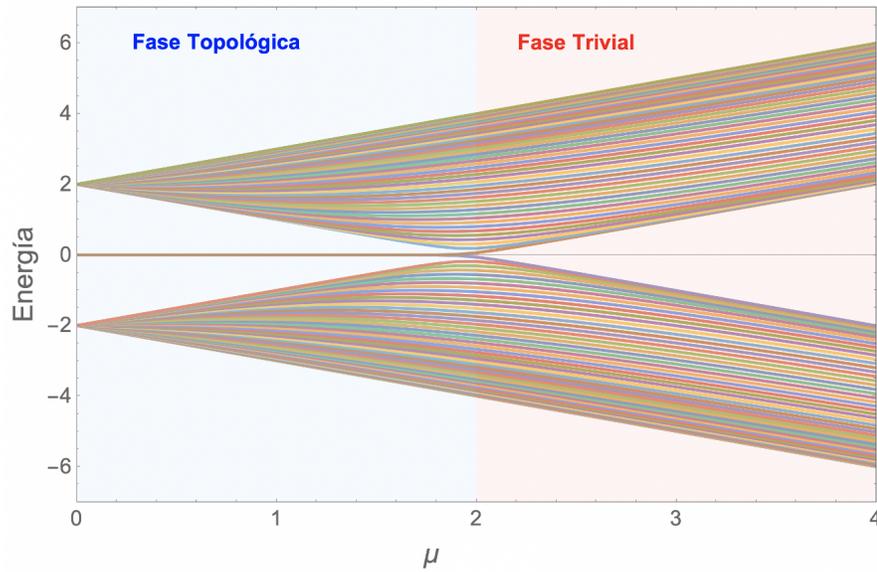


Figura 3.7: Modos de energía frente a diferentes valores de μ . En este caso, se ha tomado una cadena de 50 fermiones con $\Delta = \omega = 1$.

En la gráfica de la Figura 3.7, podemos observar la aparición de los Modos de

Energía Cero de Majorana (puntos sobre el eje X) para valores de aproximadamente $\mu \leq 2$. Esta zona es la llamada fase topológica, llamada así porque representa estados topológicamente protegidos debido a la existencia de Modos de Energía Cero de Majorana, mientras que cuando $\mu > 2$ estaremos en la fase no topológica o trivial. La principal conclusión que podemos obtener de este resultado es que los estados de la cadena estarán topológicamente protegidos (que es precisamente lo que estamos buscando en estos sistemas) cuando la diferencia de energía entre niveles, dada por el valor de μ según la ecuación (3.3), es finita y menor que un valor determinado del potencial químico.

Realizaremos, a continuación, un estudio más detallado de diferentes resultados obtenidos al variar ciertos parámetros de la cadena de Kitaev. En primer lugar, vemos cómo afecta el tamaño de la cadena al rango de la zona de fase topológica, manteniendo $\Delta = \omega = 1$.

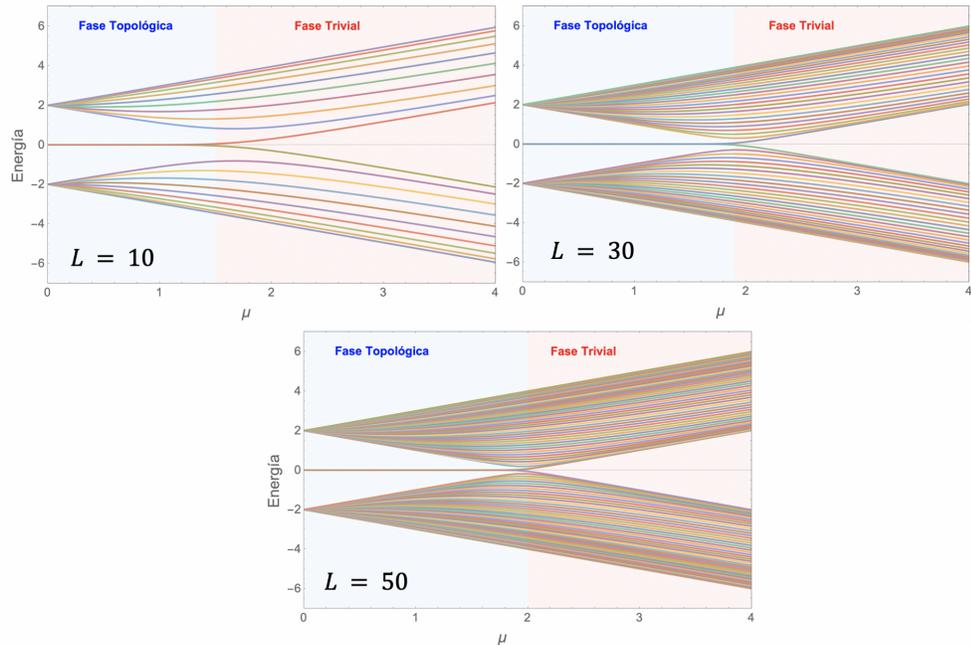


Figura 3.8: Comparación de rangos de fases topológicas en función del tamaño de las cadenas, tomando una cadena de 10 fermiones reales en la gráfica superior izquierda, de 30 en la superior izquierda y finalmente de 50 en la gráfica inferior, con $\Delta = \omega = 1$.

Tal y como podemos observar en la Figura 3.8, a medida que aumentamos

el tamaño de la cadena, y de acuerdo a lo visto en la parte teórica con la ecuación (3.6), el rango de la fase topológica va aumentando hasta un valor de $\mu = 2\Delta = 2\omega$, que es igual a 2 en este caso, de forma similar a los niveles de energía de un oscilador armónico. Es decir, cuanto mayor es el tamaño de la cadena, mayor será el rango de aparición de los Modos de Energía Cero de Majorana hasta un punto de convergencia del valor del potencial químico. Comprobemos esta afirmación modificando ahora solamente el valor de los parámetros $\Delta = \omega = 1,5$.

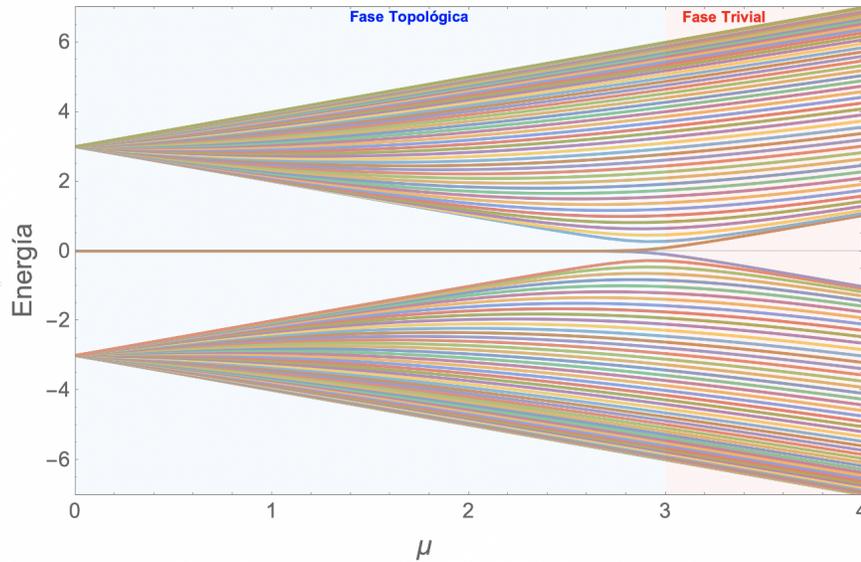


Figura 3.9: Modos de energía frente a diferentes valores de μ . En este caso, se ha tomado una cadena de 50 fermiones con $\Delta = \omega = 1,5$.

En efecto, en la Figura 3.9 la fase topológica llega hasta valores de $\mu = 3$ aproximadamente, que es 2ω . Cabe destacar que en todas y cada una de las simulaciones vistas existe una degeneración en tres niveles cuando $\mu = 0$, uno de ellos el modo de energía cero y los otros siendo el mismo nivel de energía pero con signo cambiado. Esto se debe a que estamos en fase topológica profunda ($\Delta = \omega$). Es importante mencionar que, por la propia forma de la matriz del Hamiltoniano de la cadena, si se toma $\Delta = -\omega$, los resultados obtenidos son exactamente los mismos. Si alteramos estos valores, modificaremos dicha degeneración. Podemos dar por concluidas de esta forma las simulaciones relacionadas con el tamaño de las cadenas y con la fase topológica profunda.

A continuación, veremos qué sucede cuando tomamos $\Delta \neq \omega$. En este caso, no podremos utilizar las aproximaciones vistas en la descripción teórica y desaparecerán las degeneraciones anteriormente comentadas.

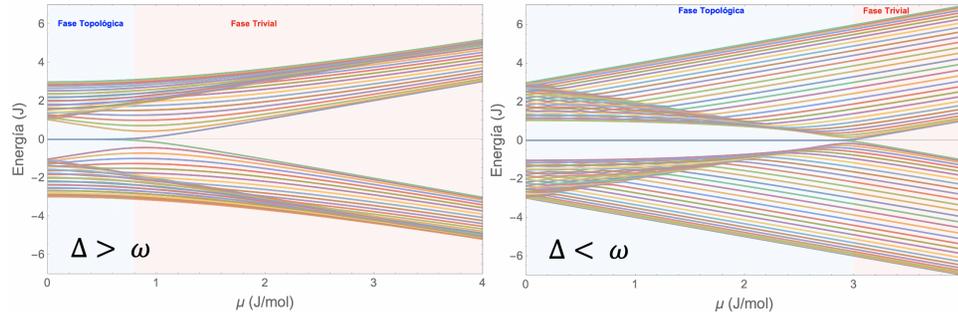


Figura 3.10: Comparación de rangos de fases topológicas en función de los valores de Δ y ω para un valor fijo $L = 30$ de fermiones de la cadena. En la primera gráfica se ha tomado $\Delta = 1,5$ y $\omega = 0,5$, mientras que en la segunda se han invertido los valores.

Mediante una rápida inspección de la Figura 3.10, podemos observar que la degeneración ha desaparecido cuando $\mu = 0$. De la misma forma, aunque ya no son válidas las expresiones aproximadas de la energía, se sigue observando que la fase topológica llega hasta un valor de μ aproximadamente igual a 2ω , lo cual es interesante a nivel experimental debido a la dificultad de ajustar ambos parámetros para que sean exactamente iguales.

A continuación, comentaremos el comportamiento asintótico de la energía para valores grandes de μ . Para ello, se ha creado una función en Mathematica (ver Anexo A, código 2) que proporciona la recta aproximada que sigue cada autovalor según se va aumentando el valor del potencial químico. Algunos de los resultados obtenidos fueron los siguientes:

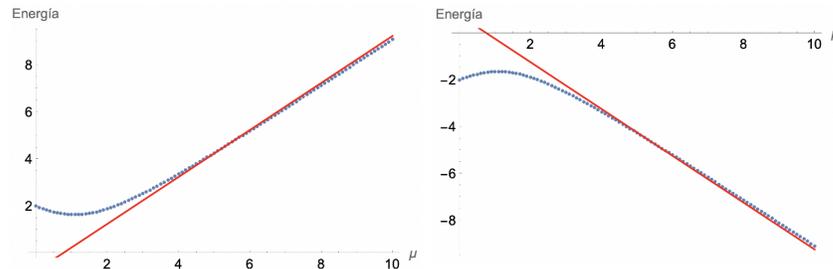


Figura 3.11: A la izquierda, con los puntos azules se representan los diferentes valores del autovalor 40 calculado por el programa, mientras que la recta roja es la que hemos calculado como ajuste. Lo mismo a la derecha pero con el autovalor número 21.

En la Figura 3.11, observamos que, efectivamente, el comportamiento de los autovalores cuando aumenta μ es lineal, siendo el ajuste más apropiado para cada uno de ellos una recta de pendiente ± 1 y con ordenada en el origen comprendida entre los valores -2 y 2 , debido a que se han tomado las constantes $\Delta = \omega = 1$. Variar dichas constantes dará lugar, por lo tanto, a soluciones diferentes.

Para hallar el valor de dichas ordenadas, se ha supuesto que el desplazamiento entre la recta correspondiente al Modo de Energía Cero de Majorana y el primero de los autovalores, o el último si se ha tomado segundo de estos Modos de Energía Cero, es lineal. Es decir, la pendiente es la misma, pero la ordenada en el origen va variando linealmente. Las rectas obtenidas mediante la resolución de dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, teniendo en cuenta que se tomó una cadena de longitud $l = 30$, fueron:

$$y(x, n) = -x + \frac{4}{29}n - \frac{62}{29} \text{ si } n \leq 30,$$

$$y(x, n) = x + \frac{4}{29}n - \frac{182}{29} \text{ si } n \geq 31,$$

donde n es el número del autovalor que estamos representando.

Podemos dar por concluido de esta forma el análisis del espectro obtenido en la diagonalización de la matriz de Kitaev.

Respecto al uso experimental de estos fermiones, a pesar de su importancia conceptual, las primeras ideas mencionadas para obtener Majoranas a partir de superconductores de onda p recibieron poca atención por parte de la comunidad experimental. Puede haber muchas razones para esto, pero la principal es que el apareamiento de onda p es muy raro en la naturaleza. No se ha reportado, hasta donde se tiene constancia, ninguna prueba inequívoca de la existencia de fermiones de Majorana. Sin embargo, en documentos como [10] se hace un acercamiento teórico-experimental a sistemas en los que, potencialmente, podría darse la existencia de esta cuasipartícula.

Conclusiones

En primer lugar, se ha realizado un estudio en profundidad de uno de los modelos más simples a la hora de estudiar la interacción radiación-materia, el modelo de Jaynes-Cummings, llegándose a alcanzar un alto nivel de comprensión del mismo. Mediante la implementación de diferentes códigos numéricos para resolver este tipo de sistemas, se han podido obtener resultados relacionados con el cálculo de probabilidades y distribuciones dentro de estos. De la misma forma, se ha comprobado numéricamente uno de los fenómenos más importantes dentro de este modelo, el *revival*, de naturaleza puramente cuántica y solamente explicable a partir de los conceptos expuestos en este documento.

Igualmente, tras una ardua revisión bibliográfica relacionada con los fermiones de Majorana, podemos afirmar que los conocimientos adquiridos respecto a esta cuasipartícula y sus múltiples aplicaciones son satisfactorios, teniendo en cuenta el nivel académico en el que se encuadra este trabajo. Mediante el estudio del espectro de energías, de nuevo obtenido mediante códigos numéricos, se ha facilitado la comprensión de diferentes ideas como la fase topológica y la fase trivial. Gracias a la adecuada comprensión de estos conceptos, las posibilidades futuras de estudio de un hardware óptimo para la computación cuántica son mucho mayores.

Aunque uno de los objetivos de este trabajo era realizar simulaciones relacionadas con la introducción fermiones de Majorana dentro de sistemas fotónicos, no se ha dispuesto del tiempo ni de los recursos necesarios para llevar a cabo dichas experiencias. Sin embargo, este documento asienta una base teórica sólida para que se tome como punto de partida en futuras investigaciones relacionadas con estos fermiones.

Apéndice A

Códigos Mathematica

```
1 Y[n_] :=
2   ToeplitzMatrix[
3     Array[(HeavisideTheta[2.1 - #] Subscript[M, # - 1])
4       &, {n}],
5     Join[{{Subscript[M, 0]}, Array[(HeavisideTheta[1.1 - #]
6       Subscript[M, -#]) &, {n - 1}]]]
7 l = 30;
8 kit = Y[l];
9 kitaev[mu, Delta, omega] := ArrayFlatten[kit /. {
10   Subscript[M, 0] -> {{-mu, 0}, {0, mu}},
11   Subscript[M, -1] -> {{-omega, -Delta}, {Delta, omega
12     }},
13   Subscript[M, 1] -> {{-omega, Delta}, {-Delta, omega
14     }}, 0 -> {{0, 0}, {0, 0}}]
15 f[mu] := kitaev[mu, 1, 1];
16 Ener = {};
17 Do[Ener = AppendTo[Ener, {mu, Eigenvalues[f[mu]]}],
18   {mu, 0, 4, 0.1}]
19 Flatten[Ener[[1, 2 ;; All]]][[1]]
20 Show[Table[ListPlot[Table[{\(\Ener[[nn, 1]]\),
21   Flatten[Ener[[nn, 2 ;; All]]][[ii]]},
22   {ii, 2, 46}],
23   PlotRange -> {{0, 4}, {-6, 6}}, Frame -> True,
24   FrameLabel -> {"\[Mu]", "Energia"}{nn, 1, 41}]]
```

```

1 Y[n_] :=
2   ToeplitzMatrix[
3     Array[HeavisideTheta[2.1 - #] Subscript[M, # - 1] &, {n
4       }],
5     Join[{Subscript[M, 0]},
6       Array[HeavisideTheta[1.1 - #] Subscript[M, -#] &, {n -
7         1}]]]
8 l = 30;
9 \[Omega] = 1;
10 \[CapitalDelta] = 1;
11 kit = Y[l];
12 kitaev[\[Mu]_, \[CapitalDelta]_, \[Omega]_] :=
13   ArrayFlatten[
14     kit /. {Subscript[M, 0] -> {{-\[Mu], 0}, {0, \[Mu]}},
15     Subscript[
16       M, -1] -> {{-\[Omega], -\[CapitalDelta]}, {\[
17         CapitalDelta], \
18         \[Omega]}}},
19     Subscript[M,
20       1] -> {{-\[Omega], \[CapitalDelta]}, {-\[
21         CapitalDelta], \
22         \[Omega]}}}, 0 -> {{0, 0}, {0, 0}}}]
23 f[\[Mu]_] := kitaev[\[Mu], \[CapitalDelta], \[Omega]];
24 Ener = Table[{\[Mu], Sort[Eigenvalues[f[\[Mu]]]}], {\[Mu]
25   ], 0, 10,
26   0.1}];
27 numEigenvalues = Length[Ener[[1, 2]]];
28 dataLists =
29   Table[Table[{Ener[[nn, 1]], Ener[[nn, 2, ii]]}, {nn, 1,
30     Length[Ener]}], {ii, numEigenvalues}];
31 FunRec[n_Integer?Positive] /; n <= 60 :=
32   Module[{recta1, recta2},
33     recta1[x_] := x + (4/29) n - 182/29;
34     recta2[x_] := -x + (4/29) n - 62/29;
35     Which[60 >= n >= 31,
36       Plot[recta1[x], {x, -10, 10}, PlotLabel -> "Recta 1",
37         PlotStyle -> Red], 1 <= n <= 30,

```

```
35     Plot[recta2[x], {x, -10, 10}, PlotLabel -> "Recta 2",
36         PlotStyle -> Red], n >= 61, Message[miFuncion::invarg
          , n];]]
37 miFuncion::invarg =
38     "El valor no es valido. Debe ser un entero entre 1 y
          60.";
39
40 FunRep[n_Integer?Positive] :=
41     Module[{A1, A2},
42         A1 = ListPlot[dataLists[[n, All, All]]];
43         A2 = FunRec[n];
44         Show[{A1, A2}]]
```


Apéndice B

Códigos Python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 N = 9
5
6 segmentos = []
7
8 for i in range(N):
9     c = (i,i+1)
10    segmentos.append(c)
11
12 fig, ax = plt.subplots()
13
14 ax.hlines(y=0, xmin=0, xmax=1-0.1, color='blue')
15 ax.text(0.9 / 2, 0.3, fr'|g,0}', ha='center', va='center')
16
17 for i, (inicio, fin) in enumerate(segmentos):
18     i = i+1
19     ax.hlines(y=i, xmin=inicio, xmax=fin-0.1, color='red'
20              )
21     ax.text((inicio + fin-0.1) / 2, i+0.3, fr'|e,i-1}', ha=
22             'center', va='center')
23     ax.hlines(y=i, xmin=inicio+1, xmax=fin+0.9, color='
24             blue')
```

```
22     ax.text(((inicio + fin)+1.3) / 2, i+0.3, fr'|g,i)', va
        = 'center')
23
24 ax.set_title('n en funcion del numero de excitaciones')
25 ax.set_xlabel('Numero de excitaciones')
26 ax.set_ylabel('n')
27
28 ax.set_xlim(0, N+1)
29 ax.set_ylim(0, N+1)
30
31 plt.grid(True)
32 plt.show()
```

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from math import gamma
4
5  def P(n):
6      avg_n = 25
7      numerator_1 = avg_n**n * np.exp(-avg_n)
8      denominator_1 = gamma(n + 1)
9      term1 = numerator_1 / denominator_1
10
11     if n == 0:
12         return term1
13
14     else:
15         avg_n_minus_1 = avg_n - 1
16         numerator_2 = avg_n_minus_1**(n-1) * np.exp(-
            avg_n_minus_1)
17         denominator_2 = gamma(n)
18         term2 = numerator_2 / denominator_2
19
20         return term1 * np.cos(np.sqrt(n+1))**2 + term2 *
            np.sin(np.sqrt(n))**2
21
22 n_values = np.linspace(0, 100, 1000)
23
24 P_values = [P(n) for n in n_values]
25
```

```
26
27 plt.plot(n_values, P_values, color = 'k')
28 plt.axvline(x=25, color='r', linestyle='--')
29 plt.xlabel('n')
30 plt.ylabel('P(n)')
31 plt.title('P(n) frente a n')
32 plt.grid(True)
33 plt.show()
```

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from math import gamma
4
5 D = 0.1
6 g = 0.1
7
8 def P(n, t):
9     avg_n = 24.5
10    numerator_1 = avg_n**n * np.exp(-avg_n)
11    denominator_1 = gamma(n + 1)
12    sigma_n = np.sqrt(D**2 + 4*g**2+np.sqrt(n+1))
13    term1 = numerator_1 / denominator_1
14
15    if n == 0:
16        return term1
17    else:
18        avg_n_minus_1 = avg_n - 1
19        numerator_2 = avg_n_minus_1**(n-1) * np.exp(-
20            avg_n_minus_1)
21        denominator_2 = gamma(n)
22        sigma_n2 = np.sqrt(D**2 + 4*g**2+np.sqrt(n))
23        term2 = numerator_2 / denominator_2
24
25        return term1 * (np.cos(sigma_n*t/2)**2+ D**2/
26            sigma_n**2*np.sin(sigma_n*t/2)**2) + term2 *4*
27            g**2*n/sigma_n2**2* np.sin(sigma_n2*t/2)**2
28
29 n_values = np.linspace(0, 100, 1000)
30
31 t_values = np.linspace(0, 3, 5)
```

```
29
30
31 for t in t_values:
32     P_values = [P(n, t) for n in n_values]
33     plt.plot(n_values, P_values, label=f't={t}')
34
35 plt.axvline(x=24, color='r', linestyle='--')
36 plt.axvline(x=25, color='b', linestyle='--')
37
38 plt.xlabel('n')
39 plt.ylabel('P(n)')
40 plt.title('P(n) frente a n para diferentes valores de t')
41 plt.xlim(0, 50)
42 plt.grid(True)
43 plt.show()
```

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 delta = 0.2
5
6 cantidad_valores = 4
7
8 colors = ['b', 'g', 'r', 'c', 'm', 'y', 'k']
9
10 g_values = np.linspace(0, 0.1, 400)
11
12 plt.figure(figsize=(10, 6))
13
14 for i in range(cantidad_valores):
15     y = i + 0.5 + np.sqrt(i+1)*g_values
16     z = i + 0.5 - np.sqrt(i+1)*g_values
17     plt.plot(g_values, y, color=colors[i], label='
18         Resonancia')
19     plt.plot(g_values, z, color=colors[i])
20     y = i + 0.5 + np.sqrt((delta*0.5)**2 + g_values**2 *
21         (i + 1))
22     z = i + 0.5 - np.sqrt((delta*0.5)**2 + g_values**2 *
23         (i + 1))
24     plt.plot(g_values, y, color=colors[i], linestyle='--',
```

```
        label='No resonancia')
22     plt.plot(g_values, z, color=colors[i], linestyle='--')
23     if i == 0:
24         plt.legend(loc='upper left')
25
26 plt.title('E/ωc frente a g')
27 plt.xlabel('g')
28 plt.ylabel('E/ωc')
29
30 plt.grid(True)
31 plt.show()
```

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 delta = 0.2
5
6 cantidad_valores = 7
7
8 colors = ['b', 'g', 'r', 'c', 'm', 'y', 'k']
9
10 g_values = np.linspace(0, 0.5, 400)
11
12 plt.figure(figsize=(10, 6))
13
14 for i in range(cantidad_valores):
15     y = i + 0.5 + np.sqrt((delta*0.5)**2 + g_values**2 *
16         (i + 1))
17     z = i + 0.5 - np.sqrt((delta*0.5)**2 + g_values**2 *
18         (i + 1))
19     plt.plot(g_values, y, color=colors[i])
20     plt.plot(g_values, z, color=colors[i])
21
22 plt.title('E/ωc frente a g sin resonancia')
23 plt.xlabel('g')
24 plt.ylabel('E/ωc')
25
26 plt.grid(True)
27 plt.show()
```

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 cantidad_valores = 7
5
6 g_values = np.linspace(0, 2, 400)
7
8 plt.figure(figsize=(10, 6))
9
10 colors = ['b', 'g', 'r', 'c', 'm', 'y', 'k']
11
12 for i in range(cantidad_valores):
13     y = i + 0.5 + np.sqrt(i+1)*g_values
14     z = i + 0.5 - np.sqrt(i+1)*g_values
15     plt.plot(g_values, y, color=colors[i])
16     plt.plot(g_values, z, color=colors[i])
17
18 plt.title('E/ωc frente a g en resonancia')
19 plt.xlabel('g')
20 plt.ylabel('E/ωc')
21
22 plt.grid(True)
23 plt.show()
```

Bibliografía

- [1] A Yu Kitaev. Unpaired majorana fermions in quantum wires. *Physics-uspekhi*, 44(10S):131 (2001). [Enlace](#)
- [2] J. Larson and T. Mavrogordatos. *The Jaynes–Cummings model and its descendants: modern research directions*. IoP Publishing (2021) [Enlace](#)
- [3] F. P. M. Méndez-Córdoba, F. J. Rodríguez, C. Tejedor, and L. Quiroga. From edge to bulk: Cavity-induced displacement of topological nonlocal qubits. *Physical Review B*, 107(12):125104 (2023) [Enlace](#)
- [4] P. Meystre and M. O Scully. *Quantum optics*. Springer (2021) [Enlace](#)
- [5] F. P. M. Méndez-Córdoba, J. J. Mendoza-Arenas, F. J. Gómez-Ruiz, F. J. Rodríguez, C. Tejedor, and L. Quiroga. Rényi entropy singularities as signatures of topological criticality in coupled photon-fermion systems. *Phys. Rev. Res.*, 2:043264, (2020). [Enlace](#)
- [6] J. Mehra, H. Rechenberg. *The Historical Development of Quantum Theory*. Springer (1982) [Enlace](#)
- [7] V.T. Lahtinen, J.K. Pachos. A Short Introduction to Topological Quantum Computation. *SciPost Phys.* 3, 021 (2017) [Enlace](#)
- [8] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.* 81, 865 (2009) [Enlace](#)
- [9] Department d’Informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montreal. *A Study on the basics of Quantum Computing* (2008) [Enlace](#)
- [10] R. Aguado. Majorana quasiparticles in condensed matter. *La Rivista del Nuovo Cimento.* 40, 11 (2017) [Enlace](#)

- [11] F. J. Gómez-Ruiz, J. J. Mendoza-Arenas, F. J. Rodríguez, C. Tejedor, and L. Quiroga. Universal two-time correlations, out-of-time-ordered correlators, and Leggett-Garg inequality violation by edge Majorana fermion qubits. *Phys. Rev. B* 97, 235134 (2018) [Enlace](#)