



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Física**

**Una demostración de la Regla de Born desde la interpretación de muchos mundos**

**Autor: Alejandro Merino Ruiz**

**Tutores: Mateus Araújo y Luis Miguel Nieto Calzada**

**Año 2024**



# Resumen

---

En este trabajo, comenzaremos explorando la historia de la mecánica cuántica, para luego abordar los desafíos que ha enfrentado como teoría, los cuales han dado origen a lo que conocemos como interpretaciones de la mecánica cuántica. Éstas son modelos que difieren en ciertos detalles y buscan explicar el comportamiento de los sistemas cuánticos y de la realidad en sí misma. Nos centraremos específicamente en el problema de la medida, profundizando en la interpretación de muchos mundos motivados por la paradoja del amigo de Wigner. Esta interpretación genera gran controversia y cuestionamientos “filosóficos” y difiere conceptualmente por completo con parte de la base de la mecánica cuántica que estudiamos en el grado. Posteriormente, presentaremos una demostración general de la Regla de Born en el contexto de la interpretación de muchos mundos. La Regla de Born establece la ley de probabilidad que explica el comportamiento probabilístico de la mecánica cuántica y se considera un axioma (sin demostración) en la mecánica cuántica del grado. También discutiremos sobre la validez de esta demostración y su utilidad.

# Abstract

---

In this work, we will begin by exploring the history of quantum mechanics, then addressing the challenges it has faced as a theory, which have given rise to what we know as interpretations of quantum mechanics. These are models that differ in certain details and seek to explain the behavior of quantum systems and reality itself. We will specifically focus on the measurement problem, delving into the many-worlds interpretation motivated by Wigner’s friend paradox. This interpretation generates significant controversy and “philosophical” questioning and conceptually differs completely from part of the foundation of quantum mechanics that we study in the degree. Subsequently, we will present a general demonstration of the Born Rule in the context of the many-worlds interpretation. The Born Rule establishes the probability law that explains the probabilistic behavior of quantum mechanics and is considered an axiom (without proof) in undergraduate quantum mechanics. We will also discuss the validity of this demonstration and its usefulness.



# Índice general

<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2. Interpretaciones de la mecánica cuántica</b>	<b>3</b>
2.1. Historia e interpretación de Copenhague . . . . .	3
2.1.1. Postulados de la mecánica cuántica (Copenhague) . . . . .	5
2.1.2. El problema de la medida . . . . .	7
2.2. La interpretación de muchos mundos (Everett) . . . . .	10
2.2.1. La paradoja del amigo de Wigner, versión de Deustch . . . . .	10
2.2.2. Interpretación de muchos mundos . . . . .	14
<b>3. Demostración de la Regla de Born</b>	<b>17</b>
3.1. Marco de trabajo, formalismo y suposiciones . . . . .	17
3.1.1. Medida de mundos y probabilidad . . . . .	18
3.1.2. Versiones de la interpretación de muchos mundos (IMM) . . . . .	20
3.1.3. Axiomas . . . . .	20
3.2. Obtención de una ley de probabilidad . . . . .	21
3.2.1. Lemas y resultados previos . . . . .	21
3.2.2. Demostración para la interpretación cuántica . . . . .	25
3.2.3. Demostración para la interpretación estocástica . . . . .	30
3.2.4. Descartar una posible ley de probabilidad para la interpretación discreta . . . . .	33
3.2.5. Discusión sobre los axiomas y los resultados . . . . .	34
<b>4. Conclusiones</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>



# Capítulo 1

## Introducción y objetivos

La mecánica cuántica ha representado una de las mayores revoluciones en el ámbito científico, especialmente en el campo de la física. Se destaca como una de las teorías más precisas en la predicción de resultados experimentales. Sin embargo, también es una de las ramas de la física más desafiantes para nuestra comprensión, dado que sus conceptos difieren de nuestra intuición y de la realidad observable a simple vista.

Como toda nueva teoría, desde su surgimiento ha tenido muchos detractores que han intentado refutarla. Pero debido a su éxito, también ha contado con numerosos defensores. Una de las particularidades de esta rama frente a otras es el intenso debate sobre ciertos problemas conceptuales que genera la teoría. Estos problemas pueden abordarse de distintas maneras, y cada solución propuesta solo convence a ciertos grupos de físicos. Cada enfoque de estos problemas da lugar a una manera diferente de ver la cuántica, conocidas como interpretaciones.

Cuál es la interpretación correcta de la mecánica cuántica es, aún, una pregunta abierta que enfrenta a comunidades de científicos. En el conflicto entre interpretaciones, existen multitud de técnicas para criticar las que no se consideran correctas y para defender las que sí se consideran adecuadas.

A lo largo de la historia de la mecánica cuántica, el principal método para atacar una interpretación ha sido mostrar los problemas que presenta la teoría rival, generalmente mediante experimentos mentales denominados paradojas, como la del gato de Schrödinger o la del amigo de Wigner.

Una estrategia poderosa para defender una interpretación es demostrar que el modelo que refleja la realidad requiere menos suposiciones, basadas en los resultados experimentales y enunciadas como postulados. Una interpretación que logra obtener uno de los postulados como consecuencia de los demás puede considerarse más general y posiblemente más correcta. En la interpretación que se estudia en el Grado en Física se toma como postulado lo que se conoce como la Regla de Born, que nos da la ley de probabilidad de los resultados experimentales de

las mediciones en sistemas cuánticos. Actualmente, algunas interpretaciones han evolucionado y son capaces de derivar la Regla de Born a partir de otros postulados.

En este trabajo, se destaca la Interpretación de los Muchos Mundos (IMM), que es una de las que puede obtener la Regla de Born a partir de otras suposiciones del modelo. Es una de las interpretaciones más interesantes por las soluciones que propone a los problemas y por el concepto de “muchos mundos”, que capta la atención de quienes escuchan hablar sobre ella. Este tema es verdaderamente fascinante, ya que uno de los mayores retos para esta interpretación determinista es justificar el comportamiento probabilístico observado en los experimentos.

Para resumir previamente, en la memoria entraremos en todos los temas que hemos mencionado. En el capítulo 2 tratemos varios aspectos relacionados con las interpretaciones de la mecánica cuántica. En la sección 2.1 hablaremos sobre la historia de la mecánica cuántica, el surgimiento de las primeras interpretaciones, resumiremos la interpretación que se estudia en el Grado en Física y acabaremos mostrando mediante paradojas alguno de los desafíos conceptuales a los que se enfrenta la interpretación. En la sección 2.2 nos centraremos en la interpretación de muchos mundos, la motivaremos y veremos parte de su formalismo a partir de una versión de la paradoja del amigo de Wigner para después ver con más detalle cómo es la interpretación motivando el siguiente capítulo de la memoria. En el capítulo 3 vamos a presentar un enfoque de como tratar la probabilidad desde la interpretación de muchos mundos y veremos una propuesta de demostración de la Regla de Born basándonos en el artículo de A.J. Short [1]. La demostración propuesta será más general que solo para la mecánica cuántica, mostrando así que las estrategias utilizadas son útiles en más contextos. Empezaremos creando el marco de trabajo para las demostraciones, definiendo una medida sobre los mundos y tomando unos axiomas como base que consideraremos razonables. Después desarrollaremos las demostraciones, que quizá son algo farragosas, pero utilizando argumentos muy sencillos. Por último, discutiremos sobre cuánto de razonables son los axiomas impuestos y veremos la utilidad y fuerza de los resultados obtenidos.

Para resumir podemos decir que el trabajo tiene tres objetivos principales:

1. Introducir a un lector del grado a las interpretaciones de la mecánica cuántica y concretamente a la de muchos mundos.
2. Trabajar formalmente con paradojas y la interpretación de muchos mundos.
3. Facilitar la comprensión de la demostración de la Regla de Born propuesta por Short en [1] y formalizar los detalles que el autor ha omitido.



## Capítulo 2

# Interpretaciones de la mecánica cuántica

En este capítulo exploraremos la historia de las primeras interpretaciones de la mecánica cuántica, ofreceremos un resumen de la interpretación que se enseña comúnmente en los programas de Física universitaria y luego nos adentraremos con más detalle en lo que se conoce popularmente como la interpretación de muchos mundos. Esta última será el marco de trabajo para el siguiente capítulo de la memoria.

### 2.1. Historia e interpretación de Copenhague

Para comprender las razones detrás de las diferentes interpretaciones de la mecánica cuántica, es útil conocer la historia de esta teoría y las causas que iniciaron el debate sobre cuál es la interpretación correcta. Para ello, nos apoyaremos en el contexto histórico proporcionado por [4] y seguiremos una estructura inspirada en [15].

Podemos decir que la física cuántica empieza a aparecer cuando en 1900 Max Planck, propone una solución a la catástrofe del ultravioleta, la cual violaba algunos principios de la física clásica: el espectro de radiación del cuerpo negro se produce solo con energías discretas separadas por el valor  $h\nu$ , donde  $\nu$  es la frecuencia y  $h$  es una nueva constante conocida ahora como la constante de Planck. Este descubrimiento fue clave para la explicación posterior de Albert Einstein del efecto fotoeléctrico.

El siguiente paso para el comienzo de la teoría fue el desarrollo del modelo matemático de Niels Bohr en 1913 que explicaba el modelo atómico de Rutherford, el cual propuso según los resultados de sus experimentos con una lámina de oro en 1911, este modelo era capaz de explicar el espectro de emisión del hidrógeno (serie de Balmer). Se basaba en dos postulados, el sistema atómico era solo estable en una serie de estados predefinidos y la de emisión y absorción de energía estaba determinada por la diferencia de energía entre estados  $h\nu$ . El modelo intro-

dujo unas cuantas ideas que resultaban poco intuitivas para la física clásica, como la discontinuidad. Podemos decir que esto fue el inicio de la primera física cuántica.

Con el paso de los años fueron surgiendo modelos, experimentos y descubrimientos que parecían pertenecer al mismo campo y que daban base para la transición y la creación de una teoría más sofisticada que englobase todos estos hechos. Niels Bohr mejoró la teoría del átomo, incluyendo el spin y el principio de exclusión. Pese a esto, la teoría no estaba completa, ya que fallaba al predecir otros espectros distintos a los del hidrógeno. Fue entonces Werner Heisenberg, que trabajaba en Copenhague junto con Bohr en 1925, quien propuso y estableció los principios de una teoría cuántica completa, basada en una formulación matemática matricial y el uso de variables que no conmutaban, a diferencia de las variables clásicas (posición y momento). Un año después, Erwin Schrödinger dio una formulación algo más sencilla basada en una ecuación diferencial de segundo orden cuya función solución, la función de onda, era capaz de describir los estados del átomo. Estas formulaciones a priori parecían contradecirse y enfrentaban a sus creadores. Saber cuál era la formulación correcta era un problema a resolver en ese momento.

En 1927 se juntaron muchas de las celebridades científicas de la época en lo que se llamó Conferencia Solvay, de la que podemos ver una imagen de los asistentes en la Figura 2.1. Esta fue una famosa conferencia la cual se dedicó a resolver algunos de los problemas latentes a los que se enfrentaban la física y la química del momento.



**SOLVAY CONFERENCE 1927**

- |                           |                             |                               |                             |                                 |
|---------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| 1. Peter Debye            | 7. Émile Henriot            | 13. Théophile de Donder       | 19. Paul Langevin           | 25. Charles Thomson Rees Wilson |
| 2. Irving Langmuir        | 8. Paul Ehrenfest           | 14. Paul Adrien Maurice Dirac | 20. Louis-Victor de Broglie | 26. Ralph Howard Fowler         |
| 3. Martin Knudsen         | 9. Marie Curie              | 15. Albert Einstein           | 21. Charles-Eugène Guye     | 27. Léon Brillouin              |
| 4. Auguste Piccard        | 10. Hendrik Anthony Kramers | 16. Erwin Schrödinger         | 22. Wolfgang Pauli          | 28. Niels Bohr                  |
| 5. Max Planck             | 11. Édouard Herzen          | 17. Arthur Holly Compton      | 23. Werner Heisenberg       | 29. Owen Willans Richardson     |
| 6. William Lawrence Bragg | 12. Hendrik Antoon Lorentz  | 18. Jules-Émile Verschaffelt  | 24. Max Born                |                                 |

Figura 2.1: Integrantes de la conferencia de Solvay de 1927, foto coloreada por IA.

Fue a partir de este encuentro cuando se probó que las formulaciones de Bohr y Schrödinger eran equivalentes, estas teorías daban pie a crear una formulación unificada que explicase los fenómenos y enmarcase la mecánica cuántica, es lo que

se conoce actualmente como interpretación de Copenhague.

El término de interpretación de Copenhague surge algunos años después de las conferencias y se ha utilizado en cantidad de textos para criticar y defender la interpretación. A lo largo del tiempo, la interpretación ha evolucionado y con ese nombre se refieren a varias interpretaciones que difieren en algunos detalles, pero se basan en los mismos principios. Actualmente, es una de estas versiones de la interpretación de Copenhague la más extendida para explicar la mecánica cuántica. Además, es la que se utiliza en los grados universitarios debido a que es la más didáctica y con mayor grado de aceptación. Esta interpretación en algunos textos también se conoce como interpretación ortodoxa.

Todas las interpretaciones derivan de ciertos axiomas, los cuales, proporcionan el fundamento matemático con el que trabajar cada teoría. Entre interpretaciones, los axiomas pueden variar o eliminarse para que sean coherentes con la interpretación. Para recordar los que nos propone la interpretación ortodoxa, tomaremos los axiomas de la mecánica cuántica como los muestra [5] y a partir de ellos podremos compararla con otras interpretaciones, concretamente la de muchos mundos que es en la que se va a enmarcar la segunda parte de la memoria.

### 2.1.1. Postulados de la mecánica cuántica (Copenhague)

Estos postulados los consideramos conocidos, por lo que no entraremos en explicar todos detalles ni analizaremos las consecuencias de cada uno. Se tratan de afirmaciones que se asumen como ciertas a priori, sin demostración matemática y basándose solo en resultados experimentales.

El estado de un sistema cuántico se puede describir con una función de onda cuadrado integrable, la cual se puede identificar con un vector de un espacio de Hilbert dando lugar al primer Postulado, relacionado con los estados.

**Postulado 1.** *Para un instante  $t_0$ , el estado de un sistema cuántico se puede describir mediante un vector  $|\psi(t_0)\rangle$  de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .*

El segundo Postulado que nos define observable e identifica las magnitudes observables.

**Postulado 2.** *Toda magnitud física medible  $A$  se representa mediante un operador hermítico  $A$  que actúa sobre  $\mathcal{H}$ . Este operador es un observable.*

El tercer Postulado está relacionado con la medición y los resultados de estas mediciones.

**Postulado 3.** *Los únicos resultados posibles a obtener en una medición de la magnitud  $A$  son los autovalores del operador  $A$ . En la definición de operador se pide que  $A$  sea hermítico, por lo que las cantidades medidas serán reales.*

El cuarto Postulado nos da una regla de probabilidad de obtener cierto resultado en la medición de un observable. En su versión más general este Postulado se conoce como Regla de Born y será en lo que centremos el siguiente capítulo de

la memoria. Por no complicar la notación y como no es relevante generalizarlo, daremos el Postulado en el caso más sencillo, sin degeneración del espectro de autovalores y en el caso discreto.

**Postulado 4. Regla de Born.** *Cuando medimos la magnitud  $\mathcal{A}$  en un sistema cuántico que se encuentra en el estado  $|\psi\rangle$ , la probabilidad  $\mathcal{P}(a_n)$  de obtener el autovalor no degenerado  $a_n$  del observable  $A$  será*

$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle a_n | \psi \rangle|^2, \quad (2.1)$$

donde  $|a_n\rangle$  es el autovector normalizado asociado al autovalor  $a_n$ .

El siguiente Postulado está relacionado con el estado en el que se encuentra el sistema después de la medición: el sistema “colapsa” al autoestado asociado al resultado obtenido. Como veremos más adelante, es este Postulado uno de los que más controversia ha generado en la teoría, ya que genera paradojas y resultados poco convencionales. Con el objetivo de solucionar estos problemas que se generan surgen lo que se conoce como interpretaciones. Concretamente, las interpretaciones bohmiana y de muchos mundos, la cual desarrollaremos luego, eliminan este postulado.

**Postulado 5.** *Si en la medición de la magnitud  $\mathcal{A}$  en un sistema en el estado  $|\psi\rangle$  obtenemos el resultado  $a_n$ , inmediatamente después de la medición, el estado del sistema será la proyección del estado  $|\psi\rangle$  sobre el subespacio asociado a  $a_n$ :*

$$|\psi\rangle \xrightarrow{a_n} \frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_n | \psi \rangle}}. \quad (2.2)$$

$P_n$  es el operador proyección sobre el subespacio asociado a  $a_n$ .

Por último, el sexto Postulado nos determina qué ecuación gobierna la evolución temporal del estado de un sistema.

**Postulado 6.** *La evolución temporal del estado de un sistema  $|\psi(t)\rangle$  está gobernada por la ecuación de Schrödinger,*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.3)$$

donde  $H(t)$  es el observable asociado a la energía total del sistema.

Como hemos comentado, estos postulados corresponden a lo que en algunos textos se conoce como interpretación ortodoxa. Con interpretación de Copenhague se engloban varias interpretaciones distintas, pero la mayoría mantienen en común los siguientes aspectos:

1. La mecánica cuántica solo puede predecir las probabilidades de obtener las mediciones (Regla de Born), los sistemas físicos no tienen propiedades determinadas antes de ser medidos (indeterminismo)
2. El sistema, cuando se produce una medición, colapsa hacia un estado determinado por el resultado obtenido en la medición (Postulado 5).

3. La función de onda y el vector de estado se interpretan como herramientas matemáticas de predicción, no se le da un carácter físico real.
4. Se asume la complementariedad, la cual afirma que existen ciertas magnitudes que no se pueden medir a la vez en un mismo sistema.

En resumen, podríamos decir que las interpretaciones de Copenhague son más “instrumentalistas”, es decir, interpretan la mecánica cuántica como un modelo que nos permite predecir ciertos resultados de nuestros experimentos. No se detienen en lo profundo y filosófico de las implicaciones de la teoría. N. David Martin utilizó la frase “Cállate y calcula” para resumir las interpretaciones que se solían agrupar bajo el término interpretación de Copenhague [6].

Pese a ser esta la interpretación con más aceptación en la historia, se ha enfrentado a multitud de críticas por diversos aspectos conceptuales contra intuitivos, algunos se han ido resolviendo y otros siguen aún vigentes. Podemos mencionar varios como:

1. La diferencia con la mecánica clásica y su carácter indeterminista.
2. El concepto de entrelazamiento, el problema de la acción a distancia y las teorías de variables ocultas.
3. La interpretación de la función de onda.
4. No se sabe aún como aunar en una teoría la mecánica cuántica y la relatividad general.
5. El problema de la medida, el papel del observador y los aparatos de medición.

Nosotros nos centraremos en el último punto. Lo que veremos luego en la sección 2.2.2 como interpretación de muchos mundos (IMM) será una interpretación que trata de poner solución a lo que se conoce como el problema de la medida. Los defensores de la interpretación de Copenhague enfrentan el problema afirmando que no tiene sentido atribuir un estado cuántico a un sistema clásico y defendiendo que la medición no es un proceso físico. Las corrientes más instrumentalistas de la interpretación se afirma que no se puede hacer una teoría de la realidad, solo modelos que la predigan con un error aceptable.

### 2.1.2. El problema de la medida

Desde el inicio del desarrollo de la mecánica cuántica, el acto de medir ha dado lugar a muchos problemas de comprensión y multitud de ataques hacia la teoría por medio de paradojas. Para tratar distintos enfoques de este problema, primero nos basaremos sobre todo en el libro [6] el cual lo trata desde varios puntos de vista y los ve como el germen de la interpretación de muchos mundos. Posteriormente, cuando entremos en la paradoja del amigo de Wigner nos estaremos basando en la explicación que hacen [2] y [20].

La discusión comienza con la famosa paradoja del gato de Schrödinger [21], aunque esta se centra en cuestionar las superposiciones mediante un ejemplo macroscópico.

Esta paradoja surge al intentar relacionar los comportamientos del mundo cuántico con nuestra escala cotidiana. Esta paradoja nos puede servir como introducción para entender la siguiente, por lo que la vamos a explicar formalmente.

Colocamos dentro de una caja completamente aislada del exterior un gato, una partícula de un elemento radiactivo con probabilidad  $\frac{1}{2}$  de emitir radiación y un contador Geiger. El contador, si detecta radiación, activará una palanca que romperá un frasco con veneno mortal para el gato. La mecánica cuántica nos dice que la partícula se encuentra en un estado  $|\psi\rangle$  de superposición sobre si emite radiación  $|1\rangle$  o no  $|0\rangle$ :

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.4)$$

Utilizando la notación de Drac para asociar estados al resto de elementos de la caja, el contador Geiger puede detectar radiación y estar en los estados  $|si\rangle$  o  $|no\rangle$ , y el gato puede estar dependiendo de si se ha roto el frasco vivo,  $|vivo\rangle$ , o no,  $|muerto\rangle$ . Como la caja está cerrada, para un observador externo como seríamos nosotros el sistema se encuentra en el estado:

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle |no\rangle |vivo\rangle + |1\rangle |si\rangle |muerto\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.5)$$

esto significa que hasta que veamos el interior el gato se encuentra en un estado de superposición entre estar vivo y muerto, hablando informalmente estaría muerto y vivo a la vez. Inicialmente, este escenario se consideraba una paradoja: que coexistiesen estos dos estados del gato era algo completamente contra intuitivo y que parecía ir en contra de la física del momento.

La respuesta que acabaron dando los defensores de las interpretaciones del estilo de Copenhague a este dilema era que la mecánica cuántica no podía aplicarse a un sistema clásico como el gato, en el momento en el que asociamos estados al gato o al contador estamos haciendo “trampas” que no están permitidas dentro del modelo de la mecánica cuántica. Las interpretaciones enfocan esta paradoja de distintas formas y todas enfrentan este problema hasta satisfacer ese sentimiento de contradicción. Se puede dar una respuesta más compleja que involucra conceptos como la decoherencia cuántica, aunque no entraremos en detalle.

A partir de este escenario surgen también otras preguntas que nos traerían mucha discusión. Nos podríamos preguntar de forma más profunda cuándo y cómo se pasa de un mundo cuántico probabilístico a uno determinista y clásico. ¿Cuál es la acción que determina, qué estamos midiendo? ¿Qué tienen de especial los aparatos de medición para hacer colapsar los estados? Sabemos cómo miden los aparatos en cualquier rama de la física, pero en cuántica no. ¿Por qué el estado de una partícula evoluciona de forma distinta en el tiempo si lo medimos o no? ¿Por qué influye el observador en el resultado que observamos?

Todas estas preguntas nos hacen enfocar el problema de forma casi filosófica y muy elemental. Como el objetivo principal de esta memoria no es trabajar en profundidad el problema de la medida, vamos a visualizarlo de una forma más

práctica: utilizaremos un experimento mental conocido como **la paradoja del amigo de Wigner** [9]. Según lo que dice [2], fue esta paradoja la que también utilizó Everett en su tesis [17] para motivar la interpretación de muchos mundos (la tesis se presentó antes que el artículo del que proviene la paradoja, pero al ser Everett alumno de Wigner se supone que lo habrían debatido entre ellos previamente). En ella se visualiza cómo en cuántica, a diferencia de en el resto de ramas de la física, el observador tiene un papel especial y los resultados de las mediciones dependen por completo de quien las observa.

La paradoja toma el nombre y la fama de cuando se planteó como en [9], pero su versión original es de 1961. En este artículo se enfocaba en el problema que causaba el papel especial que tiene el observador en la mecánica cuántica. La paradoja parecía mostrar que ideas como mente o alma tuviesen un papel fundamental en la teoría, oponiéndose así a la conducta materialista de la mayoría de físicos. Con la paradoja, Wigner llegó a afirmar que la “mente humana puede desviarse de la física”, frase completamente inadmisibles para la comunidad científica.

En esta memoria describiremos la paradoja más parecida a como lo hizo Everett en su tesis y como hace [2]. Describiremos el escenario por capas, primero nombraremos como  $S$  a un sistema cuántico. Llamaremos  $A$  a un observador el cual conoce la función de estado de  $S$ ,  $\psi_S$  (este observador será el “amigo” que menciona Wigner). Por último, está el segundo observador  $W$  (que era el propio Wigner en su versión).  $W$  considerará el sistema  $L = S + A$  como un sistema propio y conocerá su función de estado  $\psi_L$ : el sistema  $L$  está completamente aislado del exterior, podemos ver una ilustración de ayuda en la Figura 2.2.

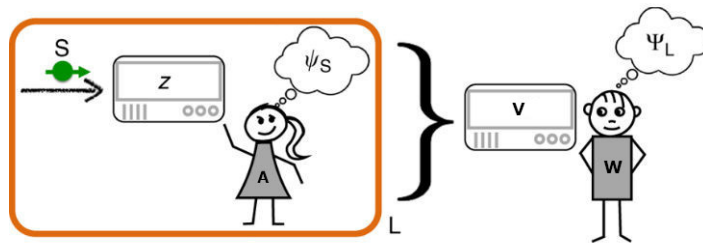


Figura 2.2: Escenario de la paradoja del amigo de Wigner. Figura extraída de [16] y adaptada para nuestro contexto.

$A$  realizará una medición sobre el sistema  $S$  y tenemos que suponer que  $\psi_S$  no es un estado propio del observable que va a medir.  $A$  sabe que después de la medición el estado de  $S$  evolucionará siguiendo el Postulado 5 y colapsando al autovalor asociado al resultado obtenido de la medición. El observador  $A$  describirá el estado de  $L = A + S$  como un estado determinado por este colapso del estado de  $S$ . Al mismo tiempo, el observador  $W$ , como  $A$  está totalmente aislado, afirmará que el estado del sistema  $L$  evolucionará según el Postulado 6. En un mismo instante tenemos que el estado de  $L$  y en consecuencia, el de  $A$  y  $S$ , son distintos para cada



observador. Este polémico escenario hace afirmar a Everett que estos dos tipos de evolución de los estados no eran compatibles y decide que el Postulado 5 es erróneo y se puede eliminar.

Describiremos la paradoja más formalmente en la siguiente sección. Desarrollaremos también como la IMM afronta el problema de la medida y más concretamente el conflicto que generaba para él los dos tipos de evolución de estados que observamos en la paradoja. Fue este problema el principal precursor de la interpretación de muchos mundos que comenzó a proponer Everett.

## 2.2. La interpretación de muchos mundos (Everett)

Como hemos visto, Everett encuentra incompatibles algunas de las suposiciones que realizaban ciertas corrientes de la mecánica cuántica. Con el objetivo de arreglarlo, comienza a desarrollar su teoría que será luego la base de la interpretación de muchos mundos. En esta sección no entraremos en el debate de qué interpretación es más o menos correcta ni trataremos todos los detalles de la IMM, pero sí que la introduciremos siguiendo [2] y [3] y motivaremos el inicio del siguiente capítulo de la memoria.

### 2.2.1. La paradoja del amigo de Wigner, versión de Deutsch

Everett, con el objetivo de arreglar el problema de la medida como se ve en la paradoja del amigo de Wigner, propone eliminar el Postulado 5 referido al colapso y de esta forma no tendríamos los dos tipos de evolución de estados. Partiendo de esto, trata de elaborar una nueva teoría a la que denomina mecánica ondulatoria pura [2]. Esta teoría debería ser capaz de determinar de forma precisa el estado de un sistema físico en cualquier instante del tiempo y que a partir de ella se pueda deducir como se obtienen los resultados de las mediciones que parecen colapsar hacia ciertos estados con carácter probabilístico. Hay que puntualizar que en la interpretación de muchos mundos, los elementos clásicos pueden tener estados cuánticos y clásicos y se utilizan para el formalismo.

Motivaremos la interpretación a partir de una versión de la paradoja del amigo de Wigner, al igual que hizo Everett en su tesis. Con esto también introduciremos de forma sencilla como se trabaja formalmente con la interpretación para este caso. Es importante mencionar que la paradoja se trata de un experimento mental imposible de replicar en la realidad, pero esta imposibilidad no nos libra del problema conceptual que genera.

Para tratar de entender la teoría y ver cómo explica Everett que experimentalmente sí que observemos el colapso de los estados, vamos a ver como trata la IMM a la paradoja del amigo de Wigner pero en una versión de Deutsch [20] mucho más actual que la tesis de Everett. En esta versión nos encontramos con que el aspecto problemático que nos muestra la paradoja es que tenemos que definir cuál es el observador válido del experimento y en el caso de que elijamos a Wigner el amigo estaría en superposición, lo cual es conflictivo para la interpretación de



Copenhague. La versión de Deustch también genera un posible experimento que, en caso de poder replicarse en la realidad, daría información sobre cuál de las dos interpretaciones es la correcta, si la ortodoxa con colapso o la de muchos mundos.

Empecemos por especificar dentro de los elementos de la paradoja. El sistema  $S$  será un qubit, esto no es más que un sistema cuántico de dos niveles y su estado  $|\psi_S\rangle$  será

$$|\psi_S\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.6)$$

Si dotamos a  $A$  de estado cuántico  $|A_?\rangle$  donde el subíndice marca el resultado de la medición del sistema  $S$  tenemos que el sistema  $L$  se encuentra en el siguiente estado

$$|\psi_L\rangle = \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |A_?\rangle. \quad (2.7)$$

Una de las modificaciones que introduce Deutsch en su paradoja es el estado de una nota de papel donde  $A$  apunta si ha realizado la medición: puede estar en los estados  $|si\rangle$  o  $|no\rangle$ . Este añadido se utilizará, ya que en el experimento necesitamos “borrar” la memoria de  $A$ , por lo que el papel nos permite asegurarnos que la medición se ha realizado. Si añadimos el estado en el que se encuentra Wigner que no conoce tampoco el resultado antes de la medición, el sistema global estará en el estado

$$\left[ \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |A_?\rangle |no\rangle \right] |W_?\rangle. \quad (2.8)$$

Supongamos ahora que  $A$  es el observador y realiza la medición del qubit, basándonos en lo que dice el Postulado 5, el estado del sistema colapsará hacia el autoestado asociado al resultado de la medición. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el resultado de la medición es 0 entonces el sistema  $S$  colapsará hacia  $|0\rangle$ , el estado del papel donde apunta también cambia y el estado global sería

$$(|0\rangle |A_0\rangle |si\rangle) |W_?\rangle. \quad (2.9)$$

Si tomamos, en cambio, a Wigner como el observador aquí, él sabe que  $A$  ha realizado la medición, pero no sabe qué resultado ha obtenido y podría entenderse como que  $A$  se encuentra en superposición entre los dos resultados al igual que el gato de Schrödinger, esto es

$$\left( \frac{|0\rangle |A_0\rangle |si\rangle + |1\rangle |A_1\rangle |si\rangle}{\sqrt{2}} \right) |W_?\rangle. \quad (2.10)$$

El hecho de que un sistema macroscópico esté en superposición y que dependiendo del observador que elijamos tengamos realidades distintas son problemas para la interpretación de Copenhague. Estos conflictos lo solucionan afirmando que ocurre el colapso y aunque Wigner no sepa el resultado, está ya predefinido por lo obtenido en la medición de  $A$ . En definitiva, es  $A$  el observador válido y el estado del sistema es

$$(|0\rangle |A_0\rangle |si\rangle) |W_?\rangle. \quad (2.11)$$

El enfoque de Copenhague para la interpretación de muchos mundos, no es correcto y no queda todo bien definido. Desde la IMM se considera que el hecho de tener

que detallar cuál es el observador y que existan dos tipos de evolución de estados no es satisfactorio y plantean una solución alternativa.

Tratando el experimento desde la IMM lo que ocurre al medir es que se realizan dos copias del observador  $A$  y cada una observará un resultado de la medición. Como se ha realizado la medición, el estado del papel donde  $A$  apunta cambiará y el estado global será

$$\left( \frac{|0\rangle |A_0\rangle |si\rangle + |1\rangle |A_1\rangle |si\rangle}{\sqrt{2}} \right) |W_?\rangle. \quad (2.12)$$

Podemos decir que el mundo se ha dividido en dos copias idénticas (dos mundos), donde en cada mundo el observador ha obtenido un resultado distinto de los posibles de la medición. El estado que hemos escrito en (2.12) es el que se conoce como estado del universo y el estado de uno de los mundos, en el que  $A$  mide 0, por ejemplo, el estado de un mundo sería

$$(|0\rangle |A_0\rangle |si\rangle) |W_?\rangle. \quad (2.13)$$

Como más adelante veremos es a partir de esto y con terminología apropiada es como Everett explica la “sensación de colapso” del sistema que tiene el observador  $A$ .

Hasta aquí hemos visto como enfoca la situación cada interpretación, pero hemos elegido esta variación de la paradoja, porque aparte de mostrar el conflicto, nos permite plantear un experimento que en el caso de replicarse podría descartar una de las interpretaciones o darle cierta veracidad a la otra. Para ello necesitamos realizar algún paso más a las situaciones en las que hemos dejado el sistema en cada interpretación.

Partiendo primero desde la interpretación ortodoxa,  $W$  realizará ahora dos operaciones cuánticas antes de medir sobre el sistema  $L$ . Primero lo que va a hacer es ese proceso de “borrado” de memoria de  $A$  que hemos mencionado al principio de la sección, obviando así el resultado que ha obtenido y devolviendo el estado de  $|A_0\rangle$  a  $|A_?\rangle$ . Lo segundo es aplicar el operador que en computación cuántica se conoce como puerta Hadamard  $H$  al sistema qubit.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Como resultado de estas operaciones, y partiendo de que el estado del sistema era (2.11), el estado en el que se encuentra el sistema ahora es

$$\frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}} |A_?\rangle |si\rangle |W_?\rangle. \quad (2.15)$$

Si Wigner ahora realizase una medición del qubit podría obtener 0 o 1 con probabilidad  $\frac{1}{2}$ . En el caso de que la primera medición de  $A$  hubiese sido 1 en lugar de 0 ocurriría igual.

Siguiendo el mismo proceso ahora, pero desde la interpretación de muchos mundos, aplicaremos primero el borrado de memoria de  $A$  en ambas copias y después la puerta Hadamard  $H$  al sistema qubit. Como resultado de esta operación obtenemos que el estado del universo queda

$$\begin{aligned} H \left( \frac{|0\rangle |A_?\rangle + |1\rangle |A_?\rangle}{\sqrt{2}} \right) |si\rangle |W_?\rangle &= H \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |A_?\rangle |si\rangle |W_?\rangle \\ &= |0\rangle |A_?\rangle |si\rangle |W_?\rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

En este caso, cuando  $W$  realiza la medición del sistema  $S$ , solo puede obtener como resultado 0 con probabilidad 1.

Si se pudiese replicar este experimento nos permitiría enfrentar las dos interpretaciones, podríamos repetir este experimento muchas veces y si solo obtenemos el resultado 0 podríamos decir con un grado bastante alto de certeza que la interpretación correcta es la de muchos mundos y el Postulado de colapso tiene que eliminarse. En el caso de obtener un 1 en alguna de las repeticiones, habría que descartar la interpretación de muchos mundos.

Una vez entendido por encima como funciona la evolución temporal de los estados para la IMM, nos falta ver cómo explica Everett el hecho de que  $A$  observe que volviendo a medir  $S$  siempre va a obtener el mismo resultado, la percepción de que el estado después de la medición ha colapsado. Para explicar esto, formuló el principio de relatividad fundamental de los estados y es de dónde luego surgen las ideas de muchas “realidades/mundos”.

Everett clasifica los estados en relativos y absolutos. Dado un sistema el cual, después de una medición, se encuentra en un estado absoluto, no existe un estado único para un subsistema de este. El subsistema estará en un estado relativo al estado del resto del sistema. Aplicado esto a nuestro ejemplo, el sistema  $S + A$  tras la medición se encuentra en el estado absoluto de la expresión (2.12) y el estado del subsistema  $A$  puede ser  $|A_0\rangle$  o  $|A_1\rangle$  que es un estado relativo y condicionado por el estado de  $S$ . Es por esto que  $A$  en su percepción, dependiendo de qué resultado obtiene en la medición del qubit, observa que  $S$  se encuentra en solo uno de los estados  $|0\rangle$  o  $|1\rangle$ .  $A$  en su “mundo” observa que  $S$  colapsa a uno de estos estados.

En la medición del qubit se obtiene que, por cada resultado posible, existe un estado relativo del observador  $A$ . Se puede entender como si la realidad se ramificase y apareciese un “mundo” por cada posible resultado de la medición y en cada mundo una “copia” del observador  $A$  obtiene cada resultado.

Para terminar de introducir la teoría que desarrolla Everett, diremos que se trata de una teoría determinista y que explica los resultados experimentales de colapso de los estados como una interpretación propia de cada observador que realiza la medición, en la siguiente sección entraremos más en detalle sobre la interpretación. El hecho de que estos resultados parezca que siguen una ley de probabilidad determinada es otro de los desafíos con los que se tuvo que enfrentar interpretación y será lo que trabajaremos en el siguiente capítulo de la memoria.

### 2.2.2. Interpretación de muchos mundos

Como ya hemos mencionado antes, previo a recibir el popular nombre de interpretación de muchos mundos, su precursor Everett desarrolló en su tesis [17] una teoría más primitiva, la cual llamó mecánica ondulatoria pura y posteriormente evolucionó a la que hemos nombrado como IMM. En el capítulo anterior hemos introducido como funciona y, por lo tanto, podemos hacernos una idea general y comprender la base de la mayoría de versiones de la IMM. Explicaremos un poco por encima en qué está basada la interpretación de muchos mundos, viendo su formalismo matemático como hace [3] y así podremos enfrentar el problema de la probabilidad en esta interpretación en el siguiente capítulo.

La idea fundamental de la interpretación es que, en el universo, existen muchos más mundos aparte del que somos conscientes cada uno. Como hemos visto en la sección anterior, cada vez que realizamos un experimento cuántico se obtienen todos los resultados posibles, aunque para el observador que lo realiza solo se obtiene uno, se han realizado “copias” del mismo observador en distintos “mundos” obteniendo como resultado el resto de alternativas.

Podemos decir que la interpretación de muchos mundos tiene dos partes:

1. Una teoría que establece la evolución temporal del estado cuántico del universo.
2. Una teoría que establece una correspondencia entre el estado del universo y nuestras experiencias.

La primera parte tiene una descripción matemática totalmente formal y la evolución temporal del estado cuántico del universo se basa en la versión relativista de la ecuación de Schrödinger, a partir de esta parte no se pueden explicar los resultados de los experimentos.

La segunda parte es bastante más filosófica y no tiene una descripción totalmente rigurosa. Los “mundos” de los que habla la interpretación pertenecen a esta segunda parte, ya que depende de nuestra percepción y no se trata de un concepto matemático. Es importante diferenciar entre el concepto habitual de mundo y el que utiliza la IMM. En IMM con mundo nos referimos a la nuestra experiencia en concreto o a la de un observador y en lenguaje usual suele referirse a todo lo que existe. En IMM para referirnos a todo utilizaremos el concepto universo. En la IMM a diferencia de otras interpretaciones, también se atribuyen a los objetos estados clásicos, como por ejemplo a un gato, el estado vivo o muerto.

La pregunta que nos podría surgir entonces es ¿quién soy “yo”?, y ¿cuál de los “yo” de cada mundo es el real? Para entender esto podemos atribuir el término “yo” solo al que está en el mundo que estás percibiendo como experiencia, pero también se puede decir que hay muchos observadores como tú en otros mundos, los cuales están observando otros resultados de alguna medición. Todos son igual de reales, aunque desde nuestra percepción solo existe uno, nosotros mismos. Es también distinto como se trata el tiempo y los “yo” en esta interpretación, dado un

instante, todos los observadores con mi nombre provienen del mismo del pasado, pero pueden estar asociados a muchos del futuro, las líneas temporales se ramifican con el avance del tiempo.

Otra definición que tampoco es muy rigurosa, tal y como la vamos a plantear, es la de objeto. Podemos conocer aproximadamente la función de onda de algunas partículas elementales, pero no de los objetos macroscópicos, aunque sí trabajaremos con ellas. Todos elementos macroscópicos, pese a estar formados de partículas cuando forman un ente macroscópico, los denominaremos objetos y tendrán un estado cuántico asociado  $|\psi\rangle_{Gato}$ , para por ejemplo un gato, el cual será una configuración concreta de los estados de las partículas que lo forman. En el caso de la paradoja de Schrödinger, antes incluso de abrir la caja, el mundo se divide en dos donde en cada uno se encuentra un estado del gato  $|vivo\rangle_{Gato}$  o  $|muerto\rangle_{Gato}$ .

Simplificando bastante, aunque suficiente para nuestro objetivo, podemos decir que un mundo de objetos es el producto de todos los estados de los objetos que lo conforman y también el estado de las partículas que no forman ningún objeto, esto es

$$|\phi\rangle_{\text{mundo}} = |\psi\rangle_{\text{Ob1}} |\psi\rangle_{\text{Ob2}} |\psi\rangle_{\text{Ob3}} \cdots |\psi\rangle_{\text{ObN}} |\chi\rangle. \quad (2.17)$$

Está descripción de los mundos a partir solo de objetos macroscópicos, es algo anticuada y es propia de tiempos pasados donde lo macroscópico era lo único relevante. Actualmente, se realizan experimentos con partículas individuales, por lo que existen modificaciones para la descripción del estado de un mundo.

Si volvemos a la primera parte de la interpretación, nos queda por explicar cómo se describe el estado del universo. Este estado se puede descomponer como superposición de estados correspondientes a diferentes mundos, donde cada mundo tiene entre ellos al menos un estado distinto para algún objeto

$$|\Psi\rangle_{\text{universo}} = \sum_i \alpha_i |\phi\rangle_{\text{mundo}_i}. \quad (2.18)$$

Como los estados diferentes de un mismo objeto no pueden ocurrir simultáneamente en un mundo, son sucesos excluyentes (un gato no puede estar vivo y muerto al mismo tiempo en un mismo mundo).

La definición de estado del universo, como está construida a partir de la del estado de un objeto que no es muy rigurosa, tampoco lo es. Nos sirve para utilizarlo en la práctica y para entender nuestras experiencias y resultados de experimentos, pero se trata de una FAPP (for all practical purposes) [3], es decir, para todos los objetivos prácticos. La mecánica cuántica es también una FAPP.

Como ya hemos anunciado previamente, uno de los mayores retos de la interpretación es explicar el comportamiento probabilístico que observamos al realizar mediciones en experimentos con sistemas cuánticos. Concretamente, se trataba de explicar o demostrar por qué los resultados de las mediciones seguían la Regla de Born del Postulado 4. Dependiendo de la versión de IMM y de los autores, este

desafío se ha afrontado desde diferentes enfoques.

El objetivo de las personas que han trabajado en este desafío es recuperar las predicciones probabilísticas que realiza la cuántica dentro de la interpretación de muchos mundos, lo que podría parecer contradictorio porque se trata de una teoría determinista. La mayoría de autores propone que la probabilidad debe ser una ilusión de los observadores. Everett en su trabajo original [8] trata de encontrar una medida natural sobre cada mundo que nos diga cuánto de típico es cada observador. Esto es como preguntarse cuántos observadores ven el mismo resultado, lo que se traduciría desde la visión del observador en cuánto de probable es ver ese resultado. Su propuesta es una solución poco intuitiva, por lo que no entraremos en detalle. Es importante remarcar que con observador típico estamos evitando decir observador probable, ya que se trata de una teoría determinista, la probabilidad solo la siente el propio observador.

Vaidman también enfrentó el mismo problema como nos indica [3] en sus trabajos [11], [10] y [12], a través de lo que llamó medida de existencia de un mundo. Zurek también propuso una alternativa basada en un concepto propio de la cuántica conocido como *invarianza* y en el que no vamos a entrar en esta memoria, en caso de querer detalle se puede recurrir a [18]. Por último, Deutch y Wallace [13], [14] propusieron una solución basada en la teoría de la decisión, utilizaron técnicas parecidas a las que nosotros desarrollamos en el siguiente capítulo.

Cuando un autor conseguía explicar satisfactoriamente este sentimiento de probabilidad y demostraba que la ley de probabilidad que se obtenía era la Regla de Born, reforzaba de gran manera la IMM frente a otras interpretaciones. El debate de cuál es la interpretación correcta está aún latente y que en la IMM el Postulado 5 se pueda anular y el 4 se obtenga a partir del resto es un argumento sólido a favor de esta interpretación.

En el siguiente capítulo de la memoria nosotros enfocaremos este problema siguiendo [1]. Realizando una serie de suposiciones, obtendremos que para la interpretación de muchos mundos que se usa en la cuántica y para otras versiones, la única ley de probabilidad posible es la Regla de Born.

## Capítulo 3

# Demostración de la Regla de Born (A.J. Short)

Habiendo introducido la interpretación de muchos mundos y conocidos los desafíos que presenta para adaptarse a la realidad observada, hemos visto que justificar de la “experiencia de probabilidad” y la regla de probabilidad que siguen los experimentos cuánticos es un problema para el cual hay varias soluciones propuestas. En este capítulo vamos a ver y basarnos casi por completo en la que se propone en [1]. El objetivo del capítulo no será solo explicar cómo se interpreta la probabilidad, sino también obtener o demostrar la Regla de Born. Para hacerlo realizaremos una serie de suposiciones que nos faciliten la tarea y tomaremos como base algunas premisas que se pueden considerar razonables.

Con el objetivo de tratar el problema de la forma más general posible, veremos también que ley de probabilidad se obtiene en otras versiones de la interpretación de muchos mundos diferentes a la versión cuántica que hemos explicado. También veremos que para una de estas versiones no existe una ley de probabilidad que cumpla las premisas que le exigimos.

### 3.1. Marco de trabajo, formalismo y suposiciones

Tomaremos un enfoque natural o razonable de entender la probabilidad en la interpretación de muchos mundos. Nuestro objetivo será medir cuánto de típico es cada mundo, es decir, una distribución de probabilidad de los mundos que describen el estado del universo. “En particular, queremos explicar por qué las frecuencias relativas observadas de los resultados cuánticos en nuestro mundo, para una gran variedad de escenarios diferentes, son muy cercanas a las predichas por la Regla de Born” [1].

Como nuestro objetivo es obtener la Regla de Born y comprender la probabilidad en la interpretación de muchos mundos, tomaremos una teoría simplificada de esta. En esta versión simplificada se asumirá que conocemos como se descompone

en mundos el estado del universo, esto se conoce como el problema de la base preferida y queda fuera de nuestro objetivo. Tomaremos también una descripción matemática de los estados de los mundos simplificada con el objetivo de que nos sea familiar y que podamos trabajar con ella para la demostración.

Para describir el estado del universo tomaremos un espacio de estados  $\mathcal{H}$  con una base numerable de mundos posibles  $|n\rangle$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Un estado del universo  $|v\rangle$  se escribirá en esta base como  $|v\rangle = \sum_n v_n |n\rangle$ , donde  $v_n = \langle n|v\rangle$  se denomina amplitud del mundo  $n$ -ésimo o mundo  $n$  y será un escalar del conjunto sobre el que esté construido el espacio de estados, este puede ser los reales  $\mathbb{R}$  o los complejos  $\mathbb{C}$ .

Por simplicidad, tomaremos una interpretación de muchos mundos en la cual solo estén permitidas las relaciones lineales entre mundos, la evolución del estado del universo  $|v\rangle$  en un intervalo finito de tiempo al estado  $|v'\rangle$  lo gobierna el operador lineal  $T$ ,

$$|v'\rangle = T|v\rangle, \quad (3.1)$$

y los elementos de la matriz de este operador los denotaremos como  $T_{i,j} = \langle i|T|j\rangle$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{N}$ .

### 3.1.1. Medida de mundos y probabilidad

Para introducir la probabilidad en la interpretación, Short utiliza en la misma idea que planteo Everett en su tesis: tratar de obtener una medida  $\mu$  sobre el conjunto de mundos.

Como el conjunto de mundos es numerable y los estamos indexando con los naturales, la medida  $\mu$  será una medida sobre el  $\sigma$ -álgebra que generan el conjunto  $\mathbb{N}$ , esto es  $\mathcal{P}\{\mathbb{N}\}$ . Siguiendo la propia definición de medida [19], esta debe de cumplir tres premisas a las que nos referiremos como axiomas de medida:

1. No negatividad:  $\forall E \in \mathcal{P}\{\mathbb{N}\}, \mu(E) \geq 0$ .
2.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
3. Sumabilidad numerable: dada  $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$  una familia numerable de conjuntos  $E_k \in \mathcal{P}\{\mathbb{N}\}$ , disjuntos entre ellos dos a dos, se cumple que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k). \quad (3.2)$$

A partir de esta medida se puede definir una idea bastante intuitiva de lo que podría ser probabilidad. En la forma más sencilla supongamos que tu mundo está en el estado  $|\psi\rangle$  y tras algún evento se divide en infinitos mundos,

$$|\psi\rangle \rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i |i\rangle, \quad (3.3)$$



la probabilidad de que tú estés en el mundo  $k$  se puede definir como una medida relativa

$$p_k = \frac{\mu(\{k\})}{\mu(\mathbb{N})}, \quad (3.4)$$

donde el mundo  $k$  es en el que se observa un resultado en concreto. A esta probabilidad podemos aplicarle los axiomas de medida y obtener las siguientes propiedades:

1.  $p_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$ .
2.  $p_{\mathbb{N}} = \frac{\mu(\mathbb{N})}{\mu(\mathbb{N})} = 1$ .
3. Dada  $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$  una familia numerable de conjuntos  $E_k \in \mathcal{P}\{\mathbb{N}\}$ , disjuntos entre ellos dos a dos, entonces

$$p_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} = \frac{\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)}{\mu(\mathbb{N})} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_k)}{\mu(\mathbb{N})} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(E_k)}{\mu(\mathbb{N})} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{E_k}. \quad (3.5)$$

A partir de estas propiedades también podemos calcular la probabilidad de estar en un conjunto de mundos dado,  $E_k \in \mathcal{P}\{\mathbb{N}\}$ :

$$p_{E_k} = \frac{\mu(E_k)}{\mu(\mathbb{N})}. \quad (3.6)$$

*Observación 3.1.1.* Se puede observar una gran similitud entre las propiedades obtenidas y los axiomas de Kolmogórov o axiomas de probabilidad, que son las condiciones mínimas que deben verificarse para que una función definida sobre un conjunto de sucesos determine consistentemente sus probabilidades.

Se obtiene también una propiedad a la que llamaremos por esta similitud condición de normalización.

**Proposición 3.1.2.** *Condición de normalización:*  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ .

*Demostración.*

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu(\{i\})}{\mu(\mathbb{N})} = \frac{1}{\mu(\mathbb{N})} \sum_{i=0}^{\infty} \mu(\{i\}) = \frac{1}{\mu(\mathbb{N})} \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \{i\}\right) = \frac{\mu(\mathbb{N})}{\mu(\mathbb{N})} = 1. \quad (3.7)$$

□

A partir de estas definiciones y propiedades, en vez de obtener la medida en cada subconjunto, nosotros trataremos de ver directamente cuál es la ley de probabilidad de estar en cada mundo y probaremos que, en algunos casos concretos y bajo ciertas suposiciones, ésta coincide con la Regla de Born.

Es importante recalcar que en ningún momento se están utilizando propiedades de una probabilidad: una de las virtudes de esta demostración es que se hace de forma mucho más general a partir de los axiomas de medida.

### 3.1.2. Versiones de la interpretación de muchos mundos (IMM)

Con el objetivo de obtener unos resultados lo más generales posible, trabajaremos con más de una versión de la interpretación de muchos mundos, entre las cuales se encontrará la versión cuántica de la que hemos hablado. Estas versiones se diferenciarán entre ellas principalmente en dos aspectos. Cada versión tendrá un conjunto sobre el que está construido el espacio de estados y en cada versión solo están permitidos ciertos estados y cierto grupo de transformaciones. Cada versión utiliza un marco matemático distinto para modelar la realidad, por lo que ver como se trabajaría con distintas versiones de la interpretación es algo bastante interesante y poco común para un estudiante del Grado en Física.

#### Versión cuántica

En esta versión de la IMM está permitido cualquier estado complejo (las amplitudes son números complejos), no se impone ninguna restricción para la norma ( $0 < \langle v|v \rangle < \infty$ ) y las transformaciones lineales permitidas son las transformaciones unitarias  $TT^\dagger = T^\dagger T = I$ .

Hay que tener en cuenta que en esta versión los estados no tiene que estar normalizados, ya que como nuestro objetivo es obtener la Regla de Born, podría considerarse como un argumento circular imponer esta restricción. Vamos a demostrar la Regla de Born para esta versión de la interpretación más general y cuando veamos qué se obtiene podemos restringirla a estados normalizados. Si imponemos esta condición  $\langle v|v \rangle = 1$  tenemos lo que nombraremos como **versión cuántica normalizada** y es con la que se trabaja en mecánica cuántica.

#### Versión estocástica

Esta versión trata de representar una versión clásica de la IMM. Solo se permiten estados con amplitudes reales positivas o nulas, esto es,  $v_n \geq 0$ , y tienen que cumplir una condición similar a la de normalización que es  $\sum_n v_n = 1$ . Las transformaciones permitidas en esta versión son matrices estocásticas, es decir, tienen que tener todos sus elementos matriciales nulos o positivos,  $T_{ij} \geq 0 \forall i, j$ , y cumplir que la suma de los elementos de las columnas sea 1,  $\sum_i T_{ij} = 1, \forall j$ .

#### Versión discreta

Se trata de una versión de la IMM donde hay un número entero de copias del mundo en el universo y donde cada mundo solo se puede transformar en una cantidad finita de mundos. Solo se permiten los estados con amplitudes enteras  $v_n \in \mathbb{N}$ , no negativas,  $v_n \geq 0, \forall n$ , y que cumplan  $\sum_n v_n < \infty$ . Están permitidas solo las transformaciones que tienen todos los elementos matriciales no negativos,  $T_{ij} \geq 0, \forall i, j$ , y que cumplen que la suma de los elementos de las columnas sea finita:  $\sum_i T_{ij} < \infty, \forall j$ .

### 3.1.3. Axiomas

Para la demostración de todas las versiones mencionadas necesitamos hacer suposiciones sobre las amplitudes de los mundos, las probabilidades y las transfor-

maciones. Estas suposiciones las llamaremos axiomas, ya que las tomaremos como ciertas sin demostración previa. Según [1], son axiomas razonables e intuitivos, es decir, no es descabellado tomarlos como ciertos, aunque el propio Short en su artículo discute sobre esto. Los axiomas serán las condiciones que tiene que cumplir la regla de probabilidad para que nos parezca “razonable” y limita también las posibilidades con las que nos podemos encontrar. Serán los siguientes:

**Axioma 1. Dependencia del estado actual:** *Las probabilidades  $p_n$  dependen solo del estado actual  $|v\rangle$  y no de como se haya generado.*

**Axioma 2. Conexión débil con amplitudes:** *Si  $|v\rangle$  tiene una amplitud o coeficiente  $v_n = 0$ , entonces  $p_n = 0$ . Solo los mundos con amplitudes no nulas se consideran reales en la teoría de muchos mundos.*

**Axioma 3. Conexión débil con transformaciones:** *Dada una transformación  $T$ , si podemos encontrar una partición del conjunto de mundos tal que  $T$  actúa de forma aislada en cada conjunto de la partición, es decir, envía mundos de un conjunto de la partición en mundos del mismo conjunto, entonces  $T$  conserva las probabilidades totales de cada conjunto de la partición.*

Serán estas tres afirmaciones lo único que tendremos que suponer como cierto sobre la medida y, por lo tanto, la ley de probabilidad que queremos obtener. En la sección 3.2.5 discutiremos más en detalle sobre si estos axiomas son razonables.

## 3.2. Obtención de una ley de probabilidad

Para la demostración de qué ley de probabilidad cumple las premisas que exigimos previamente nos basaremos por completo en [1], añadiremos detalles, trataremos de completar el formalismo matemático e incluiremos ejemplos más sencillos y visuales que faciliten la comprensión.

Antes de comenzar la demostración para cada versión de la IMM introduciremos alguna definición y enunciaremos con su demostración dos proposiciones que utilizaremos en el resto de demostraciones del capítulo.

### 3.2.1. Lemas y resultados previos

Lo primero veamos una definición de un grupo concreto de transformaciones lineales que están permitidas en todas las versiones de la interpretación de muchos mundos

**Definición 3.2.1.** Denominaremos permutación entre los mundos  $i$  y  $j$  a la transformación representada como  $T^{i\leftrightarrow j}$ , esta actúa intercambiando los mundos  $|i\rangle$ ,  $|j\rangle$  y deja invariantes el resto. Se puede construir de la siguiente forma

$$T^{i\leftrightarrow j} = |i\rangle\langle j| + |j\rangle\langle i| + \sum_{k \notin \{i,j\}} |k\rangle\langle k|. \quad (3.8)$$

Con ayuda de las permutaciones se pueden probar dos proposiciones clave para el desarrollo del resto de las demostraciones.

Para facilitar la comprensión de la proposición y su demostración, veamos antes un ejemplo sencillo e intuitivo de lo que significa la proposición y las ideas que se utilizan para probarla.

**Ejemplo 3.2.2.** Para ver el ejemplo más sencillo posible tomemos el estado formado únicamente por los mundos  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  y que el estado del universo es

$$|v\rangle = |0\rangle + |1\rangle. \quad (3.9)$$

Puede parecer intuitivo decir que como ambos mundos tienen el mismo coeficiente o amplitud, la probabilidad de que estemos en uno de estos ( $p_0$  o  $p_1$ ) debería ser la misma, pues justo eso es lo que prueba la proposición. Para hacerlo aplicaremos la permutación  $T^{0\leftrightarrow 1}$  al estado  $|v\rangle$  que lo deja invariante:

$$T^{0\leftrightarrow 1}|v\rangle = |1\rangle + |0\rangle = |v\rangle. \quad (3.10)$$

Si tomamos un mundo hipotético adicional  $|2\rangle$  con amplitud 0, por el Axioma 2 este tendrá probabilidad  $p_2 = 0$ . Podemos reescribir la permutación aplicada por la concatenación de 3 permutaciones  $T^{0\leftrightarrow 1} = T^{0\leftrightarrow 2}T^{0\leftrightarrow 1}T^{2\leftrightarrow 1}$  para ver como actuaría cada una de ellas. Si aplicamos la primera de estas  $T^{2\leftrightarrow 1}|v\rangle = |v'\rangle$  tenemos que eligiendo la partición formada por los conjuntos  $\{2, 1\}$  y  $\{0\}$  y siguiendo el Axioma 3 se mantienen las probabilidades en estos conjuntos, lo que quiere decir

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2, \quad p_0 = p'_0. \quad (3.11)$$

El estado imagen es  $|v'\rangle = |0\rangle + |2\rangle$  y de nuevo el Axioma 2 nos dice que  $p'_1 = 0$ , como  $p_2 = 0$  de la expresión (3.11) obtenemos que  $p_1 = p'_2$ . Si razonamos con los mismos argumentos para las imágenes de las otras dos permutaciones, llegamos a que  $p_0 = p''_0 = p_1$ . Si en este caso sencillo aplicamos además la condición de normalización de la Proposición 3.1.2, obtenemos que

$$1 = p_0 + p_1 = 2p_0 \implies p_0 = p_1 = \frac{1}{2}, \quad (3.12)$$

conclusión que parece ir de acuerdo con lo que nos podría decir la intuición.

Habiendo comprendido este ejemplo, nos puede parecer razonable enunciar y demostrar la proposición que generaliza el ejemplo y afirma que cualquier superposición uniforme tiene probabilidades uniformes.

**Proposición 3.2.3. Amplitudes iguales producirán probabilidades iguales.** Como las permutaciones entre mundos son transformaciones permitidas en cualquier versión, dado un estado  $|v\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} v_n |n\rangle$  donde  $v_n = v_m$ , entonces  $p_m = p_n$ .

*Demostración.*

Tomando la transformación  $T^{n\leftrightarrow m}$  como en la Definición 3.2.1, como  $v_n = v_m$  entonces  $T^{n\leftrightarrow m}|v\rangle = |v\rangle$ , es decir, dejará invariante el estado  $|v\rangle$ . Al igual que hicimos en el ejemplo previo, podemos tomar un mundo adicional  $|N\rangle$  de probabilidad nula y escribir esta transformación como  $T^{n\leftrightarrow m} = T^{n\leftrightarrow N}T^{n\leftrightarrow m}T^{N\leftrightarrow m}$ . Podemos seguir la misma estrategia analizando como actúa cada una de las transformaciones sobre

las amplitudes de probabilidad y utilizando los axiomas demostramos la proposición.

Vemos como actúa la primera transformación  $T^{N \leftrightarrow m} |v\rangle = |v'\rangle$ . Si tomamos una partición donde los mundos  $m$  y  $N$  estén el mismo conjunto y el resto esté por su cuenta, por el Axioma 3 las probabilidades de cada conjunto se mantienen y tenemos la relación

$$p_m + p_N = p'_m + p'_N, \quad p_k = p'_k \quad k \notin \{m, N\}, \quad (3.13)$$

donde  $p'_m$  y  $p'_N$  son las probabilidades del estado transformado. Como  $v_N = 0 = v'_m$  si aplicamos el Axioma 2 tenemos que  $p_N = 0 = p'_m$  y entonces  $p_m = p'_N$ .

Razonando de la misma manera con  $T^{n \leftrightarrow m} |v'\rangle = |v''\rangle$ , pero partiendo ahora de que  $v'_m = v''_n = 0$ , obtenemos entonces

$$p''_m = p'_n = p_n. \quad (3.14)$$

Por último, si vemos como actúa  $T^{n \leftrightarrow N} |v''\rangle = |v'''\rangle$ , ahora tenemos que  $v''_n = 0 = v'''_N$  y razonando como las otras dos veces obtenemos  $p'''_n = p''_N = p'_N = p_m$  y además, como esta transformación no modifica  $v_m$  tenemos que

$$p'''_m = p''_m = p_n \quad (3.15)$$

En conclusión hemos hallado que si aplicamos  $T^{n \leftrightarrow m}$  a  $|v\rangle$  obtenemos  $|v'''\rangle$  y  $p'''_m = p_n$  y  $p'''_n = p_m$ , también hemos visto que aplicando esta transformación el estado se queda invariante  $|v\rangle = |v'''\rangle$ , entonces por el Axioma 1,  $p_n = p'''_n$  obteniendo así que  $p_n = p'''_n = p_m$ , como queríamos probar.  $\square$

La siguiente proposición solo se puede demostrar para la teoría de muchos mundos cuántica y para la estocástica. No se puede probar para la teoría discreta.

**Proposición 3.2.4. Amplitudes mayores no pueden producir probabilidades menores.** Sea  $|v\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} v_n |n\rangle$  un estado de la teoría de muchos mundos cuántica o de la estocástica. Dados  $l, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  tal que  $|v_l| > |v_k|$ , entonces  $p_l \geq p_k$ .

*Demostración.*

Fijados los índices  $l, k$  mencionados en la proposición, vamos a considerar para la teoría de muchos mundos cuántica la transformación unitaria  $T$  que actúa sobre el subespacio  $\{|l\rangle, |N\rangle\}$  como

$$T |l\rangle = \left(\frac{v_k}{v_l}\right) |l\rangle + \sqrt{1 - \left|\frac{v_k}{v_l}\right|^2} |N\rangle, \quad (3.16)$$

$$T |N\rangle = \sqrt{1 - \left|\frac{v_k}{v_l}\right|^2} |l\rangle - \left(\frac{v_k}{v_l}\right) |N\rangle, \quad (3.17)$$

y deja invariante el resto de mundos  $T |m\rangle = |m\rangle$  si  $m \neq l$  y  $m \neq N$ .

Para la teoría estocástica, como no necesitamos que sea unitaria, basta con definirla para qué actúe de la siguiente forma no trivial sobre el mundo  $|l\rangle$

$$T|l\rangle = \left(\frac{v_k}{v_l}\right)|l\rangle + \left(1 - \frac{v_k}{v_l}\right)|N\rangle, \quad (3.18)$$

y como la identidad sobre el resto de mundos  $T|m\rangle = |m\rangle$  si  $m \neq l$ .

Si nombramos a la acción del operador  $T$  como  $T|v\rangle = |v'\rangle$ , para el caso de las interpretaciones cuánticas como el operador es lineal y  $v_N = 0$  se cumple que  $v'_l = v'_k$ , cosa que también se cumple de forma evidente para la interpretación estocástica. Es por esto, y gracias a la Proposición 3.2.3, que  $p'_l = p'_k$  en ambas interpretaciones.

Haciendo uso del Axioma 3 con la partición adecuada obtenemos que  $p'_N + p'_l = p_N + p_l$  y  $p'_k = p_k$  para todo  $k \notin \{l, N\}$ , con esto, unido a que por el Axioma 2 con  $v_N = 0 \implies p_N = 0$ , obtenemos

$$p_l = p'_N + p'_l = p'_N + p'_k = p'_N + p_k \geq p_k, \quad (3.19)$$

ya que  $p'_N \geq 0$ . □

A partir de estos resultados podemos hacer la demostración de la ley de probabilidad para cada versión de la teoría de muchos mundos.

Antes de enunciar los teoremas y ver la demostración nos puede ser de ayuda mostrar cuál es la estrategia que estamos siguiendo para un caso sencillo. Esta estrategia, que llamaremos “ramificación” basándonos en [13] y [14] entre otros, consiste en como su nombre indica, ramificar un mundo en otros muchos, para obtener el resultado deseado.

**Ejemplo 3.2.5.** Veamos un ejemplo de esta estrategia a partir de un estado sencillo como puede ser, por ejemplo,

$$|v\rangle = \sqrt{3}|0\rangle + |1\rangle. \quad (3.20)$$

La estrategia de las demostraciones consiste en a partir de una transformación lineal, que se define sobre una partición que depende de los coeficientes del estado, “ramificar cada mundo en una cantidad finita de mundos” para que en el estado imagen de la transformación todas las amplitudes sean iguales. En ese punto podemos aplicar las proposiciones previas. Para este caso, la transformación  $T$  mencionada que para cada mundo del estado  $|v\rangle$  actúa de la siguiente forma

$$T|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|2\rangle + |3\rangle + |4\rangle) \quad \text{y} \quad T|1\rangle = |6\rangle. \quad (3.21)$$

Podemos ver que el mundo 0 lo hemos ramificado en tres mundos, pero el mundo 1 se mantiene con un solo mundo, como hemos dicho, esto depende de las amplitudes que tenga cada mundo en el estado  $|v\rangle$ . El estado imagen sería

$$|v'\rangle = T|v\rangle = (|2\rangle + |3\rangle + |4\rangle) + (|6\rangle). \quad (3.22)$$

En total, el estado imagen está formado por cuatro mundos, todos con la misma amplitud. Siguiendo la Proposición 3.2.3, todas las probabilidades serán la misma  $p'$ . Si aplicamos ahora la condición de normalización tenemos que

$$1 = 4p' \implies p' = \frac{1}{4}. \quad (3.23)$$

Por como está construida la partición se puede aplicar el Axioma 3 para, por ejemplo, el mundo 0 de la siguiente forma y así obtener su probabilidad

$$p_0 = p'_2 + p'_3 + p'_4 = 3p' = \frac{3}{4}. \quad (3.24)$$

Como veremos en el teorema siguiente este resultado concreto concuerda con el caso general que se presentará y demostrará en el Teorema 3.2.7.

### 3.2.2. Demostración para la interpretación cuántica

Comenzaremos realizando la demostración para la versión cuántica, como ya hemos mencionado anteriormente, esta versión de la interpretación generaliza la cuántica normalizada que es con la que se trabaja en mecánica cuántica. La ley de probabilidad que obtengamos tendrá que corresponderse con la Regla de Born que otras interpretaciones postulan y que se observa experimentalmente.

Con el fin de facilitar el entendimiento y notación de la demostración del caso más general (Teorema 3.2.7), basándonos en la idea que nos enseña [1], empezaremos demostrando la ley de probabilidad para un caso restringido donde los coeficientes de los mundos sean números racionales. Después utilizaremos ideas y conceptos de esta demostración en la demostración general para coeficientes complejos cualesquiera.

Como las demostraciones de este capítulo son bastante largas y encadenan bastantes ideas y estrategias, vamos a estructurarlas por pasos. En las distintas pruebas aparecerán como poco los mismos pasos, cambiando algún detalle.

**Teorema 3.2.6.** *(caso restringido de la versión cuántica) Sea  $|v\rangle$  un estado de la versión cuántica de la IMM que se escribe como*

$$|v\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{\frac{m_n}{M}} |n\rangle,$$

donde  $m_n, M \in \mathbb{Z}^+$ , entonces la única ley de probabilidad que rige el mundo desde el que observamos es

$$p_n = \frac{\frac{m_n}{M}}{\sum_j \frac{m_j}{M}} = \frac{m_n}{\sum_j m_j}.$$

*Demostración.*

#### 1- Ramificación de mundos a partir de la partición $\mathcal{S}_k$

Antes de comenzar definimos un valor fijo que utilizaremos durante la demostración:  $M' = \sum_j m_j$ .

Tomando este valor y los del estado podemos construir una partición del conjunto de los enteros no negativos

$$\mathcal{S}_k = \begin{cases} \{k\} \cup \mathcal{L}_k, & 0 \leq k < N, \\ \{k\}, & k \geq N + M'N, \end{cases} \quad (3.25)$$

donde los conjuntos  $\mathcal{L}_k$  se definen como

$$\mathcal{L}_k = \{N + M'k, N + M'k + 1, \dots, N + M'k + (M' - 1)\}. \quad (3.26)$$

A partir de esta partición tenemos la transformación unitaria  $T$  que actúa sobre cada mundo de la siguiente forma

$$\begin{aligned} T|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{m_n}} \sum_{l=0}^{m_n-1} |N + nM' + l\rangle, & 0 \leq n < N, \\ T|n\rangle &= |n\rangle, & n \geq N + M'N. \end{aligned} \quad (3.27)$$

El objetivo que tenemos mediante esta transformación es obtener un estado que tenga amplitudes iguales y que gracias a la forma de la partición nos deje en un punto de poder aplicar el Axioma 3.

### 2- Obtención de un estado de amplitudes y probabilidad iguales

Como  $M' = \sum_j m_j$ , concretamente  $M' \geq m_n$ , esto hace que la imagen de cada mundo solo tenga amplitudes no nulas en los mundos que pertenecen a su mismo conjunto de la partición. Es lo mismo que decir que  $T_{ij}$  solo es no nulo si  $i, j$  pertenecen al mismo conjunto de la partición  $\mathcal{S}_k$ . Esta característica nos permite utilizar el Axioma 3 con esta partición más adelante.

Si aplicamos ahora la transformación a todo el estado,  $|v\rangle$  obtenemos

$$T|v\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sqrt{m_n}}{\sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{m_n}} \sum_{l=0}^{m_n-1} |N + nM' + l\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{m_n-1} |N + nM' + l\rangle, \quad (3.28)$$

que es un estado formado por la superposición de  $M' = \sum_0^{N-1} m_j$  mundos con la misma amplitud, por lo que si aplicamos la Proposición 3.2.3 tenemos que todas las probabilidades de esos mundos son la misma  $p'$ .

### 3- Utilización de resultados para obtener nuestro objetivo

Teniendo en cuenta la condición de normalización de la probabilidad  $M'p' = 1$ , obtenemos que la probabilidad será  $p' = \frac{1}{M'}$ .

Conocida esta probabilidad, se puede aplicar el Axioma 3 a cada mundo del estado inicial. Como ya hemos visto, su imagen no sale del conjunto al que pertenece en la partición, por lo que las probabilidades en esos conjuntos se conservan y obtenemos

$$p_n = \sum_{l=0}^{m_n-1} p'_l = \sum_{l=0}^{m_n-1} p' = \sum_{l=0}^{m_n-1} \frac{1}{M'} = \frac{m_n}{M'} = \frac{m_n}{\sum_j m_j}, \quad (3.29)$$

como queríamos probar.  $\square$



A partir de estas ideas podemos construir la demostración para el caso totalmente general en el que se encontrará la Regla de Born como caso particular de la ley de probabilidad que se obtiene en el teorema.

**Teorema 3.2.7. Ley de probabilidad para la versión cuántica** Para un estado cualquier  $|v\rangle = \sum_n v_n |n\rangle$  en la versión cuántica de la interpretación de muchos mundos, la probabilidad de medir en el mundo  $|n\rangle$  sigue la ley de probabilidad

$$p_n = \frac{|v_n|^2}{\sum_m |v_m|^2}.$$

*Demostración.*

Vamos a demostrar la ley de probabilidad para un mundo fijo cualquiera de los infinitos que tenemos en nuestro estado  $|v\rangle$ , por lo que elegimos un  $k \in \mathbb{N}$  y obtendremos la probabilidad  $p_k$  de estar en el mundo  $|k\rangle$ .

La demostración de este resultado se basa en la misma idea que la del Teorema 3.2.6 por lo que tenemos que conseguir dejar el estado en una situación parecida a la que teníamos en su demostración mediante una serie de pasos previos a los de este teorema.

### Paso 0- Obtención de un estado sencillo

#### 0.1- Estado con cantidad finita de mundos

Empezaremos transformando nuestro estado en otro estado con una cantidad finita de mundos posibles. Fijado  $k$  podemos aplicar la transformación  $B$ , la cual agrupa todos los mundos por encima del  $k$ -ésimo en un mismo mundo y el resto los deja invariantes

$$B \left( \frac{\sum_{n=k+1}^{\infty} v_n |n\rangle}{\sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty} |v_n|^2}} \right) = |k+1\rangle, \quad B |n\rangle = |n\rangle \quad n \leq k. \quad (3.30)$$

El estado imagen que tenemos tras aplicar el operador  $B$  sobre el estado  $|v\rangle$  será

$$B |v\rangle = |v'\rangle = \sum_{n=0}^k v_n |n\rangle + \left( \sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty} |v_n|^2} \right) |k+1\rangle. \quad (3.31)$$

Aquí podemos ver que  $|v'\rangle$  está escrito sobre  $N = k + 2$  mundos y como  $B$  actúa de forma separada en los mundos del 0 al  $k$  por el Axioma 3, la probabilidad del mundo que estamos estudiando se conserva igual  $p_k = p'_k$ .

Habiendo limitado la cantidad de mundos nos queda transformar nuestro estado hasta que las amplitudes sean parecidas a la forma que tienen en el Teorema 3.2.6.

#### 0.2- Estado con amplitudes de la forma $\sqrt{\frac{m_n + \epsilon_n}{M}}$

Tomando un entero positivo  $M$  suficientemente grande, definimos para cada amplitud otro entero positivo como  $m_n = \lfloor M|v'_n|^2 \rfloor$  y una cantidad  $\epsilon_n$  positiva menor que 1:  $\epsilon_n = M|v'_n|^2 - \lfloor M|v'_n|^2 \rfloor$ .

Podemos ahora escribir las amplitudes de  $|v'\rangle$  a partir de estas cantidades como

$$v_n = |v'_n|e^{i\phi_n} = \sqrt{\frac{m_n + \epsilon_n}{M}}e^{i\phi_n}, \quad (3.32)$$

y, por lo tanto, el estado  $|v'\rangle$  se escribe como

$$|v'\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{\frac{m_n + \epsilon_n}{M}}e^{i\phi_n} |n\rangle. \quad (3.33)$$

Esto se puede escribir así porque las amplitudes del estado  $|v'\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} v'_n |n\rangle$  son números complejos, que escritos en su forma polar son  $v'_n = |v'_n|e^{i\phi_n}$ , con  $\phi_n \in [0, 2\pi]$ .

Aplicaremos ahora una transformación para deshacernos de las fases de cada amplitud, esta será la transformación unitaria  $R = \sum_n e^{-i\phi_n} |n\rangle \langle n|$  que nos da como estado imagen

$$R|v'\rangle = |v''\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{\frac{m_n + \epsilon_n}{M}} |n\rangle, \quad (3.34)$$

y como actúa de forma independiente sobre cada mundo, sigue conservando la probabilidad del  $k$ -ésimo:  $p''_k = p'_k = p_k$ .

En este punto ya podemos empezar a aplicar los pasos del teorema restringido con ciertas modificaciones

### Paso 1- Ramificación de mundos a partir de la partición $\mathcal{S}_k$

Siguiendo una idea parecida a la del Teorema 3.2.6, redefinimos aquí los valores del teorema esta vez como  $X = \sum_m |v_m|^2$  y  $M' = \lceil MX \rceil$ , donde  $\lceil x \rceil$  es la función “techo” y representa al menor entero mayor o igual que  $x$ . Mediante una transformación unitaria  $T$  vamos a hacer una ramificación de cada mundo en  $m_n$  o  $m_n + 1$  mundos nuevos:

$$T|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{m_n + \epsilon_n}} \left( \sum_{l=0}^{m_n-1} |N + nM' + l\rangle + \sqrt{\epsilon_n} |N + nM' + m_n\rangle \right), \quad (3.35)$$

para los estados de  $|v''\rangle$  que se numeran  $0 \leq n < N$ . Podemos observar que la ramificación será en  $m_n$  mundos si  $\epsilon_n = 0$ , y si no será en  $m_n + 1$  mundos.

### Paso 2- Obtención de un estado con amplitudes iguales o menores

Aplicando la transformación  $T$  a todo el estado  $|v''\rangle$ , se obtiene

$$|v'''\rangle = T|v''\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{l=0}^{m_n-1} |N + nM' + l\rangle + \sqrt{\epsilon_n} |N + nM' + m_n\rangle \right). \quad (3.36)$$

Esta vez, como  $m_n \leq M|v_n|^2$  tenemos que  $\sum_{n=0}^{N-1} m_n \leq \sum_n M|v_n|^2 = MX$  y, por lo tanto, hemos obtenido como mucho  $MX$  mundos de amplitud  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ . También hemos obtenido como máximo  $N$  con una amplitud menor  $\sqrt{\frac{\epsilon_n}{M}}$ .

Utilizando la Proposición 3.2.3 tenemos que todos los mundos con amplitud  $\frac{1}{\sqrt{M}}$  tienen una misma probabilidad que llamaremos  $\hat{p}$  y por la Proposición 3.2.4 como  $\sqrt{\frac{\epsilon_n}{M}} \leq \frac{1}{\sqrt{M}}$  el resto de mundos tendrán probabilidad menor  $\tilde{p}_n \leq \hat{p}$  para todo  $n$ .

### Paso 3- Utilización de resultados para nuestro objetivo

Para obtener la igualdad que da el Teorema vamos a demostrar primero la desigualdad en uno de los dos sentidos, y posteriormente argumentar de forma sencilla la igualdad

#### 3.1-Obtención de la desigualdad $p_k \geq \frac{|v_k|^2}{X}$

Si a las probabilidades obtenidas le aplicamos la condición de normalización de la probabilidad

$$1 = \sum_{n=0}^{MX-1} \hat{p} + \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{p}_n \leq \sum_{n=0}^{MX-1} \hat{p} + \sum_{n=0}^{N-1} \hat{p} = (MX+N)\hat{p} \implies \hat{p} \geq \frac{1}{MX+N}. \quad (3.37)$$

Por otro lado, podemos ver que se cumple la desigualdad:

$$\begin{aligned} MX &= M \sum_j |v_j|^2 = M \sum_j \left| \sqrt{\frac{m_j + \epsilon_j}{M}} e^{i\phi_j} \right|^2 \\ &= M \sum_j \frac{m_j + \epsilon_j}{M} = \sum_j m_j + \epsilon_j \geq m_n + \epsilon_n. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Es por esto que si tomamos de nuevo la partición  $\mathcal{S}_k$  del Teorema 3.2.6, la transformación  $T$  no conecta mundos de distintos conjuntos de la partición y, por lo tanto, nos encontramos en la situación de volver a usar el Axioma 3 con la imagen del mundo  $|k\rangle$  y su probabilidad

$$p_k = p_k''' = \sum_{l=0}^{m_k-1} \hat{p} + \tilde{p}_k \geq \sum_{l=0}^{m_k-1} \hat{p} = m_k \hat{p} \geq \frac{m_k}{MX+N}. \quad (3.39)$$

Como  $m_k = \lfloor M|v_k'|^2 \rfloor = \lfloor M|v_k|^2 \rfloor$  se cumple que  $\lfloor M|v_k|^2 \rfloor \geq M|v_k|^2 - 1$ , que siguiendo en la cadena de desigualdades es

$$p_k \geq \frac{m_k}{MX+N} \geq \frac{M|v_k|^2 - 1}{MX+N}. \quad (3.40)$$

Si ahora sumamos y restamos en el numerador el término  $\frac{N}{X}|v_k|^2$  tenemos que

$$\begin{aligned} p_k &\geq \frac{M|v_k|^2 - 1 + \frac{N}{X}|v_k|^2 - \frac{N}{X}|v_k|^2}{MX+N} = \frac{(M + \frac{N}{X})|v_k|^2}{MX+N} - \frac{N|v_k|^2 + 1}{MX+N} = \\ &= \frac{|v_k|^2}{X} - \frac{N|v_k|^2 + 1}{MX+N}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Esta desigualdad se cumple para cualquier  $M$  arbitrariamente grande y, entonces el cociente  $\frac{N|v_k|^2 + 1}{MX+N}$  se puede hacer arbitrariamente pequeño (fijados  $N$  y  $v_k$ ), por lo tanto,  $p_k \geq \frac{|v_k|^2}{X}$  para cualquier  $k \in [0, N)$ .

### 3.2- Obtención de la igualdad

Recordamos que nuestro objetivo es probar la igualdad, en este caso es bastante sencillo hacerlo a partir de la desigualdad obtenida. Partiendo de la condición de normalización de la probabilidad, tenemos que

$$1 = \sum_n p_n \geq \sum_n \frac{|v_n|^2}{X} = \sum_n \frac{|v_n|^2}{\sum_m |v_m|^2} = 1. \quad (3.42)$$

Entonces, solo existe la posibilidad de que  $p_k = \frac{|v_k|^2}{X} = \frac{|v_k|^2}{\sum_m |v_m|^2}$  como queríamos probar.  $\square$

En este resultado hemos obtenido que la ley de probabilidad es  $p_n = \frac{|v_n|^2}{\sum_m |v_m|^2}$ , restringiéndonos a la versión normalizada donde todos los estados cumplen la condición  $\sum_m |v_m|^2 = 1$ , nos queda la ley de probabilidad

$$p_n = |v_n|^2, \quad (3.43)$$

que es exactamente la Regla de Born del Postulado 4.

#### 3.2.3. Demostración para la interpretación estocástica

Esta versión de la teoría no se corresponde con la que trabajamos en mecánica cuántica pero como la demostración utiliza las mismas ideas y razonamientos que en el resultado anterior, resulta interesante incluirla para tratar de forma más general la búsqueda de una ley de probabilidad. Da cuenta de que los argumentos y el estudio realizado no es exclusivo de la versión cuántica y que se trata de una estrategia más general.

En este caso utilizaremos lo que Short llama versión estocástica y encontraremos que para esta versión, la ley de probabilidad no coincide con la Regla de Born, pero que en el caso de que la mecánica cuántica funcionase como dice esta versión, la ley de probabilidad sería la predicha por el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.8. Ley de probabilidad para la versión estocástica** *Para un estado cualquier  $|v\rangle = \sum_n v_n |n\rangle$  en la versión estocástica de la interpretación de muchos mundos, la probabilidad de medir en el mundo  $|n\rangle$  sigue la ley de probabilidad  $p_n = v_n$ .*

*Demostración.*

Al igual que en la demostración de la otra versión, vamos a demostrar la ley de probabilidad para un mundo fijo cualquiera de los infinitos que tenemos en nuestro estado  $|v\rangle$ , por lo que elegimos un  $k \in \mathbb{N}$  y obtendremos la probabilidad  $p_k$  de estar en el mundo  $|k\rangle$ .

La demostración de este resultado se basa en la misma idea que las otras demostraciones, por lo que tenemos que conseguir dejar el estado de forma que podamos trabajar con él de igual manera.

**Paso 0- Obtención de un estado sencillo****0.1- Estado con cantidad finita de mundos**

Empezaremos transformando nuestro estado en otro estado con una cantidad finita de mundos posibles, fijado  $k$  podemos aplicar la transformación estocástica  $B$  la cual agrupa todos los mundos por encima del  $k$ -ésimo en un mismo mundo y el resto los deja invariantes

$$\begin{aligned} B|n\rangle &= |k+1\rangle \quad n > k. \\ B|n\rangle &= |n\rangle \quad n \leq k, \end{aligned} \quad (3.44)$$

El estado imagen que tenemos tras aplicar el operador  $B$  sobre el estado  $|v\rangle$  será

$$B|v\rangle = |v'\rangle = \sum_{n=0}^k v_n |n\rangle + \left( \sum_{n=k+1}^{\infty} v_n \right) |k+1\rangle. \quad (3.45)$$

Donde podemos ver que  $|v'\rangle$  está escrito sobre  $N = k + 2$  mundos y como  $B$  actúa de forma separada en los mundos del 0 al  $k$  por el Axioma 3, la probabilidad del mundo que estamos estudiando se conserva igual  $p_k = p'_k$ .

**0.2- Estado con amplitudes de la forma  $\frac{m_n + \epsilon_n}{M}$** 

Este caso es algo más simple que el de la versión cuántica y no hace falta utilizar una transformación extra. Directamente, eligiendo bien las constantes, podemos escribir este estado como uno de los que hemos denominado “sencillos”.

Como todas las amplitudes son números reales positivos y concretamente como  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = 1$  cualquier  $v_n \leq 1$  y  $\sum_{n=k+1}^{\infty} v_n \leq 1$ , podemos tomar un entero positivo  $M$  suficientemente grande para que el estado se pueda reescribir

$$|v'\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{m_n + \epsilon_n}{M} |n\rangle, \quad (3.46)$$

donde  $m_n$  es un entero que se define de la siguiente forma  $m_n = \lfloor Mv_n \rfloor$  y  $\epsilon_n$  se define como  $\epsilon_n = Mv_n - \lfloor Mv_n \rfloor$  y cumple  $0 \leq \epsilon_n < 1$ .

Con este estado estamos ya en la situación de volver a hacer la versión de la “ramificación” de mundos que hemos utilizado en el resto de demostraciones.

**Paso 1- Ramificación de mundos a partir de la partición  $\mathcal{S}_k$** 

A partir de estas constantes podemos definir una partición ligeramente más sencilla que en los otros teoremas y que es

$$\mathcal{S}_k = \begin{cases} \{k\} \cup \mathcal{L}_k, & 0 \leq k < N, \\ \{k\}, & k \geq N + MN, \end{cases} \quad (3.47)$$

donde los conjuntos  $\mathcal{L}_k$  se definen como

$$\mathcal{L}_k = \{N + Mk, N + Mk + 1, \dots, N + Mk + (M - 1)\}. \quad (3.48)$$

A partir de esta partición ahora vamos a realizar la estrategia de ramificación y a partir de cada mundo  $|n\rangle$  mediante una transformación estocástica  $T$  los transformaremos en  $m_n$  o  $m_n + 1$  mundos. La transformación actuará sobre cada mundo

$n \in [0, N)$  así:

$$T|n\rangle = \frac{1}{m_n + \epsilon_n} \left( \sum_{l=0}^{m_n-1} |N + nM + l\rangle + \epsilon_n |N + nM + m_n\rangle \right). \quad (3.49)$$

Podemos observar que la ramificación será en  $m_n$  mundos si  $\epsilon_n = 0$ , y si no será en  $m_n + 1$ . De la misma forma que en los casos anteriores, la transformación no conectará mundos de distintos conjuntos de la partición, por lo que permite la posibilidad de aplicar el Axioma 3 a las probabilidades de los mundos de cada conjunto.

### Paso 2- Obtención de un estado con amplitudes iguales o menores

El estado imagen de aplicar la transformación  $T$  al estado  $|v'\rangle$  será

$$|v''\rangle = T|v'\rangle = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{l=0}^{m_n-1} |N + nM + l\rangle + \epsilon_n |N + nM + m_n\rangle \right). \quad (3.50)$$

Este estado es la superposición de  $M$  mundos con igual amplitud  $\frac{1}{M}$  y como mucho  $N$  mundos con una amplitud menor  $\frac{\epsilon_n}{M}$ . Haciendo uso de la Proposición 3.2.3, los  $M$  primeros mundos tendrán la misma probabilidad, que denotaremos como  $\hat{p}$ . Por la Proposición 3.2.4 como  $\frac{\epsilon_n}{M} \leq \frac{1}{M}$  el resto de mundos tendrán probabilidad menor  $\tilde{p}_n \leq \hat{p}$ .

### Paso 3- Utilización de resultados para nuestro objetivo

Para obtener la igualdad que da el Teorema vamos a demostrar primero la desigualdad en uno de los dos sentidos, y posteriormente argumentar de forma sencilla la igualdad

#### 3.1-Obtención de la desigualdad $p_k \geq v_k$

Aplicando a las probabilidades la condición de normalización dada en la Proposición 3.1.2 obtenemos

$$1 = \sum_{n=0}^{M-1} \hat{p} + \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{p}_n \leq \sum_{n=0}^{M-1} \hat{p} + \sum_{n=0}^{N-1} \hat{p} = (M + N)\hat{p} \implies \hat{p} \geq \frac{1}{M + N}. \quad (3.51)$$

Volviendo ahora a la probabilidad del mundo  $k$  aplicamos el Axioma 3 al conjunto en el que se encuentra  $k$ , como hemos ramificado ese mundo en como mucho  $m_k + 1$  mundos con probabilidad menor o igual que  $\hat{p} \geq \frac{1}{M+N}$  se cumple

$$p_k \geq (m_k + 1)\hat{p} \geq m_k\hat{p} \geq \frac{m_k}{M + N}. \quad (3.52)$$

Como  $m_k = \lfloor Mv'_k \rfloor = \lfloor Mv_k \rfloor$  se cumple que  $\lfloor Mv_k \rfloor \geq Mv_k - 1$  que siguiendo en la cadena de desigualdades es

$$p_k \geq \frac{m_k}{M + N} \geq \frac{Mv_k - 1}{M + N}. \quad (3.53)$$

Si ahora sumamos y restamos en el numerador el término  $Nv_k$  tenemos que

$$p_k \geq \frac{Mv_k - 1}{M + N} = \frac{Mv_k - 1 + Nv_k - Nv_k}{M + N} = v_k - \frac{Nv_k + 1}{M + N}. \quad (3.54)$$

Esta desigualdad se cumple para cualquier  $M$  arbitrariamente grande y, entonces el cociente  $\frac{Nv_k+1}{M+N}$  se puede hacer arbitrariamente pequeño (fijados  $N$  y  $v_k$ ), por lo tanto,  $p_k \geq v_k$  para cualquier  $k \in [0, N)$ .

### 3.2- Obtención de la igualdad

Recordamos que nuestro objetivo es probar la igualdad, y al igual que en la otra demostración lo haremos a partir de esta desigualdad y con la condición de normalización de la Proposición 3.1.2, tenemos que

$$1 = \sum_n p_n \geq \sum_n v_n = \sum_n v_n = 1. \quad (3.55)$$

Entonces solo existe la posibilidad de que  $p_k = v_k$ , como queríamos probar.  $\square$

Aquí obtenemos que la única ley de probabilidad que cumple todas las premisas impuestas en la versión de la interpretación de muchos mundos que hemos nombrado estocástica solo puede ser  $p_k = v_k$ . Esta ley de probabilidad es distinta de la Regla de Born, pero también el marco matemático con el que expresamos los estados es distinto al que se utiliza en mecánica cuántica. Si se dudase sobre cuál es la versión que mejor modela la mecánica cuántica, el hecho de que la ley de probabilidad que se obtiene en esta no coincida con los resultados experimentales debe ser un buen argumento para descartarla.

### 3.2.4. Descartar una posible ley de probabilidad para la interpretación discreta

En esta sección vamos a trabajar con la última de las versiones que presentamos previamente en la memoria. Para la versión discreta de la interpretación de muchos mundos es fácil ver que no existe una ley de probabilidad como la que buscamos. Resulta interesante ver qué modelos matemáticos no son compatibles con que exista una ley de probabilidad que rijan cuanto de probable es estar en un mundo concreto.

**Teorema 3.2.9. No existencia de ley de probabilidad para la versión discreta.** *No existe una ley de probabilidad consistente con los axiomas impuestos en la sección 3.1.3 para la versión discreta de la interpretación de muchos mundos.*

*Demostración.*

La demostración la vamos a hacer aplicando reducción al absurdo, supongamos que sí que existe una ley de probabilidad y a partir de esto llegaremos a una contradicción. Partamos de un estado sencillo como es  $|v\rangle = |0\rangle + |1\rangle$  y apliquemos la transformación que actúa así:

$$T|1\rangle = |1\rangle + |2\rangle, \quad T|n\rangle = |n\rangle \quad \forall n \neq 1. \quad (3.56)$$

Como estado imagen tenemos entonces

$$|v'\rangle = T|v\rangle = |0\rangle + |1\rangle + |2\rangle. \quad (3.57)$$

Si tomamos la partición que pone los mundos 1 y 2 en un conjunto y 0 en otro podemos aplicar el 3 cumpliéndose

$$p_0 = p'_0, \quad p_1 = p'_1 + p'_2. \quad (3.58)$$

Como tanto el estado  $|v\rangle$  como  $|v'\rangle$  son estados con amplitudes iguales para todos sus mundos tenemos por la Proposición 3.2.3 y la condición de normalización 3.1.2 se cumple que  $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$  y  $p'_0 = p'_1 = p'_2 = \frac{1}{3}$ , lo que es contradictorio con la expresión (3.59) y, por lo tanto, absurdo

$$\frac{1}{2} = p_0 = p'_0 = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2} = p_1 = p'_1 + p'_2 = \frac{2}{3}. \quad (3.59)$$

Hemos obtenido el absurdo que buscábamos y, por lo tanto, quedaría demostrado el Teorema.  $\square$

### 3.2.5. Discusión sobre los axiomas y los resultados

En las secciones anteriores hemos logrado obtener una ley de probabilidad que coincide con la Regla de Born para la versión cuántica normalizada de la interpretación de muchos mundos. También hemos obtenido otras leyes de probabilidad para otra versión e incluso hemos descartado la posibilidad de que en una de las versiones hubiese ley de probabilidad. En esta sección reflexionaremos brevemente sobre los resultados obtenidos, su significado y su utilidad.

Si hubiésemos enfrentado el problema de forma completamente general, nos hubiese sido imposible obtener algún resultado satisfactorio, hemos necesitado imponer ciertas premisas que debían cumplir las leyes de probabilidad para reducir un poco el marco de trabajo y las posibilidades. El criterio que hemos seguido para la elección de estos axiomas es que los podríamos considerar “razonables”, este criterio puede ser discutible, por lo que en esta sección trataremos de ver basándonos en [1] porque asumir estas sentencias era necesario y se puede considerar “razonable”.

Comencemos haciendo un resumen de lo que hemos obtenido en este capítulo de la memoria y su significado.

La interpretación de muchos mundos es una teoría determinista de la realidad, por lo que explicar la apariencia probabilística que tiene esta en algunos casos es un verdadero reto. El enfoque que hemos tratado de hacer aquí es el más sencillo e intuitivo: “si cogemos un mundo al azar entre todos los mundos que forman el universo, qué probabilidad hay de que el mundo que coja sea uno en concreto”. Es más, nuestro objetivo es que esa probabilidad sea lo más parecida posible a la probabilidad que observamos en la realidad, la Regla de Born. El método que utilizamos en nuestra demostración es tratar de dar una forma razonable de elegir ese mundo que cogemos y así reducir el marco de trabajo para hacer posible nuestro objetivo.

Aparte de con los axiomas, hemos tenido que simplificar también el problema utilizando una versión de la interpretación cuántica en la que obviamos uno de los mayores objetivos de críticas de la teoría “el problema de la base preferida”.

Pese a todas estas simplificaciones el resultado obtenido es muy interesante, no solo hemos conseguido que la regla de probabilidad se asemeje a la Regla de Born, sino



que también hemos obtenido qué reglas de probabilidad regirían otras versiones de la teoría y todo esto con argumentos sencillos como la estrategia de “ramificación” y a partir de pocas suposiciones y no muy exigentes, analicemos cuanto de necesario y razonable es cada uno de los axiomas impuestos.

### Axioma 1

Se trata de un axioma necesario para simplificar el problema, si no se tiene la premisa de que toda la información de un sistema cuántico se encuentra en su estado en ese instante no se puede empezar. Es más, los estados con los mismos mundos se diferencian entre sí por las amplitudes de cada mundo, por lo que la probabilidad dependerá de estos valores. Si la historia del sistema o la formación del estado en el presente influyese, habría demasiadas posibilidades y el marco de trabajo sería demasiado grande. Con este axioma se permite estudiar las probabilidades a partir de cualquier estado inicial.

Mediante este axioma se elimina la posibilidad de las teorías de variables ocultas, ya que afirmamos que toda la información posible se encuentra en el estado. No resulta descabellado realizar afirmaciones similares, ya que se utilizan en la mayoría de interpretaciones, como por ejemplo el Postulado 1 de la interpretación ortodoxa, se supone algo similar.

### Axioma 2

Se trata de un axioma bastante intuitivo, un mundo que tiene amplitud (peso) igual a 0 en el estado de un sistema no puede tener probabilidad, si la tuviese el estado se volvería irrelevante y no se podría trabajar con él.

En el caso de no asumir como cierto este axioma, sería bastante sencillo ir en contra de lo que dice el Axioma 1

### Axioma 3

Es quizá la más conflictiva de las tres afirmaciones, pero se trata de la forma más general de incluir la dinámica en nuestra deducción. Es una forma que cuadra bastante bien con la forma en la que la teoría cuántica trabaja con las transformaciones y la evolución temporal. Es bastante usual encontrarnos con hamiltonianos  $H$  que solo actúan en ciertos conjuntos de una partición de estados de la base y, por lo tanto, el operador evolución temporal  $e^{-iHt}$  actúa de la misma forma.

En conclusión, este capítulo sirve como acercamiento a una posible justificación razonable del comportamiento probabilístico que observamos en los experimentos cuánticos dentro de una interpretación determinista como es IMM. Como ya hemos mencionado varias veces, esta tarea no es sencilla y se ha trabajado con más detalle y profundidad en varias referencias de la bibliografía.



## Capítulo 4

# Conclusiones

En esta memoria, hemos abordado todos los aspectos que teníamos como objetivo de una manera que consideramos bastante satisfactoria y que puede resultar muy interesante para un lector no familiarizado con los conflictos que surgen de las interpretaciones de la mecánica cuántica. Este es un tema muy abstracto y escribir sobre él de manera completamente formal puede resultar muy complicado. Por ello, en esta memoria hemos tratado de hacerlo de la forma más precisa que hemos podido, específicamente al problema de la medida y la probabilidad.

En el segundo capítulo, hemos introducido al lector en la historia y la realidad de las interpretaciones de la mecánica cuántica. Hemos motivado la intuición sobre por qué existen aspectos conflictivos en la teoría que trata de modelar los resultados experimentales, destacando cómo el acto de medir, los aparatos de medición y el papel del observador siguen siendo temas controvertidos que generan debate. A partir de esto, hemos ofrecido una visión global y bastante formal, agrupando ideas de distintos autores sobre lo que es la Interpretación de los Múltiples Mundos (IMM). Aunque esta interpretación no es la más utilizada por la mayoría de los físicos, conocer alternativas y tener una visión general puede proporcionarnos estrategias útiles para trabajar en cuántica. Las ideas presentadas en la versión de Deutsch de la paradoja del amigo de Wigner proporcionan un ejemplo de experimento mental sencillo que tendría consecuencias significativas si pudiera replicarse. No es una paradoja tan conocida como la del gato de Schrödinger, pero plantea un problema más básico con importantes implicaciones filosóficas.

Finalmente, al acabar el segundo y durante todo el tercer capítulo se ha tratado el tema de la probabilidad en la IMM. Esto no es nada sencillo, ya que, como hemos mencionado, se trata de una interpretación determinista. Sin embargo, gracias a los resultados propuestos por J.A. Short, se puede entender por qué los defensores de la IMM tienen sus razones para apoyarla. Nuestra labor aquí ha sido, a partir de [1], reescribir sus demostraciones, cuidando por completo la formalidad, añadiendo detalles y corrigiendo algunas erratas. Hemos facilitado la lectura y comprensión de las pruebas, ya que, aunque los argumentos en el artículo original son sencillos, su lectura puede resultar complicada para un estudiante recién egresado.

En conclusión, hemos expuesto temas poco comunes de una de las ramas más abstractas de la mecánica cuántica, haciéndolos accesibles y comprensibles para un estudiante de física. Con este trabajo, también hemos tratado de fomentar el pensamiento crítico que todo científico debe tener hacia cualquier modelo, animando a plantear preguntas y formular paradojas.

# Bibliografía

- [1] J.A. Short, Probability in many-worlds theories, *Quantum* **7**, 971 (2023).
- [2] J.A. Barrett, Everettian Quantum Mechanics, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2023 Edition), E.N. Zalta & U. Nodelman (eds.) [Enlace](#).
- [3] L. Vaidman, Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2021 Edition), E. N. Zalta (ed.) [Enlace](#).
- [4] J. Faye, Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2019 Edition), E. N. Zalta (ed.) [Enlace](#).
- [5] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloe, *Quantum Mechanics* **Vol. 1** (Hermann, 1977), p. 898.
- [6] D. Wallace, *The emergent multiverse: Quantum theory according to the Everett interpretation* (Oxford University Press, 2012).
- [7] D.A. Lidar y K.B. Whaley, Decoherence-Free Subspaces and Subsystem en Irreversible Quantum Dynamics, F. Benatti & R. Floreanini (eds.) (Springer, 2003), p. 83.
- [8] H. Everett III, Relative state formulation of quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.* **7**, 454 (1957).
- [9] E.P. Wigner, Remarks on the mind-body question en Philosophical reflections and syntheses, J. Mehra (ed.) (Springer 1995), p. 247-260.
- [10] L. Vaidman, Probability in the many-worlds interpretation of quantum mechanics en *Probability in physics* (Springer 2011), p. 299-311.
- [11] L. Vaidman, On schizophrenic experiences of the neutron or why we should believe in the many-worlds interpretation of quantum theory, *Int. Stud. Philos. Sci.* **12 N23**, 245-261 (1998).
- [12] L. Vaidman, Derivations of the Born rule, en *Quantum, probability, logic: The work and influence of Itamar Pitowsky*, M. Hemmo & O. Shenker (eds.) (Springer 2020), p. 567-584.
- [13] D. Deutsch, Quantum theory of probability and decisions, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* **455**, 3129-3137 (1999).

- [14] D. Wallace, How to prove the Born rule en Many Worlds? Everett, Quantum Theory, and Reality, S. Saunders, J. Barrett et all (eds.) (Oxford University Press 2010), p. 227-263.
- [15] V. Rivero, Interpretaciones de la mecánica cuántica, Trabajo de fin de Grado en Física (Universidad de Valladolid, 2016).
- [16] D. Frauchiger y R. Renner, Quantum theory cannot consistently describe the use of itself, *Nat. Commun.* **9**, 3711 (2018).
- [17] H. Everett, Long Thesis: Theory of the Universal Wave Function, The Everett Interpretation of Quantum Mechanics: Collected Works 1955–1980, P. Byrne & J.A. Barrett (eds.) (1956).
- [18] W.H. Zurek, Probabilities from entanglement, Born's rule  $p_k = |\psi_k|^2$  from envariance, *Phys. Rev. A* **71**, 052105 (2005).
- [19] P. Billingsley, *Probability and Measure* (Wiley, 1995).
- [20] D. Deutsch, Quantum theory as a universal physical theory, *Int. J. Theor. Phys.* **24**, 1-41 (1985).
- [21] E. Schrödinger, Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, *Prax. Naturwiss. Phys.* **23**, 844-849 (1935).