



Universidad de Valladolid
FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO
GRADO EN FÍSICA
COLAPSO GRAVITATORIO

Autor: Jorge Monzón de Castro
Tutor: Diego Sáez-Chillón Gómez
2024

Abstract

Throughout this project we will revise one of the most relevant fields in general relativity: **gravitational collapse**. We will start by remembering some basic concepts of general relativity, focusing on geodesics study and spacetime curvature. Next, the most trascendental solutions to Einstein's equations applied to gravitational collapse will be reviewed, with emphasis on general theory of collapse, testing the different geometries, state equations and initial conditions which are used in each case and distinguishing between two final fates: blackhole and naked singularity. This project will be finished by analysing the cosmic censorship hypothesis, observing the consequences of the existence of naked singularities and studying the different approaches to this conjecture which is yet to be formulated and proved.

Resumen

A lo largo de esta memoria revisaremos uno de los campos en desarrollo más relevantes de la relatividad general: el **colapso gravitatorio**. Comenzaremos repasando algunos conceptos básicos de relatividad general enfocados al estudio de geodésicas y de la curvatura espacio-temporal. A continuación, veremos las soluciones más trascendentes de las ecuaciones de Einstein aplicadas al colapso gravitatorio, haciendo hincapié en la teoría general del colapso, comprobando qué geometrías, ecuaciones de estado y condiciones iniciales utilizamos en cada caso y distinguiendo entre los estados finales de agujero negro y singularidad desnuda. Finalizaremos el trabajo analizando la hipótesis de censura cósmica, observando las consecuencias de la existencia de singularidades desnudas y estudiando las diferentes vías de formulación de esta conjetura aún no expresada formalmente ni mucho menos demostrada.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Curvatura en el espacio tiempo	1
1.1.1. Tensor de Riemann	1
1.1.2. Contracciones del tensor de Riemann	2
1.2. Geodésicas	3
1.3. Ecuaciones de campo de Einstein	3
1.3.1. Tensor de energía-momento	4
1.3.2. Ecuaciones de campo	5
2. Soluciones exactas	6
2.1. Solución de Minkowski	6
2.2. Solución de Schwarzschild	6
2.2.1. Horizonte de eventos y singularidad aparente	7
2.2.2. Precesión del Perihelio	9
2.3. Solución general para colapso gravitatorio	10
2.3.1. Teoría general del colapso	10
2.4. Solución de Oppenheimer-Snyder	13
2.5. Solución de Vaidya	14
2.6. Solución de Tolman-Bondi-Lemaître	15
2.7. Solución de Kerr	18
3. Censura cósmica	20
3.1. Constante cosmológica	20
3.2. Topología y geometría global del espacio-tiempo	24
3.2.1. Estructura causal	24
3.2.2. Hiperbolicidad global	26
3.3. Hipótesis de Penrose	26
3.3.1. Generalidad y estabilidad de singularidades	26
3.3.2. Hipótesis de censura cósmica	28
4. Conclusiones	33

1. Introducción

En esta memoria, que toma de referencia el libro [1], se asumen conceptos básicos de geometría diferencial. Durante este primer capítulo se recordarán unas nociones básicas de relatividad general y curvatura del espacio-tiempo, para posteriormente adentrarnos en las soluciones a las ecuaciones de Einstein más relevantes aplicadas al colapso gravitatorio. Se dará mucha importancia a analizar los estados finales del colapso, agujero negro o singularidad desnuda, estudiando las geodésicas temporales y nulas salientes de la singularidad central para ver si pueden o no alcanzar el infinito y transmitir información a observadores externos, comparando los instantes de formación de la singularidad con la formación de horizontes aparentes y superficies atrapadas. El tercer capítulo lo dedicaremos al análisis de la conjetura de censura cósmica de Penrose, donde estudiaremos las consecuencias de la existencia de singularidades desnudas, las características que tendrían dichos objetos, la estructura causal y topológica del espacio-tiempo (se asumen asimismo conocimientos básicos de topología) y diferentes formas posibles para obtener una formulación válida de la hipótesis, para concluir finalmente que las singularidades desnudas pueden ser más habituales en la teoría de lo que uno esperaría y, por tanto, se necesitan mayores esfuerzos de cara a expresar correctamente la conjetura de censura cósmica, que se toma por verdadera en el desarrollo actual de la física de agujeros negros.

1.1. Curvatura en el espacio tiempo

La teoría de la relatividad general compone el marco teórico en el que trabajaremos a lo largo de toda la memoria. Es una teoría de la gravedad definida en una variedad diferenciable de cuatro dimensiones conocida como espacio-tiempo. Los coeficientes de la métrica de esta variedad deberán ser calculados como soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, convenientemente en cada caso, dependiendo del sistema que deseemos analizar. La teoría de la relatividad general es una generalización de la teoría de la relatividad especial donde no se asume que el espacio-tiempo tiene que ser plano, es decir, los vectores tangentes transportados paralelamente a través de diferentes curvas hasta el mismo punto no tienen por qué conmutar, sino que un vector tangente puede variar dependiendo de la curva a través de la que sea transportado paralelamente. En los siguientes puntos concretaremos esta idea de curvatura.

1.1.1. Tensor de Riemann

El tensor de curvatura de Riemann \mathcal{R} , o simplemente *tensor de Riemann*, es un tensor de tipo $(1, 3)$, es decir, una aplicación multilineal:

$$\mathcal{R} : T_p^* \times T_p \times T_p \times T_p \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

Donde T_p representa el espacio tangente en el punto p de la variedad y T_p^* el dual. Este tensor representa la curvatura del espacio-tiempo, es decir, es una medida de las desviaciones de las geodésicas en presencia de un campo gravitatorio. Se puede escribir en una base de coordenadas generalizadas como:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{jkl}^i e_i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e^l \quad (2)$$

Para expresar las componentes \mathcal{R}_{jkl}^i , debemos definir un vector $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}$, con $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in T_p$ como:

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} \quad (3)$$

Donde $\nabla_{\mathbf{X}}$ es el operador derivada respecto a \mathbf{X} . A partir de este vector, las componentes del tensor de Riemann se definen como:

$$\mathcal{R}_{jkl}^i = \langle e^i, R(e_k, e_l)e_j \rangle \quad (4)$$

Operando con esta expresión, obtenemos:

$$\nabla_k \nabla_l Z^i - \nabla_l \nabla_k Z^i = R_{jkl}^i Z^j \quad (5)$$

Con esta ecuación, que podría también considerarse como la definición de las componentes del tensor de curvatura, observamos que este tensor proporciona la medida de la no-conmutación de un vector tangente Z cuando es transportado paralelamente a lo largo de diferentes curvas hasta el mismo punto. También pueden ser definidas en términos de las componentes coordenadas de la conexión única dada por la condición $\nabla_{\mathbf{x}} g = 0$ (símbolos de Christoffel), siendo g la métrica de la variedad diferenciable:

$$\mathcal{R}_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ka}^i \Gamma_{lj}^a - \Gamma_{la}^i \Gamma_{kj}^a \quad (6)$$

El tensor de Riemann exhibe las siguientes propiedades de simetría:

$$\mathcal{R}_{jkl}^i = -\mathcal{R}_{jlk}^i \quad \mathcal{R}_{jkl}^i + \mathcal{R}_{klj}^i + \mathcal{R}_{ljk}^i = 0 \quad (7)$$

Y cuando la conexión es la inducida por la métrica, se tiene que:

$$\Gamma_{ijk} = g_{il} \Gamma_{jk}^l \quad \Gamma_{jk}^l = g^{li} \Gamma_{ijk} \quad (8)$$

Y el tensor de Riemann puede escribirse como un tensor $(0, 4)$ mediante la relación:

$$\mathcal{R}_{ijkl} = g_{ia} \mathcal{R}_{jkl}^a$$

Con nuevas propiedades de simetría:

$$\mathcal{R}_{ijkl} = -\mathcal{R}_{jikl} \quad \mathcal{R}_{ijkl} = \mathcal{R}_{klij} \quad (9)$$

A partir de aquí, puede decirse que la variedad (M, g) del espacio-tiempo tiene una conexión plana si, y solo si, todas las componentes del tensor de Riemann se anulan ($\mathcal{R}_{jkl}^i = 0$ para todos los índices). Esta condición es necesaria y suficiente para que un vector en un punto p permanezca inalterado tras ser transportado paralelamente a lo largo de una curva cerrada arbitraria que atraviesa p (asumiendo que el espacio-tiempo es simplemente conexo). En este caso, también se dice que la conexión es integrable y, si se trata de la conexión dada por la condición anterior sobre la métrica, se tiene que la variedad diferenciable es plana, es decir, que existe un sistema global de coordenadas en M tal que la métrica se reduce a una forma diagonal con valores ± 1 . Como veremos más adelante, un ejemplo de esta variedad es el espacio-tiempo de Minkowski, donde se desarrolla la teoría de la relatividad especial.

1.1.2. Contracciones del tensor de Riemann

El tensor de Riemann puede ser contraído cuando dos índices coinciden, de manera que podemos obtener tensores más sencillos cuyas propiedades se heredan del anterior. El tensor de Ricci se obtiene a partir del tensor de Riemann, mediante la siguiente contracción:

$$\mathcal{R}_{jl} = \mathcal{R}_{jil}^i \quad (10)$$

Cuyo resultado es un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$.

También podemos definir el escalar de curvatura como:

$$\mathcal{R} = g^{ij} \mathcal{R}_{ij} \quad (11)$$

Que tiene la propiedad de depender solamente de los valores del tensor métrico y sus derivadas hasta segundo orden. Pueden construirse hasta 14 escalares de curvatura independientes. En cambio, las componentes independientes del tensor de Riemann, como consecuencia de las simetrías expresadas anteriormente, son 20 en cuatro dimensiones, que es el caso en el que nos centraremos.

1.2. Geodésicas

En una variedad diferenciable, una geodésica es una curva que conserva el transporte paralelo de los vectores tangentes en los puntos de la curva. Más formalmente, si \mathbf{X} es el campo de vectores tangentes a lo largo de una curva geodésica γ , entonces se tiene que $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{X}$ es proporcional a \mathbf{X} . Una geodésica es una solución a la ecuación:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (12)$$

Diremos que un vector $\mathbf{X} \in T_p$ es *temporal* o de *tipo tiempo* si al aplicarle la forma bilineal definida por el tensor métrico se tiene que:

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0 \quad (13)$$

Similarmente, el vector será *espacial* o de *tipo espacio* si se cumple que:

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0 \quad (14)$$

Y diremos que es un vector *nulo* si:

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0 \quad (15)$$

De este modo, diremos que una geodésica es temporal, espacial o nula, dependiendo de la naturaleza de su vector tangente. Cabe señalar que, dado que una geodésica transporta paralelamente su vector tangente, este no puede cambiar de naturaleza, por lo que a lo largo de una geodésica el vector tangente permanece dentro de la misma clasificación, lo que nos permite clasificar la geodésica. Los fotones siguen trayectorias correspondientes a geodésicas nulas, mientras que las partículas libres con masa seguirán una geodésica temporal.

1.3. Ecuaciones de campo de Einstein

Para desarrollar las ecuaciones que gobiernan la relatividad general, es decir, la descripción de la interacción gravitatoria como curvatura del espacio-tiempo, gobernada por el tensor de Riemann, a causa de los campos de materia y energía, asumiremos que las componentes de la métrica son funciones de las coordenadas, diferenciables al menos hasta segundo orden. También postularemos la causalidad local y la conservación local de energía y momento y se asume que el movimiento de cualquier partícula en un campo gravitatorio será siempre independiente de su propia masa, lo que se conoce como *principio de equivalencia*. Finalmente, también postularemos el *principio de covarianza general*, es decir, que todas las leyes físicas podemos expresarlas como

ecuaciones tensoriales, de manera que son válidas en un sistema de referencia genérico y son invariantes frente a cambios de coordenadas. Además, cuando nos restringimos a una situación de caída libre, se obtienen las leyes de la relatividad especial.

1.3.1. Tensor de energía-momento

Para englobar todas las fuentes de campo gravitatorio (véase campos electromagnéticos, polvo, fluidos, campos escalares, etc.) usaremos el tensor de energía-momento T^{ij} , que es un tensor de segundo orden. Este tensor se anula en un abierto si, y solo si, todos los campos y distribuciones de materia y energía se anulan también en dicho abierto.

Este tensor se usa indistintamente en su forma covariante y contravariante, según convenga. La forma de pasar de uno a otro es sencilla, usando el tensor métrico:

$$T^{ij} = g^{ia}g^{jb}T_{ab} \quad (16)$$

Podemos describir este tensor como sigue:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Donde:

- T_{00} es la densidad de energía.
- T_{0i} (con $i, j = 1, 2, 3$) es la densidad de momento
- T_{i0} (con $i, j = 1, 2, 3$) es el flujo de energía
- T_{ij} (con $i, j = 1, 2, 3$) es el tensor de esfuerzos (presiones, esfuerzos y flujos de momento internos).

El ejemplo más sencillo es el de una nube de polvo (materia sin presión), para el que el tensor de energía-momento toma la forma:

$$T^{ij} = \rho u^i u^j \quad (18)$$

donde ρ es la densidad de masa y u^i es la cuadrivelocidad de la nube de polvo.

En las coordenadas de Minkowski y en reposo, se tiene que:

$$u^i = (c, 0, 0, 0) \quad (19)$$

Por lo que:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Por otra parte, para un fluido perfecto, el tensor de energía momento tomaría la forma:

$$T^{ij} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^i u^j + pg^{ij} \quad (21)$$

Siendo p la presión del fluido. En las coordenadas de Minkowski y en reposo, por tanto, tenemos que:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (22)$$

1.3.2. Ecuaciones de campo

Las ecuaciones que Einstein propuso inicialmente para representar la deformación del espacio-tiempo en función del tensor de energía-momento son:

$$\mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{ij} = 8\pi T_{ij} \quad (23)$$

La definición del tensor de Ricci (10) sugiere que las ecuaciones tienen una dependencia con el tensor métrico hasta las derivadas de segundo orden. De hecho, se trata de un sistema de, en general, 10 ecuaciones acopladas, no lineales, en diferencias parciales de segundo orden para g_{ij} , por lo que su resolución es extremadamente difícil. Para encontrar soluciones, en general, como veremos en los siguientes apartados, es necesario realizar una serie de simplificaciones e imposiciones de simetría.

Estas ecuaciones pueden admitir también la adición de un sumando consistente en el tensor métrico multiplicado por una constante. Históricamente, Einstein añadió a estas ecuaciones dicho término, otorgando a la constante correspondiente el nombre de *constante cosmológica*, sin la que las soluciones del sistema no eran cosmológicamente estáticas. De este modo, las ecuaciones quedaban como:

$$\mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{ij} + \Lambda g_{ij} = 8\pi T_{ij} \quad (24)$$

Así, para un espacio vacío, las ecuaciones se convierten en:

$$\mathcal{R}_{ij} = -\Lambda g_{ij} \quad (25)$$

Donde el término correspondiente al escalar de curvatura se anula debido a que, tomando trazas, la ecuación que resulta de las ecuaciones de campo es:

$$\mathcal{R} = -8\pi T \quad (26)$$

Por lo que una forma alternativa de escribir las ecuaciones (sin la constante cosmológica) es:

$$\mathcal{R}_{ij} = 8\pi\left(T_{ij} - \frac{1}{2}Tg_{ij}\right) \quad (27)$$

Si $\Lambda \neq 0$, no obtenemos la gravedad newtoniana en el límite de bajas velocidades y campos débiles, mientras que si la magnitud de la constante es apreciable, aunque muy pequeña, sí es posible obtener la teoría newtoniana en el límite.

2. Soluciones exactas

Existe un número enorme de soluciones y de clases de soluciones a las ecuaciones de Einstein ([2],[3]) pero nos vamos a centrar en las que tienen interés y relevancia en el campo del colapso gravitatorio.

Las dos primeras soluciones, Minkowski y Schwarzschild, tienen un carácter general y no las aplicaremos directamente al colapso gravitatorio, aunque tendrán relevancia en este campo. La solución de Schwarzschild constituye la solución exterior en el vacío de un cuerpo con simetría esférica y, en virtud del teorema de Birkhoff, podremos unir una solución para la geometría interior de un cuerpo colapsante a la solución exterior de Schwarzschild, en situaciones en las que el cuerpo en colapso no radíe. Por otra parte, la solución de Minkowski es necesaria para llegar hasta la de Schwarzschild. El resto de soluciones las aplicaremos directamente al colapso gravitatorio y comprobaremos bajo qué condiciones nos proporcionan un agujero negro o una singularidad desnuda.

2.1. Solución de Minkowski

Definimos el espacio-tiempo de Minkowski como la variedad diferenciable $M = \mathbb{R}^4$, con la métrica Lorentziana:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (28)$$

Esto es un espacio-tiempo plano, con todas las componentes del tensor de Riemann nulas, y representa la solución trivial a las ecuaciones de campo de Einstein:

$$\mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{ij} = 8\pi T_{ij} = 0 \quad (29)$$

Esta solución es en la que se engloba la relatividad especial, que resulta ser, como ya adelantamos, un caso particular de la relatividad general, donde las geodésicas son líneas rectas, y las geodésicas nulas son las que describen un ángulo de $\pi/4$ con los ejes.

2.2. Solución de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild es válida para describir la geometría exterior de un cuerpo masivo con simetría esférica, estático y sin carga, si bien no se aplica correctamente en ausencia de estas condiciones. Esta solución se utiliza extensivamente en la teoría de colapso gravitatorio, utilizando una métrica válida en el interior de un objeto y uniéndola en la frontera con la métrica de Schwarzschild bajo ciertas condiciones de regularidad. La variedad diferenciable, igual que en el caso de la solución de Minkowski y todos los demás que veremos en adelante, es $M = \mathbb{R}^4$ y la métrica viene dada por:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (30)$$

Donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Las coordenadas esféricas son el modo natural de expresar esta métrica, debido a la imposición de la condición de simetría esférica. Esta solución se obtiene resolviendo las ecuaciones de Einstein para un caso de simetría esférica en el vacío, y podemos obtener la constante m utilizando el límite Newtoniano de campo gravitatorio débil. Podemos expresar la métrica de Schwarzschild como la adición de una perturbación de potencial Newtoniano a la métrica Minkowskiana, de manera que, por ejemplo, el primer componente de la

métrica quedaría:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad (31)$$

Siendo Φ el potencial gravitatorio Newtoniano, G la constante de gravitación universal, c la velocidad de la luz y M la masa puntual en el origen de coordenadas. De esta manera, obtenemos:

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad (32)$$

En unidades relativistas, ($G = c = 1$), es fácil interpretar la solución de Schwarzschild como la descripción del campo gravitatorio generado por una partícula puntual de masa m en el origen de coordenadas.

2.2.1. Horizonte de eventos y singularidad aparente

La solución de Schwarzschild predice la existencia de un horizonte de eventos en:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (33)$$

Donde r_s se conoce como *radio de Schwarzschild*. Se conoce como horizonte de eventos [4] a una superficie en el espacio-tiempo que actúa como frontera causal, de manera que ningún punto del interior a un horizonte de eventos pertenece al pasado causal de ningún punto en el infinito futuro nulo. Las geodésicas temporales y nulas solamente pueden entrar en el interior de la región delimitada por este horizonte. Es decir, ningún tipo de señal o partícula cuya posición esté definida en un radio menor puede escapar.

Esta métrica posee dos singularidades. Una en el radio de Schwarzschild, $r_s = 2m$ y otra en el origen de coordenadas. La singularidad del origen es una singularidad real, es decir, no es posible extender el espacio-tiempo de manera continua en este punto. Esto se ve porque el escalar de curvatura:

$$\mathcal{R}^{ijkl}\mathcal{R}_{ijkl} = \frac{m^2}{r^6} \quad (34)$$

diverge en $r = 0$. Sin embargo, la singularidad del horizonte de eventos es una singularidad aparente, en la que diverge el coeficiente de g_{11} . Sin embargo, esto ocurre como consecuencia de la elección del sistema de coordenadas.

Para analizar este problema, debemos considerar la estructura causal del espacio-tiempo, para lo que estudiaremos las geodésicas radiales nulas ([5]), es decir, las geodésicas con coordenadas angulares constantes y tales que, en unidades relativistas (en las que trabajaremos a partir de ahora):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0 \quad (35)$$

De aquí, podemos obtener la relación:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \quad (36)$$

Donde dt/dr es la pendiente de los conos de luz en el plano $t - r$, en los que el signo positivo corresponde a un fotón saliente, ya que el radio crece con el tiempo para la región exterior ($r > 2m$), y el signo negativo a un fotón entrante, ya que el radio decrece, de nuevo en la región exterior. Si el radio es muy grande, la pendiente se aproxima a la unidad, como es el caso del

espacio-tiempo de Minkowski, es decir, esta métrica es asintóticamente plana, aproximándose a la de Minkowski en el infinito. Sin embargo, en la hipersuperficie $r = 2m$ la pendiente diverge, de manera que los conos de luz se cierran, por lo que un rayo de luz parecería nunca alcanzar dicha hipersuperficie. Sin embargo este vuelve a ser un problema de la elección del sistema de coordenadas.

Podemos integrar la ecuación anterior para encontrar la expresión de $t(r)$:

$$t = \pm r \pm 2m \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) + cte \quad (37)$$

Donde el signo positivo representa la región interior al radio de Schwarzschild y el negativo la exterior. Podemos definir, por tanto, una nueva coordenada radial:

$$r^* = r + 2m \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) \quad (38)$$

De manera que:

$$t = \pm r^* + cte \quad (39)$$

Podemos observar que, con esta nueva coordenada, la métrica toma la forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dr^{*2} + r^2 d\Omega^2 \quad (40)$$

De manera que la singularidad del horizonte de eventos ha desaparecido, aunque ahora el horizonte de sucesos se encuentra en el infinito de la coordenada r^* . Podemos refinar este cambio de coordenadas con los sistemas de coordenadas de Eddington-Finkelstein o Kruskal-Szekeres [6].

El primero introduce una nueva coordenada tipo tiempo, dada por:

$$v_{\pm} = t \mp r \quad (41)$$

Donde v_- se conoce como coordenada avanzada y corresponde a la geodésica radial entrante, mientras que v_+ , la coordenada retardada, corresponde a la saliente. Y podemos expresar la métrica de Schwarzschild usando la coordenada avanzada (para la retardada el análisis es análogo) como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dv^2 + dv_- dr + dr dv_- + r^2 d\Omega^2. \quad (42)$$

En estas nuevas coordenadas, la métrica es regular en $r = r_s$, a pesar de que $g_{00} = 0$ todavía. Estas coordenadas resultan ser útiles para el caso de geodésicas nulas. Por ejemplo, en el caso de las coordenadas avanzadas, las geodésicas radiales nulas vienen dadas por la ecuación:

$$\left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(\frac{dv_-}{dr} \right)^2 - 2 \frac{dv_-}{dr} = 0 \quad (43)$$

Cuyas soluciones son:

$$\frac{dv_-}{dr} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{dv_-}{dr} = 2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \quad (45)$$

La primera solución corresponde a una geodésica nula radial entrante, mientras que la segunda corresponde a una saliente, que resulta ser discontinua, lo que se interpreta como que una

geodésica nula no puede atravesar hacia fuera el horizonte de eventos. Ningún fotón emitido en el interior de un horizonte de eventos puede alcanzar un observador externo. Podemos profundizar un poco más en este asunto utilizando las coordenadas de Kruskal-Szekeres, que resuelven la discontinuidad de las geodésicas. Este cambio de coordenadas viene dado por el uso de las coordenadas avanzadas y retardadas al mismo tiempo:

$$ds^2 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dv_- dv_+ + dv_+ dv_-) + r^2 d\Omega^2 \quad (46)$$

Donde se cumple que:

$$\frac{1}{2}(v_- - v_+) = r + 2m \ln \left(\frac{r}{2m} - 1\right) \quad (47)$$

Considerando las expresiones de las coordenadas r^* , t y v (expresiones 37, 38 y 39), obtenemos:

$$t = \frac{1}{2}(v_- + v_+) \quad (48)$$

$$r^* = \frac{1}{2}(v_- - v_+) \quad (49)$$

Definimos ahora las funciones $p(v_-)$ y $q(v_+)$:

$$p = e^{(v_-/4m)} \quad (50)$$

$$q = -e^{(-v_+/4m)} \quad (51)$$

Siendo la métrica de Schwarzschild en estas coordenadas:

$$ds^2 = -\frac{16m^3}{r} e^{-r/2m} (dpdq + dqdp) + r^2 d\Omega^2 \quad (52)$$

De este modo, ya no hay ninguna discontinuidad en el radio $r = 2m$. No obstante, para tener una coordenada tipo tiempo y otra tipo espacio que mantengan las mismas propiedades podemos definir:

$$T = \frac{1}{2}(p + q) = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh \left(\frac{t}{4m}\right) \quad (53)$$

$$R = \frac{1}{2}(p - q) = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh \left(\frac{t}{4m}\right) \quad (54)$$

Con los que finalmente la métrica toma la forma:

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-r/2m} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (55)$$

En este caso, las geodésicas radiales vienen dadas por la condición $T = \pm R + cte$, que vuelve a representar líneas a 45 grados, con lo que volvemos a obtener el cono de luz Minkowskiano. Con estas coordenadas podemos extender la solución de Schwarzschild y obtener la geometría completa.

2.2.2. Precesión del Perihelio

La solución de Schwarzschild predice, entre otras cosas, la precesión del perihelio de las órbitas planetarias. Esto fue particularmente revelador para las observaciones de la órbita de Mercurio y la desviación de estas respecto de la teoría Newtoniana, que había dado lugar a una gran

especulación, por ejemplo, la hipótesis del planeta vecino de Mercurio “Vulcano”, que afectaba a su órbita [7]. Aplicando la métrica de Schwarzschild a la órbita de un planeta en torno al Sol, el ratio de precesión de su perihelio, aproximado a la primera potencia, está dado por [8]:

$$\omega_p = \frac{3(GM)^{3/2}}{c^2 a^{5/2} (1 - e^2)}, \quad (56)$$

donde a es el semi-eje mayor de la órbita y e es la excentricidad de la órbita. Para el caso concreto del planeta Mercurio, esta precesión es de 43 segundos de arco por siglo.

2.3. Solución general para colapso gravitatorio

Misner y Sharp [9] desarrollaron un formalismo general para un colapso gravitatorio con simetría esférica. La métrica se escribe en coordenadas comóviles como:

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + e^\lambda dr^2 + R^2(t, r) d\Omega^2 \quad (57)$$

Donde ϕ y λ son funciones de t y r . Suponemos en este caso que el tensor de energía-momento es el de un fluido perfecto:

$$T_{ij} = (\rho + p)u_i u_j + p g_{ij} \quad (58)$$

Donde ρ es la densidad de energía del fluido en el sistema de referencia del fluido y p es la presión isotrópica. Definimos una función de masa $m(r, t)$ mediante la expresión:

$$e^\lambda = \left(1 + e^{-2\phi} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 \quad (59)$$

Donde la coordenada t nos proporciona el tiempo propio de cada partícula. Podemos integrar la ecuación tensorial de conservación $T_{ij}^{;j} = 0$, donde la notación de “;” indica la derivada covariante respecto al índice correspondiente, y resolver las ecuaciones de Einstein. De este modo, las ecuaciones de Misner-Sharp para el colapso esféricamente simétrico pueden escribirse como:

$$e^{-\phi} \frac{\partial m}{\partial t} = -4\pi R^2 p e^{-\phi} \frac{\partial R}{\partial t} \quad (60)$$

$$e^{-2\phi} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = \left(\frac{1 + e^{-2\phi} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 - \frac{2m}{r}}{\rho + p} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial R} \right) - \frac{m + 4\pi R^3 p}{R^2} \quad (61)$$

$$\frac{\partial m}{\partial R} = 4\pi R^2 \rho \quad (62)$$

Cuando estas ecuaciones se combinan con una ecuación de estado, que relaciona ρ y p , determinan la evolución dinámica del colapso. Sin embargo, cuando la presión no es nula, la situación es, salvo casos particulares, demasiado compleja como para resolverla sin utilizar cálculo numérico. Algunos resultados de este estilo pueden encontrarse en [10].

2.3.1. Teoría general del colapso

Ante el desarrollo anterior, antes de continuar exponiendo las soluciones a las ecuaciones de Einstein que se aplican directamente a una situación de colapso, vamos a exponer, en líneas generales, la evolución de una nube de materia colapsante y la consiguiente formación de agujeros negros o singularidades desnudas. Estudiando la formación de la singularidad y la relación del proceso

de formación con las condiciones iniciales, es posible determinar si la formación de superficies atrapadas tiene lugar previamente a la aparición de la singularidad o si, por el contrario, se ve retardada. Esta estructura causal de la región de las superficies atrapadas y del “horizonte aparente”, el límite exterior de dichas superficies, formándose durante el colapso, es lo que determina la posible existencia de geodésicas no espaciales (nulas o temporales) emergentes desde la singularidad.

Definición 2.1. *Durante el desarrollo de un colapso gravitatorio, se conoce como **superficie atrapada**[4] a aquella superficie bidimensional espacial compacta tal que sus dos congruencias de geodésicas nulas ortogonales entrantes y salientes tienen expansión negativa, en otras palabras, las geodésicas temporales y nulas a partir de uno de los puntos de una superficie atrapada solo pueden dirigirse hacia la región interior de la superficie, de manera que actúan como frontera causal de manera similar a un horizonte de eventos, impidiendo la influencia causal de ningún punto interior a la superficie sobre el exterior.*

Definición 2.2. *Llamaremos **horizonte aparente** al límite superior en radio de las superficies atrapadas, es decir, a la superficie atrapada más externa.*

Para construir las soluciones que nos proporcionarán detalles sobre el colapso gravitatorio, vamos a considerar las condiciones iniciales y de evolución de un cuerpo colapsante. Para empezar, definimos la función masa $F(t, r)$, que en una nube de materia colapsante debe obedecer la relación:

$$F(t, r) = r^3 \mathcal{M}(r, v) \quad (63)$$

Donde v es el parámetro de colapso, un parámetro adimensional que relaciona el radio físico de una capa colapsante en evolución (en el caso del colapso esta evolución es una contracción en radio) con su radio inicial:

$$v = \frac{R(r, t)}{r} \quad (64)$$

y \mathcal{M} es una función positiva y al menos de clase C^2 en $r > 0$ y C^1 en $r = 0$. \mathcal{M} no es una función específica, por lo que podemos indicar cualquier perfil de masa inicial para el cuerpo colapsante siempre que cumpla las condiciones de regularidad adecuadas. En coordenadas comóviles (t, r, θ, ϕ) , que son en las que debemos trabajar, siendo $R(t, r)$ el radio variable de una capa, la métrica general debe tener la forma [11]:

$$ds^2 = -e^{2\nu(t,r)} dt^2 + e^{2\psi(t,r)} dr^2 + R^2(t, r) d\Omega^2 \quad (65)$$

Y el tensor de energía-momento de cualquier campo de materia es diagonal:

$$T_t^t = -\rho(t, r) \quad T_r^r = p_r(t, r) \quad T_\theta^\theta = p_\theta(t, r) = T_\phi^\phi \quad (66)$$

Donde ρ es la densidad de energía, p_r es la presión radial y p_θ la presión tangencial.

Se tiene entonces que [1]:

$$\rho(r, v) = \frac{3\mathcal{M} + r \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right)}{v^2 \left(v + r \frac{\partial v}{\partial t} \right)} \quad (67)$$

$$p_r(r, v) = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial v} \quad (68)$$

Se ve que a medida que el radio de las capas colapsantes disminuye, es decir, v tiende a 0, tanto la presión radial como la densidad se vuelven arbitrariamente grandes, formando como consecuencia

una singularidad. Para conocer la presión tangencial, definimos la función diferenciable $A(r, v)$ como:

$$\frac{\partial \nu(r, v)}{\partial t} = \frac{\partial A(r, v)}{\partial v} \frac{\partial R}{\partial t} \quad (69)$$

La forma de $\nu(t, r)$ puede ser generalizada como:

$$\nu(t, r) = r^2 g_1(r, v) \quad (70)$$

Donde $g_1(r, v)$ es una función arbitraria diferenciable. Podemos entonces escribir:

$$A(r, v) = r g_2(r, v) \quad (71)$$

Con esto, podemos expresar la presión tangencial como:

$$p_\theta = R \frac{\partial A}{\partial v} (\rho + p_r) + 2p_r + \frac{R \frac{\partial p_r}{\partial t}}{\frac{\partial R}{\partial t}} \quad (72)$$

Esta presión también se hace infinita en la singularidad.

Con esto, podemos expresar una clase de soluciones a las ecuaciones de Einstein como:

$$G(r, v) = b(r) e^{2rA(r, v)} \quad (73)$$

Donde $b(r)$ es una función arbitraria de la que, usando la condición de regularidad con el radio, obtenemos:

$$b(r) = 1 + r^2 b_0(r) \quad (74)$$

Siendo $b_0(r)$ la función de distribución de energía de la capa correspondiente al radio r . Ahora, a partir de las soluciones generales de las ecuaciones de Einstein antes expuestas, se puede obtener la relación:

$$\sqrt{R} \frac{\partial R}{\partial r} = -e^{\nu(r, v)} \sqrt{(1 + r^2 b_0) R e^{2rA(r, v)} - R + r^3 \mathcal{M}} \quad (75)$$

Donde el signo negativo corresponde al escenario de colapso, en el que:

$$\frac{\partial R}{\partial r} < 0 \quad (76)$$

Podemos definir una función $h(r, v)$ como:

$$h(r, v) = \frac{e^{2rA(r, v)} - 1}{r^2} = 2A(r, v) + \mathcal{O}(r^2) \quad (77)$$

Con la que:

$$\frac{\partial v}{\partial r} \sqrt{v} = -\sqrt{e^{(rA+v)} v b_0 + e^{2v} (vh + \mathcal{M})} \quad (78)$$

E integrando respecto de v :

$$t(v, r) = \int_v^1 \frac{\sqrt{v} dv}{\sqrt{e^{(rA+v)} v b_0 + e^{2v} (v h + \mathcal{M})}} \quad (79)$$

Esta ecuación nos proporciona el tiempo que tarda una capa de radio inicial r en alcanzar una etapa particular v , siendo el valor inicial $v = 1$ (recordemos de la ecuación 64 que es la relación entre el radio inicial de la capa y el radio de dicha capa en evolución). Gracias a esta ecuación podemos conocer detalles sobre la formación de la singularidad en cada caso de interés. De hecho, en este caso, el tiempo empleado por una capa de radio inicial r en alcanzar la singularidad es:

$$t_s(r) = \int_0^1 \frac{\sqrt{v} dv}{\sqrt{e^{(rA+v)} v b_0 + e^{2v} (v h + \mathcal{M})}} \quad (80)$$

Esta expresión se denomina "curva de la singularidad", y también podemos obtener a partir de aquí la ecuación del horizonte aparente:

$$t_{ah}(r) = t_s(r) - \int_0^{v_{ah}(r)} \frac{\sqrt{v} dv}{\sqrt{e^{(rA+v)} v b_0 + e^{2v} (v h + \mathcal{M})}} \quad (81)$$

El horizonte aparente, como definimos en 2.2, es el límite superior de las superficies atrapadas. Conociendo esta ecuación, podemos estudiar el instante en el que se forma dicho horizonte y compararlo con el instante de aparición de la singularidad para conocer si la singularidad estará desnuda en el primer instante o si, por el contrario, se desarrolla después del horizonte aparente. De hecho, de esta ecuación obtenemos que la condición necesaria para la existencia de una singularidad localmente desnuda es que la curva del horizonte aparente debe ser una función creciente en la singularidad central, en la potencia más baja de r . Si la curva del horizonte aparente decrece en la singularidad, entonces el resultado del colapso es necesariamente un agujero negro, ya que el horizonte aparente se forma antes que la singularidad. Podemos destacar algún caso de interés, tal como el de una nube de polvo (es decir, el caso más simple de materia sin presión), para la que la expresión de la curva de singularidad viene dada por [12][13]:

$$t_s(r) = \int_0^1 \frac{\sqrt{v} dv}{\sqrt{\mathcal{M}(r) + v b_0(r)}} \quad (82)$$

Donde $\mathcal{M}(r)$ y $b_0(r)$ son funciones de clase C^2 de la coordenada comóvil r , bien definidas en $r = 0$.

2.4. Solución de Oppenheimer-Snyder

En el artículo de 1939 [14], Oppenheimer y Snyder desarrollan un modelo de colapso gravitacional de una nube esférica de polvo (materia sin presión), bajo la idea de que nada puede frenar un colapso de un objeto compuesto únicamente por neutrones con una masa de 0.7 masas solares (aunque esta cifra ha sido refinada por estudios más recientes, que la sitúan alrededor de 2,1-2,25 masas solares gracias al estudio del evento *GW170817*, consistente en la detección mediante ondas gravitacionales de la fusión de una pareja de estrellas de neutrones). Las consideraciones que hicieron fueron parecidas a las de Schwarzschild, considerando simetría esférica, sin rotación ni carga. De esta manera en virtud del teorema de Birkhoff [6] (si la geometría de una región del espacio posee simetría esférica y es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, entonces esa geometría forma parte de la de Schwarzschild), la geometría interior considerada por Oppenheimer y Snyder puede ser unida en el exterior con la geometría asintóticamente plana de Schwarzschild. Con esto, la métrica dentro de la estrella en colapso se describe por:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (83)$$

El estado final de una nube de polvo homogénea con simetría esférica es necesariamente un espacio de Schwarzschild que contiene una singularidad espacio-temporal escondida tras un horizonte de eventos, lo que se conoce comúnmente como “agujero negro”. Para entender esta estructura, podemos recurrir a las geodésicas nulas radiales, definidas por $ds^2 = 0$ y velocidades angulares nulas. Tomando las soluciones positivas obtenemos las geodésicas radiales nulas salientes, que son las de interés para conocer la estructura de la singularidad y del colapso. Estas vienen dadas por las soluciones de:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{r}{r-2m} \quad (84)$$

E integrando:

$$t = r + 2m \ln|r-2m| + cte \quad (85)$$

En la región exterior al radio de Schwarzschild, $r > 2m$, $dr/dt > 0$, el radio crece con el tiempo, por lo que las soluciones positivas describen las geodésicas nulas radiales salientes. Para radios más pequeños que el radio de Schwarzschild, las coordenadas r y t intercambian su naturaleza espacial y temporal, de manera que ningún observador en la región interior puede permanecer en un valor constante de r , sino que debe desplazarse en dicha coordenada necesariamente hasta $r = 0$. Sin embargo, teóricamente, sí sería posible permanecer en un valor constante de t o desplazarse a voluntad en esta coordenada. Cualquier valor de r por debajo del horizonte de eventos representa una *superficie atrapada*, ya que tanto las geodésicas nulas radiales salientes como las entrantes emitidas desde cualquier punto de la superficie convergen. Con esta solución, es imposible la formación de una singularidad desnuda, el resultado del colapso es siempre un agujero negro.

2.5. Solución de Vaidya

Un escenario físicamente más realista que el anterior podría ser el de una estrella colapsante que, manteniendo la simetría esférica, tuviese presión interna y emitiese radiación. En este caso, mientras que la geometría interior podría ser cualquiera con la forma general en la expresión 65, la geometría exterior no podría ser la de Schwarzschild, ya que habría radiación, en vez de vacío, de manera que el tensor de energía-momento en esta región ya no es nulo, sino que:

$$T_{ij} = \sigma k_i k_j \quad (86)$$

Donde k_i son vectores nulos radiales dirigidos hacia el exterior. La solución a las ecuaciones de Einstein en el exterior de la estrella colapsante viene dada en las coordenadas nulas (v_+, r, θ, ϕ) (para las que las superficies de coordenadas constantes corresponden a geodésicas nulas) por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m(v_+)}{r} \right) dv_+^2 - 2dv_+ dr + r^2 d\Omega^2 \quad (87)$$

Con $m(v_+)$ una función arbitraria, no creciente, de la coordenada retardada. Para el caso de una función lineal de masa $m(v_+) = \lambda v_+$, obtenemos resultados interesantes en función del valor de λ [15][16]. Cuando el colapso gravitacional de este tipo de objeto se produce suficientemente rápido, el horizonte de eventos se forma antes de la aparición de la singularidad central. Sin embargo, para ritmos lentos de colapso y valores de λ menores que cierto valor crítico, la formación de

superficies atrapadas se ve retardada y se forma la singularidad en el instante previo al desarrollo del horizonte de eventos, de manera que existirían geodésicas nulas con inicio en la singularidad y final en el infinito. No obstante, este escenario es puramente teórico, ya que en las últimas fases del colapso, el tensor de energía-momento de la estrella no es el de un "fluido de radiación". En todo caso, no se conoce la ecuación de estado para dichas etapas finales del colapso, por lo que cualquier escenario es de interés teórico, mostrando este último en concreto que, en principio, es posible obtener soluciones en el marco de la relatividad general correspondientes a singularidades desnudas.

2.6. Solución de Tolman-Bondi-Lemaître

La métrica de Tolman-Bondi-Lemaître, en adelante, métrica TBL, es una solución general de las ecuaciones de Einstein para una nube de polvo con simetría esférica que admite inhomogeneidades radiales. La solución de Oppenheimer-Snyder[14] resultaría ser, por tanto, un caso particular de las soluciones TBL donde se considera que la nube de polvo es completamente homogénea. En las coordenadas comóviles, la geometría interna vendría dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{1+f} \frac{\partial R}{\partial t} dr^2 + R^2 d\Omega^2 \quad (88)$$

Donde f es una función arbitraria de r . La geometría externa sería la de Schwarzschild, al tratarse de un colapso de nube de polvo. El tensor de energía-momento, al ser una nube de polvo sin presión, viene dado por:

$$T^{ij} = \mathcal{E} \delta_t^i \delta_t^j \quad (89)$$

Y, siguiendo las ecuaciones de Einstein,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(t, r) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial F}{\partial t} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^{-1} \quad (90)$$

Siendo \mathcal{E} la densidad de energía, R el radio de la nube y F una función arbitraria de r . Además,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial r} \right)^2 = \frac{F}{R} + f \quad (91)$$

Aquí, $\frac{\partial R}{\partial r} < 0$, ya que estamos en un caso de colapso. La función $F(r)$ se interpreta como la distribución de masa y está condicionada por los pesos dados por el factor $\sqrt{1+f}$. De esta función, de hecho, depende en gran medida la evolución del colapso, ya que es la que nos permite clasificar el espacio-tiempo como *ligado*, si $f(r) < 0$; *marginalmente ligado*, si $f(r) = 0$; y *no ligado*, si $f(r) > 0$. Si el estado es ligado, quiere decir que las partículas están gravitacionalmente ligadas y no tienen suficiente energía para escapar a grandes distancias, lo que corresponde a una situación en la que el colapso resulta en un agujero negro. Si es no ligado, las partículas pueden escapar al infinito y el colapso no resulta en la formación de un agujero negro, sino que la materia se dispersa en el espacio. Por último, el caso de ligadura marginal es el límite entre los dos anteriores, con una evolución indefinida, así como un posible estado final compacto sin formar necesariamente una singularidad. Ahora, centrándonos en el caso ligado, para obtener la curva de la singularidad integramos la ecuación anterior, obteniendo:

$$t - t_0(r) = -\frac{R^{\frac{3}{2}} G\left(-f \frac{R}{F}\right)}{\sqrt{F}} \quad (92)$$

Donde $G(y)$ es una función real y positiva con dominio $1 \geq y \geq -\infty$, dada por:

$$G(y) = \begin{cases} \left(\frac{\sin^{-1}\sqrt{y}}{y^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{1-y}}{y} \right) & 1 \geq y \geq 0 \\ \frac{2}{3} & y = 0 \\ \left(\frac{-\sinh^{-1}\sqrt{-y}}{(-y)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{1-y}}{y} \right) & 0 \geq y \geq -\infty \end{cases} \quad (93)$$

La función $t_0(r)$ es una constante de integración, por lo que tenemos tres funciones arbitrarias de r : $f(r)$, $F(r)$ y $t_0(r)$, pero podemos reducir este número a dos, reescalando el radio R tal que:

$$R(0, r) = r \quad (94)$$

Por lo que, finalmente, evaluando en las expresiones 92 y 94, obtenemos la curva de la singularidad:

$$t_0(r) = \frac{r^{\frac{3}{2}} G\left(-f \frac{r}{F}\right)}{\sqrt{F}} \quad (95)$$

Y la curva del horizonte aparente vendría dada por:

$$t_{ah}(r) = \frac{r^{\frac{3}{2}} G(-p)}{\sqrt{F}} - FG(-f) \quad (96)$$

Con el objetivo de discutir la posible formación de una singularidad desnuda en este caso, escribimos la ecuación 78 adaptada a las condiciones impuestas por la solución TBL:

$$\frac{\partial v}{\partial r} \sqrt{v} = -\sqrt{\mathcal{M}(r) + vb(r)} \quad (97)$$

Donde tomamos el signo negativo dado que implica la solución colapsante, en la que $\frac{\partial v}{\partial r} < 0$. Integrando respecto de v :

$$t(v, r) = \int_v^1 \frac{\sqrt{v} dv}{\sqrt{\mathcal{M}(r) + vb(r)}} \quad (98)$$

Podemos expandir esta función en torno al origen:

$$t(v, r) = t(v, 0) + r\mathcal{X}(v) + r^2 \frac{\mathcal{X}_2(v)}{2} + r^3 \frac{\mathcal{X}_3(v)}{6} + \dots \quad (99)$$

Donde la función $\mathcal{X}(v)$ viene dada por:

$$\mathcal{X}(v) = -\frac{1}{2} \int_v^1 \frac{\sqrt{v}(\mathcal{M}_1 + vb_1) dv}{(\mathcal{M} + vb_0)^{\frac{3}{2}}} \quad (100)$$

Con:

$$b_0 = b(0) \quad \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(0) \quad b_1 = \frac{\partial b}{\partial t}(0) \quad \mathcal{M}_1 = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t}(0) \quad (101)$$

Por tanto, el tiempo que tarda la capa central en alcanzar la singularidad será:

$$t_{s0} = \int_0^1 \frac{\sqrt{v} dv}{\sqrt{\mathcal{M}_0 + vb_0}} \quad (102)$$

Donde debe cumplirse que $\mathcal{M}_0 + vb_0 > 0$. Con esto, el tiempo empleado por otras capas para alcanzar la singularidad central será:

$$t_s(r) = t_{s0} + r\mathcal{X}(0) + \mathcal{O}(r^2) \quad (103)$$

Y el valor de $\mathcal{X}(0)$ queda totalmente determinado por las funciones $\mathcal{M}(r)$ y $b(r)$, que representan las distribuciones iniciales de masa y de energía, respectivamente.

Centrándonos ahora en la hipotética existencia de familias de geodésicas nulas radiales salientes con inicio en la singularidad, para determinar la visibilidad de esta, consideramos la ecuación de dichas geodésicas:

$$\frac{dt}{dr} = e^\psi \quad (104)$$

La singularidad tiene lugar en el punto $v(t_s(r), r) = 0$, es decir, $R(t_s(r), r) = 0$, por lo que para cualquier geodésica nula saliente con pasado en la singularidad, se tiene que $R \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_s$. Escribamos ahora la ecuación de estas geodésicas en términos de las variables ($u = r^\alpha$, R , con $\alpha > 1$):

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{1}{\alpha} r^{-(\alpha-1)} \frac{\partial R}{\partial t} \left(1 + \frac{\frac{\partial R}{\partial r}}{\frac{\partial R}{\partial t}} e^\psi \right) \quad (105)$$

Podemos elegir arbitrariamente $\alpha = \frac{5}{3}$ y, usando la expresión 98:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{3}{5} \left(\frac{R}{u} + \frac{\frac{\partial v}{\partial t} \sqrt{v}}{\sqrt{\frac{R}{u}}} \right) \left(\frac{1 - \frac{F}{R}}{e^{-\psi} \frac{\partial R}{\partial t} (e^{-\psi} \frac{\partial R}{\partial t} + |\frac{\partial R}{\partial r}|)} \right) \quad (106)$$

Teniendo en cuenta que el horizonte aparente viene dado por la ecuación

$$\frac{F}{R} = 1 \quad (107)$$

Si una geodésica nula termina en el pasado en la singularidad con una tangente definida, entonces en la singularidad se tiene que $\frac{\partial R}{\partial u} > 0$ en el plano (u, R) y este valor debe ser finito. En este caso, se tiene que todas las singularidades con $r > 0$ estarán cubiertas por un horizonte de eventos, debido a que $\frac{F}{R} \rightarrow \infty$ al aproximarse a la singularidad y por tanto $\frac{\partial R}{\partial u} \rightarrow -\infty$. Para ver si estas geodésicas nulas pueden emerger de la singularidad, calculamos la tangente a esta en la singularidad mediante los límites:

$$x_0 = \lim_{t \rightarrow t_s} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{R}{u} = \frac{\partial R}{\partial u} \Big|_{t \rightarrow t_s, r \rightarrow 0} \quad (108)$$

Por lo que:

$$x_0^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{\mathcal{M}_0} \mathcal{X}(0) \quad (109)$$

Y la condición necesaria y suficiente para la existencia de una singularidad desnuda es $\mathcal{X}(0) > 0$, ya que con esta condición, se tiene que $x^{\frac{3}{2}} > 0$, por lo que en el plano (R, u) la ecuación de la geodésica nula emergente de la singularidad es:

$$R = x_0 u \quad (110)$$

Y en el plano (t, r) puede escribirse:

$$t - t_s(0) = x_0 r^{\frac{5}{3}} \quad (111)$$

De manera que tiene lugar una singularidad desnuda. De otro modo, si $\mathcal{X}(0) < 0$, entonces la curva de la singularidad sería una función decreciente de r , y el horizonte aparente se formaría antes que la singularidad, de manera que no emergería ninguna geodésica nula, dando lugar a un agujero negro. Por último, si $\mathcal{X}(0) = 0$, habría que considerar los siguientes términos en el desarrollo.

Hemos obtenido, por tanto, en las condiciones de la métrica TBL, una condición necesaria y suficiente para la formación de singularidades desnudas como estado final de un colapso gravitatorio con simetría esférica. Con este resultado, cabe preguntarse por la verosimilitud de los escenarios teóricos que dan lugar a singularidades desnudas, ya que, de darse en la realidad, podríamos obtener información de una singularidad espacio-temporal. En la sección 3 discutiremos esta cuestión y observaremos por qué los escenarios que dan lugar a singularidades desnudas podrían ser, o no, realistas.

2.7. Solución de Kerr

La métrica de Kerr ([17],[18],[19]) describe el espacio-tiempo alrededor de un cuerpo en rotación. Esta rotación rompe la simetría esférica, por lo que muchas de las asunciones que hemos realizado anteriormente no son posibles aquí. En particular, no se puede aplicar el teorema de Birkhoff, es decir, no podemos unir de manera continua esta métrica con la de Schwarzschild en el exterior del cuerpo. De este modo, describiremos esta solución realizando algunos apuntes sobre la naturaleza y visibilidad de la singularidad, sin analizar, por complejidad, las curvas de la singularidad y horizonte aparente, así como la formación de superficies atrapadas, elementos en los que el momento angular juega un papel muy relevante.

La métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMr}{c^2 \Sigma} \right) c^2 dt^2 - \frac{4GMa r \sin^2 \theta}{\Sigma} c^2 dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (112)$$

Donde:

$$\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} \quad (113)$$

$$\Sigma = r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \quad (114)$$

Aquí, M es la masa del agujero negro y $a = J/M$ es el parámetro de rotación, siendo J es el momento angular del agujero negro.

La métrica de Kerr posee dos horizontes de eventos [20], dados por las raíces de $\Delta = 0$:

$$r_{\pm} = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\frac{g^2 M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}} \quad (115)$$

Estos horizontes solamente están definidos bajo la condición:

$$\frac{g^2 M^2}{c^4} \geq \frac{a^2}{c^2} \quad (116)$$

Coincidiendo ambos horizontes cuando se da la igualdad de la condición. El hecho de que solamente estén definidos bajo esa condición implicaría que, de no cumplirse, obtendríamos una singularidad desnuda como resultado de un colapso.

La singularidad esencial en esta métrica no se presenta con una forma puntual, como en las situaciones estacionarias anteriores, sino que tiene forma de anillo. Esta singularidad viene dada por $\Sigma = 0$. En coordenadas cartesianas, los puntos que satisfacen esta condición son los que cumplen la ecuación:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2} \quad (117)$$

Es decir, la singularidad central se trata de un anillo de radio a/c ubicado en el plano ecuatorial $z=0$.

Además, esta métrica tiene una peculiaridad, la existencia de una región llamada *ergosfera*. una región más allá del horizonte exterior donde ningún objeto puede permanecer en reposo, definida entre el horizonte externo y la hipersuperficie dada por la condición $g_{tt} = 0$.

La solución de Kerr da lugar a geodésicas temporales cerradas (CTC) [21] en la región del espacio-tiempo que contiene la singularidad, que aparentemente violan la causalidad local. No obstante, [18] la comunidad científica considera en general que el interés de estas particularidades es puramente matemático, sin relevancia física.

3. Censura cósmica

Los casos de colapso vistos en el capítulo anterior eran situaciones idealizadas bajo numerosas condiciones de regularidad que pasan por alto muchos detalles relevantes del universo en el que vivimos. La realidad es mucho más compleja, de modo que hay varios factores que no hemos tenido en cuenta y que también afectan al colapso. En este apartado estudiaremos cómo afectan a la formación de singularidades la introducción de una constante cosmológica y la consideración de la geometría y topología globales del espacio-tiempo, con el objetivo de encontrar dificultades a la hora de la formación de singularidades desnudas y así plantear la hipótesis de censura cósmica formulada por Roger Penrose en 1969 [22], que establece que no existen singularidades en el espacio-tiempo que no estén cubiertas por un horizonte, es decir, no existen singularidades causalmente conectadas con la región más allá de un horizonte que debe envolverlas. A continuación, en el apartado 3.3.2, analizaremos diferentes posibilidades de aproximación a la formulación de la conjetura, explorando diferentes condiciones físicas imposibles candidatas a impedir la formación de singularidades desnudas.

3.1. Constante cosmológica

Hasta ahora hemos usado las ecuaciones de Einstein suponiendo que la constante cosmológica Λ es nula. No obstante, las investigaciones recientes parecen indicar la presencia de una componente de presión negativa no despreciable en el universo de lo que se conoce como “energía oscura”, que puede ser descrita en términos de un valor no nulo de la constante cosmológica. Esto daría lugar a una densidad de energía del vacío, distribuida uniformemente en todo el espacio como distribución independiente del tiempo, y el valor positivo de la constante actuaría como un campo de fuerzas globalmente repulsivo. A continuación, analizaremos los modelos de colapso TBL considerando una constante cosmológica no nula. Asumiremos que se cumple la condición de energía débil, $T_{ij}V^iV^j \geq 0$, para todos los vectores temporales y nulos V^i , que implica que las densidades de materia y energía son no negativas para cualquier observador. También examinaremos si en presencia del término cosmológico se ve afectado el estado final de los resultados en términos de la formación de un agujero negro o una singularidad desnuda, viendo si la singularidad desnuda resulta ser estable ante la introducción de la constante cosmológica.

Para el estudio, analizaremos el colapso gravitacional de una nube de polvo introduciendo la constante cosmológica, observando la aparición de una estructura dinámica no trivial, especialmente para el caso $f < 0$ (refiriéndonos con f a la función expresada en la métrica TBL, la expresión 88).

La métrica para una nube de polvo con simetría esférica, inhomogénea y con constante cosmológica está dada por la métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2}{1 + f(r)} dr^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (118)$$

Donde (t, r, θ, ϕ) es un sistema de coordenadas comóvil. La ecuación de estado que usamos es la de una nube de polvo, con el tensor energía-momento dado por $T_i^j = \epsilon(t, r)\delta_i^j\delta_j^t$, siendo $\epsilon(t, r)$ la densidad de energía. Como hemos indicado antes, asumimos la condición de energía débil para la materia, que es equivalente a la condición de energía fuerte en este caso (esta condición dice que para cualquier vector de tipo temporal que apunte hacia el futuro, la traza del tensor de marea medido por los observadores es no negativa), ya que las presiones principales son cero.

Las ecuaciones de Einstein en presencia de una constante cosmológica pueden ser escritas como:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2 = \frac{F(r)}{R} + f(r) + \frac{\Lambda}{3}R^2 \quad (119)$$

$$\epsilon(t, r) = \frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{R^2 \frac{\partial R}{\partial r}} \quad (120)$$

Nos centramos en la situación de colapso, es decir, aquella con $\frac{\partial R}{\partial t} < 0$. Las dos funciones libres que caracterizan la nube de polvo son aquellas que representan la masa total $F(r)$, y la energía $f(r)$, dentro de la superficie etiquetada por r . La constante cosmológica Λ puede, en principio, ser de cualquier signo, sin embargo, las observaciones actuales apuntan a que es positiva. La ecuación de evolución para $\frac{\partial R}{\partial t}$ puede, en principio, ser integrada, y la constante de integración fijada estableciendo $R = r$ en la hipersuperficie inicial ($t = 0$). Las dos funciones libres $F(r)$ y $f(r)$ pueden ser fijadas con los perfiles de densidad y velocidad iniciales a través de 120 y 119, respectivamente. Asumimos que estas dos funciones tienen la forma:

$$F(r) = F_0 r^3 + F_n r^{3+n} + \text{términos de orden superior} \quad (121)$$

$$f(r) = f_0 r^2 + f_{n_1} r^{2+n_1} + \text{términos de orden superior} \quad (122)$$

Donde hacemos que el primer término no nulo tenga datos iniciales regulares en la superficie $t = 0$ desde la que evoluciona el colapso.

La métrica exterior a la nube en colapso toma la forma de Schwarzschild-de Sitter,

$$ds^2 = -g dt^2 + g^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (123)$$

donde $g = 1 - (2M/r) - (\Lambda r^2/3)$. Observando las soluciones 118 y 123 en el límite r_b de la nube en colapso, se obtiene que $2M = F(r_b)$. El colapso puede revertirse, produciendo un rebote, eligiendo términos iniciales apropiados de masa y Λ , como se verá a continuación. Este comportamiento también puede entenderse analizando la curva del movimiento permitido 119.

Primero, se busca la posibilidad de soluciones globalmente regulares debido a la presencia de un término cosmológico. La ecuación 119, que gobierna la dinámica de las superficies colapsantes, puede ser escrita como:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2 = \frac{V(R, r)}{3R} \quad (124)$$

Donde $V(R, r)$ se define como:

$$V(R, r) = 3F(r) + 3f(r)R + \Lambda R^3 \quad (125)$$

Que es un análogo del potencial efectivo newtoniano que gobierna el movimiento de las superficies. La región de movimiento permitida corresponde a $V \geq 0$, ya que tiene que darse la condición:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2 > 0 \quad (126)$$

Si tenemos un estado inicialmente colapsante como el punto de partida, ocurrirá un rebote si $\frac{\partial R}{\partial t} = 0$ para alguna superficie dada antes de que dicha se vuelva singular. Esto puede suceder solo si la ecuación:

$$3R^2 \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 = V(R, r) = 0 \quad (127)$$

tiene dos raíces reales positivas. A continuación, es conveniente definir la cantidad $\zeta(t, r) = R/r$. La ecuación 125 puede entonces ser escrita como:

$$V = 3F + 3f\zeta r + \Lambda\zeta^3 r^3 \quad (128)$$

que es una ecuación cúbica con tres raíces. Además, si todas las raíces son reales, al menos una de ellas tiene que ser positiva y al menos una negativa. Nótese que $V(R = 0, r > 0) = 3F > 0$, por lo tanto, cualquier región regular entre $R = 0$ y el primer cero de la ecuación, que en este caso se da con $\zeta_1 > 0$, siempre se vuelve singular durante el colapso, ya que queda atrapada entre $\zeta = 0$ y $\zeta > 0$. Por otra parte, si existen dos raíces reales y positivas de $V = 0$, como la región entre dos raíces reales positivas es una región prohibida, las capas de materia más externas no pueden alcanzar determinadas regiones. Por este motivo, las capas colapsantes deben rebotar, produciendo una expansión continua. Además, no es posible obtener soluciones oscilantes ya que una de las raíces reales ha de ser negativa y la región entre dos raíces reales positivas, como ya hemos indicado antes, está prohibida.

Aquí obtenemos una diferencia fundamental con respecto al caso $\Lambda = 0$, ya que en este caso no es posible que suceda un rebote, el único desenlace posible de un colapso de nube de polvo es una singularidad. Esto se debe a que la cúbica se reduce a una ecuación lineal cuya solución viene dada por $R = R_{max}(r) = \frac{-F}{f}$. Por tanto, solo en el caso donde $f < 0$ puede darse que $\frac{\partial R}{\partial t} = 0$ para $R > 0$, lo que corresponde a un radio máximo para una superficie dada, es decir, incluso si el estado inicial es una expansión, una superficie dada alcanzará el radio máximo $R_{max}(r)$ para colapsar posteriormente.

Aquí hay varias características que vale la pena señalar y que tienen un significado físico interesante en cuanto a la dinámica del colapso. Primero, con un valor negativo de la constante cosmológica, el estado final de un colapso siempre es una singularidad, incluso si se comienza con una expansión inicial. Esto es esperable, ya que dicho valor solo contribuirá de manera positiva a la atracción gravitatoria de la materia, ayudando al colapso. Por otra parte, para una constante cosmológica positiva, independientemente de lo grande que sea el valor, hay un rango de datos iniciales donde el colapso necesariamente termina en una singularidad. Esto es contrario a la creencia, a veces expresada, de que una constante cosmológica positiva suficientemente grande siempre puede causar un rebote. A partir de lo anterior podemos deducir que puede haber un rebote solo si la densidad inicial es suficientemente baja para un valor positivo dado de Λ . Esto se debe a que, aunque el término cosmológico se vuelve dominante en grandes distancias, la gravedad domina en presencia de densidades más altas.

Por lo tanto, se puede ver que, aunque un rebote y una solución regular ocurren para un rango específico de los datos iniciales, para la mayoría del espacio de datos iniciales regulares, el colapso resulta en una singularidad. Mientras que para $\Lambda = 0$ se conoce en detalle la estructura de esta singularidad y cuándo será desnuda o cubierta, aún no hemos comprobado lo propio para el caso de $\Lambda > 0$.

Por simplicidad, analizaremos el caso $f(r) = 0$, pero esperamos un comportamiento similar en otros casos. La ecuación 119 se puede escribir como:

$$t - t_c(r) = \pm \int \left(\frac{F(r)}{R} + \frac{\Lambda R^2}{3} \right)^{-1/2} dR \quad (129)$$

donde $t_c(r)$ es una función de integración que representa el tiempo en el que una capa dada con valor de radio r , se vuelve singular. La partes positiva y negativa corresponden, respectivamente, a las soluciones de expansión y colapso. por lo que consideraremos solamente la rama negativa.

La integral anterior se puede escribir como una serie en R en torno al origen de la siguiente manera:

$$t - t_c(r) = -\frac{2}{3} \frac{R^{3/2}}{\sqrt{F(r)}} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m-1)!!}{2^m (2m+1)m!} \left(\frac{\Lambda R^3}{3F(r)} \right)^m \right] \quad (130)$$

Usando la libertad de escalado, podemos establecer $R(t=0, r) = r$. Esto determina $t_c(r)$ como:

$$t_c(r) = t_{sf}(r) = \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{\sqrt{F(r)}} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m-1)!!}{2^m (2m+1)m!} \left(\frac{\Lambda r^3}{3F(r)} \right)^m \right] \quad (131)$$

Y de las expresiones anteriores podemos deducir:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial r} R + \left(1 - \frac{r \frac{\partial F}{\partial r}}{3F} \right) \left(\frac{3F + \Lambda R^{3/2}}{3F + \Lambda r^{3/2}} \right)^{1/2} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} \quad (132)$$

Por lo tanto, la condición $\frac{\partial R}{\partial r} > 0$, que implica que las superficies colapsantes no se cruzan, puede ser satisfecha si $\frac{\partial F}{\partial r} > 0$ y $1 - (r \frac{\partial F}{\partial r} / 3F) > 0$, lo que significa que la masa total dentro de una superficie es una función creciente de r , mientras que la densidad de materia es decreciente. Además, la expresión anterior también proporciona las condiciones para que no ocurran cruces de capas en el colapso con una constante cosmológica nula.

Para analizar la naturaleza de la singularidad central, seguiremos el método desarrollado por Joshi y Dwivedi en el artículo [23], que da una condición necesaria y suficiente para la visibilidad local de la singularidad. El objetivo principal aquí es ver si existen geodésicas nulas radiales con origen en la singularidad, con un vector tangente positivo bien definido. La ecuación para estas geodésicas nulas para $f(r) = 0$ viene dada por:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\partial R}{\partial r} \quad (133)$$

Por conveniencia, tomando $u = r^\alpha$, podemos escribir la siguiente ecuación para las geodésicas en el plano (u, R) :

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{\frac{\partial R}{\partial r}}{\alpha r^{\alpha-1}} \left(1 - \sqrt{\frac{F}{R} + \frac{\Lambda}{3} R^2} \right) \quad (134)$$

Donde $\alpha \geq 1$ es una constante que determinaremos más adelante.

Si definimos $X = R/u$, podemos verificar que las geodésicas tienen una tangente bien definida en $r = 0, R = 0$ cuando t tiende a $t_s(0)$. Usando la regla de L'Hôpital:

$$X_0 = \lim_{u \rightarrow 0, R \rightarrow 0} \frac{R}{u} = \lim_{u \rightarrow 0, R \rightarrow 0} \frac{\partial R}{\partial u} = \lim_{u \rightarrow 0, R \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial R}{\partial r}}{\alpha r^{\alpha-1}} \left(1 - \sqrt{\frac{F}{R} + \frac{\Lambda}{3} R^2} \right) = U(X_0, 0) \quad (135)$$

donde el subíndice 0 denota el valor de las cantidades en $u = 0$. La constante α se puede fijar de manera única exigiendo que $\frac{\partial R}{\partial r} / r^{\alpha-1}$ sea no nulo y finito [23]. En este caso, $\frac{\partial R}{\partial r} / r^{\alpha-1}$ permanecerá finito si elegimos $\alpha = 1 + 2n/3$, y la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\frac{1}{\alpha} \left[X - \frac{nF_n}{3F_0} \frac{1}{\sqrt{X}} \right] \left[1 + \sqrt{\frac{\lambda_0}{X}} \right] = 0 \quad (136)$$

donde $\lambda = F/u$ y λ_0 es el límite cuando $r \rightarrow 0$. Si existe una raíz positiva real X_0 , entonces habrá al menos una geodésica nula emergiendo de la singularidad en $(R = 0, u = 0)$ con el vector $X = X_0$ como tangente en el plano (u, R) .

Cuando $n < 3$, $\alpha < 3$ y por lo tanto $\lambda_0 = 0$, la ecuación anterior se reduce a:

$$X_0^{3/2} = - \frac{F_n}{2F_0 \sqrt{1 + \frac{\Lambda F_0}{3}}} \quad (137)$$

Y esta ecuación siempre tiene una raíz positiva real. Por lo tanto, la existencia de singularidades desnudas es estable frente a la adición de un término cosmológico positivo.

Para $n > 3$, se tiene que $\lambda_0 = \infty$, y entonces no puede haber una raíz positiva real en estos casos. La singularidad final estará entonces oculta detrás del horizonte de eventos.

En conclusión, este análisis muestra que es posible cubrir una parte del espectro de singularidades desnudas en la rama crítica correspondiente de soluciones en los modelos TBL, cuando se introduce un término cosmológico positivo. Sin embargo, la singularidad desnuda del colapso de polvo nunca se elimina, independientemente del valor de Λ . En este sentido, la singularidad desnuda sigue siendo estable a la introducción de un término cosmológico.

3.2. Topología y geometría global del espacio-tiempo

3.2.1. Estructura causal

La relación causal entre diferentes eventos en el espacio-tiempo está determinada por la métrica Lorentziana, que establece los conos de luz pasados y futuros para cada evento. A nivel local, los conos de luz se comportan como dicta la teoría de la relatividad especial, es decir, se puede considerar una métrica Minkowskiana. Sin embargo, el comportamiento global de los conos de luz depende de la elección del tensor métrico global. Podría llegar a darse por tanto el caso de que a gran escala puedan violarse principios básicos de causalidad como la existencia de curvas temporales cerradas. Estos eventos dependerán de la elección global de la topología de la variedad diferenciable, de la que las ecuaciones de Einstein no aportan ninguna pista, ya que únicamente gobiernan la dinámica local de la materia y la curvatura espacio-temporal, pero no contemplan la topología ni la estructura causal del universo, que tienen grandes implicaciones en su comportamiento y evolución a gran escala. Para escoger estas condiciones globales, debemos obedecer varias condiciones de razonabilidad física para representar el universo observado. Por ejemplo, el espacio-tiempo debe tener una estructura causal regular, es decir, ninguna señal puede viajar más rápido de la velocidad de la luz.

Los fuertes campos gravitatorios que surgen ya sea en cosmología o colapso gravitacional, debido a la aparición de singularidades, también pueden tener implicaciones significativas causales y topológicas para la estructura del espacio-tiempo en el entorno de estas regiones gravedad intensa. A continuación discutiremos esta estructura causal y su relación con la topología del espacio-tiempo.

Definición 3.1. *Se dice que un evento p precede causalmente a un evento q , denotado por $p < q$, si existe una curva temporal o nula en el futuro que va desde p a q . En particular, si la curva es temporal, se dice que el evento p precede cronológicamente a q , y se denota por $p \ll q$.*

Definición 3.2. El **futuro cronológico** $I^+(p)$ de p es el conjunto de todos los puntos q tales que $p \ll q$, y podemos definir el pasado cronológico $I^-(p)$ de manera análoga. De este modo:

$$I^+(p) = \{q \in M \mid p \ll q\} \quad (138)$$

$$I^-(p) = \{q \in M \mid q \ll p\} \quad (139)$$

El **futuro y pasado causales** para p se definen de manera similar, con la notación “ $<$ ”:

$$J^+(p) = \{q \in M \mid p < q\} \quad (140)$$

$$J^-(p) = \{q \in M \mid q < p\} \quad (141)$$

Las relaciones \ll y $<$ son transitivas, y se tiene que, dados tres eventos p , q y r :

$$p \ll q, q < r \Rightarrow p < r \quad (142)$$

$$p < q, q \ll r \Rightarrow p < r \quad (143)$$

Definición 3.3. Se dice que un espacio-tiempo M es **cronológico** si no existen curvas temporales cerradas, es decir, si:

$$p \notin I^+(p) \quad \forall p \in M \quad (144)$$

Asimismo, se dice que M es **causal** si no existen curvas cerradas temporales ni nulas.

Aunque un espacio-tiempo puede ser causal, puede darse el caso de que esté al borde de violar la causalidad. Consideremos, por ejemplo, una variedad diferenciable (M, g) dada por:

$$ds^2 = dt dx + t^2 dx^2 \quad (145)$$

Y veamos el comportamiento de los rayos de luz mediante las geodésicas nulas, dadas por:

$$\frac{dt}{dx} = -t^2 \quad (146)$$

En $t = 0$, $\frac{dt}{dx} = 0$, y por lo tanto, uno de los brazos del cono de luz se encontrará en el eje x . En esta situación, el espacio-tiempo es causal, pero una curva nula desde con origen en p puede entrar en entornos arbitrariamente pequeños de p . Además, se tiene que, para eventos distintos p y q a lo largo del eje x , $I^+(p) = I^+(q)$. Para evitar esta patología causal, podemos imponer la causalidad fuerte ([24]), que establece que para todos los eventos $p \in M$, cada entorno de p contiene otro entorno de p tal que ninguna curva temporal o nula en M lo atraviesa más de una vez. Si la causalidad fuerte se viola en p , entonces hay curvas temporales o nulas en entornos de p que se acercan arbitrariamente a intersectarse consigo mismas.

La causalidad fuerte es la que determina la topología del espacio-tiempo, ya que la inducida por la condición de causalidad fuerte es la topología de Alexandrov, donde, en caso que nos ocupa, los abiertos son de la forma:

$$\{I^+(p) \cap I^-(q) \mid p, q \in M\} \quad (147)$$

Y además es Hausdorff, una condición físicamente razonable para el espacio-tiempo. Deducimos entonces que las relaciones causales determinan la estructura topológica del espacio-tiempo. Además, la causalidad fuerte impone una condición de regularidad en M , en la que ninguna curva temporal o nula γ puede estar total o parcialmente contenida en el futuro en ningún conjunto compacto, es decir, no puede entrar y permanecer en él, o entrar y salir continuamente. Por tanto, en un espacio tiempo fuertemente causal, la curva debe ir al infinito o terminar en

una singularidad espacio-temporal, es decir, en cualquier caso, debe tender al límite del espacio-tiempo.

Aunque (M, g) sea fuertemente causal, es posible crear ejemplos donde una pequeña perturbación en las componentes del tensor métrico g_{ij} da lugar a curvas cerradas de tipo tiempo. Por lo tanto, un espacio-tiempo fuertemente causal podría todavía estar al borde de violar esta condición. Podemos suponer que la relatividad general es una aproximación clásica de alguna teoría cuántica de la gravedad aún desconocida en la cual una medición precisa de los componentes métricos en un único evento no sería posible. Por lo tanto, uno desearía que la causalidad del espacio-tiempo se preservase bajo pequeñas perturbaciones en la métrica. Esto se logra imponiendo que el espacio-tiempo sea establemente causal. Un espacio-tiempo establemente causal admite la existencia de una función de tiempo global, es decir, un campo escalar suave f para el que el gradiente es siempre un vector de tipo temporal. Dicha función asigna el valor “tiempo” a cada punto de la variedad de forma que el tiempo es estrictamente creciente a lo largo de todas las curvas temporales, que es la propiedad que uno desearía para una asignación global de coordenadas temporales en el espacio-tiempo. No obstante, esta función tiempo no es única.

3.2.2. Hiperbolicidad global

Definición 3.4. *Se dice que una variedad diferenciable espacio-temporal (M, g) es **globalmente hiperbólica** si el conjunto $J^+(x) \cap J^-(y)$ es compacto para todos los puntos $x, y \in M$ y además M es causal.*

Se tiene que para un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, los conos de luz son necesariamente cerrados, lo que confiere a la variedad una estructura fuertemente y establemente causal, obteniendo un comportamiento muy regular, usado en teorías como las soluciones cosmológicas de Friedmann-Robertson-Walker.

Conocer la geometría global del espacio-tiempo puede ser clave para formular la hipótesis de censura cósmica, dado que una estructura globalmente hiperbólica implica la ausencia de singularidades desnudas, ya que si se da una de ellas, la estructura determinista de un espacio-tiempo hiperbólico se rompe.

3.3. Hipótesis de Penrose

3.3.1. Generalidad y estabilidad de singularidades

La dificultad clave para abordar la generalidad y estabilidad de las singularidades desnudas es que no existen criterios bien definidos o formalismos disponibles en la teoría general de la relatividad para probarlas. No existe una manera única de analizar esta cuestión y, muchas veces, la propia física de la situación es la que guía el modo de abordar el problema. Los teoremas de singularidad establecen la existencia de singularidades espacio-temporales en forma de geodésicas nulas y temporales incompletas (es decir, que tienen uno de sus extremos en una región que no pertenece al espacio-tiempo, mientras que el otro puede encontrarse en el infinito), tanto para el colapso gravitacional como para la cosmología. Estos teoremas, sin embargo, no nos proporcionan información sobre la naturaleza de las singularidades, como la cuestión de si serán cubiertas por un horizonte de eventos o si pueden estar causalmente conectadas a observadores externos. No obstante, para avanzar en la teoría de los agujeros negros, habitualmente se asume la conjetura de censura cósmica, que establece que las singularidades en el colapso están necesariamente ocultas tras un horizonte de eventos.

Cabe preguntarse por la generalidad de los resultados asociados a singularidades desnudas que introdujimos en el capítulo anterior. Algunas soluciones como la de Oppenheimer-Snyder no permiten la formación de singularidades desnudas pero, sin embargo, bajo ciertas condiciones, los modelos de Vaidya y TBL sí contemplan escenarios donde puede darse un fenómeno de este

tipo. Debemos señalar que las situaciones de colapso gravitacional estudiadas hasta ahora, a excepción de la de Kerr, son esféricamente simétricas, por lo que una posibilidad es que las singularidades desnudas sean el resultado matemático de dichas imposiciones de regularidad, sin correspondencia con la realidad física del universo. No obstante, hay resultados que muestran que las singularidades desnudas ocurren también en algunos modelos de colapso no esférico. En cualquier caso, si la hipótesis de censura cósmica es correcta, debe cumplirse también en situaciones con simetría esférica. En el contexto de los modelos TBL, por ejemplo, podemos obtener un gráfico comparando la densidad inicial y los perfiles de velocidad que nos indica en qué situaciones obtenemos un agujero negro y en cuáles la singularidad es desnuda en el instante inicial, permitiendo la relación causal con el exterior. Tomando las funciones de masa $M = M(r)$ y energía (relacionada con la velocidad radial de cada capa) $E = E(r)$, y desarrollándolas en serie de potencias con r alrededor del origen, denotando M_i y E_i a los respectivos coeficientes, podemos tomar como ejemplo de generalidad de singularidades el gráfico del artículo [25] que, manteniendo constantes el resto de coeficientes, expresa M_3 en función de E_5 :

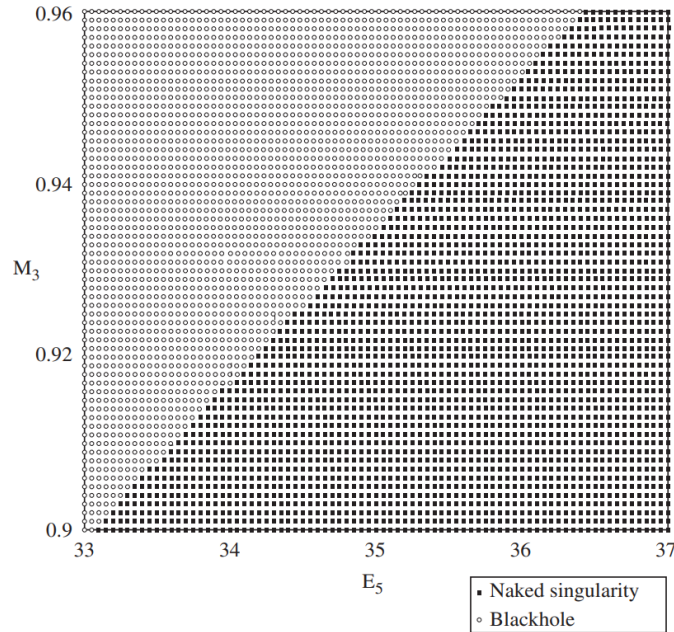


Figura 1: Resultados de agujero negro o singularidad desnuda en un colapso de polvo en función de los perfiles iniciales de masa y velocidad.

Ahora, para discutir la estabilidad de estas singularidades, podemos caracterizarla de la siguiente manera: suponemos que un espacio-tiempo (M, g) posee una propiedad, por ejemplo, que es causal, es decir, no admite ninguna curva nula o temporal cerrada. Para que esta propiedad sea estable el requisito sería que en un entorno próximo a (M, g) se mantuviese dicha propiedad. Para cualquier métrica \bar{g} próxima a g en la misma variedad diferenciable, (M, \bar{g}) debería mantener la propiedad de ser causal. De forma similar, podemos estudiar la estabilidad de las singularidades desnudas. Si un espacio-tiempo (M, g) posee una singularidad desnuda pero ningún (M, \bar{g}) próximo la conserva, entonces esa singularidad no es estable. Ahora debemos hacer esta noción de proximidad más precisa introduciendo una distancia asociada a una cierta topología en el espacio de todas las métricas \bar{g} para un M dado, definiendo bolas abiertas tales que para un ϵ dado, la bola esté formada por todas las métricas \bar{g} tales que $|g_{ij} - \bar{g}_{ij}| < \epsilon$. Podemos extender esta noción de distancia también a las primeras y segundas derivadas de la métrica, imponiendo a la topología ser por lo menos de clase \mathcal{C}^2 , ya que en relatividad general el tensor métrico debe ser por lo menos de clase \mathcal{C}^2 . No hay unicidad a la hora de definir una topología en el espacio de las métricas, la dificultad radica, por tanto, en escoger una topología adecuada con las condiciones físicas del problema a analizar y que esa topología pueda dar lugar a conjuntos de medida no nula con una determinada propiedad. El procedimiento típico suele basarse en someter al sistema de estudio a diferentes perturbaciones en la métrica y comprobar su comportamiento. Por ejemplo,

en el caso del colapso gravitatorio de una nube de polvo homogénea, habría que comprobar que el estado final permanece inalterado si se introducen pequeñas inhomogeneidades, o si se perturba la solución original para introducir ligeras presiones no nulas en el estado inicial.

3.3.2. Hipótesis de censura cósmica

Como ya hemos mencionado anteriormente, la física de los agujeros negros está siendo desarrollada asumiendo la hipótesis de censura cósmica, ya que, entre otras cosas, considerando un escenario genérico de colapso gravitatorio, la propia existencia de los agujeros negros requeriría que esta hipótesis se cumpliera (ver [22]). Esta conjetura, a día de hoy, no ha sido formulada de manera precisa por falta de una teoría más general sobre singularidades y agujeros negros, por lo tanto tampoco ha sido posible demostrarla, ya que no se conocen las condiciones a satisfacer. La afirmación de que todas las singularidades deben estar escondidas en agujeros negros, causalmente desconectadas de observadores en el infinito, no es suficientemente rigurosa, aunque deja clara la idea de la hipótesis. En una situación genérica, de hecho, según la teoría actual disponible, en principio es posible escoger un espacio-tiempo que contenga una singularidad desnuda, que sería solución de las ecuaciones de Einstein siempre que se cumpliera:

$$T_{ij} = \frac{1}{8\pi} \left(\mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{ij} \right) \quad (148)$$

Por lo tanto, como mínimo, se requieren ciertas condiciones sobre el tensor de energía-momento, como una condición de energía, para asegurar la ausencia de singularidades desnudas. Sin embargo, resulta que obtener una caracterización exacta de las restricciones que deben ser impuestas en los campos de materia para proporcionar una versión viable de la hipótesis de censura cósmica es una tarea extremadamente difícil y, como tales, no existen condiciones específicas disponibles en la actualidad. En otras palabras, no se han podido asegurar restricciones plausibles para asegurar alguna versión demostrable de la conjetura de censura.

Los requisitos en la física de los agujeros negros han llevado a varias formulaciones diferentes de la hipótesis de censura cósmica (ver [26] para más detalle). La versión conocida como *censura cósmica débil* se refiere a los espacios asintóticamente planos, aquellos que son de Minkowski lejos de la fuente, y las geodésicas nulas alcanzan el llamado “infinito nulo” a distancia infinita. La censura débil postula que las singularidades del colapso gravitacional no pueden influir en eventos cercanos al infinito nulo futuro, denotado por I^+ .

La otra versión, llamada *censura cósmica fuerte*, es un requerimiento general de predictibilidad en cualquier espacio-tiempo, indicando que todos los espacios-tiempo físicamente razonables deben ser globalmente hiperbólicos (ver, por ejemplo, [27], [28]).

La conjetura de censura débil no permite que las influencias causales desde la singularidad lleguen a regiones asintóticas en el espacio-tiempo a un observador en el infinito, es decir, la singularidad no puede ser globalmente desnuda. Sin embargo, podría ser localmente desnuda en el sentido de que un observador dentro del horizonte de eventos y en el interior del agujero negro posiblemente podría recibir partículas o fotones desde la singularidad.

Claramente, los requerimientos deben ser formulados de una forma más precisa. Por ejemplo, los campos de materia deberían satisfacer todas las condiciones de energía estables en el infinito y la definición exacta de campos de materia “físicamente razonables” debe ser especificada. De hecho, en cuanto a la hipótesis de censura cósmica en general, es un problema importante en sí mismo encontrar una formulación rigurosa matemática y físicamente satisfactoria.

A continuación analizaremos varias restricciones físicas en un escenario realista de colapso gravitatorio y discutiremos las implicaciones que tienen para determinar el destino final del colapso. En particular, la motivación es descartar una singularidad desnuda como el estado final imponiendo tales condiciones, ya que hasta ahora no hemos podido descartar una singularidad desnuda con los análisis realizados en el resto de la memoria. Sin embargo, esto también puede llevarnos

a la conclusión de que, de hecho, se desarrollan singularidades desnudas en amplias clases de escenarios de colapso gravitacional bajo condiciones físicas realistas, por lo menos en la teoría.

- Debe satisfacerse una condición de energía razonable

Esta es una de las condiciones básicas asumidas en la descripción de la gravedad clásica, y debe ser satisfecha por los campos de materia que constituyen la estrella, al menos hasta que el colapso haya avanzado hasta tal punto que entre en una fase gobernada por la gravedad cuántica, etapa en que la descripción clásica comienza a fallar de una manera u otra.

Como se señaló anteriormente, si se permiten campos de materia completamente arbitrarios, es bastante fácil producir singularidades desnudas. Así, parece evidente que en el colapso gravitatorio deben considerarse escenarios donde los campos de materia satisfagan condiciones físicas razonables, condición que cumplen todos los campos clásicos observados.

Sin embargo, a pesar de la imposición de esta condición, existen varias clases de modelos donde la materia colapsante cumple con una condición de energía adecuada y, aun así, el colapso lleva a una singularidad desnuda como estado final. De hecho, incluso hay clases de modelos de colapso donde satisfacer la condición de energía parece estar ayudando a la formación de la singularidad desnuda como estado final del colapso, lo que a su vez hace que la singularidad desnuda sea físicamente más probable. Un ejemplo de esto sería el colapso auto-similar esféricamente simétrico de un fluido perfecto, aunque en esta memoria no hemos desarrollado modelos autosimilares, podemos dar unos pequeños apuntes. La forma general de la métrica sería, como veíamos en la expresión 65:

$$ds^2 = -e^{2\nu(r,t)} dt^2 + e^{2\psi(r,t)} dr^2 + R^2(t,r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (149)$$

donde las funciones métricas dependen de $X = t/r$ debido a la autosimilaridad. Las geodésicas nulas salientes [29] pueden emerger desde esa singularidad, que resulta estar relacionada con las distribuciones de densidad y presión en el espacio-tiempo a través de las ecuaciones de Einstein, más concretamente, se tiene que:

$$r = D(X - X_0)^{2/(H_0-2)} \quad (150)$$

Aquí, H_0 es el valor límite de la cantidad $H = (\rho + p)e^{2\psi}$, con ρ y p correspondientes a la densidad y presión, y $D > 0$ es la constante de integración. La condición de energía débil es entonces equivalente a la afirmación de que $H_0 > 0$, lo cual asegura que, con la ecuación anterior, familias de geodésicas nulas emergen de la singularidad desnuda en $t = 0$, $r = 0$, que es un nodo en el plano (t, r) , en lugar de curvas individuales aisladas.

Debe entenderse que las ecuaciones de Einstein no requieren ni imponen una condición de energía en las distribuciones de materia. Es un criterio motivado puramente por consideraciones físicas. Esto entonces sugiere otra posibilidad: si en alguna de las últimas etapas de un colapso las condiciones de energía se violan a través de cualquier agente (que es posible considerando las desconocidas condiciones extremas de dichos escenarios), entonces puede haber una esperanza de preservar la censura cósmica. Más concretamente, en la ecuación para las geodésicas nulas, si las condiciones de energía se violan, esto correspondería a un valor negativo de H_0 , entonces no habría familias de geodésicas nulas salientes desde la singularidad, y la censura se preservaría.

- El colapso debe desarrollarse a partir de datos iniciales regulares

Esta es una de las restricciones físicas más importantes necesarias para cualquier versión posible de una declaración de censura cósmica. En general, las densidades, presiones y otras cantidades físicas deben ser finitas y regulares en la superficie inicial desde la que el colapso evoluciona. En general, esto se asegura imponiendo las condiciones usuales de diferenciabilidad en las funciones involucradas, junto con los requisitos de finitud y regularidad. Aun así, resulta que dado un conjunto de datos iniciales de materia, aún hay funciones libres disponibles para elegir en las ecuaciones de Einstein, sujetas a la condición de energía débil

y continuidad adecuada con el exterior, de modo que la evolución aún puede terminar en los resultados de agujero negro o singularidad desnuda.

- Las singularidades fruto de colapsos realistas deben ser gravitacionalmente fuertes

Este ha sido uno de los requisitos más útiles y explorados para desarrollar una formulación para la conjetura de censura cósmica. La idea es que cualquier singularidad que se desarrolle a partir de un colapso realista debe ser físicamente seria en varios aspectos, incluyendo divergencias pronunciadas en todas las cantidades físicas tales como densidades, presiones, curvaturas y otras, al menos a nivel clásico. Un requisito típico para que la singularidad sea gravitacionalmente fuerte es, aparte del de las divergencias, que las fuerzas de marea también deben diverger y todos los volúmenes físicos deben ser aplastados a volumen nulo en el límite de aproximación a la singularidad. Una condición suficiente para que esto suceda es [30]:

$$R_{ij}V^iV^j \propto \frac{1}{k^2} \quad (151)$$

donde k es el parámetro afín a lo largo de las geodésicas nulas y temporales que emergen de la singularidad, encontrándose la singularidad en $k = 0$. V^i es el vector tangente a estas curvas.

La singularidad que se desarrolla dentro del agujero negro formado por el colapso estándar de una nube de polvo investigado por Oppenheimer y Snyder[14] es gravitacionalmente fuerte en el sentido anterior. Ahora bien, si se pudiera establecer que, siempre que se formen singularidades desnudas en el colapso gravitatorio, estas son siempre gravitacionalmente débiles, en el sentido de que divergencias importantes como las anteriores no están presentes en el límite de aproximación a la singularidad, entonces tales singularidades podrían ser eliminadas del espacio-tiempo, y podría ser posible extender el espacio-tiempo de forma continua a través de dichas singularidades. Estas singularidades desnudas evitables ya no deberían ser consideradas genuinas físicamente, y podríamos avanzar hacia la censura cósmica en alguna forma, como que una singularidad desnuda podría desarrollarse en un colapso gravitatorio siempre y cuando fuese gravitacionalmente débil y evitable. Esta posibilidad ha sido investigada a fondo, y se ha llegado a la conclusión de que las singularidades desnudas gravitacionalmente fuertes efectivamente resultan del colapso a partir de datos iniciales regulares (incluyendo perfiles de densidad analíticos suaves), para varias formas razonables de materia como polvo, fluidos perfectos, colapsos de radiación de Vaidya y varias otras formas de materia que satisfacen condiciones de energía adecuadas, por lo que esta tampoco es una vía prometedora, en principio.

- Los campos de materia deben ser suficientemente generales

Si una singularidad desnuda se formara en el colapso para ciertas formas especiales de materia, como polvo o radiaciones colapsantes solamente, no sería de mucho interés. Por ejemplo, el papel de la presión no puede ser subestimado en un colapso realista, y sería bueno saber si la materia con presión necesariamente daría lugar únicamente a un agujero negro al sufrir un colapso gravitacional. Si este fuera el caso, los campos de materia que dan lugar a una singularidad desnuda podrían descartarse por físicamente irreales al formular la censura, incluso si satisfacen una condición de energía o el colapso se desarrolla a partir de datos iniciales regulares.

Sin embargo, ahora se sabe que las singularidades desnudas no son especiales a ninguna forma particular de campo de materia, y también ocurren para un amplio rango de ecuaciones de estado. El colapso puede ser estudiado para una forma general de materia, los llamados campos de materia tipo I (todas las formas físicas conocidas de materia, como polvo, fluidos perfectos y campos escalares sin masa se incluyen en esta clase), sujetos a la condición de energía débil. El resultado es que, dada una distribución arbitraria pero regular de materia en la superficie inicial, siempre hay evoluciones disponibles a partir de estos datos iniciales que resultarían en un agujero negro o una singularidad desnuda, dependiendo de la elección de funciones libres disponibles en las ecuaciones de Einstein. Más específicamente, en un colapso esféricamente simétrico con un campo de materia tipo I general, dada la distribución de densidad y los perfiles de presión radial y tangencial en

la superficie inicial desde la cual se desarrolla el colapso, es posible elegir la función libre que describe las velocidades de las capas que caen de tal manera que el producto final sea bien un agujero negro o bien una singularidad desnuda.

- La nube colapsante debe obedecer una ecuación de estado realista

A veces se conjetura que, aunque las singularidades desnudas puedan desarrollarse para campos de materia general, deben desaparecer una vez que se elija una ecuación de estado físicamente razonable y realista para la nube colapsante.

Este es un argumento muy difícil de formular. Primero, las singularidades desnudas se forman en el colapso de varias ecuaciones de estado bien conocidas, como el polvo, los fluidos perfectos o las capas de radiación colapsantes. Segundo, es bastante difícil hacer suposiciones sobre el estado de la materia, o la ecuación de estado realista dentro de un cuerpo colapsante, como una estrella masiva que está en etapas avanzadas de colapso. Tercero, la nube colapsante puede no tener una sola ecuación de estado, que podría estar cambiando a medida que evoluciona el colapso. Ha habido en este sentido sugerencias de que la materia de quarks extraños podría ser una buena aproximación a la estrella colapsante en sus etapas finales, debiendo examinar el final del colapso con una geometría de Vaidya, que nuevamente resulta en agujero negro o singularidad desnuda, como de costumbre. Por lo tanto, tal elección de ecuación de estado no elimina las singularidades desnudas.

En el otro extremo, como se mencionó anteriormente, también hay argumentos como los dados por Hagerdorn y Penrose, que expresan que la ecuación de estado en las etapas finales del colapso puede aproximarse mucho a la del polvo. En otras palabras, a densidades cada vez más altas, la materia puede comportarse cada vez más similar a una nube de polvo. En tal caso, la situación del colapso del polvo, que ha sido investigada bastante a fondo, implicaría que tanto las fases de agujero negro como de singularidad desnuda se desarrollarían en el colapso gravitatorio, dependiendo de las distribuciones iniciales de densidad y velocidad.

Una característica interesante es que, aunque existen varias ecuaciones de estado ampliamente utilizadas y familiares que resultan en la formación de singularidades desnudas como el destino final del colapso, todavía no hay una sola ecuación de estado disponible hasta ahora que asegure necesariamente que el producto final será solo un agujero negro. En esta situación, es bastante posible que la física que causa los estados finales del colapso no esté directamente relacionada con la ecuación de estado o la forma de la materia que colapsa.

Una alternativa más prometedora podría ser trabajar con una representación bastante diferente de la materia, como la dada por la descripción estadística de Einstein-Vlasov (ver por ejemplo, [31]).

- Toda radiación de una singularidad desnuda debe estar infinitamente desplazada al rojo

En ciertos casos de colapsos de polvo que resultan en una singularidad desnuda, se observa que el desplazamiento al rojo a lo largo de las geodésicas nulas que emergen de la singularidad desnuda diverge en el límite de aproximación a la singularidad. Esto da lugar a la posibilidad de que, incluso si se forma una singularidad desnuda en el colapso, no podría escapar energía de ella. En este sentido, la singularidad desnuda, de formarse, podría ser invisible para cualquier observador externo a todos los efectos prácticos. Por supuesto, debe tenerse en cuenta que incluso si esto es generalmente cierto, no influye en la hipótesis de censura cósmica, dado que las geodésicas emergentes seguirían existiendo.

- ¿La gravedad cuántica eliminará las singularidades desnudas?

A veces se argumenta que, después de todo, la ocurrencia de singularidades es un fenómeno clásico, y que si son desnudas o cubiertas no debería ser relevante. La gravedad cuántica, una teoría final en la que no debería haber singularidades, las eliminaría definitivamente. Es posible que en una teoría adecuada de gravedad cuántica, las singularidades se desvanezcan (aunque este resultado no se ha obtenido por el momento), pero también hay indicios de que en la gravedad cuántica las singularidades podrían no desaparecer completamente. Sin embargo, el verdadero problema es si las regiones de gravedad extremadamente fuerte formadas debido al colapso gravitacional son visibles para observadores lejanos o no. El

colapso ciertamente sucede de manera clásica, hasta que la gravedad cuántica comienza a gobernar la situación en escalas del orden de la longitud de Planck. Es la visibilidad, o no, de tales regiones lo que está en discusión.

En el caso de que se desarrolle un agujero negro en el colapso de un objeto de tamaño finito como una estrella masiva, tales regiones de gravedad fuerte deben estar necesariamente ocultas detrás de un horizonte de eventos, lo que ocurriría mucho antes de que las condiciones físicas se volvieran extremas. Entonces, los efectos cuánticos, incluso si causan cambios cualitativos más cerca de la singularidad, no tendrían consecuencias físicas por falta de comunicación causal. Por otro lado, si la estructura causal fuera la de una singularidad desnuda, entonces las comunicaciones desde una región de curvatura extrema dominada por la gravedad cuántica serían posibles en principio, ya sea directamente o a través de efectos secundarios como las colisiones producidos en el medio circundante.

En conclusión, aunque se pudiese afirmar a ciencia cierta que la gravedad cuántica eliminase las singularidades, las regiones extremas seguirían estando en esa región, con la cuestión abierta de si dichas regiones serían visibles, por lo menos durante un instante, o estarían necesariamente tras un horizonte que se formaría previamente, como sugiere la conjetura de censura cósmica.

Todo esto clarifica la filosofía y la motivación básicas para la censura cósmica. Resulta que ninguna de las restricciones físicas o condiciones naturales ideadas hasta ahora son realmente capaces de asegurar la validez de la hipótesis de censura. De hecho, es posible concluir que las singularidades desnudas pueden desarrollarse realmente en situaciones de colapso gravitacional físicamente realistas. De ello se deduce que, en este sentido, sería recomendable explorar opciones más radicales si se quiere preservar la conjetura.

4. Conclusiones

En esta memoria hemos analizado las diferentes soluciones a las ecuaciones de Einstein aplicadas a colapso gravitatorio, distinguiendo los diferentes escenarios que, para cada geometría, dan lugar a un agujero negro o a una singularidad desnuda como resultado final del colapso. Primeramente, en el apartado 2.2.1, hemos comprobado que el horizonte de eventos en la métrica de Schwarzschild no es una singularidad real, sino un resultado matemático de singularidad aparente fruto de la elección del sistema de coordenadas esféricas. Tras esta introducción, hemos entrado en materia analizando todo lo relativo al desarrollo (2.3.1) y al estado final del colapso (81). Hemos visto que, en la solución de Oppenheimer-Snyder (2.4) el único resultado posible es la formación de un agujero negro, sin posibilidad de que el horizonte aparente se forme en un instante posterior a la singularidad. Sin embargo, en la solución de Vaidya (2.5) y en los modelos TBL (2.6) (que son una generalización del modelo de Oppenheimer-Snyder), sí que existen condiciones bajo las que se puede desarrollar una singularidad desnuda, en función de las distribuciones iniciales de energía y materia.

Por último, en el capítulo 3, estudiando la generalidad de la aparición singularidades desnudas como soluciones a un colapso, hemos llegado a las conclusiones de que la existencia de una constante cosmológica dificulta pero no elimina la posibilidad de la existencia de singularidades desnudas (3.1), por lo que siguen siendo físicamente razonables, al menos desde esa perspectiva. No obstante, la geometría y la topología globales del espacio-tiempo (3.2.2) juegan un papel fundamental en esta disquisición, ya que establecen condiciones prohibitivas para la existencia de este tipo de singularidades, aunque aún falta un largo trabajo hasta la obtención de una hipótesis de censura válida, ya que los intentos actuales de formulación (3.3.2) no proporcionan ninguna luz sobre el camino a seguir para demostrar la imposibilidad de formación de singularidades desnudas, apareciendo como resultados finales para un amplio espectro de geometrías y perfiles iniciales de energía y materia físicamente razonables.

A modo de reflexión final, es posible que la conjetura de censura cósmica no se cumpla a nivel clásico, pero puede sostenerse cuánticamente en algún sentido que aún está por descubrirse. Puede ser posible entonces que, para una estrella que va hacia el estado final de una configuración de singularidad desnuda, la creación de partículas inducida por la gravedad cuántica pueda tomar el control para crear una ráfaga de energía similar a un *jet*, despejando así la singularidad desnuda. Tal escenario sería de interés físico porque esto puede tener propiedades teóricas y observacionales bastante diferentes a las de un agujero negro, y podría hacer posible la comunicación desde regiones de gravedad extremadamente fuerte dominadas por la gravedad cuántica.

Referencias

- [1] Pankaj S. Joshi. *Gravitational collapse and spacetime singularities*. Cambridge University Press, 2007.
- [2] H. Stephani, D. Kramer, M. A. H. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, 2003.
- [3] Alberto A. García-Díaz. *Exact Solutions in Three-Dimensional Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2017.
- [4] Luis J. Garay. *Notas de Relatividad general*. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias físicas, departamento de física teórica e IPARCOS, 2023.
- [5] Diego Allan Reyna Rodríguez and tutorado por Dra. Elena Caceres. Trabajo de fin de grado: Construcción de la cuña causal en el espacio-tiempo schwarzschild-ads4+1. url: [Enlace en el repositorio de la U. de C.](#), 2017.
- [6] C.W.Misner, K.S.Thorne, and J.A.Wheeler. *Gravitation*. W.H.Freeman and company, 1973.
- [7] Vulcan (hypothetical planet). url: [Vulcano](#). Última visita el 22/5/2024.
- [8] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [9] Charles W. Misner and David H. Sharp. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Phys. Rev.*, 136:B571–B576, Oct 1964.
- [10] M. M. May and R. H. White. Hydrodynamical calculations of general relativistic collapse. *Phys. Rev.*, 141, 1232, 1966.
- [11] L. Landau and E. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. New York: Pergamon Press, 1975.
- [12] R. Goswami and P. S. Joshi. Spherical dust collapse in higher dimensions. *Phys. Rev. D.*, 69, 044002., 2004.
- [13] R. Goswami and P. S. Joshi. Cosmic censorship in higher dimensions. *Phys. Rev. D.*, 69, 104002., 2004.
- [14] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459, Sep 1939.
- [15] Papapetrou A. Formation of a singularity and causality. *New Delhi: Wiley Eastern*, 1985.
- [16] Pankaj S. Joshi. *Global Aspects in Gravitation and Cosmology*. Oxford University Press, 1993.
- [17] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning particle as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11, 237, 1963.
- [18] Matt Visser. *The Kerr spacetime: A brief introduction*. School of Mathematics, Statistics, and Computer Science Victoria University of Wellington, 2008.
- [19] David L. Wiltshire, Matt Visser, and Susan M. Scott. *The Kerr spacetime: Rotating black holes in general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [20] Diego Fernando Fonseca Moreno. Tutorado por José Robel Arenas Salazar. *Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Magister en Ciencias Físicas: Horizontes de eventos del espacio-tiempo de Kerr*. Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias, Departamento Física, Bogotá, Colombia, 2016.
- [21] Stephen Hawking and George Ellis. *The large scale structure of spacetime*. Cambridge University Press, 1975.

-
- [22] Roger Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Nuovo Cimento. Rivista*, 1969.
- [23] P. S. Joshi and I. H. Dwivedi. Naked singularities in spherically symmetric inhomogeneous tolman–bondi dust cloud collapse. *Phys. Rev. Lett.*, 1993.
- [24] Roger Penrose. *Techniques of Differential Topology in Relativity*. Philadelphia: AMS Colloquium Publications, SIAM, 1972.
- [25] Filipe C. Mena, Reza Tavakol, and Pankaj S. Joshi. Initial data and spherical dust collapse. *Physical Review D*, 62(4), July 2000.
- [26] Robert M. Wald. Gravitational collapse and cosmic censorship. *Enrico Fermi Institute and Department of Physics, University of Chicago*, 2008.
- [27] Robert P. Geroch and G. T. Horowitz. *Global structure of spacetimes*. United Kingdom: University Press., 1979.
- [28] S. W. Hawking and W. Israel. *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*. Univ. Pr., Cambridge, UK, 1979.
- [29] P. S. Joshi and I. H. Dwivedi. The structure of naked singularity in self-similar gravitational collapse: Ii. *Letters in Mathematical Physics*, 27(3):235–238, March 1993.
- [30] Pankaj S Joshi. *Global aspects in gravitation and cosmology*. Oxford University Press, 1994.
- [31] ALAN D. RENDALL. *THE NATURE OF SPACETIME SINGULARITIES*. WORLD SCIENTIFIC, November 2005.