



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Física**

**PRESIÓN DE DEGENERACIÓN EN ASTROFÍSICA**

**Autora: Marina Rodríguez Rodríguez**  
**Tutor: José Manuel Izquierdo Rodríguez**  
**Año 2024**

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Resumen	3
1.2. Abstract	3
<b>2. Equilibrio estelar</b>	<b>4</b>
2.1. Polítropos	9
2.2. Presión del gas	10
2.3. Presión de radiación	11
2.4. Presión de degeneración	14
2.4.1. Caso no relativista	15
2.4.2. Caso ultrarrelativista	16
2.5. Presión gravitatoria	17
2.6. Dominancia de cada tipo de presión en función de la etapa en la que se encuentra la estrella	17
2.7. Reacciones nucleares básicas	17
2.7.1. Ciclo protón-protón	18
2.7.2. La reacción pep	19
2.7.3. Ciclo del carbono (CNO)	19
2.7.4. Ciclo triple-alfa	19
2.7.5. Combustión estelar	20
<b>3. Evolución estelar</b>	<b>22</b>
3.1. Diagrama Hertzsprung-Russell (HR)	22
<b>4. Objetos compactos y colapso estelar</b>	<b>26</b>
4.1. Enanas blancas	26
4.2. Estrellas de neutrones	27
4.3. Colapso estelar	30
4.3.1. El límite de Chandrasekhar	30
4.4. Supernovas Ia	35
4.5. Estrellas de neutrones y agujeros negros	35
4.6. Conclusiones	37

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Resumen

En este trabajo se hace un análisis del equilibrio y la evolución de las estrellas hasta sus etapas finales. Se comienza con un estudio del equilibrio hidrostático con las ecuaciones que determinan la estructura estelar (ecuaciones de temperatura, presión, densidad y masa en función del radio), y se muestra el balance entre la presión gravitacional y la presión interna que permite a las estrellas mantener su estructura. Se detallan las reacciones nucleares básicas que mantienen una estrella frente a la gravedad. A continuación, haciendo uso del diagrama Hertzsprung-Russell, se analizan las etapas de la evolución estelar, detallando cómo las estrellas progresan desde su nacimiento, su fase en la secuencia principal y, por último, en sus estados finales, incluyendo enanas blancas, estrellas de neutrones o agujeros negros. Finalmente se aborda el tema de colapso estelar, explicando el papel de la presión de degeneración, y se muestra cómo esta presión impide un colapso gravitacional en las enanas blancas. Con esto se deriva el límite de Chandrasekhar, esencial en astrofísica, que es la masa máxima (aproximadamente 1.4 veces la del Sol) que una enana blanca puede tener antes de colapsar en una estrella de neutrones o un agujero negro.

### 1.2. Abstract

This work presents an analysis of the equilibrium and evolution of stars up to their final stages. It begins with the study of hydrostatic equilibrium, detailing the equations that determine the stellar structure (temperature, pressure, density, and mass equations as functions of radius) and the balance between gravitational pressure and internal pressure that allow stars to maintain their structure. The basic nuclear reactions that sustain a star against gravity are also discussed. Using the Hertzsprung-Russell diagram, the stages of stellar evolution are analyzed, detailing how stars progress from their birth, through their main sequence phase, and finally to their end states, including white dwarfs, neutron stars, or black holes. The topic of stellar collapse is then addressed, explaining the role of degeneracy pressure and how this pressure prevents gravitational collapse in white dwarfs. With this, the Chandrasekhar limit is derived, essential in astrophysics. This limit represents the maximum mass (approximately 1.4 times the mass of the Sun) that a white dwarf can have before collapsing into a neutron star or a black hole.

# Capítulo 2

## Equilibrio estelar

El equilibrio estelar es un concepto fundamental en astrofísica que describe el estado en el cual una estrella se mantiene estable a lo largo del tiempo, con las fuerzas gravitacionales que intentan colapsarla equilibradas por las fuerzas internas que la sostienen.

En el núcleo de una estrella, la fusión nuclear genera energía que produce una presión interna. Esta presión contrarresta la fuerza gravitacional creada por la propia masa de la estrella, manteniéndola en equilibrio. El equilibrio estelar se alcanza cuando estas dos fuerzas se equilibran de manera que la estrella permanece estable. El estudio del equilibrio estelar implica comprender cómo interactúan la masa, la temperatura, la composición química y otros factores internos de una estrella para mantener su estabilidad a lo largo de su vida. Este concepto es crucial para comprender la evolución y el destino final de las estrellas, así como para explicar fenómenos como la formación de agujeros negros, las supernovas y la emisión de energía en forma de luz y radiación.

El modelo más básico de estructura estelar es el modelo cuasiestático, que asume que una estrella es esféricamente simétrica<sup>1</sup> y que se encuentra en un estado estacionario<sup>2</sup> (las variables de estado se consideran constantes a lo largo del tiempo). Este modelo consta de cuatro ecuaciones diferenciales fundamentales de primer orden que determinan la estructura estelar. Dos de estas ecuaciones describen cómo varían la densidad de la materia y la presión conforme al radio, mientras que las otras dos describen cómo varían la temperatura y la luminosidad en función del radio.

Notación:  $\rho(r)$  es la densidad de materia,  $T(r)$  es la temperatura,  $P(r)$  es la presión total (materia más radiación),  $L(r)$  es la luminosidad y  $\epsilon(r)$  es la tasa de generación de energía por unidad de masa.

Consideramos una superficie diferencial de radio  $r$  y grosor  $dr$ , como indica la figura 2.1:

---

<sup>1</sup>La aproximación de simetría esférica es, en general, muy acertada; esto se puede ver de forma observacional. La mayoría de estrellas, por ejemplo nuestro Sol, son casi esferas perfectas. Algunos factores que pueden influir en esta simetría son:

- Rotación rápida: Estrellas con rotación rápida pueden perder esa simetría debido a la fuerza centrífuga, haciéndolas más achatadas en los polos y más anchas en el ecuador.
- Presencia de campos magnéticos fuertes: Los campos magnéticos intensos pueden deformar la distribución de la materia y, por lo tanto, romper la simetría esférica.
- Interacciones gravitacionales externas: Estrellas en sistemas binarios cercanos o en cúmulos densos pueden experimentar fuerzas de marea que distorsionan su forma.

<sup>2</sup>Esta aproximación también es válida en general, ya que las estrellas suelen mantener sus propiedades constantes a lo largo del tiempo. Los únicos casos donde la aproximación de estado estacionario puede no ser adecuada es en estrellas en las que estén ocurriendo cambios muy rápidos en su estructura.

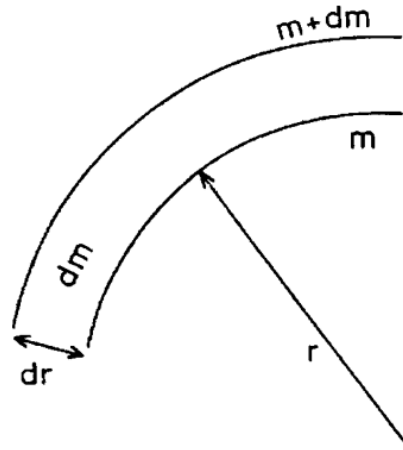


Figura 2.1: Superficie esférica de masa  $dm(r)$  con un grosor  $dr$  y ubicada a una distancia  $r$  del centro de la estrella.

La masa de esta superficie es  $dm(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr$ , por lo que sobre ella se ejerce una fuerza gravitatoria

$$F_{\text{gravitatoria}} = -G \frac{4\pi r^2 \rho(r) m(r) dr}{r^2} = -4\pi G \rho(r) m(r) dr, \quad (2.1)$$

donde  $m(r)$  es la masa total en la superficie de radio  $r$ :

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'. \quad (2.2)$$

El signo negativo en la ecuación (2.1) indica que esta fuerza apunta hacia dentro. La superficie diferencial también siente una fuerza de flotación hacia fuera, igual a la fuerza de presión en la superficie interna de la cáscara menos la fuerza de presión en su superficie externa:

$$F_{\text{flotación}} = 4\pi r^2 [P(r) - P(r + dr)]. \quad (2.3)$$

Usando la expansión de Taylor para aproximar  $P(r + dr)$ :

$$P(r + dr) \approx P(r) + \frac{dP}{dr} dr, \quad (2.4)$$

se obtiene

$$F_{\text{flotación}} = 4\pi r^2 \left[ P(r) - \left( P(r) + \frac{dP}{dr} dr \right) \right] = -4\pi r^2 \frac{dP}{dr} dr. \quad (2.5)$$

En este caso tenemos también un signo -, pero  $\frac{dP}{dr} < 0$  (la presión disminuye al aumentar el radio), por lo que en total la fuerza es positiva, opuesta a la fuerza gravitatoria. En equilibrio, la suma de estas dos fuerzas (2.1 y 2.5) se anula, así que obtenemos la **ecuación de equilibrio hidrostático o equilibrio estelar**:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (2.6)$$

Nótese que para realizar esta derivación hemos utilizado la ecuación de gravitación de Newton en (2.1), por lo que la ecuación (2.6) solo es válida en el caso no relativista. Esta ecuación de equilibrio

estelar por ejemplo no podría aplicarse en estrellas de neutrones.<sup>3</sup>

Esta primera ecuación muestra el equilibrio hidrostático (o equilibrio estelar): la fuerza hacia afuera debido al gradiente de presión dentro de la estrella está equilibrada por la fuerza hacia dentro debido a la gravedad.

La masa acumulada aumenta con el radio de acuerdo con la **ecuación de continuidad de masa**:

$$dm = 4\pi r^2 dr \rho \implies \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (2.11)$$

Integrando 2.11 desde el centro de la estrella ( $r = 0$ ) en todo el radio de la estrella (hasta  $r = R$ ) da como resultado la masa total de la estrella.

Teniendo en cuenta la energía que sale de la capa esférica, se obtiene la **ecuación de energía**:

$$dL = 4\pi r^2 dr \rho \epsilon \implies \frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho (\epsilon - \epsilon_\nu), \quad (2.12)$$

siendo  $\epsilon_\nu$  la luminosidad producida en forma de neutrinos (que suelen escapar de la estrella<sup>4</sup> sin interactuar con la materia ordinaria) por unidad de masa. Fuera del núcleo de la estrella, donde se producen las reacciones nucleares, no se genera energía, por lo que la luminosidad es constante.

Falta ver la ecuación que describe la temperatura en función del radio, es decir, la **ecuación de transporte de energía**. Esta ecuación adopta diferentes formas dependiendo del modo de transporte de energía: convección, radiación y conducción.

La convección es el proceso de transferencia de energía a través del movimiento de líquidos o gases. Cuando el gradiente de temperatura (la variación de temperatura con respecto a la profundidad) es lo suficientemente elevado, el material caliente del interior tiende a elevarse mientras que el material más frío de la superficie tiende a hundirse. Este movimiento crea corrientes convectivas en la estrella que transportan energía desde el interior caliente hacia las capas exteriores más frías.

La radiación es el proceso de transferencia de energía mediante la emisión y absorción de fotones. En una estrella, los fotones son emitidos por las partículas cargadas (principalmente electrones) en las capas más calientes y densas. Estos fotones viajan a través de las diferentes capas siendo continuamente absorbidos y reemitidos por las partículas del gas. La energía se transporta de las zonas más calientes del núcleo hacia las capas más frías del exterior a través de la emisión continua de radiación electromagnética.

---

<sup>3</sup>Para las estrellas de neutrones no sirve la aproximación newtoniana, por lo que esta ecuación necesita las correcciones relativistas. Los cálculos son algo más complejos, pero por esbozar un poco la idea, se utiliza el tensor de energía-momento para un fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^{-2} + P) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

y se aplica en las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (2.8)$$

y el uso de la condición de conservación

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.9)$$

se puede derivar la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para la estructura de una estrella relativista estática y esféricamente simétrica en coordenadas isotrópicas:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \left( 1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2} \right) \left( 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right) \left( 1 - \frac{2GM(r)}{rc^2} \right)^{-1}. \quad (2.10)$$

Aparece el mismo término que en la aproximación newtoniana pero con otros términos, que son las correcciones relativistas.

<sup>4</sup>Esto no ocurre en las explosiones de supernova; los neutrinos quedan atrapados antes de la explosión porque las densidades que se alcanzan son muy altas.

La conducción es el proceso de transferencia de energía a través de colisiones entre partículas. En general es menos importante en la mayoría de las estrellas normales porque los gases son poco densos. Sin embargo, en objetos muy compactos como las enanas blancas o las estrellas de neutrones, la conducción puede ser un mecanismo importante de transporte de energía, ya que la alta densidad y la presencia de partículas degeneradas (como los electrones degenerados en una enana blanca) hacen que la conducción sea eficiente.

En las estrellas como el Sol, la zona convectiva se encuentra en la parte exterior de la estrella y la zona radiativa entre el núcleo y la zona convectiva. En estrellas más masivas, la zona radiativa puede extenderse desde el núcleo hasta una gran fracción del radio estelar. Y en estrellas donde el gas es degenerado, el principal medio de transporte de energía es la conducción.

Veamos ahora las diferentes ecuaciones:

Para el *transporte de energía conductiva* (apropiado para una enana blanca), la ecuación de energía es

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-1}{k} \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (2.13)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica.

En el caso del *transporte de energía radiativa*, apropiado para la parte interna de una estrella de secuencia principal de masa solar y la envoltura exterior de una estrella masiva de secuencia principal, la energía liberada es transportada hacia afuera casi enteramente por radiación (fotones). Para obtener ese gradiente de temperatura partimos de:

1. La luminosidad total de la estrella,  $L$ , es constante en el equilibrio estelar.
2. La temperatura,  $T$ , disminuye a medida que nos alejamos del núcleo estelar, ya que la energía generada en el núcleo se transfiere hacia el exterior.
3. La opacidad,  $\kappa$ , es la cantidad de absorción por unidad de masa.
4. La radiación emitida desde una esfera esférica de radio  $r$  y con una temperatura  $T$  es  $\sigma T^4$ , donde  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann.

Comenzamos con la ecuación del flujo radiativo

$$F = -\frac{4}{3} \frac{acT^3}{\kappa\rho} \frac{dT}{dr}. \quad (2.14)$$

- $a$  es la constante de radiación (la velocidad a la que la energía se transporta por radiación), relacionada con la constante de Stefan-Boltzmann,
- $c$  es la velocidad de la luz,
- $\kappa$  es la opacidad,
- $\rho$  es la densidad del material estelar.

Dado que nos interesa la variación de temperatura con respecto al radio, podemos despejar  $\frac{dT}{dr}$  de la ecuación del flujo radiativo (2.14):

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho F}{4acT^3}. \quad (2.15)$$

El flujo de energía por unidad de área en la superficie de una esfera de radio  $r$  con luminosidad  $L$  es

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (2.16)$$

Sustituimos el flujo en 2.15 y con esto obtenemos la ecuación del transporte de energía radiativa para una estrella en equilibrio hidrostático:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L}{16\pi acT^3 r^2}. \quad (2.17)$$

El *transporte de energía por convección* (es decir, por circulación de materia) generalmente se modela utilizando la teoría de la longitud de mezcla. Esto trata el gas en la estrella como si contuviera elementos discretos que retienen aproximadamente la temperatura, la densidad y la presión de su entorno, pero se mueven a través de la estrella hasta una longitud característica, llamada longitud de mezcla. Para un gas ideal monoatómico, cuando la convección es adiabática, (es decir, las burbujas de gas convectivas no intercambian calor con su entorno), la teoría de la longitud de mezcla proporciona una relación entre el gradiente de temperatura y el gradiente de presión:

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}, \quad (2.18)$$

donde  $\gamma = c_p/c_v$  es el índice adiabático, la relación de calores específicos en el gas. (Para un gas ideal totalmente ionizado,  $\gamma = 5/3$ .)

Cuando la convección no es adiabática, el verdadero gradiente de temperatura no viene dado por esta ecuación. Por ejemplo, en el Sol la convección en la base de la zona de convección, cerca del núcleo, es adiabática, pero la que está cerca de la superficie no lo es. La teoría de la longitud de mezcla contiene dos parámetros libres que deben establecerse empíricamente para que el modelo se ajuste a las observaciones.

El movimiento convectivo se establece cuando el gradiente de temperatura radiativo supera al convectivo, es decir cuando  $|dT/dr|_{rad} > |dT/dr|_{conv}$ .

Por lo tanto, las ecuaciones que definen el estado de una estrella son (2.6), (2.11), (2.12), (2.13), (2.17), (2.18). Podemos ver las dependencias establecidas en estas ecuaciones de forma gráfica:

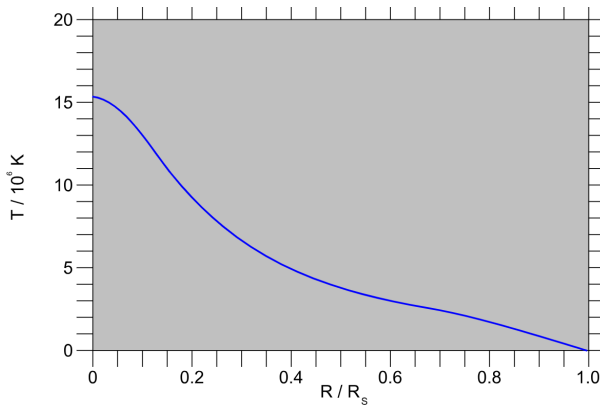


Figura 2.2: Temperatura en función del radio. (Ecuaciones 2.17, 2.18 y 2.13).

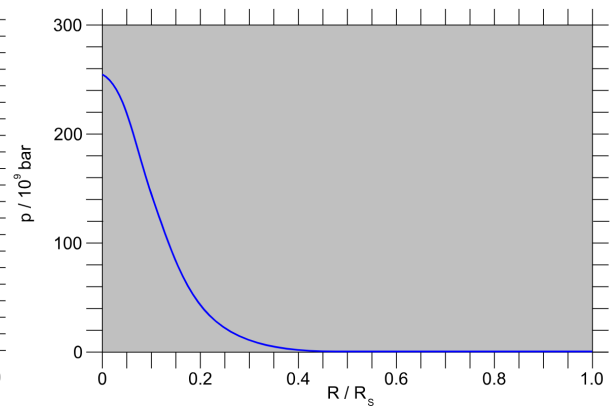


Figura 2.3: Presión en función del radio. (Ecuación 2.6).



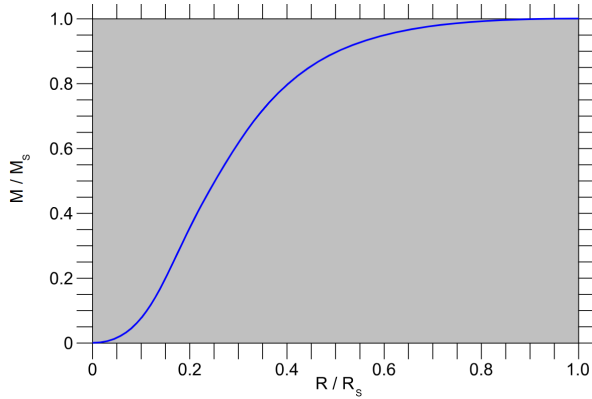


Figura 2.4: Masa en función del radio. (Ecuación 2.11).

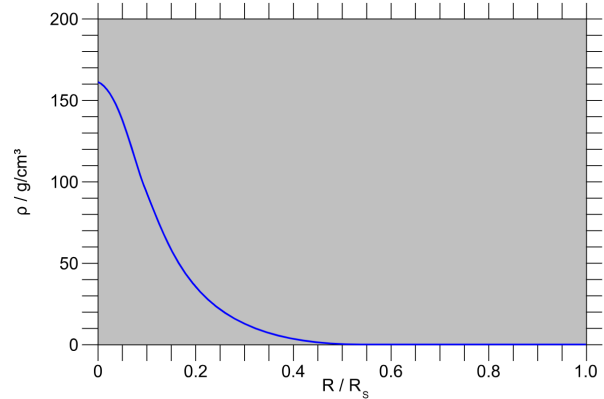


Figura 2.5: Densidad en función del radio. (Se obtiene de la ecuación 2.11).

No obstante, cabe destacar que aunque todas estas ecuaciones permitan modelar el comportamiento de una estrella y son útiles para hacernos una idea de las relaciones entre las diferentes magnitudes, en la práctica lo que se utilizan son modelos numéricos.

## 2.1. Polítropos

Son las estrellas para las cuales la presión es directamente proporcional a una potencia de la densidad (al menos lejos de la superficie), es decir, que cumplen una ecuación como la siguiente:

$$P = K\rho^\gamma, \quad (2.19)$$

donde  $K$  y  $\gamma$  son constantes a lo largo de la estrella. Estas estrellas se conocen como polítropos con índice  $\gamma$ . Incluyen los siguientes tipos:

- Estrellas ordinarias con transporte eficiente de energía convectiva. Un ejemplo es la ecuación (2.49). En este tipo de estrellas,  $\gamma$  es típicamente cercano a  $5/3$ , y  $K$  dependiendo de las condiciones de contorno, como los valores de la densidad y la presión central.
- Las enanas blancas muy ligeras obedecen la ecuación (2.19) con  $\gamma$  generalmente cercano a  $5/3$ , y las enanas blancas muy pesadas obedecen la ecuación (2.19) con  $\gamma = 4/3$ . En ambos casos,  $K$  depende solo de la composición química, así como de las constantes físicas fundamentales.
- Estrellas supermasivas. Estas estrellas obedecen la ecuación (2.19) con  $\gamma = 4/3$  y con  $K$  dependiendo del peso molecular y de la relación entre la presión del material y la presión de radiación, así como de las constantes físicas fundamentales.

Dado que la ecuación (2.19) no depende de la temperatura, podemos calcular las propiedades de la estrella usando solo las ecuaciones hidrostáticas (2.6) y (2.11). Reescribiendo estas dos ecuaciones diferenciales de primer orden como una sola ecuación diferencial de segundo orden para la densidad:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \rho(r) \frac{d}{dr} \rho^\gamma(r) \right) + \frac{4\pi G}{K} r^2 \rho(r) = 0. \quad (2.20)$$

Como condiciones de contorno, podemos tomar la densidad central con algún valor asumido  $\rho(0)$  y, dado que la analiticidad de  $\rho$  como función de  $x$  requiere que  $\rho(r)$  sea una serie de potencias en  $r^2$  cerca de  $r = 0$ , también tomamos  $\rho'(0) = 0$ . Con dos condiciones iniciales, tenemos una solución única, que depende solo de  $\gamma$  y de los parámetros libres  $K/G$  y  $\rho(0)$ .

Una estrella está en equilibrio cuando la presión generada por la fuerza gravitatoria ( $P_{grav}$ ) es contrarrestada con la presión  $P$ , que tiene varias contribuciones:

$$P = P_{gas} + P_{rad} + P_{degeneración}. \quad (2.21)$$

Veamos estas 3 contribuciones:

## 2.2. Presión del gas

Esta presión es producida por las partículas de gas (como hidrógeno y helio) presentes en el interior estelar. Surge por la colisión de estas partículas entre sí, es decir, por las reacciones de fusión nuclear. Considerando la estrella como un gas ideal de hidrógeno, la presión gaseosa  $P_g$  se relaciona con la temperatura mediante la ecuación:

$$P_g = \frac{\rho k_B T}{\mu m_H}, \quad (2.22)$$

donde  $m_H$  es la masa del átomo de hidrógeno y  $\mu$  es el peso molecular.

Sin embargo, hay que considerar que una estrella contiene tanto hidrógeno como helio, y también otros elementos (aunque en general estos se podrán despreciar al ser mucho menos abundantes, pero el helio normalmente no se puede despreciar). Por ejemplo, nuestro Sol está compuesto por un 73 % de hidrógeno, un 26 % de helio, y solo un 1 % de átomos de número atómico mayor. En este caso

$$P_g = \frac{\rho k_B T}{\mu m_p}. \quad (2.23)$$

Aquí aparece el término  $m_p$ , (masa de una partícula), que se calcula como una combinación de la masa del hidrógeno y del helio en la estrella.

La masa molecular promedio ( $\mu$ ) se calcula en términos de fracción de masa. Resulta del inverso de la suma de los inversos del peso molecular por ion con el peso molecular por electrón. Veámoslo: tenemos una especie química  $j$  (en nuestro caso trabajamos con hidrógeno y helio). Para hallar el número de iones por unidad de volumen de cada especie, se multiplica la densidad por la fracción de masa para obtener solo la densidad de ese elemento concreto. Luego se divide por el número másico y se multiplica por el número de Avogadro para obtener el número de iones.

$$n_{i,j} = N_A \frac{\rho X_j}{A_j}. \quad (2.24)$$

Para el caso de los electrones, como todos los iones poseen un número de electrones correspondiente al número atómico, habrá que multiplicar por dicho valor:

$$n_{e,j} = N_A \frac{\rho X_j Z_j}{A_j} = Z_j n_{i,j}, \quad (2.25)$$

siendo  $N_A$  es el número de Avogadro,  $\rho$  la densidad de la estrella,  $X_j$  la fracción de masa,  $Z_j$  el número atómico y  $A_j$  el número másico.

De estas expresiones se puede obtener el peso molecular medio.

Peso molecular medio por ion:

$$\frac{1}{\mu_i} = \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{A_j}. \quad (2.26)$$

Peso molecular medio por electrón:

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum_{j=1}^n \frac{X_j Z_j}{A_j}. \quad (2.27)$$

Peso molecular medio por partícula:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_e} = \sum_{j=1}^n \frac{X_j(Z_j + 1)}{A_j}. \quad (2.28)$$

Sabiendo que para elementos más allá del helio una buena aproximación es:

$$\frac{Z_j}{A_j} \simeq \frac{1}{2}, \quad (2.29)$$

se puede afirmar entonces que

$$\frac{1}{\mu} = \frac{X \cdot 2}{1} + \frac{Y \cdot 3}{4} + \frac{1 - X - Y}{2}, \quad (2.30)$$

donde  $X$  es la fracción de masa del hidrógeno,  $Y$  la del helio y  $Z = 1 - X - Y$  la del resto de átomos. No obstante, como hemos dicho, esta última parte se va a poder despreciar, quedando:

$$\frac{1}{\mu} = 2X + \frac{3}{4}Y. \quad (2.31)$$

Para el Sol,  $X = 0.73$ ,  $Y = 0.26$  y  $Z = 0.01$ , por lo tanto,  $\frac{1}{\mu} \approx 1.67$ . Los otros átomos además del hidrógeno y el helio se denominan metales en astronomía, y el valor de  $Z$  se denomina metalicidad.

## 2.3. Presión de radiación

Cuando los fotones inciden sobre una superficie, ejercen una fuerza sobre ella debido al cambio en el momento de los fotones al ser absorbidos o reflejados. La presión de radiación es la fuerza ejercida sobre una superficie debida al choque de los fotones sobre ella. Estos fotones se generan en el interior de la estrella como resultado de las reacciones nucleares.

A temperaturas muy altas la presión de la radiación  $P_{rad}$  se vuelve importante, ya que esta presión está directamente relacionada con la temperatura:

$$P_{rad} = \frac{1}{3}aT^4, \quad (2.32)$$

siendo  $a$  la constante de radiación. Veamos cómo se obtiene esta ecuación y el valor de la constante:

Empezamos considerando un rayo de luz con una longitud de onda entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$  que atraviesa una superficie de área  $dA$  con un ángulo  $\theta$  hacia un cono de ángulo sólido  $d\Omega$  (figura 2.6). El ángulo  $\theta$  se mide desde la dirección perpendicular a la superficie, por lo que  $dA \cos\theta$  es el área  $dA$  proyectada sobre un plano perpendicular a la dirección en la que viaja la radiación.

Definiendo  $E_\lambda \equiv \frac{\partial E}{\partial \lambda}$ , con  $E_\lambda d\lambda$  la cantidad de energía que estos rayos llevan al cono en un intervalo de tiempo  $dt$ . Entonces, la *intensidad específica* o simplemente *intensidad*  $I_\lambda$  de los rayos se define como

$$I_\lambda \equiv \frac{\partial I}{\partial \lambda} \equiv \frac{E_\lambda d\lambda}{d\lambda dt dA \cos\theta d\Omega}, \quad (2.33)$$

Despejamos y reescribimos el diferencial de ángulo sólido en coordenadas esféricas:

$$E\lambda d\lambda = I_\lambda d\lambda dt dA \cos\theta d\Omega = I_\lambda d\lambda dt dA \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi. \quad (2.34)$$

Esta expresión (2.34) será útil para el cálculo de  $P_r$ .

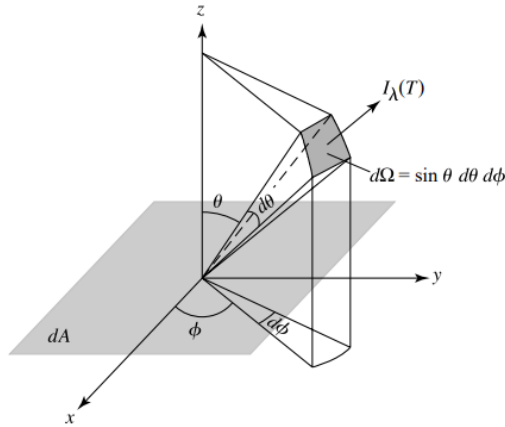


Figura 2.6: Intensidad  $I_\lambda$

Debido a que un fotón posee una energía  $E$ , la ecuación de energía relativista de Einstein nos dice que aunque es sin masa, un fotón también lleva un momento de  $p = \frac{E}{c}$  y por lo tanto puede ejercer una presión de radiación. Esta presión de radiación se puede derivar de la misma manera que se encuentra la presión de gas para moléculas que rebotan en una pared.

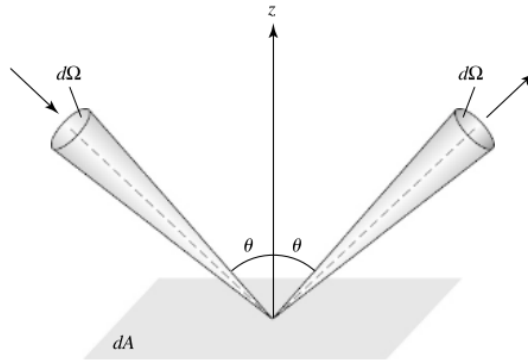


Figura 2.7: Presión de radiación producida por los fotones incidentes desde el ángulo sólido  $d\Omega$ .

La Figura (2.7) muestra fotones reflejados en un ángulo  $\theta$  desde una superficie perfectamente reflectante de área  $dA$  en un ángulo sólido  $d\Omega$ . Dado que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, los ángulos sólidos mostrados para los fotones incidentes y reflejados son del mismo tamaño e inclinados por el mismo ángulo  $\theta$  en lados opuestos del eje  $z$ . El cambio en la componente  $z$  del momento de los fotones con longitudes de onda entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$  que son reflejados desde el área  $dA$  en un intervalo de tiempo  $dt$  es

$$\frac{dp_\lambda}{d\lambda} = ((p_\lambda)_{final,z} - (p_\lambda)_{inicial,z}) d\lambda = \left( \frac{E_\lambda \cos\theta}{c} - \frac{E_\lambda \cos\theta}{c} \right) d\lambda = \frac{2E_\lambda \cos\theta}{c} d\lambda = \frac{2}{c} I_\lambda d\lambda dt dA \cos^2\theta d\Omega, \quad (2.35)$$

donde la última expresión se ha obtenido usando la relación (2.34).

Dividiendo  $dp_\lambda$  por  $dt$  y  $dA$ , obtenemos  $(dp_\lambda/dt)/dA$ .

$$\frac{dp_\lambda}{d\lambda dt dA} = \frac{2}{c} I_\lambda d\lambda \cos^2 \theta d\Omega. \quad (2.36)$$

De la segunda y tercera ley de Newton,  $dp_\lambda/dt$  es la fuerza ejercida por los fotones sobre el área  $dA$ , aunque ignoraremos el signo menos, que simplemente indica que la fuerza está en la dirección  $z$ . Por lo tanto, la presión de radiación es la fuerza por unidad de área,  $(dp_\lambda/dt)/dA$ , producida por los fotones dentro del ángulo sólido  $d\Omega$ . Integrando sobre el hemisferio de todas las direcciones incidentes, obtenemos  $P_{rad,\lambda}d\lambda$ , la presión de radiación ejercida por esos fotones que tienen una longitud de onda entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ :

$$P_{rad,\lambda}d\lambda = \frac{2}{c} \int_{hemisferio} I_\lambda d\lambda \cos^2 \theta d\Omega \text{ (reflexión)} = \frac{2}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} I_\lambda d\lambda \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.37)$$

Así como la presión de un gas existe en todo el volumen del gas y no solo en las paredes del contenedor, la presión de radiación de un gas de fotones existe en todo el campo de radiación. Si quitamos la superficie que refleja  $dA$  en la Figura (2.7) y la reemplazamos con una superficie matemática, los fotones incidentes ahora seguirán pasando a través de  $dA$ ; en lugar de fotones reflejados, los fotones pasarán a través de  $dA$  desde el otro lado. Por lo tanto, para un campo de radiación isotrópico, no habrá cambio en la expresión de la presión de radiación si se elimina el factor principal de 2 (que se originó en el cambio de momento al reflejar los fotones) y se extiende la integración angular sobre todos los ángulos sólidos. Es decir, se elimina el factor de 2 y se integra sobre toda la esfera en lugar de solo un hemisferio:

$$P_{rad,\lambda}d\lambda = \frac{1}{c} \int_{esfera} I_\lambda d\lambda \cos^2 \theta d\Omega \text{ (transmisión)} = \frac{1}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\lambda d\lambda \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.38)$$

Para un campo isotrópico,  $I_\lambda$  es constante en todas las direcciones, por lo que:

$$P_{rad,\lambda} = \frac{I_\lambda}{c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta. \quad (2.39)$$

Resolviendo la integral:

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \left[ \frac{-\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = \frac{2}{3}. \quad (2.40)$$

Así, la integral total es:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}. \quad (2.41)$$

Y queda:

$$P_{rad,\lambda}d\lambda = \frac{4\pi}{3c} I_\lambda d\lambda. \quad (2.42)$$

La presión total de radiación producida por fotones de todas las longitudes de onda se encuentra integrando para todas las longitudes de onda:

$$P_{rad} = \int_0^\infty P_{rad,\lambda}d\lambda = \int_0^\infty \frac{4\pi}{3c} I_\lambda d\lambda. \quad (2.43)$$

La presión depende de la orientación de la superficie matemática  $dA$ .

También se puede ver en términos de la frecuencia en vez de en términos de la longitud de onda:

$$P_{rad,\nu} = \frac{4\pi}{3c} I_\nu = \frac{4\pi K_\nu}{c}, \quad (2.44)$$

con  $K_\nu$  definida como la media de la intensidad específica ponderada por el coseno del ángulo.

$$K_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega = \frac{I_\nu}{3}. \quad (2.45)$$

La función de distribución de Planck  $B_\nu$  da la intensidad espectral de la radiación emitida por un cuerpo negro en equilibrio térmico a una temperatura  $T$ :

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (2.46)$$

Esta fórmula describe cómo la energía se distribuye entre diferentes frecuencias en la radiación emitida por un cuerpo negro. En la aproximación de Eddington<sup>5</sup>,  $K_\nu = \frac{B_\nu(T)}{3}$  y la presión total de radiación (integrando) es

$$P_{rad} = \frac{4\pi}{3c} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{4\pi}{3c} \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} d\nu. \quad (2.47)$$

Considerando el cambio de variable  $x = \frac{h\nu}{kT}$ ,  $d\nu = \frac{kT}{h} dx$ , de modo que

$$P_{rad} = \frac{4\pi}{3c} \frac{2k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty x^3 \frac{e^x - 1}{dx} = \frac{1}{3} \frac{8k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{\pi^5}{15} = \frac{1}{3} a T^4, \quad (2.48)$$

donde  $a = \left( \frac{8k^4 \pi^5}{15c^3 h^3} \right)$ <sup>6</sup> se conoce como la constante de radiación.

## 2.4. Presión de degeneración

En un gas de Fermi ordinario (en el que las partículas que lo constituyen son fermiones y por tanto cumplen el principio de exclusión de Pauli), la mayoría de los niveles de energía de electrones disponibles no se llenan y los electrones son libres de moverse a estos estados. Sin embargo, si vamos aumentando la densidad, los electrones empezarán llenando progresivamente los estados de energía más bajos, pero eventualmente algunos, por el principio de exclusión de Pauli, se ven obligados a ocupar estados de mayor energía incluso a bajas temperaturas. Esto pasa en el núcleo de una estrella una vez que se detienen las reacciones de fusión nuclear: al detenerse, la presión del gas deja de contrarrestar a la presión gravitatoria y por tanto la estrella se comprime, volviéndose más densa. Por tanto, a altas densidades, la materia se convierte en un gas degenerado. Los gases degenerados resisten fuertemente una mayor compresión porque los electrones no pueden moverse a niveles de energía más bajos ya llenos. Esta resistencia es la que se opone a la compresión que genera la fuerza de gravedad. El momento de los electrones en el gas fermión genera presión, denominada *presión de degeneración*.

<sup>5</sup>La aproximación de Eddington es una simplificación utilizada en la astrofísica para calcular la presión de radiación en el interior de las estrellas. Esta aproximación supone que  $K_\nu$  es aproximadamente igual a  $B_\nu(T)/3$ , donde  $B_\nu(T)$  es la intensidad de radiación de un cuerpo negro a una temperatura  $T$ . Esta aproximación considera que la radiación es isotrópica y que cada fotón contribuye por igual a la presión de radiación.

<sup>6</sup>En muchos textos se puede encontrar también que  $a = \frac{4\sigma}{c}$  y por tanto  $P_{rad} = \frac{4\sigma}{3c} T^4$ , con  $\sigma$  la constante de Stefan-Boltzmann.

La presión en un gas degenerado no depende de la temperatura. Las energías cinéticas de los electrones son bastante altas y la tasa de colisión entre electrones y otras partículas es bastante baja, por lo tanto, los electrones degenerados pueden viajar grandes distancias a velocidades que se acercan a la velocidad de la luz. En lugar de la temperatura, la presión en un gas degenerado depende solo de la velocidad de las partículas degeneradas (o en otras palabras, de su momento).

Para electrones no relativistas:

$$P_{nr} = h_{nr}\rho^{5/3}. \quad (2.49)$$

Mientras que para electrones relativistas:

$$P_r = h_r\rho^{4/3}. \quad (2.50)$$

donde  $h_{nr}$ ,  $h_r$  son constantes. Veamos cómo se obtienen estas ecuaciones y los valores de las constantes:

En primer lugar vamos a obtener el momento de Fermi para el gas degenerado. El número de electrones con momento  $p \in (p, p + dp)$ :

$$dN = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp V P(p). \quad (2.51)$$

Veamos los factores:

- $\frac{2}{h^3}$  es el número de electrones en un volumen elemental de lado  $h$  (no pueden coexistir 2 partículas con el mismo estado cuántico, por lo que solo hay 2 electrones, cada uno con diferente spin).
- $4\pi p^2 dp$  volumen en espacio de momentos  $d^3p$ .
- $V$  es el volumen.
- $P(p)$  es una función de probabilidad que vale 1 cuando el gas está degenerado. Consideraremos que efectivamente está degenerado,  $P(p) = 1$ .

Por tanto, el número total de electrones:

$$N = \int dN = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi V}{3h^3} p_F^3. \quad (2.52)$$

Y por tanto, el momento de Fermi es:

$$p_F = \left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \quad (2.53)$$

Vamos a analizar ahora para el caso no relativista y el ultrarrelativista:

### 2.4.1. Caso no relativista

Si estamos trabajando con electrones no relativistas,  $E_F = \frac{p_F^2}{2m_e}$ , y por tanto la energía total usando (2.51) queda:

$$U = E = \int \frac{p^2}{2m_e} dN = \frac{4\pi V}{5m_e h^3} p_F^5. \quad (2.54)$$

Ahora, buscaremos la relación entre presión, volumen y energía utilizando la teoría cinética de los gases y considerando un gas degenerado no relativista en el límite clásico, donde las velocidades de las partículas son mucho menores que la velocidad de la luz y se comportan de manera similar a un gas ideal.

La energía interna de un gas se puede considerar como la suma de las energías cinéticas de todas las partículas en el gas. Para un gas degenerado, las partículas están confinadas en estados cuánticos, pero en el límite no relativista, estas partículas tienen energías cinéticas pequeñas en comparación con su energía de reposo, por lo que podemos considerar su energía cinética promedio como

$$\frac{3}{2}k_B T, \quad (2.55)$$

con  $k_B$  constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura del gas.

Entonces, la energía interna  $U$  por unidad de volumen  $V$  del gas es:

$$U = n \frac{3}{2} k_B T, \quad (2.56)$$

con  $n = \frac{N}{V}$  la densidad de partículas del gas.

La presión  $P$  del gas se relaciona con su energía interna  $U$  y su volumen  $V$  a través de la ecuación de estado. En el límite no relativista, esta relación se puede derivar utilizando la relación de virial<sup>7</sup>, que relaciona la energía interna de un gas con su presión y volumen. Para un gas no relativista, sustituyendo (2.54) y (2.53), la ecuación de estado se puede escribir como:

$$P_{NR} = \frac{2U}{3V} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}. \quad (2.57)$$

Si escribimos esta ecuación en función de la densidad  $\rho$ , usando  $\mu_e = m_e N_A$  y por tanto  $m_e = \frac{\mu_e}{N_A}$ :

$$\rho = \frac{m_e}{V} = \frac{N}{V} \mu_e H, \quad (2.58)$$

donde  $H$  es el inverso del número de Avogadro, vemos que nos queda la ecuación de un polítropo con índice  $\gamma = 5/3$ :

$$P_{NR} = \frac{2U}{3V} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e H^{5/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}. \quad (2.59)$$

### 2.4.2. Caso ultrarrelativista

Ahora estamos en el caso ultrarrelativista<sup>8</sup>. Como  $E_F \gg m_e c^2$ , se tiene que  $E_F = p_F c$ . Entonces, sustituyendo la expresión de  $dN$  dada en (2.51), obtenemos

$$U = \int E dN = c p_F dN = \int_0^{p_F} c \frac{2}{h^3} 4\pi V p^3 dp = \frac{2\pi c}{h^3} V p_F^4. \quad (2.60)$$

Y por tanto, calculamos la presión y reemplazamos la ecuación de  $p_F$  obtenida en (2.53):

$$P_{UR} = \frac{1}{3} \frac{U}{V} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} h c \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}. \quad (2.61)$$

De nuevo, si escribimos esta ecuación en función de la densidad usando (2.58), vemos que de nuevo nos queda la ecuación de un polítropo, ahora con índice  $\gamma = 4/3$ :

$$P_{UR} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{h c}{H^{4/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}. \quad (2.62)$$

<sup>7</sup>Relación virial:  $PV = nRT + B_2(T)n + B_3(T)n + \dots$

<sup>8</sup>En el régimen relativista, las partículas tienen velocidades que son una fracción significativa de la velocidad de la luz. Cuando hablamos de ultrarrelativista, nos referimos a que esa fracción es prácticamente 1.



Nota: Lo que hemos visto es la degeneración electrónica, pero también existe la degeneración de neutrones, que es la que soporta las estrellas de neutrones. Cuando la presión gravitacional en el núcleo es superior a la presión de degeneración de electrones, y los electrones comienzan a combinarse con protones para producir neutrones (a través de la desintegración beta inversa, también denominada captura de electrones), el resultado es una estrella extremadamente compacta compuesta de materia nuclear, que es un gas de neutrones degenerado con una pequeña mezcla de gases de protones y electrones degenerados.

## 2.5. Presión gravitatoria

La presión gravitatoria en una estrella se refiere a la fuerza ejercida por la gravedad, que actúa para comprimir el material estelar hacia el centro de la estrella. Es consecuencia de la atracción gravitatoria entre las partículas de materia en el interior de la estrella. Esta presión depende de la masa de la estrella y de la distribución de esa masa en su interior. Cuanta mayor sea la masa de la estrella, mayor será la fuerza gravitatoria que actúa sobre ella y, por lo tanto, mayor será la presión gravitatoria en su núcleo.

La expresión de esta presión ya la habíamos deducido en (2.6). Sin embargo, como ya hemos dicho, esta ecuación solo es válida en el caso no relativista. Para el caso ultrarrelativista, es necesario utilizar la relatividad general para obtener una expresión de la presión gravitatoria.

Las presiones del gas, de radiación y de degeneración contrarrestan la presión gravitatoria en mayor o menor medida dependiendo del tipo de estrella y la etapa en la que se encuentre.

## 2.6. Dominancia de cada tipo de presión en función de la etapa en la que se encuentra la estrella

La dominancia de cada tipo de presión en una estrella depende de su etapa evolutiva y de las condiciones físicas en su interior.

En estrellas jóvenes, como las que se encuentran en la secuencia principal, la presión del gas es la principal fuente de soporte contra la gravedad. La presión de radiación también contribuye significativamente, pero suele ser subordinada a la presión del gas en estas etapas.

En estrellas más evolucionadas, como gigantes y supergigantes, la presión del gas sigue siendo importante, pero puede ser insuficiente para contrarrestar la gravedad debido a la disminución de la fusión nuclear en el núcleo. La presión de radiación se vuelve más significativa a medida que disminuye la producción de energía nuclear en el núcleo. En estas etapas, la presión de radiación es la principal fuente de soporte contra la gravedad.

Por último, en las estrellas en etapas finales (enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros), la presión dominante es la presión degenerada de los electrones y neutrones. En las enanas blancas, por ejemplo, la presión degenerada de electrones mantiene el equilibrio contra la gravedad. En algunas etapas finales, como en las supernovas y en la formación de estrellas de neutrones y agujeros negros, la presión de radiación puede ser importante durante eventos explosivos, pero la presión degenerada finalmente domina una vez que se alcanza la estabilidad.

## 2.7. Reacciones nucleares básicas

Las reacciones nucleares básicas son procesos fundamentales en astrofísica y física nuclear que involucran la transformación de núcleos atómicos mediante la interacción entre partículas subatómicas. Estas reacciones son responsables de la liberación de enormes cantidades de energía en forma de radiación electromagnética y otras formas de energía, y son la fuente de energía que impulsa a las estrellas y los

procesos nucleares en el universo.

Existen varias formas de reacciones nucleares básicas, entre las cuales se destacan:

- **Fusión nuclear:** Este proceso implica la combinación de núcleos ligeros para formar uno más pesado. Es la reacción que alimenta a las estrellas, donde el hidrógeno se fusiona para formar helio, liberando enormes cantidades de energía en el proceso. La fusión nuclear es la base de la energía en el Sol y otras estrellas.
- **Fisión nuclear:** En este proceso, un núcleo pesado se divide en dos o más núcleos más ligeros, liberando energía en forma de calor y radiación.
- **Captura de neutrones:** Un núcleo captura un neutrón para formar un núcleo más pesado. Esta reacción es importante en la nucleosíntesis estelar y en la producción de elementos más pesados que el hierro en el universo.
- **Desintegración radioactiva:** En este proceso, un núcleo inestable se descompone en núcleos más estables, emitiendo radiación alfa, beta o gamma en el proceso.

Algunos de los ciclos más importantes que ocurren en el núcleo de las estrellas son:

### 2.7.1. Ciclo protón-protón

Es el que actúa en estrellas tipo solar o de menor masa.

La primera etapa consiste en la fusión de dos núcleos de hidrógeno  $^1\text{H}$  (protones) a deuterio  $^2\text{H}$ , liberando un positrón y un neutrino electrónico:



Este primer paso es muy lento porque depende de la interacción débil para convertir un protón en un neutrón. De hecho es el paso más lento de todas las cadenas pp por lo que recibe el nombre reacción limitante ya que es el que dicta el ritmo de toda la cadena protón-núcleo. El positrón resultante de dicha reacción se aniquila inmediatamente con un electrón y su masa se convierte en energía liberada a través de dos fotones.



Tras esta reacción el deuterio producido en el primer paso se puede fusionar con otro hidrógeno para producir un isótopo ligero de helio  $^3\text{He}$ :



A partir de este punto la reacción se subdivide en tres ramas diferentes que desembocan todas en la generación de un núcleo  $^4\text{He}$ .

#### Cadena ppI:



#### Cadena ppII:



**Cadena ppIII:****Cadena ppIV:****2.7.2. La reacción pep**

Pep significa (protón-electrón-protón). Esta reacción es muy rara ya que se trata de una colisión de tres partículas simultáneamente, lo cual es mucho más improbable. La reacción pep puede tener lugar en vez de la reacción pp.

**2.7.3. Ciclo del carbono (CNO)**

Actúa en estrellas con temperaturas un poco más altas que las del Sol:

**2.7.4. Ciclo triple-alfa**

La energía total liberada en el proceso es 7.275 MeV. A su vez se produce una reacción secundaria en el que un núcleo de Carbono se fusiona con un átomo de Helio adicional para producir un isótopo estable de Oxígeno:



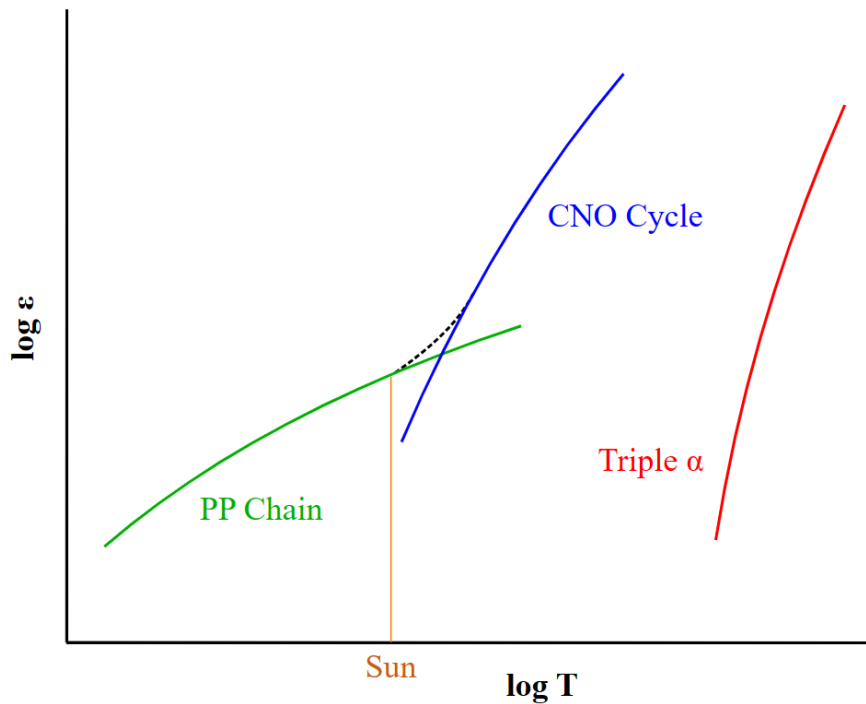
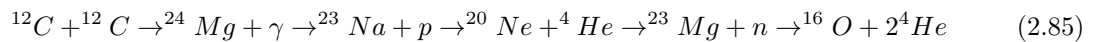


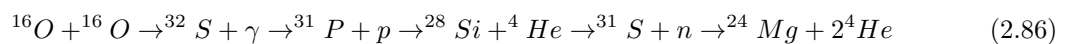
Figura 2.8: Energía relativa liberada ( $\epsilon$ ) en escala logarítmica en los procesos de fusión protón-protón, CNO y triple- $\alpha$  en función de la temperatura de la estrella.

### 2.7.5. Combustión estelar

**Combustión del carbono:** Una vez que el helio en el núcleo se agota, comienza la combustión del carbono:



**Combustión del oxígeno:** A temperaturas algo mayores se dan las siguientes reacciones:



**Combustión del silicio:** Estas reacciones conducen al hierro y níquel:



La producción de elementos más pesados que el hierro requieren una aportación de energía, y por lo tanto no se pueden producir por reacciones termonucleares. Estos elementos se producen por captura de neutrones durante las etapas finales violentas de la evolución estelar.

### Problema del déficit de neutrinos

Teniendo en cuenta todas estas reacciones esperadas en el núcleo de una estrella, la teoría anticipaba que el Sol generaba una gran cantidad de neutrinos. Sin embargo, cuando los científicos comenzaron a medir directamente los neutrinos solares en la década de 1960, observaron una discrepancia notable entre las predicciones teóricas y las mediciones experimentales. Este problema se originaba en que los experimentos detectaban menos neutrinos solares de los esperados (alrededor de 1/3). Esta discrepancia entre los valores que se esperaban obtener y las medidas experimentales es lo que se conoció como el problema

de los neutrinos solares, que desconcertó a la comunidad científica durante décadas, planteando dudas sobre nuestra comprensión de la física solar y las propiedades de los neutrinos.

La solución a este enigma surgió en la década de 1990, cuando los científicos descubrieron la capacidad de los neutrinos para cambiar de sabor mientras viajan por el espacio (fenómeno conocido como oscilación de neutrinos). Estas partículas existen en tres sabores distintos: electrónico, muónico y tauónico. En su trayecto desde el Sol hasta la Tierra, los neutrinos pueden transformarse de un sabor a otro. Sin embargo, los detectores generalmente solo pueden captar principalmente los neutrinos electrónicos, ya que son los que tienen la mayor probabilidad de interactuar con la materia ordinaria en los detectores disponibles. Esto significa que los detectores terrestres solo pueden capturar una parte de los neutrinos solares originales, ya que algunos cambian de sabor antes de ser detectados. Esta nueva comprensión de la oscilación de los neutrinos permitió conciliar las mediciones experimentales con las predicciones teóricas. Se demostró que los neutrinos solares no desaparecían, sino que simplemente cambiaban de sabor en su camino hacia nosotros. Una posibilidad que se barajó cuando este problema surgió fue que tal vez el modelo estándar de astrofísica no fuera del todo correcto. No obstante, ya se ha demostrado que la oscilación de neutrinos es la solución correcta, y a día de hoy es la aceptada por la comunidad científica.

## Capítulo 3

# Evolución estelar

La formación de una estrella comienza con el colapso gravitacional de una nube molecular gigante. Estas nubes moleculares gigantes tienen un diámetro aproximado de 100 años luz y 6.000.000 masas solares. A medida que colapsa, la nube molecular se fragmenta, y en cada uno de los fragmentos, el gas que colapsa libera energía en forma de calor. A medida que aumenta la temperatura y presión de cada fragmento, este se condensa en una bola giratoria de gas muy caliente, conocida como *protoestrella*. Una protoestrella continúa creciendo por acreción de gas y polvo de la nube molecular, y termina convirtiéndose en una estrella, que diremos que está en la secuencia principal.

### 3.1. Diagrama Hertzsprung-Russell (HR)

El diagrama de Hertzsprung-Russell (HR) es un gráfico en el que se representa la luminosidad (en el eje vertical) contra la temperatura superficial (en el eje horizontal) de las estrellas. Esto permite clasificarlas y estudiar su evolución.

La temperatura superficial de una estrella está relacionada con el color que observamos, de manera que las estrellas más calientes tienen temperaturas superficiales más altas y aparecen más azules, mientras que las estrellas más frías tienen temperaturas superficiales más bajas y aparecen más rojas. Por otro lado, la luminosidad de una estrella está relacionada con su brillo intrínseco, es decir, cuánta energía emite por unidad de tiempo.

La región principal del diagrama HR, llamada *secuencia principal*, es donde se encuentran la mayoría de las estrellas, incluido nuestro Sol. En la secuencia principal, las estrellas están fusionando hidrógeno en helio en sus núcleos a través de la fusión nuclear. En esta fase, una estrella está en equilibrio hidrostático, lo que significa que la presión generada por la fusión nuclear en su núcleo es equilibrada por la gravedad que actúa sobre la masa de la estrella. Esta etapa es la fase en la que una estrella pasa la mayor parte de su vida. La duración de la fase de secuencia principal de una estrella depende de su masa. Las estrellas más masivas tienen fusiones nucleares más rápidas y, por lo tanto, pasan menos tiempo en la secuencia principal, mientras que las estrellas menos masivas, como nuestro Sol, pueden permanecer en esta fase durante miles de millones de años.

Además de la secuencia principal, el diagrama HR también muestra otras regiones donde las estrellas pasan a medida que evolucionan, como las gigantes rojas, las supergigantes, las enanas blancas, entre otras. Estas regiones reflejan diferentes etapas en la vida y evolución estelar, desde el nacimiento en la secuencia principal hasta la muerte como enanas blancas, supernovas o agujeros negros, dependiendo de su masa inicial.

Las gigantes son estrellas que han agotado su hidrógeno central y han comenzado a fusionar helio en su núcleo. Las supergigantes son estrellas aún más masivas y luminosas que las gigantes, que han

evolucionado más allá de la secuencia principal. En el diagrama HR, estas estrellas se encuentran en la región superior derecha, siendo más luminosas pero también más frías que cuando estaban en la secuencia principal.

Las enanas blancas son los núcleos remanentes de estrellas masivas que han agotado su combustible nuclear y han perdido sus capas externas en forma de una nebulosa planetaria. Son estrellas pequeñas y extremadamente densas, compuestas principalmente de carbono y oxígeno. En el diagrama HR, las enanas blancas se encuentran en la región inferior izquierda, siendo mucho menos luminosas pero aún calientes.

Las estrellas masivas pueden terminar su vida en una explosión conocida como supernova. Las supernovas pueden dejar atrás remanentes extremadamente densos, como estrellas de neutrones o agujeros negros. Estas etapas finales de la evolución estelar generalmente no se representan en el diagrama HR, ya que estas estrellas ya no emiten radiación en el espectro visible.

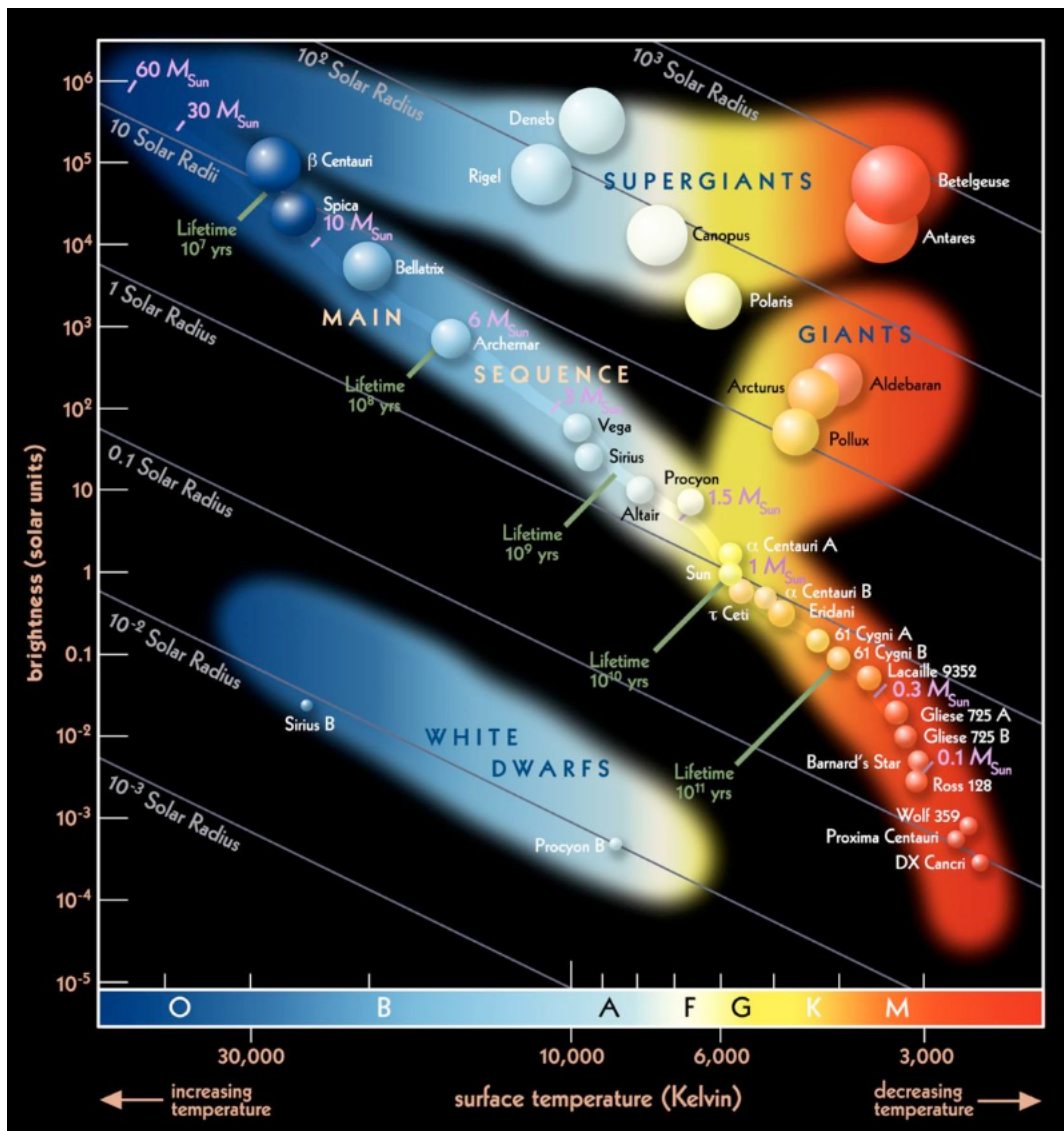


Figura 3.1: Diagrama Hertzsprung-Russell.

En las estrellas de la secuencia principal existe una relación entre la masa y la luminosidad. Esta relación es empírica y se aplica a las estrellas de la secuencia principal que están en el rango de 0,1 a 50  $M_{\odot}$ .

$$L \propto M^{3,5}. \quad (3.1)$$

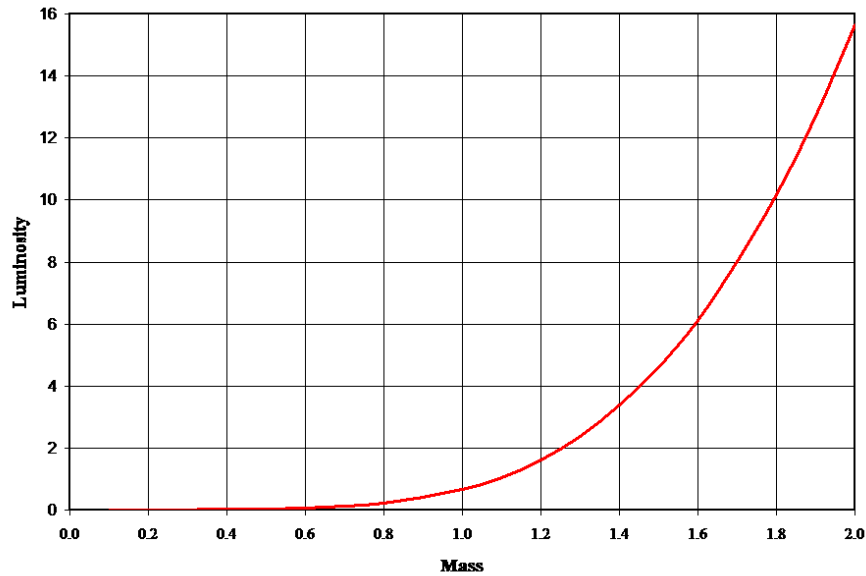


Figura 3.2: Relación masa-luminosidad para las estrellas de la secuencia principal de edad cero. La masa y la luminosidad son relativas al Sol actual.

La luminosidad y la temperatura superficial de una estrella (y por tanto su posición en el diagrama HR) está intrínsecamente relacionada con la energía que se genera en su núcleo, y esta energía varía dependiendo del tipo de reacciones nucleares que tengan lugar en esa estrella, como hemos visto en la figura 2.8.

El ciclo protón-protón (pp), como ya hemos dicho, es la cadena de reacciones nucleares dominante en estrellas de baja masa, como nuestro Sol. Como vemos en 2.8, estas reacciones no son las que más energía generan. Por lo tanto, las estrellas en las que el ciclo pp es la reacción principal se localizan en el diagrama HR en la parte inferior derecha de la secuencia principal, y son estrellas de baja temperatura y baja luminosidad.

En estrellas más masivas que el Sol, la cadena pp es menos eficiente, y la fusión de hidrógeno en helio se lleva a cabo principalmente a través del ciclo CNO. Las estrellas que utilizan el ciclo CNO como fuente principal de energía tienden a tener una luminosidad y temperatura superficial más altas que las estrellas de la secuencia principal que utilizan la cadena pp. En el diagrama HR, estas estrellas más masivas pueden encontrarse en la secuencia principal pero tienden a agruparse en regiones con mayor luminosidad y temperatura superficial que las estrellas que utilizan la cadena pp.

La fusión del helio en carbono se produce a través del proceso conocido como triple alfa, que como ya hemos visto, consiste en la fusión de tres núcleos de helio para formar carbono. Este proceso es crucial en etapas posteriores de la evolución estelar, especialmente para estrellas más masivas que han agotado su hidrógeno en el núcleo y han comenzado a fusionar helio en elementos más pesados. En el diagrama HR, esto generalmente ocurre en estrellas evolucionadas, como las gigantes rojas o las estrellas de tipo S, que se encuentran principalmente en la rama gigante asintótica (AGB), en la región superior derecha. Es decir, ya no están en la secuencia principal.



Además, es interesante analizar la evolución y el desplazamiento a lo largo del tiempo en el diagrama H-R de las estrellas en función de su masa inicial:

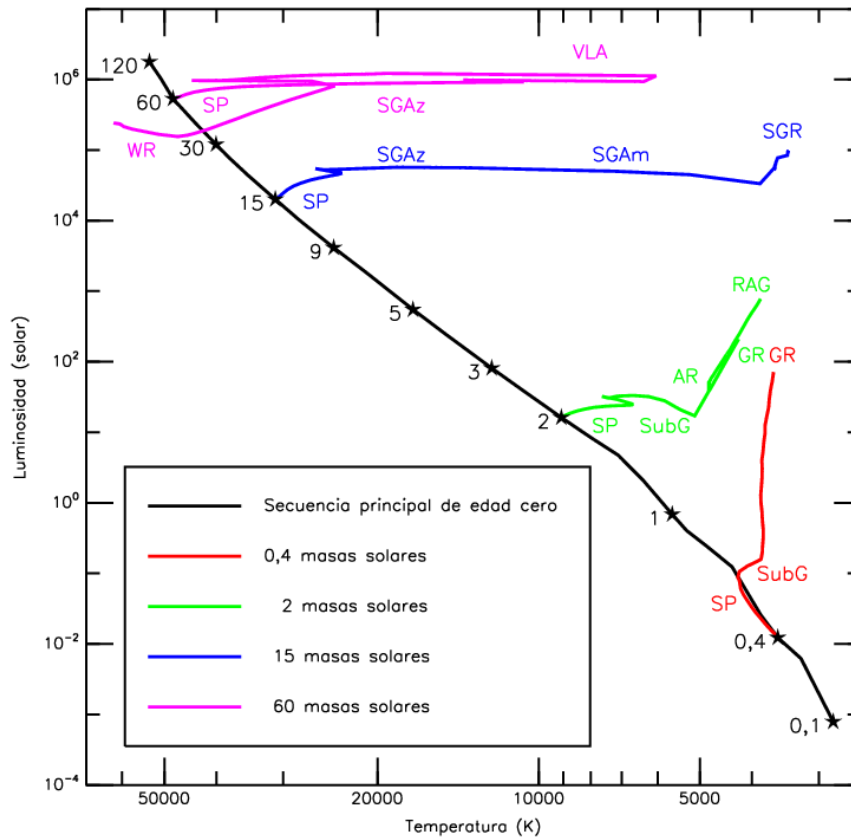


Figura 3.3: Trayectorias evolutivas de estrellas de distintas masas representadas en un diagrama de Hertzsprung-Russell. SP: Secuencia principal. SubG: Subgigante. GR: Gigante roja. AR: Apelotonamiento rojo. RAG: Rama asintótica gigante. SGaz: Supergigante azul. SGAm: Supergigante amarilla. SGR: Supergigante roja. WR: Estrella Wolf-Rayet. VLA: Variable luminosa azul

## Capítulo 4

# Objetos compactos y colapso estelar

El estudio de las estrellas compactas comenzó con el descubrimiento de las enanas blancas y la exitosa descripción de sus propiedades mediante la estadística de Fermi-Dirac, que asumía que están sostenidas contra el colapso gravitacional por la presión de degeneración de los electrones. Esta idea fue propuesta por primera vez por Fowler en 1926.

### 4.1. Enanas blancas

Una enana blanca es un remanente de núcleo estelar compuesto principalmente de materia degenerada por electrones. Su masa es comparable a la del Sol, mientras que su volumen es comparable al de la Tierra, y por tanto es muy densa. Por otro lado tiene muy baja luminosidad, procedente de la emisión de energía térmica residual; no se produce fusión en una enana blanca, por lo que es poco luminosa. Un ejemplo es Sirio B. Se ubican en la parte inferior izquierda del diagrama de Hertzsprung-Russell, como se puede ver en la figura 3.1.

Cuando termina el período de fusión de hidrógeno de una estrella de la secuencia principal de masa baja o media, dicha estrella se expandirá a una gigante roja durante la cual fusionará helio con carbono y oxígeno en su núcleo mediante el proceso triple alfa. Si una gigante roja no tiene suficiente masa para generar las temperaturas centrales necesarias para fusionar carbono, se acumulará una masa inerte de carbono y oxígeno en su centro. Después de que una estrella de este tipo se desprenda de sus capas externas y forme una nebulosa planetaria, dejará atrás un núcleo, que es la enana blanca remanente. Esta enana blanca ya no sufre reacciones de fusión, por lo que la estrella no tiene ninguna fuente de energía. Como resultado, no puede sostenerse por sí mismo por el calor generado por la fusión contra el colapso gravitatorio, sino que solo se sostiene por la presión de degeneración de electrones, lo que la hace extremadamente densa. Algunos ejemplos son:

<b>Enana blanca</b>	<b>Masa (<math>M_{\odot}</math>)</b>
Sirius B	$\sim 1.0$
Procyon B	$\sim 0.6$
Van Maanen's Star	$\sim 0.7$
Stein 2051 B	$\sim 0.6-0.7$
40 Eridani B	$\sim 0.6$
LP 145-141	$\sim 0.6-0.7$
GJ 440 B	$\sim 0.7$
GD 165 B	$\sim 0.6-0.7$
LHS 4033	$\sim 0.6$
L 97-12	$\sim 0.5-0.6$

Cuadro 4.1: Algunas enanas blancas conocidas y sus respectivas masas.

Los astrónomos notaron que no se observaban estrellas enanas blancas con masas significativamente mayores que cierto valor crítico, lo que hizo que se sospechara de la existencia de un límite superior en la masa. En 1931, gracias al trabajo de Chandrasekhar ([Cha31a]), se encontró que existe una masa máxima para que una enana blanca se mantenga: es el límite de Chandrasekhar (aproximadamente 1,44 veces  $M_{\odot}$ ); más allá de este no puede ser soportada por la presión de degeneración de electrones y colapsa en una estrella de neutrones.

## 4.2. Estrellas de neutrones

En 1932, Chadwick descubrió el neutrón. Inmediatamente, las ideas formuladas por Fowler para los electrones se generalizaron a los neutrones y así se predijo la existencia de una nueva clase de estrellas compactas con un núcleo de neutrones degenerados: las estrellas de neutrones. Esta predicción fue absolutamente correcta, pues en 1967 se observó la primera estrella de neutrones. Los primeros cálculos de modelos de estrellas de neutrones fueron logrados por Oppenheimer, Volkoff y Tolman en 1939, describiendo la materia en tal estrella como un gas de neutrones degenerados ideal. Sus cálculos también mostraron la existencia de una masa máxima, como en el caso de las enanas blancas, por encima de la cual la estrella no es estable y colapsa en un agujero negro.

Cuando una estrella agota su combustible nuclear, su destino final depende principalmente de su masa inicial. Las estrellas masivas, con una masa varias veces mayor que la del Sol, pueden experimentar un gran colapso gravitacional tras la fase de supernova, dando lugar a objetos extremadamente densos y compactos conocidos como estrellas de neutrones o agujeros negros.

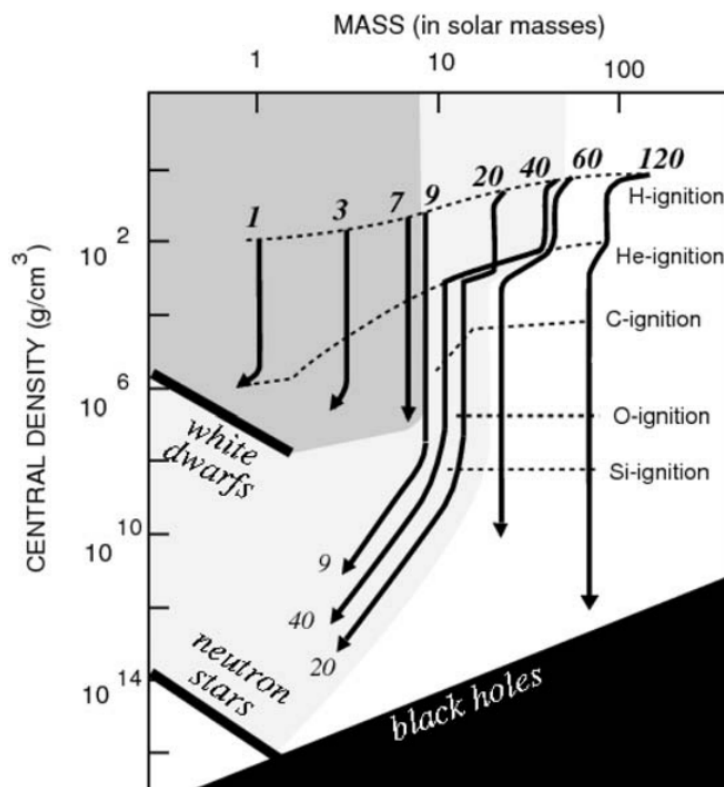


Figura 4.1: Las estrellas dependiendo de su masa inicial evolucionarán hacia diferentes estados finales: enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros. También se puede ver el tipo de reacciones que tienen lugar en cada fase de la evolución. [Tim13]

Las enanas blancas, las estrellas de neutrones y los agujeros negros están gobernados por la relatividad general en condiciones extremas de gravedad y densidad. Además, tienen propiedades muy distintas a las estrellas de la secuencia principal:

- No están quemando combustible nuclear.
- Son mucho más pequeñas que las estrellas normales y, por lo tanto, tienen campos gravitacionales superficiales mucho más fuertes.
- A menudo, los objetos compactos tienen campos magnéticos fuertes, mucho más fuertes que los encontrados en las estrellas normales.

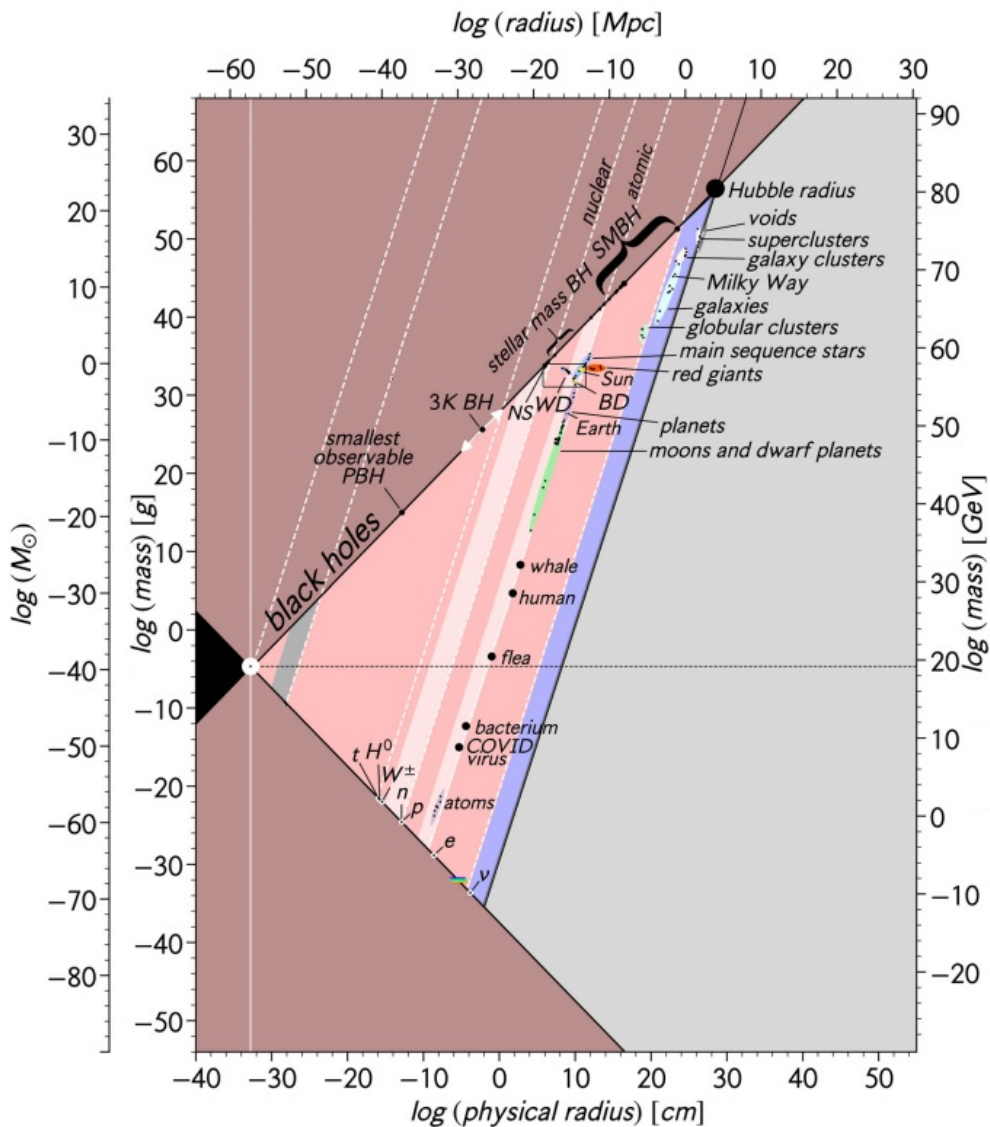


Figura 4.2: Representación de diferentes objetos según su masa en función del radio ([LP23]). BD = brown dwarfs (enanas marrones), WD = white dwarfs (enanas blancas), NS = neutron stars (estrellas de neutrones), BH = black holes (agujeros negros), SMBH = super massive black holes (agujeros negros súper masivos), PBH = primordial black hole (agujero negro primordial).

En la figura (4.2) podemos ver una clasificación de los objetos en función de su masa y su radio, o en otras palabras, de su densidad. Las líneas discontinuas son líneas de isodensidad, es decir, los objetos que estén en la misma línea tendrán densidades del mismo orden de magnitud. Y cuanto más a la izquierda esté la línea de isodensidad, mayor es la densidad. Esta clasificación es muy útil porque como ya hemos visto la evolución de una estrella depende fundamentalmente de su densidad.

También se han añadido algunos otros objetos para usarlo como comparativa, como átomos, humanos, bacterias, lunas y planetas, entre otros. Estos objetos tienen una densidad del mismo orden de magnitud que las estrellas de la secuencia principal, y se colocan en torno a la línea de isodensidad *atómica*,  $\rho_{atomic} \sim 1g/cm^3$ . Esta densidad es aproximadamente constante en una masa de protón por volumen atómico. Para estos objetos

$$M \propto R^3. \quad (4.1)$$

Las enanas blancas, al ser mucho más densas que las estrellas de la secuencia principal, se colocan por encima de la línea de isodensidad atómica. Las estrellas de neutrones, por su parte, son todavía mucho más densas, y se colocan en la línea de densidad *nuclear*. En esta isolínea se ubican los protones y neutrones, y es aproximadamente 14 órdenes de magnitud más densa que la nuclear ( $\rho_{nuclear}/\rho_{atomic} \sim 10^{14}$ ).

Observamos que los puntos están muy polarizados en sus posiciones, no se observa una distribución puramente aleatoria que llene todo el plano disponible. Esto se debe a que las posiciones de los objetos físicos dentro de él son una manifestación de las diferentes fuerzas de la naturaleza. Las estructuras, ya sean átomos, estrellas o árboles, son consecuencias de la existencia de estados de equilibrio estable entre fuerzas naturales de atracción y repulsión. Hay dos grandes regiones vacías: la superior cubre el área ocupada por los agujeros negros:

$$R \leq 2GM. \quad (4.2)$$

La otra región vacía es el dominio dominado por la cuántica, delimitada por el principio de incertidumbre, que en unidades naturales, se escribe

$$\Delta R \Delta M \gtrsim 1. \quad (4.3)$$

En la imagen (4.2) se puede observar un pequeño cuadrado en el que si ampliamos veremos la imagen (4.3), en la cual se puede ver claramente el límite de Chandrasekhar (así como el límite Volkoff–Oppenheimer–Tolman). En esta imagen podemos ver también estrellas de neutrones (NS), enanas blancas (WD), estrellas de la secuencia principal y enanas marrones (BD). Esta gráfica ilustra el papel de la presión de degeneración en el colapso gravitatorio de las estrellas. Cuando las estrellas de la secuencia principal se quedan sin combustible, colapsan en enanas blancas (esta transformación se puede ver representada por las flechas azules). Si una enana blanca supera el límite de Chandrasekhar (representado por la línea roja), se convierte en una estrella de neutrones (transformación representada también por flechas azules) y si estas aumentan también su masa y superan el límite Volkoff–Oppenheimer–Tolman (la otra línea roja) se convierte en un agujero negro.

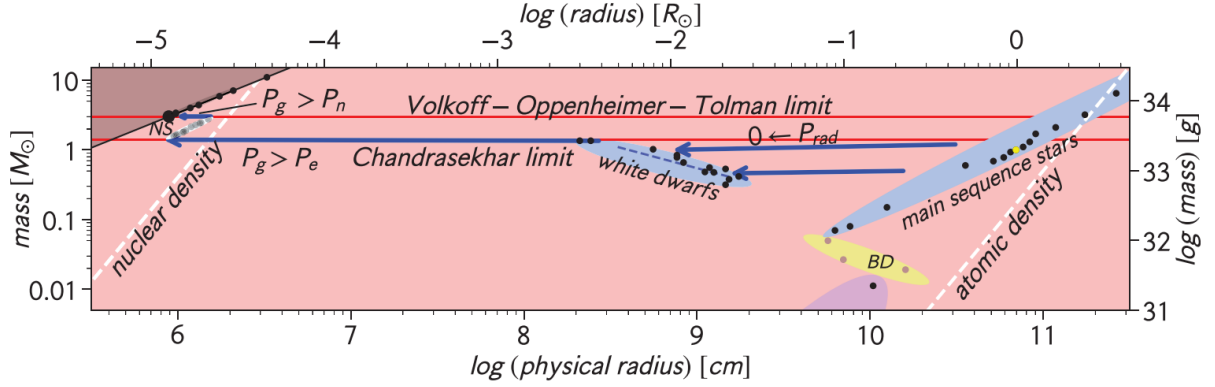


Figura 4.3: Gráfica anterior ampliada. [LP23]

## 4.3. Colapso estelar

### 4.3.1. El límite de Chandrasekhar

Chandrasekhar consiguió llegar a este límite combinando ideas de la física cuántica y de la relatividad especial. En particular, usó la idea de Fowler de presión de degeneración de electrones, derivada de la estadística de Fermi-Dirac, y hizo los cálculos para el caso no relativista pero también para el relativista (en el que los electrones en una estrella enana blanca alcanzan velocidades cercanas a la de la luz, por lo que era necesario usar la teoría de la relatividad especial para describir su comportamiento). Usando las ecuaciones de estado no relativista 2.59 y relativista 2.62, Chandrasekhar derivó la relación entre la masa y el radio de una enana blanca. Veamos cómo lo hizo:

Una estrella se puede ver como una esfera que gira sobre sí misma de átomos de hidrógeno sostenida por presión térmica  $P \sim nkT$ , donde  $n$  es la densidad de átomos. La estrella está en equilibrio cuando la energía total

$$E = E_{\text{grav}} + E_{\text{kin}} \quad (4.4)$$

es un mínimo. Para una estrella de masa  $M$  y radio  $R$ , las energías gravitatoria y cinética son respectivamente

$$E_{\text{grav}} \sim -\frac{GM^2}{R}, \quad (4.5)$$

$$E_{\text{kin}} \sim nR^3 \langle E \rangle, \quad (4.6)$$

donde  $\langle E \rangle$  es la energía cinética promedio de los átomos.

Eventualmente, cuando ya no hay suficiente combustible nuclear disponible, la fusión en el núcleo se detiene, después de lo cual la estrella se enfría y se contrae. Consideremos el posible estado final de una estrella a  $T = 0$ . La presión  $P$  no tiende a cero cuando  $T \rightarrow 0$  debido a la presión de degeneración. Dado que  $m_e \ll m_p$ , los electrones se vuelven degenerados primero, a una densidad numérica de un electrón en un cubo cuyo lado mide aproximadamente la longitud de onda de Compton. Veámoslo:

Para calcular la densidad numérica de electrones necesaria para que se vuelvan degenerados, primero necesitamos la relación entre la densidad numérica  $n_e$  y la longitud de onda de Compton  $\lambda_C$ . La longitud

de onda de Compton<sup>1</sup> aplicada a un electrón está dada por:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}, \quad (4.7)$$

donde  $h$  es la constante de Planck,  $m_e$  es la masa del electrón y  $c$  es la velocidad de la luz.

La densidad numérica de electrones  $n_e$  se calcula dividiendo el número total de electrones  $N_e$  entre el volumen  $V$  en el que están contenidos:

$$n_e = \frac{N_e}{V}. \quad (4.8)$$

Dado que estamos considerando un cubo de lado  $\lambda_C$ , el volumen  $V$  es  $\lambda_C^3$ .

Entonces, podemos encontrar la densidad numérica de electrones necesaria para la degeneración dividiendo 1 (un electrón por caja) entre el volumen de un cubo con una longitud de lado igual a la longitud de onda de Compton:

$$n_e = \frac{1}{\lambda_C^3}. \quad (4.9)$$

Sustituyendo la expresión para  $\lambda_C$ , obtenemos:

$$n_e = \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3. \quad (4.10)$$

Por tanto, en general se tiene

$$n_e^{-1/3} \sim \frac{\hbar}{\langle p_e \rangle}, \quad (4.11)$$

donde  $\langle p_e \rangle$  es el momento promedio del electrón.

Veamos bajo qué condiciones la presión degenerada de los electrones puede sostener una estrella para evitar su colapso a  $T = 0$ .

Primero supongamos que los electrones son no relativistas. Entonces,

$$\langle E \rangle \sim \frac{\langle p_e \rangle^2}{m_e}. \quad (4.12)$$

Dado que  $n = n_e$ , sustituimos (4.11) y (4.12) en (4.6),

$$E_{\text{kin}} \sim n_e R^3 \langle E \rangle \sim n_e R^3 \frac{\langle p_e \rangle^2}{m_e} \sim \frac{\hbar^2 R^3 n_e^{5/3}}{m_e}. \quad (4.13)$$

Y como  $m_e \ll m_p$ ,  $M \approx n_e R^3 m_p$ , entonces  $n_e \sim \frac{M}{m_p R^3}$  y sustituyendo esto en (4.13), queda

$$E_{\text{kin}} \sim \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{5/3} \frac{1}{R^2}, \quad (4.14)$$

donde el término  $\frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{5/3}$  es constante para  $M$  fijo.

Sumando las energías potencial (4.5) y cinética (4.14) en la ecuación de equilibrio para una estrella, la energía total queda

$$E \sim -G \frac{M^2}{R} + \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{5/3} \frac{1}{R^2} \sim -\frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R^2}, \quad (4.15)$$

---

<sup>1</sup>La longitud de onda de Compton de una partícula de masa  $m$  es:  $\lambda_C = \frac{h}{mc}$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes que dependen de las propiedades físicas de la estrella y no de su radio  $R$ .

El punto de equilibrio ocurre cuando  $\frac{\partial E}{\partial R} = 0$ , y

$$\frac{\partial E}{\partial R} \sim G \frac{M^2}{R^2} - \frac{\hbar^2}{m_e} \left( \frac{M}{m_p} \right)^{5/3} \frac{1}{R^3}. \quad (4.16)$$

Y de ahí,

$$GM^2 - \frac{\hbar^2}{m_e} \left( \frac{M}{m_p} \right)^{5/3} \frac{1}{R_{\min}} \sim 0. \quad (4.17)$$

Y con eso obtenemos el valor de  $R_{\min}$ :

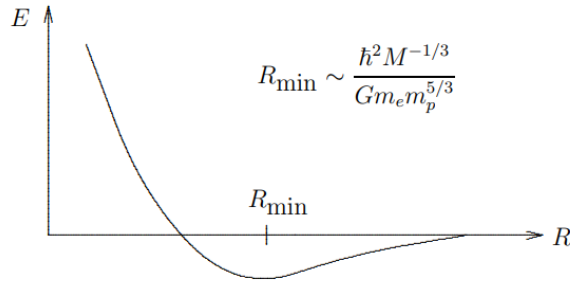


Figura 4.4: Mínimo de energía (punto de equilibrio).

El colapso de la estrella se evita. Se convierte en una enana blanca o una estrella fría y muerta sostenida por la presión de degeneración electrónica. En equilibrio:

$$n_e \sim \frac{M}{m_p R_{\min}^3} \left( \frac{m_e G}{\hbar} (M m_p^2)^{2/3} \right)^3. \quad (4.18)$$

Sin embargo, la validez de la aproximación no relativista requiere que  $\langle p_e \rangle \ll m_e c$ , es decir,

$$\frac{\langle p_e \rangle}{m_e} = \frac{\hbar n_e^{1/3}}{m_e} \ll c, \quad (4.19)$$

por lo que,

$$n_e \ll \left( \frac{m_e c}{\hbar} \right)^3. \quad (4.20)$$

Para una enana blanca, esto implica

$$\frac{m_e G}{\hbar^2} (M m_p^2)^{2/3} \ll \frac{m_e c}{\hbar}, \quad (4.21)$$

por tanto,

$$M \ll \frac{1}{m_p^2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2}. \quad (4.22)$$

Para valores suficientemente grandes de  $M$ , los electrones tendrían que ser relativistas, en cuyo caso debemos usar

$$\langle E \rangle = \langle p_e \rangle c = \hbar c n_e^{1/3}, \quad (4.23)$$



$$E_{\text{kin}} \sim n_e R^3 \langle E \rangle \sim \hbar c R^3 n_e^{4/3} \sim \hbar c R^3 \left( \frac{M}{m_p R^3} \right)^{4/3} \sim \hbar c \left( \frac{M}{m_p} \right)^{4/3} \frac{1}{R}, \quad (4.24)$$

Entonces ahora,

$$E \sim -\frac{\alpha}{R} + \frac{\gamma}{R}. \quad (4.25)$$

El equilibrio ocurre cuando  $\frac{\partial E}{\partial R} = 0$ ,

$$\frac{\partial E}{\partial R} \sim \frac{\alpha}{R^2} - \frac{\gamma}{R^2} = 0. \quad (4.26)$$

Y esto se da cuando  $\gamma = \alpha$ .

$$M \sim \left( \frac{1}{m_p^2} \right) \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2}. \quad (4.27)$$

Para valores más pequeños de  $M$ ,  $R$  debe aumentar hasta que los electrones se vuelvan no relativistas, en cuyo caso la estrella es soportada por la presión de degeneración de electrones, como acabamos de ver. Para valores más grandes de  $M$ ,  $R$  debe continuar disminuyendo, por lo que la presión de degeneración de electrones no puede sostener la estrella. Por lo tanto, existe una masa crítica  $M_C$ ,

$$M_C \sim \left( \frac{1}{m_p^2} \right) \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2}, \quad (4.28)$$

por encima del cual una estrella no puede terminar como una enana blanca. Por tanto,  $M < M_C$ . Este es el límite de Chandrasekhar. Sustituyendo los valores de las constantes obtenemos  $M_C \approx 1,85 M_\odot$ . Realizando un cálculo más riguroso que tenga en cuenta las correcciones relativistas y las propiedades específicas de la materia nuclear da como resultado  $M_C \approx 1,4 M_\odot$ .

Y además existe un radio crítico tal que  $R > R_C$

$$R_C \sim \left( \frac{1}{m_e m_p} \right) \left( \frac{\hbar^3}{Gc} \right)^{1/2}. \quad (4.29)$$

Para realizar todos estos cálculos hemos asumido que las correcciones de la relatividad general a la teoría newtoniana son despreciables. Vamos a comprobar que esta suposición es cierta. Habíamos visto que en el punto de equilibrio

$$R_{\text{min}} \sim \frac{\hbar M^{-1/3}}{G m_e m_p^{5/3}}, \quad (4.30)$$

es decir,  $R \sim M^{-1/3}$  para una enana blanca. Dado que  $M < M_C$ , esto establece un límite inferior en el radio:  $R > R_C$  con  $R_C$  la expresión obtenida en (4.28):

$$R > R_C \sim \left( \frac{1}{m_e m_p} \right) \left( \frac{\hbar^3}{Gc} \right)^{1/2}. \quad (4.31)$$

Vemos que nos aparece un término  $\hbar^{3/2}$ . Retomando la expresión (4.27), despejamos  $\hbar^{3/2}$  de esa ecuación:

$$\hbar^{3/2} \sim \frac{M m_p^2 G^{3/2}}{c^{3/2}}. \quad (4.32)$$

Sustituyendo esto en (4.31),

$$R > \frac{Mm_p G}{m_e c^2} \Rightarrow \frac{GM}{c^2 R} < \frac{m_e}{m_p} \ll 1. \quad (4.33)$$

La razón adimensional  $\frac{GM}{c^2 R}$  es una medida de la fuerza del campo gravitacional. Dado que es pequeña, despreciar las correcciones de la relatividad general tal y como hemos hecho está justificado.

Veamos una representación del radio en función de la masa para una enana blanca considerando los casos no relativista, relativista y ultrarrelativista:

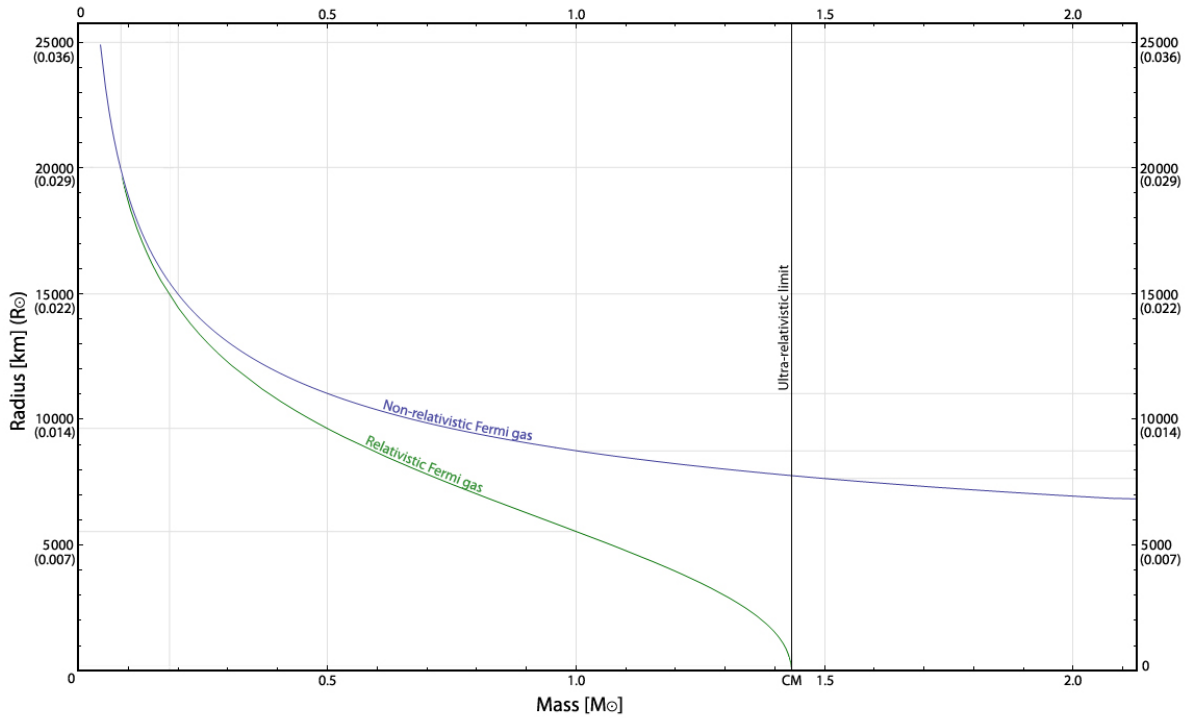


Figura 4.5: Representación del radio en función de la masa de una enana blanca. En la curva verde se ha considerado la estrella como un gas ideal de Fermi relativista, mientras que en la curva azul se ha considerado la estrella como un gas de Fermi ideal no relativista. La línea de color negro marca el límite ultrarrelativista. CM hace referencia a Chandrasekhar Mass.

En esta gráfica se puede ver que para masas menores a aproximadamente 1.4 masas solares, la enana blanca puede existir en equilibrio, ya sea en el régimen no relativista o relativista. A medida que vamos aumentando la masa el radio va disminuyendo, y cuanto más nos acercamos al límite, las diferencias entre los modelos no relativista y relativista se hacen más evidentes. El radio disminuye más lentamente en el régimen no relativista debido a que, como habíamos visto en 2.49 y 2.50,  $P_{nr} \propto \rho^{5/3}$  y  $P_r \propto \rho^{4/3}$ : como la presión aumenta más rápido con la densidad en el caso no relativista que en el relativista, se necesita un aumento significativo en la densidad para mantener el equilibrio cuando la masa de la enana blanca aumenta. Por lo tanto, la estrella puede soportar una masa mayor sin que su radio disminuya tan drásticamente. Pero cabe resaltar que medida que la masa de la enana blanca aumenta, la densidad también, y cuando alcanza valores extremadamente altos, los electrones son forzados a ocupar niveles de energía muy elevados debido al principio de exclusión de Pauli. Esto significa que su velocidad se acerca a la velocidad de la luz, y los electrones entran en el régimen relativista. Por eso no tiene sentido hablar del caso no relativista cuando la masa es casi la masa límite. Y cuando efectivamente se alcanza ese límite, los electrones en su interior están tan comprimidos que sus velocidades se acercan a la velocidad de la

luz, entrando en el régimen ultra-relativista. En este punto, el radio de la estrella se vuelve irrelevante para pequeñas variaciones en la masa ya que cualquier aumento adicional en la masa llevaría a un colapso gravitacional.

Cuando Chandrasekhar mostró su resultado, inicialmente hubo un rechazo por parte de la comunidad científica, y en particular por Eddington, un astrofísico muy respetado en su tiempo. Una de las críticas que se hacía era que este modelo no explicaba qué pasaba cuando se superaba el límite de Chandrasekhar. Sin embargo, los desarrollos en la física teórica confirmaron sus predicciones y establecieron su descubrimiento como un pilar fundamental en la astrofísica.

## 4.4. Supernovas Ia

Puede darse el caso de que una enana blanca tenga una masa por debajo del límite de Chandrasekhar, pero esa masa aumente hasta superarlo. Esto ocurre en un sistema binario en el que la enana blanca está en órbita con otra estrella, y debido a su intensa gravedad, atrae masa de su estrella compañera. Este proceso se conoce como acreción. Si la masa aumenta lo suficiente y supera el límite de Chandrasekhar, la enana blanca se vuelve inestable y se desencadena una explosión termonuclear que destruye completamente la estrella<sup>2</sup>. Esta explosión produce una liberación enorme de energía y la emisión de una gran cantidad de luz.

## 4.5. Estrellas de neutrones y agujeros negros

En una enana blanca, los electrones ocupan todos los niveles de energía disponibles hasta la energía de Fermi. Necesariamente  $E_F \lesssim m_e c^2$  (la energía en reposo del electrón), ya que de lo contrario los electrones serían relativistas y por tanto tendrían energías cinéticas mucho más altas y ya no seguirían una distribución de Fermi-Dirac típica de los fermiones degenerados; no podrían sostener la estrella. Por lo tanto, una enana blanca, en principio, es estable frente a la *desintegración beta inversa*:



ya que la reacción necesita una energía de al menos  $(\Delta m)c^2$ , donde  $\Delta m$  es la diferencia de masa neutrón-protón. Claramente  $\Delta m > m_e$  (de lo contrario, la desintegración beta sería imposible), de hecho  $\Delta m \sim 3m_e$ . Por lo tanto, se necesitan energías del orden de  $3m_e c^2$  para la desintegración beta inversa. Energías de este orden no están disponibles en las enanas blancas. Sin embargo, hemos visto en la sección anterior que si  $M > M_C$ , es decir, se excede el límite de Chandrasekhar, la gravedad comprimirá la enana blanca, y esto hará que la energía de Fermi de los electrones aumente. Llegará un punto en el que los electrones tengan suficiente energía para que se produzca la reacción de *desintegración beta inversa*, (esto ocurre cuando  $E_F \sim (\Delta m)c^2$ ).

Con esta reacción los electrones decaen y por tanto desaparece la presión de degeneración electrónica; los neutrinos escapan de la estrella y pueden ser detectados en la Tierra por los mismos métodos utilizados para detectar neutrinos solares. La reacción no puede llegar al equilibrio con la reacción inversa (lo que haría que la cantidad de electrones en la estrella se mantuviera constante y por tanto siguiera existiendo esa presión de degeneración electrónica):



Esta reacción no puede tener lugar porque los neutrinos escapan de la estrella. También podríamos preguntarnos si puede ocurrir la siguiente desintegración beta:




---

<sup>2</sup>Hay un tipo de supernovas clasificadas como Iax. Este tipo de supernova no siempre destruye por completo a la enana blanca progenitora.

Esta reacción también haría que la cantidad de electrones en la estrella se mantuviera constante. Pero tampoco puede ocurrir porque todos los niveles de energía de los electrones por debajo de  $E < (\Delta m)c^2$  están llenos cuando  $E > (\Delta m)c^2$ . Para que ocurra la reacción (4.36), el electrón producido debe ocupar un estado de energía disponible. Sin embargo, en estas condiciones todos los niveles de energía para los electrones por debajo de  $(\Delta m)c^2$  están llenos. Y como el electrón resultante de la desintegración beta necesita ocupar un nivel de energía por debajo de  $(\Delta m)c^2$ , lo cual no es posible porque no hay estados disponibles, esta reacción no ocurre.<sup>3</sup>

Dado que la desintegración beta inversa 4.34 elimina la presión de degeneración de electrones, sin esta presión para sostenerla, el núcleo de la estrella ahora experimenta un colapso hasta la densidad de la materia nuclear. La onda de choque producida por esta caída arranca todas las capas externas de la estrella en una explosión gigantesca que produce lo que observamos como una supernova de Tipo II (las supernovas de Tipo I ocurren cuando una enana blanca acumula materia que hace que su masa exceda el límite de Chandrasekhar).

Tras esta explosión solo queda un núcleo de neutrones extremadamente compacto de densidad de materia nuclear. Su único mecanismo de soporte es la presión de degeneración de neutrones. Para ver si esta presión de degeneración de neutrones puede sostener la estrella, realizamos los mismos cálculos que hemos hecho para la presión de degeneración electrónica pero reemplazando  $m_e$  por  $m_n$  (y podemos aproximar  $m_n$  por  $m_p$ ). Con estos cambios, la fórmula para el radio de una enana blanca (4.30) se convierte en

$$R \sim \frac{\hbar^2 M^{-1/3}}{G m_p^{8/3}} \quad (4.37)$$

para una estrella de neutrones. La fórmula de la masa crítica (4.28) no dependía de  $m_e$  por lo que se aplica también en este caso.

$$M_C \sim \left( \frac{1}{m_p^2} \right) \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2}. \quad (4.38)$$

Vamos a ver, igual que hemos hecho antes, si la aproximación de la relatividad general a la gravedad newtoniana es válida. Como  $\frac{GM}{c^2 R}$  es una medida de la fuerza del campo gravitacional, tomamos  $M \sim M_C$  y  $r \sim R_{min}$  y sustituimos las expresiones (4.38) y (4.37) en este cociente y queda:

$$\frac{GM}{c^2 R} \sim 1. \quad (4.39)$$

Esto indica que el campo gravitacional es fuerte y eso invalida la aproximación newtoniana a la relatividad general. Además, la aproximación del gas ideal ya no es válida, por lo que la fórmula de masa crítica (4.38) ya no valdría. No obstante, debe existir una masa máxima. Haciendo cálculos bastante más complejos que involucran la relatividad general y la física nuclear, se obtiene ese valor, que es  $M_{max} \approx 3M_\odot$  (de hecho, será un poco menor).<sup>4</sup>

Si la masa del núcleo de neutrones remanente tras la explosión no supera la masa crítica  $M_C$ , ese núcleo se convertirá en una estrella de neutrones, sostenida por la presión de degeneración de neutrones.

<sup>3</sup>Todas estas reacciones están permitidas, ya que conservan la carga, el número de nucleones y el número leptónico, pero no se dan en las enanas blancas por las razones explicadas en esta página.

<sup>4</sup>Por detallar brevemente estos cálculos, lo que se hace es integrar la ecuación de equilibrio hidrostático relativista general, la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff que sería la ecuación de equilibrio hidrostático correcta para estrellas de neutrones, y con ello obtener la expresión de la densidad. Posteriormente, integramos

$$m(r) = \int_0^r \frac{4\pi r'^2 \rho(r')}{c^2} dr'. \quad (4.40)$$

Y con ello, dependiendo de la densidad, obtenemos un límite superior para la masa máxima de  $\approx 2,9M_\odot$ , y para densidades superiores a  $\approx 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ , obtenemos un límite inferior de  $\approx 2,2M_\odot$ . Los cálculos detallados se pueden encontrar en [KB96].

Si, por otro lado, la masa excede la masa crítica, entonces no puede ser sostenida por la presión de degeneración de neutrones y debe continuar colapsando hasta que

$$R \rightarrow \frac{2GM}{c^2} = R_S. \quad (4.41)$$

Este es el *radio de Schwarzschild*. Cualquier objeto esféricamente simétrico con un radio menor que su radio de Schwarzschild no se puede ver porque la luz no puede escapar de su superficie. Un objeto que ha colapsado a este radio es un agujero negro.

## 4.6. Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un análisis del equilibrio y la evolución de las estrellas, centrándose en los principios fundamentales que determinan su comportamiento. Se han analizado las ecuaciones estelares y las reacciones que tienen lugar en el núcleo, así como su evolución, trabajando con el diagrama Hertzsprung-Russell. Hemos visto las diferentes presiones que mantienen una estrella en equilibrio, explicando cuáles tienen mayor relevancia en función de la fase en la que se encuentre la estrella.

El tema central ha sido la presión de degeneración y su equilibrio con la presión gravitatoria. Hemos visto que hay presión de degeneración tanto de electrones como de neutrones. Hemos obtenido el límite de Chandrasekhar, una masa crítica aproximadamente 1.4 veces la del Sol. Este resultado es fundamental en astrofísica, pues ilustra los límites físicos que definen el destino final de las estrellas en el universo. Y aunque el objetivo de este trabajo es determinar el límite de Chandrasekhar para enanas blancas mediante el equilibrio entre presión gravitatoria y presión de degeneración electrónica, trata también la degeneración de neutrones, remarcando que existe una clara analogía entre el límite para enanas blancas y el límite para estrellas de neutrones, cada una de ellas sostenida por una presión de degeneración distinta, pero que, en términos generales, funcionan igual.

# Bibliografía

- [Edd26] A. S. Eddington. *The Internal Constitution of the Stars*. England: Cambridge University Press, 1926.
- [Cha31a] S Chandrasekhar. “The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs”. En: *Astrophysical Journal* 74 (1931), págs. 81-82.
- [Cha31b] S. Chandrasekhar. “The Density of White Dwarf Stars”. En: *Philosophical Magazine* 11.70 (1931), págs. 592-596. DOI: [10.1080/14786443109461710](https://doi.org/10.1080/14786443109461710).
- [Cow+56] Jr. Cowan C. L. et al. “Detection of the Free Neutrino: A Confirmation”. En: *Science* 124.3212 (1956), págs. 103-104. DOI: [10.1126/science.124.3212.103](https://doi.org/10.1126/science.124.3212.103).
- [Wal82] Kameshwar C. Wali. “Chandrasekhar vs. Eddington—an unanticipated confrontation”. En: *Physics Today* 35.10 (oct. de 1982), págs. 33-40. ISSN: 0031-9228. DOI: [10.1063/1.2914790](https://doi.org/10.1063/1.2914790). eprint: [https://pubs.aip.org/physicstoday/article-pdf/35/10/33/8289868/33\\_1\\_online.pdf](https://pubs.aip.org/physicstoday/article-pdf/35/10/33/8289868/33_1_online.pdf). URL: <https://doi.org/10.1063/1.2914790>.
- [Che85] Herbert H. Chen. “Direct Approach to Resolve the Solar-Neutrino Problem”. En: *Phys. Rev. Lett.* 55 (14 sep. de 1985), págs. 1534-1536. DOI: [10.1103/PhysRevLett.55.1534](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.55.1534). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.55.1534>.
- [CG86] W. N. Cottingham y D. A. Greenwood. *An Introduction to Nuclear Physics*. Cambridge University Press, 1986, pág. 40. ISBN: 978-0-521-31960-7.
- [Man88] F. Mandl. *Statistical Physics*. 2nd. Wiley, 1988.
- [KW90] Rudolf Kippenhahn y Alfred Weigert. *Stellar Structure and Evolution*. 1st. Berlin: Springer, 1990. ISBN: 978-3-642-61718-9.
- [Phi94] A.C. Phillips. *The Physics of Stars*. Wiley, 1994.
- [KB96] Vassiliki Kalogera y Gordon Baym. “The Maximum Mass of a Neutron Star”. En: *The Astrophysical Journal* 470.1 (oct. de 1996), págs. L61-L64. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/310296](https://doi.org/10.1086/310296). URL: <http://dx.doi.org/10.1086/310296>.
- [CB97] Gilles Chabrier e Isabelle Baraffe. “Structure and evolution of low-mass stars”. En: *Astronomy and Astrophysics* 327 (1997), págs. 1039-1053. DOI: [10.1051/0004-6361:20000178](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20000178). arXiv: [astro-ph/9704118](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9704118).
- [LBA97] Gregory Laughlin, Peter Bodenheimer y Fred C. Adams. “The End of the Main Sequence”. En: *The Astrophysical Journal* 482.1 (jun. de 1997), pág. 420. DOI: [10.1086/304125](https://doi.org/10.1086/304125). URL: <https://dx.doi.org/10.1086/304125>.
- [Tow97a] P. K. Townsend. *Black Holes*. 1997. arXiv: [gr-qc/9707012](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9707012) [[gr-qc](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9707012)].
- [Tow97b] P.K. Townsend. *Lecture Notes: Black Holes*. Lecture notes. Silver St., Cambridge, U.K., 1997.
- [Pri00] Dina Prialnik. *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. Cambridge University Press, 2000. ISBN: 0-521-65065-8.
- [Bis01] G.S. Bisnovatyi-Kogan. *Stellar Physics: Stellar Evolution and Stability*. Ed. por A.Y. Blinov y M. Romanova. Astronomy and Astrophysics Library. Springer Science & Business Media, 2001. ISBN: 9783540669876.

- [HKT04] Carl J. Hansen, Steven D. Kawaler y Virginia Trimble. *Stellar Interiors: Physical Principles, Structure, and Evolution*. 2nd. Springer-Verlag, 2004. ISBN: 0-387-20089-4.
- [CO07] Bradley W. Carroll y Dale A. Ostlie. *Introduction to Modern Astrophysics*. 2nd. Pearson Addison-Wesley, 2007. ISBN: 9780805304022. URL: <https://www.pearson.com/store/p/introduction-to-modern-astrophysics/P100000785110>.
- [RN10] Sean G. Ryan y Andrew J. Norton. *Stellar Evolution and Nucleosynthesis*. Cambridge University Press, 2010. ISBN: 978-0-521-13320-3.
- [ZN12] Ya. B. Zeldovich e I. D. Novikov. *Stars and Relativity*. Revised. Mineola, NY: Dover Publications, 2012. ISBN: 978-0486488145.
- [Tim13] John Timlin. “Neutron Degeneracy Pressure”. En: *Quantum Mechanics II, Spring* (2013).
- [Bel+14] G. Bellini et al. “Neutrino Oscillations”. En: *Advances in High Energy Physics* 2014 (2014), pág. 191960. DOI: [10.1155/2014/191960](https://doi.org/10.1155/2014/191960). URL: <https://doi.org/10.1155/2014/191960>.
- [Ill19] Phyllis Illari. “Mechanisms, Models and Laws in Understanding Supernovae”. En: *Journal for General Philosophy of Science* 50.1 (2019), págs. 63-84. ISSN: 0925-4560. DOI: [10.1007/s10838-018-9435-y](https://doi.org/10.1007/s10838-018-9435-y).
- [LP23] Charles H Lineweaver y Vihan M Patel. “All objects and some questions”. En: *American Journal of Physics* 91.10 (2023), págs. 819-825.