Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

SERIES DE DIRICHLET

Autor: Javier Aparicio Merino
Tutor: Javier Sanz Gil
Año 2023/24

Índice general

Resumen y palabras clave **5**

Introducción **7**

1. Teoría elemental sobre la convergencia de las series de Dirichlet **11**
1.1. Regiones de convergencia y unicidad de las series 12
1.2. Determinación de la abscisa de convergencia 20

2. La fórmula de Perron y el orden de una función representada por una serie de Dirichlet **27**

3. Estudio particular de las series de Dirichlet ordinarias y el problema de Bohr **43**
3.1. Distancia entre las abscisas de convergencia 43
3.2. El problema de Bohr 51

4. Aplicaciones en teoría de números **55**
4.1. Funciones aritméticas y convolución de Dirichlet 56
4.2. Series de Dirichlet y productos de Euler 65

A. Teorema de Kronecker **77**

B. Productos infinitos **81**

Bibliografía **87**

Resumen y palabras clave

Resumen: se presenta la teoría elemental de las series de Dirichlet. En la medida de lo posible se considera el caso general, en el que los pesos que aparecen en su definición forman una sucesión creciente hacia infinito. Sin embargo, para el estudio de algunos aspectos se considera el caso ordinario, en el que los pesos son los logaritmos de los naturales. Se analizan resultados relativos a la posición de las abscisas de convergencia (usual, absoluta y uniforme), la regularidad y el comportamiento asintótico de la función suma, la presencia de singularidades en la recta vertical dada por la abscisa de convergencia, etc. También se estudia la relación de las series de Dirichlet con la teoría de números, proporcionando ejemplos que ilustren el uso de herramientas como la convolución de Dirichlet.

Palabras clave: series de Dirichlet; abscisas de convergencia, de convergencia absoluta y de convergencia uniforme; regularidad de la función suma; orden en rectas verticales; producto o convolución de Dirichlet.

Abstract: the elementary theory of Dirichlet series is presented. As much as possible, the general case is considered, where the weights appearing in the definition form an increasing sequence towards infinity. However, for the study of some aspects, the ordinary case is considered, where the weights are the logarithms of the natural numbers. Results related to the position of the abscissas of convergence (ordinary, absolute and uniform), the regularity and asymptotic behavior of the sum function and the presence of singularities on the vertical line given by the abscissa of convergence are analyzed. The relationship of Dirichlet series with number theory is also studied, providing examples that illustrate the use of tools such as Dirichlet convolution.

Keywords: Dirichlet series; abscissas of convergence, of absolute convergence and of uniform convergence; regularity of the sum; order in vertical lines; Dirichlet product or convolution.

Introducción

Dada una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones complejas en un conjunto no vacío X, se denomina la serie de término general f_n a la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por las sumas parciales:

$$S_n = f_1 + \ldots + f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

En las asignaturas *Análisis Matemático* y *Variable Compleja* se han estudiado sus propiedades y los distintos modos de convergencia. En particular, las series de potencias, aquellas de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con $a_n \in \mathbb{C}$, juegan un papel fundamental en el estudio de la analiticidad de una función compleja y su equivalencia con la holomorfía.

Por otro lado, el estudio de los números primos y sus propiedades se remonta a la Grecia clásica. Desde entonces se ha intentado buscar patrones y obtener una mejor comprensión de cómo se distribuyen. Matemáticos como Fermat, Mersenne, Goldbach o Euler consiguieron allanar el terreno y progresar en el conocimiento de estos escurridizos números. En este sentido, fue Euler el primero en conectar dos ramas de las Matemáticas aparentemente lejanas, la *Teoría de Números* y el *Análisis Matemático*, mediante el siguiente teorema

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R},\ s > 1,\ \text{ y } p \text{ primo.}$$

A Euler le siguieron otros muchos: Gauss, Lengendre, Chebyshev, Dirichlet... Dirichlet estudió sistemáticamente series de funciones del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ con s un número real mayor que 1 y $\chi(n)$ un carácter de Dirichlet. A partir de ese momento se empezó a considerar series más generales hasta llegar a series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

donde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos y $s = \sigma + it$ la variable compleja. Este tipo de series se denominan *Series de Dirichlet ordinarias*. Un ejemplo de esta clase de series es la función zeta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Esta función está íntimamente relacionada con la distribución de los números primos y forma parte de uno de los problemas más importantes de las Matemáticas, la *Hipótesis de Riemann.*

El primer capítulo aborda las *Series de Dirichlet generales*, principalmente tomando como referencia los textos de Hardy [5] y Apostol [2]. Una serie de Dirichlet general de tipo λ_n es una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ con $a_n \in \mathbb{C}$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de números reales que converge a infinito, y $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ la variable compleja. Cuando se considera $\lambda_n = \ln n$ (utilizaremos la notación ln para el logaritmo neperiano, que se distinguirá así del logaritmo complejo, denotado por log) la serie toma la forma de una serie de Dirichlet ordinaria. Otra situación muy importante es cuando $\lambda_n = n$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{-s})^n ,$$

transformando la serie de Dirichlet en una serie de potencias en la variable $u = e^{-s}$. La primera parte del capítulo está dedicada a la caracterización de las regiones de convergencia. De esta forma surgen de manera natural los conceptos de abscisa y semiplano de convergencia. También se incluyen diferentes ejemplos que ilustran la variedad de situaciones que pueden darse en cuanto a la convergencia de la serie en puntos de la frontera del semiplano de convergencia. Se establecen también resultados relativos a la convergencia uniforme de la serie y la continuidad de la función suma en el semiplano de convergencia.
En la segunda parte del primer capítulo se proporcionan fórmulas para las abscisas de convergencia y convergencia absoluta bajo determinadas condiciones. De esta manera se comparan resultados clásicos para series de potencias, como la fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia, con los obtenidos para series de Dirichlet generales.

El segundo capítulo se inicia con el estudio de un tipo de integrales complejas que posteriormente se emplean en la demostración de la fórmula de Perron, que permite calcular las sumas parciales de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a partir de la función suma $f(s)$. Para demostrar estos resultados se emplean el teorema de los residuos y la fórmula integral de Cauchy, ambos vistos en la asignatura *Variable Compleja.* En la segunda mitad del capítulo se introduce la noción de orden de una función holomorfa en semiplanos y en líneas verticales del plano complejo, dando lugar a las funciones $\nu(\sigma)$ y $\mu(\sigma)$ respectivamente. El cálculo de estas funciones es, en general, un problema muy complicado. Sin embargo, permiten una mejor comprensión del comportamiento asintótico de la función suma asociada a una serie de Dirichlet general. De nuevo, la referencia seguida en este capítulo ha sido mayoritariamente el libro de Hardy [5].

Con la teoría desarrollada en los capítulos previos, el tercer capítulo se centra en las series de Dirichlet ordinarias, aquellas en las que $\lambda_n = \ln n$. Además de particularizar resultados anteriores también se demuestran algunos nuevos, no válidos en el caso general. Para este tipo de series se tienen resultados similares a los de series de potencias. Al igual que la fórmula integral de Cauchy permite calcular los coeficientes de la serie de Taylor de una función holomorfa en el disco unidad, los coeficientes de una serie de Dirichlet ordinaria se calculan integrando la función suma a lo largo de líneas verticales. De esta forma queda patente la diferencia entre las regiones de convergencia de las series de potencias (discos) y las correspondientes de las series de Dirichlet (semiplanos).
Se define también la abscisa y semiplano de convergencia uniforme para series de Dirichlet ordinarias. De esta forma, surge de manera natural la siguiente pregunta:

¿Cuál es la distancia máxima entre las abscisas de convergencia uniforme y absoluta de una serie de Dirichlet ordinaria?

Esta cuestión se conoce como el *problema de Bohr*. En este capítulo se demuestra que la distancia máxima es menor o igual que $\frac{1}{2}$. Sin embargo, probar que esta cota es óptima, no es en absoluto trivial y constituye el importante *Teorema de Bohr-Bohnenblust-Hille*. Para probarlo se necesita desarrollar la teoría del Espacio de Banach de las Series de Dirichlet, lo que queda fuera del alcance de esta memoria. Para este capítulo se ha seguido el texto de A. Defant et al. [4].

Por último, el cuarto capítulo es una aplicación de las series de Dirichlet a la teoría de números. Para ello se define el concepto de función aritmética y se estudian las propiedades de algunas de ellas: la función de Möbius $\mu(n)$, la función indicatriz de Euler $\phi(n)$, la función de Mangoldt $\Lambda(n)$, la función de Liouville $\lambda(n)$, etc. En este estudio surge de manera natural el producto o convolución de Dirichlet. De esta forma, y junto con la teoría de productos infinitos, se obtienen identidades entre las funciones anteriores y la función $\zeta(s)$. La fuente principal para los resultados relativos a teoría de números es el libro de Apostol [1] y para los productos infinitos se ha tomado como referencia el libro de Ash y Novinger [3].

Capítulo 1

Teoría elemental sobre la convergencia de las series de Dirichlet

Una serie de Dirichlet general de tipo λ_n es una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ con $a_n \in \mathbb{C}$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de números reales que converge a infinito, y $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ la variable compleja, siendo $\sigma = \Re(s)$ y $t = \Im(s)$ sus partes real e imaginaria, respectivamente. En ocasiones, y con el fin de realizar un estudio más detallado, nos restringiremos al caso de las series de Dirichlet ordinarias, es decir, aquellas en las que $\lambda_n = \ln n$. Otra situación interesante es en la que $\lambda_n = n$, en cuyo caso la serie de Dirichlet se convierte en una serie de potencias en la variable e^{-s}. En este capítulo se caracterizará las regiones de convergencia de las series de Dirichlet generales. Esto dará lugar a conceptos básicos como el de semiplano y abscisa de convergencia. Además se ilustrará con ejemplos la amplia variedad de situaciones que pueden darse a la hora de estudiar los tipos y conjuntos de convergencia.

En la demostración de una buena parte de los resultados que veremos se emplerán dos lemas muy sencillos pero fundamentales a la hora de trabajar con acotaciones.

Lema 1.1 (Fórmula de sumación por partes de Abel)**.** *Dadas dos sucesiones de números complejos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, para $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geq q$ se tiene que*

$$\sum_{n=q}^{p} a_n b_n = \sum_{n=q}^{p-1} A(q,n)\Delta b_n + A(q,p)b_p\,.$$

siendo $A(m,n) = \sum_{k=m}^{n} a_k$ cuando $m \leq n$ (cuando $m > n$ se toma como convenio $A(m,n) = 0$) y $\Delta b_n = b_n - b_{n+1}$.

Demostración. Puesto que $a_n = A(q,n) - A(q,n-1)$ se cumple que

$$\sum_{n=q}^{p} a_n b_n = \sum_{n=q}^{p} A(q,n) b_n - \sum_{n=q}^{p} A(q,n-1) b_n = \sum_{n=q}^{p} A(q,n) b_n - \sum_{n=q-1}^{p-1} A(q,n) b_{n+1} =$$
$$= \sum_{n=q}^{p-1} A(q,n)\Delta b_n + A(q,p) b_p - A(q,q-1) b_q = \sum_{n=q}^{p-1} A(q,n)\Delta b_n +$$
$$+ A(q,p) b_p \,.$$

□

Lema 1.2. *Si $\sigma \neq 0$, entonces $|\Delta e^{-\lambda_n s}| \leq \frac{|s|}{\sigma} \Delta e^{-\lambda_n \sigma}$.*

Demostración. Escribiendo $\Delta e^{-\lambda_n s}$ en forma integral,

$$|\Delta e^{-\lambda_n s}| = \left| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} s e^{-us}\, du \right| \leq |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u\sigma}\, du = \frac{|s|}{\sigma} \Delta e^{-\lambda_n \sigma} \,.$$

□

1.1. Regiones de convergencia y unicidad de las series

Los siguientes teoremas, aunque son fáciles de demostrar, establecen un resultado fundamental: la región de convergencia de una serie Dirichlet general es un semiplano.

Teorema 1.3. *Si la serie es convergente en $s = \sigma + ti$, entonces es convergente para cualquier valor de s con parte real estrictamente mayor que σ.*

Este teorema forma parte de otro más general que será el que demostremos:

Teorema 1.4. *Si la serie es convergente en $s = s_0 \in \mathbb{C}$, entonces es uniformemente convergente en la región del plano complejo definida por la desigualdad*

$$|\arg(s - s_0)| \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \,.$$

Es decir, la serie es uniformemente convergente en el sector circular de amplitud 2α y bisecado por la semirrecta $\{s_0 + t : t \in [0, \infty)\}$.

Demostración. Es inmediato que este teorema implica el anterior pues si $\sigma > \sigma_0$, entonces $\Re(s - s_0) > 0$. Luego $s - s_0$ pertence al semiplano derecho, lo que es equivalente a la desigualdad del enunciado tomando un α adecuado que depende de s (se puede aproximar a $\frac{\pi}{2}$ tanto como se necesite).

Para probar el teorema podemos suponer sin pérdida de generalidad que $s_0 = 0$. Si no fuera así, podemos considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(u+s_0)}$ que converge en $u = 0$ y, en consecuencia, converge uniformemente en la región del plano complejo $\{u \in \mathbb{C} : \Re(u) > 0, |\arg(u)| < \alpha\}$. Mediante el cambio de variable $s = s_0 + u$ se concluye que la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ converge uniformemente en la región $D = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s - s_0) > 0, |\arg(s - s_0)| < \alpha\}$. Por tanto, si consideramos que $s_0 = 0$ por el lema 1.1 se sigue que

$$\sum_{k=m}^{n} a_k e^{-\lambda_k s} = \sum_{k=m}^{n-1} A(m,k) \Delta e^{-\lambda_k s} + A(m,n) e^{-\lambda_n s} .$$

Sea $\epsilon > 0$ y sea m_0 tal que $\lambda_m > 0$ y $|A(m,k)| < \epsilon \cos(\alpha)$ para cada $k \geq m \geq m_0$. La existencia de m_0 es obvia a partir del hecho de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y por tanto es de Cauchy. Sea $s \in D$, entonces

$$\frac{|s|}{\sigma} = \frac{|s|}{|s| \cos(\alpha_s)} = \frac{1}{\cos(\alpha_s)} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)} = \sec(\alpha) .$$

Aplicando el lema 1.2 se concluye

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k e^{-\lambda_k s} \right| < \epsilon \left(\sum_{k=m}^{n-1} \Delta e^{-\lambda_k \sigma} + e^{-\lambda_n \sigma} \right) = \epsilon e^{-\lambda_m \sigma} < \epsilon$$

para cada $n \geq m \geq m_0$. Por lo tanto, la serie es uniformemente de Cauchy en D y, en consecuencia, uniformemente convergente en D. □

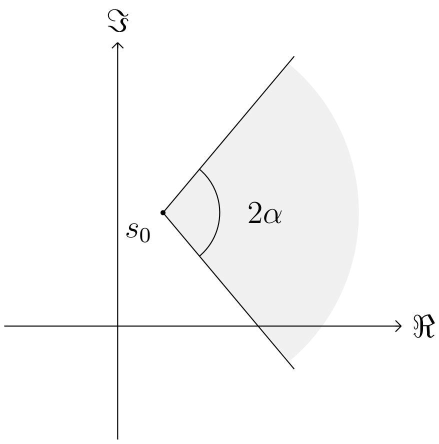


Figura 1.1: Región del plano complejo definida por $|\arg(s - s_0)| \leq \alpha$ con $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

El teorema 1.4 es muy importante pues establece las diferentes posibilidades en cuanto a la convergencia de una serie de Dirichlet y la forma de las regiones de convergencia:

Teorema 1.5. *La serie puede ser convergente para todos los valores de s, para ninguno, o solo para una parte de ellos. En el último caso, existe un valor real σ_0 tal que la serie es convergente para valores s con $\sigma > \sigma_0$ y divergente (la sucesión de los módulos de las sumas parciales tiende a infinito) u oscilatoria (la sucesión de sumas parciales es acotada pero no converge) para valores s con $\sigma < \sigma_0$.*

Por lo tanto, la región de convergencia de una serie de Dirichlet es un semiplano. Los puntos de la frontera de este semiplano pueden ser o no puntos de convergencia. No hay un resultado general que establezca bajo qué condiciones la serie converge en los puntos de la frontera. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.6. *Al valor σ_0 anterior se denomina abscisa de convergencia de la serie de Dirichlet y a la línea $\sigma = \sigma_0$ línea de convergencia. Se suele emplear la notación $\sigma_0 = -\infty$ cuando la serie es convergente en todo el plano complejo y $\sigma_0 = \infty$ cuando no converge en ningún punto.*

Más adelante se abordará el problema de determinar la abscisa de convergencia de una serie de Dirichlet dada. En cambio, la convergencia de la serie en la línea de convergencia es un problema abierto a día de hoy. Los siguientes ejemplos muestran la variedad de situaciones que pueden darse:

Ejemplo 1.7.

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$, con $|a| < 1$ es convergente para todos los valores de s: se trata de una serie de Dirichlet ordinaria con $a_n = a^n$ y $\lambda_n = \ln n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para estudiar la convergencia basta aplicar el criterio de D'Alambert o del cociente
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a^{n+1}(n+1)^{-s}}{a^n n^{-s}} \right| = \lim_{n\to\infty} |a| \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^s \right| = |a| < 1 \,.$$
Luego la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$ y $\sigma_0 = -\infty$.
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$, con $|a| > 1$ no converge en ningún punto pues no cumple la condición necesaria de convergencia:
$$\lim_{n\to\infty} |a^n n^{-s}| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n^\sigma} = \infty \,.$$
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ tiene en $\sigma = 1$ su línea de convergencia. Igual que en el caso anterior, se trata de una serie de Dirichlet ordinaria pero con $a_n = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. No es convergente en ningún punto de la línea de convergencia, pues diverge para $s = 1$ y en el resto de puntos la sucesión de sumas parciales es acotada pero no converge:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty \,, \qquad \text{para todo } \; \delta > 0 \,.$$

Luego $\sigma_0 = 1$. Tenemos que comprobar que la sucesión de sumas parciales está acotada pero no es convergente. Veamos lo que ocurre en un punto genérico de la línea de convergencia distinto de $s = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+it}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Big(\cos(t \ln n) - i \sin(t \ln n) \Big) \,.$$

Veamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(t \ln n)}{n}$ tiene las sumas parciales acotadas pero no converge para cada $t \in \mathbb{R}$ con $t \neq 0$ y habremos terminado (para la serie con el seno se razona de forma similar). Para cada $t \in \mathbb{R}$ con $t \neq 0$ sea

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{\cos(t \ln n)}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\cos(t \ln x)}{x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\cos(t \ln n)}{n} - \frac{\cos(t \ln(n+x))}{n+x} dx \right) . \end{aligned}$$

Para cada $x \in (0,1]$ se puede aplicar el teorema del valor medio para asegurar la existencia de un $\eta \in (0,x)$ de manera que

$$\left| \frac{\cos(t \ln n)}{n} - \frac{\cos(t \ln(n+x))}{n+x} \right| = \left| \frac{\sin(t \ln(n+\eta))}{(n+\eta)^2} \right| |t| x \leq \frac{|t|}{n^2} x \,.$$

En consecuencia,

$$|a_n(t)| \leq \int_0^1 \frac{|t|}{n^2} x dx = \frac{|t|}{2n^2}$$

y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$ es absolutamente convergente. Sea $A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$. Como

$$\int_n^{n+1} \frac{\cos(t \ln x)}{x} dx = \frac{1}{t} \Big(\sin(t \ln(n+1)) - \operatorname{sen}(t \ln n) \Big) \,,$$

de la definición de $a_n(t)$ se sigue que

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(t \ln n)}{n} - \frac{1}{t} \sin(t \ln(N+1)) \right) = A(t) \,.$$

Puesto que la sucesión $\{\sin(t \ln(N+1))\}_{N=1}^{\infty}$ es acotada pero no converge, al hacer que $N \to \infty$ se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(t \ln n)}{n}$ tiene la sucesión de sumas parciales acotada pero no converge para cada $t \in \mathbb{R}$ con $t \neq 0$.

- La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2 n^s}$ tiene en $\sigma = 1$ su línea de convergencia. Se trata de una serie de Dirichlet ordinaria con $a_n = (\ln n)^{-2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es convergente (de hecho absolutamente convergente) en todos los puntos de la línea: sabemos que las series de Bertrand $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ son convergentes si, y solo si, $\alpha > 1$ o $\alpha = 1$ y $\beta > 1$. Por tanto, $\sigma_0 = 1$. Para ver que la serie converge absolutamente en todos los puntos de la línea de convergencia observemos que

$$\left| \frac{1}{n^{1+it}(\ln n)^2} \right| = \frac{1}{n(\ln n)^2} \big| \cos(t \ln n) - i \sin(t \ln n) \big| = $$
$$= \frac{1}{n(\ln n)^2} \text{ , para cada t} \in \mathbb{R} \,,$$

y la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s (\ln n)^2} < \infty$.

- La serie de Dirichlet ordinaria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, con $a_n = (-1)^n + \frac{1}{(\ln n)^2}$ tiene en $\sigma = 1$ su línea de convergencia. Es convergente (aunque no absolutamente convergente) en todos los puntos de la línea:
Si $s = 1$, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} < \infty$.
Si $0 < s < 1$, la serie de Bertrand $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s (\ln n)^2}$ diverge y la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ es convergente en virtud del criterio de Leibnitz ya que la función $\frac{1}{x^{\alpha}}$ con $0 < \alpha < 1$ es decreciente. Por tanto, si $0 < s < 1$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \infty$.
Luego, $\sigma_0 = 1$. Que la serie es convergente en la línea $\sigma = 1$ es inmediato a partir del ejemplo anterior y del hecho de que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ es convergente para $0 < s < 1$ y por tanto para s con $\Re(s) > 0$. Sin embargo, no converge absolutamente en la línea de convergencia pues para $s = 1 + it$ se tiene que

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right| = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \big(1 - \frac{1}{(\ln n)^2}\big)$$

que evidentemente no converge.

Teorema 1.8. *Sea D cualquier región compacta contenida en el semiplano de convergencia, es decir, tal que todos sus puntos s cumplan que $\sigma > \sigma_0$. Entonces la serie es uniformemente convergente en D, y su suma $f(s)$ es una función analítica. Además, cuando ρ es un entero positivo, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{\rho} e^{-\lambda_n s} \,,$$

es también uniformemente convergente en D y representa a la función

$$(-1)^{\rho} f^{(\rho)}(s) \,.$$

Demostración. Puesto que los puntos del conjunto D cumplen que $\sigma > \sigma_0$, el compacto D y el cerrado $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \leq \sigma_0\}$ son disjuntos. Por consiguiente, existe un $\delta > 0$ y una bola cerrada B, centrada en un punto $s_0 = \sigma_0 + it_0$, de tal manera que $D \subseteq B \cap \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq \sigma_0 + \delta\}$. Ahora es evidente que tomando α suficientemente próximo a $\frac{\pi}{2}$ el conjunto D está contenido en una región del tipo de la figura 1.1 (de hecho existe un α mínimo que cumple la condición pero en general no es necesario considerarlo). El teorema 1.4 asegura la convergencia uniforme de la serie en D. Esto implica, en virtud del teorema de Weierstrass, que la función suma $f(s)$ es analítica en D y admite derivadas de cualquier orden en D que vienen dadas por

$$f^{(\rho)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-\lambda_n)^\rho e^{-\lambda_n s}$$

$\square$

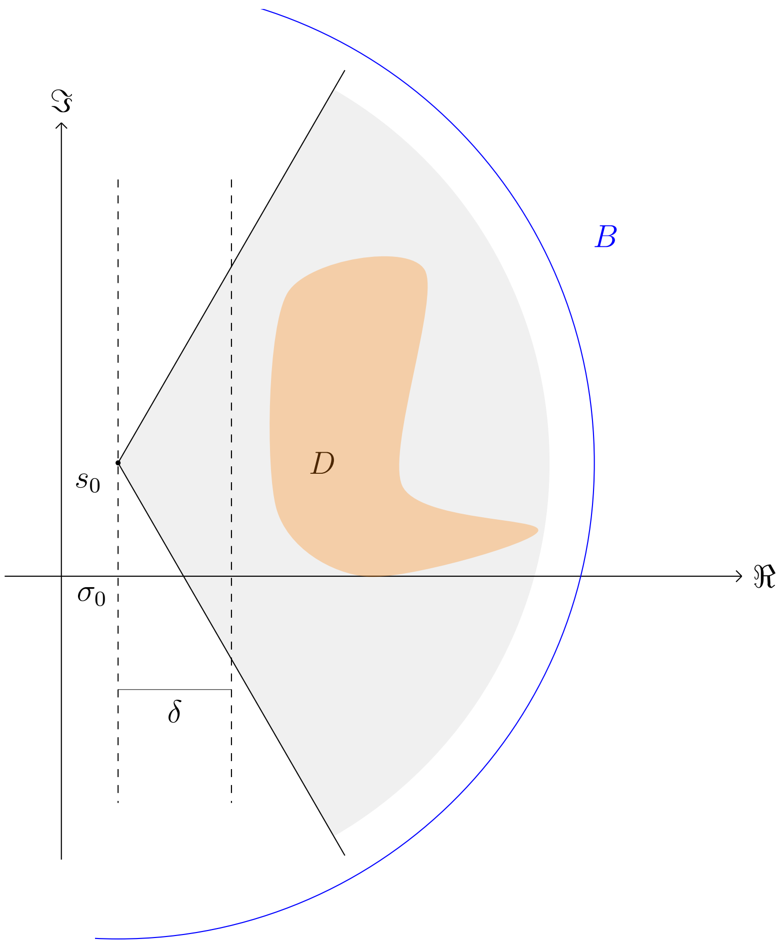


Figura 1.2: Demostración del teorema 1.8.

El siguiente teorema establece la continuidad de la función suma en los puntos de convergencia en la línea crítica y siguiendo sectores circulares del tipo de la figura 1.1:

Teorema 1.9. *Si la serie es convergente en $s = s_0$, y tiene como suma $f(s_0)$, entonces $f(s) \to f(s_0)$ cuando $s \to s_0$ a lo largo de cualquier camino completamente contenido en la región*

$$D(s_0, \alpha) = \{s \in \mathbb{C} : |\arg(s - s_0)| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\}.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. En virtud del teorema 1.4 existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| f(s) - \sum_{n=1}^{m_0} a_n e^{-\lambda_n s} \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad , \quad s \in D(s_0, \alpha)$$

$$\left| f(s_0) - \sum_{n=1}^{m_0} a_n e^{-\lambda_n s_0} \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Aplicando la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} |f(s) - f(s_0)| \leq & \left| f(s) - \sum_{n=1}^{m_0} a_n e^{-\lambda_n s} \right| + \left| \sum_{n=1}^{m_0} a_n e^{-\lambda_n s} - \sum_{n=1}^{m_0} a_n e^{-\lambda_n s_0} \right| \\ & + \left| \sum_{n=1}^{m_0} a_n e^{-\lambda_n s_0} - f(s_0) \right| \\ & < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \left| \sum_{n=1}^{m_0} a_n e^{-\lambda_n s} - \sum_{n=1}^{m_0} a_n e^{-\lambda_n s_0} \right|. \end{aligned}$$

Puesto que la función $g(s) = \sum_{n=1}^{m_0} a_n e^{-\lambda_n s}$ es continua en todo $\mathbb{C}$ basta hacer $s \to s_0$ en $D(s_0, \alpha)$ para conlcuir.

□

Para terminar la sección veamos una especie de teorema de anulación para series de Dirichlet.

Teorema 1.10. *Sea $E = \left\{s \in \mathbb{C} : \sigma \geq \delta > 0, |\arg(s)| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\right\}$. Si la serie es convergente para $s = 0$ y $f(s) = 0$ para un número infinito de valores de s en $\mathring{E}$, entonces $a_n = 0$ para todo n y f es idénticamente nula.*

Demostración. Vamos a distinguir dos situaciones dependiendo de si existe o no un punto de acumulación de ceros en E.
Si no existe un punto de acumulación de ceros en E entonces existe una sucesión

de puntos $s_n = \sigma_n + it_n$ con $\sigma_{n+1} > \sigma_n$ y $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$ tales que $f(s_n) = 0$ (pues f se anula para un número infinito de valores de s en $\mathring{E}$). Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $a_{j_0} \neq 0$. Consideremos la función $g(s) = e^{\lambda_{j_0} s} f(s)$, que es convergente para $s = 0$ y por tanto uniformemente convergente en E. Observemos que

$$|g(s) - a_{j_0}| = \left| \sum_{n=j_0+1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_{j_0})s} \right| \leq \left| \sum_{n=j_0+1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_{j_0})s} - \sum_{n=j_0+1}^{N} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_{j_0})s} \right|$$
$$+ \left| \sum_{n=j_0+1}^{N} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_{j_0})s} \right| \text{ para cada } s \in E\,.$$

De la convergencia uniforme de $g(s)$ en E se deduce que el primer sumando es arbitrariamente pequeño tomando un $N \geq j_0+1$ suficientemente avanzado. Puesto que $\lim_{s\to\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_{j_0})s} = 0$ para $n \geq j_0 + 1$ se deduce que el segundo sumando de la expresión anterior tiende a 0 cuando $s \to \infty$. En consecuencia, tenemos que $g(s) \to a_{j_0}$ cuando $s \to \infty$ a lo largo de cualquier camino en E. Sin embargo, $0 = e^{\lambda_{j_0} s_n} f(s_n) = g(s_n) \to a_{j_0}$ cuando $n \to \infty$. Pero esto es absurdo pues habíamos supuesto que $a_{j_0} \neq 0$. Por tanto, se concluye que $a_n = 0$ para todo n y que f es idénticamente nula.

Si existe un punto de acumulación de ceros en E entonces $f \equiv 0$ por el principio de identidad. Para ver que $a_n = 0$ para todo n basta con razonar igual que antes. Supongamos que existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $a_{j_0} \neq 0$. Ahora la función $g(s) = e^{\lambda_{j_0}} f(s)$ es idénticamente nula por serlo f, de manera que existe una sucesión de ceros de g cuyas partes reales tienden hacia infinito. De esta forma, se puede aplicar igual que antes el hecho de que $g(s) \to a_{j_0}$ cuando $s \to \infty$ en E para concluir que $a_{j_0} = 0$, lo que es absurdo. En consecuencia, f es idénticamente nula y $a_n = 0$ para todo n.

$\square$

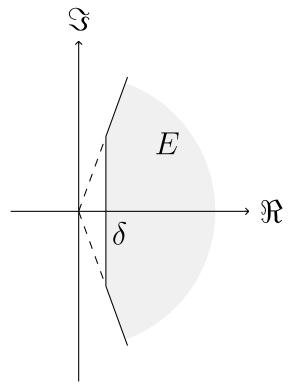


Figura 1.3: Región $E = \left\{ s \in \mathbb{C} : \sigma \geq \delta > 0, |\arg(s)| \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \right\}$.

1.2. Determinación de la abscisa de convergencia

El objetivo de esta sección es calcular la abscisa de convergencia de una serie de Dirichlet dada. Supongamos que la serie no es convergente para $s = 0$ y sea

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln |A(n)|}{\lambda_n}$$

donde $A(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Si $\gamma < 0$ existiría un $\beta < 0$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{\ln |A(n)|}{\lambda_n} \leq \beta$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto, como $\lambda_n > 0$ se cumple que $|A(n)| \leq e^{\beta\lambda_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pero esto es absurdo ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ no es convergente para $s = 0$. En consecuencia, $\gamma \geq 0$.

Teorema 1.11. *Si la abscisa de convergencia de la serie es positiva, entonces viene dada por la fórmula*

$$\sigma_0 = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln |A(n)|}{\lambda_n}\,.$$

Demostración. Probaremos en primer lugar que $\sigma_0 \leq \gamma$. Sea $\delta > 0$ y veamos que la serie es convergente para $s = \gamma + \delta$.
Sea ϵ con $0 < \epsilon < \delta$. Por definición de γ, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\ln |A(n)| < (\gamma + \delta - \epsilon)\lambda_n \quad \Rightarrow \quad |A(n)| < e^{(\gamma+\delta-\epsilon)\lambda_n} \tag{1.1}$$

para cada $n \geq n_0$. Por el lema 1.1,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k s} = \sum_{k=1}^{n-1} A(k)\Delta e^{-\lambda_k s} + A(n)e^{-\lambda_n s}\,.$$

Observemos que

$$\left|A(n)e^{-\lambda_n s}\right| < e^{(\gamma+\delta-\epsilon)\lambda_n} e^{-\lambda_n(\gamma+\delta)} = e^{-\epsilon\lambda_n}$$

para $n \geq n_0$. Como $e^{-\epsilon\lambda_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ depende de la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{(\gamma+\delta-\epsilon)\lambda_n} \Delta e^{-\lambda_n(\gamma+\delta)}\,,$$

ya que para cada $n > n_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k s} &= \sum_{k=1}^{n-1} A(k)\Delta e^{-\lambda_k s} + A(n)e^{-\lambda_n s} = \\ &= \sum_{k=1}^{n_0-1} A(k)\Delta e^{-\lambda_k s} + \sum_{k=n_0}^{n-1} A(k)\Delta e^{-\lambda_k s} + A(n)e^{-\lambda_n s}\,,\end{aligned}$$

y la convergencia de la serie no depende de los primeros $n_0 - 1$ sumandos (que es donde no podemos aplicar la acotación de (1.1)). Puesto que $\gamma + \delta - \epsilon > 0$,

$$e^{(\gamma+\delta-\epsilon)\lambda_n} \Delta e^{-(\gamma+\delta)\lambda_n} = (\gamma+\delta) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{(\gamma+\delta-\epsilon)\lambda_n - (\gamma+\delta)x}\, dx < (\gamma+\delta) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\epsilon x}\, dx \,,$$

ya que $\lambda_n < x$ en el intervalo de integración. La serie $(\gamma+\delta)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\epsilon x} dx$ es convergente pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\epsilon x} = \frac{1}{\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\epsilon\lambda_n} - e^{-\epsilon\lambda_{n+1}}) = \frac{e^{-\epsilon\lambda_1}}{\epsilon} < \infty \,.$$

Por tanto $\sigma_0 \leq \gamma$.
Veamos ahora que $\gamma \leq \sigma_0$. Supongamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k s} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente para un $s \in \mathbb{R}$ y positivo. Luego las sumas parciales están acotadas, es decir, existe $M > 0$ tal que $|B(n)| = |\sum_{k=1}^{n} b_k| \leq M$ para todo n. Por el lema 1.1,

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k e^{\lambda_k s} = \sum_{k=1}^{n-1} B(k) \Delta e^{\lambda_k s} + B(n) e^{\lambda_n s} \,.$$

Por tanto, como $s > 0$

$$\begin{aligned} |A(n)| &\leq M\left(\sum_{k=1}^{n-1} |e^{\lambda_k s} - e^{\lambda_{k+1} s}| + e^{\lambda_n s}\right) = M(e^{\lambda_n s} - e^{\lambda_1 s} + e^{\lambda_n s}) = \\ &= M(2e^{\lambda_n s} - e^{\lambda_1 s}) \leq 2M e^{\lambda_n s} = K e^{\lambda_n s} \,. \end{aligned}$$

Fijado cualquier $\delta > 0$, podemos tomar n suficientemente grande de forma que

$$\ln|A(n)| \leq \lambda_n s + \ln K < (s+\delta)\lambda_n \,,$$

luego

$$s \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln|A(n)|}{\lambda_n} = \gamma \;\; \Rightarrow \;\; \gamma \leq \sigma_0 \,.$$

□

El análisis anterior acerca de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ se puede realizar de la misma manera a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n s}$ obtieniendo resultados análogos:

Teorema 1.12. *Existe un número real $\bar{\sigma}$ tal que la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n s}$ es absolutamente convergente para $\sigma > \bar{\sigma}$ y no converge absolutamente para $\sigma < \bar{\sigma}$. Este número, si es positivo, se puede calcular mediante*

$$\bar{\sigma} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \overline{A(n)}}{\lambda_n}$$

con $\overline{A(n)} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Definición 1.13. *Al número $\bar{\sigma}$ se le denomina abscisa de convergencia absoluta y a la línea $\sigma = \bar{\sigma}$ línea de convergencia absoluta. De la misma manera, la región $\sigma > \bar{\sigma}$ se llama semiplano de convergencia absoluta.*

En realidad, la existencia del semiplano de convergencia absoluta es inmediata a partir del hecho de que $|e^{-\lambda_k s}| \leq |e^{-\lambda_k s_1}|$ si $\sigma \geq \sigma_1$. Es evidente que $\bar{\sigma} \geq \sigma$ pues si una serie converge absolutamente entonces converge. De igual forma que para la abscisa de convergencia, también se puede tener $\bar{\sigma} = \infty$ o $\bar{\sigma} = -\infty$. En general entre la línea de convergencia y la línea de convergencia absoluta existirá una banda en la que la serie es condicionalmente convergente.

Teorema 1.14. *Para una serie de Dirichlet general se cumple que*

$$\bar{\sigma} - \sigma_0 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} \,.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\sigma_0 > 0$. En otro caso bastaría razonar como en la demostración del teorema 1.4. Sean $0 < \delta' < \delta$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(\sigma_0+\delta')}$ es convergente. Haciendo lo mismo que en la demostración del teorema 1.11 con $s = \sigma_0 + \delta' > 0$ se deduce que existe una constante $K > 0$ tal que $|A(n)| < K e^{\lambda_n(\sigma_0+\delta')}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\ln |A(n)| < \lambda_n(\sigma_0 + \delta') + \ln K < \lambda_n(\sigma_0 + \delta)$$

pues $\lambda_n \delta' + \ln K < \lambda_n \delta$ para n suficientemente grande. Es decir, $|A(n)| < e^{(\sigma_0+\delta)\lambda_n}$ a partir de algún n_0 en adelante. Además, se tiene que

$$|a_n| = |A(n) - A(n-1)| < 2e^{(\sigma_0+\delta)\lambda_n} < e^{(\sigma_0+2\delta)\lambda_n}$$

si $e^{\delta\lambda_n} > 2$ para $n \geq n_0$, lo cuál se puede suponer sin ninguna restricción pues $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. De lo anterior se sigue que

$$\overline{A(n)} = \sum_{k=1}^{n} |a_k| < \overline{A(n_0)} + n e^{(\sigma_0+2\delta)\lambda_n} < n e^{(\sigma_0+3\delta)\lambda_n}$$

si $n \geq n_1$ y n_1 es suficientemente grande comparado con n_0 pues $\overline{A(n_0)}$ es una cantidad finita y fija. Finalmente, para cada $n \geq n_1$

$$\frac{\ln \overline{A(n)}}{\lambda_n} < \frac{\ln n}{\lambda_n} + \sigma_0 + 3\delta \,.$$

Puesto que esto es válido para todo $\delta > 0$, para concluir basta tomar límites superiores en la expresión anterior y tener en cuenta el teorema 1.12. $\square$

Observación 1. Si $\ln n = o(\lambda_n)$ entonces $\bar{\sigma} = \sigma_0$. Este es el caso cuando $\lambda_n = n$. Efectuando el cambio de variable $x = e^{-s}$ obtenemos los resultados clásicos para series de potencias. Los teoremas 1.3 y 1.4 establecen la existencia del círculo de convergencia y el teorema 1.11 un resultado similar a la fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia. Si $\lambda_n = \ln n$ entonces $\bar{\sigma} - \sigma_0 \leq 1$. De hecho, esta distancia máxima entre ambas líneas de convergencia se alcanza en la serie de Dirichlet ordinaria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$. Como se vió en el ejemplo 1.7, la serie converge pero no absolutamente para valores $s = \sigma + it$ con $\sigma > 0$. La convergencia absoluta se da para valores s con $\sigma > 1$. Por lo tanto, $\sigma_0 = 0$ y $\bar{\sigma} = 1$.

Ejemplo 1.15. La serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\ln n)^s}$$

es convergente para todos los valores de s pero no es absolutamente convergente en ningún punto. En este caso el teorema 1.14 no nos da ninguna información pues $\bar{\sigma} - \sigma_0 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(\ln n)} = \infty$. Para estudiar la convergencia consideremos $s \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $a_n(s) = \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^s}$. La sucesión $\{a_n(s)\}_{n=3}^{\infty}$ es monótona decreciente y converge a 0 al hacer $n \to \infty$ para todo $s \in \mathbb{R}$. En virtud del criterio de Leibniz la serie alternada converge para todo $s \in \mathbb{R}$. El teorema 1.3 asegura la convergencia de la serie en todo el plano complejo, es decir, $\sigma_0 = -\infty$. Para estudiar la convergencia absoluta procederemos del mismo modo considerando $s \in \mathbb{R}$ con vistas a aplicar de nuevo el teorema 1.3. La serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^s}$ es una serie de Bertrand con $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, por lo que no converge para ningún valor de s. En consecuencia, la serie original no converge absolutamente en ningún punto del plano complejo y $\bar{\sigma} = \infty$.

Para series de potencias la región de convergencia viene dada por el círculo de mayor radio hasta encontrarnos el primer punto singular. Sin embargo, el caso de las series de Dirichlet es distinto. La convergencia de la serie en una región implica que la serie representa una rama de una función analítica en esa región, aunque la función pueda ser analítica en zonas donde la serie no converge. Hay un caso en el que la línea de convergencia contiene al menos una singularidad:

Teorema 1.16. *Si todos los coeficientes de una serie de Dirichlet son positivos o nulos, entonces $s = \sigma_0$ es un punto singular de la función representada por la serie.*

Demostración. Como los coeficientes son positivos o cero, la abscisa de convergencia y la abscisa de convergencia absoluta coinciden. Razonaremos por reducción al absurdo. Como en otras ocasiones, supongamos sin pérdida de generalidad que $\bar{\sigma} = \sigma_0 = 0$. Entonces, si $s = 0$ es un punto regular, f es analítica en $s = 0$ y por lo tanto f es analítica en un entorno de $s = 0$. Luego la serie de Taylor de f en $s = 1$ tendrá radio de convergencia estrictamente mayor que 1. En consecuencia, existe un valor negativo s tal que

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-1)^n}{n!} f^{(n)}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-s)^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^n e^{-\lambda_k} .$$

Puesto que todos los términos de la serie anterior son positivos, se puede intercambiar el orden de la suma y se obtiene

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-s)^n \lambda_k^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} e^{(1-s)\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} .$$

Por lo tanto la serie es convergente para valores negativos de s, lo cual es absurdo. $\square$

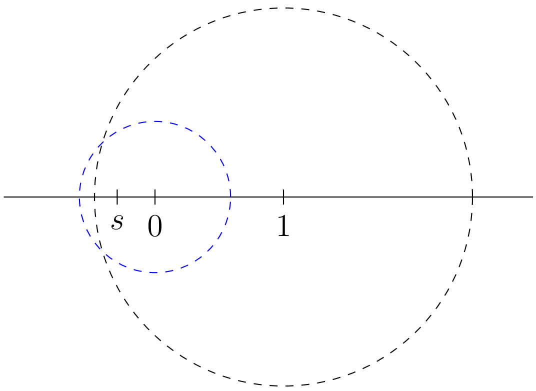


Figura 1.4: Abierto de convergencia de la serie de Taylor de f en $s = 1$.

Para cerrar el capítulo veremos una representación integral para un tipo determinado de series de Dirichlet.

Teorema 1.17. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\ln(\lambda_n)s}$ *es convergente y* $\sigma > 0$ *entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\ln(\lambda_n)s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} (\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}) dx .$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\ln(\lambda_n)s} &= \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt\right)\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\ln(\lambda_n)s} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n^s}\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}\frac{1}{\lambda_n^s}dt = \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-\lambda_n x}dx = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} x^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}dx
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha empleado el teorema de la convergencia mónotona de Levi para la integral de Lebesgue. □

Ejemplo 1.18.

- *Para $\sigma > 1$,*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x - 1}dx\,.$$

- *Para $\sigma > 0$,*

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x + 1}dx\,.$$

Capítulo 2

La fórmula de Perron y el orden de una función representada por una serie de Dirichlet

En este capítulo estudiaremos la acotación de series de Dirichlet generales a lo largo de líneas verticales en el plano complejo. El resultado principal de esta sección es la fórmula de Perron que permite conocer las sumas parciales de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a partir de la función suma $f(s)$, con $s = \sigma + it$. La segunda parte del capítulo está dedicada al estudio de la función orden $\mu(\sigma)$ asociada a una serie de Dirichlet, que está relacionada con el comportamiento asintótico de la serie en las líneas verticales del plano complejo.

El siguiente teorema establece el carácter asintótico de las sumas parciales de una serie de Dirichlet, concretamente su dependencia con la variable imaginaria. Además jugará un papel fundamental en la demostración de la fórmula de Perron.

Teorema 2.1. *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ tiene la sucesión de sumas parciales acotada en $s = \alpha$ y $\lambda_1 \geq 0$, entonces*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} = o(|t|)\,, \quad |t| \to \infty$$

uniformemente para $\sigma \geq \alpha + \epsilon > \alpha$ y para todo natural N. En particular haciendo tender $N \to \infty$, $f(s) = o(|t|)$ cuando $|t| \to \infty$ uniformemente para $\sigma \geq \alpha + \epsilon$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha = 0$. Puesto que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ están acotadas, existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| < M\ , \quad \left| A(p,q) = \sum_{k=p}^{q} a_k \right| < M\,,$$

para cada p y q naturales. En virtud del lema 1.1, si $1 < K < N$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{K-1} a_n e^{-\lambda_n s} + \sum_{n=K}^{N-1} A(K,n)\Delta e^{-\lambda_n s} + A(K,N)e^{-\lambda_N s} = S_1 + S_2 + S_3 \,.$$

Si $\sigma \geq \epsilon$ entonces $|S_1| < MK$ y $|S_3| < M$ puesto que $|e^{-\lambda_N s}| < 1$ ($\lambda_N \geq \lambda_1 \geq 0$ por hipótesis). Además, por el lema 1.2

$$|S_2| < M\frac{|s|}{\sigma}\sum_{n=K}^{N-1} \Delta e^{-\lambda_n \sigma} < M\sqrt{\left(1+\frac{t^2}{\epsilon^2}\right)}e^{-\lambda_K \epsilon}$$

si $\sigma \geq \epsilon$. En consecuencia, si $1 < K < N$ entonces

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} = O(K) + O(|t|e^{-\lambda_K \epsilon}) \text{ para todo } s \text{ con } \sigma \geq \epsilon \,.$$

Además, si $K \geq N$ y $\sigma \geq \epsilon$ entonces $|\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}| < MN \leq MK = O(K)$. Si ahora K es una función de $|t|$ que tiende hacia infinito más despacio que $|t|$, es decir, $K = o(|t|)$ en ∞ entonces $O(K) = O(o(|t|)) = o(|t|)$. Como $|t|e^{-\lambda_K \epsilon} \to 0$ cuando $|t| \to \infty$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} = o(|t|) \text{ uniformemente para } \sigma \geq \epsilon \,,$$

como se quería. □

Antes de demostrar la fórmula de Perron necesitamos calcular el valor de unas integrales que aparecen en su demostración. Para ello aplicaremos la fórmula integral de Cauchy en contornos adecuados:

Lema 2.2. *Sean $c > 0$ y $T > 0$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{e^{xs}}{s}ds - 1\right| \leq \frac{e^{xc}}{\pi T x} \qquad \text{si } x > 0 \,,$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{e^{xs}}{s}ds\right| \leq \frac{-e^{-xc}}{\pi T x} \qquad \text{si } x < 0 \,,$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{e^{xs}}{s}ds - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{c}{\pi T} \qquad \text{si } x = 0 \,.$$

Haciendo $T \to \infty$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{xs}}{s}ds = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \,, \\ \frac{1}{2} & si \quad x = 0 \,, \\ 0 & si \quad x < 0 \,. \end{cases}$$

donde en el primer y tercer caso las integrales impropias convergen y coinciden con su valor principal, pero en el segundo caso la integral impropia no converge y se considera su valor principal.

Demostración. $\boxed{\text{Si } x > 0}$: sea $b > c > 0$ y sea R el contorno de la figura 2.1. La función $\frac{e^{xs}}{s}$ tiene un polo simple en $s = 0$ con residuo $Res(\frac{e^{xs}}{s}, 0) = \lim_{s\to 0} s\frac{e^{xs}}{s} = 1$. En virtud del teorema de los residuos se tiene que

$$2\pi i = \oint_R \frac{e^{xs}}{s} ds = \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds + \int_{c+iT}^{-b+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds + \int_{-b+iT}^{-b-iT} \frac{e^{xs}}{s} ds + \int_{-b-iT}^{c-iT} \frac{e^{xs}}{s} ds\,.$$

Luego,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds - 1 = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-b+iT}^{c+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds + \int_{-b-iT}^{-b+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds + \int_{c-iT}^{-b-iT} \frac{e^{xs}}{s} ds\right].$$

Acotando las integrales,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-b+iT}^{c+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds\right| &\leq \int_{-b}^{c} \frac{e^{x\sigma}}{T} d\sigma \leq \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{c} e^{x\sigma} d\sigma = \frac{1}{T}\frac{e^{xc}}{x}\,,\\
\left|\int_{-b-iT}^{-b+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds\right| &\leq 2T\ \sup\left\{\left|\frac{e^{xs}}{s}\right| : s \in [-b-iT, -b+iT]\right\} \leq 2T\frac{e^{-xb}}{b}\,,\\
\left|\int_{c-iT}^{-b-iT} \frac{e^{xs}}{s} ds\right| &\leq \int_{-b}^{c} \frac{e^{x\sigma}}{T} d\sigma \leq \frac{1}{T}\frac{e^{xc}}{x}\,.
\end{aligned}$$

Finalmente haciendo tender $b \to \infty$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds - 1\right| \leq \frac{e^{xc}}{\pi T x}\,.$$

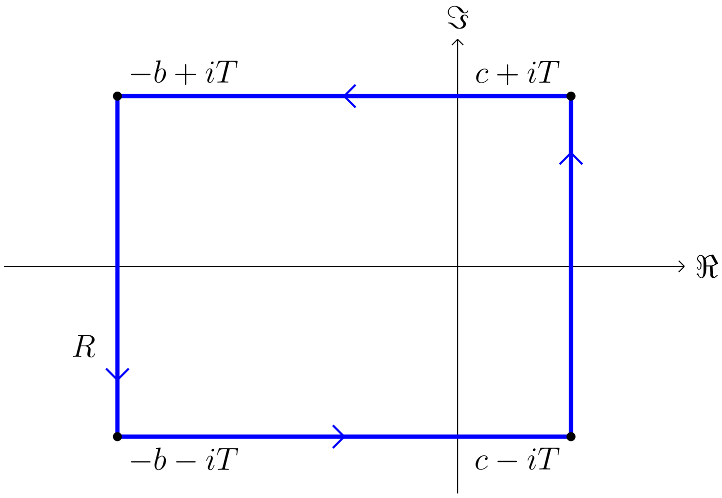


Figura 2.1: Contorno de integración R para el caso $x > 0$.

$\boxed{\text{Si } x < 0}$: sea $b > c > 0$ y sea R el contorno de la figura 2.2. Como la función $\frac{e^{xs}}{s}$ es analítica en el dominio cuyo contorno es R, en virtud del teorema de Cauchy-Goursat en dominios estrellados se cumple que

$$0 = \oint_R \frac{e^{xs}}{s} ds = \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds + \int_{c+iT}^{b+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds + \int_{b+iT}^{b-iT} \frac{e^{xs}}{s} ds + \int_{b-iT}^{c-iT} \frac{e^{xs}}{s} ds \,.$$

Pasando las tres últimas integrales al otro miembro y acotando de forma similar al caso anterior,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{b+iT}^{c+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds \right| &\le \int_c^b \frac{e^{x\sigma}}{T} d\sigma = \frac{1}{T} \frac{e^{xb} - e^{xc}}{x} \,, \\
\left| \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds \right| &\le 2T \, \sup \left\{ \left| \frac{e^{xs}}{s} \right| : s \in [b+iT, b-iT] \right\} \le 2T \frac{e^{xb}}{b} \,, \\
\left| \int_{c-iT}^{b-iT} \frac{e^{xs}}{s} ds \right| &\le \int_c^b \frac{e^{x\sigma}}{T} d\sigma \le \frac{1}{T} \int_c^\infty e^{x\sigma} d\sigma = \frac{1}{T} \frac{-e^{xc}}{x} \,.
\end{aligned}$$

Finalmente haciendo tender $b \to \infty$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{e^{xs}}{s} ds \right| \le \frac{-e^{xc}}{\pi T x} \,.$$

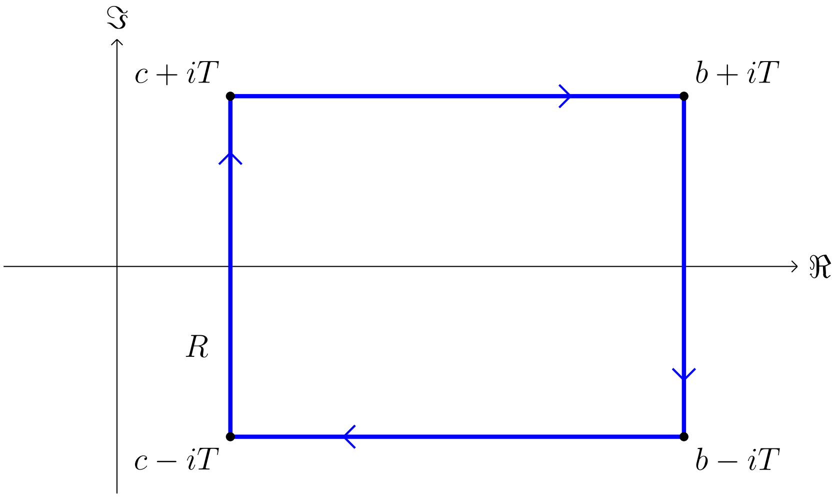


Figura 2.2: Contorno de integración R para el caso $x < 0$.

$\boxed{\text{Si } x = 0}$: haciendo la integral de forma directa,

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{1}{s} ds = \int_{-T}^{T} \frac{i}{c+it} dt = \int_{-T}^{T} \frac{t}{c^2+t^2} dt + ic \int_{-T}^{T} \frac{1}{c^2+t^2} dt = 2ic \int_0^T \frac{1}{c^2+t^2} dt \,,$$

donde se ha tenido en cuenta el carácter impar de la función $\frac{t}{c^2+t^2}$ y el carácter par de la función $\frac{1}{c^2+t^2}$. Calculando una primitiva,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{1}{s}ds = \frac{c}{\pi}\int_0^T \frac{1}{c^2+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{T}{c}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{c}{T}\right).$$

En la última igualdad anterior se ha tenido en cuenta la identidad trigonométrica $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$. Por último, empleando la desigualdad $\arctan(x) \leq x$ para $x > 0$ se concluye que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{1}{s}ds - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{c}{\pi T}.$$

□

Finalmente estamos en condiciones de probar la importante fórmula de Perron.

Teorema 2.3 (Fórmula de Perron)**.** *Si la serie de Dirichlet general* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ *es convergente en* $s = \beta + i\alpha$ *y* $c > 0$, $c > \beta$, $\lambda_n < w < \lambda_{n+1}$, *entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{f(s)e^{ws}}{s}ds\,,$$

siendo $f(s)$ *la función suma de la serie.*
Si $w = \lambda_n$, *se cumple que*

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k + \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{f(s)e^{\lambda_n s}}{s}ds\,,$$

donde hay que tomar el valor principal de la integral.

Demostración. Sea $\underline{\lambda_n < w < \lambda_{n+1}}$ y sea la función

$$g(s) = e^{ws}\left(f(s) - \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k s}\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k e^{-(\lambda_k - w)s} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\mu_k} s$$

donde $b_k = a_{n+k}$, $\mu_k = \lambda_{n+k} - w$. Observemos que $\mu_1 = \lambda_{n+1} - w > 0$ por hipótesis. Para probar la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{f(s)e^{ws}}{s}ds\,,$$

basta probar que $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s)}{s} ds = 0$ pues

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(s)e^{ws}}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s)}{s} ds + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{(w-\lambda_k)s}}{s} ds\right] = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s)}{s} ds + \sum_{k=1}^{n} a_k 2\pi i\right] = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s)}{s} ds + \sum_{k=1}^{n} a_k \, ,
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se ha tenido en cuenta el lema 2.2 y que $w-\lambda_k > 0$ para todo $k = 1, ..., n$. Sea la curva Γ de la figura 2.3 con $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ y $\gamma > c$. Puesto que $\frac{g(s)}{s}$ es analítica en un abierto que contiene al dominio cuyo contorno es Γ, por el teorema de Cauchy-Goursat se tiene que

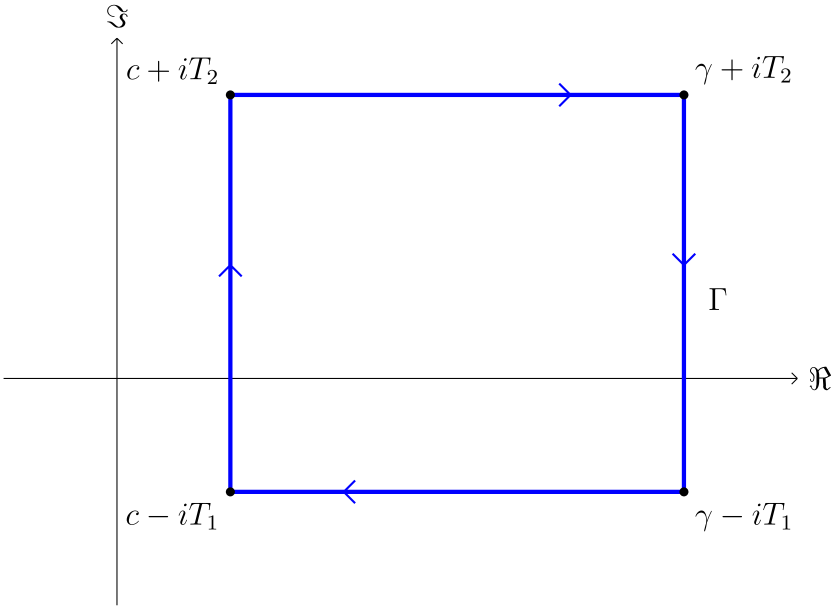


Figura 2.3: Rectángulo de integración para la fórmula de Perron.

$$0 = \oint_\Gamma \frac{g(s)}{s} ds = \int_{c-iT_1}^{c+iT_2} \frac{g(s)}{s} ds + \int_{c+iT_2}^{\gamma+iT_2} \frac{g(s)}{s} ds + \int_{\gamma+iT_2}^{\gamma-iT_1} \frac{g(s)}{s} ds + \int_{\gamma-iT_1}^{c-iT_1} \frac{g(s)}{s} ds \, .$$

En consecuencia,

$$\int_{c-iT_1}^{c+iT_2} \frac{g(s)}{s} ds = \int_{c-iT_1}^{\gamma-iT_1} \frac{g(s)}{s} ds - \int_{c+iT_2}^{\gamma+iT_2} \frac{g(s)}{s} ds + \int_{\gamma-iT_1}^{\gamma+iT_2} \frac{g(s)}{s} ds \, .$$

Vayamos ahora con cada una de las integrales del lado derecho de la ecuación anterior. Manteniendo fijos T_1 y T_2, hacemos tender $\gamma \to \infty$. Por el teorema 1.4, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ es uniformemente convergente en la región $\sigma > \beta$. Por tanto, la serie que representa a $g(s)$ también es uniformemente convergente para $\sigma > \beta$. En particular, existe una constante $K > 0$ e independiente de γ tal que $|g(s)| < K$ para $\sigma > \beta$. En consecuencia,

$$\left| \int_{\gamma - iT_1}^{\gamma + iT_2} \frac{g(s)}{s} ds \right| < (T_1 + T_2) \left| \frac{K}{\gamma} \right| \longrightarrow 0 \text{ cuando } \gamma \to \infty .$$

Se tiene por tanto que

$$\int_{c-iT_1}^{c+iT_2} \frac{g(s)}{s} ds = \int_{c-iT_1}^{\infty - iT_1} \frac{g(s)}{s} ds - \int_{c+iT_2}^{\infty + iT_2} \frac{g(s)}{s} ds$$

siempre que las dos integrales del miembro derecho sean convergentes. Sea $h(s)$ tal que $g(s) = e^{-\mu_1 s} h(s)$. Es decir, $h(s) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k e^{-(\lambda_k - w - \mu_1)s}$. En virtud del teorema 2.1, como $\lambda_{n+1} - w - \mu_1 \geq 0$ si $s = \sigma + iT_2$ entonces existe $T > 0$ tal que si $T_2 > T$ se cumple que $h(s) = o(|T_2|)$. Luego $|h(s)| < \epsilon T_2$ si $T_2 > T$ y $\sigma \geq c$. Aplicando esto a la segunda de las integrales anteriores se deduce que es convergente y que

$$\left| \int_{c+iT_2}^{\infty + iT_2} \frac{g(s)}{s} ds \right| \leq \int_{c+iT_2}^{\infty + iT_2} \left| \frac{g(s)}{s} \right| ds < \frac{\epsilon T_2}{\sqrt{c^2 + T_2^2}} \int_c^{\infty} e^{-\mu_1 x} dx < \frac{\epsilon}{\mu_1} .$$

Para la integral $\int_{c-iT_1}^{\infty - iT_1} \frac{g(s)}{s} ds$ se razona de forma análoga. Por tanto se tiene que

$$\int_{c-iT_1}^{c+iT_2} \frac{g(s)}{s} ds = 0 \text{ para } T_1, T_2 > 0 \text{ suficientemente grandes.}$$

Finalmente, basta hacer tender T_1, $T_2 \to \infty$ para concluir que

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s)}{s} ds = 0 .$$

Sea ahora $\underline{w = \lambda_n}$. Razonando de forma análoga al caso anterior y definiendo $g(s)$ de forma idéntica, basta probar que $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s)}{s} ds = 0$ pues aplicando el lema 2.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(s) e^{\lambda_n s}}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s)}{s} ds + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{(\lambda_n - \lambda_k)s}}{s} ds \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s)}{s} ds + \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2\pi i + \frac{1}{2} a_n 2\pi i \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s)}{s} ds + \sum_{k=1}^{n-1} a_k + \frac{1}{2} a_n . \end{aligned}$$

Para probar que $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s)}{s} ds = 0$ se procede de forma idéntica al caso anterior pues $\mu_1 = \lambda_{n+1} - w = \lambda_{n+1} - \lambda_n > 0$.

□

Nuestro objetivo ahora es determinar el crecimiento de una función representada por una serie de Dirichlet a lo largo de líneas verticales. Supongamos que $f(s)$ es una función holomorfa para $\sigma > \gamma$ y sea $\beta > \gamma$. Puede ser o no cierto que se cumpla

$$f(\beta + it) = O(|t|^{\xi}) \text{ cuando } |t| \to \infty \tag{2.1}$$

para un valor particular de $\xi \in \mathbb{R}$. Lo que es claro es que si se cumple para un valor ξ entonces se cumple para todos los valores mayores que ξ. Esto da lugar al concepto de orden de $f(s)$ para $\sigma = \beta$:

Definición 2.4. *Sea $f(s)$ una función holomorfa para $\sigma > \gamma$ y sea $\beta > \gamma$. Se define el orden de $f(s)$ para $\sigma = \beta$ como*

$$\mu(\beta) = \text{ínf} \left\{ \xi \in \mathbb{R} : f(\beta + it) = O(|t|^{\xi}) \text{ cuando } |t| \to \infty \right\},$$

con el convenio de que $\mu(\beta) = -\infty$ si la ecuación (2.1) *se cumple para todo valor real ξ y $\mu(\beta) = \infty$ si la ecuación* (2.1) *no se cumple para ningún valor real ξ. Cuando no es cierto que $\mu(\beta) = \infty$ se dice que $f(s)$ es de orden finito para $\sigma = \beta$.*

De forma similar, la ecuación

$$f(\sigma + it) = O(|t|^{\xi}) \quad \text{uniformemente para } \sigma \geq \beta \text{ cuando } |t| \to \infty \tag{2.2}$$

puede ser o no cierta para algún valor real de ξ. De esta forma se introduce el concepto de orden de $f(s)$ para $\sigma \geq \beta$.

Definición 2.5. *Sea $f(s)$ una función holomorfa para $\sigma > \gamma$ y sea $\beta > \gamma$. Se define el orden de $f(s)$ para $\sigma \geq \beta$ como*

$$\upsilon(\beta) = \text{ínf} \left\{ \xi \in \mathbb{R} : f(\sigma + it) = O(|t|^{\xi}) \text{ uniformemente para } \sigma \geq \beta \text{ y } |t| \to \infty \right\},$$

con el convenio de que $\upsilon(\beta) = -\infty$ si la ecuación (2.2) *se cumple para todo valor real ξ y $\upsilon(\beta) = \infty$ si la ecuación* (2.2) *no se cumple para ningún valor real ξ. Cuando no es cierto que $\upsilon(\beta) = \infty$ se dice que $f(s)$ es de orden finito para $\sigma \geq \beta$.*

Observación 2. Es evidente que $\upsilon(\beta) \geq \mu(\beta)$. Mediante leves modificaciones de las definiciones anteriores emplearemos expresiones como $f(s)$ *es de orden finito para* $\sigma > \beta$ (en el caso de que $f(s)$ sea de orden finito para $\sigma \geq \beta + \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$, pero no necesariamente para $\sigma \geq \beta$) o $f(s)$ *es de orden finito para* $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$.

El siguiente teorema nos permite establecer un resultado fundamental a la hora de determinar la función $\mu(\sigma)$ asociada a $f(s)$. La prueba se debe a E. Leonard Lindelöf, aunque el teorema forma parte de un conjunto de teoremas generales descubiertos por L. Edvard Phragmén.

Teorema 2.6 (Teorema de Lindelöf)**.** *Sea $f(s)$ una función tal que:*

a. es de orden finito y holomorfa para $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$,

b. $f(s) = O(|t|^{k_1})$ para $\sigma = \beta_1$,

c. $f(s) = O(|t|^{k_2})$ para $\sigma = \beta_2$.

Entonces, $f(s) = O(|t|^{k(\sigma)})$ uniformemente para $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$, donde $k(x)$ es la aplicación lineal que toma los valores k_1 en $x = \beta_1$ y k_2 en $x = \beta_2$.

Demostración. En toda la demostración t tomará valores positivos.
Supongamos primero que $k_1 = k_2 = 0$ de forma que $k(x) \equiv 0$ y f está acotada en las líneas $\sigma = \beta_1$ y $\sigma = \beta_2$. Sea $M > 0$ una cota superior para $|f|$ en las dos líneas $\sigma = \beta_1$, $\sigma = \beta_2$ y en el intervalo (β_1, β_2) del eje real. Para cada $\epsilon > 0$ definimos $g(s) = e^{si} f(s)$. Entonces

$$|g(s)| = e^{-\epsilon t}|f(s)| \leq |f(s)|\,.$$

Por tanto g está acotada en las líneas $\sigma = \beta_1$ y $\sigma = \beta_2$. Como f es de orden finito, $g(s) \to 0$ cuando $t \to \infty$, uniformemente para $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$. Por tanto, dado el ϵ anterior, existe un valor t_0 de forma que $|g(s)| < M$ para $t > t_0$ y $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$. Sea ahora s_0 un punto con $\beta_1 < \Re(s_0) < \beta_2$ y sea el contorno formado por un rectángulo de lados las líneas $\sigma = \beta_1$, $\sigma = \beta_2$, el eje real y un lado paralelo a este a suficiente distancia (mayor que t_0) (ver figura 2.4). En este contorno $|g(s)| < M$. Por el teorema del módulo máximo se cumple que $|g(s_0)| < M$ y, por tanto, $|f(s_0)| < Me^{\epsilon t}$. Puesto que esto es válido para cada $\epsilon > 0$, se concluye que $|f| \leq M$ como queríamos.

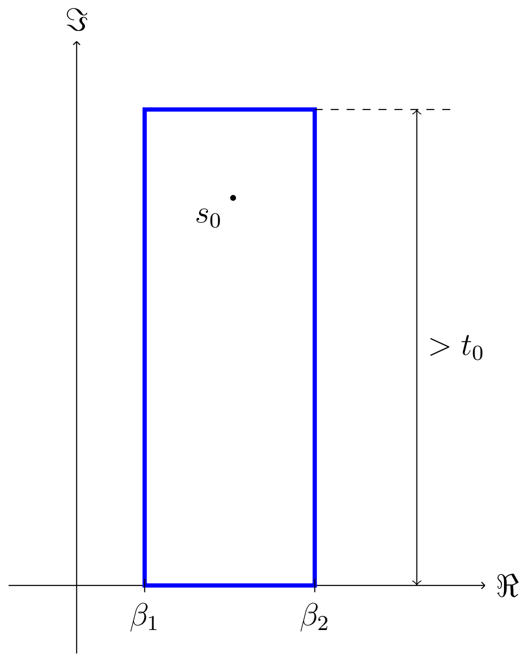


Figura 2.4: Contorno para aplicar el teorema del módulo máximo.

Antes de pasar al caso general observemos que se podía haber obtenido la misma conclusión que antes pidiendo solo que $M > 0$ sea una cota superior para $f(s)$ en las líneas $\sigma = \beta_1$ y $\sigma = \beta_2$ (antes era una cota también en el segmento (β_1, β_2)). Para probar esto basta con demostrar que $|f(s)| \leq M$ para $s = \sigma \in (\beta_1, \beta_2)$ ya que estaríamos en la situación anterior. Si ahora definimos $g(s) = e^{\epsilon s^2} f(s)$ siendo $\epsilon > 0$, entonces $|g(s)| = e^{\epsilon(\sigma^2 - t^2)}|f(s)| \leq |f(s)|$ para t suficientemente grande y $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$. Como f es de orden finito en $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$ se cumple que $g(s) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Por consiguiente, $|g(s)| < M$ para t suficientemente grande y $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$. Tomando como contorno un rectángulo de lados las líneas $\sigma = \beta_1$ y $\sigma = \beta_2$ y dos lados paralelos al eje real y simétricos respecto a este y a una distancia suficientemente grande, $|g(s)| \leq \text{máx}\{M, e^{\epsilon\beta_2^2} M\} = e^{\epsilon\beta_2^2} M$ en este contorno. Aplicando el teorema del módulo máximo se deduce que $|g(s)| \leq e^{\epsilon\beta_2^2} M$ en su interior, en particular, en el intervalo de la recta real (β_1, β_2). Si $s \in (\beta_1, \beta_2)$, entonces $|f(s)| = |g(s)|e^{-\epsilon(\sigma^2 - t^2)} = |g(s)|e^{-\epsilon\sigma^2} \leq e^{\epsilon\beta_2^2} M e^{-\epsilon\sigma^2} \to M$ cuando $\epsilon \to 0$. En consecuencia, $|f(s)| \leq M$ en (β_1, β_2) y hemos acabado.
Supongamos ahora que $k(x)$ no es idénticamente nula, es decir, que $k(x) = cx + d$ con c y d constantes reales, no ambas nulas, y consideremos la función $k(s) = k(\sigma + it) = c(\sigma + it) + d = c\sigma + d + cti = k(\sigma) + cti$, extensión de $k(x)$ al plano complejo. A continuación se define la función

$$h(s) = (-si)^{k(s)} = e^{k(s)\log(-si)},$$

donde se toma la rama principal del logaritmo. La función $h(s)$ es holomorfa en un abierto que contiene a la región $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$ y $t \geq 1$ (el motivo de tomar $t \geq 1$ es para evitar la singularidad del logaritmo en $s = 0$, lo cuál no supone ninguna restricción pues estamos trabajando con valores de t suficientemente grandes). Además,

$$\begin{aligned} \log(-si) &= \ln\sqrt{t^2 + \sigma^2} + i\arctan\big(\frac{-\sigma}{t}\big) = \\ &= \ln t + \frac{1}{2}\ln\big(1 + \big(\frac{\sigma}{t}\big)^2\big) + i\arctan(\frac{-\sigma}{t}) = \ln t + O\big(\frac{1}{t}\big) \end{aligned}$$

en la región $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$ y $t \geq 1$. Juntando lo anterior, podemos escribir en la región $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$ y $t \geq 1$ que

$$h(s) = e^{(k(\sigma)+cti)(\ln t + O(1/t))}.$$

De esta manera se tiene que

$$|h(s)| = e^{k(\sigma)\ln t} e^{k(\sigma)O(1/t)} = t^{k(\sigma)} e^{O(1)}.$$

Puesto que $k(\sigma)$ varía entre los valores k_1 y k_2 en la región anterior, el cociente $\frac{|h(s)|}{t^{k(\sigma)}}$ varía también entre dos valores positivos fijos en la región citada. En consecuencia, la función $F(s) = \frac{f(s)}{h(s)}$ es una función holomorfa y de orden finito para $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$

y está acotada en las líneas $\sigma = \beta_1$ y $\sigma = \beta_2$. Aplicando el caso anterior a la función $F(s)$ se deduce que $F(s)$ está acotada en la región $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$, es decir, $F(s) = O(1)$ en $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$. Finalmente, $f(s) = O(t^{k(\sigma)})$ uniformemente en $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$ y hemos terminado la demostración del teorema.

□

Un caso particular pero muy interesante del teorema anterior es cuando $k_1 = k_2 = 0$ y $f(s)$ es una función holomorfa, de orden finito para $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$ y acotada en las líneas $\sigma = \beta_1$ y $\sigma = \beta_2$. En esta situación el teorema afirma que la función $f(s)$ está acotada en toda la banda comprendida entre las abscisas $\sigma = \beta_1$ y $\sigma = \beta_2$.

A continuación aplicaremos el teorema 2.6 para establecer las propiedades fundamentales de la función $\mu(\sigma)$ asociada a la función representada por una serie de Dirichlet.

Teorema 2.7. *Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ es absolutamente convergente para $\sigma > \bar{\sigma}$, y que la función $f(s)$, definida por la serie cuando $\sigma > \bar{\sigma}$, es holomorfa y de orden finito para $\sigma > \gamma$, siendo $\gamma < \bar{\sigma}$. Entonces la función $\mu(\sigma)$, definida para $\sigma > \gamma$, cumple una de las dos situaciones siguientes:*

a. es idénticamente nula

b. es nula para $\sigma \geq \gamma_0$, siendo $\gamma < \gamma_0 \leq \bar{\sigma}$, mientras que para $\gamma < \sigma < \gamma_0$ es una función positiva, decreciente, convexa y continua.

Además, la función $\nu(\sigma)$ es idéntica a la función $\mu(\sigma)$.

Demostración. Supongamos que $\mu(\beta_1) = \mu_1$ para $\beta_1 > \gamma$, y que $\mu(\beta_2) = \mu_2$ para $\beta_2 > \beta_1$. Por definición de la función $\mu(\sigma)$, para cada ϵ_1, $\epsilon_2 > 0$ se tiene que

$$f(\beta_1 + it) = O(|t|^{\mu_1 + \epsilon_1}) \quad f(\beta_2 + it) = O(|t|^{\mu_2 + \epsilon_2}) .$$

Por el teorema 2.6 se cumple que

$$\mu(\sigma) \leq \frac{\beta_2 - \sigma}{\beta_2 - \beta_1}(\mu_1 + \epsilon_1) + \frac{\sigma - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}(\mu_2 + \epsilon_2) \text{ para } \beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2.$$

Haciendo ϵ_1, $\epsilon_2 \to 0$ se llega a

$$\mu(\sigma) \leq \frac{\beta_2 - \sigma}{\beta_2 - \beta_1}\mu_1 + \frac{\sigma - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}\mu_2 \text{ para } \beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2, \tag{2.3}$$

lo que prueba la convexidad de la función $\mu(\sigma)$.

Veamos que si existe $\sigma_0 > \gamma$ tal que $\mu(\sigma_0) = -\infty$, entonces $\mu(\sigma) = -\infty$ para todo $\sigma > \gamma$. Sea $\sigma_1 > \sigma_0$ (el caso $\gamma < \sigma_1 < \sigma_0$ se razonaría de forma análoga).

Veamos que $\mu(\sigma_1) = -\infty$. Como la serie es de orden finito para $\sigma > \gamma$, entonces debe existir $k_1 \in \mathbb{R}$ (fijo) tal que $\mu(\sigma_1) \leq k_1$. Como $\mu(\sigma_0) = -\infty$,

$$f(\sigma_0 + it) = O(|t|^{k_0}) \quad \text{para todo } k_0 \in \mathbb{R}.$$

Razonando igual que antes, por el teorema 2.6 se tiene que

$$\mu(\sigma) \leq \frac{(\sigma_1 - \sigma)k_0 + (\sigma - \sigma_0)k_1}{\sigma_1 - \sigma_0} \quad \text{para todo } k_0 \in \mathbb{R} \text{ y para } \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1.$$

Haciendo tender $k_0 \to -\infty$, $\mu(\sigma) = -\infty$ para $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$. Luego $\mu(\sigma_1) = -\infty$. Además, se tiene que $\mu \leq 0$ si $\sigma > \bar{\sigma}$. Para ver esto, sea $\beta > \bar{\sigma}$. Entonces

$$|f(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \beta} = C < \infty \quad \text{para } \sigma \geq \beta.$$

Por lo tanto,

$$f(s) = O(1) = O(|t|^0) \quad \text{para } \sigma > \bar{\sigma} \ \Rightarrow \ \mu \leq 0 \ \text{ para } \sigma > \bar{\sigma}\,.$$

También se cumple que $\mu \geq 0$ para σ suficientemente grande: sea a_m el primer coeficiente no nulo, entonces

$$f(s) = a_m e^{-\lambda_m s} + e^{-\lambda_m s} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_m)s}\,.$$

La serie anterior es absolutamente y uniformemente convergente para $\sigma > \bar{\sigma}$. Por tanto el segundo sumando de la expresión anterior tiende uniformemente hacia 0 cuando $\sigma \to \infty$ pues $e^{-\lambda_m s} \to 0$ cuando $\sigma \to \infty$ y el otro factor está acotado. En consecuencia, existe $w > 0$ tal que

$$f(s) = a_m e^{-\lambda_m s}(1 + \rho)\,,$$

con $|\rho| < \frac{1}{2}$ si $\sigma > w$. Por este motivo,

$$|f(s)| = |a_m| e^{-\lambda_m \sigma} |1 + \rho| \geq |a_m| e^{-\lambda_m \sigma} |1 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} |a_m| e^{-\lambda_m \sigma} > 0 \ \text{ para } \sigma > w.$$

Si fuera $\mu(\sigma) < 0$, entonces existirían $r > 0$ y $C > 0$ tales que $|f(s)| < \frac{C}{|t|^r}$ para todo t mayor que un cierto $t_0 > 0$. Pero esto es absurdo pues $\frac{C}{|t|^r} \to 0$ cuando $t \to \infty$ pero $0 < \frac{1}{2}|a_m| e^{-\lambda_m \sigma} < |f(s)|$ en toda la línea. Juntando ambas cosas se tiene que

$$\mu(\sigma) = 0 \ \text{ para } \sigma > w\,. \tag{2.4}$$

Veamos ahora que μ nunca puede ser negativa: si fuese negativa para algún σ podemos suponer en la ecuación (2.3) que $\mu(\beta_1) = \mu_1 < 0$ y que $\beta_2 > w$. Por lo

anterior $\mu(\beta_2) = 0$. Pero esto es absurdo pues por (2.3) se tiene que $\mu(\sigma) < 0$ para $w < \sigma < \beta_2$, en contra de (2.4). Como ya sabíamos que $\mu \leq 0$ para $\sigma > \bar{\sigma}$, se tiene que $\mu(\sigma) = 0$ para $\sigma > \bar{\sigma}$.
Además, si en (2.3) suponemos que $\mu_1 > 0$ y $\beta_2 > \bar{\sigma}$ de forma que $\mu_2 = 0$ entonces $\mu(\sigma) < \mu_1$ si $\sigma > \beta_1$. Es decir, μ es estrictamente decreciente en las zonas en las que no es idénticamente nula.
Ahora probaremos la continuidad de la función μ. Sea $\beta_1 \in \mathbb{R}$ y sean

$$\mu_1' = \lim_{\sigma \to \beta_1^-} \mu(\sigma)\,, \quad \mu_1 = \mu(\beta_1)\,, \quad \mu_1'' = \lim_{\sigma \to \beta_1^+} \mu(\sigma)\,.$$

Observemos que μ_1' y μ_1'' existen pues μ es estrictamente decreciente. Además $\mu_1' \geq \mu_1 \geq \mu_1''$. Como μ es convexa, $2\mu(\frac{x+y}{2}) \leq \mu(x) + \mu(y)$ para cualesquiera x e y. Si $\delta > 0$ entonces

$$\mu(\beta_1 - \delta) \leq \mu(\beta_1 - 2\delta) - \mu(\beta_1 - \delta) + \mu(\beta)\,,$$

donde se ha tomado $x = \beta_1 - 2\delta$, $y = \beta_1$. Haciendo tender $\delta \to 0$ se tiene que $\mu_1' \leq \mu_1$. De forma similar, tomando $x = \beta_1 + \delta$, $y = \beta_1 - \delta$,

$$\mu(\beta_1) - \mu(\beta_1 + \delta) \leq \mu(\beta_1 - \delta) - \mu(\beta_1)\,.$$

Como el $\delta >$ era arbitrario, $\mu_1 \leq \mu_1''$. En definitiva, $\mu_1' = \mu_1 = \mu_1''$ y μ es continua.

Por último falta probar que $\mu(\sigma) = \nu(\sigma)$. Hemos visto que $\mu(\sigma) = 0$ para $\sigma > \bar{\sigma}$. Por tanto, si $\beta > \bar{\sigma}$ entonces $\mu(\beta) = \nu(\beta)$. Consideremos ahora β_1 y β_2 tales que $\gamma < \beta_1 \leq \bar{\sigma} < \beta_2$ y probemos que $\mu(\beta_1) = \nu(\beta_1)$. Sea $\epsilon > 0$, como f es de orden finito para $\sigma > \gamma$ se cumple que $f(\beta_1 + it) = O(|t|^{\mu(\beta_1)+\epsilon})$ cuando $|t| \to \infty$. Además, también se tiene que $|f(s)| \leq M$ para $\sigma \geq \beta_2$ para cierta constante $M > 0$. Aplicando el teorema 2.6 se deduce la existencia de una constante $M_1 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq M_1 |t|^{k(\sigma)} \leq M_1 |t|^{k(\beta_1)}$$

para $|t| \geq 1$ y $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$, siendo $k(\sigma) = \frac{\mu(\beta_1)+\epsilon}{\beta_1 - \beta_2}(\sigma - \beta_2)$. Por tanto se cumple que

$$|f(s)| \leq \max\{M, M_1\} |t|^{k(\beta_1)} \text{ para } |t| \geq 1 \text{ y } \sigma \geq \beta_1.$$

En consecuencia, $\nu(\beta_1) \leq k(\beta_1) = \mu(\beta_1) + \epsilon$. Haciendo tender $\epsilon \to 0$ se tiene que $\nu(\beta_1) \leq \mu(\beta_1)$. Como siempre se cumple que $\mu(\sigma) \leq \nu(\sigma)$, finalmente se deduce que $\mu(\beta_1) = \nu(\beta_1)$.

□

Observación 3. *Notemos que del teorema 2.1 podíamos deducir que $\mu(\sigma) \leq 1$ para $\sigma > \sigma_0$, siendo σ_0 la abscisa de convergencia de la serie de Dirichlet.*

El cálculo de la función $\mu(\sigma)$ de una serie de Dirichlet es un problema de gran complejidad y son muy pocas las series cuya función $\mu(\sigma)$ se conoce. Harald Bohr se preguntó si había alguna relación entre la convergencia de la serie de Dirichlet (y su función asociada $f(s)$) y la función $\mu(\sigma)$. La respuesta fue negativa y encontró ejemplos de series de Dirichlet con la misma función $\mu(\sigma)$ pero distintas regiones de convergencia. Sin embargo, el concepto de orden de la función $f(s)$ está relacionado con los métodos de sumabilidad de Cesàro de orden k, lo que permitió a matemáticos como Marcel Riesz establecer un nuevo camino a la hora de estudiar la convergencia de este tipo de series.
Consideremos la serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s) = f(s),$$

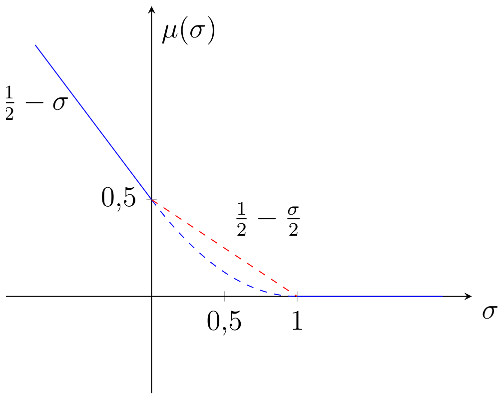
que es convergente para $\sigma > 0$ y absolutamente convergente para $\sigma > 1$. Además, $f(s)$ es una función entera. Por el teorema 2.7 sabemos que $\mu(\sigma) = 0$ para $\sigma \geq 1$. Por medio de la ecuación funcional de Riemann para la función zeta

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s),$$

se puede probar que $\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$ para $\sigma \leq 0$. Puesto que $\mu(\sigma)$ es convexa se deduce que $\mu(\sigma) \leq \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}$ para $0 \leq \sigma \leq 1$ (ver figura 2.5). De hecho esto es lo único que se sabe de $\mu(\sigma)$ en la banda $0 \leq \sigma \leq 1$. Littlewood probó que si todas las raíces complejas de la función $\zeta(s)$ tienen parte real $\frac{1}{2}$ entonces

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sigma & \text{si} \quad \sigma < \frac{1}{2}, \\ \\ 0 & \text{si} \quad \sigma \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Como ya se ha comentado antes, la función $\mu(\sigma)$ no determina las regiones de convergencia. Supongamos que $\sigma_0 = 0$, $\bar{\sigma} = 1$ y que la función $f(s)$ es holomorfa y de orden finito para algunos valores negativos de σ. Entonces sabemos que $\mu(\sigma) = 0$ para $\sigma \geq 1$ y $\mu(0) \leq 1$. Por la convexidad de $\mu(\sigma)$ se deduce que $\mu(\sigma) \leq 1 - \sigma$ para $0 \leq \sigma \leq 1$. Bohr fue capaz de construir dos series de Dirichlet ordinarias ambas con $\sigma_0 = 0$, $\bar{\sigma} = 1$, pero una con $\mu(\sigma) = 0$ para $0 \leq \sigma \leq 1$ y $\mu(\sigma) = 1 - \sigma$ en $0 \leq \sigma \leq 1$ para la otra. Es decir, a pesar de que las series tienen las mismas regiones de convergencia, sus respectivas funciones $\mu(\sigma)$ son lo más distintas que pueden ser.
Antes de cerrar el tema acerca del orden de una serie de Dirichlet es importante observar que el teorema 2.7 tiene como hipótesis la existencia de una región de convergencia absoluta. Bohr demostró que si la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de términos linealmente independientes (es decir, cualquier conjunto del tipo $\{\lambda_1, ...\lambda_N\}$ está formado por elementos linealmente independientes sobre $\mathbb{Z}$ para cada N natural,



(a) Situación actual de $\mu(\sigma)$.

(b) Hipótesis de Littlewood.

Figura 2.5: Resumen de $\mu(\sigma)$ para la serie representada por $(1-2^{1-s})\zeta(s)$.

esto es, no existen relaciones del tipo $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_N\lambda_N = 0$ donde los k's son enteros y no todos nulos) y la función $f(s)$ es holomorfa y acotada para $\sigma \geq \beta$, entonces la serie es absolutamente convergente para $\sigma \geq \beta$. En consecuencia, si la serie no converge absolutamente en ningún punto entonces $f(s)$ no está acotada en ningún semiplano.

Capítulo 3

Estudio particular de las series de Dirichlet ordinarias y el problema de Bohr

En este capítulo vamos a particularizar los resultados ya vistos para series de Dirichlet generales a series de Dirichlet ordinarias, es decir, aquellas en las que los pesos λ_n vienen dados por $\lambda_n = \ln n$ para cada n natural. Además, veremos otros resultados para series de Dirichlet ordinarias no válidos en el caso general. En ocasiones, y con la intención de facilitar la lectura, en este capítulo se omitirá el adjetivo *ordinaria* para referirnos a las series de Dirichlet con $\lambda_n = \ln n$. De esta forma, cuando nos queramos referir a una serie de Dirichlet general se indicará adecuadamente en ese caso concreto.

3.1. Distancia entre las abscisas de convergencia

El teorema 1.14 para el caso de series de Dirichlet ordinarias toma la forma siguiente:

Proposición 3.1. *Sean $\sigma_0(D)$ y $\bar{\sigma}(D)$ las abscisas de convergencia y convergencia absoluta respectivamente de una serie de Dirichlet ordinaria $D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$. Entonces*

$$\sup\{\bar{\sigma}(D) - \sigma_0(D) : D \text{ serie de Dirichlet ordinaria}\} = 1\,.$$

Demostración. Del teorema 1.14 se deduce que $\bar{\sigma}(D) - \sigma_0(D) \leq 1$. Para concluir basta tener en cuenta que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ converge para $\sigma > 0$ y converge absolutamente para $\bar{\sigma} > 1$. □

Es evidente que en las series de Dirichlet con coeficientes positivos (es decir, aquellas en las que $a_n \geq 0$ para cada n) las abscisas de convergencia y convergencia absoluta coinciden, $\sigma_0 = \bar{\sigma}$. Sin embargo, no son el único tipo de series de Dirichlet con esta propiedad.

Definición 3.2. *Se dice que una serie de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *depende de un número finito de números primos si existe un conjunto finito de números primos que factorizan cada* n *tal que* $a_n \neq 0$*. Concretamente, si existen números primos* $p_{i_1}, ..., p_{i_N}$ *tales que si* $a_n \neq 0$ *entonces* $n = p_{i_1}^{\alpha_1} \cdots p_{i_N}^{\alpha_N}$ *para ciertos* $\alpha_1, ..., \alpha_N$ *naturales, se dice que la serie de Dirichlet depende de* N *primos. Si los números primos que aparecen son los* N *primeros entonces se dice que la serie depende de los* N *primeros primos.*

Para esta clase de series de Dirichlet se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.3. *Si la serie de Dirichlet depende de un número finito de números primos entonces* $\sigma_0 = \bar{\sigma}$*.*

Demostración. Trataremos el caso en el que la serie depende de dos primos pues el resultado general se demuestra de forma análoga. Si la serie depende de dos primos entonces existen p y q primos tales que la serie se puede expresar como

$$\sum_{k,l} a_{p^k q^l} (p^k q^l)^{-s}.$$

Supongamos que la serie es convergente en $s = \sigma + it$. En consecuencia, existe una constante $M > 0$ tal que para todo k, l se cumple que

$$\frac{|a_{p^k q^l}|}{(p^k q^l)^{\sigma}} \leq M,$$

ya que para los sumandos que no aparecen en la serie se tiene que $a_{p^k q^l} = 0$. Sea $\epsilon > 0$ y N un natural cualquiera. Entonces,

$$\sum_{k,l=1}^{N} |a_{p^k q^l}| \frac{1}{(p^k q^l)^{\sigma+\epsilon}} \leq M \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p^{\epsilon})^k} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(q^{\epsilon})^l} \right) < \infty,$$

ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p^{\epsilon})^k}$ es una serie geométrica de razón $\frac{1}{p^{\epsilon}} < 1$. En consecuencia, $\bar{\sigma} \leq \sigma_0$. □

El siguiente lema es una especie de teorema del módulo máximo para semiplanos:

Lema 3.4. *Para cada* $a_1, ..., a_N \in \mathbb{C}$*, se cumple que*

$$\sup_{\Re(s) > \sigma_0} \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s} \right| = \sup_{\Re(s) = \sigma_0} \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s} \right|.$$

Demostración. Observemos en primer lugar que basta con probar el resultado para el caso en el que $\sigma_0 = 0$ pues, a partir de él, se deduce el caso general:

$$\begin{aligned}\sup_{\Re(s)>\sigma_0}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right| &= \sup_{\Re(z)>0}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{\sigma_0+z}}\right| = \sup_{\Re(z)>0}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{\sigma_0}}\frac{1}{n^z}\right| = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{\sigma_0}}\frac{1}{n^{it}}\right| \\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{\sigma_0+it}}\right| = \sup_{\Re(s)=\sigma_0}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right| .\end{aligned}$$

Sean

$$A = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{it}}\right| \ \text{ y } \ B = \sup_{\Re(s)>0}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right| .$$

Haciendo tender $\sigma = \Re(s) \to 0$ en la región $\Re(s) > 0$ se deduce por continuidad que $A \leq B$. Como la función $s \mapsto \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$, si A fuera 0 se conlcuye que, por el principio de identidad, esta función es idénticamente nula y también $B = 0$. Dado $\epsilon > 0$ sea la función $g_\epsilon : \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\}$ definida como

$$g_\epsilon(s) = e^{-\epsilon\sqrt{s}}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s} ,$$

donde para $\sqrt{s} = e^{\frac{1}{2}\log(s)}$ se toma la rama principal del logaritmo. En consecuencia, g_ϵ es una función holomorfa para $\Re(s) > 0$ y continua en $\Re(s) \geq 0$. Escribiendo la variable en forma polar $s = re^{i\alpha}$ para $\Re(s) \geq 0$, se tiene que

$$|g_\epsilon(s)| = e^{-\epsilon\Re(\sqrt{s})}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right| = e^{-\epsilon\sqrt{r}\cos(\frac{\alpha}{2})}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right| \leq Be^{-\epsilon\sqrt{r}\cos(\frac{\pi}{4})} .$$

Puesto que la expresión anterior tiende hacia 0 cuando $r \to \infty$, si $A > 0$ existe un $R > 0$ tal que $|g_\epsilon(re^{i\alpha})| \leq A$ para $r \geq R$. Sea ahora el semicírculo derecho centrado en 0 y de radio R, es decir, $\Delta = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq 0, |s| < R\}$ (ver figura 3.1). Se tiene que $|g_\epsilon(s)| \leq A$ para cada s de la frontera de Δ pues si $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$|g_\epsilon(it)| = e^{-\epsilon\sqrt{it}}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{it}}\right| \leq Ae^{-\epsilon\sqrt{r}\cos(\frac{\pi}{4})} \leq A .$$

En virtud del teorema del módulo máximo se deduce que $|g_\epsilon(s)| \leq A$ para $s \in \Delta$. Haciendo tender $R \to \infty$ se deduce que $|g_\epsilon(s)| \leq A$ para $\Re(s) \geq 0$. Puesto que el ϵ era arbitrario se concluye que $B \leq A$. □

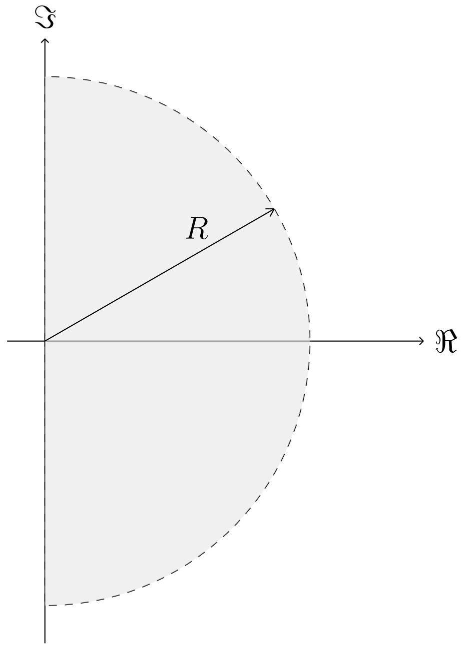


Figura 3.1: Región $\Delta = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq 0, |s| < R\}$.

Además de las abscisas de convergencia y convergencia absoluta existe otra abscisa importante, la abscisa de convergencia uniforme:

Definición 3.5. *Para cada serie de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ se define su abscisa de convergencia uniforme como*

$$\sigma_u(D) = \text{ínf}\{\sigma \in \mathbb{R} : D \textit{ converge uniformemente en } \Re(s) > \sigma\}\,.$$

Evidentemente se tiene que $\sigma_0 \leq \sigma_u$. Observemos también que dado $\epsilon > 0$, para cada $M > N$ y $t \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n \frac{1}{n^{\bar{\sigma}+\epsilon+it}}\right| \leq \sum_{n=N}^{M} \frac{|a_n|}{n^{\bar{\sigma}+\epsilon}}\,.$$

Como el lado derecho converge, la serie es uniformemente de Cauchy para $\Re(s) > \bar{\sigma} + \epsilon$ y $\sigma_u \leq \bar{\sigma}$.

Estamos ahora interesados en hallar la distancia máxima entre σ_0 y σ_u de una serie de Dirichlet. Antes de dar respuesta a la pregunta anterior necesitamos una fórmula para σ_u similar a la del teorema 1.11:

Proposición 3.6. *Sea la serie de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$. *Entonces,*

$$\sigma_0 \leq \operatorname*{lím\,sup}_{N\to\infty} \frac{\ln(|\sum_{n=1}^{N} a_n|)}{\ln N},$$

$$\sigma_u \leq \operatorname*{lím\,sup}_{N\to\infty} \frac{\ln(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it}|)}{\ln N},$$

$$\bar{\sigma} \leq \operatorname*{lím\,sup}_{N\to\infty} \frac{\ln(\sum_{n=1}^{N} |a_n|)}{\ln N}.$$

En cada caso, si la abscisa no es negativa, entonces se da la igualdad.

Demostración. Las fórmulas relativas a las abscisas σ_0 y $\bar{\sigma}$ ya fueron probadas en el contexto de las series de Dirichlet generales en el teorema 1.11.
Probemos entonces la fórmula para la abscisa de convergencia uniforma σ_u. Sea

$$L = \operatorname*{lím\,sup}_{N\to\infty} \frac{\ln(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it}|)}{\ln N},$$

y veamos que $\sigma_u \leq L$. Supongamos en primer lugar que $L \neq \pm\infty$ y sean $\epsilon > 0$ y $\sigma_1 = L + \epsilon$. Si demostramos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ es uniformemente convergente en $\Re(s) > \sigma_1$ entonces habremos acabado. Para cada $N \geq 2$ y $s \in \mathbb{C}$ se define $A_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s}$. Empleando el lema 1.1 se cumple que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma_1+it}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{it}} \frac{1}{n^{\sigma_1}} = \sum_{n=1}^{N-1} A_n(it)\left(\frac{1}{n^{\sigma_1}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma_1}}\right) + A_N(it)\frac{1}{N^{\sigma_1}}.$$

Puesto que para cada $M > N+1$ se tiene que

$$\sum_{n=N+1}^{M} \frac{a_n}{n^{\sigma_1+it}} = \sum_{n=N}^{M-1} A_n(it)\left(\frac{1}{n^{\sigma_1}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma_1}}\right) + A_M(it)\frac{1}{M^{\sigma_1}} - A_N(it)\frac{1}{N^{\sigma_1}},$$

aplicando la desigualdad triangular se deduce que

$$\left|\sum_{n=N+1}^{M} \frac{a_n}{n^{\sigma_1+it}}\right| \leq \sum_{n=N}^{M-1} |A_n(it)|\left|\frac{1}{n^{\sigma_1}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma_1}}\right| + |A_M(it)|\frac{1}{M^{\sigma_1}} + |A_N(it)|\frac{1}{N^{\sigma_1}}. \tag{3.1}$$

Por la definición de L, existe un n_0 tal que si $N \geq n_0$ entonces

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |A_N(it)| \leq N^{L+\frac{\epsilon}{2}}. \tag{3.2}$$

Además, se tiene que

$$\left|\frac{1}{n^{\sigma_1}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma_1}}\right| = \left|\int_n^{n+1} \frac{\sigma_1}{x^{\sigma_1+1}} dx\right| \leq \int_n^{n+1} \frac{|\sigma_1|}{x^{\sigma_1+1}} dx \leq$$

$$\leq \frac{|\sigma_1|}{\operatorname{mín}\{n^{\sigma_1+1}, (n+1)^{\sigma_1+1}\}} \leq 2^{|\sigma_1+1|}\frac{|\sigma_1|}{n^{\sigma_1+1}},$$

donde en la última desigualdad se ha empleado que

$$\min\{n^{\sigma_1+1},(n+1)^{\sigma_1+1}\} \geq \frac{n^{\sigma_1+1}}{2^{|\sigma_1+1|}}\,.$$

Si $\min\{n^{\sigma_1+1},(n+1)^{\sigma_1+1}\} = n^{\sigma_1+1}$ entonces la desigualdad anterior es inmediata. En el otro caso se tendría que $\min\{n^{\sigma_1+1},(n+1)^{\sigma_1+1}\} = (n+1)^{\sigma_1+1}$ por lo que $-\sigma_1-1=|\sigma_1+1|$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}(n+1)^{\sigma_1+1} &= \frac{1}{(n+1)^{-\sigma_1-1}} = \frac{1}{(n+1)^{|\sigma_1+1|}} \geq \frac{1}{(2n)^{|\sigma_1+1|}} = \\ &= \frac{1}{n^{|\sigma_1+1|}2^{|\sigma_1+1|}} = \frac{1}{n^{-\sigma_1-1}2^{|\sigma_1+1|}} = \frac{n^{\sigma_1+1}}{2^{|\sigma_1+1|}}\,.\end{aligned}$$

Tomando superiores en la ecuación (3.1) y teniendo en cuenta (3.2), se tiene que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{a_n}{n^{\sigma_1+it}}\right| \leq \sum_{n=N}^{M-1}2^{|\sigma_1+1|}|\sigma_1|\frac{1}{n^{\sigma_1+1}}n^{L+\frac{\epsilon}{2}} + M^{L+\frac{\epsilon}{2}}\frac{1}{M^{\sigma_1}} + N^{L+\frac{\epsilon}{2}}\frac{1}{N^{\sigma_1}}\ ,$$

para cada $M > N+1 \geq n_0$. Teniendo en cuenta que $\sigma_1 = L+\epsilon$ se sigue que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{a_n}{n^{\sigma_1+it}}\right| \leq \sum_{n=N}^{M-1}2^{|\sigma_1+1|}|\sigma_1|\frac{1}{n^{1+\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{1}{M^{\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{1}{N^{\frac{\epsilon}{2}}}\ ,$$

para cada $M > N+1 \geq n_0$. El n_0 se puede tomar de tal forma que los dos últimos términos sean tan pequeños como se desee. Finalmente, en virtud del lema 3.4 se deduce que la serie es uniformemente de Cauchy en $\Re(s) > \sigma_1$, lo que implica que $\sigma_u \leq L$.
Si $L=+\infty$ entonces la desigualdad del enunciado es obvia. Por otro lado, si $L=-\infty$ entonces fijamos $R\in\mathbb{R}$ y sea $r_0 = R+\epsilon$. Procediendo de la misma forma que en el caso de L finito se deduce que $\sigma_u \leq R$. Como el R era arbitrario se concluye que $\sigma_u = -\infty$.
Para terminar la demostración falta probar que se da la igualdad en el caso $\sigma_u \geq 0$. Sea ahora $\sigma_1 = \sigma_u+\epsilon > 0$. Entonces la serie converge uniformemente para $\Re(s) > \sigma_1$. En consecuencia y en virtud del lema 3.4 existe una constante $B>0$ tal que

$$\sup_{\Re(s)=\sigma_1}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right| = \sup_{\Re(s)>\sigma_1}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right| \leq B\,.$$

Sea $B_N(it) = \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{\sigma_1+it}}$ para $t\in\mathbb{R}$ y $N\geq 2$. Empleando el lema 1.1 para cada t y N se tiene que

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{it}} = \sum_{n=1}^{N}a_n\frac{1}{n^{\sigma_1+it}}n^{\sigma_1} = \sum_{n=1}^{N-1}B_n(it)(n^{\sigma_1}-(n+1)^{\sigma_1}) + B_N(it)N^{\sigma_1}\,.$$

Aplicando la desigualdad triangular y tomando superiores,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{it}}\right| \le B\sum_{n=1}^{N-1}((n+1)^{\sigma_1}-n^{\sigma_1})+BN^{\sigma_1}\le 2BN^{\sigma_1}\,,$$

para cada $N\ge 2$. Luego,

$$\ln\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{it}}\right|\right)\le \ln(2B)+\sigma_1\ln N\,,$$

para cada $N\ge 2$. Entonces $L\le\sigma_1=\sigma_u+\epsilon$ y, por tanto,

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{\ln(\sup_{t\in\mathbb{R}}|\sum_{n=1}^{N}a_n n^{-it}|)}{\ln N}\le\sigma_u\,,$$

como se quería demostrar.

□

Observemos que la condición para la igualdad es importante. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2n^s}$ converge para $s=0$. De hecho, $\sigma_0=\sigma_u=\bar{\sigma}=-1$, pero todos los límites del teorema son 0.

Proposición 3.7. *Sean $\sigma_0(D)$ y $\sigma_u(D)$ las abscisas de convergencia y convergencia uniforme respectivamente de una serie de Dirichlet ordinaria $D=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$. Entonces*

$$\sup\{\sigma_u(D)-\sigma_0(D):D\text{ serie de Dirichlet ordinaria}\}=1\,.$$

Demostración. En virtud de la proposición 3.1 se tiene que

$$\sup_{D\in\mathcal{D}}\big(\sigma_u(D)-\sigma_0(D)\big)\le\sup_{D\in\mathcal{D}}\big(\bar{\sigma}(D)-\sigma_0(D)\big)=1\,,$$

siendo $\mathcal{D}$ el conjunto de series de Dirichlet ordinarias. Para probar la otra desigualdad consideremos la sucesión de números primos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea la serie de Dirichlet $D=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p_n^s}$. Observemos que $D=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$, donde $a_n=(-1)^k$ si $n=p_k$, y 0 en otro caso. Aplicando el criterio de Leibniz se deduce que $\sigma_0(D)=0$.
Empleando el teorema de Kronecker (ver apéndice A.1) se deduce la existencia para cada N de una sucesión $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ de números reales tales que $\lim_{k\to\infty}p_n^{it_k}=(-1)^n$ para todo $n=1,...,N$. Por tanto, para todo N se cumple que

$$N=\lim_{k\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{1}{p_n^{it_k}}\right|\le\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{1}{p_n^{it}}\right|=\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=1}^{p_N}a_n\frac{1}{n^{it}}\right|.$$

Empleando la fórmula para σ_u de la proposición 3.6,

$$\begin{aligned}\sigma_u(D) &= \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it}|)}{\ln N} \geq \\ &\geq \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\sum_{n=1}^{p_N} a_n n^{-it}|)}{\ln p_N} \geq \\ &\geq \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln N}{\ln p_N}\,.\end{aligned}$$

Por el teorema de los números primos (ver apéndice A.2) $\lim_{N\to\infty} \frac{\ln N}{\ln p_N} = 1$. En consecuencia $\sigma_u(D) \geq 1$ y como $\sigma_0(D) = 0$ hemos terminado. □

Observación 4. *Sean* $D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *y* $D_{z_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s+z_1}}$ *, donde* $z_1 = \sigma_1 + it_1 \in \mathbb{C}$*, entonces las abscisas de convergencia de ambas series están relacionadas mediante*

$$\sigma_0(D_{z_1}) = \sigma_0(D) - \sigma_1\,.$$

Exactamente la misma relación se tiene para las abscisas de convergencia uniforme y absoluta de ambas series. Es decir, lo que se consigue al dividir el término general de la serie original por n^{z_1} *es desplazar todas las abscisas de convergencia hacia la izquierda un valor igual a* $\Re(z_1)$*. Puesto que en muchas ocasiones estamos interesados en hallar la distancia entre abscisas, cuando hacemos esta traslación de abscisas la distancia entre abscisas no varía y es la misma para ambas series.*

Nos preguntamos ahora si la función suma está unívocamente determinada por los coeficientes a_n y viceversa (como ocurre con las funciones holomorfas en discos y las series de potencias). La fórmula integral de Cauchy permite calcular los coeficientes de la serie de Taylor en el disco unidad (aunque también podría ser otro disco) de forma unívoca. Una situación similar se tiene con las series de Dirichlet. Los coeficientes a_n están determinados de forma única por la función suma al integrar a lo largo de líneas verticales (como se ha comentado anteriormente, los círculos de las series de potencias se transforman en líneas verticales en las series de Dirichlet).

Proposición 3.8. *Sea la serie de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *(convergente en algún semiplano) y sea* $f(s)$ *su función suma. Entonces para cada* $\kappa > \bar{\sigma}$ *y* $N \in \mathbb{N}$*,*

$$a_N = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2Ri} \int_{\kappa-iR}^{\kappa+iR} f(s) N^s ds\,.$$

Demostración. En primer lugar observemos que si la serie es convergente para $\sigma > \sigma_0$ entonces es absolutamente convergente para $\sigma > \sigma_0 + 1$ pues $\bar{\sigma} - \sigma_0 \leq 1$. Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo. Probemos en primer lugar que para cada $R > 0$,

$$\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \left(\frac{N}{n}\right)^{it} dt = \begin{cases} 1 & si \quad n = N, \\ \frac{\sin(R\ln(N/n))}{R\ln(N/n)} & si \quad n \neq N. \end{cases}$$

Si $n = N$ es inmediato. Si $n \neq N$ entonces $\left(\frac{N}{n}\right)^{it} = e^{it\ln(N/n)}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}\left(\frac{N}{n}\right)^{it}dt = \int_{-R}^{R} e^{it\ln(N/n)}dt &= \frac{1}{i\ln(N/n)}e^{it\ln(N/n)}\Big|_{-R}^{R} \\ &= \frac{1}{i\ln(N/n)}\left[e^{iR\ln(N/n)} - e^{-iR\ln(N/n)}\right] \\ &= \frac{2}{\ln(N/n)}\sin(R\ln(N/n))\,.\end{aligned}$$

Sea ahora $R > 0$ fijo. Como $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ converge uniformemente en la región $\{\kappa + it : -R \leq t \leq R\}$ se puede intercambiar la serie con la integral y

$$\frac{1}{2Ri}\int_{\kappa-iR}^{\kappa+iR} f(s)N^s ds = \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f(\kappa+it)N^{\kappa+it}dt = \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\kappa+it}}N^{\kappa+it}dt =$$
$$= N^{\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\kappa}}\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}\left(\frac{N}{n}\right)^{it}dt = a_N + N^{\kappa}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq N}}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\kappa}}\frac{\sin(R\ln(N/n))}{R\ln(N/n)}\,.$$

Observemos que

$$\Big|\sum_{\substack{n=1\\ n\neq N}}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\kappa}}\frac{\sin(R\ln(N/n))}{R\ln(N/n)}\Big| \leq \sum_{\substack{n=1\\ n\neq N}}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\kappa}}\frac{1}{R|\ln(N/n)|} \leq \frac{C}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\kappa}}\,,$$

para cierta constante $C > 0$ (pues $\frac{1}{|\ln(N/n)|} \to 0$ cuando $n \to \infty$). Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\kappa}}$ es convergente (pues hemos tomado $\kappa > \bar{\sigma}$), este último término tiende hacia 0 cuando $R \to \infty$. Finalmente,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f(\kappa+it)N^{\kappa+it}dt = a_N\,.$$

□

3.2. El problema de Bohr

En la sección anterior hemos determinado la anchura máxima de la banda vertical en la que una serie de Dirichlet converge pero no converge uniformemente o absolutamente. Esta distancia máxima es igual a 1 en ambos casos. La pregunta natural que surge es ¿cuál es la distancia máxima entre las abscisas σ_u y $\bar{\sigma}$? Esta cuestión se conoce como el problema de Bohr ya que fue él quién la estudió en profundidad. Sea

$$S = \sup\{\bar{\sigma}(D) - \sigma_u(D) : D \text{ serie de Dirichlet ordinaria}\}\,.$$

Evidentemente de la proposición 3.1 se desprende que $S \leq 1$, pero podemos mejorar esta cota. Veamos antes un resultado de tipo fórmula de Parseval debida a F. D. Carlson:

Proposición 3.9. *Para $a_1, ..., a_N \in \mathbb{C}$ se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{it} \right| dt \,.$$

Demostración. De la demostración de la proposición 3.8 se tiene para cada n y m,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} n^{it} m^{-it} dt = \delta_{n,m} \,.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{it} \right|^2 dt = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n n^{it} \right) \left(\sum_{m=1}^{N} \bar{a}_m m^{-it} \right) dt =$$

$$= \sum_{n.m=1}^{N} a_n \bar{a}_m \left(\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} n^{it} m^{-it} \right) = \sum_{n,m=1}^{N} a_n \bar{a}_m \delta_{n,m} = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \,.$$

□

Estamos ahora en condiciones de mejorar la cota anterior para S:

Teorema 3.10. *Dada una serie de Dirichlet $D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, la anchura de la banda en la que la serie converge uniformemente pero no absolutamente es menor o igual que $\frac{1}{2}$, es decir,*

$$S \leq \frac{1}{2} \,.$$

Demostración. Daremos dos posibles demostraciones al teorema.
<u>Primera demostración</u>. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ una serie de Dirichlet y veamos que

$$\bar{\sigma} \leq \sigma_u + \frac{1}{2} \,.$$

Tomemos $\sigma_1 > \sigma_u$ y probemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{n^{\sigma_1 + \frac{1}{2}}} < \infty$. Sea $\sigma_u < \sigma < \sigma_1$ y $\epsilon = \sigma_1 - \sigma$. Empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz con $\sigma_1 + \frac{1}{2} = \sigma + \epsilon + \frac{1}{2} = (\sigma + \frac{\epsilon}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2})$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{n^{\sigma_1 + \frac{1}{2}}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{n^{2(\sigma + \epsilon/2)}} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^{1/2+\epsilon/2})^2} \right)^{1/2} .$$

Puesto que la serie de Dirichlet converge uniformemente en $\Re(s) > \sigma$ (pues $\sigma > \sigma_u$), existe una constante $K > 0$ tal que

$$\sup_{\Re(s)=\sigma+\epsilon/2} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^s} \right| < K$$

para cada N. Empleando la proposición 3.9, para cada N se tiene que

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \frac{a_n}{n^{\sigma+\epsilon/2}} \right|^2 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma+\epsilon/2}} n^{it} \right|^2 dt =$$
$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^{\sigma+\epsilon/2-it}} \right|^2 dt \leq K^2 .$$

Finalmente y puesto que el N es arbitrario, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{n^{2(\sigma+\epsilon/2)}}$ converge. Como además la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ es convergente se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{n^{\sigma_1+\frac{1}{2}}}$ también es convergente.

Segunda demostración. Sea la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ con $\sigma_u \geq 0$. Empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la proposición 3.9 se deduce que

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq N^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2} =$$
$$= N^{1/2} \left(\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{it} \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq N^{1/2} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{it} \right| .$$

Empleando las fórmulas de la proposición 3.6 se tiene

$$\frac{\ln \sum_{n=1}^{N} |a_n|}{\ln N} \leq \frac{\ln(N^{1/2} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\sum_{n=1}^{N} a_n n^{it}|)}{\ln N} =$$
$$= \frac{\ln N^{1/2}}{\ln N} + \frac{\ln(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\sum_{n=1}^{N} a_n n^{it}|)}{\ln N} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\ln(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\sum_{n=1}^{N} a_n n^{it}|)}{\ln N} .$$

De lo anterior se deduce que $\bar{\sigma} \leq \frac{1}{2} + \sigma_u$. Si fuera $\sigma_u < 0$ entonces bastaría con aplicar una traslación (como se explicó en la observación 4) que no afectaría a la distancia entre abscisas.

□

Observación 5. *En virtud de la proposición 3.3 las abscisas de convergencia y convergencia absoluta coinciden para series de Dirichlet dependientes de un número finito de primos y las series de términos positivos. Por lo tanto, este tipo de series no son útiles para dar respuesta al problema de Bohr.*

De hecho, la cota $\frac{1}{2}$ obtenida en el teorema 3.10 es óptima. Este resultado se conoce como el Teorema de Bohr-Bohnenblust–Hille. Para poder demostrar este teorema se necesita desarrollar la teoría del Espacio de Banach de las Series de Dirichlet, que queda fuera del alcance de esta memoria. Por lo tanto, no daremos su demostración aunque puede encontrarse en [4].

Teorema 3.11 (Teorema de Bohr-Bohnenblust-Hille)**.** *Se tiene que $S = \frac{1}{2}$, y el supremo es de hecho un máximo. Es decir, existe una serie de Dirichlet D tal que $\sigma_u(D) = 0$ y $\bar{\sigma}(D) = \frac{1}{2}$. Más aún, para cada $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$, existe una serie de Dirichlet E tal que $\bar{\sigma}(E) - \sigma_u(E) = \sigma$.*

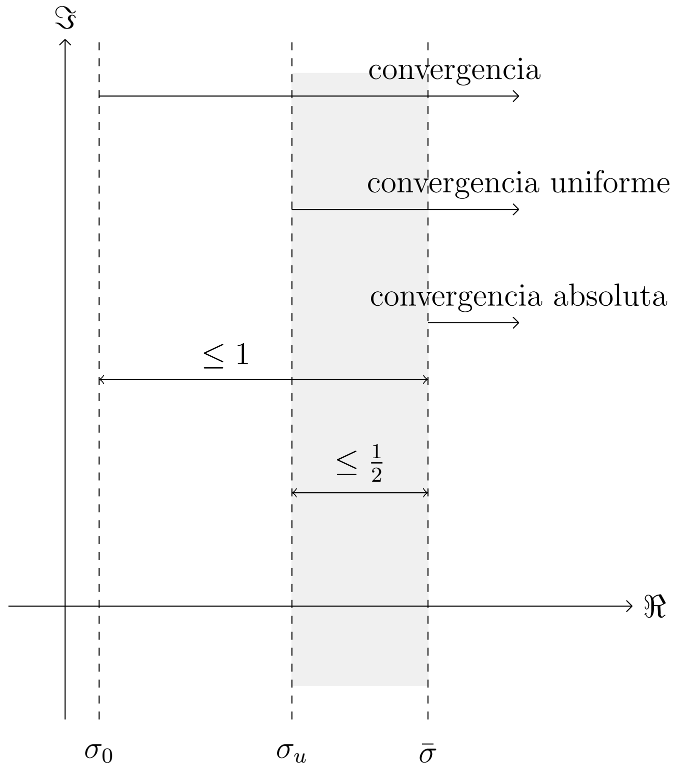


Figura 3.2: Separación entre las distintas abscisas de convergencia de una serie de Dirichlet ordinaria.

Capítulo 4

Aplicaciones en teoría de números

La teoría de números es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los números enteros. Entre ellos, los números primos juegan un papel fundamental pues son los ladrillos con los que se construyen el resto de números enteros. Las primeras curiosidades matemáticas acerca de los números se remontan a los griegos con Pitágoras y los números triangulares. Sin embargo, no fue hasta mediados del siglo XVIII cuando matemáticos como Euler, Fermat, Legendre, Gauss y Dirichlet desarrollaron un estudio sistemático y transformaron la teoría de números en una nueva área de las matemáticas. Muchos de los enunciados en teoría de números son simples de entender, pero no así su demostración. Las técnicas empleadas son una recopilación de otras áreas como la geometría, el álgebra o el análisis. En concreto, la teoría analítica de números es la rama que emplea las ideas y métodos del análisis real y complejo. Esta forma de enfocar los problemas ha resultado extremadamente útil, dando respuesta a muchos problemas. Quizás el más famoso e importante sea el Teorema de los números primos (A.2). Tuvieron que pasar más de 100 años para que C. J. de la Vallée Poussin y J. Hadamard dieran una demostración al problema en 1896. Pese a ello, son muchos los problemas en teoría de números que permanecen sin resolver. Algunos de ellos son la conjetura de Goldbach, la hipótesis de Riemann, la conjetura de Legendre, la conjetura de Hardy-Littlewood...

Las series de Dirichlet fueron empleadas por primera vez por P. G. L. Dirichlet para resolver problemas como el Teorema de Dirichlet sobre progresiones aritméticas mediante las llamadas funciones L de Dirichlet, un caso particular de series de Dirichlet. Sin embargo, Dirichlet solo consideró valores reales para la variable s. Fue J. Jensen el primero en extender la variable al plano complejo y explotar aún más sus cualidades. En este capítulo se empleará la teoría desarrollada hasta ahora para probar resultados relativos a las funciones aritméticas.

4.1. Funciones aritméticas y convolución de Dirichlet

En primer lugar definiremos un conjunto de funciones aritméticas que juegan un papel fundamental en las propiedades de divisibilidad de los números enteros y la distribución de los números primos. También probaremos una serie de resultados que emplearemos en el resto del capítulo.

Definición 4.1. *Una función aritmética es una función definida en los naturales y con llegada en* $\mathbb{C}$*,* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Observación 6. *En este trabajo se considerará que los números naturales son los números enteros estrictamente positivos, es decir, excluyendo al* 0, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Definición 4.2. *La función de Möbius* $\mu(n)$ *se define como:*

$$\mu(1) = 1;$$

Si $n > 1$ *y* $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ *entonces,*

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } a_1 = a_2 = ... = a_k = 1, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que $\mu(n) = 0$ solamente si n tiene un cuadrado como factor.

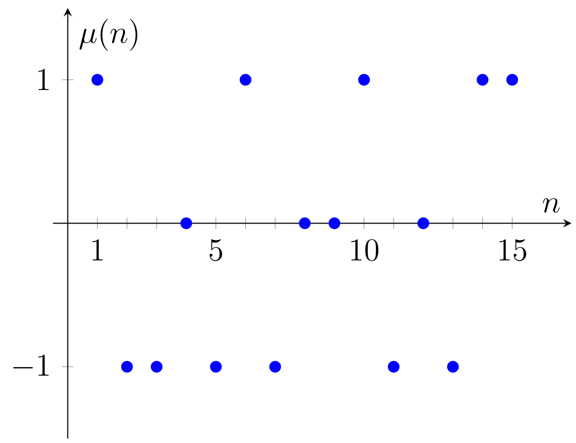


Figura 4.1: Gráfica de la función de Möbius $\mu(n)$ para los primeros 15 valores.

Una de las propiedades fundamentales de la función μ es la sencilla fórmula para la suma de $\mu(d)$ extendida a todos los divisores d de n:

Proposición 4.3. *Si $n \geq 1$ se cumple que*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1, \\ 0 & \text{si} \quad n > 1, \end{cases}$$

donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x (el mayor entero menor o igual que x).

Demostración. Si $n = 1$, es evidente. Supongamos que $n > 1$ y que $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$. En el sumatorio $\sum_{d|n} \mu(d)$, los únicos términos no nulos provienen de $d = 1$ y de aquellos divisores de n que son productos de números primos distintos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \ldots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \\ + \ldots + \mu(p_{k-1} p_k) + \ldots + \mu(p_1 p_2 \cdots p_k) = \\ = 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \ldots + \binom{k}{k}(-1)^k = \\ = (1-1)^k = 0\,. \end{aligned}$$

$\square$

Definición 4.4. *Si $n \geq 1$ la función indicatriz o función totiente de Euler $\phi(n)$ proporciona el número de naturales menores que n y coprimos con n. Es decir,*

$$\phi(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ mcd(k,n)=1}}^{n} 1.$$

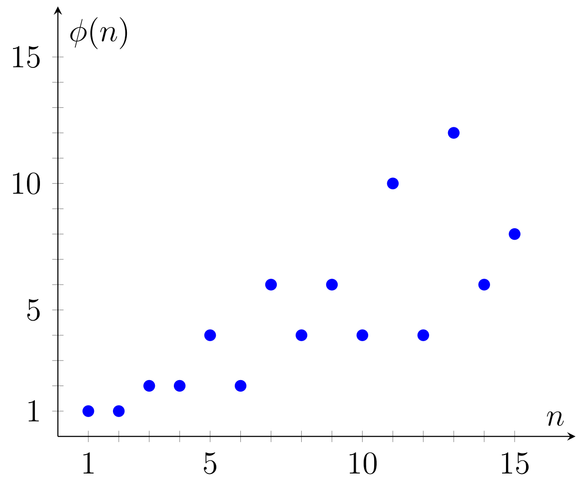


Figura 4.2: Gráfica de la función de Euler $\phi(n)$ para los primeros 15 valores.

De forma similar a la función de Möbius, existe también una fórmula para la suma de $\phi(d)$ extendida a todos los divisores d de n:

Proposición 4.5. *Si $n \geq 1$ se tiene*

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n.$$

Demostración. Llamemos $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ y construyamos una partición de S. Para cada divisor d de n sea

$$A(d) = \{k : mcd(k, n) = d, 1 \leq k \leq n\}.$$

Sea $f(d) = |A(d)|$ el cardinal de $A(d)$, entonces

$$\sum_{d|n} f(d) = n. \tag{4.1}$$

Pero $mcd(k, n) = d$ si, y solo si, $mcd(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}) = 1$, y $0 < k \leq n$ si, y solo si, $0 < \frac{k}{d} \leq \frac{n}{d}$. Por tanto, si escribimos $q = \frac{k}{d}$, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $A(d)$ y los enteros q que cumplen $0 < q \leq \frac{n}{d}$ y $mcd(q, \frac{n}{d}) = 1$. El número de tales enteros q es $\phi(\frac{n}{d})$. En consecuencia $f(d) = \phi(\frac{n}{d})$ y (4.1) se convierte en

$$\sum_{d|n} \phi(\frac{n}{d}) = n.$$

Pero esto es equivalente a que $\sum_{d|n} \phi(d) = n$ porque cuando d recorre todos los divisores de n, $\frac{n}{d}$ también lo hace. □

Antes de seguir con el resto de funciones aritméticas introducimos el concepto de convolución de Dirichlet, fundamental en el resto del capítulo y que surge de manera natural al considerar productos de series de Dirichlet.

Definición 4.6. *Sean dos funciones aritméticas f y g. Se denomina convolución de Dirichlet (o producto de Dirichlet) de f y g a la función aritmética*

$$h(n) = (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{ab=n} f(a) g(b).$$

La siguiente proposición describe las propiedades algebraicas de la convolución de Dirichlet:

Teorema 4.7. *La convolución de Dirichlet es conmutativa y asociativa. Es decir, si f, g y k son funciones aritméticas cualesquiera entonces*

$$f * g = g * f \quad (\textit{propiedad conmutativa})$$

$$(f * g) * k = f * (g * k) \quad (\textit{propiedad asociativa.})$$

Demostración. En primer lugar observemos que la definición de $f * g$ se puede expresar también como

$$(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b),$$

donde a y b varían sobre todos los naturales cuyo producto es n. De esta forma, la propiedad conmutativa es evidente.
Para probar la propiedad asociativa definamos $A = g * k$ y sea $f * A = f * (g * k)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}(f * A)(n) &= \sum_{ad=n} f(a)A(d) = \sum_{ad=n} f(a) \sum_{bc=d} g(b)k(c) = \\ &= \sum_{abc=n} f(a)g(b)k(c).\end{aligned}$$

De la misma forma, si $B = f * g$ y consideremos $B * k$ llegamos al mismo resultado para $(B * k)(n)$. En consecuencia, $f * A = B * k$, lo que implica que la convolución de Dirichlet es asociativa. □

A continuación introducimos un elemento unidad para este producto:

Definición 4.8. *La función aritmética dada por*

$$I(n) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1, \\ \\ 0 & \text{si} \quad n > 1, \end{cases}$$

se denomina función identidad.

Proposición 4.9. *Para cada función aritmética f se cumple que $f * I = I * f = f$.*

Demostración. Aplicando la definición de convolución de Dirichlet y de la función identidad es inmediato que

$$(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d)I\left(\frac{d}{n}\right) = f(n).$$

□

Teorema 4.10. *Si f es una función aritmética con $f(1) \neq 0$ entonces existe una única función aritmética f^{-1}, llamada la inversa de Dirichlet de f, tal que*

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I.$$

Más aún, f^{-1} está determinada por las fórmulas recursivas siguientes

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(n)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \quad \textit{para } n > 1.$$

Demostración. Dada f, probaremos que la ecuación $(f * f^{-1})(n) = I(n)$ tiene una única solución dada por los valores $f^{-1}(n)$. Para $n = 1$ tenemos que resolver la ecuación

$$(f * f^{-1})(1) = I(1)$$

que se reduce a la ecuación $f(1)f^{-1}(1) = 1$. Puesto que $f(1) \neq 0$, existe una única solución, dada por $f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$. Supongamos ahora que los valores $f^{-1}(k)$ han sido determinados de forma única para todo $k < n$. Entonces tenemos que resolver la ecuación $(f * f^{-1})(n) = I(n)$, o

$$\sum_{d|n} f\Big(\frac{n}{d}\Big) f^{-1}(d) = 0.$$

Esto es equivalente a escribir

$$f(1)f^{-1}(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\Big(\frac{n}{d}\Big) f^{-1}(d) = 0.$$

Si los valores $f^{-1}(d)$ son conocidos para todos los divisores $d < n$, entonces existe un único valor para $f^{-1}(n)$, dado por

$$f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\Big(\frac{n}{d}\Big) f^{-1}(d),$$

puesto que $f(1) \neq 0$. Esto establece la existencia y unicidad de f^{-1} por inducción. □

Observación 7. *Se tiene que* $(f * g)(1) = f(1)g(1)$. *Por tanto, si* $f(1) \neq 0$ *y* $g(1) \neq 0$ *entonces* $(f * g)(1) \neq 0$. *Este hecho junto con los resultados 4.7, 4.9 y 4.10 implica que el conjunto de funciones aritméticas* f *con* $f(1) \neq 0$ *es un grupo abeliano respecto del producto de Dirichlet* $*$, *siendo su elemento identidad la función* I. *Se puede comprobar fácilmente que*

$$(f * g)^{-1} = f^{-1} * g^{-1}$$

si $f(1) \neq 0$ *y* $g(1) \neq 0$.

Teorema 4.11 (Fórmula de inversión de Möbius)**.** *Sean* f *y* g *dos funciones aritméticas. La ecuación*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{4.2}$$

implica

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\Big(\frac{n}{d}\Big). \tag{4.3}$$

Recíprocamente, la ecuación (4.3) *implica* (4.2).

Demostración. Denotemos por u a la función aritmética constante e igual a 1, $u(n) = 1$ para cada n. Puesto que $\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$ se cumple que $u * \mu = I$. Luego la ecuación (4.2) establece que $f = g * u$. Multiplicando por μ y teniendo en cuenta la propiedad asociativa de la convolución de Dirichlet se tiene $f * \mu = (g * u) * \mu = g * (u * \mu) = g * I = g$, que es la ecuación (4.3). Recíprocamente, multiplicando $f * \mu = g$ por u se deduce (4.2). □

Veamos ahora otra importante función aritmética, la función de Mangoldt, que juega un papel central en la distribución de los números primos:

Definición 4.12. *La función de Mangoldt* $\Lambda(n)$ *se define como:*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^m \text{ para algún primo } p \text{ y algún } m \geq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

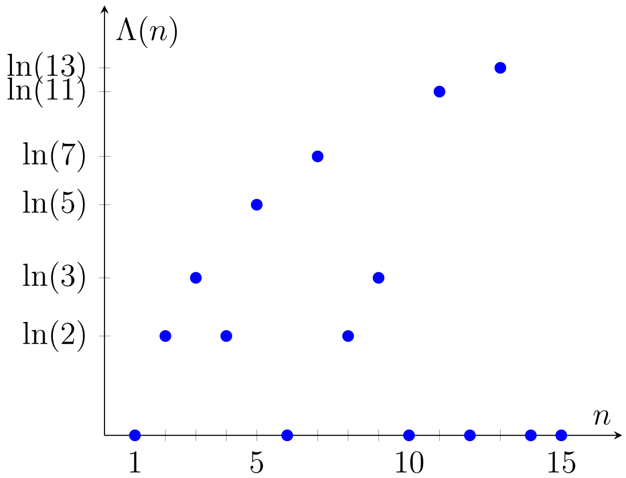


Figura 4.3: Gráfica de la función de Mangoldt $\Lambda(n)$ para los primeros 15 valores.

La demostración de la siguiente proposición muestra cómo la función de Mangoldt surge de manera natural del teorema fundamental de la aritmética:

Proposición 4.13. *Si* $n \geq 1$ *se cumple*

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Demostración. Si $n = 1$ entonces ambos miembros son 0. Supongamos que $n > 1$ y escribamos

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}.$$

Tomando logaritmos se tiene

$$\ln n = \sum_{k=1}^{r} a_k \ln p_k.$$

Consideremos el miembro derecho de la ecuación del teorema. Los únicos términos no nulos en la suma provienen de los divisores d de la forma p_k^m para $m = 1, 2, \ldots, a_k$ y $k = 1, 2, \ldots, r$. Entonces

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \Lambda(p_k^m) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \ln p_k = \sum_{k=1}^{r} a_k \ln p_k = \ln n,$$

lo que prueba el teorema. □

Ahora empleamos la fórmula de inversión de Möbius para expresar $\Lambda(n)$ en términos del logaritmo:

Proposición 4.14. *Si $n \geq 1$ se cumple*

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\, \ln\left(\frac{n}{d}\right) = -\sum_{d|n} \mu(d) \ln d\,.$$

Demostración. Empleando la fórmula de inversión de Möbius en la ecuación $\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$ de la proposición 4.13 se deduce

$$\begin{aligned} \Lambda(n) &= \sum_{d|n} \mu(d)\, \ln\left(\frac{n}{d}\right) = \ln n \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d) \ln d = \\ &= I(n) \ln n - \sum_{d|n} \mu(d) \ln d\,. \end{aligned}$$

Puesto que $I(n) \ln n = 0$ para todo n se concluye la demostración. □

Definición 4.15. *Se dice que una función aritmética f es multiplicativa si no es idénticamente nula y $f(mn) = f(m)f(n)$ siempre que m y n sean primos entre sí (es decir, siempre que mcd$(m, n) = 1$).*
Se dice que una función aritmética f es completamente multiplicativa si no es idénticamente nula y $f(mn) = f(m)f(n)$ para todos m y n naturales.

Observación 8. *Es inmediato que si f es una función aritmética multiplicativa entonces $f(1) = 1$ pues $f(n) = f(1)f(n)$ y mcd$(n, 1) = 1$ para cada n natural. Puesto que f no es idénticamente nula, $f(n) \neq 0$ para algún n, luego $f(1) = 1$.*

Observación 9.

- La función de Möbius $\mu(n)$ es multiplicativa pero no completamente multiplicativa pues $\mu(4) = 0 \neq 1 = \mu(2)\mu(2)$.

- La función indicatriz de Euler $\phi(n)$ es muliplicativa pero no completamente multiplicativa ya que $\phi(4) = 2 \neq 1 = \phi(2)\phi(2)$.

Proposición 4.16. *Si f y g son funciones aritméticas multiplicativas entonces su convolución de Dirichlet $f * g$ también es multiplicativa.*

Demostración. Sea $h = f*g$ y escojamos naturales m y n primos entre sí. Entonces

$$h(mn) = \sum_{c|mn} f(c)g\big(\frac{mn}{c}\big)\,.$$

Cualquier divisor c de mn se puede escribir como $c = ab$ donde $a|m$ y $b|n$. Además, $mcd(a, b) = 1$, $mcd(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}) = 1$ y hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de productos de la forma ab y los divisores c de mn. Por tanto,

$$\begin{aligned} h(mn) &= \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(ab)g\big(\frac{mn}{ab}\big) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a)f(b)g\big(\frac{m}{a}\big)g\big(\frac{n}{b}\big) = \\ &= \sum_{a|m} f(a)g\big(\frac{m}{a}\big)\sum_{b|n} f(b)g\big(\frac{n}{b}\big) = h(m)h(n)\,. \end{aligned}$$

□

Observación 10. *Sin embargo, la convolución de Dirichlet de dos funciones completamente multiplicativas no es completamente multiplicativa. Por ejemplo, consideremos la función aritmética $f(n) = n$. Es evidente que f es completamente multiplicativa. Si calculamos el producto de Dirichlet de f por sí misma,*

$$(f * f)(n) = \sum_{d|n} f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d\frac{n}{d} = n\sum_{d|n} 1 = n\sigma_0(n),$$

donde $\sigma_0(n)$ cuenta el número de divisores de n. Observemos que $(f * f)(9) = 9 \cdot 3 = 27$ y $(f * f)(3) = 3 \cdot 2 = 6$. Luego $(f * f)(9) \neq (f * f)(3)(f * f)(3)$, y $f * f$ no es completamente multiplicativa a pesar de que f sí lo es.

Otra función aritmética que emplearemos es la función de Liouville:

Definición 4.17. *La función de Liouville $\lambda(n)$ se define como $\lambda(1) = 1$, y si $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ entonces*

$$\lambda(n) = (-1)^{a_1+\ldots+a_k}\,.$$

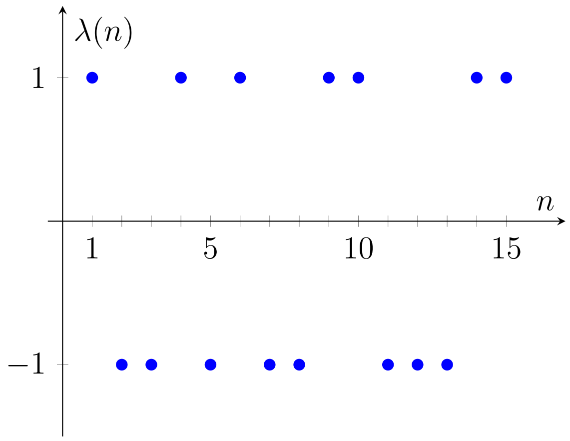


Figura 4.4: Gráfica de la función de Liouville $\lambda(n)$ para los primeros 15 valores.

Definición 4.18. *Las funciones divisor $\sigma_\alpha(n)$, con α real o complejo y $n \geq 1$, vienen dadas por*

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha ,$$

es decir, la suma de las potencias α-ésimas de los divisores de n.

Observación 11. *Observemos que $\sigma_0(n)$ es el número de divisores de n y $\sigma_1(n)$ la suma de los divisores de n.*

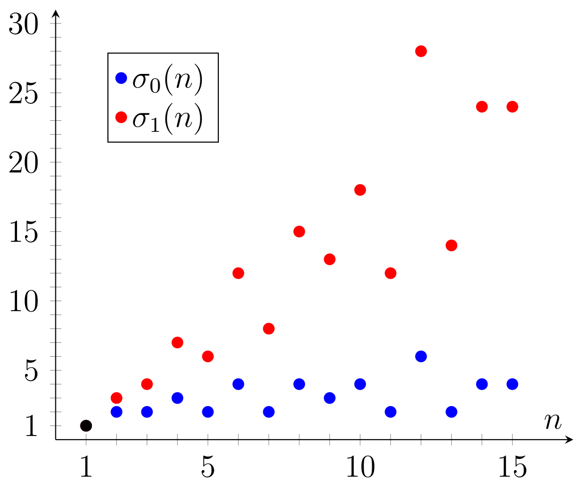


Figura 4.5: Gráfica de las funciones $\sigma_0(n)$ y $\sigma_1(n)$ para los primeros 15 valores.

Para cerrar la sección presentaremos las últimas funciones aritméticas importantes que emplearemos:

Definición 4.19. *Un carácter de Dirichlet χ es una función aritmética con las siguientes propiedades:*

- *χ es completamente multiplicativa.*
- *$\chi(n) = \chi(n+k)$ para todo n y para algún natural k.*

Se dice entonces que χ es un carácter de Dirichlet módulo k.

El carácter de Dirichlet da lugar al siguiente tipo de series de Dirichlet:

Definición 4.20. *Una serie L de Dirichlet es una serie de la forma*

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} ,$$

siendo χ un carácter de Dirichlet y s la variable compleja con $\Re(s) > 1$.

Observación 12. *Este tipo de series se pueden prolongar de forma analítica al resto del plano complejo formando funciones meromorfas denominadas Funciones L de Dirichlet. Este tipo de funciones le permitieron a Dirichlet demostrar el teorema de los números primos en progresiones aritméticas.*

4.2. Series de Dirichlet y productos de Euler

Cada función aritmética $f(n)$ induce de forma natural una serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$. El estudio de las propiedades analíticas de esta serie permite una mejor comprensión de la función aritmética. Esto convierte a las series de Dirichlet en una poderosa herramienta para la resolución de problemas en teoría de números. En este capítulo trabajaremos con este tipo de series de Dirichlet.

Veamos primero un resultado que utilizaremos más adelante:

Proposición 4.21. *Sea $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ la función suma y supongamos que $\bar{\sigma} < \infty$. Entonces*

$$\lim_{\sigma\to\infty} F(\sigma + it) = f(1) ,$$

uniformemente para $-\infty < t < \infty$.

Demostración. Puesto que $F(s) = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, solo tenemos que probar que el segundo término tiene hacia 0 cuando $\sigma \to \infty$. Si $\sigma \geq c > \bar{\sigma}$ entonces

$$\Big|\sum_{n=2}^{\infty} f(n)n^{-s}\Big| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|n^{-\sigma} = \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|n^{-c}n^{-(\sigma-c)} \leq$$

$$\leq 2^{-(\sigma-c)} \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|n^{-c} = \frac{A}{2^{\sigma}} ,$$

siendo A independiente de σ y de t. Puesto que $\frac{A}{2^{\sigma}} \to 0$ cuando $\sigma \to \infty$, se concluye la demostración.

□

El siguiente teorema relaciona el producto de series de Dirichlet con la convolución de Dirichlet de sus coeficientes:

Teorema 4.22. *Sean $F(s)$ y $G(s)$ las sumas de dos series de Dirichlet,*

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} \quad \textit{para } \sigma>a\,,$$

y

$$G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s} \quad \textit{para } \sigma>b\,.$$

Entonces, en el semiplano en el que ambas series convergen absolutamente se tiene que

$$F(s)G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s}\,,$$

siendo $h=f*g$, la convolución de Dirichlet de f y g. Recíprocamente, si $F(s)G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(n)}{n^s}$ para todo s de una sucesión $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty}\sigma_k=\infty$ entonces $\alpha=f*g$.

Demostración. Si s es tal que ambas series convergen absolutamente entonces

$$F(s)G(s)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g(m)}{m^s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f(n)g(m)}{(nm)^s}\,.$$

Puesto que ambas series convergen absolutamente se puede multiplicar ambas series y reordenar los términos como se quiera en virtud del teorema de Mertens. Ordenando los términos de forma que mn sea constante se tiene que

$$F(s)G(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{mn=k}f(n)g(m)\right)k^{-s}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h(k)}{k^s}\,,$$

donde $h(k)=\sum_{mn=k}f(n)g(m)=(f*g)(k)$.
La otra implicación se deduce de forma inmediata del teorema de anulación 1.10.

□

Ejemplo 4.23.

Consideremos las series $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$, ambas con $\bar{\sigma}=1$. Con la notación del teorema anterior $f(n)=1$ y $g(n)=\mu(n)$. Observemos que

$$(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(d)g\Big(\frac{n}{d}\Big)=\sum_{d|n}g(d)f\Big(\frac{n}{d}\Big)=\sum_{d|n}\mu(d)\,.$$

Finalmente, empleando la proposición 4.3 y el teorema 4.22 se tiene que

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=1 \text{ si } \sigma>1\,.$$

En particular, esto demuestra que $\zeta(s)\neq 0$ para $\sigma>1$ y que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)} \text{ si } \sigma>1\,.$$

Ejemplo 4.24.

De forma más general, supongamos que $f(1)\neq 0$ y sea $g=f^{-1}$, la inversa de Dirichlet de f. Entonces en cualquier semiplano donde ambas series $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ y $G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}$ convergen absolutamente se tiene que $F(s)\neq 0$ y $G(s)=\frac{1}{F(s)}$.

Ejemplo 4.25.

Supongamos que $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ converge absolutamente para $\sigma>\bar{\sigma}$. Supongamos además que f es completamente multiplicativa. Entonces $f^{-1}(n)=\mu(n)f(n)$ pues

$$\sum_{d|n}f(d)\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)f\Big(\frac{n}{d}\Big)=\sum_{d|n}f(n)\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)=f(n)\sum_{d|n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)=f(n)\sum_{d|n}\mu(d)=f(n)I(n)\,,$$

y teniendo en cuenta que $f(1)=1$ y que $I(n)=0$ para $n>1$ se deduce que $f^{-1}(n)=\mu(n)f(n)$. En consecuencia, $|f^{-1}(n)|\leq|f(n)|$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)f(n)}{n^s}$ también converge absolutamente para $\sigma>\bar{\sigma}$. Empleando el ejemplo anterior se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)f(n)}{n^s}=\frac{1}{F(s)} \text{ para } \sigma>\bar{\sigma}\,.$$

En particular, para cualquier carácter de Dirichlet χ se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}=\frac{1}{L(s,\chi)} \text{ para } \sigma>\bar{\sigma}\,.$$

Ejemplo 4.26.

Tomemos ahora $f(n)=1$ y $g(n)=\phi(n)$. Puesto que $\phi(n)\leq n$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s}$ converge absolutamente para $\sigma>2$. Además se vio en la proposición 4.5 que

$$(f*g)(n)=\sum_{d|n}\phi(d)=n\,.$$

Empleando el teorema 4.22 se deduce que

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^s}=\zeta(s-1) \text{ si } \sigma>2\,.$$

Finalmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \text{ si } \sigma>2\,.$$

Ejemplo 4.27.

Consideremos $f(n)=1$ y $g(n)=n^\alpha$. Entonces $h(n)=(f*g)(n)=\sum_{d|n}d^\alpha=\sigma_\alpha(n)$. El teorema 4.22 establece

$$\zeta(s)\zeta(s-\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} \text{ si } \sigma>\text{máx}\{1,1+\Re(\alpha)\}\,.$$

Ejemplo 4.28.

Escribamos $f(n)=1$ y $g(n)=\lambda(n)$. Probemos primero que

$$\sum_{d|n}\lambda(d)=\begin{cases}1 & \text{si } n=m^2 \text{ para algún } m,\\ \\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Sea $h(n)=\sum_{d|n}\lambda(d)$. Puesto que h es multiplicativa por la proposición 4.16, para calcular $h(n)$ solo necesitamos hallar $h(p^a)$ para potencias de primos. Se tiene que

$$\begin{aligned}h(p^a)=\sum_{d|p^a}\lambda(d)&=1+\lambda(p)+\lambda(p^2)+\ldots+\lambda(p^a)=\\&=1-1+1-\ldots+(-1)^a=\\&=\begin{cases}0 & \text{si } a \text{ es impar,}\\ \\ 1 & \text{si } a \text{ es par.}\end{cases}\end{aligned}$$

Por tanto, si $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i}$ se tiene que $h(n)=\prod_{i=1}^{k}h(p_i^{a_i})$. Si alguno de los exponentes a_i es impar entonces $h(p_i^{a_i})=0$ y $h(n)=0$. Si todos los exponentes a_i son pares entonces $h(p_i^{a_i})=1$ para todo i y $h(n)=1$. En consecuencia, $h(n)=1$ si n es un cuadrado y $h(n)=0$ en otro caso.
Aplicando ahora el teorema 4.22 se deduce que

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}=\sum_{\substack{n=1\\n=m^2}}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2s}}=\zeta(2s) \text{ para } \sigma>1\,.$$

Finalmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \quad \text{para } \sigma > 1\,.$$

El siguiente teorema descubierto por Euler en 1737 se conoce también como la versión analítica del teorema fundamental de la aritmética. En el apéndice B se incluyen los principales resultados de productos infinitos.

Teorema 4.29. *Sea f una función aritmética multiplicativa tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ sea absolutamente convergente. Entonces la suma de la serie se puede expresar como un producto infinito absolutamente convergente extendido a todos los primos. Es decir,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \{1 + f(p) + f(p^2) + \ldots\}\,. \tag{4.4}$$

Si f es completamente multiplicativa, el producto se simplifica y se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \frac{1}{1 - f(p)}\,.$$

En cada caso, el producto se denomina producto de Euler de la serie.

Demostración. Consideremos el producto finito

$$P(x) = \prod_{p \le x} \{1 + f(p) + f(p^2) + \ldots\}$$

extendido a todos los primos $p \le x$. Puesto que es el producto de un número finito de series absolutamente convergentes podemos multiplicar las series y reordenar los términos de cualquier forma sin alterar la suma. Organicemos la suma en términos de la forma

$$f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \cdots f(p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r})$$

puesto que f es multiplicativa. Teniendo en cuenta la expresión anterior y el teorema fundamental de la aritmética podemos escribir

$$P(x) = \sum_{n \in A} f(n)\,,$$

siendo A el conjunto de los naturales que tienen todos su factores primos $\le x$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) = \sum_{n \in B} f(n)\,,$$

siendo B el conjunto de los naturales que tienen al menos un factor primo $> x$. Entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x)\right| \leq \sum_{n\in B} |f(n)| \leq \sum_{n>x} |f(n)| \,.$$

Al hacer tender $x \to \infty$ el último término del lado derecho converge a 0 puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ es convergente. Por tanto, $P(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ cuando $x \to \infty$.

Observemos que

$$\sum_{p\leq x} |f(p) + f(p^2) + \dots| \leq \sum_{p\leq x} \big(|f(p)| + |f(p^2)| + \dots\big) \leq \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)| \,.$$

Puesto que todas las sumas parciales están acotadas, la serie de términos positivos

$$\sum_{p} |f(p) + f(p^2) + \dots|$$

converge, lo que implica la convergencia absoluta del producto (4.4) en virtud del lema B.3.
Por otro lado, cuando f es completamente multiplicativa se tiene que $f(p^n) = f(p)^n$ y cada serie en la parte derecha de (4.4) es una serie geométrica convergente con suma $\frac{1}{1-f(p)}$ pues si $f(p) \geq 1$ entonces $f(p^n) \geq 1$ para todo n (lo cual es absurdo ya que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge absolutamente). □

Aplicando el teorema anterior a series de Dirichlet absolutamente convergentes se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 4.30. *Supongamos que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge absolutamente para* $\sigma > \bar{\sigma}$. *Si* f *es una función aritmética multiplicativa se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p} \left\{1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right\} \quad \textit{si } \sigma > \bar{\sigma} \,.$$

Si, además, f *es completamente multiplicativa entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}} \quad \textit{si } \sigma > \bar{\sigma} \,.$$

Ejemplo 4.31.

Tomando $f(n) = 1$, $\mu(n)$, $\phi(n)$, $\sigma_\alpha(n)$, $\lambda(n)$ y $\chi(n)$, respectivamente, se obtienen los siguientes productos de Euler:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \quad \text{para } \sigma > 1\,,$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p (1-p^{-s}) \quad \text{para } \sigma > 1\,,$$

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}} \quad \text{para } \sigma > 2\,,$$

$$\zeta(s)\zeta(s-\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{\alpha-s})} \quad \text{para } \sigma > \text{máx}\{1, 1, +\Re(\alpha)\}\,,$$

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1+p^{-s}} \quad \text{para } \sigma > 1\,,$$

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} \quad \text{para } \sigma > 1\,.$$

Una serie de Dirichlet $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ que no es idénticamente nula tiene un semiplano en el que nunca se anula (teorema 1.10). El siguiente teorema muestra que en este semiplano $F(s)$ es la exponencial de otra serie de Dirichlet si $f(1) \neq 0$.

Teorema 4.32. *Sea $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ una serie de Dirichlet absolutamente convergente para $\sigma > \bar{\sigma}$ con $f(1) \neq 0$. Si $F(s) \neq 0$ para $\sigma > \sigma_0 \geq \bar{\sigma}$, entonces para $\sigma > \sigma_0$ se tiene*

$$F(s) = e^{G(s)}$$

con

$$G(s) = \log(f(1)) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{\ln n} n^{-s}\,,$$

siendo f^{-1} la inversa de Dirichlet de f y $f'(n) = f(n)\ln n$.

Demostración. Puesto que $F(s) \neq 0$ y es una función holomorfa en $\sigma > \sigma_0$, el cociente $\frac{F'(s)}{F(s)}$ es una función holomorfa para $\sigma > \sigma_0$. En consecuencia, F admite logaritmo analítico y podemos escribir $F(s) = e^{G(s)}$ para alguna función $G(s)$ analítica para $\sigma > \sigma_0$. Derivando se tiene que

$$F'(s) = e^{G(s)}G'(s) = F(s)G'(s)\,,$$

luego $G'(s) = \frac{F'(s)}{F(s)}$. Pero

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\ln n}{n^s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{n^s}$$

y

$$\frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^s}\,.$$

En consecuencia,

$$G'(s) = F'(s)\frac{1}{F(s)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{n^s}\,.$$

Integrando,

$$G(s) = C + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{\ln n} n^{-s}$$

siendo C una constante. Haciendo $\sigma \to \infty$ se tiene $\lim_{\sigma\to\infty} G(\sigma + it) = C$. Empleando la proposición 4.21,

$$f(1) = \lim_{\sigma\to\infty} F(\sigma + it) = e^C\,,$$

y $C = \log(f(1))$. También hemos demostrado que la serie para $G(s)$ converge absolutamente si $\sigma > \sigma_0$.

□

Ejemplo 4.33.

Tomando $f(n) = 1$ se tiene que $f'(n) = \ln n$ y $f^{-1}(n) = \mu(n)$. Luego

$$(f' * f^{-1})(n) = \sum_{d|n} \ln d\, \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) = \Lambda(n)\,,$$

donde en la última igualdad se ha empleado la proposición 4.14. Si $\sigma > 1$ se cumple que

$$\zeta(s) = e^{G(s)}\,,$$

donde

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} n^{-s}\,.$$

Ejemplo 4.34.

Un argumento similar muestra que si f es completamente multiplicativa y $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ entonces en el semiplano de convergencia absoluta $\sigma > \bar{\sigma}$ se cumple que

$$F(s) = e^{G(s)}\,,$$

siendo

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)\Lambda(n)}{\ln n} n^{-s}\,,$$

puesto que $(f' * f^{-1})(n) = \sum_{d|n} f(d) \ln d\, \mu(n/d) f(n/d) = f(n)\Lambda(n)$. Observemos que al ser f completamente multiplicativa se cumple que $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$.

Las fórmulas anteriores también se pueden deducir mediante los productos de Euler. Por ejemplo, recordemos la expresión para la función zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \quad \text{para } \sigma > 1.$$

Consideremos s real y $s > 1$ de forma que $\zeta(s)$ es positiva. Tomando logaritmos y empleando la serie de potencias $-\ln(1-x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$ para $|x| < 1$ se deduce

$$\ln(\zeta(s)) = -\sum_p \ln(1-p^{-s}) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-ms}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_1(n) n^{-s}\,,$$

donde

$$\lambda_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } n = p^m \text{ para algún primo } p, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Pero si $n = p^m$ entonces $\ln n = m \ln p = m\Lambda(n)$ luego $\frac{1}{m} = \frac{\Lambda(n)}{\ln n}$. Entonces

$$\ln(\zeta(s)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} n^{-s}$$

lo que implica que $\zeta(s) = e^{G(s)}$ para $s > 1$ real. Pero cada uno de los miembros de la ecuación anterior es analítico en el semiplano $\sigma > 1$, luego también se cumple para $\sigma > 1$ por el principio de identidad.

El siguiente teorema permite conocer el valor medio del producto de dos series de Dirichlet:

Teorema 4.35. *Sean dos series de Dirichlet,* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *y* $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$*, con abscisas de convergencia absoluta* σ_1 *y* σ_2 *respectivamente. Entonces para* $a > \sigma_1$ *y* $b > \sigma_2$ *se cumple*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} F(a+it)G(b-it)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^{a+b}} .$$

Demostración. Se tiene que

$$F(a+it)G(b-it) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^{a+it}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^{b-it}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(m)g(n)}{m^a n^b}\left(\frac{n}{m}\right)^{it} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^{a+b}} + \sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{f(m)g(n)}{m^a n^b}\left(\frac{n}{m}\right)^{it} .$$

Observemos que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{f(m)g(n)}{m^a n^b}\left(\frac{n}{m}\right)^{it}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|f(m)|}{m^a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(n)|}{n^b}$$

por lo que la serie es absolutamente convergente. De hecho, también es uniformemente convergente para todo t. Integrando término a término y dividiendo por $2T$ se obtiene

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} F(a+it)G(b-it)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^{a+b}} +$$
$$+ \sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{f(m)g(n)}{m^a n^b} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it\ln(n/m)}dt .$$

Pero para $m \neq n$ se cumple

$$\int_{-T}^{T} e^{it\ln(n/m)}dt = \frac{2\sin\left[T\ln\left(\frac{n}{m}\right)\right]}{\ln\left(\frac{n}{m}\right)} .$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} F(a+it)G(b-it)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^{a+b}} +$$
$$+ \sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{f(m)g(n)}{m^a n^b} \frac{\sin\left[T\ln\left(\frac{n}{m}\right)\right]}{T\ln\left(\frac{n}{m}\right)} .$$

La serie doble anterior converge uniformemente respecto de T pues $(\sin x)/x$ está acotado para cada x. Por tanto podemos pasar al límite término a término para obtener la fórmula del teorema. □

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se deduce el siguiente resultado:

Teorema 4.36. *Si* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *converge absolutamente para* $\sigma > \bar{\sigma}$ *entonces para* $\sigma > \bar{\sigma}$ *se cumple*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(\sigma+it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^{2\sigma}}\,.$$

En particular, para $\sigma > 1$ *se tiene*

a.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} = \zeta(2\sigma)\,.$$

b.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\zeta^{(k)}(\sigma+it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{2k} n}{n^{2\sigma}} = \zeta^{(2k)}(2\sigma)\,.$$

c.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^{-2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^{2\sigma}} = \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}\,.$$

d.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^4 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_0^2(n)}{n^{2\sigma}} = \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}\,.$$

Demostración. La fórmula general del teorema se deduce del teorema 4.35 tomando $g(n) = \overline{f(n)}$. Para demostrar los casos particulares solo tenemos que calcular el valor de las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^{2\sigma}}$ para distintas $f(n)$. Para el caso (a) la fórmula es obvia tomando $f(n) = 1$. Para el ejemplo (b) tomando $f(n) = (-1)^k \ln^k n$ se tiene

$$\zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n^s}\,.$$

Para probar los casos (c) y (d) emplearemos los productos de Euler y el teorema 4.30. Para (c), escogiendo $f(n) = \mu(n)$ se deduce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s} = \prod_p (1+p^{-s}) = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{1-p^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\,.$$

Sustituyendo s por 2σ se obtiene (c). Para (d) observemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_0^2(n)}{n^s} &= \prod_p \{1 + \sigma_0^2(p)p^{-s} + \sigma_0^2(p^2)p^{-2s} + \cdots\} = \\ &= \prod_p \{1 + 2^2 p^{-s} + 3^2 p^{-2s} + \cdots\} = \\ &= \prod_p \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 p^{-ns} \right\} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^4} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}\,.\end{aligned}$$

puesto que $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n = -\frac{x+1}{(x-1)^3} = \frac{1-x^2}{(1-x)^4}$ para $|x| < 1$. Basta con sustituir s por 2σ para obtener (d).

$\square$

Apéndice A

Teorema de Kronecker

El objetivo de este apéndice es demostrar el teorema de aproximación de Kronecker empleado en la demostración de la proposición 3.7.

Teorema A.1 (Teorema de Kronecker). *Denotemos al conjunto N-dimensional $\mathbb{T}^N = \{w \in \mathbb{C}^n : |w_j| = 1$ para $j = 1, ..., n\}$ y sea $\{1, \theta_1, ..., \theta_N\}$ un conjunto de números reales $\mathbb{Z}$-linealmente independientes. Entonces la sucesión $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ definida por*

$$z_j = (e^{2\pi i j\theta_1}, ..., e^{2\pi i j\theta_N})$$

es densa en $\mathbb{T}^N$. En particular, si $p_1, \dots, p_N$ son los N primeros primos,

$$\{(p_1^{it}, ..., p_N^{it}) : t \in \mathbb{R}\}$$

es denso en $\mathbb{T}^N$.

Demostración. Sea z_j para cada $j \in \mathbb{N}$ como en el enunciado. Veamos que para cada función compleja definida y continua en $\mathbb{T}^N$, $f \in C(\mathbb{T}^N)$, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(z_j) = \int_{\mathbb{T}^N} f(w)dw\,. \tag{A.1}$$

La última integral se puede tomar en el sentido de Lebesgue o, si se prefiere, en el sentido de Riemann al tratarse de una función continua en un compacto. Para hallar su valor se emplea el teorema de Fubini mediante la integración iterada:

$$\int_{\mathbb{T}^N} f(w)dw = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(e^{it_1}, \dots, e^{it_n})dt_1 \dots dt_N\,.$$

$\mathbb{T}^N$ es un espacio topológico compacto. Sea $\mathbb{A}$ el conjunto de polinomios trigonométricos de la forma $\sum_{\alpha\in F} c_\alpha w^\alpha$ con F un subconjunto finito de $\mathbb{Z}^N$. Entonces,

- $\mathbb{A}$ es un subálgebra de $C(\mathbb{T}^N)$,

- $\mathbb{A}$ contiene a todas las funciones constantes,
- $\mathbb{A}$ separa puntos de $\mathbb{T}^N$: si $x, y \in \mathbb{T}^N$ con $x \neq y$ entonces existe un j con $1 \leq j \leq N$ tal que $x_j \neq y_j$. Basta considerar la proyección j-ésima $\Pi_j(w) = w_j$ que pertenece a $\mathbb{A}$ y cumple que $\Pi_j(x) \neq \Pi_j(y)$.
- si $f \in \mathbb{A}$ entonces $\bar{f} \in \mathbb{A}$: si $f(w) = \sum_{\alpha \in F} c_\alpha w^\alpha$ entonces

$$\begin{aligned}
\overline{f(w)} &= \sum_{\alpha \in F} \overline{c_\alpha} \overline{w^\alpha} = \sum_{\alpha \in F} \overline{c_\alpha} \overline{w_1^{\alpha_1} \cdots w_N^{\alpha_N}} = \sum_{\alpha \in F} \overline{c_\alpha} \overline{w_1^{\alpha_1}} \cdots \overline{w_N^{\alpha_N}} \\
&= \sum_{\alpha \in F} \overline{c_\alpha}\, \overline{w_1}^{\alpha_1} \cdots \overline{w_N}^{\alpha_N} = \sum_{\alpha \in F} \overline{c_\alpha}\, w_1^{-\alpha_1} \cdots w_N^{-\alpha_N} \\
&= \sum_{\alpha \in F} \overline{c_\alpha}\, w^{-\alpha} \in \mathbb{A}.
\end{aligned}$$

En virtud del teorema de Stone-Weierstrass se deduce que $\mathbb{A}$ es denso en $C(\mathbb{T}^N)$. Por tanto, para probar la igualdad anterior bastará con demostrarla para el caso $f(w) = w^\alpha = w_1^{\alpha_1} \cdots w_N^{\alpha_N}$, con $w \in \mathbb{T}^N$ y $\alpha \in \mathbb{Z}$. Si $\alpha = 0$ entonces es inmediato que ambos miembros son iguales a 1. Supongamos que $\alpha \neq 0$. Existe por tanto un j con $1 \leq j \leq N$ tal que $\alpha_j \neq 0$. Como $\int_0^{2\pi} e^{i\alpha_j t_j} dt_j = 0$, entonces $\int_{\mathbb{T}^N} w^\alpha dw = 0$ por (A.1). Por otro lado, si $u = \sum_{k=1}^N \theta_k \alpha_k$ entonces $1 - e^{2\pi i u} \neq 0$ (pues si no $\alpha = 0$ ya que $\{1, \theta_1, ..., \theta_N\}$ son $\mathbb{Z}$-linealmente independientes y $u \in \mathbb{Z}$. Por tanto, para cada n se cumple que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(z_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^N e^{2\pi i j \theta_k \alpha_k} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (e^{2\pi i u})^j = \frac{1}{n} \left(\frac{1 - e^{2\pi i (n+1) u}}{1 - e^{2\pi i u}} - 1 \right).$$

En consecuencia,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1 - e^{2\pi i (n+1) u}}{1 - e^{2\pi i u}} - 1 \right) = 0\,.$$

Probemos ahora el teorema. Sea $z \in \mathbb{T}^N$ y supongamos que existe un entorno de z, U, tal que no contiene a ninguno de los z_j. Sea $f \in C(\mathbb{T}^N) \setminus \{0\}$ con soporte en U. Por tanto, $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(z_j) = 0$, pero $\int_{\mathbb{T}^N} f(w) dw > 0$, lo cuál es absurdo.

Finalmente, vamos a probar que existe un $a > 0$ tal que el conjunto

$$\{(p_1^{iaj}, \ldots, p_N^{iaj}) : j \in \mathbb{N}\}\,,$$

es denso en $\mathbb{T}^N$, lo que obviamente implica la afirmación del enunciado. Como

$$p_k^{iaj} = e^{2\pi i j \frac{a \ln p_k}{2\pi}}\,,$$

basta ver, por la primera parte, que $\{1, \ldots, \frac{a \ln p_N}{2\pi}\}$ es $\mathbb{Z}$-linealmente independiente para un $a > 0$ adecuado. Para probar esto tomemos un a en el conjunto

$$(0, \infty) \setminus \{\frac{2\pi m}{\ln q} : m \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Q}, 0 < q \neq 1\}\,.$$

Observemos que esto es posible porque sustraemos un conjunto numerable de otro no numerable. Supongamos que

$$2\pi\beta + \alpha_1 a \ln p_1 + \cdots + \alpha_N a \ln p_N = 0\,,$$

para $\beta, \alpha_1, ..., \alpha_N \in \mathbb{Z}$. Si existiera un $\alpha_k \neq 0$, entonces $0 < n := (p_1)^{\alpha_1} \cdots (p_N)^{\alpha_N} \neq 1$. Por tanto, $a = -\frac{2\pi\beta}{\ln n}$, que es absurdo. Por consiguiente, todos los α_k son 0 y $\beta = 0$. □

También se incluye el enunciado del teorema de los números primos, resultado que se emplea en la demostración de 3.7.

Teorema A.2 (Teorema de los números primos)**.** *Sea $\pi(x)$ el número de primos menores o iguales que x. Entonces,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1\,.$$

Demostración. Dada la complejidad de su demostración, nos remitimos a la bibliografía clásica. Pueden encontrarse demostraciones detalladas tanto en [3] como en [1]. □

Apéndice B

Productos infinitos

En este apéndice se recogen las definiciones y los principales resultados relativos a los productos infinitos.

Definición B.1. *Sea* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos y sea* $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$*, el producto parcial n-ésimo. Se dice que el producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge si la sucesión* $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge hacia un número* P*, y en este caso se escribe* $P = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

Observación 13. *Notemos que si* $P_n \to P \neq 0$*, entonces* $z_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1$ *cuando* $n \to \infty$*. Por tanto una condición necesaria (pero no suficiente) de la convergencia del producto infinito a un límite no nulo es que* $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

Un forma de tratar con productos es transformándolos en sumas por medio de los logaritmos. El siguiente resultado ilustra este hecho:

Lema B.2. *Supongamos que* $z_n \neq 0$ *para todo* n*. Entonces* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge a un límite no nulo si, y solo si, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n$ *es convergente (donde* $\log z$ *denota la rama principal del logaritmo complejo de* z*).*

Demostración. Sean $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} \log z_k$. Si $S_n \to S$, entonces $P_n = e^{S_n} \to e^S \neq 0$.
Recíprocamente, supongamos que $P_n \to P \neq 0$. Sea $\bar{\theta}$ un argumento de P y escojamos $\theta \neq \bar{\theta}$ tal que la función $\arg_\theta$ es continua en P, siendo $\arg_\theta$ la determinación del argumento que toma valores en $[\theta, \theta + 2\pi)$. Se tiene por tanto que $\log_\theta P_n = \ln |P_n| + i \arg_\theta(P_n) \to \ln |P| + i \arg_\theta(P) = \log_\theta P$ cuando $n \to \infty$. Puesto que $e^{S_n} = P_n$, se cumple que $S_n = \log_\theta P_n + i2\pi l_n$, para algún entero l_n. Pero $S_n - S_{n-1} = \log z_n \to \log 1 = 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $\log_\theta P_n - \log_\theta P_{n-1} + i2\pi(l_n - l_{n-1}) \to 0$ al hacer $n \to \infty$. Además se tiene que $\log_\theta P_n - \log_\theta P_{n-1} \to \log_\theta P - \log_\theta P = 0$ cuando $n \to \infty$. Como $l_n - l_{n-1}$ es un entero y su límite es 0, $l_n - l_{n-1} = 0$ para todo $n \geq n_0$ para cierto n_0. En consecuencia, $l_n = l$ para todo $n \geq n_0$ y $S_n \to \log_\theta P + i2\pi l$, como se quería probar. □

Lema B.3. *Si $a_n \geq 0$ para todo n, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge si, y solo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Demostración. Sean $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Puesto que $a_n \geq 0$ las sucesiones $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ son monótonas crecientes. Por tanto, para probar el teorema bastará ver que $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente si, y solo si, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente. Puesto que $1+x \leq e^x$ para x real, para cada n se tiene que

$$a_1 + \cdots + a_n \leq (1+a_1)\cdots(1+a_n) \leq e^{a_1+\cdots a_n},$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado. □

El resultado anterior sugiere el concepto de convergencia absoluta para productos infinitos:

Definición B.4. *El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ se dice que es absolutamente convergente si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ converge. En virtud del lema B.3 la convergencia absoluta de $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ es equivalente a la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.*

Lema B.5. *Si el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ converge absolutamente entonces converge.*

Demostración. Por el lema B.3, la convergencia de $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$, en particular $|z_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Podemos suponer por tanto que $|z_n| < 1$ para todo n. Si $|z| < 1$ se tiene que

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} = zh(z),$$

siendo $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{n-1}}{n}$, $|z| < 1$. En consecuencia, para $m \leq p$, se cumple que

$$\left|\sum_{n=m}^{p}\log(1+z_n)\right| \leq \sum_{n=m}^{p}|z_n||h(z_n)|. \tag{B.1}$$

Puesto que $h(z) \to 1$ cuando $z \to 0$, el conjunto $\{h(z_n) : n = 1, 2, \ldots\}$ es acotado. Además, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ converge, verifica la condición de Cauchy de convergencia. Por este motivo se deduce de (B.1) que $|\sum_{n=m}^{p}\log(1+z_n)| \to 0$ cuando $m, p \to \infty$. Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+z_n)$ converge y, en consecuencia, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ converge por el lema B.2. □

El siguiente resultado es análogo al teorema de reordenación de series de Riemann pero en el caso de productos infinitos absolutamente convergentes:

Teorema B.6. *Si* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ *converge absolutamente, entonces cualquier reordenación del producto también converge absolutamente y hacia el mismo límite. Es decir, si* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ *converge y* $P=\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$*, entonces para cada permutación* $k\mapsto n_k$ *de los naturales,* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_{n_k})$ *también converge hacia* P*.*

Demostración. Puesto que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ también converge por el lema B.3. No sólo eso, cualquier reordenación de la serie también converge por tratarse de una serie absolutamente convergente. De nuevo, en virtud de B.3, $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|z_{n_k}|)$ converge.
Veamos ahora que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_{n_k})$ converge al mismo límite que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$. Consideremos $\epsilon>0$ y para cada $j=1,2,\dots$, sea Q_j la suma parcial j-ésima del producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_{n_k})$. Tomemos N suficientemente avanzado de forma que $\sum_{n=N+1}^{\infty}|z_n|<\epsilon$ (la existencia de tal N se deduce de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$) y J suficientemente grande tal que si $j\geq J$ entonces $\{1,2,\dots,N\}\subseteq\{n_1,n_2,\dots,n_j\}$ (esto es posible ya que $j\mapsto n_j$ es una permutación de los números naturales). Entonces para cada $j\geq J$ se tiene que

$$\begin{aligned}|Q_j-P|&\leq|Q_j-P_N|+|P_N-P|\\&=|P_N|\big|\prod_k(1+z_{n_k})-1\big|+|P_N-P|\,,\end{aligned}\tag{B.2}$$

donde el producto es a lo largo de los $k\leq j$ tales que $n_k>N$.
Ahora veamos que si $w_1,\dots,w_n$ son números complejos cualesquiera entonces se tiene que

$$\big|\prod_{k=1}^{n}(1+w_k)-1\big|\leq\prod_{k=1}^{n}(1+|w_k|)-1\,.$$

Lo probamos por inducción. Si $n=1$ es inmediato ya que $|1+w_1-1|=|w_1|\leq 1+|w_1|-1$. Supongamos que es cierta la desigualdad para n, entonces

$$\begin{aligned}\big|\prod_{k=1}^{n+1}(1+w_k)-1\big|&=\big|\prod_{k=1}^{n}(1+w_k)(1+w_{n+1})-1\big|\\&=\big|\prod_{k=1}^{n}(1+w_k)-1+w_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+w_k)\big|\\&\leq\prod_{k=1}^{n}(1+|w_k|)+|w_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}(1+|w_k|)-1=\prod_{k=1}^{n+1}(1+|w_k|)-1\,.\end{aligned}$$

Llevando la desigualdad anterior a (B.2) se obtiene

$$\begin{aligned}|Q_j-P|&\leq|P_N|\big(\prod_k(1+|z_{n_k}|)-1\big)+|P_N-P|\\&\leq|P_N|(e^{\epsilon}-1)+|P_N-P|\,.\end{aligned}$$

El miembro derecho de la desigualdad anterior se puede hacer tan pequeño como se quiera tomando ϵ suficientemente pequeño y N suficientemente grande. En consecuencia $Q_j \to P$ cuando $j \to \infty$ y se concluye la demostración. $\square$

Los siguientes resultados atañen a la convergencia de productos infinitos de funciones complejas:

Proposición B.7. *Sean $g_1, g_2, \ldots$una sucesión de funciones complejas acotadas, definidas todas ellas en un conjunto S. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ converge uniformemente en S, entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n)$ converge absolutamente y uniformemente en S. Más aún, si $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z))$, $z \in S$, entonces $f(z) = 0$ para algún $z \in S$ si, y solo si, $1 + g_n(z) = 0$ para algún n.*

Demostración. La convergencia absoluta se deduce del lema B.3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ converge uniformemente en S entonces existe un N tal que si $n \geq N$ se cumple que $|g_n(z)| < 1$ para todo $z \in S$. Sea $r \geq N$ cualquiera,

$$\prod_{n=1}^{r}(1+g_n(z)) = \prod_{n=1}^{N-1}(1+g_n(z)) \prod_{n=N}^{r}(1+g_n(z)) .$$

Como en la prueba del lema B.5, con la misma función h y con $m, p \geq N$,

$$\Big| \sum_{n=m}^{p} \log(1+g_n(z)) \Big| \leq \sum_{n=m}^{p} |g_n(z)||h(g_n(z))| \to 0 \tag{B.3}$$

uniformemente en S cuando $m, p \to \infty$. Por tanto, $\sum_{n=N}^{\infty} \log(1+g_n(z))$ converge uniformemente en S. Puesto que las funciones $g_N, g_{N+1}, \ldots$ están acotadas en S, la serie $\sum_{n=N}^{\infty} |g_n(z)||h(g_n(z))|$ está acotada en S y por la desigualdad (B.3), lo mismo ocurre con la serie $\sum_{n=N}^{\infty} \log(1+g_n(z))$. Sin embargo, la función exponencial es uniformemente continua en los subconjuntos acotados de $\mathbb{C}$, por lo que

$$\exp\left\{ \sum_{n=N}^{r} \log(1+g_n(z)) \right\} \to \exp\left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \log(1+g_n(z)) \right\} \neq 0$$

uniformemente en S cuando $r \to \infty$. Esto prueba la convergencia uniforme de $\prod_{n=N}^{\infty}(1+g_n(z))$ en S. Como $1+g_n(z)$ nunca se anula en S para $n \geq N$, si $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z))$, entonces $f(z) = 0$ para algún $z \in S$ si, y solo si, $1 + g_n(z) = 0$ para algún $n < N$. $\square$

Observación 14. *El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|g_n|)$ también converge uniformemente en S, como se deduce de la desigualdad*

$$\prod_{n=m}^{p}(1+|g_n|) \leq \exp\left\{ \sum_{n=m}^{p} |g_n| \right\} ,$$

o también se deduce aplicando la proposición anterior a $|g_1|, |g_2|, \ldots$.

El siguiente teorema trata acerca de la holomorfía de productos infinitos de funciones:

Teorema B.8. *Sean $f_1, f_2, \ldots$ funciones analíticas en un abierto Ω. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω, entonces $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ define una función analítica en Ω. Más áun, para cualquier $z \in \Omega$ se tiene que $f(z) = 0$ si, y solo si, $f_n(z) = 0$ para algún n.*

Demostración. Por la proposición B.7, si tomamos $g_n = f_n - 1$, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω, por lo que f es analítica en Ω en virtud del teorema de Weierstrass. La última frase del teorema es de nuevo consecuencia de B.7. $\square$

Bibliografía

[1] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer-Verlag, 1976.

[2] T. M. Apostol. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory.* Springer-Verlag, 1989.

[3] R. B. Ash and W. P. Novinger. *Complex Variables.* Dover Publications Inc., 2007.

[4] A. Defant, D. García, M. Maestre, and P. Sevilla-Peris. *Dirichlet Series and Holomorphic Functions in High Dimensions.* Cambridge University Press, 2019.

[5] G. H. Hardy and Marcel Riesz. *The General Theory of Dirichlet's Series.* Cambridge University Press, 1915.