



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Funciones Armónicas Discretas

Autora: Marta Tapia Martínez
Tutor: Antonio Campillo López
2024

Introducción

Los grafos y sus propiedades geométricas han sido objeto de estudio desde hace décadas, proporcionando un terreno fértil para explorar conexiones entre estructuras discretas y conceptos más complejos de geometría y física. La finalidad esencial de este trabajo, es introducir al lector en el campo de las funciones armónicas discretas. Estas funciones tienen una estrecha analogía con las funciones armónicas en análisis, donde desempeñan un papel fundamental. Estas funciones recordemos que pueden ser definidas como una función dos veces derivable $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (quizás solo definida en algún dominio) que satisface la ecuación diferencial $\Delta f = 0$, donde $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el operador Laplaciano. Una caracterización básica de estas funciones es la *propiedad del valor medio*: su valor en cualquier punto es igual al promedio de sus valores sobre cualquier bola alrededor de ese punto. Esta caracterización sirve para definir, por analogía, las funciones armónicas sobre vértices de grafos.

Las funciones armónicas discretas juegan un papel crucial en el análisis de caminos aleatorios, además de tener diversas aplicaciones en la teoría de redes eléctricas y en la estática. Esta interconexión entre diferentes campos permite aplicaciones multidisciplinarias, donde los métodos y resultados de la teoría de la electricidad y la estática, a menudo basados en principios físicos, pueden ser aplicados al estudio de caminos aleatorios, y viceversa.

Nuestro objetivo es introducir al lector en el mundo de las funciones armónicas discretas e invitarlo a investigar más sobre este fascinante campo. Para ello, nos hemos guiado por los fundamentos presentados por László Lovász en su libro "Graphs and Geometry"(2019). Sus explicaciones y ejemplos han sido esenciales para comprender y exponer de manera clara y concisa los conceptos relacionados con las funciones armónicas discretas.

Antes de sumergirnos en estas interesantes funciones, realizaremos un repaso de todos los conceptos necesarios sobre la teoría de grafos para comprender en su totalidad nuestro objeto de estudio.

En primer lugar, dedicaremos un capítulo a introducir al lector en la teoría de grafos, definiendo los conceptos fundamentales. Aunque algunas definiciones puedan no parecer tan esenciales, serán necesarias para comprender las funciones. Además, fijaremos una notación que estará presente a lo largo de todo el trabajo y enunciaremos y demostraremos resultados básicos de la teoría de grafos que, aunque sean elementales, resultan primordiales.

Dado que en este trabajo, vamos a aplicar nuestros resultados principalmente a grafos planos, dedicaremos un capítulo a conocer en profundidad estos grafos. Trataremos aspectos como la dualidad, la importante fórmula de Euler con su correspondiente demostración y consecuencias, consideraremos grafos dibujados sobre otras superficies y veremos distintos tipos de conexidades.

Siguiendo con esta línea de trabajo, hablaremos de grafos poliédricos y cómo podemos representarlos, mencionando enunciados de gran importancia en la teoría de grafos, como el Teorema de Steinitz. Técnicamente, los grafos poliédricos son los grafos 3-conexos.

Como último escalón, antes de adentrarnos en el capítulo más destacado de este trabajo, hablaremos sobre las bandas elásticas, capítulo 4, que, a pesar de parecer no tener mucha relación con nuestro estudio, ocurre que si la tienen y son de gran importancia. Como podrá comprobar el lector, tienen una alta relación con las funciones armónicas, tanto es así que usaremos los resultados de este capítulo para probar enunciados sobre funciones armónicas.

En el quinto capítulo, llegamos al culmen de nuestro trabajo: las ansiadas funciones armónicas discretas. Veremos las definiciones y desarrollaremos las demostraciones en profundidad, incluyendo algunos ejemplos. No obstante, se trata solo de una pequeña parte de este amplio campo.

Finalizaremos con el estudio de las redes eléctricas, donde daremos algunos conceptos básicos sobre este campo para ubicar al lector y veremos cómo relacionar estas redes o circuitos con grafos, buscando así soluciones a problemas complejos.

Índice general

1	Conceptos introductorios	1
1.1	Definiciones básicas	1
1.2	Matrices asociadas a grafos	5
2	Grafos planos	7
2.1	Dualidad	10
2.2	Fórmula de Euler	11
2.2.1	Vértices de grado pequeño	13
2.3	Aristas bicoloreadas	18
2.4	Grafos planos 3-conexos	20
3	Grafos poliédricos	23
3.1	Representación con líneas rectas	24
3.1.1	Esqueletos de politopos	24
4	Bandas elásticas	27
4.1	Energía, fuerzas y centros de gravedad.	27
4.2	¿Cómo dibujar un grafo?	30
5	Funciones Armónicas Discretas	33
6	Redes eléctricas	41
	Bibliografía	47

Capítulo 1

Conceptos introductorios

En este primer capítulo, presentaremos las definiciones fundamentales y la notación básica relacionadas con la Teoría de Grafos, así como los resultados elementales que serán necesarios para el desarrollo de los capítulos siguientes.

1.1. Definiciones básicas

Definición 1.1. Un *grafo* o *multigrafo* es el par $G = (V, A)$ donde V es un conjunto finito cuyos elementos se denominan *vértices* y A es otro conjunto finito cuyos elementos se denominan *aristas*, de tal forma que las aristas tendrán como extremos dos vértices especificados y diremos que la arista une a dichos vértices.

Definición 1.2. Diremos que una arista es un *lazo* si sus dos extremos son el mismo vértice. En el caso que dos vértices estén unidos por varias aristas diremos que hay *aristas múltiples* entre ambos vértices. Un grafo es *simple* cuando no tiene ni lazos ni aristas múltiples.

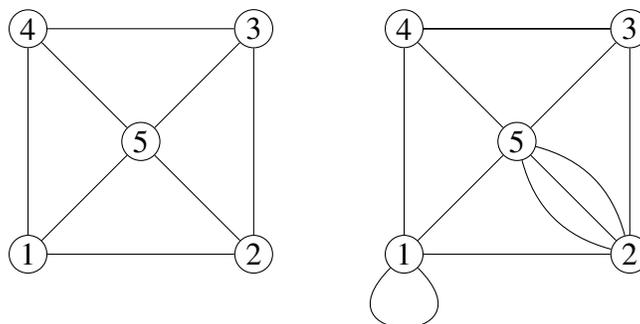


Figura 1.1: A la izquierda tenemos un grafo simple y a la derecha un grafo con un lazo y aristas múltiples.

Observación 1.3. Hemos representado los vértices como círculos con el número correspondiente dentro. No obstante, a lo largo de este trabajo también será habitual denotarlos simplemente como puntos azules.

Definición 1.4. Un *subgrafo* de un grafo dado, $G = (V, A)$ es otro grafo que tiene como conjuntos de vértices y de aristas a respectivos subconjuntos V' de V y A' de A , de forma que los extremos de cada arista de A' en el grafo original sean vértices de V' .

Observación 1.5. De aquí en lo que sigue del trabajo usaremos la siguiente notación:

- v : representa el número de vértices, es decir, el cardinal de V .
- a : número de aristas, el cardinal de A .
- grado del vértice v_j , $\deg(v_j)$, es el número de aristas que confluyen en él.
- $N(v_j)$: número de vértices unidos a v_j por una arista.
- Para todo $j \geq 0$, $V(j)$ es el conjunto de vértices de grado j y $v(j)$ será su cardinal. Los vértices de $V(1)$ diremos que son *extremos libres* del grafo y los de $V(2)$ *superfluos*.
- Si tenemos dos vértices u y v denotaremos la arista que los une como uv .

Observación 1.6.

- Si una arista forma un lazo en un vértice v_j entonces en $\deg(v_j)$, esta contará dos veces.
- Si G es simple entonces $\deg(v_j) = |N(v_j)|$.

Definición 1.7. Dos grafos $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ son *isomorfos* si existe una aplicación biyectiva f entre V_1 y V_2 y otra aplicación biyectiva g entre A_1 y A_2 tales que la arista e de A_1 une los vértices v y w de V_1 si y solo si la arista $g(e)$ de A_2 une los vértices $f(v)$ y $f(w)$ de A_2 . Al par de funciones f y g se les denomina *isomorfismo*.

Definición 1.8. Un grafo es *conexo* cuando desde cualquier vértice se puede llegar a otro distinto por una cadena de aristas consecutivas. Las *componentes conexas* de un grafo no conexo se definen como los conjuntos de vértices que están conectados entre sí por una cadena de aristas consecutivas. (Ver Figura 1.3)

Definición 1.9. Un grafo es *doblemente conexo* o *2-conexo* si es posible eliminar cualquier vértice (junto con las aristas que inciden en él) y el grafo sigue siendo conexo. En general, si $k \geq 1$, un grafo es *k-conexo* si es posible eliminar cualesquiera $k - 1$ de sus vértices sin que deje de ser conexo.

Definición 1.10. Un *grafo no dirigido* es un tipo de grafo en el cual las aristas representan relaciones simétricas y no tienen un sentido definido, a diferencia del *grafo dirigido*, en el cual las aristas tienen un sentido y, por tanto, no son necesariamente simétricas.

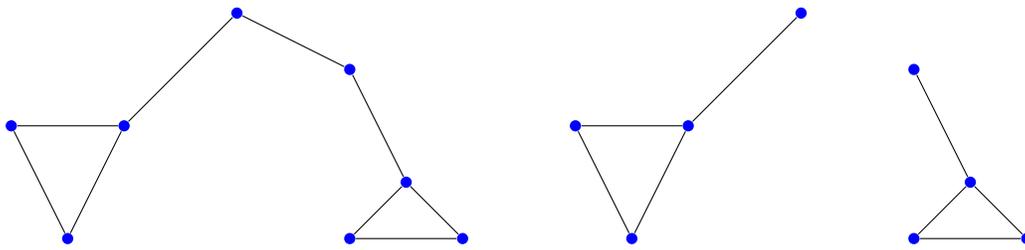


Figura 1.2: A la izquierda tenemos un grafo conexo y a la derecha un grafo no conexo

Definición 1.11. Un *grafo ponderado* (o *grafo con peso*) es un grafo en el cual hay datos asociados a sus aristas, el valor $w(a_i)$ está asociado con la arista a_i y se llama *ponderación* o *peso de la arista* a_i . Estos datos asociados suelen ser números, que en la práctica son habitualmente reales, enteros o naturales. Sin embargo, en algunas aplicaciones, estos valores pueden ser elementos de cualquier grupo abeliano, como por ejemplo, el grupo aditivo de los vectores en un espacio vectorial.

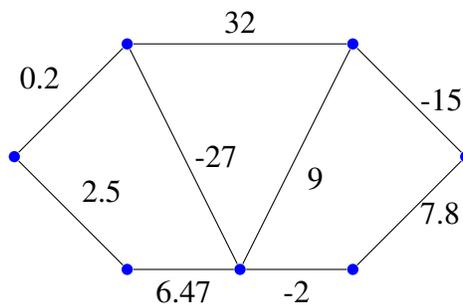


Figura 1.3: Grafo ponderado con pesos 0.2, 2.5, 6.47, 9, 32 y -27.

Definición 1.12. En un grafo, un *camino* es una secuencia de vértices y aristas que conecta un vértice inicial con un vértice final. En este camino, cada vértice está conectado a los vértices adyacentes mediante las aristas que los unen en la secuencia. Un *camino cerrado* es un camino cuyo vértice inicial y final son el mismo. Por otro lado, un *camino simple* es un camino sin vértices repetidos, salvo posiblemente el primero y el último. Finalmente, un *ciclo* es un camino simple y cerrado. Una *base de ciclos* es un conjunto de ciclos a partir del cual se pueden generar todos los demás ciclos del grafo mediante combinaciones determinadas, por ejemplo, sucesivas diferencias simétricas (uniones de las aristas de dos ciclos eliminando las de la intersección de ambos).

Definición 1.13. Un *grafo bipartido* es un tipo de grafo cuyos vértices pueden ser divididos en dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 de tal manera que cada arista del grafo conecta un vértice de V_1 con un vértice de V_2 . Es decir, no hay aristas que conecten vértices dentro del mismo conjunto V_1 o V_2 .

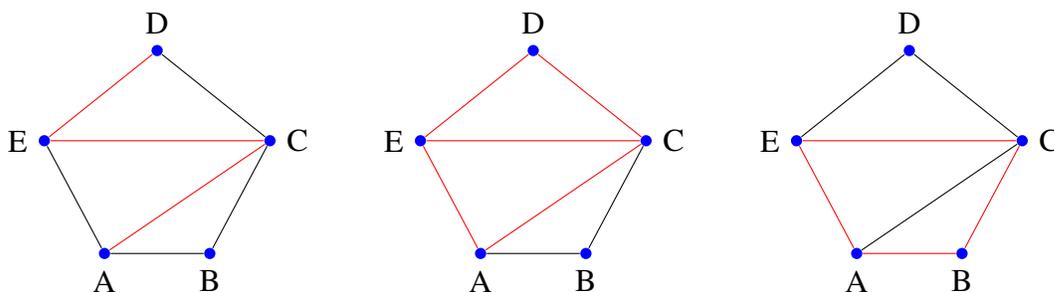


Figura 1.4: Camino simple, camino cerrado y ciclo.

Definición 1.14. Un *grafo completo* K_n es un grafo no dirigido que tiene n vértices y en el cuál cada par de vértices está conectado por una única arista.

Veamos ahora algunos resultados importantes:

Teorema 1.15 (de apretón de manos). *Dado un grafo $G = (V, A)$ se verifica $v(1) + 2v(2) + 3v(3) + \dots = 2a$.*

Demostración

Dado que $v(j)$ es el número de vértices con grado j , entonces, la expresión $v(1) + 2v(2) + 3v(3) + \dots$ es la suma de aristas, cada una contada dos veces (una vez en cada extremo de la arista). Por tanto, la suma total de los grados es igual al doble del número de aristas, es decir, $2a$.

□

Corolario 1.16. *Si para un grafo se tiene $v(0) = v(1) = \dots = v(h-1) = 0$ para un cierto valor de $h > 0$, entonces se tiene la siguiente desigualdad $hv \leq 2a$. En particular, para los grafos sin extremos libres ni vértices de grado dos, es decir, simples, se cumple $3v \leq 2a$.*

Demostración

Teniendo en cuenta el teorema anterior y que $v = v(0) + v(1) + v(2) + \dots$ se verifica que:

$$hv = hv(h) + hv(h+1) + \dots \leq hv(h) + (h+1)v(h+1) + \dots = 2a$$

En el caso particular de que no haya ni extremos libres ni vértices superfluos se cumple que $h = 3$ y por tanto, $3v \leq 2a$.

□

1.2. Matrices asociadas a grafos

Examinamos a continuación las matrices más relevantes asociadas a grafos, como la matriz de adyacencia, la matriz laplaciana y otras variantes. Estas matrices facilitan el estudio algebraico de los grafos y nos ayudarán a comprender mejor sus propiedades estructurales.

Definición 1.17. Sea $G = (V, A)$ un grafo finito simple y no dirigido con $|V| = v$, definimos la *matriz de adyacencia* de G , como la matriz $M_G = M = (M_{ij})$ de tamaño $v \times v$ donde

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si hay una arista entre los vértices } v_i \text{ y } v_j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si un grafo no es simple podríamos definir la matriz de adyacencia como

$$M_{ij} = \begin{cases} n, & \text{si hay } n \text{ aristas entre los vértices } v_i \text{ y } v_j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si el grafo también tuviese lazos, podríamos añadir esta información en la diagonal, en concreto dos veces el número de lazos para cada vértice.

Por ejemplo, consideremos el grafo con lazo y aristas múltiples de la Figura 1.1, su matriz de adyacencia es:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En el caso de tener un grafo ponderado, podemos definir M_{ij} como el peso de la arista que une los vértices v_i y v_j .

Definición 1.18. Dado $G = (V, A)$ un grafo finito, simple y no dirigido con $|V| = v$, definimos el *Laplaciano* de G como la matriz $L_G = L = (L_{ij})$ de tamaño $v \times v$ donde

$$L_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & \text{si } i = j \\ -M_{ij}, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por ejemplo, considerando el grafo simple de la Figura 1.1, tenemos que su Laplaciano es:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces, si D es una matriz diagonal con los grados de G tenemos que $L = D - M$. También podemos definir el *laplaciano normalizado* como $\hat{L} = D^{-1/2}LD^{-1/2}$

Observación 1.19. Tenemos que el $L\mathbb{1}_v = 0_v$ siendo $\mathbb{1}_v$ el vector columna de unos de tamaño v (el número de vértices del grafo) y 0_v el vector columna nulo de tamaño v .

Observación 1.20. En el caso de grafos no simples, se tiene también $L = D - M$, donde las entradas de la matriz diagonal D son los grados de los vértices (cada lazo en el vértice cuenta dos para el grado) y M es la matriz ya definida antes (en la diagonal dos veces los números de lazos y fuera de la diagonal la multiplicidad ponderada, si hay pesos, de aristas entre los pares de vértices).

Por ejemplo para el grafo de la figura 1.5, se tiene:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

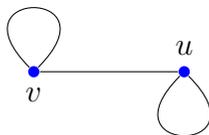


Figura 1.5: Ejemplo de grafo.

Capítulo 2

Grafos planos

A lo largo de este trabajo, exploraremos diversas propiedades y conceptos relacionados con los grafos planos. En este segundo capítulo, revisaremos las definiciones fundamentales y los resultados básicos asociados a estos grafos.

Definición 2.1. Diremos que un grafo es *plano* si tiene (al menos) una representación en el plano euclídeo \mathbb{R}^2 , es decir, si puede ser dibujado en el plano de tal manera que sus aristas no se crucen entre sí, salvo en los vértices. Se suele considerar, de hecho eso haremos frecuentemente, al dibujo como el grafo plano, para distinguir entre los distintos dibujos de un mismo grafo que sea plano.

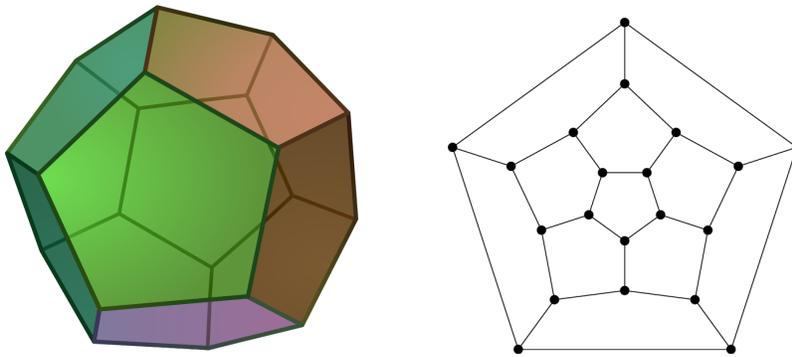


Figura 2.1: Dodecaedro y su representación en el plano. Fuente: adaptado de [1]

Definición 2.2. Una *cara* o *país* de un grafo plano se define como un área del plano que esta acotada por aristas y no puede continuar dividiéndose en subáreas. Cada cara tiene un *límite* que consiste en una secuencia cíclica de aristas. El conjunto C de caras es finito y denotaremos su cardinal por c . Cada cara tiene también un *grado*, que es el número de aristas que forman su límite. Denotamos por $c(j)$ el número de caras con grado j . Entre las caras hay siempre una no acotada mientras que las otras son acotadas.

Observación 2.3. Cada cara es una porción conexa del plano que no contiene partes del grafo. Las caras suelen visualizarse como los países de un mapa, y las aristas que delimitan cada

cara representan las fronteras entre estos países. El número de fronteras que rodean a cada país corresponde al grado de la cara.

Los grafos planos pueden representarse en la esfera bidimensional S^2 mediante puntos y segmentos, de manera similar a como se hace en el plano, pero con aristas esféricas. Las únicas intersecciones permitidas entre segmentos son las que ocurren en los extremos de las aristas del grafo (en los vértices).

Si se toma una foto desde un punto en una cara de la representación esférica (es decir, si se proyecta estereográficamente desde ese punto), la imagen resultante será una representación plana del grafo, donde la cara desde la que se tomó la foto se convierte en la cara no acotada en el plano. Recíprocamente, cualquier representación plana de un grafo es la proyección estereográfica de una representación esférica, en la cual la cara no acotada en el plano corresponde a la cara que contiene el centro de la proyección estereográfica.

Dado que se pueden tomar fotos desde diferentes caras, existen múltiples representaciones planas de un mismo grafo. Una pregunta natural es qué tienen en común todas estas representaciones. La respuesta se encuentra en el teorema de Euler, cuya demostración es sencilla y que constituye un resultado central en matemáticas.

Observación 2.4. Si el grafo plano es conexo, entonces cada país es homeomorfo a un disco abierto excepto el país ilimitado, que es homeomorfo a un anillo abierto.

Todo subgrafo de un grafo plano es plano, esto sucede porque la planaridad de un grafo no se ve afectada por la eliminación de aristas o vértices.

Definición 2.5. Nos referimos al *complemento o complementario* de un grafo plano G como otro grafo \bar{G} con los mismos vértices que G pero tal que dos vértices de \bar{G} están conectadas por una arista si y solo si esos dos mismos vértices no están conectados por una arista en G .

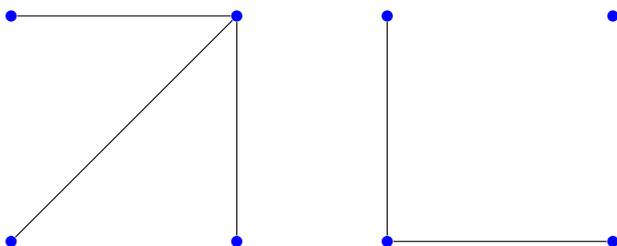


Figura 2.2: Grafo y su complementario.

Para comprender mejor el concepto de grafos planos, consideremos los grafos de la Figura 2.3. El grafo (a) es claramente plano, ya que ninguna de sus aristas se cruza con otras. Aunque el grafo (b) pueda parecer no plano a simple vista, en realidad sí lo es. Podemos modificar la arista que cruza sobre la arista horizontal y representarla como en el dibujo (c). Así, podemos

observar que (b) y (c) son isomorfos y ambos son grafos planos.

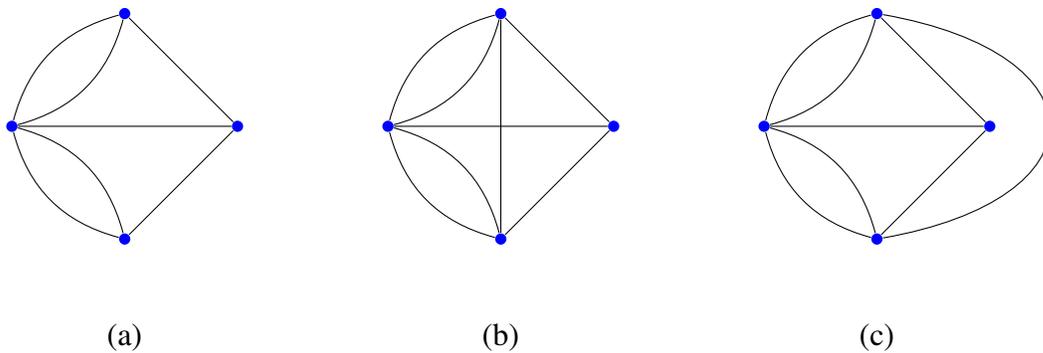


Figura 2.3: Grafos planos.

Definición 2.6. Hemos comentado anteriormente que cada cara tiene un límite o frontera que consiste en una secuencia cíclica de aristas. Puede ocurrir que recorramos una arista de esta frontera dos veces, esto sucede si y solo si es una arista de *corte* también llamada *punte* o *ístm* del multigrafo, es decir, una arista que al ser eliminada aumenta el número de componentes conexas de este. Equivalentemente, una arista es puente si y solo si no está contenida en ningún ciclo.

Observación 2.7. Si el grafo es 2-conexo por aristas, es decir, si podemos eliminar cualquier arista y el grafo permanece conexo, entonces ninguna frontera contiene una arista repetida. Si el grafo es 2-conexo por vértices, es decir, 2-conexo del capítulo 1 entonces cada frontera es un ciclo.

Definición 2.8. La frontera de la cara también define una secuencia cíclica de vértices, donde un vértice puede repetirse en esta secuencia. Cada repetición de un vértice en esta secuencia se denomina *esquina*. Es decir, una esquina está definida por dos aristas consecutivas en la frontera de la cara, conocidas como aristas de la esquina, que aparecen consecutivas en el orden cíclico alrededor del vértice. Estas dos aristas son distintas, excepto si la esquina es un vértice de grado uno. (En la Figura 2.7, se muestra un grafo en el cual las esquinas están marcadas con arcos de circunferencia en color negro).

Definición 2.9. Diremos que un grafo plano es una *triangulación* si cada cara está delimitada por un triángulo. Para cualquier grafo plano, es posible añadir aristas adicionales de manera que cada cara esté formada por triángulos, transformándolo así en una triangulación, mientras se mantiene la simplicidad del grafo original.

2.1. Dualidad

Veamos ahora cómo construir el grafo dual de un grafo plano dado y algunos resultados de interés.

Definición 2.10. Dado un grafo plano conexo, lo interpretamos como un mapa. Se elige un punto en cada cara, incluyendo la cara no acotada, que se interpreta como la capital del país correspondiente. Para cada arista del grafo original, vista como una frontera entre dos países, se traza una carretera que conecta las capitales de dichos países y atraviesa la frontera en un punto que no es un vértice. Así se obtiene un nuevo grafo plano, denominado *grafo dual*.

Denotamos al grafo dual de un grafo plano $G = (V, A)$ como $G^* = (V^*, A^*)$. Tal y como se ha construido, cada arista $u \in A$ corresponde a una única arista $u^* \in A^*$, por lo tanto, $|A| = |A^*| = a$. Dado que por cada país hay una capital, tenemos que $|C| = |V^*| = c$ y $|V| = |C^*| = v$.

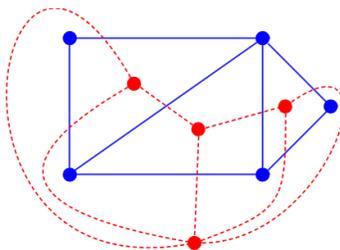


Figura 2.4: Grafo en color azul y grafo dual en rojo.

Observación 2.11. Contraer una arista que no es un lazo en un grafo plano corresponde a eliminarla del dual, y viceversa.

El grafo dual del grafo dual de un grafo G , al cual denotamos G^{**} , es el propio G . Veámoslo:

Probemos que son isomorfos. Construimos en primer lugar una biyección entre G y G^{**} .

Por cada cara de G^* , existe exactamente un vértice en G . Podemos colocar el vértice v_f^* de G^* dentro de la correspondiente cara f de G y trazar una arista a^* de G^* que se corresponda con una arista a en G , de modo que se interseque a a exactamente una vez y no interseque ninguna otra arista de G .

Esto establece una biyección entre vértices de G y las caras de G^* . Ahora, dado que cada cara de G^* está representada por un único vértice de G^{**} por definición, también tenemos una biyección entre G^* y G^{**} . Componiendo ambas biyecciones, obtenemos una biyección entre G^{**} y G .

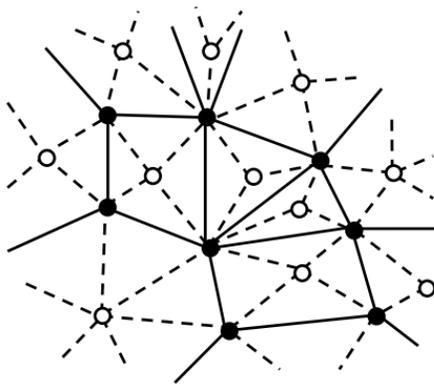
Veamos que esta biyección conserva la adyacencia. Dos vértices u y v son adyacentes en G si y solo si sus caras correspondientes f_u^* y f_v^* de G^* son contiguas. Equivalentemente, los vértices u^{**} y v^{**} en G^{**} correspondientes a las caras f_u^* y f_v^* en G^* , son vecinos. Por tanto, la adyacencia se conserva bajo esta biyección.

Así, hemos demostrado que existe un isomorfismo entre G^{**} y G .

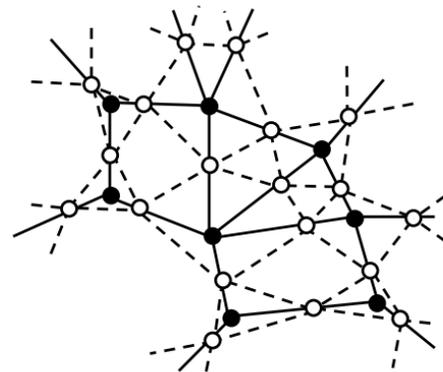
A partir de un grafo plano, podemos crear otros grafos planos adicionales que pueden resultar útiles. Ejemplos de ello son los siguientes.

Definición 2.12. El *grafo de diamantes* $G^\diamond = (V^\diamond, A^\diamond)$ de un grafo plano $G = (V, A)$ se define como $V^\diamond = V \cup V^*$, donde conectamos $v \in V$ a $i \in V^*$ si v es un vértice del país i . Así, G^\diamond tiene una arista por cada esquina de G . No conectamos dos vértices en V ni en V^* por lo que G^\diamond es un grafo bipartido.

Otro grafo interesante es el grafo dual del grafo de diamantes que recibe el nombre de *grafo medial*, denotado por $G^{\triangleright\triangleleft}$. Lo describimos de la siguiente manera: subdividimos cada arista de G por un nuevo vértice. Estos serán los vértices de $G^{\triangleright\triangleleft}$. Para cada esquina de cada país, conectamos los dos vértices en las dos aristas que forman esta esquina. El grafo medial tiene dos tipos de países: aquellos que corresponden a los vértices de G y aquellos que corresponden a los países de G .



(a) Representación del grafo con su grafo de diamantes. Fuente [3]



(b) Representación del grafo con su grafo medial. Fuente [3]

Figura 2.5: Grafos de interés.

2.2. Fórmula de Euler

Hemos visto distintas maneras de representar un grafo en el plano, y es natural preguntarse qué características comparten todas estas representaciones. Esta pregunta encuentra respuesta

en el siguiente teorema, el cual proporciona información fundamental acerca de la planaridad del grafo.

Teorema 2.13 (Fórmula de Euler). *Para todo grafo plano conexo se tiene $v - a + c = 2$.*

Demostración

Probémoslo por inducción sobre el número de aristas a .

Si $a = 0$, el grafo consiste en un solo vértice y ninguna arista, y en la representación plana sólo hay una cara (la no acotada), entonces $v = 1$, $a = 0$ y $c = 1$. Por tanto, la fórmula se verifica.

Supongamos que la fórmula se verifica para cada grafo plano conexo con $a - 1$ aristas. Sea G un grafo conexo con $a > 0$ aristas. Hay dos casos posibles:

- Si el grafo no tiene ciclos, debe haber una arista con un extremo libre. Si se elimina esta arista y su vértice libre, se obtiene otro grafo conexo con $v - 1$ vértices, $a - 1$ aristas y c caras. Aplicando la hipótesis de inducción, se tiene que $2 = (v - 1) - (a - 1) + c = v - a + c$.
- Si el grafo tiene algún ciclo, al eliminar una arista del ciclo, se obtiene un nuevo grafo conexo con v vértices, $a - 1$ aristas y $c - 1$ caras, ya que la arista separaba dos países distintos en el mapa que ahora se convierten en uno solo. Aplicando la hipótesis de inducción se tiene: $2 = v - (a - 1) + c - 1 = v - a + c$.

□

Veamos algunas consecuencias de este teorema:

El número de caras c de un grafo plano y conexo no depende de la representación; se deduce de los valores de v y a .

Corolario 2.14. *Si el grafo plano no es conexo y tiene $m > 1$ componentes conexas, se verifica:*

$$v - a + c = 2 + (m - 1)$$

Demostración

Podemos aplicar el Teorema de Euler a cada componente conexa del grafo y sumando se obtiene la fórmula del corolario.

□

Teorema 2.15. *Para cada grafo plano y conexo se tiene $c(1) + 2c(2) + 3c(3) + \dots = 2a$*

Demostración

Para cada cara, contamos las aristas que la separan de otras caras. Sumamos los grados de todas las caras, contamos cada arista dos veces (una por cada cara que separa). Por tanto, se obtiene $2a$.

□

En un grafo simple y plano, cada cara tiene al menos tres aristas. Si contamos todas las aristas de cada cara, tenemos al menos $3c$ aristas, y dado que cada arista pertenece a dos caras adyacentes, obtenemos que $2a \geq 3c$. Ahora, despejando c de la fórmula de Euler, tenemos $c = a - v + 2$. Sustituyendo en la desigualdad, obtenemos $2a \geq 3(a - v + 2)$, simplificando:

$$a \leq 3v - 6 \quad (2.1)$$

Si además el grafo no tiene triángulos, se tiene $2a \geq 4c$. Aplicando el mismo razonamiento, llegamos a

$$2v - 4 \geq a \quad (2.2)$$

De estas desigualdades, podemos derivar el siguiente resultado:

Proposición 2.16. *Todo grafo simple y plano tiene al menos un vértice con grado menor o igual a 5, y todo grafo simple, plano y libre de triángulos tiene al menos un vértice con grado menor o igual a 3.*

Gracias a las inecuaciones obtenidas (2.1) y (2.2) podemos ver si un grafo no es plano. Un ejemplo de ello es el grafo K_5 que tiene $a = 10$ aristas y $v = 5$ vértices luego no verifica la ecuación (2.1), lo mismo sucede con el grafo $K_{3,3}$ que tiene $a = 9$ aristas y $v = 6$ vértices y no verifica la ecuación (2.2). (En la Figura 2.6 se muestran estos grafos).

2.2.1. Vértices de grado pequeño

Consideremos grafos conexos y simples G . Cuando G es un grafo plano, su dual G^* también es plano.

Además, G puede ser dibujado sobre una superficie topológica compacta S de manera celular, lo que significa que las caras son homeomorfas al interior de un disco. En este caso,

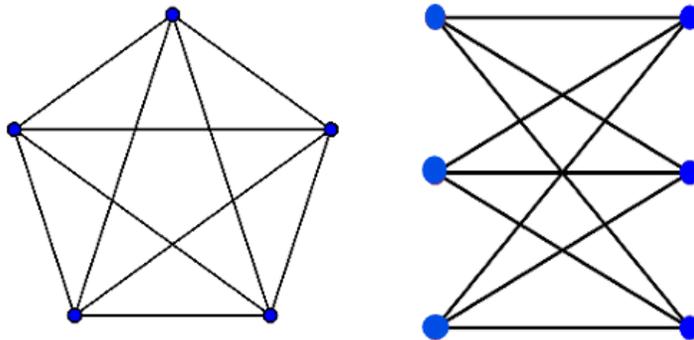


Figura 2.6: Grafo K_5 y $K_{3,3}$ respectivamente

la fórmula de Euler se expresa como $v - a + c = \mathcal{X}(S)$, donde $\mathcal{X}(S)$ es la característica de Euler de S .

El teorema de clasificación de superficies compactas y conexas establece que toda superficie es homomorfa a una y solo una de las siguientes superficies:

- T_0 , que es la esfera.
- T_1 , que es el toro.
- T_g , que es la suma conexa de $g \geq 2$ toros.
- U_1 , que es el plano proyectivo real.
- U_p , que es la suma conexa de $p \geq 2$ planos proyectivos reales.

Las superficies de la lista T_0, T_1, T_2, \dots son orientables, mientras que U_1, U_2, \dots no son orientables.

Sus características de Euler son $\mathcal{X}(T_g) = 2 - 2g$ para $g \geq 0$ y $\mathcal{X}(U_p) = 2 - p$ para $g \geq 0$. Es evidente, que solo $\mathcal{X}(T_0)$ y $\mathcal{X}(U_1)$ verifican $\mathcal{X}(S) > 0$.

En este capítulo, para simplificar la notación, denotamos por v_j el número de vértices de G de grado j (anteriormente representado como $v(j)$). Representamos por k' la longitud más pequeña de un ciclo en G . Dado que estamos considerando grafos simples, se cumple que $k' \geq 3$.

Si el grafo está dibujado de manera celular sobre una superficie S , entonces se verifica:

$$v \geq \mathcal{X}(S) + \frac{k' - 2}{k'} a \quad (2.3)$$

Para probar esta desigualdad, se denota por c_j al número de caras en el dibujo cuya frontera forma una secuencia cíclica con j aristas. Recordemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 + v_3 + \dots \\ 2a &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{apretón de manos})$$

Además, para los grafos dibujados en una superficie S , se aplican las siguientes desigualdades adicionales:

$$\begin{aligned} c &= c_3 + c_4 + c_5 + \dots \\ 2a &= 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + \dots \end{aligned} \quad (\text{apretón de manos 2})$$

Por la definición de k' , dado que $c_0 = c_1 = \dots = c_{k'-1} = 0$, tenemos:

$$2a = k'c_{k'} + (k+1)c_{k'+1} + (k+2)c_{k'+2} + \dots \geq k'c$$

Luego se verifica $2a \geq k'c$. A partir de la fórmula de Euler, $v - a + c = \mathcal{X}(S)$, despejamos v y sustituimos:

$$v = a - c + \mathcal{X}(S) \geq a - \frac{2a}{k'} + \mathcal{X}(S) = \mathcal{X}(S) + \frac{k' - 2}{k'}a$$

Esto demuestra 2.3.

Observación 2.17. Si el grafo está dibujado en una superficie, podemos considerar la máxima longitud k de las sucesiones cíclicas de las caras del dibujo. Entonces, dado que $k \geq k'$ y utilizando la relación $2a = 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + \dots$, se deduce $2a \geq kv$, lo cual mejora la cota $2a \geq k'v$ (cuando $k > k'$). Además, se tiene la siguiente desigualdad:

$$v \geq \mathcal{X}(S) + \frac{k-2}{k}a \quad (2.4)$$

La desigualdad 2.3 muestra que K_5 , K_{33} y el grafo de Petersen no son planos, ya que para ellos k' es 3, 4 y 5 respectivamente y, entonces, es claro que no se cumple la desigualdad 2.3.

Sin embargo, en principio, podrían ser dibujados sobre otras superficies. Determinar sobre qué superficies puede ser dibujado celularmente un grafo es un problema muy complejo. Para la esfera T_0 , se conoce la solución gracias al Teorema de Kuratowski, que afirma que un grafo es plano si y solo si no contiene como subgrafo a uno isomorfo a K_5 o K_{33} , adornados, es decir añadiéndoles vértices superfluos en sus aristas

Teorema de los vértices de grado pequeño

Se considera un grafo conexo, simple y dibujado celularmente en una superficie S . Se toma el valor de k (máxima longitud de las sucesiones cíclicas de las fronteras de las caras) y el número l definido por:

$$l = \text{máx}\{i \geq 1 : 2k > (k - 2)i\} \geq 2$$

Teorema 2.18. *Con la notación anterior se tiene:*

$$\sum_{i=1}^l (2k - (k - 2)i)v_i \geq 2\mathcal{X}(S)$$

Si $S = T_0$ o $S = U_1$, entonces $v_i > 0$ para algún $i \leq l$. Si S es otra superficie distinta a T_0 y U_1 no podemos asegurar nada.

Demostración

Multiplicando por $2k$ la desigualdad 2.4 y utilizando el teorema del apretón de manos 1, se deduce:

$$\begin{aligned} 2kv_1 + 2kv_2 + \dots &\geq 2k\mathcal{X}(S) + (k - 2)2a \\ &= 2k\mathcal{X}(S) + (k - 2)v_1 + (k - 2)2v_2 + \dots \end{aligned}$$

de donde, reagrupando los v_i con $i \geq l$ en el primer miembro y el resto en el segundo, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l (2k - (k - 2)i)v_i &\geq 2k\mathcal{X}(S) + \sum_{i>l} (2k - (k - 2)i)v_i \\ &\geq 2k\mathcal{X}(S) \end{aligned}$$

ya que los términos de la última suma son menores que 0. □

Es evidente que este teorema sólo tiene contenido para las superficies T_0 y U_1 .

Veamos algunos ejemplos para distintos valores de k en las superficies posibles:

Para $k = 3$, por cómo está definido l , obtenemos que $l = 5$. Aplicando el teorema 2.18 al plano afín, tenemos la cota $5v_1 + 4v_2 + 3v_3 + 2v_4 + v_5 \geq 12$, al ser $\mathcal{X}(S) = 2$. Para el plano proyectivo, se obtiene la cota $5v_1 + 4v_2 + 3v_3 + 2v_4 + v_5 \geq 6$ dado que $\mathcal{X}(S) = 1$. Este mismo razonamiento se aplica para diferentes valores de k , y los resultados correspondientes se presentan en la Tabla 2.1. En ella, se observa que para $k \geq 6$ obtenemos que $l = 2$.

Observación 2.19. Se puede aplicar este resultado al grafo dual: si el grafo de partida no tiene vértices de grado $\leq h$ y $m = \text{máx}\{i \geq 1 : 2h > (h - 2)i\} \geq 2$, entonces se tiene alguna cara de grado $< m$

	k=4, l=3	k=5, l=3	k=6, l=2	k=7, l=2
Plano afín	$3v_1 + 2v_2 + v_3 \geq 8$	$7v_1 + 4v_2 + v_3 \geq 10$	$2v_1 + v_2 \geq 6$	$9v_1 + 4v_2 \geq 28$
Plano proyectivo	$3v_1 + 2v_2 + v_3 \geq 4$	$7v_1 + 4v_2 + v_3 \geq 5$	$2v_1 + v_2 \geq 3$	$9v_1 + 4v_2 \geq 14$

Tabla 2.1: Valor de l y cotas para distintos valores de k

Corolario 2.20. Si G es un grafo simple y conexo, dibujado sobre el plano afín o el plano proyectivo, entonces existe algún vértice de grado menor o igual que 5.

Corolario 2.21. Si G es un grafo simple y conexo, dibujado sobre el plano afín o el plano proyectivo, cuyas fronteras de los países tienen al menos 4 esquinas (es decir, se recorren al menos 4 aristas al recorrer la frontera desde el interior) entonces existe algún vértice de grado menor o igual que 3.

Corolario 2.22. Si G es un grafo simple y conexo, dibujado sobre el plano afín o el plano proyectivo cuyas fronteras de los países tiene al menos 6 aristas, entonces existe al menos un vértice de grado menor o igual que 2.

El resultado se aplica también al grafo dual G^* del grafo dibujado G , pero con la condición de que G^* sea simple, es decir, que $v_1 = v_2 = 0$.

Corolario 2.23 (caras pequeñas). Si G es un grafo conexo y simple, dibujado sobre el plano afín o el plano proyectivo tal que G^* también es simple, entonces se tiene

$$\begin{array}{ll} 3c_3 + 2c_4 + c_5 \geq 12 & \text{plano afín} \\ 3c_3 + 2c_2 + c_1 \geq 6 & \text{plano proyectivo} \end{array}$$

En particular, hay siempre una cara triangular, cuadrangular o pentagonal.

Corolario 2.24 (caras pequeñas 2). Si G es un grafo conexo y simple, dibujado sobre el plano afín o proyectivo tal que el mínimo grado de sus vértices es 4 y su grafo dual G^* también es simple, entonces $c_3 \geq 8$ en el plano afín y $c_3 \geq 4$ en el plano proyectivo.

En particular hay siempre caras triangulares.

Corolario 2.25 (caras pequeñas 3). Si G es un grafo conexo y simple, dibujado en el plano afín o proyectivo tal que el grado mínimo de sus vértices sea 5, entonces $c_3 \geq 10$ en el plano afín y $c_3 \geq 5$ en el plano proyectivo.

Observación 2.26. Para el grado mínimo de sus vértices mayor o igual que 6, no es posible por el corolario 2.20 y porque entonces su dual no tendría países triangulares, cuadrangulares ni pentagonales, lo cual contradice el teorema de caras pequeñas 1.

Otra consecuencia es el teorema de Melchior. Para ello, consideramos $n \geq 3$ puntos distintos en \mathbb{R}^2 que no estén todos alineados. Estos puntos son puntos del plano proyectivo, y luego se consideran las rectas duales de esos puntos en el plano proyectivo dual.

Los puntos de intersección en el plano proyectivo dual, \mathbb{P}^{2*} , de las rectas duales de los n puntos de \mathbb{R}^2 forman el conjunto de vértices para un grafo dibujado en el plano proyectivo \mathbb{P}^{2*} cuyas aristas son los segmentos de dichas rectas duales entre dos vértices consecutivos de cada una de ellas. Conviene tener en cuenta que esas rectas son proyectivas y, por tanto, topológicamente son circunferencias.

Cada vértice del grafo, como punto de \mathbb{P}^{2*} , es el dual de una recta de \mathbb{R}^2 (o \mathbb{P}^2) que pasa por 2 o más de los n puntos. Si esa recta de \mathbb{R}^2 contiene exactamente $m \geq 2$ de los n puntos, entonces el grado del vértice en el grafo es $2m$. Por tanto, hay vértices de grado 4, 6, 8, ... pero no de grado 1, 3, 5, ... ni 2.

Teorema 2.27 (Melchior). *Si se tienen n puntos del plano afín, no todos ellos alineados ($n \geq 3$, en particular), entonces existen al menos 3 rectas que contienen exactamente 2 de los n puntos.*

Demostración

El grafo está dibujado en el plano proyectivo \mathbb{P}^{2*} , es conexo y simple, $v_1 = v_2 = v_3 = v_5 = 0$. Por el corolario 2.20, se deduce $2v_4 \geq 6$ y por tanto, $v_4 \geq 3$. Pero v_4 es el número de vértices de grado 4 y, por tanto, el número de rectas en \mathbb{R}^2 que contienen exactamente 2 de los n puntos.

□

Observación 2.28. El teorema de Melchior es un resultado inicial de la conjetura de Motzkin, que afirma que excepto, en dos casos conocidos con $n = 7$ y $n = 13$, el número de rectas con sólo 2 de los n puntos es mayor o igual que \sqrt{n} . Esta conjetura clásica fue probada por Green y Tao para n suficientemente grande, pero permanece abierta en el caso general.

2.3. Aristas bicoloreadas

Definición 2.29. Supongamos que tenemos un grafo plano cuyas aristas están coloreadas con dos colores distintos. Un vértice se denomina *vértice tranquilo* si las aristas de cada color que parten de él son consecutivas en el orden cíclico del dibujo en el plano. Definimos t como el número de vértices tranquilos en el grafo.

Una esquina del grafo se llama *esquina bicoloreada* si sus dos aristas están coloreadas de manera diferente. Se denota por N al número de esquinas bicolores cuando se recorren todos los caminos.

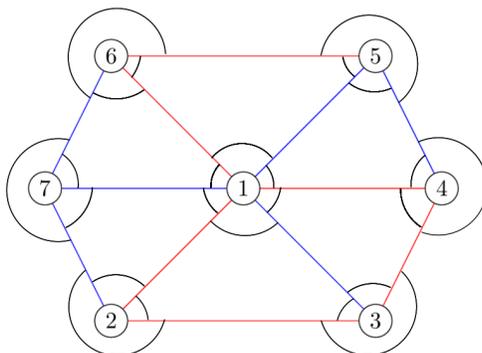


Figura 2.7: Grafo con esquinas y aristas bicoloreadas.

Ejemplo 2.30. En la figura 2.7 se muestra un grafo plano cuyos vértices tranquilos son el 2, el 4, el 5, el 6 y el 7. Además, las esquinas de cada cara del grafo están señaladas con arcos de circunferencia en color negro.

Veamos ahora un lema que será útil en varios argumentos más adelante.

Teorema 2.31 (Vértices tranquilos). *Para todo grafo conexo y simple, dibujado en el plano afín o proyectivo se tiene $t \geq 2$ en el plano afín, y $t \geq 1$ en el plano proyectivo. Para grafos en otras superficies no se garantiza la existencia de vértices tranquilos.*

Demostración

Se verifica la siguiente desigualdad:

$$4(v - t) \leq N \leq 2c_3 + 4c_4 + 4c_5 + 6c_6 + 6c_7 + \dots$$

Dado que $v - t$ es el número de vértices no tranquilos y en cada uno de ellos el color de sus aristas (en un recorrido cíclico) cambia al menos 4 veces, se cumple que $4(v - t) \leq N$.

En cada país con r esquinas, puede haber un máximo de $r - 1$ esquinas bicolor si r es impar y r esquinas bicoloreadas si r es par.

Aplicando la fórmula de Euler, tenemos:

$$4v - 4t = 4a - 4c + 4\mathcal{X}(S) - 4t$$

Además, recordemos que:

$$4a = 6c_3 + 8c_4 + 10c_5 + \dots \quad (\text{apretón de manos 2})$$

$$4c = 4c_3 + 4c_4 + 4c_5 + \dots$$

Sustituyendo se obtiene

$$4(t - \mathcal{X}(S)) \geq 2c_5 + 2c_6 + 4c_7 + 4c_8 + 6c_9 + \dots \geq 0$$

Por tanto, para el plano afín, recordemos que $\mathcal{X}(S) = 2$ lo que implica que $t \geq 4$.

En el caso del plano proyectivo, $\mathcal{X}(S) = 1$ por lo que se tiene $t \geq 1$.

□

2.4. Grafos planos 3-conexos

En los grafos planos, los grafos 3-conexos son especialmente importantes. Comenzamos con un hecho simple pero útil.

Definición 2.32. Un ciclo C en un grafo G se llama *separador* si tiene un cordón, o bien, al eliminar todas las aristas y vértices que pertenecen al ciclo C del grafo G , el grafo resultante $G \setminus V(C)$ tiene al menos dos componentes conexas. Esto significa que $G \setminus V(C)$ se divide en al menos dos partes distintas que no están conectadas entre sí por ninguna arista.

El *cordón* de un ciclo C se refiere a la parte del grafo $G \setminus V(C)$ que conecta dos vértices opuestos del ciclo C . Es esencialmente una arista o camino que atraviesa el área interior del ciclo C en el plano.

Proposición 2.33. *En un grafo plano 3-conexo, un ciclo delimita un país si y solo si no es un separador.*

Demostración

Si C es un ciclo que delimita un país, entonces C forma la frontera de una única cara en el dibujo del grafo en el plano. Si eliminamos el ciclo C (aristas y vértices), el grafo $G \setminus V(C)$ debe seguir siendo conexo porque C solo bordea una región cerrada del plano, y por tanto, no es un separador.

Recíprocamente, si un ciclo C no es un separador, entonces $G \setminus V(C)$ sigue siendo conexo.

En un grafo 3-conexo, cualquier ciclo que no sea un separador debe formar una región cerrada en el plano, es decir, una cara en los dibujos de las representaciones planas.

□

Dado que ser separador es una propiedad intrínseca del grafo, es decir, no depende de la manera en que el grafo este representado en el plano, esta proposición implica lo siguiente:

Corolario 2.34. *Para todo grafo simple, plano y 3-conexo, existe una única manera de dibujarlo en el plano de tal manera que los ciclos que delimitan las caras (o países) estén determinados de manera única.*

Este dibujo puede ser extendido de manera topológica pegando discos sobre estos ciclos para formar una esfera, lo que proporciona una representación espacial del grafo en una superficie continua sin bordes ni intersecciones de aristas.

La siguiente caracterización de los grafos planos 3-conexos fue probada por Tutte en 1963 que afirma que: sea G un grafo 3-conexo. Entonces cada arista de G está contenida en al menos dos ciclos no separadores. G es plano si y solo si cada arista está contenida exactamente en dos ciclos no separadores.

El siguiente teorema, fundamental para muchos algoritmos recursivos en grafos planos, fue establecido por Lipton y Tarjan en 1979, se conoce como Teorema separación plana y afirma que cada grafo plano G con v vértices contiene un subconjunto $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq \sqrt{8v}$, y cada componente conexa de $G \setminus S$ tiene a lo sumo $2v/3$ vértices.

Capítulo 3

Grafos poliédricos

Definición 3.1. Un *cuerpo convexo* en \mathbb{R}^d es un conjunto convexo, cerrado y acotado que tiene un punto interior.

Definición 3.2. La envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^d recibe el nombre de *politopo (convexo)*. La intersección de un número finito de semiespacios (cualquiera de las dos partes en las que un plano divide el espacio euclideo tridimensional) se llama *poliedro (convexo)*. Omitiremos el adjetivo convexo dado que no necesitaremos hablar de poliedros no convexos.

Es comunmente conocido a partir de ambas definiciones, aunque no trivial, que todo politopo es un poliedro, y que un poliedro es un politopo si y solo si es acotado.

Definición 3.3. Para cada poliedro, el subespacio afín más pequeño que lo contiene existe y es único, su *envoltura afín*. La dimensión de un poliedro es la dimensión de su envoltura afín. Un poliedro (politopo) en \mathbb{R}^d que tiene dimensión d se llama *d-poliedro (d-politopo)*.

Definición 3.4. Se dice que un hiperplano H *soporta* a un poliedro si tiene al menos un punto en común con él y si el poliedro está contenido en uno de los semiespacios cerrados definidos por H . Una *cara* de un poliedro es la intersección del poliedro con un hiperplano de soporte. Si una cara de un poliedro tiene una dimensión menor en uno que la dimensión del poliedro, se denomina *faceta*. Una cara de dimensión 0 (es decir, un único punto) se llama *vértice*, y una cara de dimensión 1 se llama *arista*. Los vértices y aristas de un politopo forman un grafo simple que se denomina el *esqueleto del politopo*.

Definición 3.5. Para un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se define el *conjunto polar* de X como $X^* \subseteq \mathbb{R}^n$ dado por:

$$X^* = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T y \leq 1 \forall y \in X\}$$

3.1. Representación con líneas rectas

Un grafo se denomina plano en función de su representación en el plano en un sentido topológico. ¿Cómo de bien podemos hacer este dibujo? ¿necesitamos curvas para representar las aristas del grafo o podemos usar solamente segmentos de líneas rectas? El Teorema de Wagner-Fáry [Wagner 1936, Fáry 1948] da respuesta a estas preguntas. Afirma que todo grafo simple y plano puede ser dibujado en el plano con aristas rectas.

3.1.1. Esqueletos de polítopos

Sea P un 3-politopo.

Proposición 3.6. *El esqueleto de todo 3-politopo es un grafo plano 3-conexo.*

Demostración

Sea P un 3-politopo y sea G_P su esqueleto.

La planaridad de G_P puede ser probada construyendo una inmersión llamada *diagrama Schlegel* del politopo. También haciendo un foto desde cualquiera de sus facetas.

Sea F cualquier faceta de P , y sea x un punto que este fuera de P muy cerca de un punto interior de F . Sea σ el plano que separa a x y a P de tal forma que para cualquier otra faceta F' de P , x y P están en el mismo lado del plano con respecto F .

Proyectamos entonces el esqueleto de desde x hasta el plano σ . Así obtenemos una inmersión de G_P en el plano.

Para ver que G_P es 3-conexo, bastará con probar que dados cuatro vértices a, b, c y d , hay un camino de a a b que evita c y d .

Si a, b, c y d no son coplanarios, entonces sea π un plano que separe a, b de c, d . Es decir, que a y b están a un lado del plano π y c y d al otro. Podemos conectar a y b mediante un camino (polígono) que consiste en las aristas de P que están en el mismo lado del plano π que a y b . De esta forma, este camino evita c y d porque están en el lado opuesto del plano π .

Si a, b, c y d son coplanarios, sea π el plano que los contiene. El plano π divide el espacio en dos semiespacios abiertos. Consideremos uno de estos semiespacios que contiene al menos un vértice de P . Podemos conectar mediante un camino (polígono) que consiste en aristas del poliedro que se encuentran en este semiespacio (excepto en sus extremos a y b). De esta manera, este camino evita a c y d , ya que ellos no están en el mismo semiespacio o se consideran solo en los extremos.

□

El siguiente teorema de gran importancia no lo probaremos debido a su gran complejidad. Se le considera el origen de la combinatoria moderna.

Teorema 3.7 (Teorema de Steinitz). *Un grafo simple es isomorfo al esqueleto de un 3-politopo si y solo si es 3-conexo y plano.*

A una biyección entre los vértices de un grafo simple G y los vértices de un politopo convexo P en \mathbb{R}^3 que da un isomorfismo entre G y el esqueleto de P se llama *representación de Steinitz del grafo G* .

Finalmente, notemos que la representación de Steinitz también esta relacionada con la dualidad plana. De hecho es fácil deducir el siguiente resultado.

Proposición 3.8. *Sea P un politopo convexo en \mathbb{R}^3 con el origen en su interior, y sea P^* su polar. Entonces los esqueletos G_P y G_{P^*} son grafos planos duales.*

Capítulo 4

Bandas elásticas

4.1. Energía, fuerzas y centros de gravedad.

En el ámbito de la física, la ley de elasticidad de Hooke, también conocida como ley de Hooke, describe cómo el alargamiento que sufre un material elástico es proporcional a la fuerza aplicada F :

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{AE}$$

Aquí, ϵ representa la deformación unitaria, ΔL es el alargamiento, L es la longitud original, E es el módulo de Young, que caracteriza la rigidez del material elástico, y A es la sección transversal de la pieza estirada. Esta ley se aplica mientras el material permanezca dentro de su límite elástico.

Ahora, relacionemos esta ley con los grafos. Comencemos con una descripción informal. Imaginemos un grafo conexo, $G = (V, A)$ donde las aristas se interpretan como bandas elásticas que siguen la ley de Hooke. Consideremos un subconjunto no vacío $S \subseteq V$ cuyos vértices están *clavados* en el espacio d -dimensional, mientras que los vértices restantes del grafo se encuentran en una posición de equilibrio. En este contexto, veremos que la posición de equilibrio de estos vértices está unívocamente determinada. Los vértices de S los llamaremos *clavos* y al resto, *vértices libres*.

A esta posición de equilibrio la llamamos *representación de la banda elásticas de G en \mathbb{R}^d* , extendiendo la representación de los vértices fijos. Dibujamos las aristas por segmentos de línea recta (suponiendo que las bandas elásticas no se enredan).

Para precisar esta idea, sea $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{id})^T \in \mathbb{R}^d$ la posición del vértice $i \in V$. Por definición, $u_i = \bar{u}_i$ esta fija para todo i en S , pero es arbitraria para los vértices restantes.

Definimos la *energía* de una representación de banda elásticas u como:

$$\mathcal{E}(u) = \sum_{ij \in A} |u_i - u_j|^2 = \sum_{ij \in A} \sum_{k=1}^d |u_{ik} - u_{jk}|^2$$

Queremos encontrar la representación de la banda elásticas de G que minimice esta energía, sujeta a las condiciones frontera, es decir, que las posiciones de los vértices de S sean fijas:

$$\text{mín } \mathcal{E}(\mathbf{u}) \quad \text{sujeto a} \quad \mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i \quad \text{para todo } i \in S \quad (4.1)$$

Notemos que, aunque usamos conceptos físicos, la representación está definida en términos puramente matemáticos.

Lema 4.1. *La función $\mathcal{E} : \mathbb{R}^{d \times |V \setminus S|} \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexa.*

Demostración:

Es claro que \mathcal{E} es convexa, esto se debe a que cada término $|u_{ik} - u_{jk}|^2$ es un función cuadrática y en consecuencia convexa.

La convexidad estricta de la función energía se deduce de la expresión como suma de cuadrados de diferencias de las variables. La expresión de la energía es la de una forma cuadrática definida positiva, y por tanto, al fijar algunos valores $h_o(v)$ de las variables, su restricción a cualquier subespacio lineal también lo es. □

Observación 4.2. Se deduce, de ser \mathcal{E} estrictamente convexa, que \mathcal{E} tiene un único mínimo y que es global.

Es evidente que si alguno de los vectores u_i tiende a infinito, entonces $\mathcal{E}(u)$ tiende a infinito, aún asumiendo las condiciones frontera establecidas en 4.1, donde S es no vacío. Esto, junto con el lema 4.1, implica que la función \mathcal{E} tiene un único mínimo global y, por tanto, la representación con energía mínima está unívocamente determinada.

Si un vértice i está en $V \setminus S$, entonces, para la representación que minimiza la energía, la derivada parcial de $\mathcal{E}(u)$ con respecto cualquier coordenada u_i debe satisfacer:

$$\sum_{j \in N(i)} (u_i - u_j) = 0 \quad (4.2)$$

Desarrollando esta ecuación:

$$\sum_{j \in N(i)} (u_i - u_j) = \sum_{j \in N(i)} u_i - \sum_{j \in N(i)} u_j = \text{deg}(i)u_i - \sum_{j \in N(i)} u_j = 0$$

Por lo tanto, la ecuación 4.2 se puede reescribir como:

$$u_i = \frac{1}{\text{deg}(i)} \sum_{j \in N(i)} u_j \quad (4.3)$$

Esta ecuación implica que cada vértice se coloca en el centro de gravedad de sus vecinos. Matemáticamente, esto equivale al promedio aritmético de las posiciones de sus vértices vecinos.

La ecuación 4.2 tiene una interpretación física clara: la banda elástica que conecta los vértices i y j , ejerce una fuerza $u_j - u_i$ sobre i . La ecuación implica que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el vértice i debe ser cero en equilibrio.

Retomaremos el caso unidimensional de las representaciones de bandas elásticas en el capítulo 4, estudiando funciones armónicas en un grafo. En estos términos la ecuación 4.3 afirma que *cada función de coordenadas es armónica en cada vértice libre*.

Es útil extender la construcción de las bandas elásticas al caso en que las aristas de G tengan pesos positivos arbitrarios, o resistencias de la banda. Sea $c_{ij} > 0$ el peso de la arista ij . Definimos la función de la energía de una representación u como:

$$\mathcal{E}_c(u) = \sum_{ij \in A} c_{ij} |u_i - u_j|^2 \quad (4.4)$$

Razonando de manera similar como lo hicimos con la función de energía inicial, tenemos que \mathcal{E}_c es estrictamente convexa si al menos un vértice está clavado, y existe una representación única que minimiza la energía. Para esta representación óptima cada vértice i en $V \setminus S$ satisface:

$$\sum_{j \in N(i)} c_{ij} (u_i - u_j) = 0$$

Desarrollando esta ecuación:

$$\sum_{j \in N(i)} c_{ij} (u_i - u_j) = \sum_{j \in N(i)} c_{ij} u_i - \sum_{j \in N(i)} c_{ij} u_j = u_i \sum_{j \in N(i)} c_{ij} - \sum_{j \in N(i)} c_{ij} u_j = 0$$

Así, la ecuación 4.4 puede ser reescrita como:

$$u_i = \frac{1}{\sum_{j \in N(i)} c_{ij}} \sum_{j \in N(i)} c_{ij} u_j$$

En este caso, u_i ya no está en el centro de gravedad de sus vecinos. Sin embargo, u_i sigue siendo una combinación convexa de las posiciones u_j de sus vecinos, es decir, u_i es la combinación de puntos u_j con coeficientes positivos a_j que suman 1:

$$u_i = \sum_{j \in N(i)} a_j u_j \quad \text{donde } a_j = \frac{c_{ij}}{\sum_{k \in N(i)} c_{ik}} \quad \text{y} \quad \sum_{j \in N(i)} a_j = 1$$

En particular, u_i está en el interior relativo de envoltorio conexo de sus vecinos.

4.2. ¿Cómo dibujar un grafo?

El método de la banda elástica fue analizado por primera vez en [6]. En este artículo, Tutte describe cómo usar bandas elásticas para dibujar un grafo plano 3-conexo con aristas rectas y países o caras convexas.

Sea G un grafo plano 3-conexo, y sea p_0 cualquier cara del mismo. Denotemos por C_0 al ciclo que delimita a p_0 . Fijamos los vértices de C_0 en los vértices de un polígono convexo P_0 en el plano, con el orden apropiado del ciclo, y permitimos que el resto de vértices alcancen la posición de equilibrio. Dibujamos las aristas de G como segmentos de rectas conectadas con los vértices correspondientes.

Ya hemos visto, que cada vértice que no está en C_0 se posiciona en el centro de gravedad de sus vértices vecinos. El resultado principal de Tutte sobre esta representación es el siguiente:

Teorema 4.3. *Si G es un grafo plano 3-conexo, entonces cada representación con bandas elásticas de G (con los vértices de un país particular p_0 fijados en un polígono convexo) proporciona una representación de G en el plano con segmentos de línea recta. Además, cada país es un polígono convexo.*

Demostración: La demostración completa y detallada de este resultado se encuentra en el libro referenciado [3]. Dado que la demostración es técnica y extensa, en este estudio se omite la prueba formal, pero se discuten aspectos clave y detalles geométricos que fundamentan la construcción de esta representación.

El escenario elástico proporciona aristas rectilíneas que pueden tener autointersecciones. Por otro lado, la posición de equilibrio no depende de la representación plana, debido a que se han clavado los vértices de C_0 y los ciclos frontera para los grafos 3-conexos están caracterizados por el grafo por no ser ciclos separadores.

Además, sabemos que las fronteras de los países, como sucesión cíclica de aristas, son ciclos para los grafos planos simples 3-conexos.

Dado que el grafo es plano, podemos iniciar con una representación plana donde C_0 es el ciclo de la cara no acotada, para visualizar los países por sus ciclo frontera, que ya sabemos que están determinados por el grafo como aquellos que no son separables. Entonces, se prueba que en la posición de equilibrio los países son polígonos convexas y que son disjuntos dos a dos. Esta disposición asegura que no hay autointersecciones de las bandas elásticas en puntos que no corresponden a vértices del grafo. De lo contrario, las rectas que se intersectan dividirían dos países cuyos polígonos convexas podrían tener intersecciones no disjuntas.

La demostración de lo anterior implica un enfoque técnico, utilizando rectas que dividan el polígono convexo exterior en dos partes no vacías. Estas rectas distribuyen los vértices del

grafo en tres conjuntos: V_0 que contiene los vértices sobre la recta considerada y V_1, V_2 que contienen los vértices a cada lado de la recta. En esta disposición de equilibrio, se pueden observar las siguientes evidencias clave:

- V_1 y V_2 definen subgrafos conexos.
- Cada vértice de V_0 tiene vecinos tanto en V_1 como en V_2 .
- Cada país puede tener dos vértices (esquinas) de V_0 a lo máximo.
- Si dos países comparten una arista de vértices de V_0 entonces el resto de vértices de uno de ellos está en V_1 y el resto de vértices del otro está en V_2 .

En la prueba de estas evidencias se utilizan numerosos argumentos.

□

Capítulo 5

Funciones Armónicas Discretas

En este quinto capítulo, nos adentraremos en el estudio de las funciones armónicas discretas, un concepto central en la teoría de grafos y estructuras discretas. Estas funciones son analogías discretas de las funciones armónicas en dominios continuos y se definen en vértices de grafos conectados por aristas.

Definición 5.1. Sea $G = (V, A)$ un grafo simple y conexo. Una función $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ es *armónica* en un vértice $v \in V$ si verifica

$$\frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} h(u) = h(v) \quad (5.1)$$

Es decir, si el valor de h en un vértice es el promedio de sus valores en los vértices adyacentes a v .

Un vértice dónde la función no es armónica se define como *polo* de la función.

Observación 5.2.

- La ecuación 5.1 puede ser reescrita como

$$\sum_{u \in N(v)} (h(u) - h(v)) = 0 \quad (5.2)$$

Veámoslo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} h(u) &= h(v) \\ \frac{1}{\deg(v)} \left(\sum_{u \in N(v)} h(u) \right) - h(v) &= 0 \\ \frac{1}{\deg(v)} \left(\sum_{u \in N(v)} h(u) - \deg(v)h(v) \right) &= 0 \\ \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} (h(u) - h(v)) &= 0 \\ \sum_{u \in N(v)} (h(u) - h(v)) &= 0 \end{aligned}$$

- Si consideramos la función h como un vector columna cuya componente en la fila cuyo índice es el vértice u es $h(u)$ y Lh el vector obtenido aplicando el laplaciano L_G a h , entonces podemos expresar 5.1 como $(Lh)_v = 0$, siendo $(Lh)_v = 0$ la coordenada correspondiente al vértice v del vector Lh .

Notemos que la suma de cada columna de L es 0, se tiene entonces

$$\sum_{u \in N(v)} (Lh)_v = \mathbb{1}_v^T Lh = 0$$

y podemos decir que toda función es armónica *en promedio* ($\mathbb{1}_v^T$ el vector fila de unos de tamaño $v = |V|$, traspuesto de $\mathbb{1}_v$).

- Podemos extender esta definición para grafos con aristas múltiples o lazos y la expresión 5.1 quedaría entonces como:

$$\frac{1}{\deg(v)} \sum_{uv=a \in A} h(u) = h(v)$$

o equivalentemente

$$\sum_{u \in V} a_{uv} (h(u) - h(v)) = 0$$

siendo a_{uv} el número de aristas entre los vértices u y v (la multiplicidad de las aristas que unen u y v).

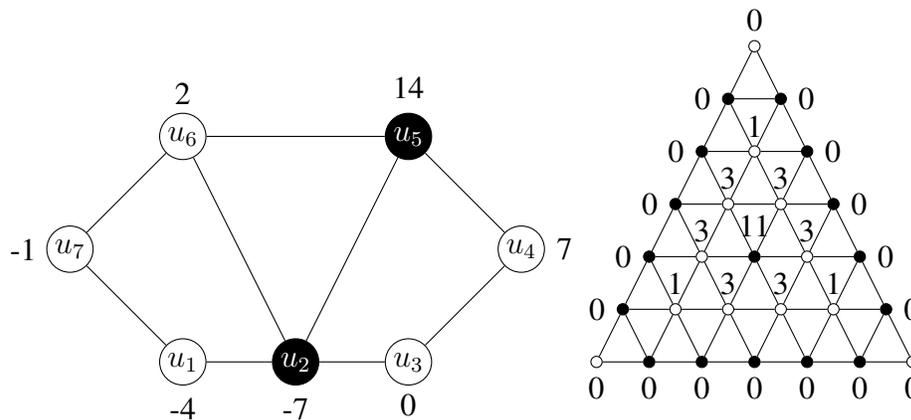


Figura 5.1: Grafo con dos polos (vértices negros) y grafo con 16 polos (vértices negros).

- Podemos generalizar aún más esta definición para grafos ponderados. Si β_{uv} es el peso de la arista que une u y v . Diremos que h es armónica en el vértice v si

$$\sum_{v \in V} \beta_{uv}(h(u) - h(v)) = 0$$

En lo que sigue, vamos a restringir nuestros argumentos a grafos simples, pero todos ellos se podrán extender a grafos con aristas múltiples o lazos y grafos ponderados.

Tenemos el siguiente resultado:

Resultado 5.3. *Toda función constante es armónica en cada vértice.*

Demostración:

Sean $G = (V, A)$ un grafo simple y conexo y $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función constante, es decir, $h(v) = c$ para todo $v \in V$, luego para todo vértice se verifica:

$$\frac{1}{\text{deg}(v)} \sum_{u \in N(v)} h(u) = \frac{1}{\text{deg}(v)} \sum_{u \in N(v)} c = \frac{1}{\text{deg}(v)} \text{deg}(v)c = h(v)$$

por tanto, h es armónica en v .

□

Por otro lado tenemos:

Proposición 5.4. *Toda función no constante en los vértices de un grafo simple y conexo tiene al menos dos polos.*

Demostración:

Sean $G = (V, A)$ un grafo simple y conexo y $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función no constante. Definimos los siguientes conjuntos:

S : conjunto de vértices de G donde h alcanza su máximo.

S' : conjunto de vértices de S que están conectados con otro vértice de G que no está en S .

Entonces sea $v \in S'$, como h alcanza en v un máximo se tiene que $h(v) \geq h(u)$ para todo $u \in N(v)$ y al menos para un $u \in N(v)$ se tiene $h(v) > h(u)$, luego tenemos que

$$\frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} h(u) < h(v)$$

así, v es un polo y por tanto todo vértice de S' es un polo.

Veamos que siempre existe tal v :

Como h es no constante, se tiene que $S \neq V$ y $S \neq \emptyset$.

Por definición $S' \subseteq S$ y por tanto $S' \neq V$, por otro lado, como G es conexo y h no constante, debe existir al menos un vértice que sirva de conexión entre los vértices de $V \setminus S$ y los de S , y en consecuencia $S' \neq \emptyset$. Luego como mínimo existirá un polo.

Si procedemos de igual forma para los conjuntos:

W : conjunto de vértices de G donde h alcanza su mínimo.

W' : conjunto de vértices de W que están conectados con otro vértice de G que no está en W .

Obtendremos que existe al menos otro polo. Y, por tanto, h tendrá como mínimo dos polos. Nótese que ambos polos son distintos porque en uno de ellos h alcanza su máximo y en el otro su mínimo siendo h no constante.

□

Este resultado implica que si $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no constante entonces $Lh \neq 0$ y que el núcleo de L estará formado sólo por las funciones constantes.

La demostración nos muestra que toda función no constante en los vértices de un grafo tiene su máximo y mínimo en un polo del grafo. Este resultado puede ser visto como una versión (muy simple) del Principio del Máximo de las teorías de funciones armónicas y analíticas.

Ejemplo 5.5. Consideremos el grafo representado en la figura 5.1. Vamos a contruir una función armónica en este grafo.

Hemos visto que toda función armónica debe tener al menos dos polos. En nuestro caso, seleccionamos los vértices u_2 y u_5 como polos iniciales para nuestro análisis.

Para que la función h sea ármonica en este grafo, se deben verificar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 h(u_1) &= \frac{1}{2} (h(u_7) + h(u_2)), \\
 h(u_2) &\neq \frac{1}{4} (h(u_1) + h(u_6) + h(u_5) + h(u_3)), \\
 h(u_3) &= \frac{1}{2} (h(u_2) + h(u_4)), \\
 h(u_4) &= \frac{1}{2} (h(u_5) + h(u_3)), \\
 h(u_5) &\neq \frac{1}{3} (h(u_2) + h(u_6) + h(u_4)), \\
 h(u_6) &= \frac{1}{3} (h(u_7) + h(u_2) + h(u_5)), \\
 h(u_7) &= \frac{1}{2} (h(u_6) + h(u_1)).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Al simplificar estas ecuaciones y eliminar las redundantes (como las relacionadas con $h(u_2)$ y $h(u_7)$) obtenemos un sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cuyas incógnitas son $h(u_1), \dots, h(u_7)$. La solución viene dada por:

$$\begin{aligned}
h(u_1) &= -h(u_6) + 2h(u_7) \\
h(u_2) &= -2h(u_6) + 3h(u_7) \\
h(u_3) &= \frac{1}{3}h(u_6) + \frac{2}{3}h(u_7) \\
h(u_4) &= \frac{8}{3}h(u_6) - \frac{5}{3}h(u_7) \\
h(u_5) &= 5h(u_6) - 4h(u_7) \\
h(u_6) &= h(u_6) \\
h(u_7) &= h(u_7)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Podemos asignar valores específicos a $h(u_6)$ y $h(u_7)$, por ejemplo, $h(u_6) = 2$ y $h(u_7) = -1$. Obtenemos $h(u_1) = -4$, $h(u_2) = -7$, $h(u_3) = 0$, $h(u_4) = 7$, $h(u_5) = 14$.

Para estos valores, efectivamente se verifican las ecuaciones establecidas en 5.3, demostrando así que h es armónica en todos los vértices excepto en los polos u_2 y u_7 .

Además, observamos que la función h presenta polos en los vértices de valor máximo y mínimo.

Otro resultado importante es que para cualesquiera dos vértices de un grafo simple conexo, hay una función que es armónica en el resto. Más generalmente tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.6. *Dado un grafo simple y conexo $G = (V, A)$, para cada subconjunto no vacío $S \subseteq V$ y para cada función $h_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$, existe una única función $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ que extiende a h_0 y es armónica en cada vértice de $V \setminus S$.*

Definición 5.7. La función h del teorema recibe el nombre de *extensión armónica de h_0* .

Observación 5.8. Notemos que:

- Si $|S| = 1$ entonces $S = \{a\}$. Sin embargo, este caso no es posible si la extensión se toma no constante, ya que h tendría un único polo. Según hemos visto previamente, h o bien es constante y no tiene polos, o bien no es constante y debe tener al menos dos polos. Entonces la extensión h es la función constante igual a $h_0(a)$.
- Si $|S| = 2$ entonces $S = \{a, b\}$. Si $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica en $V \setminus S$ entonces a y b son sus dos únicos polos y por tanto, h alcanza en uno su máximo y en otro su mínimo, tomemos por ejemplo $h(a) = 0$ y $h(b) = 1$.

Además, si construimos la función $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ch(x) + c$ para $m, c \in \mathbb{R}$ constantes, tenemos que f es armónica en $V \setminus S$ y no constante en V , pues:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} f(u) &= \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} (mh(u) + c) \\ &= \frac{m}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} h(u) + \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} c \\ &= mh(v) + \frac{\deg(v)}{\deg(v)} c \\ &= mh(v) + c \\ &= f(v) \end{aligned}$$

Por tanto, si conseguimos construir tal h , tendremos que para toda función $g_0 : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$, su extensión armónica será

$$g(v) = g_0(a) + (g_0(b) - g_0(a))h(v).$$

pues es claro que $g|_{\{a,b\}} = g_0$ y como h es armónica en $V \setminus S$ y $g = mh + c$ para $m = g_0(b) - g_0(a)$ y $c = g_0(a)$, g es armónica en $V \setminus S$ como acabamos de ver.

Demostremos ahora el teorema 5.6:

Demostración:

Sean grafo simple y conexo $G = (V, A)$, un subconjunto no vacío $S \subseteq V$ y una función $h_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Veamos primero la unicidad de la extensión armónica de h_0 . Razonemos por reducción a lo absurdo y supongamos que existen h y h' dos extensiones armónicas de h_0 . Por definición, tenemos que

$$h|_S = h'|_S = h_0. \tag{5.5}$$

Sea $g = h - h'$, se tiene que para $v \in V \setminus S$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} g(u) &= \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} (h(u) - h'(u)) \\ &= \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} h(u) - \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u \in N(v)} h'(u) \\ &= h(v) - h'(v) \\ &= g(v) \end{aligned}$$

luego g es armónica en los vértices de $V \setminus S$ y además por (5.5), tenemos que $g(v) = 0$ para todo $v \in S$.

Ahora bien, si la función g es la función idénticamente nula, tenemos que $h = h'$ y la unicidad ya estaría demostrada.

Si g no es la función idénticamente nula, como ya hemos visto, uno de los vértices donde alcanza su máximo y otro donde se alcanza su mínimo son polos y, por tanto, están en S . Pero g se anula en ambos, lo cual es absurdo y por tanto g es la función idénticamente nula.

Probemos ahora la existencia. Para ello, recordemos la construcción de bandas elásticas de un grafo G que realizábamos en el capítulo 3, en el caso unidimensional, $d = 1$. Consideramos los vértices del conjunto S . Conocemos los valores $h(v) = h_0(v)$ para todo vértice en S . A estos vértices los consideramos clavos y a los vértices del conjunto $V \setminus S$ vértices libres.

Consideremos la recta real y fijemos cada vértice v de S en el punto $h(v)$ de la recta (puede haber varios vértices en el mismo sitio). De momento, dejamos los vértices libres sin fijar.

Por cada arista del grafo, colocamos una banda elástica sobre la recta, cuyos extremos coinciden con los de la arista. Como ya sabemos por el capítulo 3, estas bandas elásticas se moverán a su posición de equilibrio: los vértices clavos permanecen en los puntos donde los fijamos y los vértices libres adoptan una nueva posición. Así, para estos últimos, $h(v)$ tomará el valor de la posición del vértice $v \in V \setminus S$.

De este modo, obtenemos una prolongación de h_0, h a todo V , que es armónica en todos los vértices de $V \setminus S$ por las leyes de elasticidad. □

Observación 5.9. La prueba anterior de la existencia se basa en la evidencia física de que las bandas elásticas llevan a colocar los vértices libres en la posición de equilibrio en la que su posición analítica determina la función armónica en esos vértices que se requiere. El modelo 1-dimensional requiere representar el grafo en una recta real, con evidentes superposiciones de segmentos de aristas, pero sin enredarse. Para mayor claridad, la existencia se podría probar también usando representaciones del grafo en \mathbb{R}^d ($d = 2$ si es plano y $d = 3$ en general) con aristas rectilíneas y sin autointersecciones, tomando una proyección lineal $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y clavando los vértices v de S en puntos de las fibras de dicha aplicación en los valores $h_0(v)$. En la posición de equilibrio, los vértices se colocan en posiciones de \mathbb{R}^d cuyas imágenes en \mathbb{R} son $h_0(v)$ si $v \in S$, y armónicas si $v \in V \setminus S$.

Observación 5.10. La formulación técnica matemática de este resultado es un conjunto de $|V \setminus S|$ ecuaciones lineales (las condiciones de ser armónica) con $|V \setminus S|$ incógnitas (los valores $h(v)$). El teorema 5.6 afirma que se trata de un sistema lineal de Cramer, con una única solución.

Capítulo 6

Redes eléctricas

En este último capítulo exploraremos los fundamentos de los circuitos eléctricos desde una perspectiva teórica y matemática. Los circuitos eléctricos son sistemas complejos compuestos por elementos interconectados como resistencias, cables y fuentes de alimentación. Estos componentes interactúan para facilitar el flujo de corriente eléctrica, regidos por principios físicos fundamentales como la Ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff. En nuestro estudio, nos centraremos en cómo estos principios se traducen en términos de grafos, donde los nodos representan vértices y las ramas corresponden a aristas. Esta representación nos permite aplicar conceptos matemáticos, como funciones armónicas discretas, para analizar y resolver problemas complejos en la teoría de redes eléctricas.

Comenzaremos por definir los componentes básicos de los circuitos eléctricos y cómo se modelan en términos de grafos. Luego exploraremos las leyes fundamentales que rigen el comportamiento de estos sistemas.

Un circuito eléctrico es un sistema compuesto por un conjunto de elementos interrelacionados. Los componentes clave de este sistema son los cables, por los que circula la corriente; las resistencias, que representan la dificultad para que los electrones pasen a través de ellas; y las fuentes de alimentación, que proporcionan la energía necesaria para el flujo de corriente.

En estos circuitos se manejan tres magnitudes físicas principales: la corriente, la resistencia y el voltaje, las cuales están relacionadas por la Ley de Ohm.

Los elementos de un circuito eléctrico se organizan como:

- **Ramas:** Segmentos de cable que contienen una resistencia o una fuente de alimentación y están conectados entre dos nodos.
- **Nodos:** Puntos de conexión donde se unen tres o más ramas.
- **Mallas:** Circuitos cerrados formados por una o varias ramas.

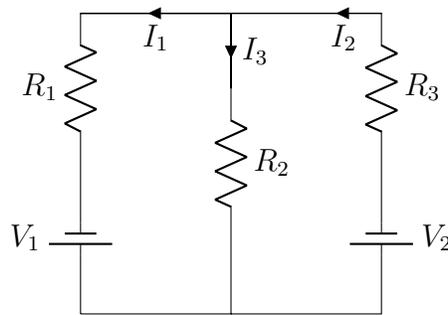


Figura 6.1: Circuito eléctrico con 3 resistencias y dos fuentes de alimentación. Tres ramas, dos nodos y tres mallas.

Cada rama tiene una intensidad constante. Un nodo es un punto donde se conserva la carga, conforme a la Ley de Corriente de Kirchhoff (KCL). Las corrientes concretas que entran al nodo se consideran positivas y las que salen, negativas.

Las magnitudes físicas que intervienen en este sistema serán:

- Corriente (I): Se mide en amperios (A). Un amperio equivale a un culombio (unidad de carga) por segundo, lo que significa que la corriente es la cantidad de carga que pasa por un punto en el circuito por segundo.
- Voltaje (V): Se mide en voltios (V). Un voltio equivale a un julio (unidad de energía) por culombio. Esto representa la cantidad de energía por unidad de carga que se está conservando.
- Resistencia (R): Se mide en ohmios y representa la oposición al flujo de corriente.

Los circuitos eléctricos están regidos por las siguientes leyes fundamentales:

- Ley de Ohm: Relaciona el voltaje (diferencia de potencial) a través de un conductor con la corriente que lo atraviesa, estableciendo que $V = IR$ para cada rama.
- Ley de Corriente de Kirchhoff (KCL): La suma de las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen de ese nodo, reflejando la conservación de la carga.
- Ley de Voltaje de Kirchhoff (KVL): La suma de todas las diferencias de potencial (voltajes) alrededor de cualquier ciclo cerrado en un circuito es igual a cero, reflejando la conservación de la energía.

Analizar y gestionar eficientemente estos circuitos es crucial para garantizar un suministro eléctrico confiable y seguro. En este contexto, las funciones armónicas discretas proporcionan una herramienta poderosa para el análisis matemático de estos sistemas.

En esta sección, exploramos cómo las funciones armónicas discretas pueden aplicarse a redes eléctricas, utilizando principios fundamentales como la Ley de Ohm y las Leyes de Kirchhoff mencionadas anteriormente. Aunque estas leyes provienen de la física, su formulación y uso son puramente matemáticos y nos permiten modelar y analizar el comportamiento de las redes eléctricas de manera eficaz. Para ser más precisos, consideramos estas leyes como axiomas

Podemos ver estas redes como grafos, donde las ramas del circuito se convierten en las aristas de nuestro grafo y los nodos en los vértices. Las mallas corresponden a los ciclos del grafo. En una red eléctrica, asignamos potenciales (voltajes) a un subconjunto S de sus nodos. El objetivo es encontrar asignaciones de diferencias de voltaje U_{ij} y corrientes I_{ij} a las aristas ij (arista que une los vértices i y j) de manera que $U_{ij} = -U_{ji}$, $I_{ij} = -I_{ji}$, asegurando que estos valores estén definidos si se da una orientación a la arista y que sean antisimétricos.

Así, las leyes mencionadas anteriormente se reformulan de la siguiente manera:

- Ley de Ohm: $U_{ij} = R_{ij}I_{ij}$, expresada para cada arista del grafo
- Ley de Corriente de Kirchhoff: $\sum_{u \in N(v)} I_{uv} = 0$ para cada vértice $v \notin S$.
- Ley de Kirchhoff de Voltaje: $\sum_{ij \in A(C)} U_{ij} = 0$ para cada ciclo C del grafo.

Si consideramos un ciclo de longitud dos, que consiste en una arista y su arista inversa, por ejemplo las aristas ij y ji , la Ley de Voltaje de Kirchhoff se traduce en:

$$U_{ij} + U_{ji} = 0$$

Esto implica que el voltaje es antisimétrico, es decir:

$$U_{ij} = -U_{ji}$$

Debido a esta propiedad de antisimetría de los voltajes, aunque cada ciclo en un grafo puede ser recorrido en dos direcciones (horaria y antihoraria), la suma de los voltajes a lo largo de un ciclo es independiente de la dirección en la que se recorra el ciclo, ya que esa suma es 0.

Podemos reformular esta última ley de la siguiente manera: existen potenciales $p(i) \in \mathbb{R}$ ($i \in V$) tales que $U_{ij} = p(i) - p(j)$ si y solo si $\sum_{ij \in A(C)} U_{ij} = 0$ para todo ciclo C .

Esta reformulación puede sonar como una afirmación en física pero es un hecho bastante simple sobre grafos:

Proposición 6.1. *Dado un grafo conexo G y una asignación antisimétrica U_{ij} de números reales a las aristas orientadas, existen números reales $p(i) \in \mathbb{R}$ ($i \in V$) tales que $U_{ij} = p(i) - p(j)$ si y solo si $\sum_{ij \in A(C)} U_{ij} = 0$ para todo ciclo C .*

Demostración:

Supongamos que se verifica que existen números reales $p(i)$ tales que $U_{ij} = p(i) - p(j)$.

Consideremos un ciclo C del grafo. Si enumeramos sus vértices como $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ tenemos que $U_{v_i, v_{i+1}}$ para cada $i = 1, \dots, n$ siendo $v_{n+1} = v_1$ tenemos que:

$$\sum_{v_i, v_{i+1} \in A(C)} U_{v_i, v_{i+1}} = \sum_{v_i, v_{i+1} \in A(C)} (p(v_{i+1}) - p(v_i))$$

Debido a que estamos sumando diferencias $p(v_i) - p(v_{i+1})$ a lo largo del ciclo completo, todos los términos se cancelan, resultando en:

$$\sum_{v_i, v_{i+1} \in A(C)} U_{v_i, v_{i+1}} = 0$$

Recíprocamente, supongamos que se verifica que $\sum_{i,j \in A(C)} U_{i,j} = 0$. Probemos antes las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1: Si W es cualquier camino cerrado del grafo entonces $\sum_{i,j \in A(W)} U_{i,j} = 0$.

Probamos por inducción sobre n el número de aristas del camino cerrado.

Si $n = 2$, W está formado por una arista y su arista inversa, por lo que W es un ciclo y en y verifica la ley de Voltajes de Kirchhoff.

Suponemos que la afirmación es cierta para $n - 1$ y probamos para n . Consideremos un camino cerrado W con n aristas.

Si el primer vértice que encontramos repetido es el final del camino, entonces W es un ciclo y podemos aplicar la hipótesis de que $\sum_{ij \in A(W)} U_{ij} = 0$.

Si encontramos un vértice repetido antes del final, este vértice divide el camino en un ciclo y un camino cerrado más pequeño. Podemos aplicar la hipótesis inductiva al camino cerrado más pequeño y la ley de Kirchhoff al ciclo, lo cual prueba la afirmación para n .

Afirmación 2: Si W_1 y W_2 son dos caminos abiertos con los mismos vértices iniciales y vértices finales entonces:

$$\sum_{ij \in A(W_1)} U_{ij} = \sum_{ij \in A(W_2)} U_{ij}$$

Si concatenamos W_1 con el inverso de W_2 (consideramos su vértice inicial como final y el final como inicial), obtenemos un camino cerrado W . Aplicando la afirmación 1 obtenemos que:

$$\sum_{ij \in A(W)} U_{ij} = 0$$

Y dado que W es la concatenación de W_1 y el inverso W_2 y que U es antisimétrico obtenemos que:

$$\sum_{ij \in A(W_1)} U_{ij} - \sum_{ij \in A(W_2)} U_{ij} = 0$$

Ahora pasemos a la construcción de los potenciales:

Fijemos un vértice v , como punto inicial, le asignamos un potencial arbitrario $p(v)$.

Para cada vértice u distinto de v consideramos cualquier camino W de v a u y definimos

$$p(u) = \sum_{ij \in A(W)} U_{ij}$$

este valor es independiente de W debido a la Afirmación 2, que asegura que la suma de voltajes será la misma para todo camino entre v y u .

Para cualquier vecino adyacente u' de u , consideramos el camino $W + uu'$ y obtenemos:

$$p(u') = p(u) + U_{uu'}$$

entonces:

$$U_{uu'} = p(u') - p(u)$$

Esto muestra que p está bien definido y se satisface la condición $U_{ij} = p(j) - p(i)$. \square

Verificar la Ley de Voltaje de Kirchhoff para cada ciclo en un grafo puede resultar laborioso debido a la gran cantidad de ciclos posibles. Sin embargo, las ecuaciones de Kirchhoff no son independientes entre sí, por lo tanto, no es necesario verificar la ley para cada ciclo individualmente. Basta con comprobar que se cumple para una base de ciclos.

Corolario 6.2. *Sea G un grafo plano doblemente conexo y sea U_{ij} una asignación antisimétrica de números reales a las aristas orientadas. Existen números reales $p(i)$ para $i \in V$ tales que $U_{ij} = p(j) - p(i)$ si y solo si la Ley de Voltaje de Kirchhoff se satisface para el ciclo límite de cada cara acotada.*

Demostración:

Como G es un grafo 2-conexo, es conexo, por lo tanto, si existe una asignación de números reales $p(i)$ para $i \in V$ tales que $U_{ij} = p(j) - p(i)$, entonces, por la proposición 6.1 se tiene que la Ley de Voltaje de Kirchhoff se satisface para todo ciclo.

Recíprocamente, fijemos una representación del grafo G en el plano. Consideremos una orientación en sentido antihorario para el ciclo C . Para cada ciclo C , consideramos los países

que están delimitados por C .

Sumamos los voltajes U_{ij} para todas las aristas que forman las fronteras de los países contenidos dentro de C , con la orientación en sentido antihorario. Debido a la antisimetría de U_{ij} , los términos correspondientes a las aristas internas se cancelan. Esto nos permite obtener la Ley de Voltaje de Kirchoff para C . □

El resultado principal de la teoría de redes eléctricas que hemos es que, dado un grafo conexo con voltajes asignados a un conjunto no vacío de vértices, siempre existe una asignación única de potenciales a los vértices restantes y de corrientes a las aristas que satisfacen las leyes de Ohm y Kirchoff.

Volviendo a la demostración de 5.6, consideremos el grafo G como una red eléctrica, donde cada arista representa un conductor con resistencia unitaria. Dado un conjunto no vacío $S \subset V$ y una función $h_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$, dejamos que una corriente fluya a través de la red mientras mantenemos cada $v \in S$ en el potencial $h_0(v)$. Entonces el potencial $h(v)$ definido para todos los vértices v es una extensión de h_0 , y es armónico en cada vértice $v \in V \setminus S$. De hecho, la corriente a través de una arista uv es $h(u) - h(v)$ según la Ley de Ohm, y por lo tanto, según la Ley de Corriente de Kirchoff, $\sum_{j \in N(i)} (h(j) - h(i)) = 0$ para cada vértice $i \notin S$.

Como caso especial, si enviamos corriente unitaria desde el vértice s al vértice t , entonces los potenciales h de los vértices satisfacen la ecuación $Lh = \mathbb{1}_t - \mathbb{1}_s$ donde $\mathbb{1}_t$ y $\mathbb{1}_s$ son vectores de tamaño n , el número de vértices del grafo. Estos vectores tienen un 1 en la posición correspondiente al vértice t y s respectivamente, y 0 en todas las demás posiciones.

Bibliografía

- [1] A. Campillo. *Material docente de la asignatura de Matemática Discreta del Grado en Matemáticas (UVa)*, (2023).
- [2] C. Campillo. *Material docente sobre la demostración del Teorema de vértices pequeños*.
- [3] L. Lovász. *Graphs and Geometry*, (2019) Colloquium Publications AMS (2019), 444 PP
- [4] J.F. Villalpando. <http://mate.cucei.udg.mx/matdis/>
- [5] G. Hernández Peñalver. <https://blogs.upm.es/gregoriohp/wp-content/uploads/sites/1071/2023/01/8Planaridad.pdf>
- [6] W. T. Tutte *How to draw a graph*, Proc. London Math. Soc. (3) 13 (1963), 743–767, DOI10.1112/plms/s3-13.1.743. MR0158387
- [7] D. A. Spielman *Algorithms, graph theory, and linear equations in Laplacian matrices*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume IV, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, pp. 2698–2722. MR2827990
- [8] B.Green, T.Tao *On sets defining few ordinary lines*, Disc.Comput.Geom. (2013) 50, 409-468.
- [9] E. Melchior *Über Vielseite der projektiven Ebene.*, Deutsche Math. (1940) 5, 461–475
- [10] R. Díaz. *Grafo de Poliedros trivalentes (UCM)*, (2000).
- [11] F. Rincón y S. Soto. *Introducción a la teoría de politopos*, Lect. Matem. 5 (2017), 177-215