



---

# Universidad de Valladolid

Facultad de ciencias

Grado en Matemáticas  
Trabajo Fin de Grado

Grupos de homotopía y homología. Esferas de  
homología

**Autora:**

Sofía Suárez Casabiell

**Tutor:**

Antonio Campillo López

Julio 2024

## Índice

<b>1. Resumen del Trabajo</b>	<b>3</b>
<b>2. Conceptos preliminares</b>	<b>4</b>
<b>3. Homología y cohomología simplicial de poliedros</b>	<b>7</b>
<b>4. Homología de espacios triangulados</b>	<b>13</b>
<b>5. Homología y cohomología singular de espacios topológicos</b>	<b>14</b>
<b>6. Propiedades de la homología singular</b>	<b>21</b>
6.1. Homología relativa . . . . .	21
6.2. Homomorfismo inducido de grupos de homología . . . . .	25
6.3. Axiomas de Eilenberg-Steenrod . . . . .	28
<b>7. CW-complejos</b>	<b>42</b>
7.1. Homología de los CW-complejos . . . . .	46
7.2. Ejemplo con CW-complejos . . . . .	49
7.2.1. El toro . . . . .	49
<b>8. La dualidad de <i>Poincaré</i></b>	<b>51</b>
<b>9. Teorema de Euler</b>	<b>52</b>
<b>10. Cálculos para poliedros, variedades topológicas trianguladas</b>	<b>55</b>
10.1. Un punto . . . . .	55
10.2. Triángulo en el plano euclidiano . . . . .	56
10.3. Unión disjunta de dos circunferencias . . . . .	59
10.4. Cálculos para las esferas . . . . .	59
<b>11. Grupos de homotopía</b>	<b>64</b>
11.1. Relación entre homotopía y homología . . . . .	69

<b>12. Esferas de Poincaré</b>	<b>74</b>
12.1. Construcción explícita de esferas de Poincaré no triviales . . . . .	74
12.1.1. Grupo Fundamental del espacio dodecaédrico de Poincaré . . . .	78
12.1.2. Grupos de homología del espacio dodecaédrico de Poincaré . . .	82
<b>13. Referencias Bibliográficas</b>	<b>84</b>

## 1 RESUMEN DEL TRABAJO

En libro *Analysis Situs* publicado en 1895, Henri Poincaré, recompila sus artículos enfocados en entender la estructura de variedades 3-dimensionales y espacios topológicos mediante el estudio de sus propiedades globales, como la conectividad, la orientabilidad o la compacidad. Donde inicialmente utilizó métodos diferenciables para luego dar paso a la combinatoria. Este libro proporcionó los fundamentos teóricos básicos necesarios para abordar el estudio de la topología algebraica.

Para este estudio un concepto fundamental es la homología, por esta razón después de definir unos conceptos preeliminarios, a partir de la segunda sección de la memoria se hace un repaso de las nociones de homología simplicial, homología para espacios triangulados, homología y cohomología singular de espacios topológicos; además de cálculos para poliedros y variedades topológicas trianguladas, en particular para las esferas utilizando la sucesión de Mayer-Vietoris. Se aborda también el carácter funtorial de la homología singular, la dualidad de *Poincaré* y el teorema de Euler.

A continuación, se describen los CW-complejos, la homología celular y se da un ejemplo de cálculo para el toro. También se relaciona la homología singular con el primer grupo de homotopía; es decir, el grupo fundamental de un espacio topológico, lo que nos será útil para la última sección.

Finalmente, se define la esfera de Poincaré y se presenta una construcción explícita de la misma identificando caras opuestas del dodecaedro regular. Gracias a ello se calcula su grupo fundamental y los grupos de homología.

## 2 CONCEPTOS PRELIMINARES

**Definición 2.1 (Espacio topológico Hausdorff).** *Un espacio topológico  $(X, \tau)$  es Hausdorff si para cada par de puntos distintos los podemos separar por abiertos; es decir, para cada  $x, y \in X$  distintos, existen dos abiertos  $U$  y  $V$  tales que  $x \in U$ ,  $y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .*

**Definición 2.2 (Variedad topológica n-dimensional).** *Supongamos que  $n$  es un entero positivo, una variedad topológica  $n$ -dimensional es un espacio topológico Hausdorff tal que para cada punto existe un entorno abierto homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Definición 2.3 (Variedad compacta).** *Una variedad tal que para todo recubrimiento abierto se puede extraer un subrecubrimiento finito será una variedad compacta; es decir, es una variedad cuyo espacio topológico subyacente es compacto.*

**Definición 2.4 (Espacio conexo por caminos).** *Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, consideramos en  $[0, 1]$  la topología usual, es conexo por caminos si para todo  $x, y \in X$  existe  $f : [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que  $f(0) = x$ ,  $f(1) = y$ .*

**Definición 2.5 (Complejo de cadenas con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ ).** *Sea  $R$  un anillo conmutativo con unidad, sea  $C = (C_n, \partial_n)$  una sucesión de  $\mathbb{R}$ -módulos (grupos abelianos, si  $R = \mathbb{Z}$ )  $C_n$ ,  $n \geq 0$  y homomorfismos de  $R$ -módulos,  $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$  tales que  $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$ . Se suele denotar por:*

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

**Definición 2.6 (sucesión exacta).** *Un complejo de cadenas  $C$*

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

*es una sucesión exacta si  $\ker \partial_n = \text{Im} \partial_{n+1}$ , para todo  $n$ . Nótese que  $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$  implica que  $\text{Im} \partial_{n-1} \subset \ker \partial_n$ .*

**Definición 2.7 (Sucesión exacta corta).** *Sea una sucesión exacta de homomorfismos*

de grupos, la llamaremos corta si es de la forma,

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$$

La exactitud en  $M$  significa que  $M \rightarrow N$  es inyectiva y la exactitud en  $P$ , significa que  $N \rightarrow P$  es suprayectiva. Trabajaremos en concreto con el siguiente tipo de sucesión exacta corta,

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} \frac{M}{N} \rightarrow 0$$

donde  $N$  será un submódulo de  $M$ ,  $i$  la inclusión y  $j$  la proyección sobre el módulo cociente  $\frac{M}{N}$ .

**Definición 2.8 (Cokernel).** Sea  $f : A \rightarrow B$  una aplicación homomorfa (es decir, un homomorfismo de módulos sobre un anillo  $R$ , donde  $A$  y  $B$  son  $R$ -módulos).

El cokernel de  $f$ , denotado como  $\text{coker}(f)$  o  $\text{cok}(f)$ , es el módulo cociente del módulo  $B$  por la imagen de  $f$ . En otras palabras:

$$\text{coker}(f) = B / \text{im}(f)$$

donde  $\text{im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$ .

Se puede verificar que una cadena es exacta de la siguientes formas:

**Lema 2.1.** Se puede verificar que una cadena es exacta de la siguientes formas:

1.  $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$  es exacta, si y solo si,  $f$  es inyectivo.
2.  $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$  es exacta, si y solo si,  $f$  es sobreyectivo.
3.  $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$  es exacta corta, si y solo si,  $f$  es inyectivo,  $g$  es sobreyectivo e  $\text{Im}(f) = \text{ker}(g)$ , entonces  $g$  induce un isomorfismo entre el  $\text{coker}(f)$  y  $N$ .

*Demostración.* 1. Si suponemos que es exacta, se tiene que  $\text{Im}(0) = \text{ker}(f)$ , su imagen es cero, y por tanto  $f$  es inyectiva.

Si ahora suponemos que  $f$  es inyectiva, tenemos que  $\text{Im}(0) = \text{ker}(f) = 0$ .

2. Por reducción al absurdo, si  $g$  no es suprayectiva, existe  $a \in N \setminus \text{Im}(g)$ , luego la imagen de  $A$  es  $0$ , lo que es absurdo ya que la sucesión es exacta.

Si ahora suponemos que  $g$  es sobreyectiva,  $\text{Im}(g) = N$ , que al núcleo de el homomorfismo  $N \rightarrow 0$  y la sucesión es exacta.

3. Es consecuencia directa del Primer teorema de Isomorfía.

□

**Definición 2.9 (Categoría).** *Una categoría es una estructura algebraica que consta de una colección de objetos, conectados unos con otros mediante morfismos tales que: la composición de morfismos es asociativa, y para cada objeto existe un morfismo que se comporta como un elemento neutro bajo la composición.*

**Definición 2.10 (Categoría de parejas de espacios topológicos).** *Definimos a la categoría cuyos objetos son parejas de espacios topológicos y los morfismos aplicaciones de parejas como categoría de parejas de espacios,  $TOP^2$ .*

**Definición 2.11 (Functor covariante).** *Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  dos categorías, se define un functor como una función,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que:*

- *para todo  $X \in \mathcal{C}$ ,  $F(X) \in \mathcal{D}$ .*
- *para todo morfismo  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  le asocia un morfismo  $F(f) \in \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ , de manera que se conservan los morfismos de identidad y la composición de morfismos.*

**Definición 2.12 (Epimorfismo).** *Sean tres categorías  $A$ ,  $B$  y  $C$ , una función  $f : A \rightarrow B$ ,  $f$  es un epimorfismo si cuando es cancelable a izquierda, es decir, cuando para cualesquiera  $g, h : B \rightarrow C$ , si  $g \circ f = h \circ f$  entonces  $h = g$ .*

### 3 HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA SIMPLICIAL DE POLIEDROS

La homología simplicial forma parte de las primeras tentativas para definir una homología que proporcione invariantes topológicos. Dicha topología es de naturaleza enteramente geométrica y consiste en considerar "bloques elementales" (puntos, triángulos, tetraedros,..) que serán los *símplices de  $\mathbb{R}^n$*  a partir de los cuales reconstruimos el espacio a estudiar, que en este caso será un poliedro que consideramos como la realización geométrica de un *complejo simplicial tridimensional*.

Consideramos en  $\mathbb{R}^n$  la distancia usual inducida por la norma euclídea. Se dice que los puntos  $v_0, v_1, \dots, v_p$  de  $\mathbb{R}^n$  son afínmente independientes si los vectores  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_p - v_0$  son linealmente independientes.

**Definición 3.1 (p-símplice de  $\mathbb{R}^n$ ).** Sea  $v_0, v_1, \dots, v_p$  una colección de  $p + 1$  puntos afínmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, el  $p$ -símplice generado por estos puntos, denotado como  $\Delta^p$ , es el conjunto de todos los  $x$  que pueden expresarse como una combinación convexa de los  $v_i$ , es decir:

$$\Delta^p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1 \right\}$$

Esto es esencialmente la envolvente convexa de  $v_0, v_1, \dots, v_p$  en  $\mathbb{R}^n$ ; es decir, el convexo más pequeño que los contiene.

Denotamos a los  $\lambda_i$ , las *coordenadas baricéntricas de  $x \in \Delta^p$* , donde  $p$  es la *dimensión del símplice*. Diremos también que los  $v_i$  son los *vértices* del símplice, y que el subespacio

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1, \lambda_j = 0 \right\}$$

es la *cara  $j$ -ésima del símplice*; entendida como la cara opuesta al vértice  $v_j$ .

Los símplices se pueden definir de manera inductiva:

- Un  $\Delta^0$  es simplemente un vértice.
- Un  $\Delta^1$  es una arista, que conecta dos vértices.
- Un  $\Delta^2$  es un triángulo, formado por tres aristas que conectan tres vértices.



- Un  $\Delta^3$  es un tetraedro, formado por cuatro triángulos que comparten sus aristas.

**Definición 3.2 (Complejo simplicial de  $\mathbb{R}^n$ ).** *Un complejo simplicial  $K$  es un conjunto finito de símlices de  $\mathbb{R}^n$  tal que:*

- Si  $\Delta^p \in K$  todas sus caras están también en  $K$ .
- Si  $\Delta^p, \Delta^q \in K$ ; o bien, su intersección es vacía; o bien, su intersección es una cara común de los dos símlices; es decir, un elemento de  $K$ .

Definimos la *dimensión del complejo simplicial* como la dimensión de máxima de sus símlices.

A fin de definir una operación borde sobre los complejos simpliciales, hace falta orientarlos. Para ello se dará un orden sobre los vértices y notaremos por  $\langle v_0, v_1, \dots, v_p \rangle$  un *p-símlice orientado*, con la regla de que dos ordenaciones definen la misma orientación si y sólo si no difieren en su paridad; es decir, si se puede pasar de una ordenación a la otra mediante un número par de trasposiciones. De esta forma, cada símlice tiene exactamente dos orientaciones, e intercambiando el orden de dos vértices se cambia a la orientación opuesta.

Denotaremos  $l(p)$  el número de  $p$ -símlices de un complejo simplicial  $K$  de dimensión  $k$ .

Podemos considerar una  $p$ -cadena de  $C_p(K)$ , como una suma de la forma

$$c = \sum_{i=1}^{l(p)} n_i \sigma_i^p$$

donde los  $\sigma_i^p$  son los  $l(p)$  símlices de  $K$  y  $n_i \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema 3.1 (Grupo de las  $p$ -cadenas de  $K$ ).** *Si consideramos la familia de las  $p$ -cadenas con la operación puntual inducida por los enteros, tenemos un grupo abeliano libre (un grupo en el cual la operación definida es conmutativa y tiene una base tal que cada uno de los elementos del grupo puede expresarse de forma unívoca como combina-*

ción lineal de los elementos de la base) engendrado por los  $p$ -símplices orientados de  $K$  se denotará por  $C_p(K)$ , el grupo de las  $p$ -cadenas de  $K$ .

*Demostración.* Sean dos  $p$ -cadenas  $c = \sum_{i=1}^{l(p)} n_i \sigma_i^p$  y  $c' = \sum_{i=1}^{l(p)} m_i \sigma_i^p$  de  $K$ . Entonces,

$$c + c' = \sum_{i=1}^{l(p)} n_i \sigma_i^p + \sum_{i=1}^{l(p)} m_i \sigma_i^p = \sum_{i=1}^{l(p)} (n_i + m_i) \sigma_i^p \in C_p(K)$$

Las propiedades asociativa y conmutativa se tienen por ser  $\mathbb{Z}$  un grupo abeliano. El elemento identidad es la  $p$ -cadena trivial y el inverso aditivo de  $c$  en  $C_p(K)$  es la  $p$ -cadena  $-c$ . Por tanto  $C_p(K)$  es un grupo abeliano.  $\square$

Se puede entonces definir una aplicación lineal que llamaremos operación borde

$$\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$$

por

$$\partial_p \langle v_0, v_1, \dots, v_p \rangle = \sum_{i=1}^p (-1)^i \langle v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_p \rangle$$

Donde  $\hat{v}_i$  significa que omitimos el vértice  $v_i$ , obteniendo así un  $(p-1)$ -símplice, que se trata de la  $i$ -ésima cara del símplice. Prolongando por la linealidad en  $\mathbb{Z}$  sobre todo  $C_p(K)$ :

$$\partial_p c = \sum_{i=1}^{l(p)} n_i \partial_p \sigma_i^p$$

La frontera de una 0-cadena se define por cero.

**Definición 3.3 (p-ciclo en K).** Sea  $K$  un complejo simplicial orientado, un  $p$ -ciclo es una  $p$ -cadena  $c$  tal que  $\partial_p(c) = 0$ . El conjunto de los  $p$ -ciclos es el kernel de  $\partial_p$ , es un subgrupo de  $C_p(K)$ , que denotamos por  $Z_p(K)$ , el grupo de los  $p$ -ciclos de  $K$ .

En particular, el grupo de los 0-ciclos es el grupo de las 0-cadenas;  $C_0(K) = Z_0(K)$ .

**Definición 3.4 (p-frontera en K).** Sea  $K$  un complejo simplicial orientado, una  $p$ -frontera es una  $p$ -cadena  $c$  tal que existe una  $(p+1)$ -cadena  $c_{p+1}$  tal que  $\partial_{p+1}(c_{p+1}) = c$ .

El conjunto de los  $p$ -ciclos es la imagen de  $\partial_{p+1}$ , un subgrupo de  $C_p(K)$ , que denotamos por  $B_p(K)$ , el grupo de los  $p$ -fronteras de  $K$ .

Si la dimensión de  $K$  es  $n$ , y  $p > n$ , no existen  $p$ -cadenas en  $K$ , luego automáticamente  $B_p(K) = Z_p(K) = 0$ .

**Teorema 3.2.** *Así se obtiene el siguiente complejo de cadenas*

$$C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

*Demostración.* Es un complejo de cadenas si  $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$ , vamos a verlo para los generadores. Consideremos un  $p$ -símplice orientado  $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_p \rangle$ . Apliquemos el operador borde  $\partial_{p-1}$  a  $\partial_p \sigma$ :

$$\partial_{p-1}(\partial_p \sigma) = \partial_{p-1} \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p \rangle \right)$$

Por la linealidad del operador borde, esto es igual a:

$$\partial_{p-1}(\partial_p \sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1} \langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p \rangle$$

Ahora por definición del operador borde  $\partial_{p-1}$  en cada  $(p-1)$ -símplice  $\langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p \rangle$ :

$$\partial_{p-1} \langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p \rangle = \sum_{j=0, j \neq i}^p (-1)^j \langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p \rangle$$

Por lo tanto,

$$\partial_{p-1}(\partial_p \sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \left( \sum_{j=0, j \neq i}^p (-1)^j \langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p \rangle \right)$$

Reorganizando la suma:

$$\partial_{p-1}(\partial_p \sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \left( \sum_{j>i}^p (-1)^{j-1} \langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p \rangle \right)$$

$$+ \sum_{j=0}^{j < i} (-1)^j \langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p \rangle$$

Observamos que cada término de la forma  $\langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_r, \dots, \hat{v}_q, \dots, v_p \rangle$  aparece dos veces, si suponemos  $r < q$ ; (en otro caso sería lo mismo), entonces, en el primer sumatorio nos quedaría como coeficiente  $(-1)^r(-1)^{q-1}$  y para el segundo  $(-1)^q(-1)^r$  por tanto todo símplice tiene coeficiente nulo, entonces:

$$\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$$

□

Abusando de la notación podemos expresar  $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$ , como  $\partial^2 = 0$ .

**Teorema 3.3.** *Si  $K$  es un complejo orientado, entonces  $B_p(K) \subset Z_p(K)$  para cada entero  $p$  tal que  $0 \leq p \leq n$ , donde  $n$  es la dimensión de  $K$ .*

*Demostración.* ■ Si  $p = 0$  entonces  $Z_0(K) = C_0(K)$  por definición y como  $\partial_1 : C_1(K) \longrightarrow C_0(K)$ , luego  $B_0(K) = \partial(C_1(K)) \leq C_0(K)$  entonces

$$B_0(K) \subset C_0(K)$$

■ Si  $p = n$  entonces  $B_n(K) = \{0\}$  y así

$$B_n(K) \subset C_n(K)$$

■ Si  $0 < p < n$ . Sea  $b_p \in B_p(K)$ , por definición existe  $c_{p+1}$  una  $(p+1)$ -cadena tal que  $\partial(c_{p+1}) = b_p$ . Ahora se aplica el homomorfismo frontera a  $b_p$ .

$$\partial(b_p) = \partial(\partial(c_{p+1})) = \partial\partial(c_{p+1})$$

y por ser complejo de cadenas se tiene  $\partial\partial(c_{p+1}) = 0$ , entonces  $b_p \in \text{Ker}(\partial) = Z_p(K)$  y así

$$B_p(K) \subset C_p(K)$$

□

**Definición 3.5 (Grupo de las p-cocadenas de K).** *El grupo abeliano libre de las p-cocadenas de K, que denotaremos como  $C^p(K) = \text{Hom}(C_p, \mathbb{Z})$ , es el dual de  $C_p(K)$ .*

Cada p-cocadena  $\alpha$  en  $C^p(K)$  es un homomorfismo de grupos de los p-símplices de K a  $\mathbb{Z}$ . Es decir, cada  $\alpha$  asigna un entero a cada p-símplice orientado en K.

La operación de coborde  $\delta^p : C^p(K) \rightarrow C^{p+1}(K)$ , inducida por el operador borde  $\delta_{p+1} : C_{p+1} \rightarrow C_p$  está definida como:

$$\delta^p \alpha = \sum_{i=0}^p (-1)^i \alpha(\sigma_i^{p+1})$$

Donde  $\sigma_i^{p+1}$  son los  $(p+1)$ -símplices orientados de K, y  $\alpha(\sigma_i^{p+1})$  es el valor que  $\alpha$  asigna a  $\sigma_i^{p+1}$ . Por construcción de las aplicaciones inducidas, si  $\alpha$  es una  $p-1$ -cocadena y  $c$  una p-cadena se tiene que:

$$\delta \alpha(c) = \alpha(\delta c)$$

Por lo tanto, la operación de coborde  $\delta^p$  toma una p-cocadena y la lleva a una  $(p+1)$ -cocadena.

El grupo de p-cociclos  $Z^p$  y el grupo de p-cobordes  $B^p$  son:

$$Z^p = \ker \delta^p$$

$$B^p = \text{im} \delta^{p-1}$$

Una cocadena  $\alpha$  es un p-cociclo, si y solo si,  $\delta \alpha = 0$ . En otras palabras, para todo  $c \in C_p$ ,  $0 = \delta \alpha(c) = \alpha(\delta c)$ , entonces  $\alpha$  es un cociclo si y solo si  $\alpha$  es idénticamente nula en  $B_p$ .

**Teorema 3.4.** *La secuencia de complejo de cocadenas (creciente) de K se puede escribir como:*

$$\dots \xrightarrow{\delta^{p-2}} C^{p-1}(K) \xrightarrow{\delta^{p-1}} C^p(K) \xrightarrow{\delta^p} \dots$$

*Demostración.* Puesto que  $\partial^2 = 0$  veremos que  $\delta^2 = 0$ .

Sea  $\alpha$  una  $(p-2)$ -cocadena y  $c$  una  $p$ -cadena, entonces

$$\delta^2\alpha(c) = \delta\alpha(\partial c) = \alpha(\partial^2 c) = 0$$

Por tanto  $B^p \in Z^p$  y se tiene el complejo de cadenas. □

**Definición 3.6 (Homología simplicial de un complejo simplicial).** *La homología simplicial de  $K$  con valores en  $\mathbb{Z}$ , es el  $p$ -ésimo grupo de homología,  $H_p(K)$ , definido como el grupo cociente:*

$$H_p(K) = \frac{Z_p}{B_p} = \frac{\ker \partial_p}{\text{Im} \partial_{p+1}}$$

*Esto nos da también los grupos de homología del poliedro subyacente a  $K$ , denotado por  $|K|$ , que es el subespacio topológico de  $\mathbb{R}^n$  unión de los puntos de todos los símlices de  $K$ .*

En donde, dado que el grupo de cadenas con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  es un grupo abeliano libre finitamente generado, los subgrupos  $Z_p$  y  $B_p$  también lo son y por tanto su cociente  $H_p$  es un grupo abeliano finitamente generado.

**Definición 3.7 (Cohomología simplicial de un complejo simplicial).** *También se puede introducir la cohomología simplicial de  $K$  como la cohomología adjunta del complejo  $C^p(K)$  (con valores en  $\mathbb{Z}$ ). El  $p$ -ésimo grupo de cohomología se denota como  $H^p(K)$ , definido como el grupo cociente:*

$$H^p(K) = \frac{Z^p}{B^p} = \frac{\ker \delta^p}{\text{Im} \delta^{p-1}}$$

## 4 HOMOLOGÍA DE ESPACIOS TRIANGULADOS

A partir de esta sección, consideramos  $X$  un espacio topológico.

**Definición 4.1 (Espacio triangulado).** *Se dice que  $X$  es triangulado si existe un complejo simplicial  $K$  tal que  $X$  sea homeomorfo a  $|K|$ .*

Donde la topología del poliedro  $|K|$  está determinada por los símlices de  $K \subset \mathbb{R}^n$ , en particular, tenemos que:

- $A$  es un abierto de  $|K|$ , si y solo si,  $A \cap \sigma$  es abierto en  $K$  para todo  $\sigma \in K$ .
- Una aplicación  $f : |K| \rightarrow Y$  es continua, si y solo si, la restricción a cada símlice de  $K$  lo es.

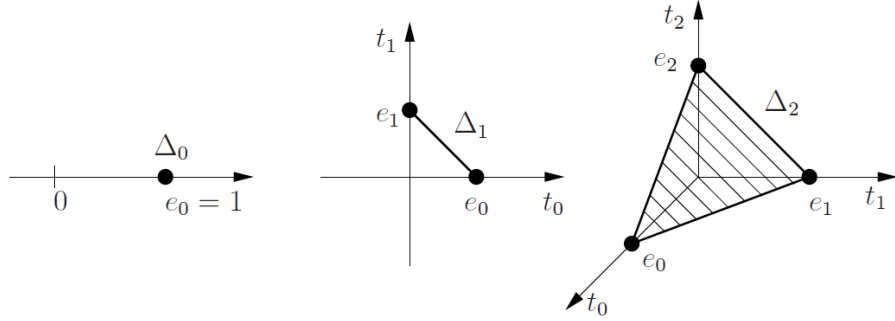
Así que cuando vayamos a calcular los grupos de homología para una superficie en realidad lo haremos en su triangulación.

## 5 HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA SINGULAR DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

A diferencia de la homología simplicial, la homología singular se aplica a cualquier espacio topológico, generalizando la homología simplicial considerando aplicaciones desde  $p$ -símlices estándar a valores en el espacio topológico estudiado.

**Definición 5.1 ( $p$ -símlice estándar).** *Sea  $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , un  $p$ -símlice estándar es la envolvente convexa afín en  $\mathbb{R}^{p+1}$  de los vectores de la base canónica  $e_0, e_1, \dots, e_p$ ;*

$$\Delta_p = \left\{ x = \sum_{i=0}^p \lambda_i e_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1 \right\}$$



**Figura 1:**  $p$ -símplices estándar,  $p=0,1,2$ .

Tenemos entonces que  $\Delta_0$  es un punto,  $\Delta_1$  es un intervalo,  $\Delta_2$  es un triángulo,  $\Delta_3$  es un tetraedro sólido, etc.

**Definición 5.2 (p-símplice singular).** *Los  $p$ -símplices singulares se definen como aplicaciones continuas desde un  $p$ -símplice estándar a  $X$ ; es decir,  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ .*

Si consideramos como  $p$ -símplice singular la imagen en  $X$  de  $\Delta_p$ , tenemos que, un 0-símplice singular de  $X$  es un punto, un 1-símplice singular es un camino, etc.

**Definición 5.3 (p-cadenas singulares de  $X$ ).** *Una  $p$ -cadena singular se escribe de la siguiente forma  $c = \sum_{j \in J} n_j \sigma_j$ , donde los  $\sigma_j$  son los  $p$ -símplices singulares y los  $n_j$  enteros, son todos cero salvo un número finito de ellos. Entonces los  $p$ -símplices singulares engendran un  $\mathbb{Z}$ -módulo libre;  $C_p(X)$ , que es el grupo de  $p$ -cadenas singulares sobre  $X$ . Donde consideramos la operación suma definida como:*

$$\sum_{j \in J} n_j \sigma_j + \sum_{j \in J} m_j \sigma_j = \sum_{j \in J} (n_j + m_j) \sigma_j$$

Esta definición no se debe considerar como una suma formal, ya que no tiene sentido sumar  $p$ -símplices tal y como están definidos, entonces consideramos las cadenas singulares como una forma de seleccionar un número finito de  $p$ -símplices singulares de  $X$  con un coeficiente, un elemento de  $\mathbb{Z}$ .

**Definición 5.4 (i-ésima cara de una  $p$ -cadena singular).** *Si  $c$  es una  $p$ -cadena singular, la  $i$ -ésima cara de  $c$  es la  $(p-1)$ -cadena singular definida a partir de la siguiente aplicación:*

$$\delta_i : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$$



donde

$$\delta_i(c) = \delta_i\left(\sum_{j \in J} n_j \sigma_j\right) = \sum_{j \in J} n_j \delta_i(\sigma_j)$$

$$\delta_i(\sigma_j(x_0, \dots, x_{p-1})) = \sigma_j(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{p-1})$$

$\delta_i$  es un homomorfismo de grupos, para  $i \in [0, p]$ .

Definimos ahora, el operador borde sobre el conjunto de  $p$ -cadenas, con el fin de definir sobre él una relación de equivalencia.

**Definición 5.5 (Borde de un  $p$ -símplice singular).** *El borde de un  $p$ -símplice singular  $\sigma$  es la combinación*

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \delta_i(\sigma)$$

Es una  $(p-1)$ -cadena.

Prolongando el borde por linealidad a toda  $p$ -cadena  $c$ , entonces  $\partial_p$  define un homomorfismo de grupos

$$\partial_p : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$$

**Definición 5.6 ( $p$ -ciclo de  $X$ ).** *Un  $p$ -ciclo es una  $p$ -cadena singular  $c \in C_p(X)$  tal que  $\partial_p(c) = 0$ , denotamos el conjunto de los  $p$ -ciclos de  $X$  como  $Z_p(X) = \ker \partial_p$ .*

**Definición 5.7 ( $p$ -borde singular de  $X$ ).** *Un  $p$ -borde es una  $p$ -cadena singular  $c \in C_p(X)$  tal que existe  $c' \in C_{p+1}$  tal que  $\partial_{p+1}(c') = c$ , denotamos el conjunto de los  $p$ -bordes de  $X$  como  $B_p(X) = \text{im } \partial_{p+1}$ .*

Por ser núcleo e imagen de un homomorfismo de grupos, sabemos que  $Z_p(X)$  y  $B_p(X)$  son subgrupos. Además, toda 0-cadena singular es un 0-ciclo, con lo que  $Z_0(X) = C_0(X)$ .

**Teorema 5.1.** *Si denotamos a todos los morfismos  $\partial_p$  como  $\partial$  entonces, tenemos el complejo de cadenas  $(C(X), \partial)$ :*

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_p(X) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\partial} 0$$

*Demostración.* Sea  $\sigma$  un  $p$ -símplice singular. Veamos, para todo  $p \geq 0$ ,  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ .

$$\partial_{p-1} \partial_p(\sigma) = \partial_{p-1} \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i \delta_i \sigma \right) = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^p (-1)^{i+j} \delta_j (\delta_i(\sigma))$$

Si  $i \leq j$ , entonces:

$$\begin{aligned} (\delta_j(\delta_i \sigma))(x_0, \dots, x_{p-2}) &= \delta_i(\sigma)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{p-2}) = \\ \sigma(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{p-2}) &= (\delta_i(\delta_{j+1} \sigma))(x_0, \dots, x_{p-2}) \end{aligned}$$

Luego,  $\delta_j \delta_i \sigma = \delta_i \delta_{j+1} \sigma$ , si  $i \leq j$ .

Calculamos entonces  $\partial_{p-1} \partial_p \sigma$ , utilizando los resultados precedentes que acabamos de ver, tenemos que:

$$\begin{aligned} \partial_{p-1} \partial_p \sigma &= \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \sigma + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=j+1}^p (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \sigma \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \delta_i \delta_{j+1} \sigma + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=j+1}^p (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \sigma \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=i}^{p-1} (-1)^{i+j} \delta_i \delta_{j+1} \sigma + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=j+1}^p (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \sigma \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=j}^{p-1} (-1)^{i+j} \delta_j \delta_{i+1} \sigma + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=j+1}^p (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \sigma \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=j+1}^p (-1)^{i+j-1} \delta_j \delta_i \sigma + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=j+1}^p (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \sigma = 0 \end{aligned}$$

□

Podemos concluir que  $B_p(X)$  es un subgrupo de  $Z_p(X)$ , ya que, si  $c \in B_p(X)$ , entonces existe un  $(p+1)$ -símplice,  $c' \in C_{p+1}(X)$ , tal que  $\partial_{p+1}(c') = c$ . Gracias al resultado anterior, tenemos que:

$$0 = \partial_p \partial_{p+1}(c') = \partial_p(c)$$

por tanto  $c \in Z_p(X)$ , y podemos concluir que  $B_p(X) \subseteq Z_p(X)$ .

Ya que  $Z_p(X)$  es un subgrupo abeliano, el cociente  $Z_p(X)/B_p(X)$  está bien definido, entonces podemos definir:

**Definición 5.8 (Homología singular de  $X$ ).** *Definimos la homología singular de  $X$  como*

$$H_p(X) = \frac{Z_p(X)}{B_p(X)}$$

donde los elementos de  $H_p(X)$  son las clases de equivalencia de  $p$ -ciclos tal que difieren en un  $p$ -borde; es decir la relación de equivalencia es la siguiente:

$$c \sim c' \Leftrightarrow c - c' \in B_p(X)$$

Decimos así que los  $p$ -ciclos  $c$  y  $c'$  son homólogos.

Pasando ahora al dual, tenemos las cocadenas de  $X$ .

**Definición 5.9 (p-cocadenas de  $X$ ).** *Las  $p$ -cocadenas se definen como funciones lineales  $\varphi : \Delta_p(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  que asignan valores enteros a los  $p$ -símplices singulares en  $X$ . Denotaremos su grupo generado por  $C^p(X)$ .*

**Definición 5.10 (Operador coborde de cocadenas).** *El operador coborde  $\delta^p : C^p(X) \rightarrow C^{p+1}(X)$  en cocadenas está definido como el dual del operador borde en cadenas:*

$$\delta^p(\varphi)(\sigma) = \varphi(\partial^p \sigma)$$

**Definición 5.11 (Cohomología Singular).** *La cohomología singular  $H^p(X)$  de un espacio topológico  $X$  se define como el grupo cociente de las cocadenas modulo el coborde de las cocadenas:*

$$H^p(X) = \frac{\ker(\delta^p : C^p(X) \rightarrow C^{p+1}(X))}{\text{im}(\delta^{p-1} : C^{p-1}(X) \rightarrow C^p(X))}$$

Veamos ahora unos resultados sobre la homología singular.

**Teorema 5.2 (Homología de un espacio conexo por caminos).** *Sea  $X$  un espacio topológico conexo por caminos, entonces  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Sea  $c = \sum_i n_i \sigma_i$  un 0-ciclo. Definimos la aplicación  $\psi : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ , de

la siguiente manera,

$$\psi \left( \sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i$$

Probemos que está bien definida. Sea  $c' = \sum_j m_j \sigma_j$  otro 0-ciclo homólogo a  $c$ , es decir  $c \sim c'$  y existe  $d = \sum_k p_k \varphi_k$  una 1-cadena, tal que,  $c = c' + \partial_1(d)$ .

También, tenemos que  $\partial_1(d) = \sum_k p_k \partial_1(\varphi_k) = \sum_k p_k (\delta_0(\varphi_k) - \delta_1(\varphi_k))$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \psi \left( \sum_i n_i \sigma_i \right) &= \psi \left( \sum_j m_j \sigma_j + \sum_k p_k (\delta_0(\varphi_k) - \delta_1(\varphi_k)) \right) \\ &= \sum_i m_j + \sum_k p_k - \sum_k p_k = \sum_j m_j \\ &= \psi \left( \sum_j m_j \sigma_j \right) \end{aligned}$$

Concluimos que  $\psi$  está bien definida.

Es claro que  $\psi$  es un homomorfismo de grupos suprayectivo.

Veamos que  $\psi$  es inyectivo.

Sean un 0-ciclo,  $c = \sum_i n_i \sigma_i$ , un punto  $x_0 \in X$  y un 0-símplice  $\sigma_{x_0}$ , tales que  $\sigma_{x_0}(\Delta_0) = x_0$ , luego,

$$c = \left( \sum_i n_i \right) \sigma_{x_0} + \sum_i (n_i \sigma_i - n_i \sigma_{x_0}) = \left( \sum_i n_i \right) \sigma_{x_0} + \partial_1 \left( \sum_i n_i \varphi_{i,x_0} \right),$$

donde  $\varphi_{i,x_0}$  es una 1-cadena (un camino) con extremos  $\sigma_i(\Delta_0) = x_i$  y  $x_0$ . Esto implica que  $c$  y  $(\sum_i n_i) \sigma_{x_0}$  son homólogos. Entonces, si  $\psi(c) = 0$ , por lo que, como  $\psi$  está bien definida,  $\psi((\sum_i n_i) \sigma_{x_0}) = 0$ , con lo que  $\sum_i n_i = 0$  y por tanto,

$$\sum_i n_i \sigma_i \sim \left( \sum_i n_i \right) \sigma_{x_0} \sim 0,$$

luego  $c \sim 0$  y  $\psi$  es inyectiva.

Podemos concluir que  $\psi$  es un isomorfismo de grupos y  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ . □

Podemos anunciar ahora una propiedad más general, que nos facilitará los cálculos

de los grupos de homología.

**Teorema 5.3.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sean  $(X_k)_{k \in K}$  sus componentes conexas por caminos. Entonces,*

$$H_p(X) \cong \bigoplus_{k \in K} H_p(X_k), \text{ para todo } p \geq 0,$$

*Demostración.* Hay un isomorfismo de grupos de la siguiente manera

$$C_p(X) \cong \bigoplus_{k \in K} C_p(X_k), \text{ para todo } p \geq 0,$$

donde  $\partial_p$  opera componente a componente. Podemos afirmar esto ya que, la imagen de  $\Delta_p$  por cada  $p$ -símplice singular  $\sigma$  de  $C_p(X)$  está contenida en alguna de las componentes conexas por caminos  $X_k$ , debido a que  $\Delta_p$  es conexo por caminos y  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$  es una aplicación continua. Gracias a esto, cada  $p$ -cadena  $c$  de  $C_p(X)$  se expresa, de manera única, como sigue,

$$c = \sum_{k \in K} c_k,$$

cada  $c_k$  es un  $p$ -símplice singular tal que  $c_k(\Delta_p)$  está contenida en una componente conexa por caminos  $X_k$ . Entonces, ya podemos concluir, pues existe un isomorfismo:

$$H_p(X) \cong \bigoplus_{k \in K} H_p(X_k), \text{ para todo } p \geq 0.$$

□

*Nota:*

Estos espacios de homología simplicial y singular son módulos sobre el anillo  $\mathbb{Z}$ , pero podríamos generalizarlos reemplazando  $\mathbb{Z}$ , donde en realidad solo interviene la estructura de grupo abeliano, pero no importa el grupo. Por ejemplo, es posible definir la homología singular de  $X$  a valores en  $\mathbb{Z}_2$  para ver la orientabilidad, o en  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ , etc. En estos casos, denotaremos  $H_p(X; G)$ , donde  $G$  será el grupo abeliano con la operación de la suma.

## 6 PROPIEDADES DE LA HOMOLOGÍA SINGULAR

En esta sección presentaré los axiomas de *Eilenberg-Steenrod*, propiedades que tienen en común las teorías homológicas de espacios topológicos.

Veremos la homología singular como una teoría homológica que satisfacen los axiomas de Eilenberg-Steenrod.

Para ello definiremos varios conceptos previos, empezando por el siguiente:

### 6.1 Homología relativa

El concepto de homología relativa  $H_p(X, A)$  para un par  $(X, A)$ , donde  $X$  es un espacio topológico y  $A \subset X$ , un subespacio. En particular, si  $A = \emptyset$  entonces  $H_p(X, A) = H_p(X)$ ; es decir, estos grupos de homología relativa generalizan los grupos de homología singular.

De manera general, tenemos que dado una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios topológicos, hay un homomorfismo inducido  $f_* : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  definido por  $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$ , donde  $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$  es un  $p$ -símplice singular en  $X$ .

Consideramos ahora la aplicación inclusión,  $i : A \hookrightarrow X$  y el homomorfismo inducido en los grupos de cadenas singulares:

$$(i_{\#})_p : C_p(A) \rightarrow C_p(X)$$

Es un homomorfismo inyectivo, pues  $i$  lo es, luego  $C_p(A)$  es un subgrupo del grupo de cadenas singulares  $C_p(X)$ . Al igual que en el caso general este homomorfismo se induce de la siguiente forma:

- Para cada  $p$ -símplice singular  $\sigma : \Delta^p \rightarrow A$  en  $A$ , la aplicación compuesta  $i \circ \sigma : \Delta^p \rightarrow X$  es un  $p$ -símplice singular en  $X$ .
- Esto define un homomorfismo  $(i_{\#})_p : C_p(A) \rightarrow C_p(X)$  que envía cada generador  $\sigma$  de  $C_p(A)$  a  $(i_{\#})_p(\sigma) = i \circ \sigma$ , un elemento de  $C_p(X)$ .

Así, consideramos el grupo cociente  $C_p(X)/C_p(A)$ . Este es el grupo de  $p$ -cadenas singulares (relativas) del par  $(X, A)$ ;  $C_p(X, A)$ . Por otra parte, si consideramos  $\partial_p : C_p(X) \rightarrow$

$C_{p-1}(X)$ ,

$$\partial_p(C_p(A)) \subset C_{p-1}(A),$$

porque si  $\varphi : \Delta_p \rightarrow X$  es un  $p$ -símplice de  $C_p(A)$ , cada  $\delta_i(\varphi)$  es un  $(p-1)$ -símplice de  $A$ . Así,  $\partial_p$  induce un homomorfismo en los grupos cociente, esto es:

$$\partial'_p : C_p(X, A) \rightarrow C_{p-1}(X, A)$$

Igual que hicimos antes, definimos el subgrupo de  $C_p(X, A)$  de  $p$ -ciclos relativos, para  $p > 0$ ,

$$Z_p(X, A) := \text{Ker}(\partial'_p) = \{c \in C_p(X, A) : \partial'_p(c) = 0\}$$

Y si  $p \geq 0$ , definimos el subgrupo de  $C_p(X, A)$  de  $p$ -bordes relativos como:

$$B_p(X, A) := \text{Im}(\partial'_p) = \partial'_p(C_{p+1}(X, A))$$

Tal y como hemos definido  $\partial'_p$  como el homomorfismo inducido por  $\partial_p$ , se cumple también  $\partial'_p \circ \partial'_{p+1}$ , por lo que:

$$B_p(X, A) \subset Z_p(X, A)$$

Con esto ya podemos definir los grupos de homología relativa del par  $(X, A)$ .

**Definición 6.1 (Grupo de Homología Relativa respecto del par  $(X, A)$ ).** Se define el  $p$ -ésimo grupo de homología relativa respecto de  $(X, A)$ , como el grupo cociente:

$$H_p(X, A) := \frac{Z_p(X, A)}{B_p(X, A)}, \text{ para } p > 0$$

Si  $p = 0$ , definimos  $Z_0(X, A) := C_0(X, A)$  por lo que  $H_0(X, A) := \frac{C_0(X, A)}{B_0(X, A)}$ .

Podríamos decir que al definir estos grupos de homología relativa 'colapsamos' todo lo que se encuentre en  $A$ , esto es, un  $p$ -símplice  $c \in C_p(X, A)$  será un  $p$ -ciclo módulo  $A$ , si y sólo si,  $\partial_p(c) \in C_{p-1}(A)$ .

Presentemos el siguiente diagrama sobre los grupos de cadenas singulares, donde

$(i_{\#})_p : C_p(A) \hookrightarrow C_p(X)$  es el homomorfismo del que hablábamos antes y  $(\pi_{\#})_p : C_p(X) \rightarrow C_p(X, A)$  es la proyección canónica.

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
0 & \rightarrow & C_{p+1}(A) & \xrightarrow{(i_{\#})_{p+1}} & C_{p+1}(X) & \xrightarrow{(\pi_{\#})_{p+1}} & C_{p+1}(X, A) \rightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial_{p+1} & & \downarrow \partial_{p+1} & & \downarrow \partial'_{p+1} \\
0 & \rightarrow & C_p(A) & \xrightarrow{(i_{\#})_p} & C_p(X) & \xrightarrow{(\pi_{\#})_p} & C_p(X, A) \rightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p \\
0 & \rightarrow & C_{p-1}(A) & \xrightarrow{(i_{\#})_{p-1}} & C_{p-1}(X) & \xrightarrow{(\pi_{\#})_{p-1}} & C_{p-1}(X, A) \rightarrow 0 \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Para no considerar el caso  $p = 0$  como excepcional, definimos para todo entero  $p < 0$  :

$$C_p(A) = C_p(X) = C_p(X, A) = \{0\}$$

Como vimos anteriormente para un caso general,  $(i_{\#})_p$  induce un homomorfismo en los grupos de homología:

$$(i_{*})_p : H_p(A) \rightarrow H_p(X), \text{ para todo } p = 0, 1, 2, \dots$$

De igual manera,  $(\pi_{\#})_p$  también induce un homomorfismo:

$$(\pi_{*})_p : H_p(X) \rightarrow H_p(X, A), \text{ para todo } p = 0, 1, 2, \dots$$

Para finalizar, queremos definir un homomorfismo entre  $H_p(X, A)$  y  $H_{p-1}(A)$ , para obtener una sucesión infinita de homomorfismos entre grupos. Definimos entonces:

$$(\partial_{*})_p : H_p(X, A) \rightarrow H_{p-1}(A)$$

Donde si  $\bar{z} \in H_p(X, A)$ , buscamos definir un  $p$ -ciclo  $(\partial_{*})_p(\bar{z}) \in H_{p-1}(A)$ . Entonces tomamos un  $p$ -ciclo  $c' \in Z_p(X, A)$  representante de la clase de homología  $\bar{z}$ . Debido a que  $(\pi_{\#})_p$  es un epimorfismo (suprayectiva), existe  $c'' \in C_p(X)$ , tal que  $(\pi_{\#})_p(c'') = c'$ . Consideramos ahora la cadena  $\partial_p(c'') \in C_{p-1}(X)$ . Como el diagrama es conmutativo y



$c'$  es un  $p$ -ciclo, tenemos que:

$$(\pi_{\#})_{p-1} \circ \partial_p(c'') = \partial'_p \circ (\pi_{\#})_p(c'') = \partial'_p(c') = 0$$

entonces  $\partial_p(c'') \in C_{p-1}(A)$ . Definimos, por tanto:

$$(\partial_*)_p(\bar{z}) = \partial_p(c'')$$

Veamos que esta aplicación está bien definida; es decir, que no depende del representante escogido. Sea  $\bar{z} \in H_p(X, A)$ . Tomamos  $c', a' \in Z_p(X, A)$  dos  $p$ -ciclos representantes de la clase de homología relativa  $\bar{z}$ , por definición tenemos:

$$c' - a' \in B_p(X, A)$$

Tomamos  $c'', a'' \in C_p(X)$ , de manera que  $(\pi_{\#})_p(c'') = c'$  y  $(\pi_{\#})_p(a'') = a'$ . Como hemos visto antes, tenemos que:

$$\partial_p(c'') \in C_{p-1}(A)$$

$$\partial_p(a'') \in C_{p-1}(A)$$

Veamos que la clase de homología de  $\partial_p(c'')$  coincide con la de  $\partial_p(a'')$  en  $H_{p-1}(A)$ ; es decir,  $\partial_p(c'') - \partial_p(a'') \in B_{p-1}(A)$ .

abemos que existe  $d \in C_{p+1}(X, A)$  tal que  $\partial'_{p+1}(d) = c' - a' \in C_p(X, A)$ , ya que  $c' - a' \in B_p(X, A)$ . Además, existe  $d' \in C_{p+1}(X)$ , tal que  $(\pi_{\#})_{p+1}(d') = d$ . Por tanto,

$$(\pi_{\#})_p \circ \partial_{p+1}(d') = \partial'_{p+1} \circ (\pi_{\#})_{p+1}(d') = \partial'_{p+1}(d) = c' - a'$$

Luego  $\partial_{p+1}(d')$  y  $c'' - a''$  tienen la misma imagen por  $(\pi_{\#})_p$ , por lo que son cadenas equivalentes en el grupo cociente  $C_p(X, A)$ , entonces  $(c'' - a'') - \partial_{p+1}(d') \in C_p(A)$ . Además,

$$\partial_p((c'' - a'') - \partial_{p+1}(d')) = \partial_p((c'' - a'')) - \partial_p \circ \partial_{p+1}(d') = \partial_p((c'' - a'')) = \partial_p(c'') - \partial_p(a'')$$

Por tanto  $\partial_p(c'') - \partial_p(a'') \in B_{p-1}(A)$ .

Probemos ahora que no depende del representante escogido  $c'' \in C_p(X)$ . Tomemos dos p-ciclos  $c''_1, c''_2 \in C_p(X)$  tales que  $(\pi_{\#})_p(c''_1) = (\pi_{\#})_p(c''_2) = c' \in C_p(X, A)$ . Por linealidad:

$$(\pi_{\#})_p(c''_1 - c''_2) = 0$$

entonces  $c''_1 - c''_2 = a \in C_p(A)$ ,  $a$  es una p-cadena de  $C_p(A)$ . Para ver que  $(\partial_*)_p$  está bien definida basta ver que  $\partial_p(c''_1) = \partial_p(c''_2)$ .

Tenemos que  $c''_1 = c''_2 + a$ , entonces:

$$\partial_p(c''_1) = \partial_p(c''_2 + a) = \partial_p(c''_2) + \partial_p(a)$$

Como vimos antes,  $\partial_p(c''_1), \partial_p(c''_2) \in C_{p-1}(A)$ . Para concluir que está bien definida, veamos que estos dos elementos generan la misma clase de equivalencia en  $H_{p-1}(A)$ ; es decir, que  $\partial_p(c''_1) - \partial_p(c''_2)$ , sea un (p-1)-borde de  $C_{p-1}(A)$ , como  $\partial_p(c''_1) - \partial_p(c''_2) = \partial_p(a)$ , un (p-1)-borde;  $(\partial_*)_p$  está bien definida.

Se concluye que es un homomorfismo de grupos, con lo que habremos definido así la *sucesión larga de homología del par*  $(X, A)$ .

## 6.2 Homomorfismo inducido de grupos de homología

A continuación vamos a introducir el homomorfismo de grupos de homología inducido por una aplicación continua entre espacios topológicos.

Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Para cada  $p \geq 0$ , dicha aplicación induce un homomorfismo entre los grupos de p-cadenas singulares de  $X$  e  $Y$  :

$$(f_{\#})_p : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$$

definido por:

$$(f\#)_p \left( \sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = \sum_{j \in J} n_j (f \circ \varphi_j)$$

donde  $f \circ \varphi_j : \Delta_p \rightarrow Y$  es un  $n$ -símplice singular de  $Y$ , para todo  $j \in J$ .

Veamos que  $(f\#)_p$  aplica  $p$ -ciclos en  $p$ -ciclos y  $p$ -bordes en  $p$ -bordes, primero veremos el siguiente lema.

**Lema 6.1.** *Con la notación anterior,*

$$\partial_p \circ (f\#)_p = (f\#)_{p-1} \circ \partial_p$$

*Demostración.* Utilizaremos el siguiente diagrama para ver bien lo que queremos probar,

$$\begin{array}{ccc} C_p(X) & \xrightarrow{(f\#)_p} & C_p(Y) \\ \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p \\ C_{p-1}(X) & \xrightarrow{(f\#)_{p-1}} & C_{p-1}(Y) \end{array}$$

Por definición de operador borde, lo probaremos para cada  $\delta_i$  y se concluirá el resultado. Entonces, dado un  $p$ -símplice singular  $\varphi$  de  $X$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \left( \left( \delta_i \circ (f\#)_p \right) (\varphi) \right) (x_0, \dots, x_{p-1}) &= \delta_i (f \circ \varphi) (x_0, \dots, x_{p-1}) \\ &= (f \circ \varphi) (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{p-1}) \\ &= f (\varphi (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{p-1})) \\ &= f ((\delta_i(\varphi)) (x_0, \dots, x_{p-1})) \\ &= (f \delta_i \varphi) (x_0, \dots, x_{p-1}) \\ &= \left( \left( (f\#)_{p-1} \circ \delta_i \right) (\varphi) \right) (x_0, \dots, x_{p-1}) \end{aligned}$$

□

Por lo que concluimos con el siguiente corolario que la aplicación inducida por  $f$  aplica ciclos en ciclos y bordes en bordes.

**Corolario 6.2.** *Tenemos que:*

$$(f_{\#})_p(Z_p(X)) \subseteq Z_p(Y)$$

$$(f_{\#})_p(B_p(X)) \subseteq B_p(Y)$$

*Demostración.* Veamos la primera contención.

Sea  $c$  un  $p$ -ciclo de  $X$ , queremos ver que  $(f_{\#})_p(c)$  es un  $p$ -ciclo de  $Y$ , es decir,  $\partial_p \left( (f_{\#})_p(c) \right) = 0$ .

Por definición de  $p$ -ciclo,  $\partial_p(c) = 0$ , luego, por el lema anterior tenemos que:

$$\partial_p \left( (f_{\#})_p(c) \right) = (f_{\#})_{p-1}(\partial_p(c)) = (f_{\#})_{p-1}(0) = 0$$

entonces  $(f_{\#})_p(c)$  es un  $p$ -ciclo de  $Y$ .

Para la segunda, sea  $d$  un  $p$ -borde de  $X$ , debemos probar que  $(f_{\#})_p(d)$  es un  $p$ -borde de  $Y$ .

Por definición de  $p$ -borde, existe un  $(p+1)$ -símplice singular,  $e$ , de  $X$ , tal que  $\partial_{p+1}(e) = d$ . Luego,

$$(f_{\#})_p(d) = (f_{\#})_p(\partial_{p+1}(e)) = \partial_{p+1} \left( (f_{\#})_{p+1}(e) \right)$$

concluimos que  $(f_{\#})_p(d)$  es un  $p$ -borde de  $Y$ . □

Por lo que, el resultado anterior implica la existencia de un homomorfismo entre los grupos de homología de los espacios  $X$  e  $Y$ , el cual definimos como:

**Definición 6.2.** *Se denomina homomorfismo inducido por la aplicación  $f$  a*

$$(f_*)_p : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$$

*definido como hemos hecho anteriormente:*

$$(f_*)_p \left( \sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = \sum_{j \in J} n_j (f \circ \varphi_j)$$

donde  $\sum_{j \in J} n_j \varphi_j$  es un  $p$ -ciclo de  $X$ .

**Definición 6.3 (Aplicaciones homótopas).** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas,  $f$  y  $g$  son homótopas;  $f \cong g$ , si existe una aplicación continua  $F : X \times I \rightarrow Y$  que cumple:

$$F(x, 0) = f(x), \text{ para todo } x \in X$$

$$F(x, 1) = g(x), \text{ para todo } x \in X$$

**Definición 6.4 (Aplicación entre pares).** Sean dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  y dos subespacios  $A \subset X$  y  $B \subset Y$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua tal que  $f(A) \subset B$  diremos que  $f$  es una aplicación entre pares,  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

**Definición 6.5 (Homotopía entre pares).** Sean dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  y dos subespacios  $A \subset X$  y  $B \subset Y$ . Dadas  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ,  $f$  y  $g$  son homótopas entre pares si  $f$  y  $g$  son homótopas a través de una homotopía,

$$F : (X \times I, A \times I) \longrightarrow (Y, B)$$

tal que,  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ .

### 6.3 Axiomas de Eilenberg-Steenrod

Veamos finalmente las propiedades de una Teoría de Homología, en concreto para la homología singular.

**Definición 6.6 (Teoría de Homología).** Una Teoría de Homología, es una familia de funtores covariantes,

$$H_p : TOP^2 \rightarrow GA$$

donde  $p \in \mathbb{Z}$  y  $GA$  la categoría de grupos abelianos. Junto con transformaciones naturales

$$\partial : H_p(X, A) \rightarrow H_{p-1}(A, \emptyset)$$

para cualquier  $p \in \mathbb{Z}$  y cualquier pareja de espacios  $(X, A)$  llamado homomorfismo de

conexión, satisfaciendo los axiomas de Eilenberg-Steenrod:

1. **Axioma de naturalidad:** Para cualquier aplicación  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, A) & \xrightarrow{f_p} & H_p(Y, B) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ H_{p-1}(A, \emptyset) & \xrightarrow{(f|_A)_{p-1}} & H_{p-1}(B, \emptyset) \end{array}$$

2. **Axioma de exactitud:** Para cualquier pareja de espacios  $(X, A)$  existe un complejo de cadenas

$$\cdots \rightarrow H_{p+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{p+1}} H_p(A, \emptyset) \xrightarrow{i_p} H_p(X, \emptyset) \xrightarrow{j_p} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_p} \cdots$$

donde  $i : (A, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$  y  $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  son las aplicaciones inclusión. Es un sucesión exacta.

3. **Axioma de homotopía:** Si  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  son aplicaciones homotópicas, entonces  $(f_*)_p = (g_*)_p : H_p(X, A) \rightarrow H_p(Y, B)$ .
4. **Axioma de escisión:** Si  $U$  es un abierto de  $X$ , y existe un abierto  $V$  tal que  $\bar{U} \subseteq V \subseteq A$ ; es decir, la adherencia de  $U$  está contenida en el interior de  $A$ . Entonces la inclusión  $j : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$  induce un isomorfismo

$$j : H_p(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_p(X, A)$$

para cada  $p \in \mathbb{Z}$ .

5. **Axioma de dimensión:** Sea  $P$  un espacio que consiste de un solo punto, entonces  $H_p(P) = 0$  para  $p \neq 0$ .

En ese caso  $H_p$  se denomina la homología de la pareja  $(X, A)$  con coeficientes en  $G = H_0(P)$  y es denotado por  $H_p(X, A; G)$ . Si  $G = \mathbb{Z}$ , escribimos solo  $H_p(X, A)$ .

Veamos que la homología singular es una teoría de homología. Primero, los dos resultados que enunciaremos sirven para probar que la homología singular es un funtor de la categoría de espacios topológicos en la categoría de grupos abelianos.

**Lema 6.3.** *Dados tres espacios topológicos  $X, Y$  y  $Z$  se tiene que,*

1. Si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  son dos aplicaciones continuas, entonces,  $((g \circ f)_*)_p = (g_*)_p \circ (f_*)_p : H_p(X) \rightarrow H_p(Z)$ , para todo  $p \geq 0$ .
2. Si  $Id : X \rightarrow X$  es la aplicación identidad,  $(Id_*)_p : H_p(X) \rightarrow H_p(X)$  es el homomorfismo identidad, para todo  $p \geq 0$ .

*Demostración.* 1. Vamos a escribir las expresiones de  $((g \circ f)_*)_p$  y de  $(g_*)_p \circ (f_*)_p$  y veamos que coinciden.

Sea  $\sum_{j \in J} n_j \varphi_j$  un  $p$ -ciclo de  $X$ , entonces:

$$((g \circ f)_*)_p \left( \sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = \sum_{j \in J} n_j (g \circ f \circ \varphi_j)$$

Por otro lado:

$$(g_*)_p \circ (f_*)_p \left( \sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = (g_*)_p \left( \sum_{j \in J} n_j (f \circ \varphi_j) \right) = \sum_{j \in J} n_j (g \circ f \circ \varphi_j)$$

Luego tenemos el resultado deseado:

$$((g \circ f)_*)_p = (g_*)_p \circ (f_*)_p$$

2. La segunda propiedad es trivial, ya que, dado un  $p$ -símplice singular,  $\varphi$ , es claro que  $Id \circ \varphi = \varphi$ . Así pues, sea  $\sum_{j \in J} n_j \varphi_j$  un  $p$ -ciclo de  $X$ , entonces:

$$(Id_*)_p \left( \sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = \sum_{j \in J} n_j (Id \circ \varphi_j) = \sum_{j \in J} n_j \varphi_j$$

□

**Corolario 6.4.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y sea  $f : X \rightarrow Y$  un homeomorfismo, entonces  $(f_*)_p : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$  es un isomorfismo de grupos, para todo  $p \geq 0$ .

Con los resultados anteriores, concluimos que la homología es un funtor de la categoría de parejas de espacio topológicos a los grupos abelianos. A continuación veremos que se cumplen los axiomas de *Eilenberg-Steenrod*.

**6.3.0.1 Axioma de naturalidad** Primero, como con los grupos de homología, veremos cuando una aplicación continua induce homomorfismos entre los grupos de homología relativa.

Consideremos  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ . Como vimos antes,  $f$  induce un homomorfismo,  $(f_\#)_p : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ , además como  $f$  es una aplicación entre pares cumple que  $f(A) \subset B$ , luego a  $C_p(A) \subset C_p(X)$  lo lleva al subgrupo  $C_p(B)$  de  $C_p(Y)$ , por lo que  $f$  induce un homomorfismo:

$$(f_\#)_p : C_p(X, A) \longrightarrow C_p(Y, B), \text{ para todo } p \geq 0$$

Aquí haremos un pequeño abuso de notación denotando igual a los dos homomorfismos. Este homomorfismo inducido también conmuta con el operador borde,  $\partial'_p$ . Lo probaremos igual que lo hicimos para los grupos de homología.

**Lema 6.5.** *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C_p(X, A) & \xrightarrow{(f_\#)_p} & C_p(Y, B) \\ \partial'_p \downarrow & & \downarrow \partial'_p \\ C_{p-1}(X, A) & \xrightarrow{(f_\#)_{p-1}} & C_{p-1}(Y, B) \end{array}$$

*es conmutativo.*

*Demostración.* Sea un  $p$ -símplice singular,  $\bar{\varphi} \in C_p(X, A)$ . Debido a cómo hemos definido  $\partial'_p$ , y el lema 5.1, donde están los cálculos para definir el homomorfismo inducido por una aplicación de grupos de homología, tenemos que:



$$\begin{aligned}
(\partial'_p \circ (f\#)_p)(\bar{\varphi}) &= \partial'_p \left( (f\#)_p(\bar{\varphi}) \right) = \partial'_p(\overline{f \circ \varphi}) \\
&= \overline{\sum_{i=0}^p (-1)^i \delta_i (f \circ \varphi)} = \overline{\sum_{i=0}^p (-1)^i f(\delta_i \circ \varphi)} \\
&= \overline{(f\#)_{p-1}(\partial_p(\varphi))} = (f\#)_{p-1} \circ \partial'_p(\bar{\varphi})
\end{aligned}$$

Tenemos que  $(f\#)_p(Z_p(X, A)) \subseteq Z_p(Y, B)$  y  $(f\#)_p(B_p(X, A)) \subseteq B_p(Y, B)$ , con lo que, existe el homomorfismo inducido por la aplicación continua de pares  $f$ ,

$$(f_*)_p : H_p(X, A) \longrightarrow H_p(Y, B)$$

□

Podemos concluir ahora el axioma de naturalidad, veamos que el diagrama (con la notación adecuada)

$$\begin{array}{ccc}
H_p(X, A) & \xrightarrow{(f_*)_p} & H_p(Y, B) \\
\partial'_p \downarrow & & \downarrow \partial'_p \\
H_{p-1}(A, \emptyset) & \xrightarrow{(f_*|_A)_{p-1}} & H_{p-1}(B, \emptyset)
\end{array}$$

conmuta; es decir, veamos que:

$$(f_*|_A)_{p-1} \circ \partial'_p = \partial'_p \circ (f_*)_p$$

Donde  $(f|_A)_{*p-1}$  es el homomorfismo inducido en homología por la restricción de  $f$  a  $A$ , es decir,  $f|_A : A \rightarrow B$ . Sea  $[\sigma] \in H_p(X, A)$ , es decir,  $\sigma$  es un  $p$ -ciclo relativo en  $C_p(X, A)$ , aplicando la aplicación borde:

$$\partial'_p[\sigma] = [\partial_p \sigma] \in H_{p-1}(A, \emptyset)$$

Si restringimos a  $A$ :

$$(f_*|_A)_{p-1}(\partial'_p[\sigma]) = (f_*|_A)_{p-1}[\partial_p \sigma] = [f|_A(\partial_p \sigma)]$$

Por otro lado, aplicamos  $(f_*)_p$  a  $[\sigma]$ :

$$(f_*)_p[\sigma] = [f(\sigma)] \in H_p(Y, B)$$

Luego el homomorfismo borde  $\partial'_p$  en  $H_p(Y, B)$ :

$$\partial'_p[f(\sigma)] = [\partial_p(f(\sigma))] \in H_{p-1}(B, \emptyset)$$

Como  $\partial_p$  conmuta con  $f$ , tenemos:

$$\partial'_p[f(\sigma)] = [f(\partial_p\sigma)] = (f_*|_A)_{p-1}(\partial'_p[\sigma])$$

Y tenemos la conmutatividad del diagrama.

### 6.3.0.2 Axioma de exactitud

**Teorema 6.6.** *La sucesión larga de homología relativa:*

$$\cdots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{(i_*)_p} H_p(X) \xrightarrow{(\pi_*)_p} H_p(X, A) \xrightarrow{(\partial_*)_p} H_{p-1}(A) \xrightarrow{(i_*)_{p-1}} \cdots$$

*es una sucesión exacta.*

*Demostración.* Queremos probar que  $\text{Im} \left( (i_*)_p \right) = \text{Ker} \left( (\pi_*)_p \right)$ ,  $\text{Im} \left( (\pi_*)_p \right) = \text{Ker} \left( (\partial_*)_p \right)$  e  $\text{Im} \left( (\partial_*)_p \right) = \text{Ker} \left( (i_*)_{p-1} \right)$ .

Vamos a ver solo  $\text{Im}((\pi_*)_p) = \text{Ker}((\partial_*)_p)$ , porque las otras dos igualdades se hacen de la misma forma.

- $\text{Im}(\pi_*)_p \subseteq \text{Ker}(\partial_*)_p$  :

Si  $\bar{z} \in \text{Im}(\pi_*)_p \subset H_p(X, A)$ . Por definición de imagen, existe  $z \in H_p(X)$ , tal que  $(\pi_*)_p(z) = \bar{z}$ . Como  $z$  es un  $p$ -ciclo, tenemos que  $\partial_p(z) = 0$  y por cómo hemos definido anteriormente  $(\partial_*)_p$ , tenemos que  $(\partial_*)_p(\bar{z}) = \partial_p(z) = 0$  y  $\bar{z} \in \text{Ker}(\partial_*)_p$ .

- $\text{Ker}((\partial_*)_p) \subseteq \text{Im}((\pi_*)_p)$  :

Tomamos  $\bar{z} \in H_p(X, A)$ , tal que  $(\partial_*)_p(\bar{z}) = 0$ . Entonces, dado  $z'$  un representante de la clase de  $z$  y  $z''$  un elemento de  $C_p(X)$  tal que  $(\pi_{\#})_p(z'') = z'$ ,  $\partial_p(z'') = 0$ , entonces  $z''$  es un  $p$ -ciclo de  $C_p(X)$ . Además como  $(\pi_{\#})_p(z'') = z'$ , si consideramos a  $\bar{z}'' \in H_p(X)$  como la clase de equivalencia cuyo representante es  $z''$  y  $\bar{z}' = \bar{z}$ ,

$$(\pi_*)_p(\bar{z}'') = \bar{z}' = \bar{z}$$

entonces  $\bar{z} \in \text{Im} \left( (\pi_*)_p \right)$ ,

□

**6.3.0.3 Axioma de homotopía** A continuación vamos a probar que dos aplicaciones homótopas inducen el mismo homomorfismo entre los grupos de homología singular, y luego pasaremos a los grupos de homología singular relativa.

**Lema 6.7.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas. Si  $f$  y  $g$  son homótopas, entonces  $(f_*)_p = (g_*)_p$ , para todo  $p \geq 0$ .

*Demostración.* Como  $f$  y  $g$  son homótopas, existirá una aplicación continua  $F : X \times I \rightarrow Y$ , tal que:

$$F(x, 0) = f(x), \text{ para todo } x \in X$$

$$F(x, 1) = g(x), \text{ para todo } x \in X$$

Sean  $i : X \rightarrow X \times I$  y  $j : X \rightarrow X \times I$  dadas por  $i(x) = (x, 0)$  y  $j(x) = (x, 1)$ , para todo  $x \in X$ . En términos de  $i$  y  $j$ , las condiciones de la homotopía se expresan como:

$$F \circ i = f$$

$$F \circ j = g$$

Supongamos  $(i_*)_p = (j_*)_p$ , entonces:

$$(f_*)_p = ((F \circ i)_*)_p = (F_*)_p \circ (i_*)_p = (F_*)_p \circ (j_*)_p = ((F \circ j)_*)_p = (g_*)_p$$

Con lo que para demostrar el resultado necesitamos probar  $(i_*)_p = (j_*)_p : H_p(X) \rightarrow H_p(X \times I)$ . En particular, veamos que para los homomorfismos:

$$(i_\#)_p, (j_\#)_p : C_p(X) \rightarrow C_p(X \times I)$$

existe un homomorfismo; el operador prisma,  $P$ :

$$P : C_p(X) \rightarrow C_{p+1}(X \times I)$$

tal que:

$$\partial_{p+1} \circ P + P \circ \partial_p = (j_\#)_p - (i_\#)_p$$

Cuando existe tal  $P$ , los homomorfismos  $(i_*)_p$  y  $(j_*)_p$  son *cadena homótopos* y  $P$  el *homotopía de cadenas*. Veámoslo más claro con el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p(X) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & \swarrow P & (i_\#)_p \downarrow (j_\#)_p & \swarrow P & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{p+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p(X \times I) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(X \times I) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Si  $(i_*)_p$  y  $(j_*)_p$  son cadena homótopos y  $c$  es un  $p$ -ciclo de  $X$ , entonces tenemos que:

$$(j_\#)_p(c) - (i_\#)_p(c) = \left( (j_\#)_p - (i_\#)_p \right)(c) = (\partial_{p+1}P + P\partial_p)(c) = \partial_{p+1}(P(c))$$

con lo que  $(j_\#)_p(c) - (i_\#)_p(c)$  es un  $p$ -borde, luego  $(j_\#)_p(c)$  y  $(i_\#)_p(c)$  son homólogos y entonces:

$$(j_*)_p = (i_*)_p$$

Así, basta demostrar que  $(j_*)_p$  y  $(i_*)_p$  son cadena homótopos, por lo que necesitamos

definir  $P$ .

Sea  $\varphi : \Delta_p \rightarrow X$  un  $p$ -símple singular de  $X$ . Para  $i \in \{0, 1, \dots, p\}$ , definimos  $P_i(\varphi)$  como el elemento de  $C_{p+1}(X \times I)$  dado por:

$$P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_{p+1}) = \left( \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{p+1}), 1 - \sum_{k=0}^i x_k \right)$$

Definimos  $P(\varphi) \in C_{p+1}(X \times I)$  como:

$$P(\varphi) = \sum_{i=0}^p (-1)^i P_i(\varphi)$$

Luego  $P$  es un homomorfismo de grupos.

Ahora escribimos  $\partial_{p+1}P(\varphi)$  como:

$$\partial_{p+1}P(\varphi) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \delta_j P(\varphi) = \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{i=0}^p (-1)^{i+j} \delta_j P_i(\varphi) \quad (*)$$

Trabajemos ahora con la expresión de  $\delta_j P_i(\varphi)$  distinguimos los siguientes casos:

Si  $i < j - 1$ :

$$\begin{aligned} \delta_j P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_p) &= P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_p) \\ &= \left( \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_p), 1 - \sum_{k=0}^i x_k \right) \\ &= \left( \delta_{j-1} \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_p), 1 - \sum_{k=0}^i x_k \right) \\ &= P_i \delta_{j-1}(\varphi)(x_0, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Si  $i > j$ :

$$\begin{aligned}
\delta_j P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_p) &= P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_p) \\
&= \left( \varphi(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, \dots, x_p), 1 - \sum_{k=0}^{i-1} x_k \right) \\
&= \left( \delta_j \varphi(x_0, \dots, x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, \dots, x_p), 1 - \sum_{k=0}^{i-1} x_k \right) \\
&= P_{i-1} \delta_j(\varphi)(x_0, \dots, x_p)
\end{aligned}$$

Si  $i = j$ :

$$\begin{aligned}
\delta_j P_j(\varphi)(x_0, \dots, x_p) &= P_j(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_p) \\
&= \left( \varphi(x_0, \dots, x_p), 1 - \sum_{k=0}^{j-1} x_k \right) \\
&= P_{j-1}(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_p) \\
&= \delta_j \circ P_{j-1}(\varphi)(x_0, \dots, x_p)
\end{aligned}$$

Por tanto: 
$$\begin{cases} \delta_j P_j = \delta_j P_{j-1} \\ \delta_j P_i = P_{i-1} \delta_j, & \text{si } i > j \\ \delta_j P_i = P_i \delta_{j-1}, & \text{si } i < j - 1 \end{cases}$$

Utilizando lo anterior y usando la expresión de  $\partial_{p+1} P$ , dada en la ecuación (\*):

$$\begin{aligned}
\partial_{p+1} \circ P &= \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{i=0}^p (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&= \delta_0 P_0 + \sum_{j=1}^p \sum_{i=j}^p (-1)^{i+j} \delta_j P_i + \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{j < i \leq p} (-1)^{i+j} \delta_j P_i + \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{0 \leq i < j} (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&= \delta_0 P_0 + \sum_{j=1}^p \delta_j P_j + \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{j < i \leq p} (-1)^{i+j} \delta_j P_i + \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{i=j-1} (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{0 \leq i < j-1} (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&= \delta_0 P_0 + \sum_{j=1}^p \delta_j P_j - \sum_{j=1}^p \delta_j P_{j-1} - \delta_{p+1} P_p + \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{j < i \leq p} (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{0 \leq i < j-1} (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&= \delta_0 P_0 - \delta_{p+1} P_p + \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{j < i \leq p} (-1)^{i+j} P_{i-1} \delta_j + \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{0 \leq i < j-1} (-1)^{i+j} P_i \delta_{j-1} \\
&= \delta_0 P_0 - \delta_{p+1} P_p + \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{i=j}^{p-1} (-1)^{i+j+1} P_i \delta_j + \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j+1} P_i \delta_j \\
&= \delta_0 P_0 - \delta_{p+1} P_p + \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+j+1} P_i \delta_j \\
&= \delta_0 P_0 - \delta_{p+1} P_p - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^p (-1)^{i+j} P_i \delta_j \\
&= \delta_0 P_0 - \delta_{p+1} P_p - P \circ \partial_p
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\delta_0 P_0(\varphi)(x_0, \dots, x_p) &= P_0(\varphi)(0, x_0, \dots, x_p) \\
&= (\varphi(x_0, \dots, x_p), 1) \\
&= (j_{\#})_p \varphi(x_0, \dots, x_p) \\
\delta_{p+1} P_p(\varphi)(x_0, \dots, x_p) &= P_p(\varphi)(x_0, \dots, x_p, 0) \\
&= (\varphi(x_0, \dots, x_p), 0) \\
&= (i_{\#})_p \varphi(x_0, \dots, x_p)
\end{aligned}$$

Finalmente  $P$  verifica:

$$\partial_{p+1} P + P \partial_p = (j_{\#})_p - (i_{\#})_p$$

Lo que demuestra, que  $(j_{\#})_p$  e  $(i_{\#})_p$  son cadena homótopos y por tanto que  $(j_*)_p = (i_*)_p$ , con lo que  $(f_*)_p = (g_*)_p : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$ .

□

Para la equivalencia homotópica de los grupos de homología relativa usaremos gran parte de la demostración hecha para grupos de homología.

**Teorema 6.8.** Sean  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  aplicaciones continuas y homótopas. Entonces  $(f_*)_p = (g_*)_p : H_p(X, A) \rightarrow H_p(Y, B)$ .

*Demostración.* Como ya probamos en el lema 5.6, existe un homomorfismo de grupos:

$$P_X : C_p(X) \longrightarrow C_{p+1}(X \times I)$$

Por definición, dada una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$ , el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
C_p(X) & \xrightarrow{P_X} & C_{p+1}(X \times I) \\
(f_{\#})_p \downarrow & & \downarrow ((f \times Id_I)_{\#})_p \\
C_p(Y) & \xrightarrow{P_Y} & C_{p+1}(Y \times I)
\end{array}$$

es conmutativo. Si escribimos  $P_X = \sum_{i=0}^p (-1)^i P_i^X$  y  $P_Y = \sum_{i=0}^p (-1)^i P_i^Y$ , tenemos que,



$$\begin{aligned}
& \left( (f \times Id_I)_{\#} \right)_p \circ P_i^X(\varphi)(x_0, \dots, x_{p+1}) \\
&= \left( f \circ \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{p+1}), 1 - \sum_{k=0}^i x_k \right) \\
&= P_i^Y(f \circ \varphi)(x_0, \dots, x_{p+1}) = P_i^Y \circ (f_{\#})_p(\varphi)(x_0, \dots, x_{p+1})
\end{aligned}$$

Así, tenemos que la restricción de  $P_X$  a  $C_p(A)$  es  $P_A$ . Probemoslo teniendo en cuenta que el anterior diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
C_p(A) & \xrightarrow{P_A} & C_{p+1}(A \times I) \\
(i_{\#})_p \downarrow & & \downarrow ((i \times Id_I)_{\#})_p \\
C_p(X) & \xrightarrow{P_X} & C_{p+1}(X \times I)
\end{array}$$

Como  $P_X \circ (i_{\#})_p = \left( (i \times Id_I)_{\#} \right)_p \circ P_A$ , tenemos que  $P_X|_{C_p(A)} = P_A$ , como queríamos. Entonces,  $P_X$  lleva  $C_p(A)$  en  $C_{p+1}(A \times I)$ , e induce así una homotopía de cadenas:

$$P_{X,A} : C_p(X, A) \longrightarrow C_{p+1}(X \times I, A \times I)$$

Como es inducida por  $P_X$ , tenemos que:

$$\partial'_{p+1} \circ P_{X,A} + P_{X,A} \circ \partial'_p = (j_{\#})_p - (i_{\#})_p$$

donde  $i : X \rightarrow X \times I$  y  $j : X \rightarrow X \times I$  están definidas por  $i(x) = (x, 0)$  y  $j(x) = (x, 1)$ .

Definimos  $P' : C_p(X, A) \rightarrow C_{p+1}(Y, B)$  como la composición de  $P_{X,A}$  y el homomorfismo inducido por la homotopía:

$$(F_{\#})_{p+1} : C_{p+1}(X \times I, A \times I) \longrightarrow C_{p+1}(Y, B)$$

En concreto, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{p+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C_p(X, A) & \xrightarrow{\partial'_p} & C_{p-1}(X, A) & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow & \swarrow P_{X,A} & (i_{\#})_p \downarrow (j_{\#})_p & \swarrow P_{X,A} & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & C_{p+1}(X \times I, A \times I) & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C_p(X \times I, A \times I) & \xrightarrow{\partial'_p} & C_{p-1}(X \times I, A \times I) & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow (F_{\#})_{p+1} & & \downarrow (F_{\#})_p & & \downarrow (F_{\#})_{p-1} & & \\
\cdots & \longrightarrow & C_{p+1}(Y, B) & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C_p(Y, B) & \xrightarrow{\partial'_p} & C_{p-1}(Y, B) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Veamos que  $P'$  es una homotopía de cadenas entre  $\{C_p(X, A)\}_p$  y  $\{C_p(Y, B)\}_p$ .

$$\begin{aligned}
\partial'_{p+1}(P') &= \partial_{p+1} \left( (F_{\#})_{p+1} \circ P_{X,A} \right) = (F_{\#})_p \circ \partial'_{p+1}(P_{X,A}) \\
&= (F_{\#})_p \left( (j_{\#})_p - (i_{\#})_p - P_{X,A} \circ \partial'_p \right) \\
&= ((F \circ j)_{\#})_p - ((F \circ i)_{\#})_p - (F_{\#})_p \circ P_{X,A} \circ \partial'_p \\
&= (f_{\#})_p - (g_{\#})_p - P' \circ \partial'_p
\end{aligned}$$

Entonces, como en el lema para grupos de homología,  $f$  y  $g$  son cadena homótopas, luego, los homomorfismos entre los grupos de homología relativa de ambas coinciden,  $(f_*)_p = (g_*)_p : H_p(X, A) \longrightarrow H_p(Y, B)$ , para todo  $p \geq 0$   $\square$

**6.3.0.4 Axioma de escisión** Su importancia radica en su capacidad para simplificar los cálculos al permitirnos 'cortar' un subespacio  $U$  de  $X$ , con lo que se reduce la complejidad del problema. La demostración de este axioma involucra una construcción sofisticada conocida como subdivisión baricéntrica. Se trata de que un símplice puede ser subdividido en símplices arbitrariamente pequeños que formen una cadena con el mismo soporte que el símplice de partida. Se puede encontrar una demostración del teorema junto a todos los otros conceptos que hay que abordar primero para hacerla en el libro A. Hatcher, Algebraic topology. Cambridge University Press, 2005 (página 119).

**6.3.0.5 Axioma de dimensión** La prueba de este axioma está en la sección 9, como un ejemplo de cálculo de la homología.

## 7 CW-COMPLEJOS

En esta sección definiremos los CW-complejos, un tipo de descomposición celular que puede ser usado para simplificar los cálculos de las homología. Estos espacios, que son una generación de los complejos simpliciales, se definen como una sucesión de subespacios, que se obtienen como adjunciones de celdas de los anteriores, empezando por un conjunto discreto de puntos. En este nombre, CW-complejo, C se refiere a la clausura finita (*Closure finite*), mientras que W se refiere a la topología débil (*Weak topology*).

**Definición 7.1 (Adjunción de un espacio).** Sean  $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$  dos espacios topológicos,  $A \subset X$  un subespacio cerrado y  $f : A \rightarrow Y$  una aplicación continua. Consideremos el espacio topológico  $X \cup Y$ , con la topología suma,

$$\tau_\Sigma = \{U \subset X \cup Y : U \cap X \in \tau_X, U \cap Y \in \tau_Y\}$$

En  $X \cup Y$  definimos la relación de equivalencia ,

$$a \sim_f y \text{ si, y sólo si, } y = f(a), \text{ para todo } a \in A$$

Entonces, tenemos el espacio cociente  $(X \cup_f Y, \tau_f) = X \sqcup Y / \sim$ , que se llama espacio de adjunción de  $(X, \tau_X)$  y de  $(Y, \tau_Y)$  por  $f$ , la aplicación de adjunción.

La adjunción de  $X$  e  $Y$  a través de  $f$  es el espacio topológico resultante de pegar  $X$  e  $Y$  identificando cada punto de  $A$  con su imagen por  $f$  en  $Y$ .

A partir de ahora, cambiaremos la notación para  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

$$U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

donde  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ , para  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 7.2 (n-celda).** Sea  $n \in \mathbb{Z}$ , llamamos  $n$ -celda o  $n$ -celda abierta a cualquier espacio topológico homeomorfo a  $U^n$ .

Aclararemos ahora como se hace la adjunción de celdas.

**Definición 7.3 (espacio adjuntando una  $n$ -celda).** Si tenemos un espacio  $Y$  y una aplicación  $g : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow Y$  continua, consideramos el espacio  $X = Y \cup_f \mathbb{D}^n$ . Tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow \\ \mathbb{D}^n & \xrightarrow{f} & X = Y \cup_f \mathbb{D}^n \end{array}$$

donde  $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^n$  es la inclusión del borde del disco. Construimos  $X$  tomando la unión disjunta de  $Y$  y  $\mathbb{D}^n$  e identificando los puntos del borde del disco con su imagen por  $g$  en  $Y$ . Diremos que  $X$  se obtiene del espacio  $Y$  adjuntando una  $n$ -celda.

La aplicación  $g$  se denomina *aplicación de adjunción de la celda*. Donde dicha celda es la imagen del disco en  $X$  y la denotamos  $\bar{e}^n = f(\mathbb{D}^n)$  y  $f$  se llama *aplicación característica de la celda*.

Observemos que la restricción de la aplicación característica al interior de  $\mathbb{D}^n$  es un homeomorfismo en su imagen (inyectiva, continua y de inversa continua) que denotaremos  $e^n$ . También,  $f(\mathbb{S}^{n-1}) = \bar{e}^n - e^n$ , ya que  $f(\mathbb{S}^{n-1})$  es disjunta de  $e^n$ , pero tiene que estar contenida en  $\bar{e}^n$ .

A partir de ahora, dado  $n \in \mathbb{N}$ , supondremos que  $X^*$  es un espacio topológico Hausdorff, y que  $X$  es un subconjunto cerrado de  $X^*$ , tal que  $X^* - X$  es una unión disjunta de  $n$ -celdas abiertas,  $e_\lambda^n$ , con  $\lambda \in \Lambda$ , denota el conjunto índice. Además, supondremos que cada  $e_\lambda^n$  está adjuntado a  $X$  mediante una aplicación característica; es decir, para cada  $\lambda \in \Lambda$ , existe una aplicación continua,

$$f_\lambda : \mathbb{D}^n \longrightarrow \bar{e}_\lambda^n$$

tal que  $f_\lambda$  manda a  $U^n$  de manera homeomorfa a  $e_\lambda^n$  y  $f_\lambda(\mathbb{S}^{n-1}) \subset X$ .

De esta manera, podemos ver a  $X^*$  como el espacio cociente del espacio de adjunción de  $X$  y  $\cup_{\lambda \in \Lambda} \bar{e}_\lambda^n$  por  $f_\lambda$ , respecto de la relación de equivalencia antes descrita.

**Definición 7.4 (CW-complejo).** Una estructura de CW-Complejo en un espacio topológico Hausdorff  $X$  es una sucesión ascendente de subespacios cerrados,

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. **Celdas de Dimensión 0:**  $X^0$  es un conjunto discreto de puntos; en particular, tiene la topología discreta.
2. **Adjunción de  $n$ -celdas:** Para cada  $n \geq 1$ ,  $X^n$  se obtiene a partir de  $X^{n-1}$  adjuntando un conjunto de  $n$ -celdas  $\{e_\lambda^n\}_{\lambda \in A_n}$  de la siguiente manera: (explicación detallada vista anteriormente)
  - Cada  $n$ -celda  $e_\lambda^n$  está adjunta a  $X^{n-1}$  mediante una aplicación continua  $f_\lambda$ .
  - El espacio  $X^n$  se define como el espacio cociente

$$X^n = \left( X^{n-1} \cup \bigcup_{\lambda \in A_n} e_\lambda^n \right) / \sim,$$

donde  $\sim$  identifica cada punto  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  en la frontera de  $\mathbb{D}^n$  con su imagen  $f_\lambda(x)$ .

3.  $X = \bigcup_i X^i$ .
4. **Topología Débil:**  $X$  tiene la topología débil inducida por la descomposición celular, es decir, un subconjunto  $U \subset X$  es abierto si y solo si  $U \cap X^n$  es abierto en  $X^n$  para cada  $n$ .

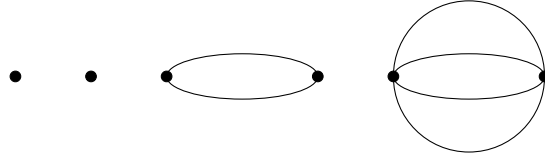
El conjunto de  $n$ -celdas  $\{e_\lambda^n\}$  en  $X$  se denota frecuentemente como  $X^n - X^{n-1}$ .

**EJEMPLOS:**

- Si  $K$  es un complejo simplicial, entonces  $|K|$  es un CW-complejo, un poliedro es usualmente representado como un CW-complejo con menos número de celdas que el número original de símlices.

- La circunferencia  $\mathbb{S}^1$  tiene una estructura de CW-complejo con una 0-celda  $e^0 = \{(1, 0)\}$  y una 1-celda  $e^1 = S^1 - e^0$ . Además, también podemos dotarla de otra estructura de CW-complejo con dos 0 -celdas y dos 1 -celdas.

Más en general, si identificamos el borde  $\partial e^n$  de la n-celda con un punto, tenemos que espacio cociente será homeomorfo a la n-esfera. Luego,  $\mathbb{S}^n$  tiene una estructura de CW-complejo con una 0-celda  $e^0 = \{(1, 0, \dots, 0)\}$  y una 1-celda  $e^1 = S^n - e^0$ . Podemos dar otra con dos 0-celdas, luego dos 1-celdas que forman  $\mathbb{S}^1$ , seguidamente dos 2 -celdas y forman  $\mathbb{S}^2$ , y así hasta construir  $\mathbb{S}^n$ .



**Figura 2:** Esferas como CW complejos.

- El espacio proyectivo real de dimensión n,  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ; conjunto de todas la rectas vectoriales que pasan por el origen de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , posee una estructura de CW-complejo como el cociente  $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ , donde  $\mathbb{Z}_2$  actúa sobre  $\mathbb{S}^n$  mediante la aplicación antipodal, así, cada punto de la esfera lo identificamos con su antípoda, es decir, identificamos  $x$  con  $-x$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^n$ . De esta manera, si definimos,

$$e_+^i = \{(x_0, \dots, x_i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n : x_i \geq 0\}$$

$$e_-^i = \{(x_0, \dots, x_i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n : x_i \leq 0\}$$

e identificamos  $e_i^+$  con  $e_i^-$ , para todo  $i = 0, \dots, n$ . Luego la estructura de CW-complejo de  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  consta de una i-celda, para todo  $i = 0, \dots, n$ .

**Definición 7.5 (Esqueleto de un CW-complejo).** Dado un CW-complejo  $X$ , definimos a  $X^n$  como el n-esqueleto de  $X$ . Definimos los esqueletos de orden negativo como  $K^n = \emptyset$  para todo  $n < 0$ .

## 7.1 Homología de los CW-complejos

Los grupos de homología de un CW-complejo  $X$  se calculan utilizando los grupos de cadenas formados por las celdas del complejo.

A continuación, definiremos un complejo de cadenas,  $C_n(X)$ , para  $n = 0, 1, \dots$ , como el grupo abeliano de n-cadenas celulares de  $X$ , el grupo abeliano libre con una base dada por las celdas  $\{e_\alpha^n\}_{\alpha \in A_n}$ .

$$C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}),$$

donde recordamos que nos referimos aquí a la homología relativa, y la aplicación borde,

$$d_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X),$$

que actúa sobre los elementos de la base como  $d_n(e_j^n) = \sum_{i \in A_{n-1}} c_{i,j}^n e_i^{n-1}$ , donde  $c_{i,j}^n$  son los *números de incidencia*, es decir, si  $f_j^n$  es la aplicación característica, se define  $c_{i,j}^n$  como el grado de la composición de  $\partial f_j^n : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  con la aplicación cociente  $X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_i^{n-1})$ , donde en este contexto el grado de composición es una medida algebraica de cuantas veces la frontera de una n-celda se 'envuelve' alrededor de las (n-1)-celdas de  $X$ . En concreto,  $d_n$  es la composición de los homomorfismos,

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{(\partial_*)_n} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{(\pi_*)_{n-1}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

donde  $(\partial_*)_n$  es el operador borde del par  $(X^n, X^{n-1})$  y  $(\pi_*)_{n-1}$  es el homomorfismo inducido por la aplicación,  $(\pi_\#)_n : C_n(X^{n-1}) \rightarrow C_n(X^{n-1}, X^{n-2})$ , para todo  $n$ . Todo esto está en la subsección 5.1 de homología relativa explicado para el caso general.

**Lema 7.1.** *La sucesión*

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

*es un complejo de cadenas, que llamaremos cadena de complejos celulares de  $X$ .*

*Demostración.* Veamos que  $d_{n-1} \circ d_n = 0$ , para todo  $n$ . Dado un  $n$ ,

$$d_{n-1} \circ d_n = (\pi_*)_{n-2} \circ (\partial_*)_{n-1} \circ (\pi_*)_{n-1} \circ (\partial_*)_n,$$

entonces, como es una sucesión exacta larga,

$$\cdots \longrightarrow H_{n-1}(X^n) \xrightarrow{(\pi_*)_{n-1}} H_{n-1}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{(\partial_*)_{n-1}} H_{n-2}(X^{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

$(\partial_*)_{n-1} \circ (\pi_*)_{n-1} = 0$ , con lo que  $d_{n-1} \circ d_n = 0$ , como queríamos, luego los grupos  $C_n(X)$  con las aplicaciones  $d_n$  forma un complejo de cadenas.  $\square$

Veremos otros lema previos a calcular los grupos de homología de los CW-complejos.

**Lema 7.2.** *El homomorfismo  $H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$  inducido por la inclusión,  $i : X^n \rightarrow X$  es un isomorfismo para  $k < n$  y suprayectivo para  $k = n$ .*

**Lema 7.3.** *Sea  $X$  un CW-complejo, entonces  $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$ , para todo  $k \neq n$  y  $H_m(X^n) = 0$ , si  $m > n$ .*

Una demostración de estos lema se pueden ver en *HATCHER, A.; Algebraic Topology. Cambridge University Press, Cambridge 2002* (páginas 137-139).

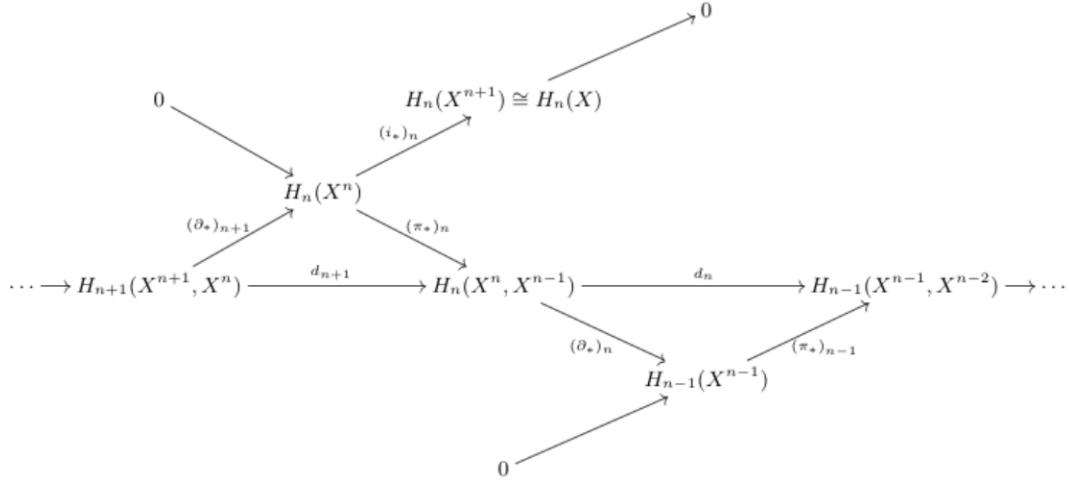
**Teorema 7.4 (Equivalencia entre homología celular y homología singular).**

*Con las notaciones anteriores tenemos,*

$$\text{Ker}(d_n) / \text{Im}(d_{n+1}) \cong H_n(X), \text{ para todo } n.$$

*Demostración.* Lo primero que haremos es considerar el siguiente diagrama, para ver más claramente lo que vamos a hacer.





Tenemos que por el lema anterior  $H_n(X^{n+1}, X^n) = 0$ , el homomorfismo  $(i_*)_n : H_n(X^n) \rightarrow H_n(X^{n+1})$  es suprayectivo, ya que está dentro de la sucesión exacta larga de  $(X^{n+1}, X^n)$ . De esta manera, usando la sucesión exacta larga y los teoremas de isomorfía, tenemos que,

$$H_n(X) \cong H_n(X^n) / \text{Im}(\partial_*)_{n+1}.$$

Como tenemos que  $H_n(X^{n-1}) = 0$  por el otro lema, si consideramos la sucesión exacta larga de  $(X^n, X^{n-1})$ , el homomorfismo,

$$(\pi_*)_n : H_n(X^n) \longrightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$$

es inyectivo, con lo que tenemos un isomorfismo,

$$\text{Im}(\partial_*)_{n+1} \cong \text{Im}((\pi_*)_n \circ (\partial_*)_{n+1}) = \text{Im}(d_{n+1}).$$

Además, de que  $(\pi_*)_n$  sea inyectivo se deduce también que,

$$H_n(X^n) \cong \text{Im}(\pi_*)_n = \text{Ker}(\partial_*)_n.$$

Tenemos también que la aplicación  $(\pi_*)_{n-1} : H_{n-1}(X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$

es inyectiva, ya que si usamos la sucesión exacta larga de  $(X^{n-1}, X^{n-2})$ , tenemos que  $H_{n-1}(X^{n-2}) = 0$ . Así pues, si razonamos de la misma forma tenemos que,

$$\text{Ker}(\partial_*)_n = \text{Ker}(d_n).$$

En resumen, hemos demostrado:

- $H_n(X) \cong H_n(X^n) / \text{Im}(\partial_*)_{n+1}$ .
- $\text{Im}(\partial_*)_{n+1} \cong \text{Im}(d_{n+1})$
- $H_n(X^n) \cong \text{Ker}(\partial_*)_n = \text{Ker}(d_n)$ .

Juntando todo, podemos concluir que,

$$H_n(X) \cong \text{Ker}(d_n) / \text{Im}(d_{n+1})$$

□

Gracias a este teorema podemos calcular los grupos de homología de los CW-complejos de una manera sencilla, con cuentas.

## 7.2 Ejemplo con CW-complejos

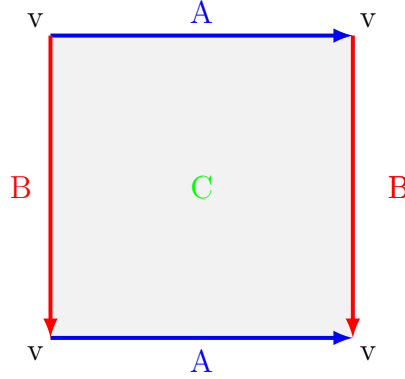
### 7.2.1 El toro

Tenemos representado el toro  $T = S^1 \times S^1$  por,

Consideramos el CW-complejo que representa al toro, construido a partir de un cuadrado, con una 0-celda,  $v$ , dos 1 celdas A,B y una 2-celda, el cuadrado, C. Denotamos  $X$  a este complejo, donde pegando las aristas A, tenemos un cilindro; luego si pegamos las B tenemos el toro completo. Vamos a calcular sus grupos de homología. Distingamos los siguientes casos:

Para  $n = 0$ :

- El grupo de cadenas celular de  $X$  es  $C_0(X) = \mathbb{Z}\langle v \rangle$  generado por  $v$ , ya que identificamos los 4 vértices cuando construimos el toro y  $\text{ker}d_0$  es  $C_0(X)$ .



**Figura 3:** Representación bidimensional del toro

- Tenemos que ver  $d_1(A) = c_{Av}v$  y  $d_1(B) = c_{Bv}v$ , como  $X^0 = v$ , el 0-esqueleto es un punto, los grados serán cero, luego como  $d_1 = 0$ ,  $\text{im } d_1 = 0$  y  $\text{ker } d_1 = C_1(X)$ .

Entonces,  $H_0(X) = \text{ker } d_0 / \text{im } d_1 = \mathbb{Z}$ .

Para  $n = 1$ :

- $C_1(X) = \mathbb{Z}\langle A \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle B \rangle$  generado por las dos 1-celdas A,B, obtenidas identificando los segmentos  $a, b, c, d$ .
- Para  $d_2$  veamos la imagen de  $C = e_\alpha^2$ ,

$$d_2(C) = c_{e_\alpha^2, A}A + c_{e_\alpha^2, B}B$$

El grado  $c_{e_\alpha^2, A}$  es el de la aplicación que se obtiene componiendo la aplicación adjunción de  $e_\alpha^2$ ,

$$\varphi_\alpha = f_\alpha|_{\mathbb{S}_\alpha^1} : \mathbb{S}_\alpha^1 \longrightarrow X^1$$

y la aplicación cociente,

$$q_A : X^1 \longrightarrow \mathbb{S}_A^1 \cong (A/\partial A)$$

Por construcción, los lados correspondientes a  $A$  tienen direcciones opuestas, con lo que,  $\varphi_\alpha$  manda  $\mathbb{S}_\alpha^1$  en  $A+B-A-B$ . Entonces, por la aplicación  $q_A$  (que colapsa

todo a  $A$ ),  $c_{e_{\alpha}^2, A}$  será el grado de la aplicación que manda  $\mathbb{S}_{\alpha}^{n-1}$  a  $A - A = 0$ , con lo que  $c_{e_{\alpha}^2, A} = 0$ . Con el mismo razonamiento, obtenemos lo mismo para  $B$ . Entonces  $d_2(C) = 0$  luego dado que  $d_2 = 0$ ,  $\text{im } d_2 = 0$ .

Entonces,  $H_1(X) = \ker d_1 / \text{im } d_2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Para  $n = 2$ :

- $C_2(X) = \mathbb{Z}\langle C \rangle$ , generado por el cuadrado,  $C$ ; en este caso,  $d_2 = 0$ , así que  $\ker d_2$  es todo  $C_2(X)$ .
- No hay celdas de dimensión 3, así que  $d_3 = 0$ .

Entonces,  $H_2(X) = \ker d_2 / \text{im } d_3 = \mathbb{Z}$ .

Para  $n > 2$ , no hay  $n$ -celdas adjuntadas al complejo, por lo que  $d_n = d_{n+1} = 0$ , lo que implica que  $H_n(X) = 0$  para  $n \geq 2$ .

En resumen:

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{para } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{para } n = 2 \\ 0 & \text{para } n > 2 \end{cases}$$

donde hemos considerado el complejo de cadenas,

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

## 8 LA DUALIDAD DE POINCARÉ

El principio de dualidad de Poincaré para variedades compactas establece una relación entre los grupos de homología y cohomología.

**Teorema 8.1.** *Sea una variedad  $M$  conexa, compacta y orientable de dimensión  $n$ , los grupos de homología y cohomología satisfacen la siguiente relación:*

$$H^p(M) \cong H_{n-p}(M)$$

donde  $H^p(M)$  denota el  $p$ -ésimo grupo de cohomología de  $M$ , y  $H_{n-p}(M)$  denota el  $(n-p)$ -ésimo grupo de homología de  $M$ .

Este teorema se generaliza a las variedades orientables, en lo que se llama, el *teorema de dualidad de Poincaré*. Hay una versión débil para grupos de homología y cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$ .

No probaremos este teorema pero se puede encontrar una prueba en la primera referencia de la bibliografía, resultado presentado en el libro "*Analysis Situs*" de *H.Poincaré*.

## 9 TEOREMA DE EULER

En esta sección, estudiaremos la característica de Euler de un poliedro desde un punto de vista homológico. El matemático suizo *Leonhard Euler* dio una fórmula matemática para comparar objetos geométricos, que relaciona los vértices  $V$ , el número de aristas  $E$  y el número de caras  $F$  de un poliedro, con una suma alternada para un poliedro tridimensional sería  $V - E + F = 2$ . Una generalización de esta fórmula fue dada por *Poincaré* para un poliedro general  $P$ ,  $\chi(P) = V - E + F$ .

**Definición 9.1.** Si  $X$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , homeomorfo a un poliedro  $K$ , la característica de Euler de  $X$  es  $\chi(X) = V_k - E_k + F_k$ .

*EJEMPLOS:*

- Si  $X$  es un punto,  $\chi(X) = 1$ .
- Si  $X$  es un segmento,  $\chi(X) = 2 - 1 = 1$ .
- $S^1$  es homeomorfo a un triángulo, entonces  $\chi(S^2) = 3 - 3 = 0$ .
- Si consideramos  $S^2$  homeomorfo a un tetraedro,  $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$ .
- $\chi(\text{cubo}) = 8 - 12 + 6 = 2$ .

**Teorema 9.1 (Teorema de Poincaré- Alexander).** La característica de Euler es independiente del poliedro  $K$  homomorfo a  $X$ .

En particular, si tenemos dos subconjuntos  $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ , si tienen características de Euler diferentes, no podrán ser homeomorfos. Por el contrario, dos subconjuntos no homeomorfos pueden tener la misma característica de Euler.

**Definición 9.2 (Característica de Euler de un complejo simplicial  $K$ ).** *Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión  $n$ , entonces definimos su característica de Euler como:*

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i(K)$$

donde  $\alpha_i(K)$  es el número de símplices de dimensión  $i$  en  $K$ .

**Definición 9.3 (Característica de Euler-Poincaré de un complejo de cadenas).**

*Sea  $C$  un complejo de cadenas finito denotamos por  $\beta_p$  la dimensión sobre  $\mathbb{Z}$  del espacio vectorial  $H_p(C)$ , el  $p$ -ésimo número de Betti de  $C$ .*

*Si los  $\beta_p$  son finitos para todo  $p$  y nulos para  $p$  lo suficientemente grande, entonces definimos*

$$\chi(C) = \sum_p (-1)^p \beta_p,$$

llamada la característica de Euler-Poincaré de  $C$ .

**Definición 9.4 (Número de Betti de un complejo simplicial).** *Sea  $K$  un complejo orientado, la dimensión de  $H_p(K)$  es llamada el  $p$ -ésimo número de betti del complejo  $K$ ,  $\beta_p(K)$ .*

*En concreto, una familia  $\{z_p^1, \dots, z_p^r\}$  de  $p$  ciclos es linealmente independiente con respecto a la homología, o linealmente independiente mod  $B_p(K)$ , si no existen enteros  $g_1, \dots, g_r$ , no todos ceros tales que la cadena  $\sum g_i z_p^i$  es homóloga a  $0$ . El entero más grande  $r$  para el cual existen  $r$   $p$ -ciclos linealmente independientes con respecto a la homología es el  $p$ -ésimo número de Betti del complejo  $K$ .*

Veremos ahora un lema para un complejo de cadenas general, y luego lo aplicaremos a un complejo de cadenas de grupos de homología de un complejo simplicial  $K$ .

**Lema 9.2.** *Sea*

$$0 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\ell_{n+1}} A_n \xrightarrow{\ell_n} A_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow 0$$

una secuencia de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. Entonces

$$\sum_n (-1)^n \dim A_n = \sum_n (-1)^n \lambda_n,$$

con

$$\lambda_n = \dim \ker \ell_n - \dim \operatorname{im} \ell_{n+1}.$$

*Demostración.* Si  $\ell : V \rightarrow W$  es una aplicación lineal entre espacios vectoriales, entonces  $\dim V = \dim \ker \ell + \dim \operatorname{im} \ell$ . Aplicando esto a la secuencia del lema,

$$\begin{aligned} \sum_n (-1)^n \dim A_n &= \sum_n (-1)^n (\dim \ker \ell_n + \dim \operatorname{im} \ell_n) \\ &= \sum_n (-1)^n (\dim \operatorname{im} \ell_{n+1} + \lambda_n + \dim \operatorname{im} \ell_n) \\ &= \sum_n (-1)^n \lambda_n, \end{aligned}$$

ya que los términos  $\dim \operatorname{im} \ell_n$  aparecen dos veces con signos opuestos en la suma alterna y por lo tanto se cancelan.  $\square$

**Teorema 9.3 (Teorema de Euler-Poincaré).** *Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión  $n$ , entonces:*

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i(K) = \sum_p (-1)^p \beta_p(K)$$

*Demostración.* El lema precedente proporciona directamente la demostración del Teorema considerando la secuencia

$$0 \longrightarrow \dots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow 0$$

de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, donde el 0 a la izquierda representa el  $C_p$  trivial para  $p = \dim K + 1$ , y el 0 a la derecha representa la imagen trivial de  $\partial_0$ . Esta secuencia es de la forma del lema. Además, usando la relación  $\dim V/W = \dim V - \dim W$  para espacios vectoriales  $V, W$  y por definición  $b_p =$

$\dim(\ker \partial_p / \text{im } \partial_{p+1})$ , obtenemos

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i(K) = \sum_p (-1)^p \beta_p(K)$$

La propiedad crucial  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$  y la definición de  $\beta_p(K)$  entran aquí para obtener la igualdad  $\dim \ker \partial_p = \dim \text{im } \partial_{p+1} + \beta_p(K)$ .

□

Veamos ahora la característica de Euler para un  $CW$ -complejo, como hemos definido el complejo de cadenas celular asociado a un  $CW$ -complejo  $X$ , podemos definir su característica de Euler como la del complejo celular asociado.

**Definición 9.5.** Si  $X$  es un  $CW$ -complejo, entonces

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \beta_n(X)$$

donde  $\beta_n(X) = \dim \frac{\ker d_n}{\text{im } d_{n+1}}$ .

## 10 CÁLCULOS PARA POLIEDROS, VARIEDADES TOPOLÓGICAS TRIANGULADAS

### 10.1 Un punto

En esta subsección veremos el cálculo de la homología singular para un punto, lo que se corresponde a probar el *Axioma de dimensión* para la homología singular.

La homología de un punto  $X = \{x\}$  la podemos calcular directamente, puesto que, para cada  $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , solo existe un  $p$ -símplice singular  $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow \{x\}$ . De modo que el grupo de  $p$ -cadenas singulares es  $C_p(X) = \{k\sigma_p : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ . El borde de este  $p$ -símplice singular es

$$\partial_p(\sigma_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \delta_i(\sigma_p) = \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i \right) \sigma_{p-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ impar} \\ \sigma_{p-1} & \text{si } p \text{ par y } p > 0 \end{cases}$$



Para el caso  $p = 0$ , tenemos que  $\delta_0(\sigma_0) = 0$ . Así pues, el complejo de cadenas singulares es

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sigma_{p-1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Tenemos entonces,

$$Z_p(X) = \begin{cases} C_p(X) & \text{si } p \text{ impar o } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \text{ par y } p > 0 \end{cases}$$

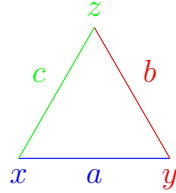
$$B_p(X) = \begin{cases} C_p(X) & \text{si } p \text{ impar} \\ 0 & \text{si } p \text{ par o } p > 0 \end{cases}$$

Luego  $H_p(x) = 0$ , salvo en el último caso en que  $H_0(x) = \mathbb{Z}$ .

## 10.2 Triángulo en el plano euclidiano

Consideremos un triángulo en el plano euclidiano. Vamos a calcular su grupo de homología. Veremos los dos caso, el del triángulo hueco (el *esqueleto* del triángulo) y el del triángulo con su interior.

En el primer caso,



lo representaremos por el complejo simplicial orientado  $K = \{a = \langle xy\hat{z} \rangle, b = \langle \hat{x}yz \rangle, c = \langle z\hat{y}x \rangle, x, y, z\}$ , no tenemos ningún 2-símplice. Nos quedará el siguiente complejo de cadenas,

$$\dots 0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

En donde,  $C_2(K) = 0$  ya que no tenemos ningún 2-símplice,  $C_1(K) = \mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , dado que las 1-cadenas (aristas) se generan por la base  $a, b, c$  y por último  $C_0(K) = \mathbb{Z}^3$ , por estar generado por  $x, y, z$ .

Veamos ahora los operadores borde:

$\partial_0 = 0$  ya que envía todo al cero.

$\partial_1$  se define como  $a \rightarrow y - x$ ,  $b \rightarrow z - y$ ,  $c \rightarrow x - z$ , en donde hemos aplicado la definición de aplicación borde para los 1-símplices.

$\partial_2 = 0$ , ya que  $C_2(K) = 0$ .

Ahora, utilizando la definición de homología simplicial  $H_p(K) = \frac{Z_p}{B_p} = \frac{\ker \partial_p}{\text{Im} \partial_{p+1}}$ ,  $p \geq 0$ .

- Para  $p = 0$ ,

$\ker \partial_0 = C_0(K) = \langle x, y, z \rangle$ , ya que todo va al cero.

$\text{Im} \partial_1 = \langle y - x, z - y, x - z \rangle$ , por definición.

Entonces,

$$H_0(K) = \frac{\langle x, y, z \rangle}{\langle y - x, z - y, x - z \rangle}$$

En donde por definición de espacio cociente, estamos identificando los generadores de  $B_1(K)$  con el cero, lo que resulta en  $x = y = z$ , tenemos un grado de libertad, todo elemento entonces de  $H_0(K)$  es de la forma  $nx + B_0$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , luego  $H_0(K) = \mathbb{Z}$ .

De otra forma,

$$H_0(K) = \frac{\langle x, y, z \rangle}{\langle y - x, z - y, x - z \rangle} = \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}^2} = \mathbb{Z}$$

ya que  $x = y - z$ , tenemos dos grados de libertad.

- Para  $p = 1$ ,

Para calcular  $\ker \partial_1$ , veamos todas las combinaciones lineales de  $a, b, c$  que por el operador borde van al cero, luego sean  $l, m, n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\partial_1(la + mb + nc) = l(y - x) + m(z - y) + n(x - z) = (n - l)x + (l - m)y + (m - n)z = 0$$

Entonces,  $l = m = n$ ,  $Z_1(K) = \langle a + b + c \rangle \cong \mathbb{Z}$ .

Ahora,  $\text{Im} \partial_2 = 0$ , al no existir ningún 2-símplice.

Entonces, por definición de grupo cociente:

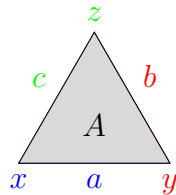
$$H_1(K) = \mathbb{Z}$$

- Para  $p \geq 2$ ,

$$H_p(K) = 0$$

Ya que todos los grupos de cadenas para  $p \geq 2$ , son cero, y el grupo cociente cero entre cero es el cero.

Consideramos ahora el segundo caso, donde consideramos el interior del triángulo; es decir, tenemos un 2-símplice,  $A$ .



Definimos el complejo simplicial orientado  $K' = \{a = \langle xy\hat{z} \rangle, b = \langle \hat{x}yz \rangle, c = \langle z\hat{y}x \rangle, x, y, z, A = \langle xyz \rangle\}$  y tendremos el siguiente complejo de cadenas,

$$\cdots C_3(K') \xrightarrow{\partial_3} C_2(K') \xrightarrow{\partial_2} C_1(K') \xrightarrow{\partial_1} C_0(K') \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Lo único que cambia es  $C_2(K') = \mathbb{Z}$ , tenemos un 2-símplice.

Por lo que directamente  $H_0(K') = \mathbb{Z}$ .

Para  $p = 1$ ,  $Z_1(K') = \langle a + b + c \rangle$ , pero  $B_2(K') = \text{Im} \partial_2 = \langle a + b + c \rangle$ , ya que  $\partial_2(A) = \langle \hat{x}yz \rangle - \langle x\hat{y}z \rangle + \langle xy\hat{z} \rangle = b + c + a$ .

Luego,

$$H_1(K') = 0$$

Para  $n = 2$  tenemos que  $\text{Im} \partial_3 = 0$ , ya que  $C_3(K') = 0$  y  $\ker \partial_2 = 0$ , porque  $\partial_2(A) = b + c + a = 0$ . Luego  $H_2(K') = 0$ .

Por último, para  $p > 2$ ,  $H_p = 0$ , dado que  $C_p(K') = 0$ .

Podemos utilizar estas dos distinciones para calcular los grupos de homología del disco y de  $S^1$ , el primero se puede triangularizar por  $K'$  y el segundo por  $K$ ; por lo que ya tenemos también sus grupos de homología.

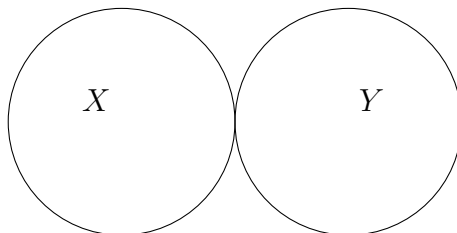
Podríamos habernos ahorrado estos cálculos, sabiendo lo que representa cada grupo de homología, por ejemplo,  $H_0$  mide la conectividad del espacio, como solo hay una componente conexa,  $H_0(K) = H_0(K') = \mathbb{Z}$ . Por otra parte, para medir los agujeros de dimensión 1, utilizamos  $H_1$ , en  $K$  tenemos un agujero, luego  $H_1(K) = \mathbb{Z}$ , por el contrario  $K'$ , no tiene ningún agujero,  $H_1(K') = 0$ .

### 10.3 Unión disjunta de dos circunferencias

Para calcular los grupos de homología singular de un espacio topológico unión disjunta de dos circunferencias,  $Z$ , aplicaremos el teorema 4.3 . Al aplicar dicho teorema para este caso sencillo tenemos que:

$$H_p(Z) \cong H_p(X) \oplus H_p(Y)$$

para todo  $p \geq 0$ .



Sabemos que para cada circunferencia  $H_0 = H_1 = \mathbb{Z}$  y  $H_p = 0$  si  $p \geq 2$ , luego;

$$H_0(Z) = \mathbb{Z}^2 \quad (\text{dos componentes conexas})$$

$$H_1(Z) = \mathbb{Z}^2 \quad (\text{dos agujeros})$$

$$H_p(Z) = 0 \quad p \geq 2$$

### 10.4 Cálculos para las esferas

En este caso, vamos a utilizar la secuencia de Mayer-Vietoris para calcular los grupos de homología de una esfera  $\mathbb{S}^k$ , con  $k \neq 0$ . Éste no es el único método, pero simplifica

los cálculos.

**Teorema 10.1 (Teorema de Mayer-Vietoris).** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $U, V$  dos abiertos contenidos en  $X$  tales que  $X = U \cup V$ . Entonces la sucesión:*

$$\cdots \rightarrow H_p(U \cap V) \xrightarrow{\phi} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{\psi} H_p(X) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

es exacta.

Con ello recordamos que nos referimos a que es un complejo de cadenas donde la imagen del morfismo anterior es igual al núcleo del siguiente. También existe una aplicación de este resultado para la cohomología, pasando al dual.

*Demostración.* Sea  $C_p(X)$  el grupo abeliano libre generado por el conjunto de los  $p$ -símplices en  $X$ , consideramos el subgrupo  $C_p(A + B)$ , cuyos elementos son sumas de cadenas en  $A$  y en  $B$ . Tenemos el complejo de cadenas  $(C(X), \delta)$  dado por

$$\cdots \xleftarrow{\delta_0} C_0(X) \xleftarrow{\delta_1} C_1(X) \xleftarrow{\delta_2} C_2(X) \xleftarrow{\delta_3} \cdots,$$

donde  $\delta_p : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$  es la aplicación frontera. La cual podemos restringir a  $C_p(A + B)$  con llegada a  $C_{p-1}(A + B)$ . Por lo que también tenemos el complejo de cadenas  $(C(A + B), \delta)$  dado por

$$\cdots \xleftarrow{\delta_0} C_0(A + B) \xleftarrow{\delta_1} C_1(A + B) \xleftarrow{\delta_2} C_2(A + B) \xleftarrow{\delta_3} \cdots,$$

Ahora, sabemos que sucesión de inclusiones  $\iota_p : C_p(A + B) \hookrightarrow C_p(X)$  para cada  $p$  define una sucesión de aplicación homotópicas entre  $(C(X), \delta)$  y  $(C(A + B), \delta)$ . Gracias a lo que, obtenemos los isomorfismos entre los grupos de homología  $H_p(A + B) \cong H_p(X)$  para todo  $p$ . Luego, para  $p \geq 0$ , consideramos la sucesión,

$$0 \rightarrow C_p(A \cap B) \xrightarrow{\alpha} C_p(A) \oplus C_p(B) \xrightarrow{\beta} C_p(A + B) \rightarrow 0,$$

donde  $\alpha : x \mapsto (x, -x)$  y  $\beta : (x, y) \mapsto x + y$ .

$\alpha$  es inyectiva y  $\beta$  es suprayectiva por definición de  $C_p(A + B)$ .

$$(\beta \circ \alpha)(x) = 0 \Rightarrow \text{Im}(\alpha) \subset \ker(\beta).$$

Por último, si  $(x, y) \in \ker(\beta)$ , entonces  $x \in C_p(A), y \in C_p(B)$  y  $x = -y \Rightarrow x \in C_p(A \cap B)$  y  $\alpha(x) = (x, -x) = (x, y) \Rightarrow \ker(\beta) \subset \text{Im}(\alpha)$ .

Por lo que es, una cadena exacta corta.

Finalmente, aplicando la sucesión exacta larga en homología a la correspondiente sucesión exacta corta de complejos de cadenas, utilizando el isomorfismo en grupos de homología  $H_p(A + B) \cong H_p(X)$  para todo  $p$ , y que la homología conmuta con la suma directa, tenemos el resultado.  $\square$

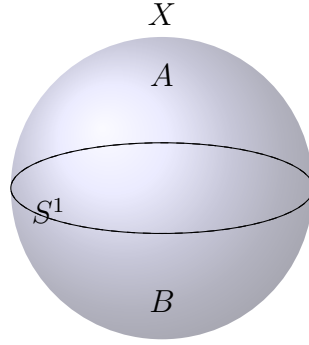
Donde las aplicaciones entre los grupos de homología en la sucesión de Mayer-Vietoris son las siguientes:

- $\phi : H_p(A \cap B) \rightarrow H_p(A) \oplus H_p(B) : x \mapsto (f(x), g(x))$  involucra la aplicación  $f : H_p(A \cap B) \rightarrow H_p(A)$  y  $g : H_p(A \cap B) \rightarrow H_p(B)$  inducida por las inclusiones  $A \cap B \hookrightarrow A$  y  $A \cap B \hookrightarrow B$ .
- $\psi : H_p(A) \oplus H_p(B) \rightarrow H_p(X) : (y, z) \mapsto i(y) - j(z)$  involucra la aplicación  $i : H_p(A) \rightarrow H_p(X)$  y  $j : H_p(B) \rightarrow H_p(X)$  inducida por las inclusiones  $A \hookrightarrow X$  y  $B \hookrightarrow X$ .
- $\delta : H_p(X) \rightarrow H_{p-1}(A \cap B)$  es la aplicación borde usual.

### Homología Singular de la Esfera $S^k$ :

Consideramos  $H_p(S^k)$  de la  $k$ -esfera  $X = S^k$ ,  $p, k \geq 0$ .  $H_p(S^k) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  para  $p = k = 0$ , ya que hemos calculado los grupos de homología de un punto y utilizando el teorema 4.3. Por otra parte,  $H_p(S^k) \cong \mathbb{Z}$  para  $p = 0, k > 0$  ya que  $S^k$  tiene una componente conexa para  $k > 0$ .

Sean  $k \geq 1$ ,  $A$  el hemisferio superior de  $X$  y  $B$  el hemisferio inferior de  $X$ . Entonces, para  $k \geq 1$ , como  $A \cap B = S^{k-1}$ , el ecuador de la esfera  $S^k$ . Veamos una visualización para  $k = 2$ .



Esfera  $X$  en  $\mathbb{R}^3$ , con  $A$  y  $B$  sus hemisferios y  $S^1$  como intersección

$A$  y  $B$  son contráctiles ya que cada uno de ellos es homeomorfo a un punto en el espacio, por ejemplo en el polo norte y sur. Por lo tanto,  $H_0(A) \cong H_0(B) \cong \mathbb{Z}$ ; esto es una consecuencia directa de la invarianza topológica de la homología y obtenemos la sucesión de Mayer-Vietoris siguiente,

$$0 \rightarrow H_{p+1}(S^k) \rightarrow H_p(S^{k-1}) \rightarrow 0,$$

que  $H_{p+1}(S^k) \cong H_p(S^{k-1})$ , por ser una cadena exacta. Este isomorfismo completará la caracterización de los grupos de homología de las esferas, cuando hayamos hecho la homología de grado 1 para una esfera general de dimensión  $k \geq 1$ . Gracias a la sucesión de Mayer-Vietoris, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow H_1(S^k) \rightarrow H_0(S^{k-1}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_0(S^k) \rightarrow 0.$$

Para  $k > 1$ ,

$$0 \rightarrow H_1(S^k) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

entonces  $H_1(S^k) = 0$ , por ser esta una cadena exacta, mientras que para  $k = 1$ , tenemos  $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Finalmente, es sencillo ver  $H_1(S^0) \cong 0$ . Por lo que ya tenemos

caracterizados los grupos de homología de las  $k$ -esferas como sigue:

$$H_p(S^k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0, k > 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = k, k > 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } p = k = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Cohomología Singular de la Esfera  $S^k$ :** Se puede calcular utilizando la dualidad de Poincaré. Dado que  $S^k$  es una variedad compacta y orientable, la dualidad de Poincaré establece que  $H^p(S^k)$  es isomorfo a  $H_{k-p}(S^k)$ . Tenemos:

$$H^p(S^k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0, k > 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = k, k > 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } p = k = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



## 11 GRUPOS DE HOMOTOPÍA

En esta sección daremos unas nociones generales de la Teoría de Homotopía, que posteriormente nos será de utilidad para relacionar la homotopía y la homología. Los grupos de homotopía debido a la dificultad de calcularlos se desconocen por ejemplo para muchas esferas, es por ello que resulta interesante relacionarlos con los grupos de homología. La referencia utilizada aquí será el capítulo 4 de A. Hatcher, Algebraic topology. Cambridge University Press, 2005., en donde se puede ver esta teoría de manera detallada.

Para esta sección consideramos  $I = [0, 1]$ , con la topología usual.

**Definición 11.1 (Homotopía entre aplicaciones continuas).** Sean  $X, Y$  espacios topológicos,  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas. Diremos que  $f$  es homotópico a  $g$  si existe una aplicación continua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$  para cualquier  $x \in X$ .

A la aplicación  $H$  se denomina una homotopía entre  $f$  y  $g$ , denotado por  $f \simeq g$ .

Para cada  $0 \leq t \leq 1$  se denota  $H(x, t)$  por  $H_t(x)$  que da origen a una familia de aplicaciones continuas  $H_t : X \rightarrow Y$ .

Se puede interpretar esto como una deformación continua de la aplicación  $f$  en  $g$ .

**Definición 11.2 (Nulo homotópico).** Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  se denomina nulo homotópico si  $f$  es homotópico a una aplicación constante.

**Definición 11.3 (Homotopía relativa).** Sea  $A$  un subconjunto de  $X$  y  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas. Diremos que  $f$  es homotópico a  $g$  relativo a  $A$ , denotado por  $f \simeq g \text{ rel } A$  si existe una homotopía

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

tal que

$$H(x, 0) = f(x), \quad \text{para todo } x \in X$$

$$H(x, 1) = g(x), \quad \text{para todo } x \in X$$

$$H(a, t) = f(a) = g(a), \quad \text{para todo } a \in A, t \in I$$

Si  $A = \emptyset$ ,  $f \simeq g \text{ rel } A$  es equivalente a  $f \simeq g : X \rightarrow Y$ .

**Definición 11.4 (Nulo homotópico relativo).** Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  se denomina nulo homotópico relativo a  $A$  si  $f$  es homotópico a una aplicación constante relativo a  $A$ .

**Lema 11.1.** La homotopía relativa a  $A$  es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones de  $X$  en  $Y$ .

*Demostración.* Sean  $f$  y  $g$  dos aplicaciones continuas de  $X$  en  $Y$  y  $A$  un subconjunto de  $X$ . Veamos que la homotopía relativa a  $A$  cumple la definición de una relación de equivalencia:

1. *Reflexiva:*  $f \simeq f \text{ rel } A$ , si definimos  $H : X \times I \rightarrow Y$  por  $H(x, t) = f(x)$ .
2. *Simétrica:* Si  $f \simeq g \text{ rel } A$  por  $H$ , veamos que  $g \simeq f \text{ rel } A$ , en efecto, definamos

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

por

$$F(x, t) = H(x, 1 - t).$$

es una homotopía relativa a  $A$  entre  $g$  y  $f$ .

3. *Transitiva:* Si  $f \simeq g \text{ rel } A$  por  $H$  y  $g \simeq h \text{ rel } A$  por  $F$ , veamos  $f \simeq h \text{ rel } A$  por  $G$ , si definimos

$$G : X \times I \rightarrow Y$$

por

$$G(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ F(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$G$  es continua y está bien definida, puesto que la restricción a cada uno de los conjuntos cerrados  $X \times [0, \frac{1}{2}]$  y  $X \times [\frac{1}{2}, 1]$  es continua, y para  $t = 1/2$ ,  $H(x, 2t) = H(x, 1) = g(x) = F(x, 0) = F(x, 2t - 1)$ . Por lo que  $G$  establece una homotopía relativa a el subconjunto  $A$  entre  $f$  y  $h$ .

□

Las clases de equivalencia se denominan *clases de homotopía relativa a A*. Denotamos por  $[X, Y]_A$  al conjunto de las clases de homotopía. Dado  $f : X \rightarrow Y$ ,  $[f]_A$  denota un clase del conjunto  $[X, Y]_A$  determinada por  $f$ .

**Lema 11.2.** Sean  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  homotópicos relativos a  $A \subset X$  y  $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$  homotópicos relativos a  $B \subset Y$  tal que  $f_0(A) = f_1(A) \subseteq B$ , entonces  $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 \text{ rel } A$ .

*Demostración.* Sean  $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A$  por  $H$  y  $g_0 \simeq g_1 \text{ rel } B$  por  $G$ , si consideramos la composición

$$F(x, t) = G(H(x, t), t)$$

, de la aplicación de  $X \times Y$  en  $Y \times I$  que lleva  $(x, t)$  en  $(H(x, t), t)$ , de componentes continuas, con  $G$ , luego es continua, obtenemos el resultado. □

**Definición 11.5.** Un espacio con punto base es un espacio topológico  $X$  con un punto fijo elegido  $x_0 \in X$  llamado punto base.

**Definición 11.6.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios con punto base  $x_0, y_0$  respectivamente. Una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  preserva punto base si  $f(x_0) = y_0$ .

**Definición 11.7.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios con punto base  $x_0, y_0$  respectivamente y  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones que preservan punto base,  $f$  es homotópico a  $g$  si  $f \simeq g \text{ rel } x_0$ . El conjunto de las clases de equivalencia de aplicaciones que preservan punto base de  $X$  en  $Y$  por la relación de homotopía relativa al punto base  $x_0$  se denotan  $[X, Y]_{x_0}$ . Para cualquier aplicación que preserva punto base  $f : X \rightarrow Y$ ,  $[f]_{x_0}$  denota la clase de homotopía determinada por  $f$ .

**Teorema 11.3.** Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. La aplicación continua  $f : S^n \rightarrow Y$  es nulo homotópico.
2. Existe una aplicación continua  $F : D^{n+1} \rightarrow Y$  tal que  $F|_{S^n} = f$ .
3. Sea  $p_0$  un punto arbitrario de  $S^n$ ,  $f : S^n \rightarrow Y$  es nulo homotópico relativo a  $p_0$ .

*Demostración.* 1. (1)  $\Rightarrow$  (2)

Sea  $c : S^n \rightarrow Y$ ,  $c(y) = y_0$  para todo  $y \in S^n$ . Como  $f$  es nulo homotópico, existe una homotopía  $H$  tal que  $f \simeq c$  y  $H(y, 0) = f(y)$  y  $H(y, 1) = c(y) = y_0$  para todo  $y \in S^n$ . Definamos

$$F(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ H\left(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1. \end{cases}$$

Como  $H(y, 1) = y_0$ ,  $F$  está bien definida y es continua pues la restricción a cada uno de los conjuntos cerrados  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2}\}$  y  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$  es continua. Como  $H(y, 0) = f(y)$  para todo  $y \in S^n$ ,

$$F|_{S^n} = f$$

2. (2)  $\Rightarrow$  (3)

Para  $f : S^n \rightarrow Y$  por (2) existe  $F : D^{n+1} \rightarrow Y$  tal que  $F|_{S^n} = f$ . Definamos una homotopía  $H : S^n \times I \rightarrow Y$  por

$$H(x, t) = F((1-t)x + tp_0)$$

tenemos  $H(x, 0) = F(x) = f(x)$  y  $H(x, 1) = F(p_0)$  para  $x \in S^n$ . Como  $H(p_0, t) = F((1-t)p_0 + tp_0) = F(p_0)$  para  $t \in I$ ,  $H$  es una homotopía relativo a  $\{p_0\}$  de  $f$  a una aplicación constante.

3. (3)  $\Rightarrow$  (1) es inmediato.

□

Podemos definir así la *categoría homotópica de espacios con punto base* como la categoría cuyos objetos son espacios con punto base y los morfismos las clases de homotopía  $[f]$ , donde el lema 10.2 garantiza que la composición definida por  $[f]_{x_0} \circ [g]_{x_0} = [f \circ g]_{x_0}$  está bien definida.

**Definición 11.8 (n-ésimo grupo de homotopía).** *El n-ésimo grupo de homotopía*

de un espacio  $X$  con punto base  $x_0$   $\Pi_n(X, x_0)$  es definido por

$$\Pi_n(X, x_0) = [S^n, X]_{x_0}$$

para  $n \geq 0$ .  $\Pi_0(X, x_0)$  no es un grupo en general,  $\Pi_1(X, x_0)$  se denomina grupo fundamental de  $X$ .

Puede surgir la pregunta de si cambiamos el punto base de un espacio topológico cambia el grupo fundamental, la respuesta general es sí, es fundamental concretar el punto base. En el caso particular de que el espacio sea conexo por caminos y tenemos dos puntos base  $x_0$  y  $x_1$  los podemos conectar por un camino; en donde nos referiremos con este nombre a una aplicación continua  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\sigma(0) = x_0$  y  $\sigma(1) = x_1$ , en ese caso podemos hablar simplemente de  $\pi_1(X)$ .

Dado un camino  $\sigma$  en  $X$ , se puede definir el camino inverso  $\sigma^{-1} : [0, 1] \rightarrow X$  por  $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1 - t)$ . Concretaremos ahora la aplicación que induce la estructura de grupo para el grupo fundamental, esta aplicación recorre dos caminos de manera consecutiva al doble de velocidad.

Si  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son dos caminos tales que  $\sigma_1(1) = \sigma_2(0)$ , definimos la *concatenación de caminos*,  $\sigma_1 * \sigma_2$ , por:

$$(\sigma_1 * \sigma_2)(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma_2(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Induce la estructura de grupo en el grupo fundamental, que se define como el conjunto cociente de los lazos de  $X$  en  $x_0$ , módulo la relación de homotopía relativa a  $\{0, 1\}$  será el conjunto de las clases de homotopía de lazos en  $x_0$ , nos referimos a un lazo en  $x_0$  a los caminos  $\sigma$  tales que  $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$ . Se puede encontrar una demostración de la estructura de grupo en el libro citado previamente.

**Definición 11.9 (Espacio simplemente conexo).** *Un espacio  $X$  es simplemente conexo si es conexo por caminos y su grupo fundamental es trivial.*

## 11.1 Relación entre homotopía y homología

Veremos ahora que el primer grupo de homología de un espacio  $X$  conexo por caminos resulta ser el abelianizado de su primer grupo de homotopía. Para esta sección, nos hemos guiado por Boothby, W. M. (1975). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, Orlando, en el teorema 8.3.

**Definición 11.10 (Conmutador de un grupo).** Para cualquier grupo  $G$ , se define el conmutador de  $G$  como el menor subgrupo  $[G, G]$  de  $G$  que contiene  $S = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\}$ . Se dice que  $[G, G]$  es el subgrupo generado por  $S$ . Si  $G$  es conmutativo  $[G, G] = 1$ . El conmutador es el conjunto de elementos que "deberían" ser 1 para que el grupo  $G$  fuera conmutativo.

El grupo cociente  $G/[G, G]$  es un grupo conmutativo que se llama el *abelianizado* de  $G$ , se trata del cociente de un grupo no conmutativo.

**Lema 11.4.** Si  $G$  es un grupo y  $w$  una palabra de  $G$  tal que para cada  $g \in G$  los exponentes de  $g$  en  $w$  suma cero entonces  $w \in [G, G]$ .

*Observación 11.5.* Podemos entender una aplicación  $f : [0, 1] \rightarrow X$ , como un camino o como un 1-símplice singular, en el primer caso tenemos un representante del grupo fundamental si  $f(0) = f(1) = x_0$ , si y solo si,  $f$  es un 1-ciclo en  $C_1(X)$ , entonces lo podemos representar también como un elemento de  $H_1(X)$ .

**Teorema 11.6 (Teorema de Hurewicz).** Sea  $X$  un espacio conexo por caminos, si definimos  $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$ , la aplicación de Hurewicz, que lleva la clase de homotopía de un camino  $\gamma$  basado en  $x_0$  en la clase de homología del 1-símplice singular  $\gamma$ , se verifica que:

1.  $h$  es suprayectiva.
2.  $\text{Ker}(h)$  es el subgrupo conmutador de  $\pi_1(X, x_0)$ , es decir;

$$[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] = \langle aba^{-1}b^{-1} : a, b \in \pi_1(X, x_0) \rangle,$$

entonces  $h$  induce un isomorfismo entre  $H_1(X; \mathbb{Z})$  y el grupo abelianizado de

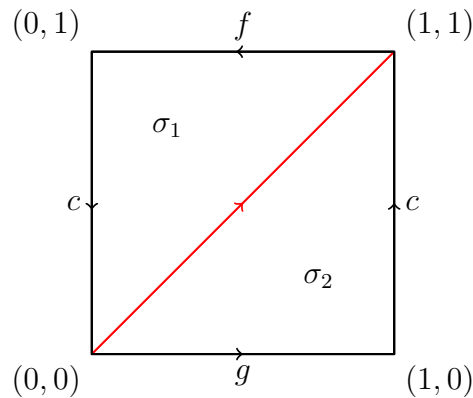
$$\pi_1(X, x_0),$$

$$\pi_1(X, x_0)^{ab} := \pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

*Demostración.* Aclaremos primero la notación usaremos  $f \simeq g$  para los caminos homótopos en el grupo fundamental, y  $f \sim g$  para homólogos en el grupo de homología.

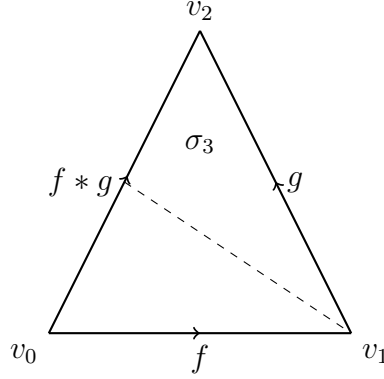
Veamos primero que si  $f$  es un lazo en  $x_0$  constante, entonces  $f$  es homólogo al 0. Para ver que algo es trivial en homología, veamos que es una frontera de un 2-símplice singular. Sea  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$ , cuya imagen es  $f(0)$ , entonces  $\partial_2(\sigma) = f - f + f = f$

Ahora, si  $f \simeq g$  lazos en  $x_0$ , veamos que  $f \sim g$ . Por definición existe una homotopía  $F : [0, 1]^2 \rightarrow X$ . Tomamos el cuadrado unidad y lo dividimos de la siguiente manera, para obtener dos 2-símplices:



Donde como  $F$  es un homotopía  $c$  representa una aplicación constante, y tenemos que  $\partial(\sigma_1 + \sigma_2) = g - f + c - c$ , entonces  $f \sim g$ .

Tomemos ahora la concatenación de dos lazos, y veremos que  $f * g \sim f + g$ . Si tenemos el siguiente 2-símplice  $\sigma_3$ :



Entonces  $\partial(\sigma_3) = f + g - f * g$ .

Por lo que  $h$  está bien definida y es un homomorfismo. Tenemos como consecuencia que  $f^{-1} \sim -f$ , donde recordamos que  $f^{-1}$  es el camino inverso a  $f$ . Ya que  $f * f^{-1} \simeq c \sim f + f^{-1} \sim 0$ .

A continuación, probemos la suprayectividad de  $h$ .

Sea  $[\lambda] \in H_1(X)$ ,  $\lambda = \sum_{j=1}^l n_j \sigma_j$ ,  $\sigma_j : \Delta^1 \rightarrow X$ . Por ser representante de una clase  $\partial(\lambda) = 0 = \sum_{j=1}^l n_j (\sigma_j(1) - \sigma_j(0))$ . Consideramos el conjunto de puntos  $S = \{\sigma_j(1), \sigma_j(0)\}$  y para cada  $p \in S$ , escogemos un camino  $\beta_p : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\beta_p(0) = x_0$  y  $\beta_p(1) = p$ . De esta manera, si reescribimos la suma anterior considerando  $m_p$  como la suma de todos los coeficientes de  $p$ , tenemos que:

$$\sum_{j=1}^l n_j (\sigma_j(1) - \sigma_j(0)) = \sum_{p \in S} m_p p = 0$$

Entonces, necesariamente  $m_p = 0$  para todo  $p \in S$ .

Si consideramos  $\eta_j = \beta_{\sigma_j(0)} * \sigma_j * \beta_{\sigma_j(1)}^{-1}$  obtenemos un lazo en  $x_0$ , para todo  $j \in$

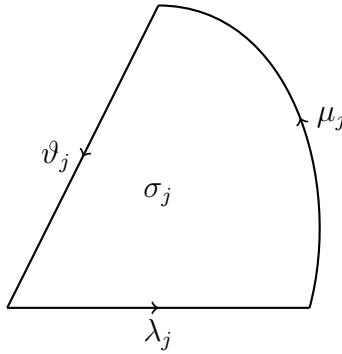


$\{1, 2, \dots, l\}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
h([\eta_1^{n_1} * \eta_2^{n_2} * \dots * \eta_l^{n_l}]_{\pi_1(X, x_0)}) &= \left[ \sum_{j=1}^l n_j \eta_j \right]_{H_1(X)} \\
&= \left[ \sum_{j=1}^l n_j (-\beta_{\sigma_j(1)} + \sigma_j + \beta_{\sigma_j(0)}) \right]_{H_1(X)} \\
&= \left[ \sum_{j=1}^l n_j (\beta_{\sigma_j(0)} - \beta_{\sigma_j(1)}) + \sum_{j=1}^l n_j \sigma_j \right]_{H_1(X)} \\
&= \left[ \sum_{j=1}^l n_j (\beta_{\sigma_j(0)} - \beta_{\sigma_j(1)}) + \sum_{j=1}^l n_j \sigma_j \right]_{H_1(X)} \\
&= \left[ - \sum_{p \in S} m_p \beta_p + \sum_{j=1}^l n_j \sigma_j \right]_{H_1(X)} \\
&= [\lambda]_{H_1(X)}
\end{aligned}$$

Por último, veamos el  $\ker h$ . Si  $h[\gamma] = 0$ ; es decir,  $\gamma \sim 0$ , queremos ver que  $\gamma$  es un producto de conmutadores, veámoslo utilizando el lema anterior.

Como  $\gamma \sim 0$ , existe  $\sum_{j=1}^l n_j \sigma_j$ ,  $\sigma_j : \Delta^2 \rightarrow X$ , tal que  $\partial(\sum_{j=1}^l n_j \sigma_j) = \gamma$ . Luego  $\sum_{j=1}^l n_j \partial(\sigma_j) = \sum_{j=1}^l n_j (\lambda_j + \mu_j + \vartheta_j)$ , dado que son 2-símplices singulares.



Consideramos el conjunto  $S' = \{1\text{-símplices distintos de la lista } \{\lambda_j, \mu_j, \vartheta_j\}_j\}$ , y para cada punto distinto de un 1-símplice,  $p$ , fijamos un camino  $\beta_p$  de  $x_0$  a  $p$ . Para cada

$\Theta \in S'$ , denotamos por  $m_\Theta$  el coeficiente de  $\Theta$  en la suma  $\sum_{j=1}^l n_j (\lambda_j + \mu_j + \vartheta_j)$ .

Entonces,  $m_\Theta = 1$  si  $\Theta = \gamma$  y 0 en otro caso. Para cada 2-símplice  $\sigma_j$  consideramos los

tres lazos:

$$\beta_{\lambda_j(0)} * \lambda_j * \beta_{\lambda_j(1)}^{-1} \tag{**}$$

$$\beta_{\mu_j(0)} * \mu_j * \beta_{\mu_j(1)}^{-1}$$

$$\beta_{\vartheta_j(0)} * \vartheta_j * \beta_{\vartheta_j(1)}^{-1}$$

Si los concatenamos obtenemos  $\sigma_j$ , luego su concatenación es homotópica a un lazo constante. Formamos ahora el lazo  $\eta_1^{n_1} * \eta_2^{n_2} * \dots * \eta_l^{n_l} * \gamma^{-1} \sim \gamma^{-1}$ . Por otro lado, si escribimos cada  $\eta_j$  en términos de (\*\*) para cada  $\Theta \in S'$ , el factor  $\beta_{\Theta(0)} * \Theta * \beta_{\Theta(1)}^{-1}$  aparece con exponentes sumando  $m_\Theta$ , entonces por el lema la clase de  $\gamma^{-1}$  está en el

subgrupo multiplicador y por lo tanto la clase de  $\gamma$  también. Por lo que  $\ker h \subset [\pi_1, \pi_1]$ , además como,  $H_1(X)$  es abeliano y  $h$  es un homomorfismo  $[\pi_1, \pi_1] \subset \ker h$ .

□

Como consecuencia del teorema de Hurewicz, se pueden calcular el grupo fundamental de una manera más sencilla, por ejemplo:

1.  $\pi_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$
2.  $\pi_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
3. si  $X$  es simplemente conexo, entonces  $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$ .

## 12 ESFERAS DE POINCARÉ

Dedicamos esta sección a las esferas de Poincaré, variedades topológicas que tienen la misma homología que una esfera estándar. En otras palabras, son variedades topológicas que tienen la misma estructura de agujeros y cavidades que una esfera ordinaria, aunque pueden tener formas geométricas distintas. Se utilizan en modelos teóricos de la geometría del espacio-tiempo, en la teoría de la relatividad, en la teoría de cuerdas, etc. En particular, hay algunos científicos, que suponen que el universo tiene la forma de una esfera de Poincaré.

Este concepto es importante en el estudio de la topología y la geometría diferencial, ya que proporciona una manera de clasificar y entender las propiedades topológicas de diferentes variedades.

**Definición 12.1 (Esfera de homología de Poincaré o espacio dodecaédrico de Poincaré).** *Sea  $n \geq 1$ , una variedad  $X$  cerrada orientable y sin frontera, tal que sus grupos de homología satisfacen:*

$$H_k(X) = H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0 \text{ o } k = n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*se denomina esfera homológica de Poincaré o espacio dodecaédrico de Poincaré.*

Por lo que  $X$  es un espacio conexo, cuyo número de Betti mayor es,  $b_n = 1$ .

### 12.1 Construcción explícita de esferas de Poincaré no triviales

En esta sección veremos una construcción explícita de la esfera de Poincaré y calcularemos sus grupos de homotopía y homología.

En el dodecaedro de Poincaré los pentágonos están curvados y cada uno de ellos se corresponde a su opuesto formando un endosado en el espacio, tal que al salir por una de las caras se está entrando por el lado opuesto de la otra.

Formalmente, partimos de un dodecaedro  $P$ , el sólido platónico formado por 12 caras, 30 aristas y 20 vértices, y homeomorfo a la bola cerrada en  $\mathbb{R}^3$ . Consideramos el espacio topológico en el cual identificamos las caras del dodecaedro que son opuestas. Es

decir, el espacio cociente con 6 caras, donde las 6 transformaciones que identifican las caras son la composición de una traslación y una rotación (en todas utilizamos el mismo ángulo de giro a través del eje siempre en el mismo sentido  $\alpha \in \{\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{-\pi}{5}, \frac{-3\pi}{5}, \}$ ).

Denotaremos este espacio cociente como  $V(\alpha) = \frac{P}{\sim}$ . Donde,  $V(\alpha) \cong V(-\alpha)$  y  $V(\pi) \cong \mathbb{R}P^3$ , el espacio proyectivo tridimensional real.

Estas dos afirmaciones son fáciles a demostrar, para la primera,  $V(-\alpha)$  se corresponde a la rotación en la dirección opuesta; descompongamos  $S^3$  en dos bolas idénticas (imágenes una de la otra por una inversión  $\iota$  de  $S^3$ ) pegadas a lo largo de su borde, y consideremos  $P$  no como un dodecaedro abstracto sino como una descomposición poliédrica particular de una de estas bolas, la segunda,  $\iota(P)$ , que hereda entonces una estructura dodecaédrica coincidiendo en el borde con la primera. Las identificaciones de caras de  $P$  correspondientes al ángulo  $\alpha$  están conjugadas por  $\iota$  a las identificaciones de caras de  $\iota(P)$  correspondientes al ángulo  $-\alpha$ . El homeomorfismo buscado entre  $V(\alpha)$  y  $V(-\alpha)$  es, por lo tanto, el paso al cociente de  $\iota$  por estas identificaciones.

Para la segunda afirmación, con el ángulo  $\pi$ , estamos identificando cada vértice con su antípoda. La idea es el uso de la proyección estereográfica desde  $\mathbb{R}^3$  al plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$ , luego la extendemos para incluir el punto de infinito y tendremos el homeomorfismo entre  $V(\pi)$  y  $\mathbb{R}P^3$ .

Al final, los dos casos a considerar serán  $V(\frac{\pi}{5})$  y  $V(\frac{3\pi}{5})$ . Veremos que  $V(\frac{\pi}{5})$  es justamente el espacio dodecaédrico de Poincaré. No estudiaremos  $V(\frac{3\pi}{5})$ , aunque también es una variedad, se llama el *espacio dodecaédrico de Seifert–Weber*.

Primero, volvamos al caso general donde  $P \subset \mathbb{R}^3$  es un poliedro de dimensión 3 y sean  $F_1, \dots, F_k$  sus caras. Sea

$$\iota : \{F_1, \dots, F_k\} \rightarrow \{F_1, \dots, F_k\}$$

una involución sin puntos fijos tal que, para todo  $i$ , las caras  $F_i$  y  $\iota(F_i)$  tienen el mismo número de lados. Para cada  $i$ , sea  $f_i : F_i \rightarrow \iota(F_i) = F_j$  un homeomorfismo tal que  $f_j = f_i^{-1}$ .

**Definición 12.2 (relación de pegado "gluing").** Se llama pegado a la relación de equivalencia sobre  $P$  generada por  $x \sim y$  si y solo si existe un entero  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $x$  está en la cara  $F_i$ ,  $y$  está en la cara  $\iota(F_i)$  y  $y = f_i(x)$ . Se llama espacio poliédrico de  $P$  al espacio topológico  $[P]$  obtenido como cociente de  $P$  por la relación de equivalencia dada.

**Teorema 12.1.** Un espacio de identificación  $[P]$  es una 3-variedad topológica si y solo si su característica de Euler-Poincaré

$$\chi([P]) = v - e + f - t$$

es nula. Donde  $v$  es el número de vértices,  $e$  el número de aristas,  $f$  el número de caras y  $t$  el número de elementos de dimensión 3.

*Demostración.* La necesidad de la condición es una consecuencia inmediata de la dualidad de Poincaré.

Recíprocamente, podemos pasar por una etapa preliminar, que no es necesaria, pero ayuda en la demostración. Podemos suponer que todo poliedro puede ser descompuesto en tetraedros. Notemos que la descomposición no altera la característica de Euler-Poincaré.

Ahora, por definición de variedad, necesito que cada punto en  $V$  tenga un entorno homeomorfo a  $\mathbb{B}^3$ ; la bola abierta en dimensión 3. Basta con probar esta condición para los vértices; ya que al pasar al cociente solo identificamos los vértices exteriores del poliedro, no los puntos interiores, los cuales ya tienen un entorno con las características pedidas. Para los puntos en las caras, también tenemos un entorno, que será la mitad de una bola, y cuando lo pegamos se convierte en una bola. Para los puntos en los segmentos, la situación es un poco más complicada, un entorno será constituido por productos de intervalos por un pegado por sectores angulares, lo que es homeomorfo a un disco, el cual es homeomorfo a una bola en dimensión tres.

Entonces, para los vértices,  $s \in V$  basta entonces tener para todo  $s$  que  $e_s - f_s + t_s = 2$ , donde con  $s$  nos referimos a adyacente a  $s$ . Consideremos el entorno  $O_s$  como la unión

de las adherencias de los elementos de dimensión 3 adyacentes a  $s$ ; es decir la unión de tetraedros que tiene un vértice común,  $s$ . Veamos la característica de Euler del borde de  $O_s$ , que es  $e_s - f_s + t_s$ .

Equivalentemente, veremos  $\sum_s e_s - f_s + t_s = 2v$ , es aquí donde utilizamos el hecho de haber descompuesto  $P$  en tetraedros ya que cada arista es adyacente a 2 vértices; es decir  $\sum_s e_s = 2e$ , cada cara es un triángulo, luego adyacente a 3 vértices,  $\sum_s f_s = 3f$  y cada elemento de dimensión 3 es un tetraedro, luego adyacente a 4 vértices,  $\sum_s t_s = 4t$ . Entonces,

$$2e - 3f + 4t = 2v$$

$$0 = 2(v - e + f - t) + (f - 2t)$$

Donde  $f - 2t$ , es automáticamente nulo ya que cada elemento de dimensión 3 en  $P$  es un tetraedro, luego tiene 4 caras. Pero hemos identificado las caras y no los tetraedros. Por lo que tenemos el resultado pedido.

Dado que la proyección  $P \rightarrow$  es de fibra finita y  $P$  es claramente separado,  $[P]$  también es separado. Observamos fácilmente que los puntos de  $[P]$  que son imágenes de puntos de  $P$  que se encuentran en el interior de  $P$ , o en el interior de una cara, o en el interior de un lado, tienen un vecindario homeomorfo a una bola en  $\mathbb{R}^3$ . Los únicos puntos que pueden causar problemas son las imágenes de los vértices de  $P$ . Un vecindario lo suficientemente pequeño de dicho punto en  $[P]$  es homeomorfo al cono sobre su enlace y es homeomorfo a una bola si y solo si su enlace es una 2-esfera y, por lo tanto, tiene una característica de Euler igual a 2. Consideremos una triangulación de  $P$  y la triangulación inducida de  $[P]$  que tiene  $v$  vértices,  $e$  lados,  $f$  caras y  $t$  tetraedros. La característica de Euler de  $[P]$  es entonces  $\chi([P]) = v - e + f - t$ , que es igual a 0 por hipótesis. También observamos que  $f = 2t$  ya que cada tetraedro tiene cuatro caras y cada cara es adyacente a dos tetraedros. Ahora consideramos un vértice  $s$  de  $[P]$ : la característica de Euler de su enlace es  $e_s - f_s + t_s$ , donde  $e_s$  es el número de aristas adyacentes al vértice  $s$ ,  $f_s$  es el número de caras y  $t_s$  es el número de tetraedros. Si sumamos  $e_s - f_s + t_s$  sobre todos los vértices  $s$ , obtenemos  $\sum_s e_s = 2e$ , ya que cada arista es adyacente a dos vértices,  $\sum_s f_s = 3f$ , ya que cada cara es adyacente a

tres lados, y  $\sum_s ts = 4t$ , ya que cada tetraedro es adyacente a cuatro caras. Se sigue que  $\sum_s es - fs + ts = 2e - 3f + 4t$  y Por tanto  $0 = 2(v - e + f - t) + (f - 2t) = 2v - \sum_s es - fs + ts$ . Dado que el enlace es una superficie topológica debido a que sus puntos tienen vecindades euclidianas, tenemos que  $es - fs + ts \leq 2$  para todo  $s$ . Teniendo en cuenta que el número de vértices  $s$  es precisamente  $v$ , se deduce que  $es - fs + ts = 2$  para todo vértice  $s$ , lo que concluye la demostración. Se puede observar que la necesidad de la condición también se desprende de las igualdades (1) y (2) utilizadas para mostrar la suficiencia, sin necesidad de recurrir a la dualidad de Poincaré.  $\square$

**Corolario 12.2.** *Luego  $V(\frac{\pi}{5})$  es una 3-variedad, orientable y sin borde.*

*Demostración.* Al pasar al cociente, tenemos 1 elemento de dimensión 3 (el poliedro), 6 caras, como una arista corresponde a dos caras, hay dos transformaciones que influyen sobre ella, cada clase de aristas se identifican 3, entonces tenemos 10 clases de aristas. Notemos que las aristas de una cara del dodecaedro están necesariamente en clases distintas, podemos tomar entonces como representantes de las clases, las cuatro aristas de una misma cara pentagonal. Finalmente, para los vértices, cada uno pertenece a 3 caras distintas, por lo que cada clase de vértices se identifican 4, por lo que tenemos 5 clases de vértices. También los 5 vértices de una cara pentagonal forman 5 clases de vértices distintas,  $\{O, P, QR, S\}$ . Por tanto:

$$\chi(V(\frac{\pi}{5})) = -5 + 10 - 6 + 1 = 0$$

$\square$

### 12.1.1 Grupo Fundamental del espacio dodecaédrico de Poincaré

Para esta parte, hemos admitido un resultado que afirma, si tenemos una 3-variedad obtenida a partir de identificaciones en el borde de un poliedro sólido, entonces sus grupos fundamentales son isomorfos. Este resultado se encuentra en el epígrafe del libro H. Seifert and W. Threlfall, A textbook of topology. Academic Press, 1980.

Para el espacio dodecaédrico tenemos la siguiente representación. La red de bordes

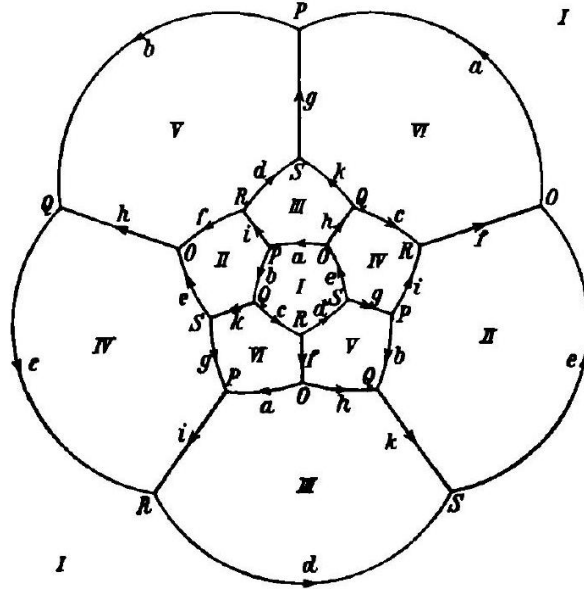


Figura 4

del dodecaedro, que determina completamente el espacio, se dibuja en la Figura 4 . Seleccionamos  $O$  como el punto inicial de los caminos cerrados y seleccionamos los caminos  $a, h, f^{-1}, f^{-1}d$  como caminos auxiliares que conducen a los vértices  $P, Q, R, S$ , respectivamente. Las clases de caminos generadores del grupo fundamental estarán representadas por los caminos cerrados, las 10 aristas de la figura 4,

$$\begin{aligned}
 A &= aa^{-1}, & B &= abh^{-1} \\
 C &= hcf, & D &= f^{-1}dd^{-1}f \\
 E &= f^{-1}de, & F &= f^{-1}f \\
 G &= f^{-1}dga^{-1}, & H &= hh^{-1} \\
 J &= aif, & K &= hkd^{-1}f
 \end{aligned}$$

Si los lados derechos de las ecuaciones anteriores en letras mayúsculas en lugar de minúsculas, obtenemos  $A = D = F = H = 1$  y las relaciones restantes se vuelven triviales.

Al recorrer los pentágonos obtenemos las siguientes seis relaciones:



$$\begin{aligned}
ABCDE &= 1 \\
BKEF^{-1}J^{-1} &= 1 \\
AJDK^{-1}H^{-1} &= 1 \\
CJ^{-1}G^{-1}EH &= 1 \\
BH^{-1}F^{-1}DG &= 1 \\
AG^{-1}K^{-1}CF &= 1
\end{aligned}$$

La eliminación de  $G$  y  $K$  da

$$\begin{aligned}
BCE &= 1, \\
BJEJ^{-1} &= 1, \\
CJ^{-1}BE &= 1, \\
BJ^{-1}C &= 1.
\end{aligned}$$

De la primera y la cuarta de estas relaciones obtenemos

$$E = C^{-1}B^{-1}, \quad J = CB.$$

Usando estos para eliminar  $E$  y  $J$  de la segunda y tercera relaciones, obtenemos

$$BCBC^{-1} \cdot B^{-2}C^{-1} = 1 \tag{I}$$

y

$$CB^{-1}C^{-1}BC^{-1}B^{-1} = 1 \tag{II}$$

Veamos si la 3-esfera coincide o no con el espacio dodecaédrico examinamos si los grupos fundamentales de estos espacios difieren. Para ello, transformamos (I) y (II). Colocamos (II) en (I) en la posición indicada por el punto en (I) y obtenemos la relación

$$BCBC^{-1} \cdot CB^{-1}C^{-1}BC^{-1}B^{-1} \cdot B^{-2}C^{-1} = 1,$$

o, haciendo las simplificaciones pertinentes,

$$B^2 C^{-1} B^{-3} C^{-1} = 1$$

Al introducir un nuevo generador  $U$  en (I) y (II), donde  $U$  se define como  $C = U^{-1}B$ , obtenemos

$$\begin{aligned} B^2 \cdot B^{-1}U \cdot B^{-3} \cdot B^{-1}U &= 1, \\ U^{-1}B \cdot B^{-1} \cdot B^{-1}U \cdot B \cdot B^{-1}U \cdot B^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

o

$$B^4 = UBU, \quad U^2 = BUB$$

finalmente

$$\pi_1(P) = \langle B, U \mid B^5 = (BU)^2 = U^3 \rangle \quad (\text{III})$$

Reconocemos a partir de las relaciones (III) que el espacio dodecaédrico no es homeomorfo a la 3-esfera, ya que el grupo fundamental no consiste solo en el elemento unidad.

Las relaciones (III) son satisfechas por el grupo icosaédrico, si se interpreta  $B$  como una rotación de  $2\pi/5$  radianes alrededor de un vértice del icosaedro y se interpreta  $U$  como una rotación de  $2\pi/3$  radianes, con el mismo sentido de rotación, alrededor del punto medio de un triángulo adyacente a ese vértice.

En concreto el grupo obtenido es el denominado *grupo binario icosaedral*. Veamos que su abelianizado es trivial; es decir, es un *grupo perfecto*.

**Lema 12.3.**  $\pi_1(P)$  es perfecto.

*Demostración.* Consideramos la siguiente presentación del abelianizado:

$$\langle s, t \mid s^5 = (st)^2 = t^3, st = ts \rangle$$

Entonces se tiene:

$$s^2t^2 = t^3 \Rightarrow t^2s^2 = t^3 \Rightarrow s^2 = t$$

$$s^5s^{-2}t^{-2} = 1 \Rightarrow s^3t^{-2} = 1 \Rightarrow s^3s^{-4} = 1 \Rightarrow s^{-1} = 1 \Rightarrow s = 1$$

Y por tanto  $t = s^2 = 1$ , luego el abelianizado del grupo binario icosaedral es el grupo trivial, como queríamos.  $\square$

### 12.1.2 Grupos de homología del espacio dodecaédrico de Poincaré

Veremos en esta sección que efectivamente se cumple la definición de esfera de homología,

- Si  $p = 0$ , como  $P$  es conexo,  $H_0(P) = \mathbb{Z}$ .
- Si  $p > 3$ , por ser  $P$  una 3-variedad,  $H_p(P) = 0$ .
- Si  $p = 1$ , como su grupo fundamental es perfecto, por el teorema de *Hurewicz*,  $H_1(P) = 0$ .
- Si  $p = 2$ , aplicando la dualidad de Poincaré resulta que  $H_2(P) \cong H^1(P)$ . Ahora bien, por otro lado obtenemos, usando el corolario 3.3 en Hatcher:

$$H_2(P) \cong H^1(P) \cong H_1(P) = 0.$$

- Si  $p = 3$ , aplicando la dualidad de Poincaré  $H_3(P) = \mathbb{Z}$  (pues al ser  $P$  conexo,  $H^0(P) = \mathbb{Z}$  por el teorema 42.1 en Munkres).

El espacio dodecaédrico esférico es una variedad que tiene los mismos grupos de homología que una 3-esfera sin ser homeomorfa a ella. Se conocen infinitos espacios de Poincaré, pero el espacio dodecaédrico esférico es el único conocido que tiene un grupo fundamental finito.

Los grupos de homología no son suficientes para caracterizar la 3-esfera. Si la 3-esfera está caracterizada por su grupo fundamental es el contenido de la *conjetura de Poincaré*. Dado que el grupo fundamental de la 3-esfera consiste solo en el elemento unidad, también podemos plantear el problema de la siguiente manera: **¿Aparte de la**

**3-esfera, existen otras variedades cerradas de 3 dimensiones tales que cada camino cerrado puede contraerse a un punto (es nulo-homotópico)?**

La conjetura de Poincaré fue un estímulo enorme para varias generaciones de geómetras y topólogos, entre ellos Thurston estableció la siguiente versión débil: Si una variedad 3 simplemente conexa  $M$  es un espacio de recubrimiento ramificado cíclico de  $S^3$ , entonces  $M$  es de hecho homeomorfa a  $S^3$ .

La conjetura fue resuelta por Perelman usando el flujo de Ricci en el año 2003, lo que supuso un paso decisivo para cerrar la clasificación de estructuras geométricas sobre las variedades de dimensión 3.

### 13 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CNRS. (s.f.). *Analysis Situs*. Recuperado de <https://analysis-situs.math.cnrs.fr/-Analysis-Situs-42-.html>

Jeanneret, A., & Lines, D. (2014). *Invitation à la topologie algébrique Tome I Homologie*. Toulouse: Cépaduès-éditions.

Masson, T. (2008). *Introduction aux (co)homologies cours & exercices*. Paris: Hermann.

Leruste, C. (2017). *Topologie algébrique une introduction, et au-delà*. Paris: Calvage & Mounet.

Félix, Y., & Tanré, D. (2010). *Topologie algébrique cours et exercices corrigés*. Paris: Dunod.

Hatcher, A. (2005). *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Seifert, H., & Threlfall, W. (1980). *A textbook of topology*. Orlando: Academic Press.

Boothby, W. M. (1975). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Orlando: Academic Press.

Munkres, J. R. (1984). *Elements of algebraic topology*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley Publishing Company.