



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Matemáticas**

**MODELOS PSEUDO-PARABÓLICOS PARA EL TRATAMIENTO DE IMÁGENES**

**Autor: Fernando Arranz de la Fuente**  
**Tutores: Eduardo Cuesta Montero, Ángel Durán Martín**  
**Año 2023**



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Filtrado por difusión lineal</b>	<b>7</b>
1.1. Propiedades espacio-escala . . . . .	9
1.1.1. Invariancia por cambio de nivel de gris . . . . .	9
1.1.2. Invariancia rotacional . . . . .	11
1.1.3. Recursividad (Propiedad de semigrupo) . . . . .	12
1.1.4. Invariancia de escala . . . . .	15
1.2. Caracterización del filtrado lineal . . . . .	16
1.3. Experimentos numéricos . . . . .	19
1.3.1. Elección de la matriz del núcleo en la convolución discreta	22
1.3.2. Elección del parámetro $p$ en el símbolo de Fourier . . .	27
1.3.3. Medidas para evaluar la calidad de la imagen . . . . .	28
<b>2. Filtrado por difusión no lineal</b>	<b>33</b>
2.1. Propiedades matemáticas de (2.5) . . . . .	36
2.1.1. Formulación débil y solución débil . . . . .	36
2.1.2. Carácter de bien puesto . . . . .	38
2.2. Propiedades espacio-escala . . . . .	38
2.2.1. Invariancia por cambio de nivel de gris . . . . .	38
2.2.2. Invariancia de contraste inverso . . . . .	39
2.2.3. Invariancia promedio de valor de gris . . . . .	39
2.2.4. Invariancia traslacional . . . . .	40
2.3. Experimentos numéricos . . . . .	40
2.3.1. Elección de la función de parada . . . . .	40
2.3.2. Medidas para evaluar la calidad . . . . .	44
<b>Anexo I</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>

A. Conceptos de teoría de semigrupos	57
B. Análisis dimensional	61
C. Transformada de Fourier bidimensional	65

# Introducción

El presente Trabajo de Fin de Grado aborda la modelización matemática de procesos en imágenes mediante ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) de tipo parabólico. Este enfoque surge como una herramienta para comprender y manipular de manera efectiva las estructuras complejas presentes en las imágenes digitales.

La representación matemática de una imagen constituye el punto de partida de nuestro estudio. A través de funciones  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , buscamos una descripción detallada y cuantificada de los elementos que componen las imágenes. Hay dos perspectivas: el dominio espacial y el dominio de frecuencia. La primera se basa en la disposición geométrica de píxeles en el plano bidimensional, donde cada punto de la imagen se asocia con un valor de gris. Esta representación proporciona una visión intuitiva de la estructura de la imagen. Por otro lado, el dominio de frecuencia, obtenido mediante la Transformada de Fourier, revela las frecuencias espaciales de la imagen, proporcionando patrones y características en términos de amplitud y fase. La amplitud, en el dominio de frecuencia, indica la cantidad de cada frecuencia presente en la imagen, lo que puede ayudar a identificar bordes, texturas o patrones específicos. Mientras que la fase describe la posición relativa de estas frecuencias, lo que puede ser útil para la reconstrucción de la imagen o para el análisis de su contenido.

En el área de procesamiento de imágenes, el proceso de filtrado se refiere a la aplicación de operaciones específicas sobre los píxeles de una imagen con el objetivo de resaltar, atenuar o modificar ciertos aspectos visuales. Estos procesos de filtrado son esenciales para mejorar la calidad de las imágenes, eliminar ruido, realzar bordes o características de interés y, en última instancia, facilitar la interpretación visual de la información contenida en las imágenes digitales. Desde el punto de vista matemático, el filtrado puede entenderse como un proceso evolutivo en el que, a partir de una imagen inicial  $u_0(\bar{x})$ , se constituye una familia de funciones (o imágenes)  $\{u(\bar{x}, t)\}_{t < 0}$  que representan versiones evolucionadas de  $u_0$  a partir de una ley basada en una EDP de evolución de tipo difusivo en la variable  $t$ . El modelo debe asegurar

que a medida que  $t$  crece,  $u(\bar{x}, t)$  mejore las imágenes anteriores en términos de eliminación de ruido y de generación de estructuras artificiales. Esta propiedad justifica el carácter de  $t$  (con sentido matemático temporal) como variable de escala en el contexto de tratamiento de la imagen.

En este sentido, hay dos categorías de filtrado, lineal y no lineal, según el carácter de la EDP de evolución que modele el proceso. El primero facilita el estudio teórico pero no permite una aplicación práctica que discrimine las estructuras presentes en la imagen y que puede que queramos preservar. En el caso no lineal por el contrario, el análisis, incluso su discretización de cara a la implementación, resulta ser más complejo, sin embargo la aplicación práctica permite el reconocimiento de estructuras que, o bien queremos eliminar o bien preservar. En este trabajo, exploraremos y analizaremos en profundidad ambas modalidades de filtrado, examinando su impacto en la representación y percepción visual de las imágenes, y considerando cómo estas técnicas pueden integrarse en el marco de la modelización matemática de procesos en imágenes.

Este Trabajo de Fin de Grado está estructurado de acuerdo con estos aspectos destacados. En el Capítulo 1 trataremos el filtrado lineal. Lo primero que haremos, basado en los principios de invariancia de escala, es construir la axiomática de espacio-escala en la Sección 1.1. La Sección 1.2 está dedicada a caracterizar los núcleos de la teoría de espacio-escala que utilizamos para la convolución de la imagen, los cuales satisfacen la recursividad y la invariancia por cambio de nivel de gris, por rotación y por cambio de escala. Y por último, en la Sección 1.3 analizaremos numéricamente el rendimiento en diferentes situaciones.

En el Capítulo 2 veremos el filtrado no lineal para intentar resolver las carencias que presentan los modelos lineales, en particular la sobredifusión que lleva a generar imágenes totalmente borrosas (el llamado blurring). La Sección 2.1 analizará la adecuación al modelo mediante los resultados teóricos del carácter de bien puesto del problema no lineal de valor inicial y condiciones de contorno de Neumann. Después, en la Sección 2.2, estudiaremos las propiedades de espacio-escala: invariancia por cambio de nivel de gris, de contraste inverso, de gris promedio y translacional. Finalmente, en la Sección 2.3 evaluaremos numéricamente el desempeño de dos filtros no lineales y los compararemos con el filtrado lineal.

Se han añadido los códigos usados para la experimentación numérica en el Anexo I y para complementar teóricamente algunos resultados usados en este trabajo hay tres apéndices: el Apéndice A muestra unos conceptos sobre la teoría de semigrupos, en el Apéndice B se incluyen algunos contenidos sobre el análisis dimensional y en el Apéndice C se muestran varios resultados relacionados con la transformada de Fourier.

En resumen, este trabajo busca explorar y ampliar las fronteras de la modelización matemática de procesos en imágenes mediante ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico. A través de la representación matemática, el filtrado y la aplicación de herramientas analíticas avanzadas, nuestro objetivo es contribuir a la mejor comprensión de las técnicas utilizadas en el procesamiento de imágenes, proporcionando una base sólida para futuras investigaciones y aplicaciones prácticas.





# Capítulo 1

## Filtrado por difusión lineal

Nuestro propósito en este capítulo es estudiar la difusión lineal asociada a un proceso de filtrado de imágenes como una representación espacio-escala. En lo que sigue, la función real  $f = f(\bar{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  representa el valor, dentro de una escala de grises, de una imagen en el píxel de coordenadas  $\bar{x} = (x_1, x_2)$ . Suponemos que  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , es decir  $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 < \infty$ .

La teoría de espacio-escala está basada en considerar que el filtrado de una imagen es un proceso de convolución dependiente de un parámetro de escala  $t \geq 0$ , de manera que

$$(\mathcal{K}_t * f)(\bar{x}) := \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{K}_t(\bar{x} - \bar{y}) f(\bar{y}) d\bar{y}, \quad (1.1)$$

sea una versión más "suavizada" (en el sentido de menos afectada por ruido) de la imagen original  $f$  (correspondiente a la escala  $t = 0$ ). Es necesario que este proceso cumpla una serie de reglas con el objetivo de que al aumentar la escala mejore la calidad de la imagen. Estas reglas, que constituyen la axiomática de la teoría, se trasladan a propiedades que caracterizan los núcleos  $\mathcal{K}_t$  de (1.1).

La literatura ofrece varias maneras de seleccionar los axiomas. La formulación adoptada en este trabajo se basa en caracterizar aquellos núcleos que verifiquen cuatro principios de espacio-escala, véase [1], [5], [14] y [19]:

- I) Invariancia por cambio en la escala de grises.
- II) Invariancia rotacional.
- III) Recursividad.
- IV) Invariancia de escala.

En este capítulo describiremos matemáticamente cada uno de estos principios y su interpretación en términos de (1.1). El objetivo final es la caracterización explícita de los núcleos admisibles  $\mathcal{K}_t$ .

Para formalizar la representación espacio-escala, reescribimos (1.1) en la forma de operadores de convolución

$$\mathcal{K}_t : L^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^2), \quad t \geq 0,$$

de manera que el proceso de filtrado se escribe como

$$u(\bar{x}, t) = \mathcal{K}_t u_0(\bar{x}) = (K(\cdot, t) * u_0)(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (1.2)$$

donde  $u_0 = f$  representa la imagen original (en la escala  $t = 0$ ) y  $K = K(\cdot, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es el núcleo de la convolución a escala  $t$ . El uso de la transformada de Fourier proporciona información adicional sobre el proceso de filtrado en el dominio de la frecuencia. Observemos que, por el teorema de convolución, se tiene de (1.1)

$$\widehat{(\mathcal{K}_t * f)}(\bar{\xi}) = \mathcal{F}(\mathcal{K}_t * f)(\bar{\xi}) = \mathcal{F}(\mathcal{K}_t)(\bar{\xi})\mathcal{F}(f)(\bar{\xi}), \quad \bar{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad (1.3)$$

donde

$$\mathcal{F}(g)(\bar{\xi}) = \widehat{g}(\bar{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^2} g(\bar{x}) e^{-i(\bar{\xi} \cdot \bar{x})} d\bar{x}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2,$$

representa la transformada de Fourier de  $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , con

$$\bar{\xi} \cdot \bar{x} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2, \quad \bar{x} = (x_1, x_2), \bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2).$$

La fórmula (1.3) permite identificar el modo de filtrado a partir del efecto que sobre las frecuencias de la imagen  $f$  tiene la transformada del núcleo  $\mathcal{K}_t$ ,  $t \geq 0$ .

**Ejemplo 1.0.1.** Filtrado gaussiano.

Una manera clásica de regularización de una señal  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  consiste en calcular la convolución (1.1) con el núcleo gaussiano bidimensional de anchura (desviación estándar)  $\sigma > 0$ :

$$\mathcal{K}_\sigma^G(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\|\bar{x}\|^2}{2\sigma^2}}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (1.4)$$

donde  $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Puesto que

$$\widehat{\mathcal{K}_\sigma^G}(\bar{\xi}) = e^{-\frac{\|\bar{\xi}\|^2 \sigma^2}{2}}, \quad \bar{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad (1.5)$$

(véase e.g. [11]) entonces, desde el punto de vista de las frecuencias, el filtrado dado por (1.4) actúa atenuando las frecuencias altas de forma monótona (lo que se suele llamar filtro paso-bajo).

Por otro lado, para imágenes  $f$  continuas y acotadas en  $\mathbb{R}^2$ , se tiene que la solución del problema de valor inicial (PVI) para la ecuación lineal de difusión en  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u, \\ u(\bar{x}, 0) &= f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

viene dada por

$$u(\bar{x}, t) = \begin{cases} f(\bar{x}) & (t = 0), \\ (K_{\sqrt{2t}}^G * f)(\bar{x}) & (t > 0). \end{cases} \quad (1.7)$$

De (1.7) se tiene que la variable temporal  $t$  está relacionada con la anchura  $\sigma$  de (1.4) de manera que  $\sigma = \sqrt{2t}$  o equivalentemente  $t = \varphi(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2}$ . Ambos parámetros,  $t$  y  $\sigma$ , pueden actuar como factores de escala en el proceso de filtrado y le proporcionan dos puntos de vista matemáticos con los que abordar su análisis: a través de la convolución vía (1.1) o mediante una ecuación en derivadas parciales (EDP) lineal, vía (1.6).

## 1.1. Propiedades espacio-escala

Vamos a caracterizar los núcleos  $K(\cdot, t), t > 0$ , que verifican las propiedades (I)-(IV). Para ello necesitamos imponer dos hipótesis para la definición de convolución, la inversión de la transformada de Fourier y ciertas propiedades de espacio-escala, véase [2] y [20]:

(H1) Para cada  $t > 0$  se tiene que  $K(\cdot, t), \widehat{K}(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ .

(H2) Para cada  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$  se tiene que  $K(\bar{x}, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , es continua.

En particular, la segunda condición de (H1),  $\widehat{K}(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , implica que  $K(\cdot, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y acotada (cf. Apéndice 3).

### 1.1.1. Invariancia por cambio de nivel de gris

Para  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  definimos

$$m(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (1.8)$$

Supongamos que el núcleo  $K(\cdot, t), t > 0$ , definido en (1.2), satisface la propiedad:

$$(H3) \quad \widehat{K}(\bar{0}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} K(\bar{x}, t) d\bar{x} = m(K(\cdot, t)) = 1, \quad t > 0.$$

En lo que sigue, la constante  $C \in \mathbb{R}$  representará también la función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ :

$$\bar{x} \rightarrow C, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2.$$

**Lema 1.1.1.** *Bajo las hipótesis (H1)-(H3), se tiene*

a) *Para toda  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  y cualquier constante  $C \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{K}_t(f + C)(\bar{x}) = \mathcal{K}_t f(\bar{x}) + C, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0. \quad (1.9)$$

b) *Si  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$  y  $u(\cdot, t), t \geq 0$  satisface (1.2), entonces*

$$m(u(\cdot, t)) = m(u_0), \quad t \geq 0. \quad (1.10)$$

*Demostración.* a) De la hipótesis (H3) se tiene que

$$K(\cdot, t) * C(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} K(\bar{y}, t) C d\bar{y} = C \int_{\mathbb{R}^2} K(\bar{y}, t) d\bar{y} = C,$$

lo cual implica (1.9).

b) Observemos que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  entonces, la aplicación del teorema de Fubini y el cambio de variable  $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$  implican que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} K(\bar{x} - \bar{y}, t) f(\bar{y}) d\bar{y} d\bar{x} &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} K(\bar{x} - \bar{y}, t) d\bar{x} \right) f(\bar{y}) d\bar{y} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} K(\bar{z}, t) d\bar{z} \right) \left( \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{y}) d\bar{y} \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

De esta forma, si  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , entonces  $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$  para todo  $t > 0$ . Utilizando ahora (H3) en (1.11), se tiene igualmente

$$\begin{aligned} m(u(\cdot, t)) &= \int_{\mathbb{R}^2} u(\bar{x}, t) d\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} K(\bar{x} - \bar{y}, t) u_0(\bar{y}) d\bar{y} d\bar{x} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} K(\bar{z}, t) d\bar{z} \right) \left( \int_{\mathbb{R}^2} u_0(\bar{y}) d\bar{y} \right) = m(u_0(\bar{y})). \end{aligned}$$

□

*Nota 1.1.2.* Si interpretamos la constante  $C \in \mathbb{R}$  como una imagen (con el mismo valor de grises  $C$  en todos los píxeles) entonces la propiedad (1.9) representa la invariancia por cambio (constante) en el nivel de grises. Por otro lado, la propiedad (1.10) significa que la conservación de la masa del núcleo dada por (H3) se traslada a todo el proceso de filtrado. La cantidad (1.8) representa el promedio de grises de la imagen  $f$  y la propiedad (1.10) implica la conservación de tal promedio al filtrar la imagen.

Volviendo al Ejemplo 1.0.1, para comprobar que se cumplen las propiedades (1.9) y (1.10) con el núcleo gaussiano hay que probar la hipótesis (H3). Dado que la gaussiana es una función elemental y

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} m(K_\sigma^G(\cdot, t)) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\|\bar{x}\|^2}{2\sigma^2}} d\bar{x} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\|\bar{x}\|^2}{2\sigma^2}} d\bar{x} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \right)^2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left( \sqrt{2\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz \right)^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} 2\pi\sigma^2 = 1, \quad t > 0. \end{aligned}$$

### 1.1.2. Invariancia rotacional

Asumiremos que el núcleo  $K(\cdot, t)$ ,  $t > 0$ , definido en (1.2) satisface la propiedad:

$$(H4) \quad K(\bar{x}, t) = \kappa(\|\bar{x}\|, t), \quad \bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

para cierta función  $\kappa : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Lema 1.1.3.** *Sea  $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una rotación con ángulo  $\theta \in \mathbb{R}$  y para  $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$  vamos a definir  $\mathcal{T}_\theta : L^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^2)$  como*

$$(\mathcal{T}_\theta u)(\bar{x}) = u(T_\theta \bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces, para cualquier  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$  y  $t > 0$ ,

$$\mathcal{K}_t(\mathcal{T}_\theta u_0) = \mathcal{T}_\theta(\mathcal{K}_t u_0). \quad (1.12)$$

*Demostración.* De la hipótesis (H4) y la isometría de las rotaciones se tiene que

$$K(T_\theta \bar{x}, t) = \kappa(\|T_\theta \bar{x}\|, t) = \kappa(\|\bar{x}\|, t) = K(\bar{x}, t), \quad t \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$\mathcal{K}_t(\mathcal{T}_\theta u_0)(\bar{x}) = \mathcal{K}_t u_0(T_\theta \bar{x}) = u(T_\theta \bar{x}) = (\mathcal{T}_\theta u)(\bar{x}) = \mathcal{T}_\theta(\mathcal{K}_t u_0)(\bar{x}).$$

□

Observamos que utilizando la propiedad

$$T_\theta \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot T_{-\theta} \bar{y}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2,$$

la hipótesis (H4) y en la penúltima igualdad el cambio de variable  $T_{-\theta} \bar{x} = \bar{y}$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{K}(T_\theta \bar{\xi}, t) &= \int_{\mathbb{R}^2} K(\bar{x}, t) e^{-i\bar{x} \cdot T_\theta \bar{\xi}} d\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^2} K(\bar{x}, t) e^{-iT_{-\theta} \bar{x} \cdot \bar{\xi}} d\bar{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\|\bar{x}\|, t) e^{-iT_{-\theta} \bar{x} \cdot \bar{\xi}} d\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\|T_{-\theta} \bar{x}\|, t) e^{-iT_{-\theta} \bar{x} \cdot \bar{\xi}} d\bar{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\|\bar{y}\|, t) e^{-i\bar{y} \cdot \bar{\xi}} d\bar{y} = \int_{\mathbb{R}^2} K(\bar{y}, t) e^{-i\bar{y} \cdot \bar{\xi}} d\bar{y} = \widehat{K}(\bar{\xi}, t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Por tanto, la transformada del núcleo es también invariante por rotaciones y satisface una propiedad similar a (H4), para cierta función  $\widehat{\kappa}(\|\xi\|, t) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que es la transformada de Fourier de la función  $\kappa$ .

Observemos que la propiedad (1.12) significa que las rotaciones de una imagen no afectan al proceso de filtrado, en el sentido de que en cada instante  $t$  el valor de grises en el píxel  $\bar{x}$  de la imagen filtrada a partir de  $u_0(T_\theta \bar{x})$  es el valor de grises en el píxel  $T_\theta \bar{x}$  de la imagen filtrada a partir de  $u_0(\bar{x})$ .

*Nota 1.1.4.* Volviendo al Ejemplo 1.0.1 no es difícil comprobar, utilizando las fórmulas (1.4) y (1.5), que el núcleo gaussiano satisface las propiedades (H1)-(H4) con

$$\kappa(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad \widehat{\kappa}(r) = e^{-\frac{r^2\sigma^2}{2}}.$$

### 1.1.3. Recursividad (Propiedad de semigrupo)

La siguiente propiedad es necesaria para establecer la formulación alternativa del proceso de filtrado como un problema diferencial. En esta sección utilizaremos algunos conceptos y resultados de la Teoría de semigrupos. Dado que una explicación detallada excede los objetivos de este trabajo, hemos optado por una descripción resumida de los mismos en el Apéndice 1. Para una profundización de la teoría véase por ejemplo [18].

Con los contenidos del Apéndice 1 en mente, asumiremos que la familia de operadores de convolución  $\{\mathcal{K}_t, t \geq 0\}$  definidos por (1.2) cumple la propiedad de semigrupo, es decir

$$(H5) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_0 f &= f, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^2), \\ \mathcal{K}_{t+s} f &= \mathcal{K}_t(\mathcal{K}_s f), \quad t, s \geq 0. \end{aligned}$$

*Nota 1.1.5.* La hipótesis (H5) significa, desde el punto de vista del procesado de imágenes, que filtrar una imagen recursivamente por un banco de filtros  $\mathcal{K}_{t_i}, 1 \leq i \leq n$  nos proporciona el mismo resultado que filtrar la imagen con  $\mathcal{K}_T$  lineal donde  $T = t_1 + \dots + t_n$ .

La formulación de (1.1) como un problema de valor inicial de EDP para  $u$  está relacionada con la existencia de un generador infinitesimal del semigrupo  $\{\mathcal{K}_t, t \geq 0\}$ , a partir del operador  $D$  definido como:

$$Df = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{K}_h f - f}{h}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^2), \quad (1.14)$$

donde el sentido del límite es el dado en el Apéndice 1 y el dominio  $dom(D)$  está formado por aquellas funciones  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  para las cuales exista el límite (1.14). La existencia de  $D$  está garantizada bajo la asunción de continuidad del semigrupo (cf. Apéndice 1):

$$(H6) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \|K(\cdot, t) - K(\cdot, 0)\|_{L^1} = 0.$$

**Lema 1.1.6.** *Si se cumplen (H1), (H2), (H5) y (H6), la función  $u(t) = u(\cdot, t)$  dada en (1.1) es solución débil del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t(\bar{t}) &= Du(\bar{t}), \quad t > 0, \\ u(\bar{0}) &= u_0(\bar{x}), \end{cases} \quad (1.15)$$

donde  $D$  es el operador lineal de (1.14).

*Demostración.* Utilizando los resultados del Apéndice 1, demostremos que  $\{\mathcal{K}_t, t \geq 0\}$  es un semigrupo  $C_0$ , de operadores lineales acotados en  $L^1(\mathbb{R}^2)$ . Se tienen que cumplir tres propiedades:

1.  $\mathcal{K}_0 = I$  (el operador identidad en  $L^1$ ) la cual se cumple por la primera hipótesis de (H5).
2.  $\mathcal{K}_{t+s} = \mathcal{K}_t \mathcal{K}_s$ ,  $t, s \geq 0$ , que es la segunda hipótesis de (H5).
3. Para toda  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  tal que  $\|K(\cdot, t) * f - K(\cdot, 0) * f\|_{L^1} \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow 0^+$ , por la hipótesis (H6) y el teorema de convolución se tiene que

$$\|K(\cdot, t) * f - K(\cdot, 0) * f\|_{L^1} \leq \|K(\cdot, t) - K(\cdot, 0)\|_{L^1} \|f\|_{L^1} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0^+$$

Esto implica que  $u(t) = \mathcal{K}_t u_0$  es la única solución débil de (1.15).  $\square$

Si tomamos transformada de Fourier en el principio de recursividad (H5) y usamos el teorema de convolución, se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{K}(\cdot, 0) &= 1, \\ \widehat{K}(\cdot, t + s) &= \widehat{K}(\cdot, t)\widehat{K}(\cdot, s), \quad t, s \geq 0.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Las fórmulas (1.16) representan la versión de la hipótesis (H5) en el dominio de la frecuencia.

Podemos estudiar la evolución dada por el sistema (1.15) en el dominio de la frecuencia. Tomando transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación y suponiendo que podemos intercambiar derivada temporal con la integración, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\bar{\xi}, t) = \widehat{D}(\bar{\xi})\widehat{u}(\bar{\xi}, t),\tag{1.17}$$

donde  $\widehat{D}(\bar{\xi})$  es conocido como el símbolo de Fourier del operador  $D$  y se define como

$$\widehat{D}f(\bar{\xi}) = \widehat{D}(\bar{\xi})\widehat{f}(\bar{\xi}), \quad \bar{\xi} \in \mathbb{R}^2, f \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

La solución de (1.17) con dato inicial  $\widehat{u}(\bar{\xi}, 0) = \widehat{u}_0(\bar{\xi})$  es de la forma

$$\widehat{u}(\bar{\xi}, t) = e^{t\widehat{D}(\bar{\xi})}\widehat{u}_0(\bar{\xi}), \quad t \geq 0.\tag{1.18}$$

Entonces, comparando (1.18) con (1.2) en el dominio de frecuencia, se tiene que

$$\widehat{K}(\bar{\xi}, t) = e^{t\widehat{D}(\bar{\xi})}, \quad \bar{\xi} \in \mathbb{R}^2.\tag{1.19}$$

Varias son las propiedades relevantes del símbolo  $\widehat{D}(\bar{\xi})$ :

- I) Puesto que el núcleo  $K(\cdot, t)$  es una función real para todo  $t \geq 0$ , (c.f. Apéndice 3)

$$\widehat{K}(\bar{\xi}, t)^* = \widehat{K}(-\bar{\xi}, t),$$

donde  $*$  denota conjugación compleja. Por otro lado, de la propiedad (1.13) con  $\theta = \pi$

$$\widehat{K}(-\bar{\xi}, t) = \widehat{K}(\bar{\xi}, t),$$

lo que implica que  $\widehat{K}(\bar{\xi}, t)$  y por tanto  $\widehat{D}(\bar{\xi})$ , son funciones reales y pares.

- II) El mismo argumento aplicado en (1.13) implica que  $\widehat{D}(\bar{\xi})$  depende de  $\|\bar{\xi}\|$ .



III) De la hipótesis (H1), como  $K(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$  para todo  $t \geq 0$ , la propiedad anterior y el lema de Riemann-Lebesgue implican que  $\widehat{K}(\cdot, t)$  es continua en  $\mathbb{R}^2$  y

$$\lim_{\|\bar{\xi}\| \rightarrow \infty} \widehat{K}(\bar{\xi}, t) = 0.$$

Por tanto, de (1.19), se tiene que  $\widehat{D} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y para cada  $t > 0$

$$\lim_{\|\bar{\xi}\| \rightarrow \infty} \widehat{D}(\bar{\xi}) = -\infty.$$

Volviendo al Ejemplo 1.0.1, la fórmula (1.5) nos lleva a que en este caso podemos identificar

$$\widehat{D}(\bar{\xi}) = -\|\bar{\xi}\|^2, \quad \bar{\xi} \in \mathbb{R}^2.$$

#### 1.1.4. Invariancia de escala

Definimos el escalado por  $\lambda \neq 0$  como el operador

$$S_\lambda f(\bar{x}) = f(\lambda \bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^2), \quad (1.20)$$

y asumimos que:

(H7) Para todo  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$  y  $t > 0$  existe  $t' = \phi(t)$  tal que

$$S_\lambda \mathcal{K}_{t'} = \mathcal{K}_t S_\lambda.$$

*Nota 1.1.7.* La ecuación (1.20) significa que la forma general y la estructura de la imagen se mantienen sin importar la escala de visualización. Y la propiedad (H7) significa que se obtiene el mismo resultado filtrando una imagen y después escalándola que primero haciendo un cambio de escala y después filtrándola. Las relaciones entre las componentes en el dominio de frecuencia se mantienen después de una transformación de escala.

En el contexto del procesamiento de imágenes, la relación entre el parámetro del tiempo  $t$  y el de escala, representada por la desviación estándar  $\sigma$  en el filtrado gaussiano (cf. Ejemplo 1.0.1), se puede generalizar y suponer que existe desde el comienzo del proceso una conexión entre ellos. Siguiendo este argumento, primero introducimos un parámetro de escala, que por abuso de notación denotamos también por  $\sigma$ , relacionado con el parámetro de semigrupo  $t$  mediante una transformación adecuada

$$t = \varphi(\sigma). \quad (1.21)$$

(Notemos que  $t = \frac{\sigma^2}{2}$  en el Ejemplo 1.0.1, por lo que en este caso  $\varphi(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2}$ .)

Cuando se ven los núcleos como funciones del nuevo parámetro  $\sigma$ , la segunda propiedad en (H5) se puede escribir como

$$K(\cdot, \sigma_1) * K(\cdot, \sigma_2) = K(\cdot, \sigma_1 + \sigma_2) = K(\cdot, \varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2))), \quad (1.22)$$

mientras que la primera implica que  $\varphi(0) = 0$ . Para preservar el requisito cualitativo (que es una de las bases de la teoría espacio-escala) de que los valores crecientes del parámetro de escala deben corresponder a representaciones en escalas más gruesas, debemos suponer que  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  es diferenciable y estrictamente creciente (en particular invertible).

## 1.2. Caracterización del filtrado lineal

Asumiremos que en términos de la escala  $\sigma$ , (1.2) se reescribe como

$$F(\cdot, \sigma) = K(\cdot, \sigma) * f, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^2), \quad (1.23)$$

donde  $f$  representa la imagen original y  $F(\cdot, \sigma)$  su imagen filtrada a escala  $\sigma$ . Utilizaremos también la representación de Fourier de (1.23)

$$\widehat{F}(\bar{\xi}, \sigma) = \widehat{K}(\bar{\xi}, \sigma) \widehat{f}(\bar{\xi}). \quad (1.24)$$

**Teorema 1.2.1.** *Si asumimos que  $\{\mathcal{K}_t, t \geq 0\}$ , definido en (1.2), satisface (H1)-(H7) entonces existen  $p, d > 0$ , tal que los núcleos  $K(\cdot, t), t > 0$ , deben tener como representación de Fourier (1.19) con*

$$\widehat{D}(\bar{\xi}) = -\|\bar{\xi}\|^p d. \quad (1.25)$$

*Demostración.* La demostración es una adaptación de los pasos dados en [15], ver también [17].

La propiedad (H7) de la invariancia de escala permitirá hacer una simplificación de (1.24). Tomando las variables adimensionales  $\bar{\xi}\sigma$ ,  $\widehat{f}$  y aplicando el Teorema de Pi (cf. Apéndice 2), existe una función  $\widetilde{K} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  con  $\widetilde{K}(\bar{0}) = 0$  (para obtener  $\widehat{F}(\bar{\xi}, 0) = \widehat{f}(\bar{\xi})$ ) tal que la ecuación (1.25) se puede reescribir como

$$\widehat{F}(\bar{\xi}, \sigma) = \widetilde{K}(\bar{\xi}\sigma) \widehat{f}(\bar{\xi}).$$

Además, hemos visto que la invariancia rotacional implica que  $\widetilde{K}(\bar{\xi}\sigma) = \widetilde{\kappa}(\|\bar{\xi}\sigma\|)$  (cf. Nota 1.1.4), por lo que

$$\widehat{F}(\bar{\xi}, \sigma) = \widetilde{\kappa}(\|\bar{\xi}\sigma\|) \widehat{f}(\bar{\xi}). \quad (1.26)$$

Ahora, de acuerdo con (1.22) y (1.26), la propiedad de semigrupo (H5) se puede reescribir como

$$\tilde{\kappa}(\|\bar{\xi}\sigma_1\|)\tilde{\kappa}(\|\bar{\xi}\sigma_2\|) = \tilde{\kappa}(\|\bar{\xi}\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2))\|), \quad (1.27)$$

para  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ . En la parte izquierda de la ecuación (1.27) observamos que podemos multiplicar  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  por una constante arbitraria no nula sin que se vea afectado el resultado si dividimos cada componente de  $\bar{\xi}$  por la misma constante. Es decir, para  $\gamma \neq 0$  arbitraria

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}(\|\bar{\xi}\gamma\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1/\gamma) + \varphi(\sigma_2/\gamma))\|) &= \tilde{\kappa}(\|\bar{\xi}\sigma_1\|)\tilde{\kappa}(\|\bar{\xi}\sigma_2\|) \\ &= \tilde{\kappa}(\|\bar{\xi}\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2))\|), \end{aligned}$$

expresión válida para todo  $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^2, \sigma_1, \sigma_2 > 0$ .

Tomando las variables de la ecuación superior y como  $\varphi$  es invertible tenemos que

$$\gamma\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1/\gamma) + \varphi(\sigma_2/\gamma)) = \varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2)). \quad (1.28)$$

Como  $\varphi$  es derivable y estrictamente creciente, entonces su inversa  $\varphi^{-1}$  es derivable. Luego, derivando (1.28) con respecto a  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  se tiene

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(\sigma_1/\gamma) + \varphi(\sigma_2/\gamma))\varphi'(\sigma_i/\gamma) = (\varphi^{-1})'(\varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2))\varphi'(\sigma_i), \quad i = 1, 2.$$

Tomando  $\gamma = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$  para  $\sigma_3 > 0$ , en las expresiones de arriba,

$$(\varphi^{-1})' \left( \varphi \left( \frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2} \right) + \varphi(\sigma_3) \right) \varphi' \left( \frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2} \right) = (\varphi^{-1})'(\varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2))\varphi'(\sigma_1),$$

$$(\varphi^{-1})' \left( \varphi \left( \frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2} \right) + \varphi(\sigma_3) \right) \varphi'(\sigma_3) = (\varphi^{-1})'(\varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2))\varphi'(\sigma_2).$$

De ello se deduce que

$$\varphi' \left( \frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2} \right) = \frac{\varphi'(\sigma_1)\varphi'(\sigma_3)}{\varphi'(\sigma_2)}, \quad (1.29)$$

expresión válida para  $\sigma_i > 0, i = 1, 2, 3$ , arbitrarios.

Sea  $C' = \varphi'(1)$  y  $\psi(\sigma) = \varphi'(\sigma)/C'$ . Dividiendo (1.29) por  $\varphi'(\sigma_2) \neq 0$ , ya que hemos supuesto que  $\varphi$  es estrictamente creciente, y tomando  $\sigma_2 = 1$  se tiene que

$$\psi(\sigma_1\sigma_3) = \psi(\sigma_1)\psi(\sigma_3). \quad (1.30)$$

Si ahora escribimos  $\psi(\sigma) = e^{\theta(\sigma)}$ , la ecuación (1.30) se traslada a

$$\theta(\sigma_1\sigma_3) = \theta(\sigma_1) + \theta(\sigma_3),$$

ecuación que caracteriza a la función logaritmo, de manera que

$$\theta(\sigma) = \log_a \sigma,$$

para  $a > 0, a \neq 1$ . Por tanto

$$\psi(\sigma) = e^{\theta(\sigma)} = e^{\log_a \sigma} = e^{\frac{\log \sigma}{\log a}} = e^{\log \sigma \frac{1}{\log a}} = \sigma^{\frac{1}{\log a}} = \sigma^q, \quad q = \frac{1}{\log a}.$$

Entonces  $\varphi'(\sigma) = \varphi'(1)\psi(\sigma) = \varphi'(1)\sigma^q$ . Puesto que, por (H5), es  $\varphi(0) = 0$ , integrando se tiene

$$\varphi(\sigma) = \varphi(0) + \int_0^\sigma \varphi'(\alpha) d\alpha = \int_0^\sigma \varphi'(\alpha) d\alpha = \int_0^\sigma \varphi'(1)\alpha^q d\alpha = \frac{\varphi'(1)\sigma^{q+1}}{q+1} = C\sigma^p,$$

donde al suponer que  $\varphi$  es positiva y monótona creciente, debe ser  $C > 0, p > 0$ . Sin perder generalidad, podemos suponer  $C = 1$ . Entonces si  $H(x^p) \equiv \tilde{K}(x)$  reescribimos (1.27) como

$$\begin{aligned} H(\|\bar{\xi}\sigma_1\|^p)H(\|\bar{\xi}\sigma_2\|^p) &= \tilde{K}(\|\bar{\xi}\sigma_1\|)\tilde{K}(\|\bar{\xi}\sigma_2\|) \\ &= \tilde{K}(\|\bar{\xi}\varphi^{-1}(\varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2))\|) \\ &= \tilde{K}((\|\bar{\xi}\sigma_1\|^p + \|\bar{\xi}\sigma_2\|^p)^{1/p}) \\ &= H((\|\bar{\xi}\sigma_1\|^p + \|\bar{\xi}\sigma_2\|^p)^{1/p}) \\ &= H(\|\bar{\xi}\sigma_1\|^p + \|\bar{\xi}\sigma_2\|^p), \end{aligned}$$

que se identifica como la ecuación funcional

$$\Psi(\alpha_1)\Psi(\alpha_2) = \Psi(\alpha_1 + \alpha_2),$$

que caracteriza a la función exponencial. Por lo tanto,  $\hat{K}$  es de la forma

$$\hat{K}(\bar{\xi}, \sigma) = \tilde{K}(\bar{\xi}\sigma) = \tilde{\kappa}(\|\bar{\xi}\sigma\|) = H(\|\bar{\xi}\sigma\|^p) = e^{-\|\bar{\xi}\sigma\|^p d},$$

para cierta constante  $d > 0$ . □

*Nota 1.2.2.* La ecuación (1.25) se corresponde con una forma específica del generador infinitesimal  $D$ . Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  entonces, tomando transformada de Fourier, si  $h \neq 0$

$$\left( \frac{\widehat{\mathcal{K}_h \mathbf{f}} - \widehat{\mathbf{f}}}{h} \right) (\bar{\xi}) = \left( \frac{e^{-h\|\bar{\xi}\|^p d} - I}{h} \right) \widehat{\mathbf{f}}(\bar{\xi}),$$

y formalmente

$$\frac{e^{-h\|\bar{\xi}\|^{pd}} - 1}{h} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j h^{j-1} \|\bar{\xi}\|^{jp}}{j!} d^j.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h\|\bar{\xi}\|^{pd}} - 1}{h} = -\|\bar{\xi}\|^{pd},$$

esto implica que el símbolo de Fourier del operador  $D$  es

$$\widehat{D}(\bar{\xi}) = -\|\bar{\xi}\|^{pd}.$$

La transformada inversa lleva entonces a que

$$Df = -(-\Delta)^{p/2}df, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^2), \quad (1.31)$$

siendo  $\Delta$  el operador de Laplace. El caso  $p = 2$  corresponde al núcleo gaussiano del Ejemplo 1.0.1.

### 1.3. Experimentos numéricos

Los primeros experimentos numéricos presentados en esta sección tratarán el problema de filtrado (1.2), y para ello vamos a formularlo como un problema de ecuaciones en derivadas parciales clásico cuando  $p = 2$  en (1.25):

$$\begin{cases} \partial_t u(\bar{x}, t) = \lambda \Delta u(\bar{x}, t), & t \geq 0, \\ u(\bar{x}, 0) = f(\bar{x}), \end{cases} \quad (1.32)$$

con  $\bar{x} \in [0, L] \times [0, L]$ .

Recordemos que su solución se puede escribir como

$$u(\bar{x}, t) = \begin{cases} f(\bar{x}), & t = 0, \\ (K(\cdot, t), *f)(\bar{x}), & t > 0, \end{cases}$$

donde  $\bar{x} \in [0, L] \times [0, L]$ .

Sin embargo para su aplicación práctica, en nuestro caso el procesado de imágenes digitales, hay que obtener una solución discreta y para ello aplicaremos esquemas numéricos apropiados. El caso  $p \neq 2$  requerirá un tratamiento diferente como veremos más adelante.

Lo primero es definir un conjunto de nodos en el dominio espacial que en nuestro caso será equiespaciado (con tamaño de paso  $h=1$ ) pues en este contexto el orden de convergencia del esquema numérico no es objeto de análisis. También dividimos el intervalo de tiempo en incrementos discretos

$t_n = n\tau$  donde  $\tau = 0,01$  y  $0 \leq n \leq N$  siendo  $N$  el número total de nodos en el tiempo.

Denotemos cada nodo espacial (píxel en el lenguaje del procesado de imágenes) como

$$(x_p, y_q),$$

donde  $0 \leq p, q \leq M$ , siendo  $M$  el número de nodos en la malla espacial (en nuestro caso elegiremos  $M = 100$ ),  $x_p$  representa la fila e  $y_q$  la columna del píxel.

El nivel de grises del píxel en el nivel de tiempo  $t_n$  viene dado por  $u(x_p, y_q, t_n)$ , y su aproximación numérica, que hemos normalizado por conveniencia en el proceso de resolución numérica al intervalo  $[0, 1]$  en lugar de  $[0, 255]$ , es  $u_{p,q}^n$ , siendo 0 el color blanco y 1 el negro.

Por lo tanto, tomamos la imagen discretizada en el paso  $t_n$  como una matriz  $U = (u_{p,q}^n) \in M_{100 \times 100}(\mathbb{R})$ , y con el objetivo de resolver la ecuación (1.32) utilizamos el método de Euler explícito para aproximar la derivada temporal y las diferencias finitas centradas con el propósito de estimar las segundas derivadas espaciales. En cada iteración del filtrado, se requiere resolver la siguiente ecuación en diferencias aplicándola a todos los píxeles

$$u_{p,q}^{n+1} = u_{p,q}^n + \frac{\lambda t_n}{h^2} (u_{p+1,q}^n + u_{p-1,q}^n + u_{p,q+1}^n + u_{p,q-1}^n - 4u_{p,q}^n). \quad (1.33)$$

Nos vamos a centrar en el filtrado con condiciones de frontera Neumann homogéneas discretas, estas condiciones hacen que la imagen no pierda valor de gris promedio y por lo tanto si filtramos con un  $t_n \rightarrow \infty$  vamos a acabar con una imagen con el mismo nivel de gris en todos los píxeles. Como no hay flujo neto del nivel de gris a través de la frontera, esto implica que la derivada normal a la frontera es igual a cero y las condiciones se escriben como

$$\begin{aligned} u_{i,j} - u_{i-1,j} &= 0, & j = 1, 100, i = 1, \dots, 100, \\ u_{i,j} - u_{i,j-1} &= 0, & i = 1, 100, j = 1, \dots, 100. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Vamos a trabajar con una matriz ampliada  $U_{ampliada} \in M_{102 \times 102}(\mathbb{R})$  la cual es necesaria para la interpretación alternativa que vamos a dar a continuación y también la usaremos en la convolución discreta para ver mejor la ecuación (1.33) en los puntos de la frontera de la imagen. Esta matriz  $U_{ampliada}$  se forma añadiendo una fila arriba y abajo de la matriz  $U$  y una columna a su izquierda y a su derecha. Estos nuevos elementos tendrán que cumplir (1.34) pero para  $j = 2, 101$ , en la primera ecuación e  $i = 2, 101$ , en la segunda ecuación, que son los elementos de la matriz  $U_{ampliada}$  que tienen el valor de gris de la frontera de  $U$ . La siguiente matriz ilustra la creación de  $U_{ampliada}$  si suponemos que  $U \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  por sencillez.

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,3} \\ u_{1,1} & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,3} \\ u_{3,1} & u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

Figura 1.1: Matriz ampliada de ejemplo.

Otra opción habría sido utilizar condiciones frontera Dirichlet que especificaría valores fijos para la solución en los puntos de la frontera en lugar de especificar la derivada normal nula, pero estas condiciones nos llevarían a una imagen plana de ceros si  $t_n \rightarrow \infty$ .

Ahora que tenemos definida la imagen como una matriz, vamos a usar dos interpretaciones para la convolución:

- Convolución discreta: Para resolver numéricamente la ecuación (1.33) vamos a crear la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y para cada píxel  $(p,q)$  en el instante  $n$  vamos a hacer una convolución discreta de esta matriz  $A$  y la matriz

$$V = \begin{bmatrix} u_{p-1,q-1}^n & u_{p-1,q}^n & u_{p-1,q+1}^n \\ u_{p,q-1}^n & u_{p,q}^n & u_{p,q+1}^n \\ u_{p+1,q-1}^n & u_{p+1,q}^n & u_{p+1,q+1}^n \end{bmatrix}$$

que corresponde al píxel  $u_{p,q}^n$  y sus vecinos.

El código en MATLAB puede verse en el Anexo I.

- Implementación alternativa: Vamos a realizar la misma ecuación para cada píxel pero de una forma mucho más eficiente desde el punto de vista computacional en MATLAB y cualquier software que trabaje matricialmente. Para ello, del ejemplo anterior de  $U_{ampliada}$ , Figura 1.1, podemos crear unas submatrices  $U_i \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}), i = 1, \dots, 5$ . La matriz  $U_1$  representa la imagen que estamos filtrando y en ese ejemplo se obtiene cogiendo la submatriz  $3 \times 3$  (ya que era el tamaño que hemos

fijado para  $U$  en el ejemplo) de  $U_{ampliada}$  que hemos rodeado de amarillo. El resto de matrices  $U_i$  se obtienen al desplazar la "ventana" de  $U_1$  hacia arriba, abajo, a la izquierda y a la derecha. La matriz  $U_2$  es la que hemos rodeado de verde, la matriz  $U_3$  es la azul, la matriz  $U_4$  es la roja y la matriz  $U_5$  es la rosa.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} & U_2 &= \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \end{bmatrix} \\
 U_3 &= \begin{bmatrix} u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} & U_4 &= \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,1} & u_{2,2} \\ u_{3,1} & u_{3,1} & u_{3,2} \end{bmatrix} \\
 U_5 &= \begin{bmatrix} u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,3} \\ u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,3} \\ u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Y ahora en cada nivel de tiempo  $n$  tenemos que resolver

$$U_1^{n+1} = U_1^n + \frac{\lambda t_n}{h^2}(U_2^n + U_3^n + U_4^n + U_5^n - 4U_1^n),$$

para obtener la ecuación (1.33) en cada píxel.

El código en MATLAB está en el Anexo I.

Como hemos mencionado al principio de la sección, estas interpretaciones son cuando  $p = 2$  en (1.25) pero podríamos utilizar otras matrices del núcleo de convolución válidas que den lugar a algoritmos de cálculo similares a los mostrados o cambiar el valor del parámetro  $p$  y comparar los resultados.

Veamos cómo influyen en este proceso esas variantes.

### 1.3.1. Elección de la matriz del núcleo en la convolución discreta

Para la convolución discreta hemos utilizado la matriz  $A$  que representa el Laplaciano discreto en la ecuación diferencial (1.19).

Vamos a comparar los resultados de filtrar una imagen sintética y una real con la matriz  $A$  y con otras tres matrices que representan otros núcleos de convolución (conocidos también como máscaras):

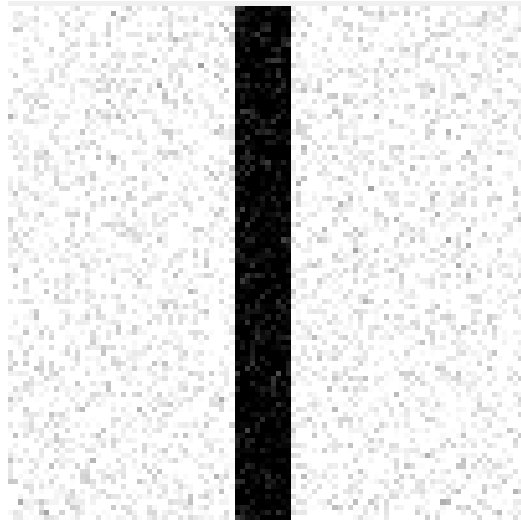


$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -8 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

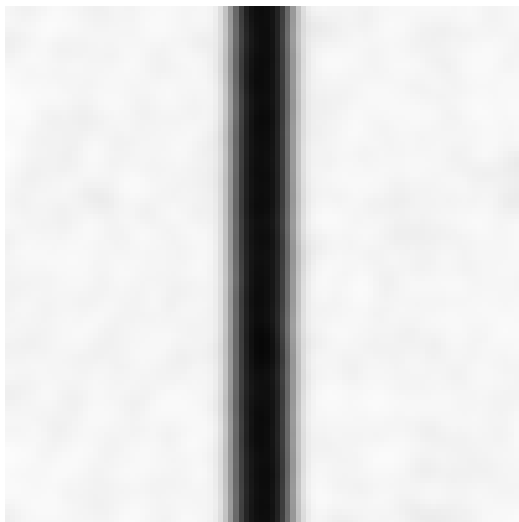
Con el código de la convolución discreta vamos a filtrar la imagen sintética Figura 1.2 (b) que es la imagen Figura 1.2 (a) a la que se le ha añadido ruido.



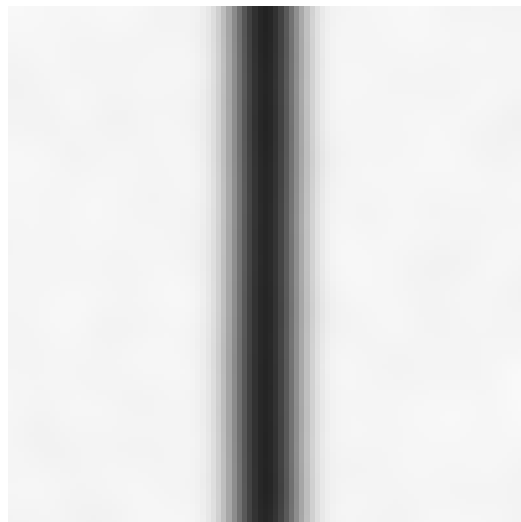
(a) Imagen original



(b) Imagen con ruido



(c) Matriz A



(d) Matriz B

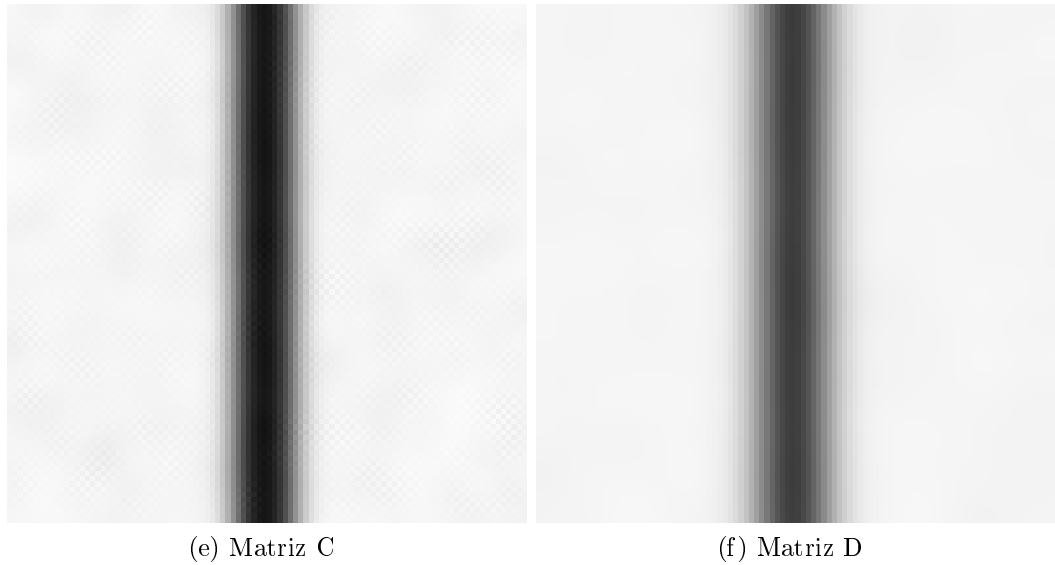
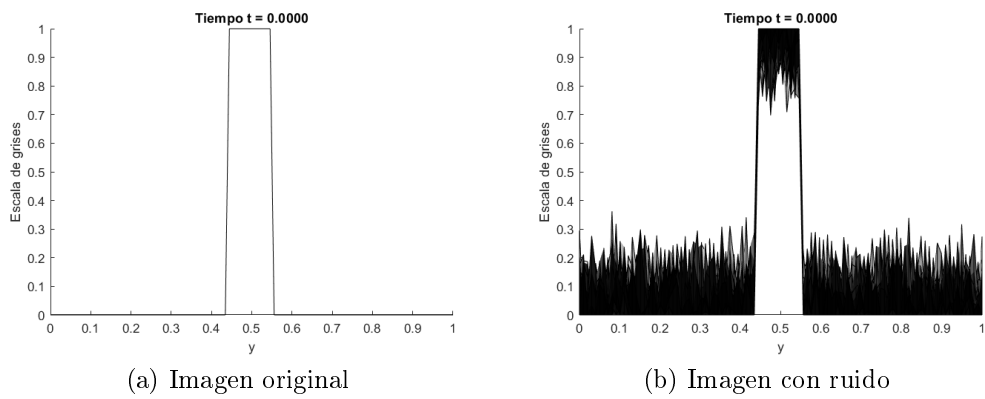


Figura 1.2: Imagen sintética, franja negra vertical.

Los resultados se aprecian mejor si pensamos en la imagen como un gráfico 3-dimensional, donde la tercera dimensión es el valor de gris, que está entre 0 y 1, y escogemos la vista de la sección según el eje  $x$ , Figura 1.3.



(a) Imagen original

(b) Imagen con ruido

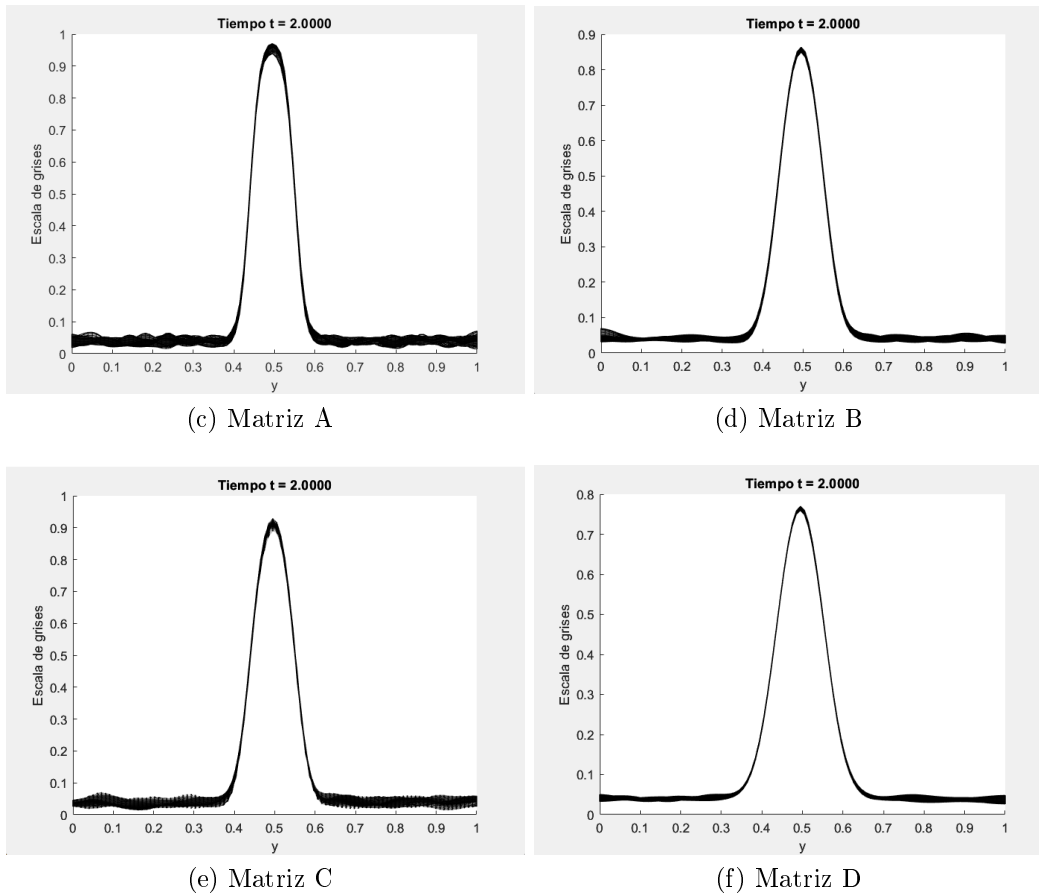


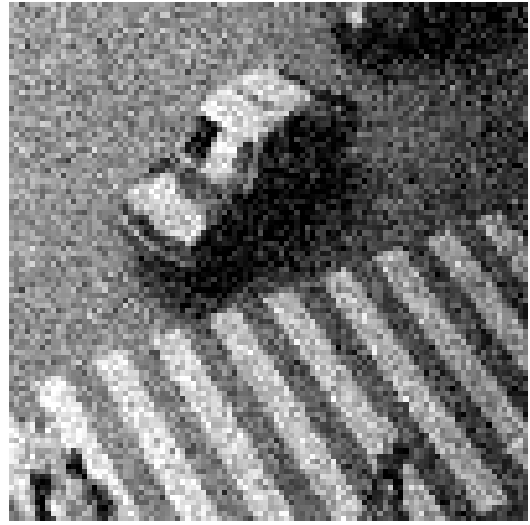
Figura 1.3: Sección según el eje x de la imagen sintética.

Y como podemos observar, en las imágenes filtradas ha desaparecido prácticamente todo el ruido. En la que más se ha mantenido la estructura original de la franja vertical negra ha sido con la matriz A, Figura 1.2 (c), la que representa el Laplaciano, y por lo tanto menos valor de gris se ha difuminado al resto de la imagen para disipar el ruido. Después la matriz C, Figura 1.2 (e), y B, Figura 1.2 (d), que han dispersado más el negro hacia los laterales de la imagen, lo cual se aprecia muy bien en la Figura 1.3 ya que el pico cuando  $y = 0,5$  está cercano a 0.9 y la matriz A lo supera ampliamente. Y por último, la matriz D cuyo valor de gris en  $y = 0,5$  está por debajo de 0.8 al coger información de puntos más alejados de cada píxel para hacer el promedio.

Ilustremos ahora los resultados con una imagen real, en concreto la imagen de la Figura 1.4 (a).



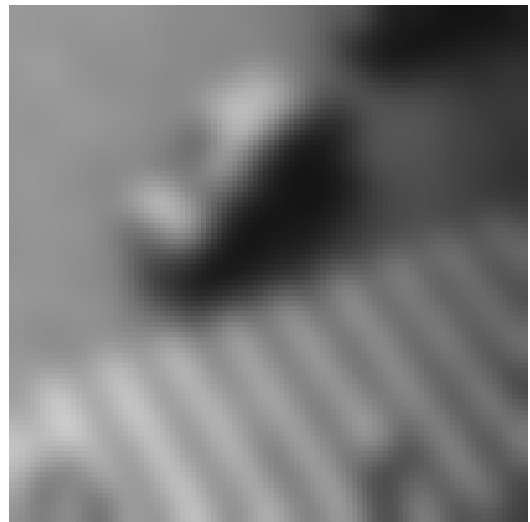
(a) Imagen original



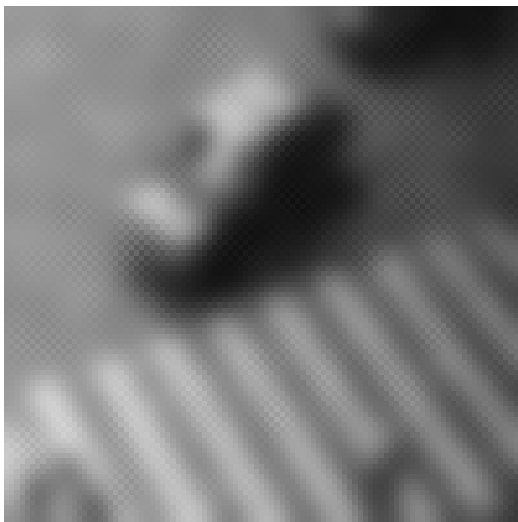
(b) Imagen con ruido



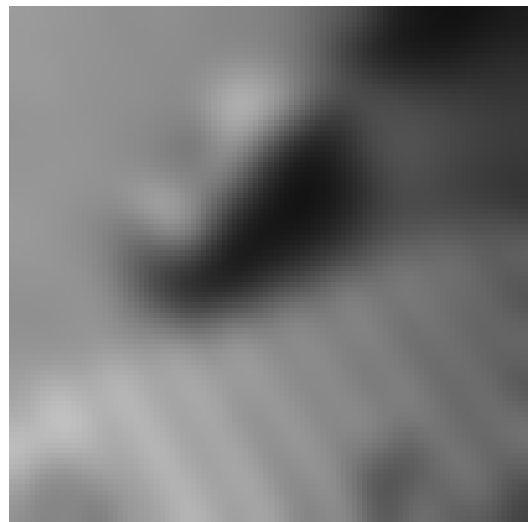
(c) Matriz A



(d) Matriz B



(e) Matriz C



(f) Matriz D

Figura 1.4: Un coche en un paso de cebra.

Y para la imagen real ocurre lo mismo. La imagen que corresponde al filtrado con la matriz A, Figura 1.3 (c), es en la que más se diferencian las estructuras como el paso de cebrá o el coche. Con la matriz B, Figura 1.3 (d), y C, Figura 1.3 (e), se ven imágenes similares con menos detalle y en la correspondiente a la matriz D, Figura 1.3 (f), ya notamos una calidad peor, y sólo se llega a diferenciar un poco el coche.

### 1.3.2. Elección del parámetro $p$ en el símbolo de Fourier

Vamos a ilustrar ahora como varían los resultados si el parámetro  $p$  varía, esto es, que ocurre si  $p \neq 2$  ( $p > 2$ ), y para ello elegimos  $p = 3$  y  $p = 4$  en (1.31) y comprobamos si hay diferencias notables frente a  $p = 2$ .

En el sistema (1.15) sustituimos (1.31)

$$\begin{cases} u_t(\bar{t}) &= -(-\Delta)^{\frac{p}{2}} u(\bar{t}), \quad t > 0, \\ u(\bar{0}) &= u_0(\bar{x}), \end{cases}$$

después, aplicando la transformada de Fourier obtenemos la solución en el dominio de frecuencia. En nuestro caso, el contexto discreto en el que nos movemos nos permite usar una versión eficiente de la transformada de Fourier, la transformada rápida de Fourier bidimensional (2D FFT, por sus siglas en inglés).

Resolviendo la ecuación diferencial ordinaria para cada píxel en el nivel de tiempo  $n$

$$\begin{aligned} \widehat{u}^{n+1}(\xi_1, \xi_2) &= \widehat{u}^n(\xi_1, \xi_2) - hd \|(\xi_1, \xi_2)\|^p \widehat{u}^n(\xi_1, \xi_2) \\ \widehat{u}^{n+1}(\xi_1, \xi_2) + hd \|(\xi_1, \xi_2)\|^p \widehat{u}^{n+1}(\xi_1, \xi_2) &= \widehat{u}^n(\xi_1, \xi_2) \\ \widehat{u}^{n+1}(\xi_1, \xi_2) &= (1 + hd \|(\xi_1, \xi_2)\|^p)^{-1} \widehat{u}^n(\xi_1, \xi_2), \end{aligned}$$

donde  $d$  es un parámetro que controla la tasa de difusión y  $h$  es el tamaño de paso de tiempo, y aplicando la transformada de Fourier inversa obtenemos la solución de nuestro sistema en el dominio espacial. Esto lo hemos hecho con MATLAB, el código con los valores de los parámetros utilizados está en el Anexo I, y los resultados se muestran en la Figura 1.5.

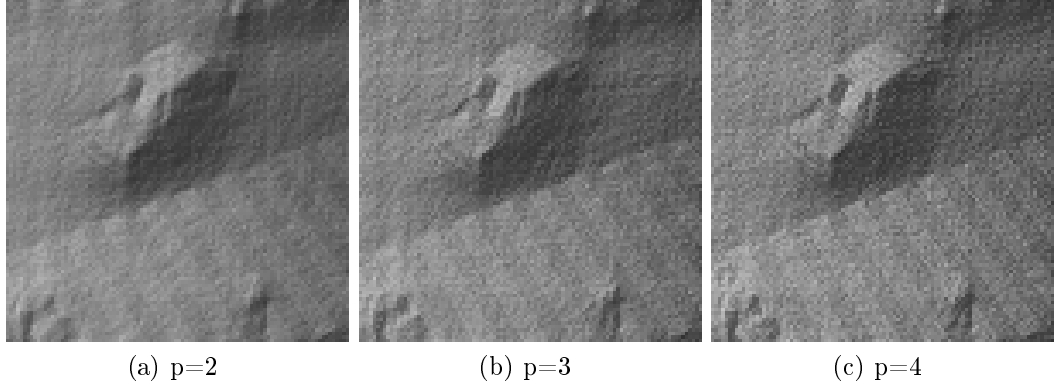


Figura 1.5: Un coche en un paso de cebra

Observamos que las imágenes para  $p = 3$  y  $p = 4$  son muy similares y algo mejores que  $p = 2$ .

### 1.3.3. Medidas para evaluar la calidad de la imagen

En esta sección vamos a dar una serie de indicadores clásicos que nos permiten evaluar la calidad de la restauración: SNR (Relación Señal a Ruido), PSNR (Relación Señal a Ruido de Pico) y SSIM (Índice de Similitud Estructural) frente a los diferentes núcleos discretos de la Sección 1.3.1, frente al tiempo  $t$  y frente al tamaño de paso.

El SNR es una medida que compara la energía de la señal (información de la imagen) con la energía del ruido presente en la imagen. Un valor de SNR más alto indica una mejor calidad de la imagen, ya que la señal es más fuerte en comparación con el ruido.

**Definición 1.3.1.** El índice SNR se define como

$$SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{Es}{Er} \right),$$

donde  $Es$  es la energía de la señal

$$\sum_{p=0}^{100} \sum_{q=0}^{100} (u_{p,q}^0)^2,$$

y  $Er$  es la energía del ruido

$$\sum_{p=0}^{100} \sum_{q=0}^{100} (u_{p,q}^0 - u_{p,q}^n)^2.$$

El PSNR es similar al SNR y proporciona una medida de la calidad de la imagen mediante la relación entre la energía máxima posible de la señal y la energía del ruido. Un valor más alto indica una mejor calidad de imagen.

**Definición 1.3.2.** El índice PSNR se define como

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{L^2}{MSE} \right),$$

donde  $L$  es el rango dinámico máximo de los píxeles, y  $MSE$  es el error cuadrático medio

$$\frac{\sum_{p=0}^{100} \sum_{q=0}^{100} (u_{p,q}^0 - u_{p,q}^n)^2}{101 \cdot 101}.$$

El SSIM es una medida más avanzada que evalúa la similitud estructural entre la imagen original y la imagen procesada. Toma en cuenta la luminancia, el contraste y la estructura de la imagen. Un valor más cercano a 1 indica una mayor similitud entre las imágenes y, por lo tanto, una mejor calidad.

**Definición 1.3.3.** El índice SSIM implica la comparación de ventanas deslizantes de píxeles en las imágenes originales y procesadas, y se define como

$$SSIM = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)},$$

donde  $\mu_x, \mu_y$  son las medias de las ventanas,  $\sigma_x, \sigma_y$  son las desviaciones estándar de las ventanas,  $\sigma_{xy}$  es la covarianza de las ventanas, y  $C_1$  y  $C_2$  son constantes para evitar la indeterminación en casos especiales.

Veamos los valores que han dado las tres medidas de calidad en las diferentes imágenes. Primero vamos a analizar los diferentes núcleos discretos, cuyos resultados se muestran en la Tabla 1.1.

Y las medidas para evaluar la calidad de la imagen nos confirman que la matriz del núcleo A es la que mejores resultados ha dado y que la matriz del núcleo D, que a priori se esperaba que fuese la peor porque cogía información de píxeles mas alejados, efectivamente, es la que peor resultados ha dado.

Puesto que la matriz A es la que mejores resultados ha dado he repetido el experimento con esa matriz pero con  $t = 10$  en lugar de  $t = 2$ , los resultados se muestran en la Tabla 1.2.

Vemos que ha dado valores prácticamente idénticos a la matriz D con tiempo  $t = 2$ , es decir ha empeorado la calidad de la imagen, ya que con la matriz A y tiempo  $t = 2$  ya habíamos hecho desaparecer el ruido y si la filtramos más tiempo lo único que va a ocurrir es que va a tender a ser

		<b>Matriz</b>			
		A	B	C	D
SNR	Figura 1.2	$72.33 \times 10^{-3}$	$63.76 \times 10^{-3}$	$67.59 \times 10^{-3}$	$57.91 \times 10^{-3}$
	Figura 1.4	15.42	12.41	13.40	11.52
PSNR	Figura 1.2	9.66	9.65	9.65	9.64
	Figura 1.4	21.20	18.19	19.19	17.30
SSIM	Figura 1.2	$777.96 \times 10^{-3}$	$777.67 \times 10^{-3}$	$777.88 \times 10^{-3}$	$777.08 \times 10^{-3}$
	Figura 1.4	$721.18 \times 10^{-3}$	$516.30 \times 10^{-3}$	$580.91 \times 10^{-3}$	$432.13 \times 10^{-3}$

Tabla 1.1: SNR, PSNR y SSIM para los diferentes núcleos de la sección 1.3.1

		<b>Tiempo</b>	
		2s	10s
SNR	Figura 1.2	$72.33 \times 10^{-3}$	$57.88 \times 10^{-3}$
	Figura 1.4	15.42	11.48
PSNR	Figura 1.2	9.66	9.64
	Figura 1.4	21.20	17.26
SSIM	Figura 1.2	$777.96 \times 10^{-3}$	$776.94 \times 10^{-3}$
	Figura 1.4	$721.18 \times 10^{-3}$	$429.76 \times 10^{-3}$

Tabla 1.2: SNR, PSNR y SSIM con diferentes tiempos

una imagen con un valor de gris homogéneo en cada píxel. Este hecho lo hemos comprobado experimentando pero también podríamos haber utilizado el concepto de Optimal Stopping Time (OST), una herramienta teórica fundamental que busca determinar el instante óptimo para concluir el tratamiento de imágenes. A diferencia de medidas estáticas, el OST aborda la dinámica del proceso, considerando cuándo la información adicional deja de aportar mejoras perceptibles en la calidad de la imagen.

También he comparado las medidas de calidad frente al tamaño de paso del tiempo y ahí la diferencia es de centésimas, por lo que no se aprecia que haya diferencia en las imágenes con un tamaño de paso del doble o el triple y por ello no se incluye tabla.

Y por último vamos a valorar las imágenes de la Sección 1.3.2.



		<b>p</b>		
		2	3	4
SNR	Figura 1.5	10.30	10.37	10.41
	Figura 1.5	16.09	16.15	16.19
SSIM	Figura 1.5	$377.70 \times 10^{-3}$	$356.98 \times 10^{-3}$	$355.09 \times 10^{-3}$

Tabla 1.3: SNR, PSNR y SSIM con diferentes p de la Sección 1.3.2

Las tres medidas de calidad son muy similares para los tres valores de  $p$ . A vista del ojo humano no se aprecian diferencias pero según los experimentos cuanto más alto es  $p$  más parecida será la imagen filtrada a la original.



## Capítulo 2

# Filtrado por difusión no lineal

En este capítulo estudiaremos el filtrado de imágenes por difusión no lineal. Trataremos de solventar los problemas que genera el filtrado por difusión lineal: la sobredifusión, desplazamiento de bordes en diferentes escalas y propiedades de suavizado no conservadas en dimensiones superiores.

La sobredifusión consiste en el difuminado de estructuras (vértices, aristas,...) que a priori queremos conservar o incluso mejorar, conocidos en general como bordes de la imagen, las cuales se definen como el conjunto de puntos donde el laplaciano de la señal suave resultante tiene un extremo local.

El filtrado lineal de difusión puede desplazar los bordes al pasar de escalas más finas a más gruesas. Este desplazamiento de estructuras identificadas en una escala gruesa no proporciona la ubicación correcta y requiere ser rastreado hasta la imagen original. La correspondencia entre la información desplazada obtenida a diferentes escalas puede resultar difícil en la práctica y las bifurcaciones pueden generar inestabilidades. Este problema se conoce comúnmente como el problema de correspondencia, véase [10] y [13].

Algunas propiedades de suavizado del espacio de escala gaussiano no se transfieren de casos unidimensionales a dimensiones superiores. Por ejemplo, la invarianza bajo rotaciones o transformaciones afines no se preserva de manera directa cuando se aplica el suavizado gaussiano en dimensiones superiores. Esto se debe a que en dimensiones superiores, la influencia de los vecinos en la suavización no es tan simple como en el caso unidimensional. Mientras que en una dimensión, la influencia de cada punto en el suavizado está claramente definida por la distribución gaussiana simétrica alrededor de ese punto, en dimensiones superiores, la influencia de los vecinos varía en función de la dirección y la distancia en relación con el punto central. Por lo tanto, las propiedades de isotropía y escala que son inherentes al suavizado gaussiano en una dimensión no se mantienen de manera directa en dimen-

siones superiores, lo que puede requerir estrategias adicionales para lograr la invarianza deseada en el procesamiento de imágenes.

El filtrado de paso bajo de Canny [7] no considera bien todos los bordes que, según nuestra percepción, deberían considerarse (cf. [8]). Malik y Perona introdujeron una mejora importante en la teoría de detección de bordes sustituyendo la ecuación lineal de difusión por una ecuación no lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(\|\nabla u\|^2)\nabla u), \quad u(0) = u_0. \quad (2.1)$$

En esta ecuación,  $g$  es una función suave y no creciente con  $g(0) = 1$ ,  $g(x) \geq 0$ , donde  $g(x)$  tiende a cero en el infinito. La idea es que el proceso de suavizado obtenido por la ecuación es "condicional", es decir, si  $\nabla u$  es grande entonces la difusión será baja y por lo tanto se mantendrá la localización exacta de los bordes. Si  $\nabla u$  es pequeño, entonces la difusión tenderá a suavizarse aun más alrededor de  $x$ .

Para ejemplificar este comportamiento en los bordes nos limitaremos al caso unidimensional (para el caso bidimensional ver [20]). Esto simplifica la notación e ilustra el comportamiento principal ya que cerca de un borde recto una imagen bidimensional se aproxima a una función de una variable. Para la difusividad

$$g(s^2) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}, \quad (2.2)$$

dependiente de un parámetro  $\lambda > 0$ , se deduce que la función de flujo  $\Phi(s) := sg(s^2)$  satisface  $\Phi'(s) \geq 0$  para  $|s| \leq \lambda$ , y  $\Phi'(s) < 0$  para  $|s| > \lambda$ . Y podemos reescribir la ecuación (2.1) como

$$\partial_t u = \Phi'(u_x) u_{xx}, \quad (2.3)$$

observamos que, a pesar de su difusividad no negativa, el modelo de Perona-Malik es de tipo parabólico hacia adelante para  $|u_x| \leq \lambda$ , y de tipo parabólico hacia atrás para  $|u_x| > \lambda$ . Por lo tanto,  $\lambda$  desempeña el papel de parámetro de contraste que separa las áreas de difusión hacia delante (bajo contraste) de las hacia atrás (alto contraste).

Sin embargo, el modelo de Perona-Malik tiene varios problemas. Si la señal tiene mucho ruido, con ruido blanco, el gradiente tendrá muchos extremos irrelevantes que se mantendrán y el modelo no ayudará a eliminarlos. Malik y Perona propusieron eliminar esta dificultad mediante un primer suavizado de la imagen utilizando algún filtro de paso bajo. Parece funcionar bien en la práctica pero en la teoría no deja de ser una técnica que hace perder la precisión de los bordes, que es justamente lo que intentábamos evitar.

La segunda dificultad surge al intentar obtener la existencia y la unicidad de las soluciones de la propia ecuación. Entre las funciones  $g$  que Perona y Malik consideran admisibles, por ejemplo (2.2), la función de flujo debe ser no decreciente, si esto no se verifica y  $\Phi$  es no creciente entonces tenemos un problema mal puesto, que en la práctica usando imágenes muy parecidas puede dar resultados muy diferentes.

Para solucionar estos problemas del modelo de Perona-Malik, Catté propuso una regularización que será robusta en presencia de ruido y coherente desde el punto de vista formal (cf. [8]). Se basa en considerar un único parámetro: la escala. En esa regularización definen el "suavizado selectivo" de  $u_0$  a escala  $t^{1/2}$  como función de  $u(x)$  verificando

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(\|\nabla u_\sigma\|^2)\nabla u), \quad u(0) = u_0, \quad (2.4)$$

donde  $u_\sigma = K_\sigma * u$  y  $K_\sigma$  es gaussiana. En [8] se establece la existencia, unicidad y regularidad de la solución en tiempo  $t$  que corresponde a la escala  $\sigma = t^{1/2} > 0$ .

Generalizando el modelo (2.4), en esta memoria estudiaremos el proceso de filtrado no lineal basado en el problema de valor inicial y contorno siguiente:

$$\begin{cases} u_t(\bar{x}, t) = \operatorname{div}(D(u(\bar{x}, t))\nabla u(\bar{x}, t)), \\ u(\bar{x}, 0) = u_0(\bar{x}), \\ \langle D(u)\nabla u, n \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $(\bar{x}, t) \in Q_T$ , con  $Q_T = \Omega \times [0, T]$  siendo  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  el dominio de definición de  $u$ , el cual va a suponerse rectangular por sencillez. Además,  $\operatorname{div}$  es el operador divergencia

$$\operatorname{div}(F)(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y), \quad F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

mientras que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar en  $\mathbb{R}^2$ . Asimismo, las condiciones frontera, última ecuación de (2.5), son de tipo Neumann siendo  $n$  el vector normal exterior a la frontera  $\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$ . Desde el punto de vista de  $u$  como representación de una imagen, la condición de contorno indica que el proceso de regularización queda aislado de posibles efectos en los bordes de la imagen.

Por otro lado, la función  $D = D(u)$

$$u(x, t) \rightarrow D(u)(x, t) = D(u(x, t)) : \bar{Q}_T \rightarrow \mathbb{R},$$

donde  $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$  y  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , verifica las hipótesis siguientes:

(H8) Existen  $\beta > \alpha > 0$  tal que para todo  $u : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  se tiene que

$$\beta \geq |D(u(\bar{x}, t))| \geq \alpha, \quad (\bar{x}, t) \in \overline{Q_T}.$$

(H9) La función  $D$  es Lipschitz continua en  $u$ , es decir, existe  $L > 0$  tal que para  $u : \overline{Q_T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $(\bar{x}, t), (\bar{y}, t) \in \overline{Q_T}$  se tiene que

$$|D(u(\bar{x}, t)) - D(u(\bar{y}, t))| \leq L\|\bar{x} - \bar{y}\|.$$

Estas serán completadas con otras hipótesis requeridas por las propiedades de espacio-escala (cf. Sección.2.2).

## 2.1. Propiedades matemáticas de (2.5)

Puesto que (2.5) se plantea como un modelo matemático para filtrar imágenes por difusión no lineal, es necesario analizar primero su carácter de bien puesto. Con ello se entiende asegurar la existencia y unicidad de solución (en algún sentido), así como la dependencia continua con respecto a los datos iniciales.

Dicho estudio se lleva a cabo a partir de una formulación alternativa (o débil) que permite relajar los requerimientos de regularidad para  $u$  exigidos por el problema (2.5).

### 2.1.1. Formulación débil y solución débil

En lo que sigue,  $L^2(\Omega)$  denota el conjunto de funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  cuadrado integrables en  $\Omega$ . Recordemos que  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert para el producto interno

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\Omega} f(\bar{x})g(\bar{x})d\bar{x},$$

con norma asociada  $\|f\|_{L^2} = (f, f)_{L^2}^{\frac{1}{2}}$ . La pertenencia a  $L^2(\Omega)$  no requiere condiciones de regularidad. Podemos, en este sentido, elevar la exigencia y definir (cf. [6])

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \text{existen } g_1, g_2 \in L^2(\Omega) \text{ tales que}$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\bar{x} = - \int_{\Omega} g_1 \varphi d\bar{x}, \quad \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\bar{x} = - \int_{\Omega} g_2 \varphi d\bar{x}, \quad \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega)\},$$

siendo  $C_C^\infty(\Omega)$  el espacio de funciones de clase  $C^\infty(\Omega)$  y soporte compacto. El conjunto  $H^1(\Omega)$  se llama espacio de Sobolev de orden uno. Su definición lleva implícita una cierta "derivación débil", en el sentido de la existencia

de dos funciones  $g_1$  y  $g_2$  que validan una cierta integración por partes con las funciones de  $C_C^\infty(\Omega)$ . Esto lleva a definir, para  $v \in H^1(\Omega)$ , el "gradiente" de  $v$  como

$$\nabla v = (g_1, g_2),$$

siendo  $g_1, g_2$  las funciones de la definición de  $H^1(\Omega)$ . Por otro lado, la forma bilineal

$$(u, v) = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2} \quad u, v \in H^1(\Omega),$$

define un producto interno que dota a  $H^1(\Omega)$  de estructura de espacio de Hilbert separable (cf. [6]).

**Definición 2.1.1.** Una solución clásica de (2.5) es una función  $u : (0, T] \rightarrow C^2(\Omega)$  verificando (2.5), donde  $C^2(\Omega)$  denota el espacio de funciones de clase  $C^2$  en  $\Omega$ . Una solución débil de (2.5) es una función  $u : (0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  verificando

$$\int_{\Omega} u_t v d\bar{x} + \int_{\Omega} \langle \nabla v, D(u) \nabla u \rangle d\bar{x} = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega), t \in (0, T]. \quad (2.6)$$

La igualdad (2.6) se denomina formulación débil de (2.5).

Observemos que la formulación débil (2.6) relaja los requerimientos de regularidad de (2.5). Por otro lado, toda solución clásica es una solución débil. Esto es así por lo siguiente: utilizando el Teorema de la divergencia, se tiene que

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div}(D(u) \nabla u) d\bar{x} = \int_{\partial\Omega} \langle v D(u) \nabla u, n \rangle d\bar{x} - \int_{\Omega} \langle \nabla v, D(u) \nabla u \rangle d\bar{x},$$

donde  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $v \in C^1(\bar{\Omega})$  y, en el lado derecho, la primera es una integral de curva sobre la frontera de  $\Omega$ . Si  $u$  es solución clásica de (2.5), es claro que  $u \in H^1(\Omega)$  y por la condición de contorno, la integral sobre  $\partial\Omega$  se anula de modo que

$$\int_{\Omega} u_t v d\bar{x} = \int_{\Omega} v \operatorname{div}(D(u) \nabla u) d\bar{x} = - \int_{\Omega} \langle \nabla v, D(u) \nabla u \rangle d\bar{x} \quad v \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (2.7)$$

La igualdad anterior es válida, en particular, para todas las restricciones a  $\Omega$  de funciones  $v \in C_C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , las cuales forman un subespacio denso en  $H^1(\Omega)$  (cf. [6]). Esto lleva a que, por densidad, (2.7) sea válida para todo  $v \in H^1(\Omega)$  y, por tanto,  $u$  es solución débil de (2.5).

Para una justificación más completa de la formulación (2.6), véase, e.g. [4].

### 2.1.2. Carácter de bien puesto

El resultado que asegura la coherencia de (2.5) como modelo es el siguiente.

**Teorema 2.1.2.** *Supongamos que  $D$  satisface (H8), (H9) y  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Entonces el problema (2.5) admite una única solución débil  $u : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  continua y que depende de forma continua del dato inicial. Además, si  $D$  es de clase  $C^\infty(\bar{Q}_T)$ , entonces  $u$  es solución clásica de (2.5) y es de clase  $C^\infty(\bar{\Omega} \times (0, T])$ .*

La demostración en detalle del resultado excede los objetivos de este trabajo. Vale la pena mencionar, sin embargo, que los pasos esenciales consisten en el uso de la formulación débil (2.6), su aproximación mediante un problema lineal asociado y la aplicación del Teorema de punto fijo de Schauder (cf. [6]). Para el lector interesado véanse las referencias [3], [8] y [20].

## 2.2. Propiedades espacio-escala

Para  $t \geq 0$  vamos a definir el operador de espacio-escala

$$T_t : u_0 \rightarrow T_t(u_0) := u(t) = u(\cdot, t), \quad (2.8)$$

tal que  $u(t)$  es la única solución débil en el instante  $t$  de (2.5) con valor inicial  $u_0$ . En lo que sigue se asume que se cumplen las hipótesis (H8) y (H9) definidas al principio del Capítulo 2.

### 2.2.1. Invariancia por cambio de nivel de gris

**Lema 2.2.1.** *Vamos a asumir que  $D$  en (2.5) adicionalmente cumple*

$$D(u(\bar{x}, t) + C) = D(u(\bar{x}, t)), \quad (2.9)$$

para todo  $(\bar{x}, t) \in Q_T$ ,  $u(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$  y  $C = (C_1, C_2)^T \in \mathbb{R}^2$ .

Entonces

$$\begin{aligned} T_t(0) &= 0, \\ T_t(u_0 + C) &= T_t(u_0) + C, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

*Demostración.* La demostración se basa en la unicidad de la solución de (2.5). Notemos lo primero de todo que  $u = 0$  es una solución con  $u_0 = 0$  y por lo tanto se tiene que  $T_t(0) = 0$ . Por otro lado, como se cumple (2.9) tenemos que

$$w(t) = T_t(u_0) + C, \quad t \geq 0,$$

cumple (2.5) con valor inicial  $u_0 + C$  y por consiguiente, por la unicidad, debe coincidir con  $T_t(u_0 + C)$ .  $\square$



### 2.2.2. Invariancia de contraste inverso

**Lema 2.2.2.** *Vamos a asumir que  $D$  en (2.5) adicionalmente cumple*

$$D(-u(\bar{x}, t)) = D(u(\bar{x}, t)), \quad (2.11)$$

para todo  $(\bar{x}, t) \in Q_T, u(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$ . Entonces

$$T_t(-u_0) = T_t(u_0), \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

*Demostración.* Por (2.11) las funciones  $w_1(t) = T_t(-u_0)$  y  $w_2(t) = -T_t(-u_0)$  cumplen (2.6) con el mismo valor inicial  $-u_0$ . Por lo tanto, por la unicidad,  $w_1 = w_2$  y se cumple (2.12).  $\square$

*Nota 2.2.3.* La invariancia de contraste inverso se refiere a la propiedad según la cual la transformación de difusión aplicada a una imagen no depende significativamente del contraste absoluto de la imagen, sino más bien de la relación relativa entre los píxeles vecinos. La transformación de difusión tiende a preservar las relaciones de contraste entre las diferentes partes de la imagen, en lugar de enfocarse en el valor absoluto del contraste de la imagen en su totalidad. Esto puede ser útil para preservar detalles en áreas de baja intensidad y para mejorar la detección de bordes en áreas de alta intensidad.

### 2.2.3. Invariancia promedio de valor de gris

Para  $f \in L^2(\Omega)$  definimos

$$m(f) = \frac{1}{A(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) d\Omega,$$

donde  $A(\Omega)$  representa el área de  $\Omega$ .

**Lema 2.2.4.** *Se tiene que*

$$m(T_t(u_0)) = m(u_0), \quad t \geq 0. \quad (2.13)$$

*Demostración.* Consideramos la función

$$G(t) = \int_{\Omega} u(\bar{x}, t) d\bar{x}, \quad t \geq 0,$$

donde  $u(t) = T_t(u_0)$ . Tenemos que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|G(t) - G(0)| = \left| \int_{\Omega} u(\bar{x}, t) - f(\bar{x}) d\bar{x} \right| \leq A(\Omega)^{1/2} \|u(t) - f\|_{L^2}.$$

Como  $u \in C(0, T, L^2)$  entonces  $G$  es continua en  $t = 0$ . Por otro lado, el teorema de la divergencia y las condiciones frontera Neumann implican que

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(D(u)\nabla u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \langle D(u)\nabla u, n \rangle d\Gamma = 0.$$

Por lo tanto,  $G(t)$  es constante para todo  $t \geq 0$  y en consecuencia se cumple (2.13).  $\square$

#### 2.2.4. Invariancia traslacional

Definimos el operador traslacional  $\tau_h$  como

$$\tau_h u(\bar{x}) = u(\bar{x} + h), \quad u \in L^2(\Omega), \quad \bar{x}, h \in \mathbb{R}^2.$$

**Lema 2.2.5.** *Vamos a asumir que  $D$  en (2.5) adicionalmente cumple*

$$D(\tau_h u(\bar{x}, t)) = D(u(\bar{x}, t)), \quad (2.14)$$

para todo  $(\bar{x}, t) \in Q_T$ ,  $u(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$ . Entonces

$$T_t(\tau_h u_0) = \tau_h(T_t(u_0)). \quad (2.15)$$

*Demostración.* Debido a (2.14), la función  $w(t) = T_t(\tau_h u_0)$  es solución de (2.5) con valor inicial  $\tau_h u_0$  y por la unicidad se cumple (2.15).  $\square$

### 2.3. Experimentos numéricos

En esta sección se han realizado varios experimentos que complementan los de la Sección 1.3. Vamos a estudiar el problema de filtrado no lineal (2.5) siendo

$$D(u(\bar{x}, t)) = g(\|\nabla u_{\sigma}\|^2),$$

donde  $u_{\sigma} = K_{\sigma} * u$  y  $K_{\sigma}$  es una gaussiana de las estudiadas en el Capítulo 1. A esta función  $g$  la denominaremos función de parada. Es decir, primero filtraremos la imagen de forma lineal y después filtraremos de forma no lineal la imagen resultante en cada nivel de tiempo.

#### 2.3.1. Elección de la función de parada

Una función de parada en el contexto del procesamiento de imágenes se refiere a una función matemática utilizada en algoritmos de difusión o suavizado para controlar el proceso de difusión y determinar dónde detener la

propagación de la difusión. Vamos a utilizar funciones basadas en los gradientes de la imagen, su propósito es preservar los bordes y los detalles finos de la imagen en las zonas de gradiente alto mientras se elimina el ruido o se suavizan las regiones con gradiente bajo.

La función de parada se elige teóricamente cumpliendo dos condiciones. La primera es

$$\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = 1,$$

de modo que la tasa de difusión es alta dentro de regiones uniformes y la segunda, la más importante, es

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0,$$

de modo que la difusión es cero o insignificante sobre los bordes.

Una función de parada sugerida por Perona y Malik es

$$g_1(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\lambda}\right)^2}. \quad (2.16)$$

Vamos a comparar las imágenes de la Sección 1.3 con las obtenidas usando esta función de parada y diferentes valores de  $\lambda$ .

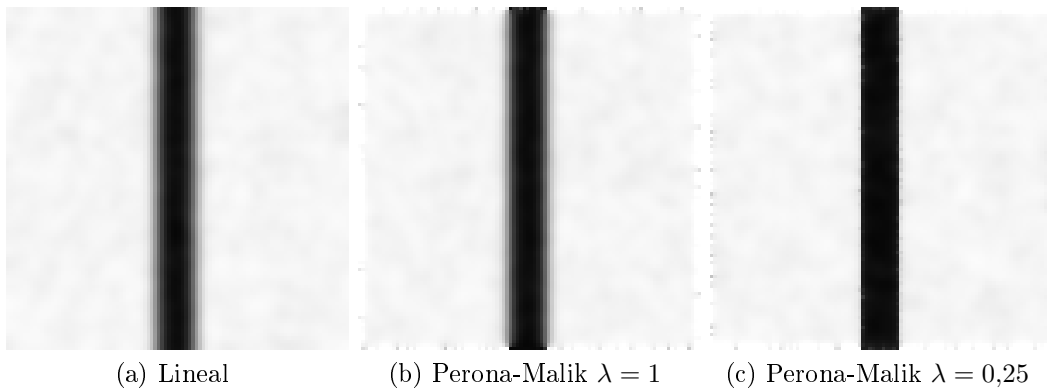


Figura 2.1: Imagen sintética, franja negra vertical.

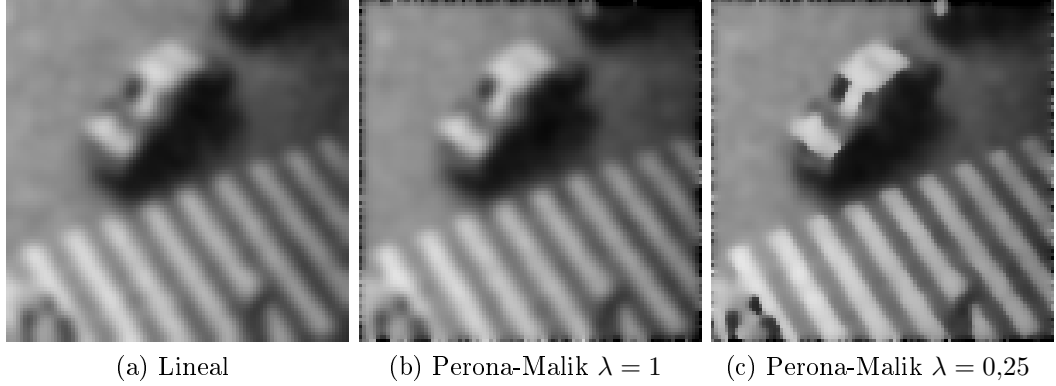


Figura 2.2: Un coche en un paso de cebra.

Se nota una gran mejoría de las imágenes, sobre todo cuando  $\lambda = 0,25$ . La imagen sintética de la franja negra vertical ya no está difuminada, se ve claramente el borde y prácticamente ha conseguido eliminar todo el ruido en los laterales de la franja y conseguido un color gris promedio. Por otro lado, en la imagen del coche vemos mucha más diferencia de color en el paso de cebra y el coche, ya no es tan gris la imagen y se ve una gran diferencia en los peatones de la esquina inferior izquierda ya que con el filtro no lineal se mantienen mejor los bordes.

Hay muchas opciones para la función de parada, en [12] han estudiado cinco:

- La primera sugerida por Perona y Malik es (2.16).
- La segunda de Perona y Malik

$$g_2(s) = \exp\left(-\left(\frac{s}{\lambda}\right)^2\right).$$

- La función bipeso de Tukey es

$$g_3(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{s}{\lambda\sqrt{2}} \right)^2 \right]^2, & s \leq \lambda\sqrt{2}, \\ 0, & s > \lambda\sqrt{2}. \end{cases}$$

- Otra función de parada es

$$g_4(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\alpha(s)}},$$

donde

$$\alpha(s) = 2 - \frac{2}{1 + \left(\frac{s}{\lambda}\right)^2}.$$

- La función de parada propuesta por Weickert en [20] es

$$g_5(s) = \begin{cases} 1 - \exp\left(\frac{-3,31488 * \lambda^8}{s^8}\right), & s \neq 0, \\ 1, & s = 0. \end{cases}$$

En las siguientes figuras encontraremos la imagen con ruido inicial y los filtrados no lineales con las funciones de parada  $g_1$  y  $g_3$ .

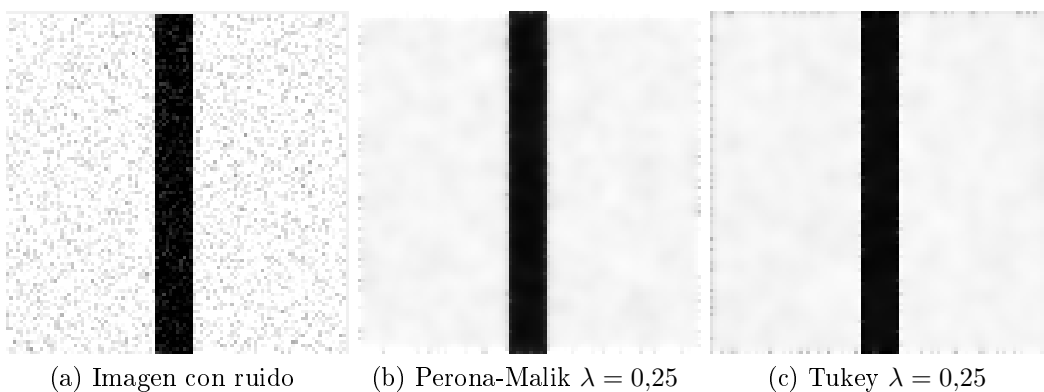


Figura 2.3: Imagen sintética, franja negra vertical.

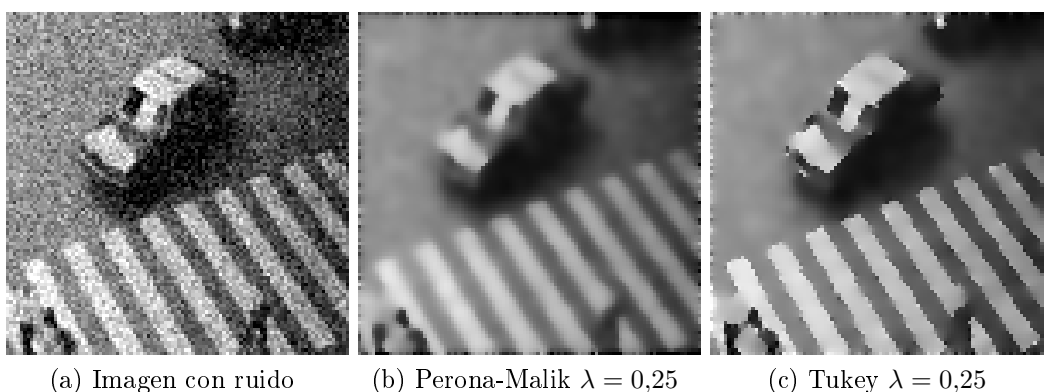


Figura 2.4: Un coche en un paso de cebra.

En la imagen sintética obtenemos un buen resultado usando ambas funciones de parada, no se aprecia mucha diferencia entre las imágenes. Sin embargo, en la imagen real, vemos que la función de parada bipeso de Tukey da un mejor resultado, es menos borrosa y mantiene mejor los tonos del paso de cebra y del coche, hay más diferencia que en la imagen sintética y se asemeja más a la original que con la función de Perona y Malik.

### 2.3.2. Medidas para evaluar la calidad

En esta sección vamos a dar una comparación de los indicadores mostrados en la Sección 1.3 para evaluar la calidad de la restauración.

		Lineal	Perona-Malik $\lambda = 0,25$	Tukey $\lambda = 0,25$
SNR	Figura 2.1	$72.33 \times 10^{-3}$	$74.11 \times 10^{-3}$	$84.47 \times 10^{-3}$
	Figura 2.2	15.42	15.27	19.67
PSNR	Figura 2.1	9.66	9.66	9.67
	Figura 2.2	21.20	21.06	25.46
SSIM	Figura 2.1	$777.96 \times 10^{-3}$	$778.73 \times 10^{-3}$	$778.13 \times 10^{-3}$
	Figura 2.2	$721.18 \times 10^{-3}$	$734.73 \times 10^{-3}$	$876.56 \times 10^{-3}$

Tabla 2.1: SNR, PSNR y SSIM para la funciones de parada y el filtrado lineal

Comprobamos que el filtrado por difusión no lineal obtiene mejores resultados que el lineal y que la función bipeso de Tukey es mejor que la de Perona-Malik.

# Anexo I

## Convolución discreta

```
1 % Parámetros
2 format longEng
3 Lx = 1; % Longitud en x
4 Ly = 1; % Longitud en y
5 nx = 100; % Número de puntos de discretización en x
6 ny = 100; % Número de puntos de discretización en y
7 dx = 1; % Espaciado en x
8 dy = 1; % Espaciado en y
9 alpha = 1; % Coeficiente de difusión
10 dt = 0.01; % Paso de tiempo para estabilidad
11
12 % Condiciones iniciales imagen sintética
13 u = zeros(nx, ny);
14 u(:, 45:55) = 100; % Franja en el centro
15
16 % Condiciones iniciales imagen real
17 %im = imread('coche.jpg'); % lee la imagen
18 %im_resized = imresize(im, [nx, ny]); % redimensiona la
    imagen a un tamaño de nx x ny
19 %u = im2double(rgb2gray(im_resized)); % convierte la imagen a
    una matriz de valores de intensidad y escala de grises
20
21 % Agregar ruido blanco a la imagen
22 u = imnoise(u, 'gaussian', 0, 0.01); % Puedes ajustar el
    nivel de ruido según tus necesidades
23
24 % Matriz de convolución
25 A = zeros(3,3);
26 A(1,2) = 1;
27 A(2,1) = 1;
28 A(2,2) = -4;
29 A(2,3) = 1;
30 A(3,2) = 1;
31 A_vector = reshape(A', 1, 9);
32
33 %B = ones(3,3);
```

```

34 %B(2,2) = -8;
35
36 %C = ones(3,3);
37 %C(1,2) = 0;
38 %C(2,1) = 0;
39 %C(2,2) = -4;
40 %C(2,3) = 0;
41 %C(3,2) = 0;
42
43 % Iteración temporal
44 t_final = 2; % Tiempo final
45 t = 0;
46 u_ampliada = zeros(nx+2,ny+2);
47
48 while t < t_final
49
50     u_ampliada(2:nx+1,2:ny+1) = u;
51     u_ampliada(1,1) = u(1,1);
52     u_ampliada(nx+2,1) = u(nx,1);
53     u_ampliada(1,ny+2) = u(1,ny);
54     u_ampliada(nx+2,ny+2) = u(nx,ny);
55     u_ampliada(2:nx+1,1) = u(:,1);
56     u_ampliada(1,2:ny+1) = u(1,:);
57     u_ampliada(nx+2,2:ny+1) = u(nx,:);
58     u_ampliada(2:nx+1,ny+2) = u(:,ny);
59
60     for i = 2:nx+1
61         for j = 2:ny+1
62             v = u_ampliada(i-1:i+1,j-1:j+1);
63
64             u(i-1,j-1) = u_ampliada(i,j) + dt * A_vector * v
65                 (:);
66         end
67     end
68
69     t = t + dt;
70
71 end
72
73 imshow(u);
74 zlabel('x');
75 xlabel('y');
76 ylabel('Escala de grises');
77 title(sprintf('Tiempo t = %.4f', t));
78
79 % Definimos la escala de colores manualmente
80 colormap(flipud(gray(100)));
81

```



```
82 | % Configuramos la escala de colores para que la temperatura
    |     máxima sea negra
83 | clim([0, 1]);
84 | grid off;
```

## Implementación alternativa

```

1  % Parámetros
2  format longEng
3  Lx = 1; % Longitud en x
4  Ly = 1; % Longitud en y
5  nx = 100; % Número de puntos de discretización en x
6  ny = 100; % Número de puntos de discretización en y
7  dx = 1; % Espaciado en x
8  dy = 1; % Espaciado en y
9  alpha = 1; % Coeficiente de difusión
10 dt = 0.01; % Paso de tiempo para estabilidad
11
12 % Condiciones iniciales imagen sintética
13 u = zeros(nx, ny);
14 u(:, 45:55) = 100; % Franja en el centro
15
16 % Condiciones iniciales imagen real
17 %im = imread('coche.jpg'); % lee la imagen
18 %im_resized = imresize(im, [nx, ny]); % redimensiona la
    imagen a un tamaño de nx x ny
19 %u = im2double(rgb2gray(im_resized)); % convierte la imagen a
    una matriz de valores de intensidad y escala de grises
20
21 % Agregar ruido blanco a la imagen
22 u = imnoise(u, 'gaussian', 0, 0.01); % Puedes ajustar el
    nivel de ruido según tus necesidades
23
24 % Iteración temporal
25 t_final = 2; % Tiempo final
26 t = 0;
27 u_ampliada = zeros(nx+2,ny+2);
28
29 while t < t_final
30
31     u_ampliada(2:nx+1,2:ny+1) = u;
32     u_ampliada(1,1) = u(1,1);
33     u_ampliada(nx+2,1) = u(nx,1);
34     u_ampliada(1,ny+2) = u(1,ny);
35     u_ampliada(nx+2,ny+2) = u(nx,ny);
36     u_ampliada(2:nx+1,1) = u(:,1);
37     u_ampliada(1,2:ny+1) = u(1,:);
38     u_ampliada(nx+2,2:ny+1) = u(nx,:);
39     u_ampliada(2:nx+1,ny+2) = u(:,ny);
40
41     u_ampliada(2:nx+1,2:ny+1) = u_ampliada(2:nx+1,2:ny+1) +
        dt * (u_ampliada(2:nx+1,1:ny) + u_ampliada(2:nx+1,3:ny
            +2) + u_ampliada(1:nx,2:ny+1) + u_ampliada(3:nx+2,2:ny
                +1) -4*u_ampliada(2:nx+1,2:ny+1));

```

```
42     t = t + dt;
43
44     end
45 end
46
47
48 [X, Y] = meshgrid(linspace(0, Lx, nx), linspace(0, Ly, ny));
49 surf(Y,u',X);
50 zlabel('x');
51 xlabel('y');
52 ylabel('Escala de grises');
53 view(0, 90);
54 title(sprintf('Tiempo t = %.4f', t));
55
56 % Definimos la escala de colores manualmente
57 colormap(flipud(gray(100)));
58
59 % Configuramos la escala de colores para que la temperatura
60     máxima sea negra
61 clim([0, 1]);
62 grid off;
```

Elección del parámetro  $p$ 

```

1  % Parámetros del problema
2  p = 4; % Valor de p
3  h = 0.01; % Valor de h
4  d = 1; % Valor de d
5  N = 100; % Tamaño de la matriz
6  T = 300; % Número de pasos de tiempo
7
8  % Crear una matriz de tamaño NxN para  $u^0$  (estado inicial)
9  im = imread('coche.jpg'); % lee la imagen
10 im_resized = imresize(im, [N, N]); % redimensiona la imagen a
    un tamaño de nx x ny
11 u = im2double(rgb2gray(im_resized)); % convierte la imagen a
    una matriz de valores de intensidad y escala de grises
12
13 % Agregar ruido blanco a la imagen
14 u = imnoise(u, 'gaussian', 0, 0.01); % Puedes ajustar el
    nivel de ruido según tus necesidades
15
16 % Transformada rápida de Fourier 2D
17 u_hat = fft2(u);
18
19 % Crear una matriz de frecuencias
20 [X, Y] = meshgrid(1:N, 1:N);
21 xi1 = (X - 1 - N/2) / N;
22 xi2 = (Y - 1 - N/2) / N;
23
24 % Iteración en el tiempo
25 for n = 1:T
26
27     % Calcular el término que involucra la norma Euclidiana
        de (xi1, xi2)
28     term = (1 + h * d * sqrt(xi1.^2 + xi2.^2).^p).^(-1);
29
30     % Actualizar  $u^n$  en el dominio de frecuencia
31     u_hat = term .* u_hat;
32
33 end
34
35 % Inversa de la Transformada Rápida de Fourier 2D
36 u = ifft2(u_hat);
37
38 % Visualizar el resultado final ( $u^n$ ) en el dominio espacial
39 imshow(real(u), []);

```

## Filtrado no lineal

```
1 % Parámetros
2 format longEng
3 Lx = 1; % Longitud en x
4 Ly = 1; % Longitud en y
5 nx = 100; % Número de puntos de discretización en x
6 ny = 100; % Número de puntos de discretización en y
7 dx = 1; % Espaciado en x
8 dy = 1; % Espaciado en y
9 dt = 0.01; % Paso de tiempo para estabilidad
10 lambda = 0.25; % Constante lambda
11 alpha = 1; % Constante alpha
12
13 % Condiciones iniciales
14 %u = zeros(nx, ny);
15 %u(:, 45:55) = 100; % Franja en el centro
16
17 im = imread('coche.jpg'); % lee la imagen
18 im_resized = imresize(im, [nx, ny]); % redimensiona la imagen
19 u = im2double(rgb2gray(im_resized)); % convierte la imagen a
    una matriz de valores de intensidad y escala de grises
20
21 %u = u .* 100; % le decimos que el negro es 100 y el blanco
    es 0
22 %imwrite(u, 'coche.png'); % guardamos la imagen
    redimensionada y en escala de grises
23
24 % Iteración temporal
25 t_final = 5; % Tiempo final
26 t = 0;
27 while t < t_final
28
29     u_lineal = funcionLineal(u, nx, ny, alpha, dx, dy, dt);
30
31     A = funcionParada(u_lineal, nx, ny, lambda, dx, dy);
32
33     u_vec = u(:); % convertimos u a un vector columna
34     A_vec = A(:); % convertimos A a un vector columna
35
36     % Solución de la ecuación del calor por método explícito
37     u_vec = u_vec + dt * A_vec;
38
39     u = reshape(u_vec, nx, ny); % convertimos la solución de
        vector a matriz
40
41     t = t + dt;
42
43 end
```

## Función de parada

```

1 function A = funcionParada(u, nx, ny, lambda, dx, dy)
2     % Matrices
3     A = zeros(nx,ny);
4
5     grad_x = zeros(nx,ny);
6     grad_y = zeros(nx,ny);
7
8     % Calcular norma al cuadrado del gradiente de u
9     grad_x(2:nx-1,1:ny) = (u(3:nx,1:ny) - u(1:nx-2,1:ny)) / (
10        dx);
11     grad_x(1,1:ny) = (u(2,1:ny) - u(1,1:ny)) / (dx);
12     grad_x(nx,1:ny) = (u(nx,1:ny) - u(nx-1,1:ny)) / (dx);
13     grad_y(1:nx,2:ny-1) = (u(1:nx,3:ny) - u(1:nx,1:ny-2)) / (
14        dy);
15     grad_y(1:nx,1) = (u(1:nx,2) - u(1:nx,1)) / (dy);
16     grad_y(1:nx,ny) = (u(1:nx,ny) - u(1:nx,ny-1)) / (dy);
17     grad_norm_sq = grad_x.^2 + grad_y.^2;
18
19     % Calcular función g de Perona-Malik
20     % g = 1 ./ (1 + grad_norm_sq / lambda^2);
21
22     % Calcular función g bipeso de Tukey
23     for i = 1:nx
24         for j = 1:ny
25             if sqrt(grad_norm_sq(i,j)) > lambda * sqrt(2)
26                 g(i,j) = 0;
27             else
28                 g(i,j) = ((1 - (grad_norm_sq(i,j) / (2*
29                     lambda^2)))^2)/2;
30             end
31         end
32     end
33
34     for i = 2:nx-1
35         for j = 2:ny-1
36             A(i,j) = 1/(2*dx^2)*((g(i+1,j)+g(i,j))*u(i+1,j) -
37                 (g(i+1,j)+2*g(i,j)+g(i-1,j))*u(i,j) + (g(i,j)
38                 +g(i-1,j))*u(i-1,j)) + 1/(2*dy^2)*((g(i,j+1)+g
39                 (i,j))*u(i,j+1) - (g(i,j+1)+2*g(i,j)+g(i,j-1))
40                 *u(i,j) + (g(i,j)+g(i,j-1))*u(i,j-1));
41         end
42     end
43
44     A(1,2:ny-1) = 1/(2*dx^2)*((g(i+1,j)+g(i,j))*(u(i+1,j)-u(i
45         ,j))) + 1/(2*dy^2)*((g(i,j+1)+g(i,j))*u(i,j+1) - (g(i,
46         j+1)+2*g(i,j)+g(i,j-1))*u(i,j) + (g(i,j)+g(i,j-1))*u(i
47         ,j-1));
48
49     A(nx,2:ny-1) = 1/(2*dx^2)*((g(i-1,j)+g(i,j))*(u(i,j)-u(i

```

```

-1,j))) + 1/(2*dy^2)*((g(i,j+1)+g(i,j))*u(i,j+1) - (g(
i,j+1)+2*g(i,j)+g(i,j-1))*u(i,j) + (g(i,j)+g(i,j-1))*u
(i,j-1));
38 A(2:nx-1,1) = 1/(2*dx^2)*((g(i+1,j)+g(i,j))*u(i+1,j) - (g
(i+1,j)+2*g(i,j)+g(i-1,j))*u(i,j) + (g(i,j)+g(i-1,j))*
u(i-1,j)) + 1/(2*dy^2)*((g(i,j+1)+g(i,j))*(u(i,j+1)-u(
i,j)));
39 A(2:nx-1,ny) = 1/(2*dx^2)*((g(i+1,j)+g(i,j))*u(i+1,j) - (
g(i+1,j)+2*g(i,j)+g(i-1,j))*u(i,j) + (g(i,j)+g(i-1,j))
*u(i-1,j)) + 1/(2*dy^2)*((g(i,j-1)+g(i,j))*(u(i,j)-u(i
,j-1)));
40 A(1,1) = 1/(2*dx^2)*((g(i+1,j)+g(i,j))*(u(i+1,j)-u(i,j)))
+ 1/(2*dy^2)*((g(i,j+1)+g(i,j))*(u(i,j+1)-u(i,j)));
41 A(1,ny) = 1/(2*dx^2)*((g(i+1,j)+g(i,j))*(u(i+1,j)-u(i,j))
) + 1/(2*dy^2)*((g(i,j-1)+g(i,j))*(u(i,j)-u(i,j-1)));
42 A(nx,1) = 1/(2*dx^2)*((g(i-1,j)+g(i,j))*(u(i,j)-u(i-1,j))
) + 1/(2*dy^2)*((g(i,j+1)+g(i,j))*(u(i,j+1)-u(i,j)));
43 A(nx,ny) = 1/(2*dx^2)*((g(i-1,j)+g(i,j))*(u(i,j)-u(i-1,j)
)) + 1/(2*dy^2)*((g(i,j+1)+g(i,j))*(u(i,j+1)-u(i,j)));
44 end

```





# Bibliografía

- [1] L. Álvarez, F. Guichard, P.-L Lions, J.-M Morel, Axioms and fundamental equations for image processing. *Arch. Rational Mech. Anal.* 123, 199–257 (1993).
- [2] A. Araújo, S. Barbeiro, E. Cuesta, A. Durán, Cross-Diffusion systems for image processing: I. The linear case, *J Math Imaging Vis* (2017) 58:447–467.
- [3] A. Araújo, S. Barbeiro, E. Cuesta, A. Durán, Cross-Diffusion systems for image processing: II. The nonlinear case, *J Math Imaging Vis* (2017) 58:427–446.
- [4] T. Arbogast, J. Bona, *Methods of Applied Mathematics*, University of Texas at Austin (2004).
- [5] J. Aubert, P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing*. Springer, Berlin (2001).
- [6] H. Brezis, *Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York (2011).
- [7] J.F. Canny, A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 8(6), 679–698 (1986).
- [8] F. Catté, P.-L. Lions, J.-M. Morel, T. Coll, Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 29, 182–193, (1992).
- [9] C. L. Dym, *Principles of Mathematical Modelling*, Elsevier (2004).
- [10] L.M.J. Florack, *Image Structure*. Springer, New York (1997).

- [11] R. Haberman, Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno, 3<sup>a</sup>ed. Prentice Hall (2003).
- [12] V. Kamalaveni, R. Anitha Rajalakshmi, K. A. Narayanankutty, Image Denoising Using Variations of Perona-Malik Model with Different Edge Stopping Functions, Elsevier (2015).
- [13] J.J. Koenderink, The structure of images. *Biol. Cybern.* 50, 363–370 (1984).
- [14] T. Lindeberg, On the axiomatic foundations of linear scale-space: Combining semi-group structure with causality vs. scale invariance. In: J. Sporring, M. Nielsen, L. Florack, P. Johansen, (eds.) *Gaussian Scale-Space Theory: Proceeding of Ph.D. School on Scale-Space Theory*, Copenhagen, pp. 75-98. Kluwer Academic Publishers, Springer, New York (1997).
- [15] T. Lindeberg, B.M. ter Haar Romeny, Linear scale-space: (I) Basic theory and (II) Early visual operations. In: B.M. ter Haar Romeny, (ed.) *Geometry-Driven Diffusion*, pp. 1–77. Kluwer Academic Publishers, Springer, Netherlands, Dordrecht (1994).
- [16] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press (1999).
- [17] E.J. Pauwels, L.J. Van Gool, P. Fiddelaers, T. Moons, An extended class of scale-invariant and recursive scale space filters. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 17 (7), 691–701 (1995).
- [18] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, New York (1983).
- [19] J. Weickert, S. Ishikawa, A. Imiya, Linear scale-space has first been proposed in Japan. *J. Math. Imaging Vis.* 10, 237–252 (1999).
- [20] J. Weickert, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. B.G. Teubner, Stuttgart (1998).

# Apéndice A

## Conceptos de teoría de semigrupos

Incluimos aquí algunos conceptos de teoría de semigrupos utilizados para el desarrollo de este trabajo. Para demostraciones y detalles, véase [18]. En lo que sigue  $X$  denotará un espacio de Banach con norma  $\|\cdot\|$ .

**Definición A.0.1.** Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  una familia uniparamétrica de operadores lineales acotados  $T(t) : X \rightarrow X$ . Se dice que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un semigrupo de operadores lineales acotados en  $X$  si

I)  $T(0) = I$  (siendo  $I$  el operador identidad en  $X$ ).

II)  $T(t+s) = T(t)T(s)$ ,  $t, s \geq 0$ .

La condición II) se denomina propiedad de semigrupo y el lado derecho se entiende en el sentido de la composición de operadores.

**Definición A.0.2.** Se dice que un semigrupo de operadores lineales acotados en  $X$ ,  $T(t) : X \rightarrow X, t \geq 0$ , es uniformemente continuo si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde, si  $A : X \rightarrow X$  es lineal y acotado,

$$\|A\| = \max_{\substack{\|\varphi\| \neq 0 \\ \varphi \in X}} \frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|}.$$

**Definición A.0.3.** Sea  $T(t) : X \rightarrow X, t \geq 0$  un semigrupo de operadores lineales acotados en  $X$ . El operador lineal  $D$  con dominio

$$\text{dom}(D) = \left\{ \varphi \in X \text{ tal que existe } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \right\} \subset X,$$

definido por

$$D\varphi = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t}$$

se llama generador infinitesimal del semigrupo  $T(t)$ .

Sea  $T(t) : X \rightarrow X, t \geq 0$ , un semigrupo de operadores lineales acotados uniformemente continuo. Observamos que para cualquier  $s$  y  $t$ , la propiedad de semigrupo permite escribir

$$T(s) - T(t) = T(t)(T(s-t) - I) \quad 0 < t < s.$$

El carácter acotado de los operadores y la propiedad (A.1) implican que

$$\lim_{s \rightarrow t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

En consecuencia, para todo  $\varphi \in X$ , la función  $u : t \rightarrow u(t) = T(t)\varphi$  es continua.

Por otro lado, si  $D : X \rightarrow X$  es un operador lineal acotado, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tD)^n}{n!}, \quad t \geq 0, \quad (\text{A.2})$$

converge en norma y define, para cada  $t \geq 0$ , un operador lineal acotado, que podemos denotar por  $e^{tD}$ . Estas dos propiedades sirven para caracterizar los generadores infinitesimales de semigrupos uniformemente continuos.

**Teorema A.0.4.** *Un operador lineal  $D$  es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo si y sólo si  $D$  es acotado.*

*De hecho, cada elemento  $T(t)$  del semigrupo viene dado por el operador (A.2), de modo que  $T(t) = e^{tD}, t \geq 0$ . Esto implica que  $t \rightarrow T(t)$  es diferenciable y*

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t) = DT(t) = T(t)D. \quad (\text{A.3})$$

**Definición A.0.5.** Un semigrupo  $T(t) : X \rightarrow X$  de operadores lineales acotados en  $X$  es fuertemente continuo o de clase  $C_0$  si para cada  $\varphi \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)\varphi = \varphi.$$

Puede comprobarse que si  $T(t) : X \rightarrow X, t \geq 0$  es un semigrupo  $C_0$  entonces para cada  $\varphi \in X$ , la función  $t \rightarrow T(t)\varphi, t \geq 0$ , es continua. Esto nos lleva, utilizando la propiedad (A.3), al concepto de solución débil de un PVI.

**Definición A.0.6.** Sea  $D$  el generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$ ,  $T(t) : X \rightarrow X, t \geq 0$  y  $\varphi \in X$ . Para todo  $t_\varepsilon > 0$  se dice que la función continua

$$u : [0, t_\varepsilon] \rightarrow X, \quad u(t) = T(t)\varphi,$$

es la solución débil del PVI en  $[0, t_\varepsilon]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t) &= Du(t), \quad 0 < t < t_\varepsilon, \\ u(0) &= \varphi. \end{aligned} \tag{A.4}$$

El concepto anterior generaliza el de la solución clásica definida como una función  $u : [0, t_\varepsilon] \rightarrow X$  continua en  $[0, t_\varepsilon]$ , diferenciable con continuidad en  $(0, t_\varepsilon)$  con  $u(t) \in \text{dom}(D)$  para  $0 < t < t_\varepsilon$  y verificando (A4).

**Definición A.0.7.** Una función  $u : [0, t_\varepsilon] \rightarrow X$  es una solución clásica de (4.4) en  $[0, t_\varepsilon]$  si  $u$  es continua en  $[0, t_\varepsilon]$ , diferenciable con continuidad en  $(0, t_\varepsilon)$ ,  $u(t) \in \text{dom}(D)$  para  $0 < t < t_\varepsilon$  y satisface (4.4).



# Apéndice B

## Análisis dimensional

Se incluyen aquí algunos contenidos sobre análisis dimensional utilizados en la memoria. Explicaciones más detalladas pueden verse, por ejemplo, en [9].

El análisis dimensional es un procedimiento por el que se obtiene información sobre un fenómeno a partir de la premisa de que este puede describirse mediante ecuaciones entre ciertas variables dimensionalmente correctas, lo que proporciona consistencia dimensional al conjunto.

Las cantidades físicas usadas en modelización representan conceptos que toman valores numéricos o medidas. La medida implica un sistema de referencia para comparar.

Las cantidades físicas para un modelo pueden ser de dos tipos:

- Las fundamentales, que tienen un estándar de medida independiente de cualquier otro asignado a otras cantidades fundamentales (por ejemplo: masa, longitud o tiempo).
- Las derivadas, todas las demás (por ejemplo: la fuerza, que es una combinación de las tres cantidades fundamentales anteriores).

**Definición B.0.1.** La palabra dimensión se utiliza para relacionar una cantidad derivada con las fundamentales asociadas a un modelo concreto: si  $M, L, T$  denotan masa, longitud y tiempo respectivamente, entonces

$$[A = \text{area}] = L^2, [\rho = \text{densidad}] = M/L^3, [F = \text{fuerza}] = (M \cdot L)/T^2,$$

donde  $[X]$  denota la dimensión de la cantidad  $X$ , expresada en términos de las cantidades fundamentales.

El análisis dimensional es el proceso por el que se asegura consistencia dimensional en dos etapas:

- Comprobar las dimensiones de las cantidades derivadas para ver si están correctamente representadas en términos de las cantidad fundamentales elegidas y sus dimensiones.
- Identificar los grupos adimensionales de variables en el problema. Esto puede llevarse a cabo de dos formas: el método básico y el Teorema Pi.

Como ejemplo del método básico, podemos buscar una fórmula entre la velocidad  $V$  del cuerpo, la gravedad  $g$  y la altura  $h$  desde la que cae:

$$V = V(g, h),$$

utilizando dimensiones.

Las dimensiones físicas de las tres variables son  $[V] = L/T$ ;  $[g] = L/T^2$ ;  $[h] = L$ . Entonces

$$\left[ \frac{V}{\sqrt{g}} \right] = \sqrt{L} = [\sqrt{h}] \Rightarrow [V] = [\sqrt{gh}] \Rightarrow V = C\sqrt{gh}, \quad (\text{B.1})$$

con  $C$  constante.

Ahora, definiremos el Teorema de Pi el cual afirma que una ley física que relaciona  $m$  cantidades, representada por la ecuación

$$f(q_1, \dots, q_m) = 0,$$

puede ser reformulada de manera equivalente utilizando cantidades adimensionales que se construyen a partir de las cantidades originales  $q_1, \dots, q_m$ .

Una ley física que es libre de unidades, a menudo llamada una ley adimensional o una ley de escala, es una relación matemática entre variables físicas que no depende de ninguna unidad de medida específica. Por ejemplo, la ley de la caída libre en la gravedad de la Tierra, que establece que la aceleración de un objeto en caída libre es constante, es una ley física que es libre de unidades. Esto significa que, independientemente de la unidad de medida que utilices para longitud y tiempo, la relación entre la aceleración y el tiempo será siempre la misma.

La adimensionalización de un modelo está garantizada por el Teorema de Pi.

**Teorema B.0.2.** Sea  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ , donde  $[q_i] = L_1^{a_{i1}} \dots L_n^{a_{in}}$  para ciertas dimensiones elementales  $L_1, \dots, L_n$  del problema y  $n < m$ . Sea  $r = \text{rango}(A)$ . Existen  $m - r$  cantidades adimensionales independientes  $\pi_1, \dots, \pi_{m-r}$ , que pueden formarse a través de los  $q_i$  y tales que

$$f(q_1, \dots, q_m) = F(\pi_1, \dots, \pi_{m-r}) = 0,$$

expresada sólo en términos de cantidades adimensionales.



Como ejemplo del Teorema de Pi, consideremos de nuevo la fórmula de la velocidad  $V$  de un objeto en caída libre.

La relación física podría expresarse como:

$$f(V, g, h) = 0.$$

Hemos comprobado en (B.1) que podemos definir una variable adimensional  $\pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gh}}$  y entonces, la relación original se puede expresar de manera equivalente en términos de esta variable adimensional:

$$F(\pi_1) = 0.$$



# Apéndice C

## Transformada de Fourier bidimensional

En el desarrollo de este trabajo se han incorporado contenidos relacionados con la transformada de Fourier. A continuación recordamos varios resultados (véase por ejemplo [16]).

**Definición C.0.1.** La transformada de Fourier en  $L^1(\mathbb{R})$  de una función  $f$  se expresa como

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (\text{C.1})$$

**Teorema C.0.2.** *La transformada de Fourier cumple las siguientes propiedades*

I) *Transformada inversa de Fourier. Si  $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  entonces*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi t} d\xi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

II) *Si  $f, h \in L^1(\mathbb{R})$  entonces la convolución*

$$g(t) = f * h(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

*está en  $L^1(\mathbb{R})$  y tiene como transformada de Fourier*

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{h}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

III) *Si  $f, h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)h^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{h}^*(\xi)d\xi.$$

Si  $h = f$  se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Estas ecuaciones se llaman la *Fórmula de Plancherel* y de *Parseval* respectivamente.

- IV) Una Gaussiana  $f(t) = e^{-t^2}$  es una función  $C^\infty$  con un rápido decrecimiento asintótico. Su transformada de Fourier es también una Gaussiana

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Esta transformación de Fourier se calcula mostrando con una integración por partes que  $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) e^{-i\omega t} dt$  es diferenciable y satisface la ecuación diferencial

$$2\widehat{f}'(\omega) + \omega\widehat{f}(\omega) = 0.$$

La solución de esta ecuación es una Gaussiana  $\widehat{f}(\omega) = K \exp(-\omega^2/4)$ , y como  $\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}$ , obtenemos su transformada de Fourier.

- V) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  entonces  $\widehat{f}(\xi)$  es una función continua de  $\xi \in \mathbb{R}$  y si  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  entonces  $f(t)$  es una función continua,  $t \in \mathbb{R}$ .

- VI) Lema de Riemann-Lebesgue. Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  entonces

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

- VII) Extensión de densidad en  $L^2(\mathbb{R})$ . Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  pero  $f \notin L^1(\mathbb{R})$ , su transformada de Fourier no se puede calcular como (C.1) porque  $f(t)e^{-i\xi t}$  no es integrable. Se define como un límite utilizando las transformadas de Fourier de funciones en  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .

Dado que  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ , se puede encontrar una familia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de funciones en  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  que converge a  $f$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Dado que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  converge, es una secuencia de Cauchy, lo que significa que  $\|f - f_n\|$  es arbitrariamente pequeña si  $n$  y  $p$  son lo suficientemente grandes. Además,  $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ , por lo que su transformada de

Fourier  $\widehat{f}_n$ , está bien definida. Un espacio de Hilbert es completo, lo que significa que todas las secuencias de Cauchy convergen en un elemento del espacio. Por lo tanto, existe  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\widehat{f} - \widehat{f}_n\| = 0.$$

Por definición,  $\widehat{f}$  es la transformada de Fourier de  $f$ .

Veamos ahora como se extienden algunas de estas propiedades a  $\mathbb{R}^2$  (análogamente se haría a  $\mathbb{R}^n$ ).

**Definición C.0.3.** La transformada de Fourier de una función integrable en dos dimensiones  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  es

$$\widehat{f}(\bar{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{x}) e^{-i\langle \bar{\xi}, \bar{x} \rangle} d\bar{x},$$

donde  $\bar{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\langle \bar{\xi}, \bar{x} \rangle = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$ .

**Teorema C.0.4.** La transformada de Fourier cumple las siguientes propiedades en  $L^1(\mathbb{R}^2)$ :

I) Si  $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$  entonces

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\bar{\xi}) e^{i\langle \bar{\xi}, \bar{x} \rangle} d\bar{\xi}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2.$$

II) Si  $f, h \in L^1(\mathbb{R}^2)$  entonces la convolución

$$g(\bar{x}) = f * h(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{y}) h(\bar{x} - \bar{y}) d\bar{y}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2,$$

está en  $L^1(\mathbb{R}^2)$  y tiene como transformada de Fourier

$$\widehat{g}(\bar{\xi}) = \widehat{f}(\bar{\xi}) \widehat{h}(\bar{\xi}).$$

III) La fórmula de Plancherel prueba que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{x}) g^*(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\bar{\xi}) \widehat{g}^*(\bar{\xi}) d\bar{\xi}.$$

Si  $f = g$ , entonces obtenemos la fórmula de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(\bar{x})|^2 d\bar{x} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(\bar{\xi})|^2 d\bar{\xi}.$$

La transformada de Fourier de una función con energía finita tiene energía finita. La equivalencia de energía hace posible extender la transformada de Fourier a cualquier función  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ .

IV) Si  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  es separable, lo cual significa que

$$f(\bar{x}) = g(x_1)h(x_2),$$

entonces su transformada de Fourier es

$$\widehat{f}(\bar{\xi}) = \widehat{g}(\xi_1)\widehat{h}(\xi_2),$$

donde  $\widehat{g}$  y  $\widehat{h}$  son la transformada de Fourier de una dimensión de  $g$  y  $h$ .

V) Si  $f(\bar{x})$  es rotada por  $\theta$ :

$$f_\theta(\bar{x}) = f(x_1\cos\theta - x_2\text{sen}\theta, x_1\text{sen}\theta + x_2\cos\theta),$$

entonces su transformada es rotada por  $-\theta$ :

$$\widehat{f}_\theta(\bar{\xi}) = f(\xi_1\cos\theta + \xi_2\text{sen}\theta, -\xi_1\text{sen}\theta + \xi_2\cos\theta).$$