



**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**Grado en Matemáticas**

---

**Modelado y reconocimiento de rostros**

---

**Alumno: Alejandro Barrio Mateos**

**Tutores: Francisco Javier Finat Codes**  
**Eduardo Cuesta Montero**

**Fecha: 13 de diciembre de 2023**



# Modelado y reconocimiento de rostros

Alejandro Barrio Mateos



# Índice general

Lista de figuras	III
Resumen	VII
Abstract	IX
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estructura de la memoria	2
<b>2. Geometría Diferencial de Superficies</b>	<b>5</b>
2.1. Nociones básicas	5
2.2. Fibrado tangente	7
2.3. Fibrado normal	10
2.4. La cara como unión de subvariedades	12
2.5. Campos vectoriales	15
2.6. Campos vectoriales como operadores diferenciales	16
2.7. Tensores	19
2.8. La aplicación de Gauss-Weingarten	21
2.9. Referencias móviles para una superficie	22
<b>3. Mapas de curvaturas</b>	<b>25</b>
3.1. Primera forma fundamental	25
3.2. Segunda forma fundamental	29
3.3. Curvaturas principales	32
3.4. Expresión local de curvaturas principales	36
3.5. Caracterización de superficies	37
3.6. Reconstrucción de superficies	40
<b>4. Evolución de superficies bajo flujos de curvatura</b>	<b>41</b>
4.1. Flujos de Curvatura	42
4.1.1. Buenos flujos vs. Malos flujos	45
4.2. Efecto local de flujos de curvatura	46
4.2.1. Sobre puntos parabólicos	46
4.2.2. Sobre crestas	48

4.2.3. Sobre puntos umbílicos . . . . .	49
4.3. Flujos de curvatura principales sobre la cara . . . . .	51
<b>5. Enfoque variacional</b>	<b>55</b>
5.1. Energía de Willmore . . . . .	56
5.1.1. Teorema de Gauss para aplicaciones esféricas . . . . .	56
5.1.2. Funcional de Willmore . . . . .	59
5.1.3. Aplicación al modelado de la cara . . . . .	61
5.2. Invarianza conforme del funcional de Willmore . . . . .	63
5.3. Análisis variacional del funcional de Willmore . . . . .	66
5.4. Flujos geométricos . . . . .	68
5.4.1. Flujo óptico en secuencias de vídeo . . . . .	68
5.4.2. Flujos de volumen . . . . .	71
<b>6. Estrategias basadas en los datos</b>	<b>73</b>
6.1. Captura de datos . . . . .	73
6.2. Métodos de reconocimiento facial . . . . .	76
6.3. Eigenfaces . . . . .	77
6.3.1. SVD . . . . .	78
6.3.2. PCA . . . . .	80
6.3.3. Eigenfaces . . . . .	82
6.3.4. LDA . . . . .	83
6.3.5. Implementación . . . . .	86
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>91</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	91
7.2. Trabajo futuro . . . . .	92
<b>A. Recursos software</b>	<b>93</b>
A.1. Eigenfaces . . . . .	93
<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>

# Índice de figuras

2.1. Vectores normales de una superficie que presenta irregularidades. <b>Fuente:</b> [22] . . . . .	10
2.2. Emulación de irregularidades gracias al uso de <i>bump mapping</i> . <b>Fuente:</b> [22]	10
2.3. Imagen directa ( <i>push-forward</i> ) e inversa ( <i>pull-back</i> ). <b>Fuente:</b> [1] . . . . .	17
2.4. Referencia móvil en una superficie. <b>Fuente:</b> [18] . . . . .	23
3.1. Interpretación de la primera forma fundamental. <b>Fuente:</b> [21] . . . . .	26
3.2. Interpretación de la segunda forma fundamental. <b>Fuente:</b> [21] . . . . .	29
3.3. Interpretación geométrica de la curvatura normal. <b>Fuente:</b> [16] . . . . .	30
3.4. Interpretación geométrica de la Proposición de Meusnier. <b>Fuente:</b> [16] . . . . .	31
3.5. Interpretación de la Proposición de Meusnier como circunferencia osculatriz. <b>Fuente:</b> [45] . . . . .	32
3.6. Superficies focales de un paraboloides hiperbólico. <b>Fuente:</b> Ag2gaeh . . . . .	33
3.7. Superficies focales de una silla de mono. <b>Fuente:</b> Rocchini . . . . .	35
4.1. Transición de la catástrofe cúspide para curvaturas con mismo signo <b>Fuente:</b> [12] . . . . .	42
4.2. Mapa 3D del rostro escaneado, donde se muestran las crestas azules (líneas gruesas) y rojas (líneas punteadas). <b>Fuente:</b> [31] . . . . .	51
4.3. Crestas, línea parabólicas y conjuntos de nivel de $K_1$ (izq.) y $K_2$ (dcha.). <b>Fuente:</b> [31] . . . . .	52
4.4. La cara tras pasar por los flujos $K_1$ (izq.) y $K_2$ (dcha.) en el instante $t = 1000$ . <b>Fuente:</b> [31] . . . . .	52
4.5. La cara tras pasar por el flujo $K_1$ en el instante $t = 100$ . <b>Fuente:</b> [31] . . . . .	53
4.6. La cara tras pasar por el flujo $K_2$ en $t = 100$ (izq.) y $t = 250$ (dcha.). <b>Fuente:</b> [31] . . . . .	53
5.1. Interpretación de la tercera forma fundamental. <b>Fuente:</b> [21] . . . . .	57
5.2. Representación en Matlab del toro triple generada por Oleg Alexandrov . . . . .	62
6.1. Escáner 3D basado en un sistema de luz estructurada. <b>Fuente:</b> [20] . . . . .	74
6.2. Triangulación de Delaunay de los puntos de interés del rostro. <b>Fuente:</b> [36]	75
6.3. Imagen de una cara (izq.) y su representación como eigenface (dcha.). <b>Fuente:</b> [53] . . . . .	83

6.4. PCA vs LDA. <b>Fuente:</b> [37]	84
6.5. Eigenfaces (a) vs fisherfaces (b). <b>Fuente:</b> [52]	86
6.6. Muestra de las primeras 25 imágenes del dataset de Olivetti	87
6.7. Las primera 25 eigenfaces obtenidas, ordenadas de mayor a menor varianza	88
A.1. Cabecera de un archivo ejecutado por Jupyter Notebook	94



*A Javier por todos colacaos que te debo,  
y porque sin tu tutela este trabajo no habría sido posible;  
a mi abuelo Abelardo,  
por haber sido mi compinche durante 22 maravillosos años;  
a mis padres, José Antonio y Ascensión,  
porque todo lo que soy hoy es gracias a vosotros;  
y a todos mis amigos,  
por estar ahí siempre que os necesito.*



# Resumen

El modelado y reconocimiento de rostros es actualmente un área en boga debido a la multitud de aplicaciones que tiene su uso para distintas herramientas de modelado y aplicaciones software; pasando desde el reconocimiento facial para acceso restringido a zonas de trabajo, encontrar y detener criminales, lenguaje de gestos para interacción hombre-máquina; hasta otras finalidades más lúdicas como el uso de filtros en redes sociales o simulación y animación en industrias de contenidos multimedia.

Este proyecto tiene como objetivo comprender las características geométricas y topológicas relativas a la forma y las deformaciones de la cara inherentes a los gestos del rostro humano utilizando conceptos de Geometría Diferencial y Flujos de Curvatura. El enfoque más simple consiste en considerar el rostro humano como una superficie suave a trozos y segmentarlo en regiones según las diferentes curvaturas de cada región, dividiendo la cara en regiones elípticas, parabólicas e hiperbólicas para el modelo topológico subyacente del disco 2-dimensional. Esto resulta crucial para comprender y reconstruir los diferentes gestos que puede realizar una persona, los cuales pueden emularse computacionalmente mediante el uso de modelos elásticos sobre los que propagar deformaciones.

Aparte de este enfoque basado en modelos teóricos (*top-down*), lo más habitual es que estas labores se realicen a través de estrategias basadas en la recopilación de datos para su posterior procesado, Esta estrategia (*bottom-up*) permite reconstruir modelos teóricos a partir de datos. La automatización utiliza técnicas basadas en Aprendizaje Automático de la forma y de su dinámica. En este trabajo se presentan también los métodos para la captura de datos y el reconocimiento de caras, ejemplificando su uso gracias a la implementación del método eigenfaces.

**Palabras claves:** Cara humana, superficies suaves a trozos, curvaturas, formas fundamentales, flujos de curvatura, energía de Wilmore, SVD, PCA, LDA, eigenfaces.



# Abstract

Face modelling and recognition is currently a booming area due to the multitude of applications that its use has for different modelling tools and software applications; from facial recognition for restricted access to work areas, finding and stopping criminals, gesture language for human-machine interaction; to other more playful purposes such as the use of filters in social networks or simulation and animation in multimedia content industries.

This project aims to understand the geometric and topological features related to the shape and deformations of the face inherent to the gestures of the human face using concepts of Differential Geometry and Curvature Flows. The simplest approach is to consider the human face as a piecewise smooth (PS) surface and segment it into regions according to the different curvatures of each region, dividing the face into elliptical, parabolic and hyperbolic regions for the underlying topological model of the 2-dimensional disc. This is crucial for understanding and reconstructing the different gestures a person can perform, which can be emulated computationally by using elastic models on which to propagate deformations.

Apart from this approach based on theoretical models (*top-down*), these tasks are most commonly carried out through strategies based on data collection for further processing. This strategy (*bottom-up*) allows theoretical models to be reconstructed from data. The automation uses techniques based on Machine Learning of the shape and its dynamics. This work also presents the methods for data capture and face recognition, exemplifying their use thanks to the implementation of the eigenfaces method.

**Key words:** Human face, PS-surfaces, curvatures, fundamental forms, curvature flows, Wilmore energy, SVD, PCA, LDA, eigenfaces.



# Capítulo 1

## Introducción

La cara humana es una superficie cambiante que presenta cierta complejidad. La caracterización de la geometría y sus deformaciones topológicas para los gestos presenta gran interés para la industria de contenidos multimedia (simulación y animación) o para la comunicación no-verbal vinculada a gestos (interacción hombre-robot en Inteligencia Artificial). Ambos aspectos se han venido desarrollando desde los años sesenta. Desde el punto de vista geométrico, la cara humana es una superficie suave a trozos que está caracterizada en cada punto por las curvaturas total y media. La evaluación de estos datos se lleva a cabo a partir de una estimación de los datos tangenciales y normales en cada punto. La Geometría Diferencial de Curvas y Superficies proporciona el marco inicial para relacionar aspectos intrínsecos y extrínsecos.

Los gestos faciales se modelan como deformaciones de la geometría original que presentan aspectos topológicos y cinemáticos. Los aspectos topológicos se modelan inicialmente en términos de un disco sobre el que se superpone una estructura diferenciable. La Geometría Diferencial de la Forma utiliza resultados de la Geometría Diferencial de Superficies. El tratamiento unificado con aspectos funcionales, motiva el desarrollo de un enfoque basado en espacios de Banach.

Las deformaciones asociadas a gestos se describen de forma continua (usando campos actuando sobre funciones) o bien de forma discreta (asociada a configuraciones dispersas de “hechos significativos” como puntos aislados y segmentos de control). Si omitimos los elementos más expresivos (ojos y boca), la cara es topológicamente equivalente a un disco  $\mathbb{D}^2$ . La incorporación de dichos elementos da lugar a un modelo topológico subyacente dado por una superficie con tres agujeros, que es topológicamente equivalente a la suma conexa de tres toros. La localización relativa de los puntos de control facilita el soporte inicial para una malla triangular que se reconvierte a cuadrangular como una aproximación lineal a trozos a las parametrizaciones locales de superficies típicas en Geometría Diferencial Local. Las deformaciones se controlan inicialmente en términos de funcionales de energía ligados a las curvaturas media y total.

En este trabajo nos centramos especialmente en problemas de modelado, incluyendo los enfoques diferencial y estadístico, más frecuentemente utilizados para abordar el reconocimiento de características de la cara y su evolución en gestos espacio-temporales. Las dos estrategias más utilizadas se etiquetan como: **top-down** (basada en el uso de modelos teóricos construidos a partir de la Geometría Diferencial y la Topología Algebraica) y **bottom-up** (basadas en datos de imagen o escaneos que proporcionan nubes de puntos a agrupar). De este modo, la Topología Algebraica proporciona el nexo entre el enfoque ideal “suave” y el discreto (nubes de puntos) utilizando estructuras lineales a trozos intermedias para el agrupamiento.

## 1.1. Estructura de la memoria

El trabajo se articula siguiendo un esquema en capítulos. El primero de ellos (que en verdad es el Capítulo 2 de la memoria, pues el primero es el capítulo introductorio inicial) es el relativo a la **Geometría Diferencial de Superficies**, donde se presentan los fundamentos matemáticos básicos para el modelado del rostro, dando su definición general para variedades de cualquier dimensión, concretando a posteriori su especificación en el caso de superficies. Esto se debe a que se adopta un modelo basado en apariencias, al considerar la cara humana como una superficie suave a trozos, omitiendo las restricciones a las que estaría sometida por las estructuras ósea y muscular subyacentes a ella.

Igual que cualquier otra superficie, la cara humana puede descomponerse en regiones con curvatura total de signo constante (positiva o negativa) separadas por curvas parabólicas (cejas, comisuras de labios, p.e.), que delimitan regiones elípticas de las hiperbólicas. En este capítulo 3, titulado **Mapas de curvaturas**, se introducen los conceptos y enunciados que permiten dar esta descomposición de la cara, viendo que a partir de ello es posible tanto la caracterización como la reconstrucción del rostro.

La utilización de modelos basados en la Geometría Diferencial de Superficies y la caracterización de superficies en términos de las curvaturas media y total sugieren el desarrollo de modelos basados en Flujos de Curvatura. Este enfoque permite hacer compatible la Geometría Diferencial de la cara humana con los procesos de propagación asociados a la generación de gestos. En esta memoria se utiliza una versión simplificada basada en la detección y posterior acoplamiento entre diferentes componentes de la cara. Las componentes se caracterizan geoméricamente en términos de regiones sobre las cuales el signo de la curvatura total es constante.

Para realizar la descomposición de la cara en dichas regiones (proceso etiquetado como “segmentación”), suponemos que los puntos de control se desplazan de acuerdo con modelos elásticos a lo largo de pequeños trozos de curvas integrales que deforman la malla asociada la superficie de la cara. La extensión asociada a la propagación de los impulsos elásticos en cada punto de control da lugar a solapamientos y generación de regiones de conflicto (puntos y curvas) que se describen como singularidades de la aplicación de Gauss que, a cada punto  $p \in M$ , asocia su espacio tangente  $T_p M$ . Este enfoque es el adoptado en los Capítulos 4 y 5.



El primero de ellos, **Evolución de superficies bajo flujos de curvatura**, está basado en el artículo homónimo de Mumford et al. [31], donde se presenta tanto el concepto de Flujos de Curvatura como su efecto sobre las singularidades más sencillas que se pueden presentar para aplicaciones entre superficies, dando un ejemplo práctico sobre el rostro humano.

Por otra parte, el Capítulo llamado **Enfoque variacional** pretende dar una versión alternativa de dicho modelado en términos de “caracterización de la esfericidad” de las componentes que conforman el rostro. En concreto, es el punto de partida ideal para la representación de gestos tal y como se hace en animación, a través de técnicas de Geometría Computacional Conforme para el análisis de la variación de la superficie. Como alternativa, también se presentan de manera somera otros flujos de los que poder extraer información geométrica.

Por último, el Capítulo 6 introduce las estrategias *bottom-up* ya mencionadas previamente, que en castellano podrían traducirse como **Estrategias basadas en los datos**. Se presentan los principales métodos para la captura de datos y el reconocimiento de rostros, poniendo como ejemplo el funcionamiento de la estrategia eigenfaces, la cual se ha implementado en Python a través de un cuaderno de Jupyter (consultar Anexo A.1).

A modo de colofón, se presentan las conclusiones finales del trabajo, así como diversos retos y enfoques alternativos que no han podido desarrollarse en profundidad en la memoria debido a las limitaciones de extensión del Trabajo Fin de Grado.



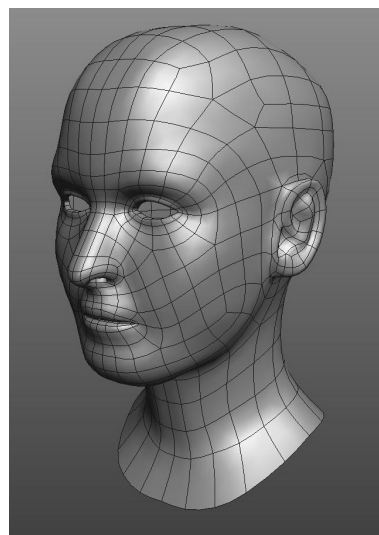
## Capítulo 2

# Geometría Diferencial de Superficies

Si buscamos en Internet cualquier modelo de cara humana, aparecen resultados análogos a la figura adyacente<sup>1</sup>: una superficie en la que se aprecian cambios de curvatura más significativos en la zona de los ojos, la nariz, y la boca.

Al observar atentamente el modelo estático, vemos que es una superficie conexa sin agujeros —al contrario de lo que ocurre con la cara humana real—, ya que así resulta más fácil de modelar. Los agujeros de la nariz, por ejemplo, únicamente son concavidades que simulan ser orificios. Gracias a dicha simplificación, podemos realizar una representación efectiva a partir de curvas y superficies, adaptando el modelo topológico del disco 2-dimensional  $\mathbb{D}^2$ .

No obstante, para realizar el modelado con más detalle, es preciso introducir nociones básicas que permitan dar dicha descripción en los términos más simples posibles compatibles con el carácter curvado del soporte. Por ello, a lo largo de esta sección revisamos resultados clásicos de la Geometría Diferencial de Superficies, a partir de los cuales se puede dar una representación basada en datos reales recogidos a partir de datos experimentales.



### 2.1. Nociones básicas

Una cara humana es una superficie contenida en una región cuboidal del espacio cartesiano acotada por anchura, altura y profundidad. Por ello, trabajaremos en  $\mathbb{R}^3$ . Para facilitar el modelado, es necesario extender el marco inicial de superficies suaves al marco PS (*Piecewise Smooth*; suave a trozos), o PL (*Piecewise Lineal*; lineal a trozos) como aproximación al marco PS.

---

<sup>1</sup>Imagen extraída de <https://free3d.com/3d-model/head-basemesh-1383.html>

La noción intuitiva de **variedad suave**  $m$ -dimensional  $M$  procede del pegado de trozos llamados “cartas”  $(U, \varphi)$ , que son localmente equivalentes mediante difeomorfismos<sup>2</sup> locales al espacio cartesiano  $\mathbb{R}^m$ . Esta construcción permite extender el Cálculo Diferencial e Integral al caso de variedades usando las condiciones de compatibilidad sobre intersecciones de abiertos,  $U_i \cap U_j$ , y las particiones de la unidad para el Cálculo Integral. Esta descripción se adapta a PS-modelos deformables para la cara humana. La evaluación y control de las deformaciones requiere algún tipo de métrica que afecta a las funciones y a los elementos de control. Para ello, introducimos las siguientes nociones:

**Definición 2.1.** *Un espacio normado es un par  $(E, \|\cdot\|)$  en el que  $E$  es un espacio vectorial, y la aplicación  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  una **norma**. En caso de que su métrica asociada  $d(e_1, e_2) = \|e_1 - e_2\|$  sea completa, el par anteriormente definido se denomina **espacio de Banach**.*

**Definición 2.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Una **carta local** en  $X$  es un par  $(U, \varphi)$  donde  $U$  es un abierto de  $X$  y  $\varphi$  es un homeomorfismo de  $U \subseteq X$  en un subconjunto abierto de un espacio de Banach. Un  **$C^k$ -atlas** de  $X$  es una familia de cartas  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  tal que:*

1.  $X = \cup_{i \in I} U_i$
2. *Dos cartas cualesquiera de  $\mathcal{A}$  son compatibles en el sentido de que la aplicación solapada entre dos de sus miembros es un  $C^k$ -difeomorfismo (la **aplicación solapada** de  $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ , con  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , es  $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$ ; siendo  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  abierto y  $\varphi_{ji}$  un  $C^k$ -difeomorfismo).*

**Definición 2.3.**

- *Dos  $C^k$ -atlas  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  se denominan  **$C^k$ -equivalentes** si  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  es también un  $C^k$ -atlas (compatibilidad con las topologías subyacentes a cada atlas).*
- *Una clase de equivalencia de  $C^k$ -atlas en  $X$  se conoce como una **estructura  $C^k$ -diferenciable**  $\mathcal{D}$  para  $k = \infty$ .*
- *La unión de  $C^k$ -atlas  $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \cup\{\mathcal{A} | \mathcal{A} \in \mathcal{D}\}$  es el **atlas maximal** de  $\mathcal{D}$  y  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}$  es una **carta local admisible**.*
- *Si  $\mathcal{A}$  es un  $C^k$ -atlas en  $S$ , la unión de todos los atlas equivalentes a  $\mathcal{A}$  es la **estructura  $C^k$ , diferenciable** en el caso  $k = \infty$ , generada por  $\mathcal{A}$ .*
- *Una **variedad diferenciable**  $M$  es un par  $(X, \mathcal{D})$  en el que  $X$  es un espacio topológico paracompacto<sup>3</sup> conexo y  $\mathcal{D}$  una  $C^k$ -estructura diferenciable sobre  $X$ .*

---

<sup>2</sup>Un **difeomorfismo** es un homeomorfismo (aplicación biyectiva y bicontinua) diferenciable con inversa diferenciable.

<sup>3</sup>Un espacio topológico **paracompacto** es aquel en que todo recubrimiento abierto admite un refinamiento abierto localmente finito.

Para el estudio local de variedades, es conveniente considerar funciones  $f : M \rightarrow N$  entre variedades definidas localmente en entornos  $U, V$  de  $p \in M$  y  $f(p) \in N$ . Dos de estas aplicaciones son equivalentes en  $p \in M$  si coinciden en el entorno  $W = U \cap V$  de  $p$ . Así, dentro del conjunto de aplicaciones diferenciables

$$\{f \mid f : U \rightarrow N, \text{ para un entorno } U \text{ de } p \in M\},$$

tenemos la relación de equivalencia:

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists W \text{ entorno de } p \text{ tal que } f|_W = g|_W$$

**Definición 2.4.** Una clase de equivalencia de dicha relación se denomina **germen** de una aplicación  $M \rightarrow N$  en torno a  $p$ . Se denota a partir de su representante  $\bar{f}; \bar{f} : (M, p) \rightarrow N$  ó  $\bar{f} : (M, p) \rightarrow (N, q)$  si  $\bar{f}(p) = q$ . Un **germen de función** es un germen diferenciable  $(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$ . El conjunto de todos los gérmenes de funciones en torno a  $p \in M$  se designa  $\mathcal{O}_{M,p}$ .

## 2.2. Fibrado tangente

Para describir la superficie  $S$  de una cara humana, debemos caracterizar sus propiedades geométricas en términos de la geometría de curvas y superficies en un espacio tridimensional. Los gestos faciales se modelan en términos de aplicaciones  $f : S_1 \rightarrow S_2$  entre superficies. Para ello, debemos adaptar las nociones del cálculo diferencial sobre curvas y superficies. Ello incluye el estudio de vectores tangentes a curvas ubicadas en una superficie, donde dicho vector tiene una correspondencia intuitiva con la idea de “vector velocidad”.

**Definición 2.5.** Sea  $M$  una variedad y consideremos  $p \in M$ . Una **curva** en  $M$  es una aplicación  $c : I \rightarrow M$  de clase  $C^1$  de un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  en  $M$ , tal que  $0 \in I$  y  $c(0) = p$ . Dadas dos curvas  $c_1$  y  $c_2$  en  $p$ , así como  $(U, \varphi)$  una carta admisible donde  $p \in U$ , decimos que  $c_1$  y  $c_2$  son **tangentes** en  $p$  con respecto a  $\varphi$  si  $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$ .

Dos curvas son tangentes en  $(U, \varphi)$  si tienen los mismos vectores tangentes en dicha carta. Esta noción es **independiente de la carta escogida** en virtud del resultado siguiente:

**Proposición 2.1.** Sean  $c_1$  y  $c_2$  dos curvas en  $p \in M$  y  $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$  cartas admisibles. Entonces,  $c_1$  y  $c_2$  son tangentes en  $p$  con respecto a  $\varphi_1$  si y sólo si son tangentes en  $p$  con respecto a  $\varphi_2$ .

*Demostración.* Si fuese necesario, tomamos restricciones para suponer  $U_1 = U_2$ . En virtud del teorema de la aplicación compuesta,

$$(\varphi_2 \circ c_1)'(0) = (\varphi_2 \circ c_2)'(0) \Leftrightarrow ((\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ (\varphi_1 \circ c_1))'(0) = ((\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ (\varphi_1 \circ c_2))'(0),$$

que es equivalente a  $(\varphi_1 \circ c_1)'(0) = (\varphi_1 \circ c_2)'(0)$  □

Como consecuencia, se tiene que la tangencia en  $p \in M$  es una relación de equivalencia entre las curvas en  $p$ . Una clase de equivalencia de estas curvas se puede representar como  $[c]_p$ , siendo  $c$  el representante de dicha clase.

**Definición 2.6.** Para una variedad  $M$  y considerando  $p \in M$ , el **espacio tangente** a  $M$  en  $p$  es el conjunto de clases de equivalencia de curvas tangentes en  $p$ :

$$T_p M = \{[c]_p \mid c \text{ es una curva tangentes en } p\}.$$

Para un subconjunto  $A \subset M$ ,  $TM|_A = \sqcup_{p \in A} T_p M$ . Denominamos **fibrado tangente** de la variedad  $M$  a la 4-tupla  $(TM, \pi, M, F)$  donde  $TM$  es el espacio total,  $\pi : TM \rightarrow M$  es la proyección natural sobre el espacio base  $M$  y  $F = \mathbb{R}^m$  la fibra genérica. La aplicación  $\pi_M : TM \rightarrow M$  definida como  $\pi_M([c]_p) = p$  es la **proyección del espacio total** de  $M$ .

Se verifica también que existe un recubrimiento  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  por abiertos  $U_i$  de  $M$  tal que la trivialización local  $\pi^{-1}(U_i) \simeq_{C^\infty} U_i \times \mathbb{R}^m$  (equivalencia local entre variedades) se restringe a un isomorfismo (no-canónico) de la fibra  $T_p M := \pi^{-1}(p) \simeq_{\mathbb{R}} \{p\} \times \mathbb{R}^m$ , con la fibra genérica como espacios vectoriales.

Dada una  $C^1$ -aplicación entre variedades, la aplicación tangente se define empleando la noción anterior:

**Definición 2.7.** Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación de clase  $C^1$ . Definimos la **tangente** de  $f$  como  $Tf : TM \rightarrow TN$ , donde  $Tf([c]_p) = [f \circ c]_{f(p)}$ .

Para el estudio local de variedades, aparte de ésta definición geométrica (1), será conveniente considerar la noción de espacio tangente en el marco algebraico (2) o analítico (3). En ambos casos debemos recurrir al concepto de germen de  $C^k$ -función presentado previamente. El objetivo de las diferentes aproximaciones al problema consiste en modelar el comportamiento de primer orden de  $C^k$ -funciones sobre la variedad para  $k = \infty$  (caso diferenciable),  $k = \omega$  (caso analítico) o  $k = \text{racional}$  (caso algebraico). El formalismo es similar usando la estructura de anillo local para el conjunto de gérmenes de funciones y de módulo sobre dicho anillo para las derivaciones o las diferenciales. En el caso suave o diferenciable se tiene:

**Definición 2.8.** El **espacio tangente**  $T_p M$  a la variedad diferenciable  $M$  en el punto  $p$  es el espacio vectorial real de las derivaciones de  $\mathcal{O}_{M,p}$ . Una **derivación** de  $\mathcal{O}_{M,p}$  es una aplicación lineal,  $X : \mathcal{O}_{M,p}(p) \rightarrow \mathbb{R}$ , que cumple la regla del producto

$$X(\bar{\phi} \cdot \bar{\varphi}) = X(\bar{\phi}) \cdot \bar{\varphi}(p) + \bar{\phi}(p) \cdot X(\bar{\varphi}).$$

En otras palabras, la definición algebraica (2) introduce el fibrado cotangente en términos de aplicaciones lineales sobre el espacio tangente. Formalmente, se puede describir como el espacio  $I^1/I^2$  de las formas iniciales, donde  $I^i$  es el ideal cuyo término de menor orden tiene grado  $i$ . En particular, esta caracterización identifica el cociente con el espacio de funciones (diferenciables, analíticas, algebraicas) lineales o de primer orden. Este enfoque es el más utilizado en Geometría Algebraica y Geometría Analítica (GAGA).

Desde el punto de vista analítico (3), la derivación  $D$  de una función  $f$  en un punto  $P$  únicamente recurre a los valores de la función en dicho punto<sup>4</sup>. Sustituyendo la función por su desarrollo de Taylor, en virtud de la regla de Leibnitz, se tiene que  $DQ$  depende únicamente de su parte lineal. Por tanto,  $Df$  depende únicamente de los términos de primer orden de  $f$ . Como consecuencia, una vez fijadas coordenadas locales, la representación local del espacio tangente a la aplicación se redescrive en términos de la matriz jacobiana  $Df = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ .

**Definición 2.9.** *Un vector tangente en  $p \in M$  es una correspondencia que a cada germen de una carta  $\bar{h} : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  en torno a  $p$  asocia un vector  $v \in \mathbb{R}^n$  con orden de contacto  $\geq 2$  en  $p \in M$ . Así, al germen  $\bar{g} \circ \bar{h}$  le corresponde el vector  $Dg_0 \circ v$ ; siendo  $g$  un cambio de cartas y  $Dg_0$  la matriz jacobiana en el origen. Si se denota como  $K_p$  al conjunto de los gérmenes de cartas  $\bar{h} : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  y  $\mathcal{G}$  el conjunto de gérmenes invertibles, el **espacio tangente**  $T_p M$  es igual al conjunto de aplicaciones  $v : K_p \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $v(\bar{g} \circ \bar{h}) = Dg_0 \circ v(\bar{h})$ , para todo  $\bar{g} \in \mathcal{G}$ .*

Una vez presentadas las tres definiciones, daremos una demostración breve de la equivalencia entre ellas. Una demostración más detallada puede encontrarse en [14]. De forma complementaria, en [30] se muestra que las nociones precedentes son equivalentes entre sí; para más detalles, ver [51].

**Proposición 2.2.** *Las tres definiciones de espacio tangente -geométrica (1), algebraica (2) y analítica (3)- vistas anteriormente son equivalentes entre sí.*

*Demostración.*

(1)  $\Rightarrow$  (3) Sea  $\gamma$  una curva en  $M$  tal que  $\gamma(0) = p$ . Entonces,  $D(f) = (f \circ \gamma)'(0)$  es un punto de derivación en  $p$  que depende únicamente de la clase de equivalencia de  $\gamma$  en  $T_p M$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) Sea  $f$  una función diferenciable con desarrollo de Taylor centrado en el punto  $p$  dado como  $\sum_{i=1, \dots, n} c_i x^i$ . Entonces, para cualquier derivación en  $p$ , obtenemos que  $Df = c_1 Dx_1 + \dots + c_n Dx_n$  gracias a la regla de Leibnitz. Así,  $D$  se corresponde con el vector tangente  $(Dx_1, \dots, Dx_n)$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2) Sea  $D$  la derivación en un punto  $p$ . Por la regla de Leibnitz, sustituyendo la función por su desarrollo de Taylor, vemos que  $f \in I^1/I^2$ . Por tanto  $D$  es una aplicación lineal en  $(I^1/I^2)^*$  (el dual del espacio cotangente, el propio espacio tangente).

(2)  $\Rightarrow$  (3) Sea  $l \in (I^1/I^2)^*$ . Basta con definir la derivada en un punto como  $Df = l(f - f(p) + I^2)$ .  $\square$

Si prescindimos de la estructura músculo-esquelética del cráneo, una caracterización más fácil de visualizar de un modelo topológico simplificado (sin agujeros) de la cara humana en términos de las apariencias visuales es la siguiente:

<sup>4</sup>Ver p.e. [10]. La aplicación presentada en la Definición 2.8 es una aplicación lineal sobre el anillo local de las funciones regulares que verifica la regla de Leibnitz.

La superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  de la cara humana se obtiene pegando cartas locales  $(U, \varphi)$  para  $S$ . El plano tangente en cada punto  $p = \varphi(u, v) \in S$  proporciona una aproximación de primer orden. Se describe en términos del subespacio generado por las derivadas parciales de las curvas coordenadas,  $\varphi_u(u, v)$  y  $\varphi_v(u, v)$ , en cada punto. El fibrado tangente es la unión disjunta de los espacios tangentes en cada punto de la superficie.

### 2.3. Fibrado normal

Además del espacio tangente  $T_pM$ , el otro elemento clave que debemos considerar para el modelado local de la superficie está dado por el vector normal en cada punto<sup>5</sup>. El empleo de vectores normales para modelar la geometría cambiante de objetos complejos es una técnica usada con mucha frecuencia en Informática Gráfica; en particular, permite reproyectar la información radiométrica (color e iluminación, p.e.) contenidas en el espacio 3D. Este método, que se basa en la manipulación de los vectores normales para lograr dicho efecto, se conoce como *bump mapping*.

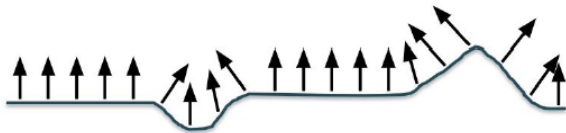


Figura 2.1: Vectores normales de una superficie que presenta irregularidades. **Fuente:** [22]



Figura 2.2: Emulación de irregularidades gracias al uso de *bump mapping*. **Fuente:** [22]

En términos más formales, la manipulación de los vectores normales modifica el fibrado normal de la superficie mediante deformaciones y, por consiguiente, el tipo de inmersión en  $\mathbb{R}^3$ . La idea matemática subyacente al *bump mapping* es introducir y superponer distribuciones radiométricas (intensidad en escala de grises, color, texturas, radiancia...) sobre la superficie  $S$  y controlar su variación en términos del fibrado normal. Una ventaja es el menor coste computacional de la representación tangencial. Esta idea se ve claramente gracias a las Figuras 2.1 y 2.2.

**Definición 2.10.** Dada una inmersión  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie  $S$ , el **espacio normal** en cada punto es el cociente  $T_p\mathbb{R}^3 \big|_S$  por el subespacio  $T_pS$ . El pegado de todos ellos proporciona el espacio normal a la variedad, conocido como **fibrado normal**;  $\mathcal{N}_f$ .

Estos cocientes se pegan en el fibrado normal usando las cartas locales de  $S$  como subvariedad de  $\mathbb{R}^3$ , obteniéndose el susodicho fibrado  $\mathcal{N}_f$  a la inmersión  $f$ , al cual se denota también como  $\mathcal{N}_{S/\mathbb{R}^3}$ . La gestión conjunta de la información tangencial y normal se lleva a cabo en términos de secciones que se caracterizan a continuación.

<sup>5</sup>Si la superficie está inmersa en espacios de dimensión superior a tres se considera el **subespacio normal** en vez de simplemente el vector normal.



**Definición 2.11.** Sean  $U \subset M$  un abierto de  $M$  y  $F$  un espacio vectorial  $f$ -dimensional.

- El producto cartesiano  $U \times E$  es el **espacio total** de un **fibrado trivial** con **espacio base**  $U$  y **aplicación proyección**  $U \times F \rightarrow U$ . Este fibrado tiene  $f$  secciones linealmente independientes, correspondientes a los elementos de una base de la fibra  $F$ .
- Una **sección local**  $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$  es una  $C^k$ -aplicación tal que  $\pi \circ s = 1_U$  (aplicación identidad). En particular, la aplicación  $U \rightarrow U \times \{0\}$  es la **sección nula**.
- Para cada punto base  $u \in U$ ,  $\pi^{-1}(u) \simeq \{u\} \times E$  (isomorfismo no-canónico, pues dependen del punto base) es la **fibra** de  $u$ .

**Observación.** El fibrado normal a la superficie que representa la cara humana tiene rango 1 (al ser el espacio cociente  $S/\mathbb{R}^3$ ), lo cual facilita la descripción de modelos de propagación.

La comparación entre caras o el seguimiento de expresiones faciales se realiza usando estructuras superpuestas, dadas por aplicaciones entre fibrados. Por ello, es necesario que desarrollemos dicha terminología. Un **morfismo entre fibrados**  $\xi_1 = (E_1, \pi_1, B_1, F_1)$  y  $\xi_2 = (E_2, \pi_2, B_2, F_2)$  es esencialmente una aplicación que lleva fibras de  $\xi_1$  en fibras de  $\xi_2$ ; más formalmente, un par de aplicaciones  $F : E_1 \rightarrow E_2$  y  $f : B_1 \rightarrow B_2$  tal que  $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$ . Usando las trivializaciones locales, se describe en términos de los homomorfismos que aplican una fibra a otra, designándose el conjunto de éstos como  $L(F, F')$ . Empezamos con el caso más simple correspondiente a fibrados triviales.

**Definición 2.12.** Sean  $U_1 \times F_1$  y  $U_2 \times F_2$  fibrados vectoriales y  $f : U_1 \rightarrow U_2$  una  $C^k$ -aplicación. Cualquier aplicación lineal entre las fibras da lugar a una  $C^r$ -**aplicación entre fibrados**.  $\varphi : U_1 \times F_1 \rightarrow U_2 \times F_2$ . Esta descripción local se extiende al caso global usando cartas y el espacio vectorial  $L(F_1, F_2)$  de las aplicaciones lineales entre las fibras, dando lugar a la noción de **homomorfismo entre fibrados vectoriales**  $(F, f)$ .

- Si la fibra es inyectiva (resp. suprayectiva) para cualquier  $b_1 \in B_1$ , se tiene un **monomorfismo** (resp. **epimorfismo**) de fibrados vectoriales.
- Si es un isomorfismo en un punto se obtiene un **isomorfismo local entre fibrados**, siendo **global** en caso de darse para cualquier punto base  $b_1 \in B_1$ .

La clasificación módulo isomorfismo proporciona los tipos básicos de fibrados sobre una variedad  $M$ .

Los isomorfismos proporciona un criterio teórico para el reconocimiento de la cara humana en términos de múltiples datos representados mediante vectores y parámetros (asociados a condiciones radiométricas, p.e.). Los modelos más simples para las deformaciones (relacionados con la generación de gestos) utilizan aplicaciones regulares (monomorfismos vs epimorfismos) entre fibrados.

La gestión computacional se lleva a cabo usando técnicas de valores propios asociados a las estructuras básicas de tipo tangencial o normal. El modelo estructural para esta última se describe usando la aplicación de Gauss sobre la superficie, que nos da el vector normal a la misma en cada punto. Un análisis más detallado se presenta en la Sección 2.8.

## 2.4. La cara como unión de subvariedades

La cara humana no presenta una estructura simple como superficie diferenciable. Un ejemplo típico de variedad con diferentes comportamientos para la curvatura total es el toro  $\mathbb{T}^2$ , en el que dos circunferencias (curvas parabólicas) separan componentes elípticas e hiperbólicas. En el caso de la cara humana, la presencia de curvas parabólicas (en las cejas, p.e.) o de aristas de retroceso (en los extremos de las comisuras de los labios, p.e.) motivan una “segmentación” como unión disjunta de componentes con curvatura total de signo constante. De esta forma, la cara se compone de variedades más pequeñas que unimos en una mayor. La descomposición de la cara en componentes se formaliza en términos de la noción de subvariedad.

**Definición 2.13.** Una *subvariedad* de una variedad  $M$  es un subconjunto  $B \subset M$ , con estructura de variedad compatible con la estructura diferenciable de  $M$ ; es decir, para cada  $b \in B$ , existe una carta local admisible  $(U, \varphi)$  en  $M$  con  $b \in U$  tal que  $\varphi : U \rightarrow E \times F$  y  $\varphi(U \cap B) = \varphi(U) \cap (E \times \{0\})$ .

Para facilitar la comparación entre variedades y subvariedades, es necesario contar con criterios de caracterización que minimicen el uso de cartas. Las submersiones e inmersiones proporcionan criterios de caracterización para las subvariedades. El **Teorema de la función implícita** es la clave para las formas locales de una submersión e inmersión como aplicaciones regulares; es decir, cuya diferencial tiene rango máximo. Este Teorema permite dar una expresión local de la regularidad en términos de proyecciones lineales o de subespacios lineales. Las demostraciones detalladas de estas caracterizaciones se pueden ver en [1].

**Definición 2.14.** Sean  $M, N$  variedades y  $f : M \rightarrow N$  de clase  $C^k$ , con  $k \geq 1$ . La aplicación  $f$  es **regular** en  $p \in M$  si su diferencial tiene rango máximo igual al mínimo de  $m = \dim(M)$  y  $n = \dim(N)$ . El caso más simple corresponde a funciones  $N = \mathbb{R}$ .

- Un punto  $q \in \mathbb{R}$  es un **valor regular** de  $f$  si, para cada  $p \in f^{-1}(\{q\})$ , la diferencial  $d_p f$  es sobreyectiva. Denotamos por  $\mathcal{R}_f$  al conjunto de valores regulares de  $f$ . Nótese que  $(N \setminus f(M)) \subset \mathcal{R}_f \subset N$ .
- Si, para cada  $p \in S$ ,  $T_p f$  es sobreyectiva, se dice que  $f$  es una **submersión** en  $S$ . Por lo tanto,  $q \in \mathcal{R}_f$  si y sólo si  $f$  es una submersión en  $f^{-1}(\{q\})$ . En el caso en que  $T_p f$  no es sobreyectiva,  $p \in M$  es un **punto crítico** y  $q = f(p) \in N$  un **valor crítico** de  $f$ .

A modo de ejemplo, la aplicación altura de la esfera sobre la línea recta tiene dos puntos críticos a los que se llaman polo Norte y Sur, respectivamente.

**Teorema 2.1** (Teorema de submersión). *Sea  $f : M \rightarrow N$  de clase  $C^\infty$  y  $q \in \mathcal{R}_f$ . Entonces, el conjunto de nivel  $f^{-1}(q) = \{p \in M \mid f(p) = q\}$  es una subvariedad cerrada de  $M$  con espacio tangente  $T_p f^{-1}(q) = \ker T_p f$ .*

*Demostración.*

Si  $f^{-1}(q) = \emptyset$ , el teorema se cumple.

En caso contrario, para  $p \in f^{-1}(q)$  podemos encontrar cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  tales que  $p \in U$ ,  $f(U) \subset V$ ,  $\varphi : U \rightarrow U' \times V'$ ,  $\varphi(p) = (0, 0)$ ,  $\psi : V \rightarrow V'$  y  $f_{\varphi\psi} : U' \times V' \rightarrow V'$  es la proyección sobre la segundo componente; en virtud del Teorema de la función implícita. Como  $\varphi(U \cap f^{-1}(q)) = f_{\varphi\psi}^{-1}(0) = U' \times \{0\}$ , se obtiene que  $f^{-1}(q)$  es subvariedad.

Por último, al ser  $f_{\varphi\psi}$  la proyección sobre la segunda componente, donde  $U' \subset E$  y  $V' \subset F$ , tenemos que  $T_u(f_{\varphi\psi}^{-1}(0)) = T_u U' = E = \ker(T_u f_{\varphi\psi})$  para  $u \in U'$ , que es la versión local de la parte final del enunciado.  $\square$

Recordemos que una aplicación lineal  $f : V \rightarrow W$  entre espacios vectoriales es **suprayectiva** (resp. **inyectiva**) si  $\ker(f) = 0$  (resp.  $\text{coker}(f) = W/f(V) = 0$ ). Las condiciones de ser inyectiva o suprayectiva son duales entre sí. Por consiguiente, las condiciones locales de inmersión y submersión para variedades (o de monomorfismo y epimorfismo entre fibrados) también lo son. Sin embargo, la caracterización global de una inmersión (localmente dual de la submersión) no resulta igual de sencilla.

**Definición 2.15.** *Una aplicación  $f : M \rightarrow N$  de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$  es una **inmersión** en  $p$  si la diferencial  $d_p T f$  es inyectiva. Es una **inmersión global**, si es una inmersión local para cualquier  $p \in M$ .*

**Teorema 2.2** (Teorema de inmersión).

*Para una aplicación  $f : M \rightarrow N$  de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , son equivalentes:*

1.  *$f$  es una inmersión en  $p$ ;*
2. *Existen cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  con  $p \in U$ ,  $f(U) \subset V$ ,  $\varphi : U \rightarrow U'$ ,  $\psi : V \rightarrow U' \times V'$  y  $\varphi(p) = 0$  tal que  $f_{\varphi\psi} : U' \rightarrow U' \times V'$  es la inclusión  $u \rightarrow (u, 0)$ ;*
3. *Existe un entorno  $U$  de  $m$  tal que  $f(U)$  es una subvariedad de  $N$  y  $f|_U$  un difeomorfismo de  $U$  en  $f(U)$ .*

*Demostración.*

(1)  $\Leftrightarrow$  (2) se da gracias al teorema de inmersión local.

(2)  $\Rightarrow$  (3) De nuevo, gracias al teorema de inmersión local, podemos escoger  $U$  y  $V$  de tal forma que  $f(U)$  es una subvariedad de  $V$ . Además, al ser  $V \subset N$  abierto,  $f(U)$  es una subvariedad en  $N$ . La implicación restante la obtenemos gracias a la definición de subvariedad.  $\square$

**Definición 2.16.** *Si  $f : M \rightarrow N$  es una inmersión inyectiva,  $f(M)$  es una **subvariedad inmersa** de  $N$ .*

El objetivo siguiente consiste en caracterizar bajo qué condiciones la subvariedad inmersa es un variedad diferenciable. Una subvariedad inmersa puede tener cruzamientos normales (tangentes normales en un punto, como en el caso de nodos ordinarios, p.e.) o bien presentar un “comportamiento patológico en el infinito” (como espirales o modelos suaves de fractales, p.e.). Para evitar estos problemas en el marco geométrico clásico, se añaden las condiciones de ser inyectiva y propia. En el marco funcional desarrollado en este trabajo se adopta una formulación más topológica.

**Definición 2.17.** *Una inmersión  $f : M \rightarrow N$  que es un homeomorfismo en  $f(M)$  cuya topología es la heredada de  $N$ , se denomina **embebimiento**.*

Por lo tanto, si  $f : M \rightarrow N$  es un embebimiento,  $f(M)$  es una subvariedad de  $N$ . En concreto, gracias al siguiente teorema podemos garantizar las condiciones bajo las cuales una inmersión es un embebimiento (menos restrictivas que el hecho de que la aplicación sea propia). La demostración de éste resultado consiste en aplicar de manera directa la definición de topología de subespacio (consultar [1] para más detalles).

**Teorema 2.3.** *Una inmersión inyectiva que es una aplicación abierta o cerrada en su imagen es un embebimiento.*

Por último, como contrapartida al concepto de tangencia ya visto anteriormente, daremos una primera introducción a la idea de **transversalidad**, el cual puede considerarse como la noción “opuesta”. Decimos que dos subvariedades  $M_1$  y  $M_2$  de  $N$  son transversales en  $p \in M_1 \cap M_2$  si sus espacios tangentes,  $T_p M_1$  y  $T_p M_2$ , generan el espacio tangente  $T_p N$  de  $N$  en  $p$ . Las variedades son transversales si dicha condición se verifica para cualquier punto  $p \in M_1 \cap M_2$ . En particular, dos curvas tangentes en el espacio no son transversales (aunque tengan tangente linealmente independiente en cada punto de intersección). La definición siguiente extiende esta idea intuitiva al caso relativo:

**Definición 2.18.** *Una aplicación  $f : M \rightarrow N$  de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , se denomina **transversal** a la subvariedad  $P$  de  $N$  (representado como  $f \pitchfork P$ ) si  $f^{-1}(P) = \emptyset$ ; ó si se cumple, para todo  $m \in f^{-1}(P)$ , lo siguiente:*

$$\mathbf{T1} \quad (T_m f)(T_m M) + T_{f(m)} P = T_{f(m)} N, \text{ y}$$

$$\mathbf{T2} \quad \text{La imagen inversa de } T_{f(m)} P, (T_m f)^{-1}(T_{f(m)} P), \text{ se escinde en } T_m M.$$

**Teorema 2.4** (Teorema de la aplicación transversal). *Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación de clase  $C^\infty$  y  $W$  una subvariedad de  $N$ . Si  $f \pitchfork W$ , entonces  $f^{-1}(W)$  es una subvariedad de  $M$  y  $T_p(f^{-1}(W)) = (T_p f)^{-1}(T_{f(p)} W)$  para todo  $p \in f^{-1}(W)$ . Si  $W$  tiene codimensión finita<sup>6</sup> en  $N$ , entonces  $\text{codim}(f^{-1}(W)) = \text{codim}(W)$ .*

Este teorema, cuya demostración detallada puede encontrarse en [1], es una versión global del Teorema de submersión ya visto, que resulta igual para el caso en que  $W$  es un punto.

---

<sup>6</sup>Dada una subvariedad  $B$  de una variedad  $M$ , su **codimensión** es la del espacio cociente con respecto al espacio tangente a la variedad en que está inmersa;  $\text{codim}(B) = \dim(M) - \dim(B)$ . Esta definición resulta análoga a la utilizada para espacios vectoriales.

## 2.5. Campos vectoriales

Para poder trabajar de forma global y más simple con los fibrados normal y tangente, recurriremos a la noción de campos vectoriales. Éstos nos permitirán estudiar más adelante las deformaciones de la cara para la expresión de gestos faciales. El soporte para los procesos de propagación (para rellenado o modelado de gestos) y las restricciones asociadas a la estructura de la cara (modelos locales de tipo elástico), está dado por los mapas de curvatura de la cara. Por ello, la caracterización de gestos faciales resulta más natural si se formula en términos geométricos.

**Definición 2.19.** *Sea  $M$  una variedad. Un **campo vectorial** sobre  $M$  es una sección local  $s : U \rightarrow TU = U \times \mathbb{R}^m$  del fibrado tangente  $\tau_M = (TM, \pi, M, \mathbb{R}^m)$  de  $M$ . El conjunto de todos los campos vectoriales en  $M$  de clase  $C^k$  se denota  $\mathcal{X}^k(M)$ , ó  $\mathcal{X}^\infty(M)$  en el caso  $C^\infty$ . Este conjunto tiene una estructura de  $\mathcal{O}_X$ -módulo sobre el anillo de las funciones  $C^k$ -regulares sobre  $X$ .*

Por lo tanto, un campo vectorial  $X$  sobre una variedad  $M$  es una  $C^k$ -aplicación

$$X : M \xrightarrow{T} M \quad \text{tal que} \quad X(p) \in T_p M, \quad \forall p \in M.$$

Dicho de otra forma, únicamente asigna a cada punto de  $M$  un vector basado en dicho punto. En el marco analítico (convergencia local para desarrollos en serie en cada punto), podemos representar cada campo como  $X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . De nuevo, veamos estos conceptos enfocados al caso que nos ocupa.

Dada una superficie  $S$ , un campo vectorial sobre él es una aplicación  $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  que a cada punto  $p \in S$  le asigna un vector  $X(p) \in \mathbb{R}^3$ . El fibrado tangente está generado por los campos vectoriales tangentes  $X(p) \in T_p S$  para  $p \in S$ . El fibrado normal está generado por los campos  $X(p)$  tales que  $\langle X(p), v \rangle = 0; \forall v \in T_p S$ .

Los campos vectoriales en **sistemas dinámicos** proporcionan los ejemplos más simples para describir una evolución variable a lo largo del tiempo. Los **flujos** son los “paquetes” de soluciones locales asociados a los campos. Para analizar dicha evolución, es necesario considerar la idea de **cajas de flujo**.

**Definición 2.20.** *Sea  $M$  una variedad y  $X \in \mathcal{X}^k(M), k \geq 1$ . Una **caja de flujo** de  $X$  en  $p \in M$  es una terna  $(U_0, a, F)$  donde:*

1.  $U_0 \subset M$  es abierto,  $p \in U_0$  y  $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ ;
2.  $F : U_0 \times I_a \rightarrow M$  es de clase  $C^k$ , siendo  $I_a = (-a, a)$ ;
3. Para cada  $u \in U_0$ ,  $c_u : I_a \rightarrow M$  definido como  $c_u(t) = F(u, t)$  es una curva integral de  $X$  en el punto  $u$ ;
4.  $F_t : U_0 \rightarrow M$  definido como  $F_t(u) = F(u, t)$  cumple que, para  $t \in I_a$ ,  $F_t(U_0)$  es abierto y  $F_t$  es un  $C^k$ -difeomorfismo en su imagen.

Esto puede verse de manera más simple si consideramos que el flujo es la extensión al caso de variedades de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) con condiciones iniciales prefijadas verificando restricciones tipo Lipschitz, correspondientes a la acotación polinomial en la variación del vector tangente en cada punto.

$$h'(t) = \Delta h(t),$$

$$h(0) = u.$$

Así, el **flujo lineal** ó **caja de flujo** asociado al campo vectorial  $X$ , es la familia uniparamétrica de aplicaciones que son solución del problema planteado previamente:

$$\{h_t : U \rightarrow U \mid h_t(u) := e^{tA}u\} \quad \text{donde } t \in I \subset \mathbb{R}.$$

El Teorema de existencia y unicidad de las EDO justifica la noción introducida de flujos locales sobre superficies y su extensión al caso global.

## 2.6. Campos vectoriales como operadores diferenciales

Además del enfoque dinámico presentado anteriormente, también podemos estudiar los campos vectoriales desde un punto de vista algebraico, que proporciona una unificación con las Geometrías Algebraica y Analítica, así como con el enfoque funcional y sus aplicaciones. Nuestro primer objetivo es la adaptación a (aplicaciones entre) variedades de una manera sencilla. Una motivación está vinculada a la idea clásica de desplazamientos infinitesimales como deformaciones de una caja de flujo. Para concretar dicha idea, presentaremos los siguientes conceptos:

### Definición 2.21.

1. Sea  $\varphi : M \rightarrow N$  una aplicación de clase  $C^k$  entre variedades y  $f \in C^k(N, \mathbb{R})$ . Definimos la **imagen inversa** ó **pull-back** de  $f$  por  $\varphi$  como  $\varphi^*f = f \circ \varphi \in C^r(M, \mathbb{R})$ .
2. Si  $f$  es un  $C^k$ -difeomorfismo y  $X \in \mathcal{X}^k(M)$ , la **imagen directa** ó **push-forward** de  $X$  por  $\varphi$  se define como  $\varphi_*X = T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{X}^k(N)$ .

Ambas nociones pueden intercambiarse con facilidad, simplemente considerando la aplicación inversa entre variedades (pasar de  $\varphi$  a  $\varphi^{-1}$ ), i.e., definiendo  $\varphi_* = (\varphi^{-1})^*$ ; análogo en el caso restante. Por lo tanto, la imagen directa de una función  $f$  sobre  $M$  es  $\varphi_*f = f \circ \varphi^{-1}$  y la imagen inversa de un campo vectorial  $Y$  sobre  $N$  es  $\varphi^*Y = (T\varphi)^{-1} \circ Y \circ \varphi$ .

No obstante, para realizar esta comparación entre variedades imponemos inicialmente que  $\varphi$  sea un difeomorfismo (a causa de la definición de imagen directa). Mas adelante relacionamos objetos presentes en dos variedades distintas usando condiciones más generales.

**Definición 2.22.** Sea  $\varphi : M \rightarrow N$  una aplicación de clase  $C^k$  entre variedades. Se dice que los campos vectoriales  $X \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$  e  $Y \in \mathcal{X}^{k-1}(N)$  están  **$\varphi$ -relacionados** ( $X \sim_\varphi Y$ ) si  $T\varphi \circ X = Y \circ \varphi$ .

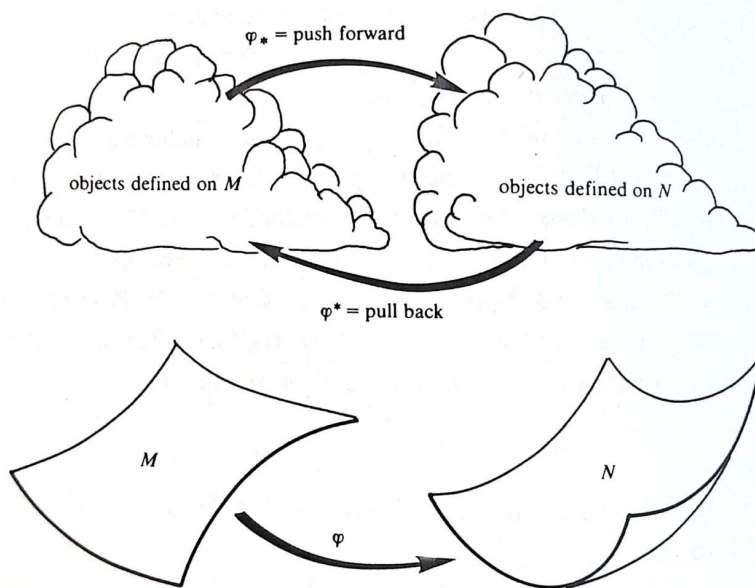


Figura 2.3: Imagen directa (*push-forward*) e inversa (*pull-back*). Fuente: [1]

A continuación, estudiamos cómo actúan los campos vectoriales sobre funciones en términos de la derivada direccional. Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , por lo que  $Tf : TM \rightarrow T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Sabemos que el vector tangente a  $\mathbb{R}$  en  $\lambda \in \mathbb{R}$  se puede expresar como  $(\lambda, \mu)$ , así que  $Tf$  actuando sobre un vector  $v \in T_p M$  puede escribirse como:

$$Tf \cdot v = (f(p), df(p) \cdot v).$$

Así, para cada  $p \in M$ ,  $df(p) \in T_p^* M$ . Por lo tanto,  $df$  es una sección del dual  $T^* M$  del fibrado tangente a la que se llama un **covector** ó una **1-forma** o un **co-campo vectorial**.

**Definición 2.23.** La 1-forma  $df : M \rightarrow T^* M$  definida de esta manera se denomina **diferencial de  $f$** .

Para facilitar la comprensión de esta idea, la adaptamos al caso de variedades de dimensión 2.

Dada una superficie  $S$  y la función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , la diferencial de ésta se extrae a partir de la obtenida por la función diferenciable asociada de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ . En concreto, dada una curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  que cumple  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ , la diferencial se computa

$$df_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t)).$$

Utilizando las nociones anteriores, introducimos el concepto de derivada de una función a través de un campo vectorial:

**Definición 2.24.** Sea  $f \in C^k(M, \mathbb{R})$  y  $X \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$ ,  $k \geq 1$ . Definimos la **derivada de Lie** ó **direccional** de  $f$  a lo largo de  $X$  como

$$\mathcal{L}_X f \equiv X[f] = df \cdot X = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i \in \mathcal{X}^{k-2}(M).$$

De manera análoga, podemos definir el mismo concepto aplicado de un campo vectorial a otro, que formulamos en términos de Análisis Funcional para facilitar su extensión a casos más generales.

**Definición 2.25.** Sea  $M$  una variedad sobre un espacio de Banach  $C^\infty$  y  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Definimos la **derivada de Lie** de  $Y$  con respecto a  $X$ , también denominado **corchete de Lie** de  $X$  e  $Y$ , como:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

El corchete de Lie es un producto interno antisimétrico en  $T_p M$  verificando la identidad de Jacobi (ver más abajo). Gracias a esta operación, podemos definir una estructura sobre el espacio de los campos vectoriales de la siguiente manera.

**Proposición 2.3.** El espacio vectorial  $\mathcal{X}(M)$  de los campos vectoriales sobre  $M$  con la operación corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]$  sobre  $\mathcal{X}(M)$  tiene estructura de **Álgebra de Lie**; es decir,

(i)  $[\cdot, \cdot]$  es bilineal con respecto a  $\mathbb{R}$ ;

(ii)  $[X, X] = 0$  para todo  $X \in \mathcal{X}(M)$ ;

(iii) **Identidad de Jacobi:**

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \text{ para todo } X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

*Demostración.* Las tres propiedades pueden demostrarse directamente a partir de la definición que hemos dado de corchete de Lie. Como ejemplo, vamos a dar la prueba de que se cumple la identidad de Jacobi (iii), para lo cual únicamente nos hace falta desarrollar cada término:

$$[X, [Y, Z]] = XYZ - XZY - YZX + ZYX,$$

$$[Y, [Z, X]] = YZX - YXZ - ZXY + XZY,$$

$$[Z, [X, Y]] = ZXY - ZYX - XYZ + YXZ.$$

Al sumar las expresiones anteriores se obtiene que los términos se anulan entre sí.  $\square$



## 2.7. Tensores

Un tensor de tipo  $(r, s)$  en Álgebra Lineal es una combinación de productos de  $s$  vectores y  $r$  co-vectores con coeficientes pertenecientes al cuerpo base. La algebrización basada en campos vectoriales y sus duales (formas diferenciales), así como las condiciones de trivialidad local para los fibrados tangente y cotangente, permite extender los tensores al marco geométrico. Gracias a ellos, también se pueden expresar de forma natural modelos basados en  $s$  trayectorias, sometidas a  $r$  restricciones con coeficientes variables. Estos modelos son ubicuos en todas las áreas de conocimiento científicas y tecnológicas.

Los **campos tensoriales** son combinaciones lineales de productos formales de campos escalares, vectoriales y co-vectoriales. Desde el punto de vista global, corresponden a secciones de fibrados construidos sobre la variedad base suave  $M$  o sus extensiones naturales a espacios de Banach  $B$  (o incluso a variedades eventualmente singulares  $X$ ). Esta construcción se realiza localmente sobre cada fibra del fibrado tangente y se “pegan” los datos usando “**funciones de transición**” (elevación a la fibra de las operaciones de cambio de carta en la base).

Antes de dar la definición para variedades, presentaremos la noción de tensor en espacios vectoriales para que así la extensión a las variedades resulte más comprensible. Para ello, consideramos que  $L^k(E_1, \dots, E_k; F)$  designa al espacio vectorial de las aplicaciones  $k$ -multilineales continuas de  $E_1 \times \dots \times E_k$  en  $F$ . El caso especial  $E^* \equiv L(E; \mathbb{R})$  es el espacio dual de  $E$ .

**Definición 2.26.** *Dado un espacio vectorial  $E$ , los elementos de*

$$T_s^r(E) = L^{r+s}(E^*, \dots, E^*, E, \dots, E; \mathbb{R}),$$

*( $r$  copias de  $E^*$  y  $s$  copias de  $E$ ) se denominan **tensores de  $E$ , contravariantes de orden  $r$  y covariantes de orden  $s$ ; o simplemente de tipo  $(r, s)$ .***

**Definición 2.27.** *Dados dos elementos  $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(E)$  y  $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(E)$ , su **producto tensorial** es  $t_1 \otimes t_2 \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(E)$ , que se define como:*

$$\begin{aligned} (t_1 \otimes t_2)(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, f_1, \dots, f_{s_1}, g_1, \dots, g_{s_2}) &= \\ &= t_1(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, f_1, \dots, f_{s_1}) t_2(\gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, g_1, \dots, g_{s_2}), \end{aligned}$$

donde  $\beta^i, \gamma^j \in E^*$  y  $f_k, g_l \in E$ .

La descripción precedente se extiende a un espacio vectorial sobre un cuerpo arbitrario  $\mathbb{F}$  sustituyendo  $\mathbb{R}$  por  $\mathbb{F}$ , dando lugar al espacio de tensores  $\mathbb{F}$ -evaluados de tipo  $(r, s)$ ;  $T_s^r(E; \mathbb{F})$ . En este caso, el producto tensorial requiere de una forma bilineal en el espacio de evaluación para su definición. En el caso  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , el producto tensorial es asociativo, bilineal y continuo; pero no conmutativo. Por convenio, designamos  $T_1^1(E) = L(E; E)$  y  $T_0^0(E; F) = F$ . La construcción local se extiende asimismo al caso algebraico, reemplazando los espacios vectoriales sobre un cuerpo por módulos sobre un anillo base.

Una vez vistos estos conceptos aplicados a espacios vectoriales, busquemos definirlos de manera análoga al caso de variedades usando fibrados tensoriales, cuyas secciones son tensores de tipo  $(r, s)$ . La construcción local se extiende fácilmente al caso global pegando datos locales mediante las correspondientes funciones de transición. La naturalidad de esta construcción está asociada al uso de imágenes directas e inversas.

**Definición 2.28.** Sea  $M$  una variedad y  $\tau_M : TM \rightarrow M$  su fibrado tangente. Denotamos por  $T_s^r(M) = T_s^r(TM)$  al **fibrado de tensores contravariantes de orden  $r$  y covariantes de orden  $s$** , o simplemente de **tipo  $(r, s)$** . Identificamos  $T_0^1(M) = TM$  y la sección nula de  $T_s^r(M)$  como  $M$ .  $T_1^0(M)$  es el **fibrado cotangente** de  $M$ . Las  **$k$ -formas** son las secciones de la  $k$ -ésima potencia exterior (producto exterior vectorial)  $\Lambda^k T^*M$ , que se denota también como  $\Omega_M^k$ . A la suma directa de las potencias exteriores se le denota como  $\tau_M^*$  con su proyección estructural  $T^*M \xrightarrow{M} \Omega_M^*$ , o como  $\Omega_M^* := \bigoplus_{k=0}^m \Omega_M^k$ .

Recordamos que una  $C^k$ -sección arbitraria  $s$  de un fibrado asigna a cada punto base  $b \in U \subset M$  un vector  $s(b)$  en la fibra que está sobre ella, donde la asignación es de clase  $C^k$ . Para el fibrado  $T_s^r(M)$ , la imagen por una sección se denomina **tensor**. Dado un fibrado vectorial  $\pi : E \rightarrow B$ , las secciones  $C^\infty$  se denotan como  $\Gamma^\infty(\pi)$  ó  $\Gamma^\infty(\pi)$ .

**Definición 2.29.** Un **campo tensorial de tipo  $(r, s)$**  sobre una variedad suave  $M$ , es una sección  $C^\infty$  de  $T_s^r(M)$ . Denotamos por  $\mathcal{T}_s^r(M)$  al conjunto  $\Gamma^\infty(T_s^r(M))$  junto a su estructura de espacio vectorial (infinito dimensional) real. Un **covector** ó **uno-forma diferencial** es un elemento de  $\mathcal{X}(M) = \mathcal{T}_1^0(M)$

También podemos extender el concepto de producto tensorial presentado previamente a otras estructuras algebraicas sobre cuerpos arbitrarios, módulos sobre anillos o álgebras finito-dimensionales. En particular, denotamos mediante  $\mathcal{F}(M)$  al conjunto de aplicaciones de  $M$  en  $\mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$  (la estructura estándar local de variedad usada en  $\mathbb{R}$ ) junto a su estructura como módulo sobre un anillo local regular en el caso algebraico, utilizada habitualmente en Geometría Algebraica o Analítica.

**Definición 2.30.** Dados  $f \in \mathcal{F}(M)$  y  $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$ , sea  $ft : M \rightarrow T_s^r(M)$  definido como  $ft(m) = f(m)t(m)$ . Si  $X_i \in \mathcal{X}(M)$  ( $i = 1, \dots, s$ ),  $\alpha^j \in \mathcal{X}^*(M)$  ( $j = 1, \dots, r$ ), y  $t' \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(M)$ ; definimos

$$t(\alpha^1, \dots, \alpha^r, X_1, \dots, X_s) : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ como } t(\alpha^1, \dots, X_s)(m) = t(m)(\alpha^1(m), \dots, X_s(m)),$$

y

$$t \otimes t' : M \rightarrow T_{s+s'}^{r+r'}(M) \text{ como } (t \otimes t')(m) = t(m) \otimes t'(m).$$

## 2.8. La aplicación de Gauss-Weingarten

El objeto de estudio de este trabajo es la geometría diferencial del rostro humano como superficie suave a trozos. La **Geometría Intrínseca** de una superficie sólo tiene en cuenta las propiedades asociadas al fibrado tangente y las operaciones correspondientes (dualidad, productos) introducidas en la sección anterior; mientras que la **Geometría Extrínseca** de una superficie tiene también en cuenta las propiedades relativas a la inmersión en el espacio ambiente. Las deformaciones permiten conectar ambos aspectos en cualquier dimensión.

Para fijar ideas y, tal y como hemos ido mencionando previamente, nos centraremos en variedades de dimensión 2 (**superficies**) que denotaremos como  $S$ , con un mayor énfasis en los aspectos extrínsecos de la misma. En particular, ignoramos aspectos tridimensionales como la estructura ósea y muscular subyacentes.

Si consideramos el vector normal  $N$  a  $S$ , la derivada direccional que hemos definido en la Sección 2.6 permite estudiar la evolución de este vector normal en el espacio ambiente. El análisis extrínseco de la aplicación normal es la clave para comprender adecuadamente la evolución de los distintos componentes que conforman la cara cuando realiza gestos.

Los elementos más significativos para el análisis de los gestos faciales están concentrados en torno a la boca y los ojos. El soporte para la información inicial es el fibrado tangente, mientras que su evolución espacio-temporal se analiza en términos del fibrado normal. En particular, dado un campo vectorial  $X$  (que podría representar las restricciones de las comisuras de los labios),  $LX \equiv \mathcal{L}_X N$  mide la variación del plano tangente con respecto al vector normal de la dirección  $X$ .

**Definición 2.31.** *El endomorfismo sobre el espacio tangente  $L: T_p S \rightarrow T_p S$  dado anteriormente se denomina **operador de forma (shape operator)** ó **aplicación de Weingarten**.*

**Proposición 2.4.** *El operador  $L$  es autoadjunto; es decir,*

$$\langle LX, Y \rangle = \langle X, LY \rangle; \forall X, Y \in T_p S.$$

*Demostración.* En virtud de la regla de Leibnitz,  $X\langle N, Y \rangle = \langle \mathcal{L}_X N, Y \rangle + \langle N, \mathcal{L}_X Y \rangle$ .

Por lo tanto:

$$X\langle N, Y \rangle = \langle \mathcal{L}_X N, Y \rangle + \langle N, \mathcal{L}_X Y \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{L}_X N, Y \rangle = X\langle N, Y \rangle - \langle N, \mathcal{L}_X Y \rangle = -\langle N, \mathcal{L}_X Y \rangle$$

$$Y\langle X, N \rangle = \langle \mathcal{L}_Y X, N \rangle + \langle X, \mathcal{L}_Y N \rangle \Rightarrow \langle X, \mathcal{L}_Y N \rangle = Y\langle X, N \rangle - \langle \mathcal{L}_Y X, N \rangle = -\langle \mathcal{L}_Y X, N \rangle,$$

donde los términos  $\langle X, N \rangle$  y  $\langle N, Y \rangle$  son nulos al ser  $N$  el vector normal y  $X, Y \in T_p S$  (su producto interno es cero). Gracias a esto, es posible sustituir:

$$\begin{aligned} \langle LX, Y \rangle - \langle X, LY \rangle &= \langle \mathcal{L}_X N, Y \rangle - \langle X, \mathcal{L}_Y N \rangle = -\langle N, \mathcal{L}_X Y \rangle + \langle \mathcal{L}_Y X, N \rangle = \\ &= -\langle N, \mathcal{L}_X Y \rangle + \langle N, \mathcal{L}_Y X \rangle = \langle N, \mathcal{L}_Y X - \mathcal{L}_X Y \rangle = \langle N, [X, Y] \rangle = 0, \end{aligned}$$

al ser el producto interno una forma bilineal simétrica y  $[X, Y] \in T_p S$ . □

## 2.9. Referencias móviles para una superficie

Si bien el operador de forma que hemos definido permite estudiar la evolución del vector normal a la superficie, para el control de los gestos es necesaria una mayor precisión para facilitar la ubicación de los elementos más significativos en la superficie de la cara humana. Las referencias móviles asociadas a las curvas coordenadas de la superficie son la clave para localizar y realizar el seguimiento de los gestos. Salvo algunos casos muy sencillos, no hay una parametrización “natural” para una superficie. Además, las curvas integrales asociadas a los diferentes procesos de propagación proporcionan parametrizaciones más apropiadas desde el punto de vista dinámico. Empezamos recordando algunas nociones básicas.

**Definición 2.32.** *Dada una superficie  $S$  (localmente) en forma paramétrica como*

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v)) , r \in C^\infty ,$$

*que es la generalización del enfoque de Monge basado en la proyección sobre los planos coordenados, su **linealización** es  $d_p r : T_p \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$  y está dado a partir del Jacobiano  $Jr = \frac{\partial(r_1, r_2, r_3)}{\partial(u, v)}$ . Las **curvas coordenadas** sobre  $S$  son  $r(u_0, v)$  y  $r(u, v_0)$ .*

A pesar de que estos conceptos son análogos a los ya vistos en la Sección 2.2, su aplicación a variedades de dimensión 2 permite ubicarnos dentro de una superficie. En particular, las coordenadas de los “hechos salientes” o más significativos para los gestos faciales se representan en términos de intersecciones de curvas paramétricas.

Las referencias móviles en el caso de curvas en el espacio o alabeadas se describen en términos del **triedro intrínseco de Frénet-Serret**. Aunque dicha descripción se da en función de la longitud de arco (parámetro intrínseco), no depende del sistema elegido de coordenadas. Ello facilita la localización en cualquier punto de la curva. En el caso de superficies, la referencia móvil está dada por el **plano tangente**  $T_p S$  y el **vector normal**  $N$ .

Esta nueva referencia facilita la labor de localización, pues sólo utiliza la base ortonormal del plano tangente y el vector normal para indicar cualquier punto de la superficie en términos de ubicación y orientación. Recordemos que la orientación de una superficie en un punto queda determinada por el vector normal en dicho punto.

**Definición 2.33.** *La **aplicación ó mapa de Gauss** de una carta se define al tomar el vector normal unitario en cada punto, resultando*

$$N : U \rightarrow \mathbb{S}^2 / N(p) = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} .$$

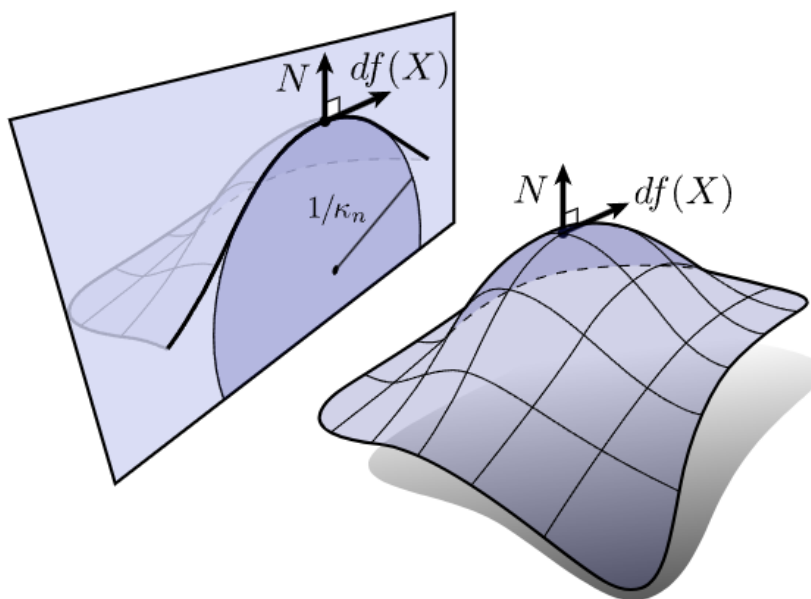


Figura 2.4: Referencia móvil en una superficie. **Fuente:** [18]

El mapa de Gauss siempre puede definirse localmente y asigna a cada punto de la superficie un punto de la esfera, lo que permite obtener el elemento correspondiente del fibrado normal. Las superficies orientables tienen dos posibles mapas de Gauss, correspondientes a las dos opciones posibles para la dirección de los vectores normales. Sin embargo, las superficies no-orientables (como la banda de Möbius o la botella de Klein) no tienen una forma consistente de elegir una dirección para los vectores normales que sea globalmente compatible (todos los cambios de carta con determinante positivo para la matriz acobiana). Por ello, las superficies no-orientables no tienen un mapa de Gauss.

**Definición 2.34.** Una superficie  $S$  es **orientable** si existe una aplicación diferenciable  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que  $N(p)$  es el único vector unitario normal a  $S$  en  $p$ .

Únicamente puede definirse el mapa de Gauss globalmente para una superficie en caso de que sea orientable; es decir, cuando el transporte de la orientación a lo largo de cualquier camino cerrado es coherente al completar un ciclo. Además, ésta permite definir de manera equivalente la aplicación de Gauss-Weingarten presentada en el apartado precedente.

**Definición 2.35.** La diferencial del mapa de Gauss  $dN : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$  induce el endomorfismo de Weingarten  $L : T_p S \rightarrow T_p S$ .



# Capítulo 3

## Mapas de curvaturas

Este capítulo se centra en la caracterización y reconstrucción de superficies mediante el pegado de datos locales invariantes. La clave es la caracterización de una superficie (salvo movimientos rígidos) por las curvaturas media y total. Para calcular estos datos, usamos los conceptos introducidos en el capítulo anterior que permiten calcular los invariantes de una superficie. Este proceso se centra en la caracterización de los diferentes tipos de **curvatura**. Intuitivamente, ésta puede describirse como la “cantidad” por la cual un objeto geométrico dentro de un espacio euclídeo se desvía de ser un subespacio lineal. La formalización de esta idea permite clasificar las regiones de la cara en función de su curvatura. Cabe destacar que las referencias principales para la redacción de este capítulo han sido [16] y [27].

En este capítulo suponemos, salvo que se diga lo contrario, que estamos trabajando con una superficie  $S$  parametrizada localmente por  $r(u, v)$  donde  $r : D \rightarrow S$ , siendo  $D$  un dominio del plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 3.1.** Dada una superficie  $S$  y  $X, Y \in T_p S$ , definimos la  **$k$ -ésima forma fundamental** como  $\langle L^{k-1} X, Y \rangle$ ;  $k \in \mathbb{N}$ .

Cada una de estas formas bilineales tiene una forma cuadrática (representando una métrica) asociada diferente, aunque habitualmente nos restringimos a las dos primeras formas fundamentales. Las de orden superior no se consideran de momento, aunque tienen un gran interés. A modo de ejemplo, basta considerar la tercera forma fundamental  $(III) = \langle L^2 X, Y \rangle$  (de gran utilidad en el Capítulo 5), que expresa la “variación de la forma” y depende linealmente de las previas.

### 3.1. Primera forma fundamental

**Definición 3.2.** Dada una superficie  $S$ , su **primera forma fundamental** se define como:

$$(I) \equiv \langle r_u, r_v \rangle = \begin{pmatrix} r_u \cdot r_u & r_u \cdot r_v \\ r_v \cdot r_u & r_v \cdot r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Esta definición es coherente con el enfoque desarrollado en la Sección 2.2, pues  $T_p S$  está generado por los vectores tangentes a las curvas  $r_u$  y  $r_v$ . Por tanto, tal y como puede verse en la Figura 3.1, la primera forma fundamental describe el comportamiento de pares de vectores en el plano tangente y es la clave para introducir métricas sobre la superficie.

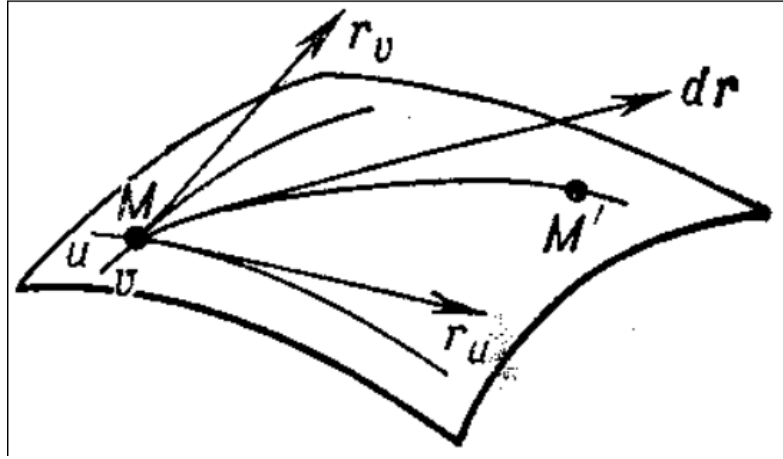


Figura 3.1: Interpretación de la primera forma fundamental. Fuente: [21]

**Definición 3.3.** Para cualesquiera  $X, Y \in T_p S$ , definimos su **producto escalar** como:

$$\langle X, Y \rangle = (X_1 \ X_2) (I) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = X_1 Y_1 E + (X_1 Y_2 + X_2 Y_1) F + Y_1 Y_2 G.$$

Así,  $(I)$  define un producto interno bilineal simétrico en  $S$  cuya forma cuadrática asociada es la métrica de la superficie. De forma intuitiva,  $(I)$  expresa la distancia entre afijos (puntos del plano complejo). Este producto permite también definir la longitud de una curva en una superficie.

**Definición 3.4.** La **longitud de una curva**  $\gamma$  en una superficie  $S$  resulta:

$$l(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\| dt = \int_I \|r_u u'(t) + r_v v'(t)\| dt = \int_I \sqrt{E u'(t)^2 + 2F u'(t)v'(t) + G v'(t)^2} dt.$$

Estas definiciones locales se extienden a cualquier superficie conexa:

**Lema 3.1.** Si  $S$  es una superficie conexa de clase  $C^1$ ; entonces, cada par de puntos puede unirse mediante una **curva rectificable** (suave a trozos).

*Demostración.*

Consideramos  $p, q \in S$ . Por ser  $S$  conexa,  $\exists \sigma(t)$  curva continua, con  $t \in [0, 1]$  de extremos  $\sigma(0) = p$  y  $\sigma(1) = q$ . Así, como  $[0, 1]$  es compacto, también lo es  $\text{Im}(\sigma)$ .

Por tanto, existe un número finito de arcos  $\sigma_i(t)$  tales que

$$t_i \leq t \leq t_{i+1}, i \in \{1, \dots, n\}, t_1 = 0 \text{ y } t_n = 1;$$



así como entornos coordenados que cumplen  $\text{Im}(\sigma_i) \subset W_i$ . Consideramos en  $W_i$  los puntos  $\sigma(t_i) = (u_i, v_i)$  y  $\sigma(t_{i+1}) = (u_{i+1}, v_{i+1})$ . La curva  $\gamma_i$  queda definida por:

$$u = u_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(u_{i+1} - u_i), v = v_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(v_{i+1} - v_i),$$

para  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) y  $\gamma = \gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1$ . Por lo tanto,  $\gamma$  es una curva rectificable (suave a trozos) de extremos  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(1) = q$ .  $\square$

En virtud de la descripción precedente, podemos definir una **métrica** en  $S$  considerando  $\Gamma(p, q)$  como el conjunto de curvas rectificables de  $S$  con extremos  $p$  y  $q$ ;  $\rho(p, q) = \inf_{\gamma \in \Gamma(p, q)}(l(\gamma))$ . Estos caminos de longitud mínima son las **geodésicas**.

**Definición 3.5.** *Dados dos puntos  $p, q \in S$ , el camino de longitud mínima que les une  $\rho(p, q) = \inf_{\gamma \in \Gamma(p, q)}(l(\gamma))$  se denomina **geodésica**.*

Haciendo uso de las nociones anteriores, es posible extender conceptos bien conocidos para espacios métricos a superficies.

**Definición 3.6.** *Dadas dos superficies  $(S_1, g)$  y  $(S_2, h)$  donde  $g, h$  son métricas respectivas sobre  $S_1$  y  $S_2$ ; diremos que  $f : (S_1, g) \rightarrow (S_2, h)$  es una **isometría local** en  $p \in S_1$  si existe un entorno  $U$  de  $p$  en  $S_1$  tal que:*

$$g(p', q) = h(f(p'), f(q)); \forall p', q \in U$$

siendo habitual considerar  $p' = p$ . La isometría es **global** si se da  $\forall p \in S_1$ .

En otras palabras, una isometría entre superficies es una aplicación que preserva distancias en superficies. Esta noción es un caso particular de la noción de isometría para espacios métricos adaptada a superficies. Si consideramos la linealización  $df : TS_1 \rightarrow TS_2$ , la definición anterior puede reformularse en términos de la primera forma fundamental como:

$$I_1(X, Y) = I_2(df(X), df(Y)); \forall X, Y \in TS_1,$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  son las correspondientes formas fundamentales de  $S_1$  y  $S_2$ .

Estas nociones previas se extienden de forma natural al enfoque introducido en la Sección 2.9, introduciendo la noción de área de una superficie.

**Definición 3.7.** *Dada una región  $D \subset S$ , podemos calcular su **área** como:*

$$A(D) = \int \int_D \|r_u \times r_v\| \, dudv.$$

La definición de área es invariante por difeomorfismos locales. De hecho, puede darse una formulación análoga en términos de la primera forma fundamental, si consideramos que:

$$|I| = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_u r_u & r_u r_v \\ r_v r_u & r_v r_v \end{vmatrix} = \|r_u\|^2 \|r_v\|^2 - |r_u r_v|^2 = \|r_u \times r_v\|,$$

lo cual garantiza que la definición previa es definida positiva y permite reescribirla en términos intrínsecos de la propia superficie:

$$A(D) = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv = \int_D dA.$$

**Definición 3.8.** *El elemento de área de la superficie es  $dA = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$ .*

Al igual que hemos visto aplicaciones que preservan la métrica, existe el concepto análogo para aplicaciones que preservan el área, como son la aplicación de Arquímedes o la proyección de Lambert, que se pueden ver con mayor detalle en [25] y [55].

**Definición 3.9.** *Dadas dos superficies  $S_1$  y  $S_2$ , diremos que  $f : S_1 \rightarrow S_2$  es una **aplicación isoareal** o que preserva áreas si:*

$$\begin{vmatrix} I_1(X_1, X_1) & I_1(X_1, X_2) \\ I_1(X_1, X_2) & I_1(X_2, X_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_2(Y_1, Y_1) & I_2(Y_1, Y_2) \\ I_2(Y_1, Y_2) & I_2(Y_2, Y_2) \end{vmatrix},$$

$\forall X_1, X_2 \in TS_1$  donde  $Y_i = df X_i; i \in \{1, 2\}$ .

**Observación.** *Si bien esta definición la hemos dado para superficies, puede generalizarse a variedades riemannianas de cualquier dimensión arbitraria usando el determinante:*

$$|(I_1(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}| = |(I_2(Y_i, Y_j))_{1 \leq i, j \leq n}|.$$

*Este tipo de aplicaciones se denominan **unimodulares**, teniendo denominaciones específicas en función de la dimensión de la variedad (isoareales para dimensión 2, isovolumétricas para dimensión 3, etc.)*

Tras haber establecido las nociones de distancia y área, será también conveniente explicitar la definición del ángulo que forman dos curvas en una superficie. Para ello, consideramos dos curvas regulares  $c_1$  y  $c_2$  de  $S$  con un punto en común  $p$ . Estas curvas están parametrizadas respectivamente por  $(u_1(t), v_1(t))$  y  $(u_2(t), v_2(t))$ , con vectores tangentes  $t_1(p) = (u'_1(t), v'_1(t))$  y  $t_2(p) = (u'_2(t), v'_2(t))$ .

**Definición 3.10.** *El ángulo que forman  $c_1$  y  $c_2$  es el de sus vectores tangentes en dicho punto, que se expresa también en términos de  $(I)$ :*

$$\cos(\alpha) = \frac{t_1 t_2}{\|t_1\| \|t_2\|} = \frac{Eu'_1 u'_2 + 2F(u'_1 v'_2 + v'_1 u'_2) + Gv'_1 v'_2}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1' v_1' + Gv_1'^2} \sqrt{Eu_2'^2 + 2Fu_2' v_2' + Gv_2'^2}}.$$

**Observación.** *Para curvas coordenadas de  $S$  ( $v = cte.$  ó  $u = cte.$ ), la expresión del ángulo que forman se simplifica a:*

$$\cos(\alpha) = \frac{Fu'_1 v'_2}{\sqrt{Eu_1'^2} \sqrt{Gv_2'^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

*obteniéndose que, si  $F = 0$ , las curvas son ortogonales en dicho punto.*

**Definición 3.11.** Una aplicación entre superficies  $S_1, S_2$  se denomina **conforme** si preserva ángulos. En términos de la primera forma fundamental, esto se puede expresar como:

$$\frac{I_1(X_1, X_2)}{\|X_1\| \|X_2\|} = \frac{I_2(Y_1, Y_2)}{\|Y_1\| \|Y_2\|},$$

$\forall X_1, X_2 \in TS_1$  donde  $Y_i = df X_i; i \in \{1, 2\}$ .

Las aplicaciones conformes más conocidas son la proyección de Mercator o las transformaciones de Möbius. Para más detalles sobre estos ejemplos, basta consultar [25], [44] o [55].

Las aplicaciones conformes son de gran utilidad para representar gestos faciales pues, cuando una cara se deforma para realizar cualquier clase de gesto, la geometría de la superficie pasa de ser euclídea a conforme. Al ser estas transiciones elásticas, el rostro vuelve a su estado original junto a su geometría conforme gracias a esta conservación de ángulos. Este enfoque se desarrolla en mayor profundidad en la Sección 5.2.

## 3.2. Segunda forma fundamental

La segunda forma fundamental, también conocida como **tensor de forma**, es una forma cuadrática del plano tangente de una superficie suave en  $\mathbb{R}^3$ . Junto a  $(I)$ , permite definir invariantes de la superficie en términos de sus curvaturas principales.

Supondremos que  $S$  es una superficie orientable,  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ , y recordamos que hay un campo de vectores normales unitarios  $n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$  (el fibrado normal).

**Definición 3.12.** La **segunda forma fundamental** de  $S$  en la base de  $T_p S$  es:

$$(II) \equiv \langle Lr_u, r_v \rangle = \begin{pmatrix} r_{uu} \cdot n & r_{uv} \cdot n \\ r_{uv} \cdot n & r_{vv} \cdot n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

y suele representarse como  $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ .

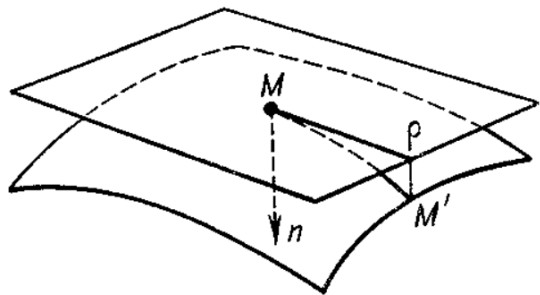


Figura 3.2: Interpretación de la segunda forma fundamental. **Fuente:** [21]

Vemos que sus coeficientes son las proyecciones de la segunda derivación sobre la recta normal, por lo que su significado hace referencia a la variación en el plano tangente del vector normal, tal y como se aprecia en la Figura 3.2.

Retomando lo expuesto en la Sección 2.8, recordamos que la diferencial  $dN : T_pS \rightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^2$  induce el endomorfismo de Weingarten  $L: T_pS \rightarrow T_pS$ , pues  $T_pS = T_{N(p)}\mathbb{S}^2$  al ser ambos perpendiculares al vector normal. Para mayor claridad, de ahora en adelante denotaremos al endomorfismo de Weingarten como  $d_pN$  para así especificar el punto en que se define, y designaremos su matriz como  $K$ .

**Proposición 3.1.**  $\forall p \in S$ , el endomorfismo lineal  $d_pN : T_pS \rightarrow T_pS$  es autoadjunto.

Este resultado es simplemente un caso particular del enfoque visto en la Sección 2.8. No obstante, esta reformulación de la proposición junto a su correspondiente demostración, realizada empleando una parametrización concreta tanto de la superficie como del espacio tangente (ver [16]), permite **asociar a esta aplicación lineal autoadjunta una forma cuadrática**. La forma cuadrática correspondiente a  $d_pN$  es  $(II)$ ;  $\forall p \in S$ .

De manera más formal,  $(II) = -d_pN$ . Así,  $(II)(v) = -\langle d_pN(v), v \rangle$ ; que es la derivada direccional del vector normal a lo largo de un campo vectorial (en este caso  $v$ ).

**Definición 3.13.** Sea  $c$  una curva regular en  $S$  que pasa por  $p \in S$ ,  $\kappa$  la curvatura de  $c$  en  $p$ , y  $\cos(\theta) = \langle n, N(p) \rangle$ , donde  $n$  es el vector normal a  $c$ . El valor  $\kappa_n = \kappa \cos(\theta)$  se denomina la **curvatura normal** de  $c$  en  $p$ .

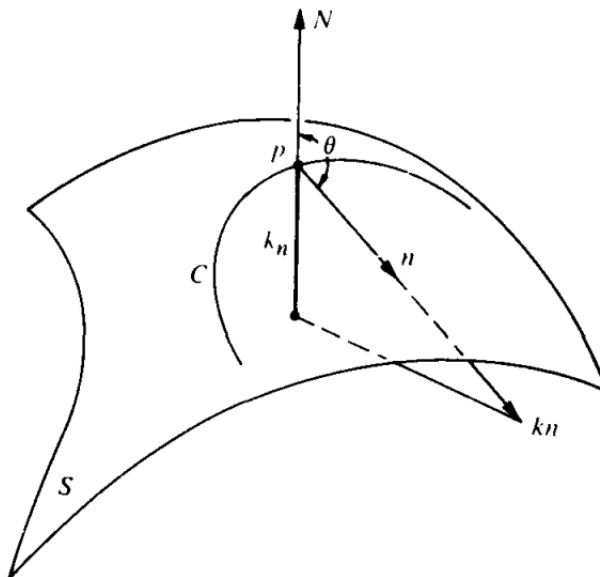


Figura 3.3: Interpretación geométrica de la curvatura normal. Fuente: [16]

En otras palabras,  $\kappa_n$  es la longitud de la proyección del vector  $\kappa n$  sobre la normal a la superficie en  $p$ , cuyo signo viene dado por la orientación  $N(p)$  de  $S$ .

**Proposición 3.2** (Meusnier). *Todas las curvas contenidas en  $S$  que tienen en un punto dado  $p \in S$  la misma recta tangente, tienen en este punto la misma curvatura normal.*

*Demostración.* Sea  $c \subset S$  una curva regular parametrizada por la longitud de arco (p.p.a.)  $\alpha(s)$  con  $\alpha(0) = p$ . Si denotamos como  $N(s)$  a la restricción del vector normal  $N(p)$  a la curva  $\alpha(s)$ , tenemos que  $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ , por lo que  $\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle$ . Por lo tanto,

$$(II)(\alpha'(0)) = -\langle d_p N(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle = \langle N, \kappa n \rangle = \kappa_n(p)$$

□

El resultado facilita una interpretación geométrica de la segunda forma fundamental pues, para un vector normal unitario  $v \in T_p S$ , su valor es igual a la curvatura normal de una curva regular que pasa por  $p$  y es tangente a dicho vector. Por tanto, podemos hablar de la curvatura normal a lo largo de una dirección en  $p$ , que se mantiene a lo largo de la **sección normal** de  $S$  en  $p$  (la intersección de la superficie con el plano que contiene a  $v$  y a  $N(p)$ ), pues todas las curvas que pasen por dicho punto tendrán ahí la misma curvatura normal.

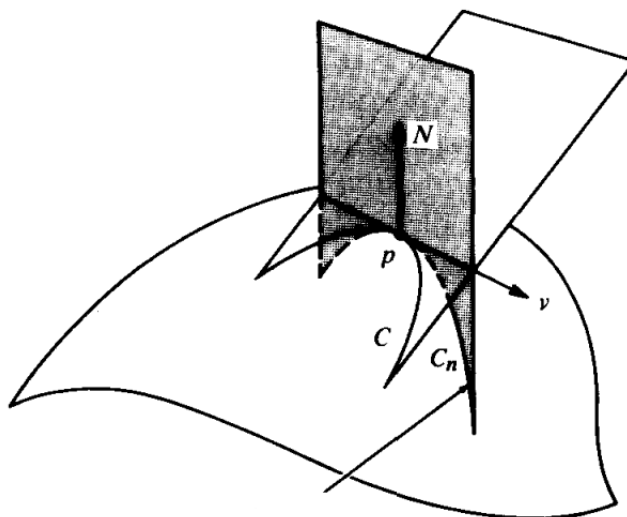


Figura 3.4: Interpretación geométrica de la Proposición de Meusnier. **Fuente:** [16]

Podemos dar una formulación alternativa de estos conceptos en términos de círculos osculadores<sup>1</sup>, tal y como prueba Banchoff en [7].

**Proposición 3.3** (Meusnier alternativo). *Todas las curvas de una superficie que pasan por un mismo punto y tienen la misma tangente en él, tienen la misma curvatura normal en dicho punto y los círculos osculantes forman una esfera (**esfera de Meusnier**).*

<sup>1</sup>Un **círculo osculador** o **circunferencia osculatriz** es aquella que mejor aproxima la curvatura de una curva en un punto específico de la misma.

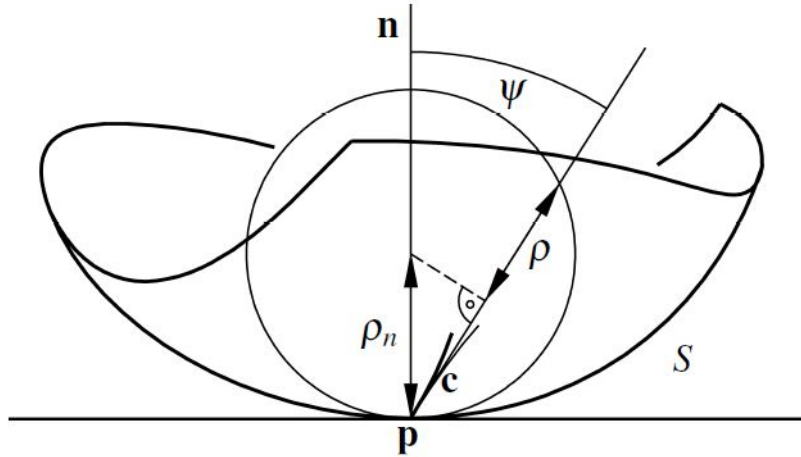


Figura 3.5: Interpretación de la Proposición de Meusnier como circunferencia oscultriz. **Fuente:** [45]

### 3.3. Curvaturas principales

**Definición 3.14.** La *curvatura normal* en una dirección  $w$  se define como  $\kappa_w = \frac{II(w,w)}{I(w,w)}$ .

Como la aplicación  $d_p N$  es autoadjunta, para cada  $p \in S$  existe una base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_p S$  donde  $d_p N(e_1) = \kappa_1 e_1$  y  $d_p N(e_2) = \kappa_2 e_2$ , siendo  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  los autovalores máximo y mínimo de  $(II)$  restringida al círculo unidad de  $T_p S$ ; es decir, los valores extremos de la curvatura normal en  $p$ . La demostración de este resultado puede encontrarse en [16].

**Definición 3.15.** Los valores  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , que son las respectivas curvaturas normales máxima y mínima, se denominan *curvaturas principales* en  $p$  y sus direcciones correspondientes  $d_1, d_2$  son las *direcciones principales* en  $p$ .

El conocimiento de estos valores permite calcular de manera sencilla la curvatura normal a lo largo de una dirección dada de  $T_p S$ . De hecho, considerando  $v \in T_p S$  con  $|v| = 1$ , al estar empleando una base ortonormal de  $T_p S$ ,

$$v = e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta),$$

siendo  $\theta$  el ángulo de  $e_1$  a  $v$  según la orientación de  $T_p S$ .

**Proposición 3.4** (Fórmula de Euler).

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \kappa_n &= (II)(v) = -\langle d_p N(v), v \rangle = -\langle d_p N(e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta)), e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta) \rangle = \\ &= \langle e_1 \kappa_1 \cos(\theta) + e_2 \kappa_2 \sin(\theta), e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta) \rangle = \kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

□

Este resultado permite enlazar con el enfoque que proporcionaba la Proposición de Meusnier alternativa (3.3), definiendo un nuevo concepto que permita estudiar en mayor detalle una superficie [26].

**Definición 3.16.** *Dada una superficie  $S$ , su **superficie focal**, también denominada **superficie de centros** ó **evoluta**, es aquella formada por los centros de las circunferencias osculadoras. Al haber dos curvaturas principales, existen dos superficies focales en cada dirección normal a la superficie, cuyos puntos son de la forma:*

$$b_1(p) = p + \frac{N}{\kappa_1}, \quad b_2(p) = p + \frac{N}{\kappa_2}; \quad \forall p \in S.$$

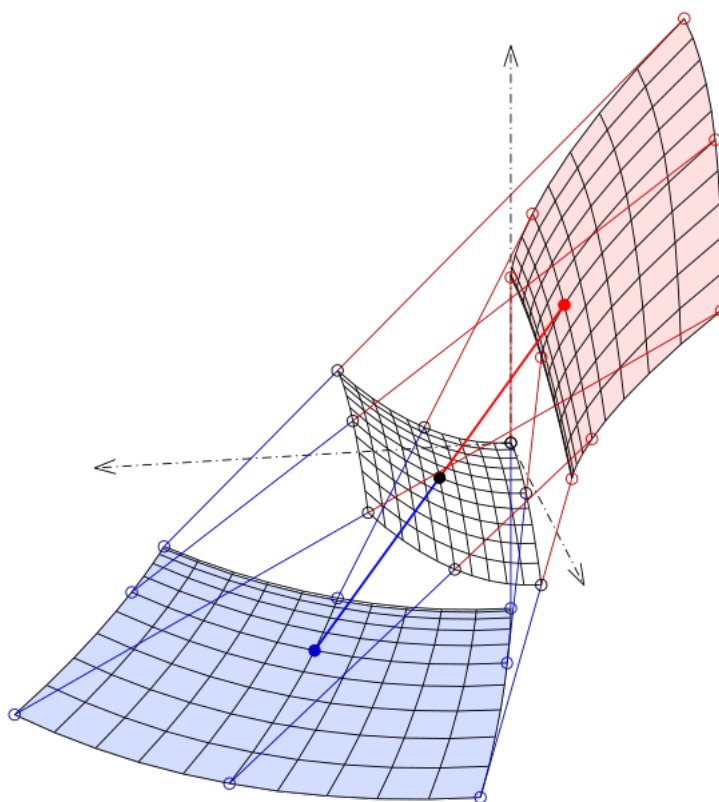


Figura 3.6: Superficies focales de un paraboloides hiperbólico. **Fuente:** Ag2gaeh

Realicemos el cálculo de dichas curvaturas principales. Al ser  $d_p N$  una aplicación lineal con matriz asociada  $K$ , sus invariantes algebraicos quedan determinados en términos de su traza y su determinante.

$$|\lambda I - K| = (\lambda - \kappa_1)(\lambda - \kappa_2) = \lambda^2 - (\kappa_1 + \kappa_2)\lambda + \kappa_1\kappa_2 = \lambda^2 - \text{tr}(K)\lambda + |K|.$$

Si se cambia la orientación de la superficie a la orientación opuesta, el determinante no varía (pues resulta clave que la dimensión sea par), pero la traza cambia de signo.

**Definición 3.17.**

- La **curvatura media** es la mitad de la traza de la aplicación de Gauss que, en términos de las curvaturas principales, se escribe como:

$$H \equiv \kappa_m = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(K) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

- La **curvatura total**, también conocida como **curvatura de Gauss**, es el determinante de la aplicación de Gauss que, en términos de las curvaturas principales, se escribe:

$$\mathbf{K} \equiv \kappa_t = |K| = \kappa_1 \kappa_2.$$

Este valor permite dar una clasificación de los puntos de una superficie:

1. **Elíptico** si  $\mathbf{K}(p) > 0$ .
2. **Hiperbólico** si  $\mathbf{K}(p) < 0$ .
3. **Parabólico** si  $\mathbf{K}(p) = 0$ ; lo cual se debe bien a que  $\kappa_1 = 0$  (**punto parabólico azul**), o bien a que  $\kappa_2 = 0$  (**punto parabólico rojo**).

En virtud del **Teorema del valor medio**, las regiones de puntos elípticos están separadas por curvas parabólicas de las regiones de puntos hiperbólicos. En la cara humana, esto queda patente si consideramos la transición de curvatura que existe, por ejemplo, al pasar de la frente a la zona de la cuenca de los ojos, siendo las cejas esa región de transición entre ambas zonas.

**Definición 3.18.** Un punto es **umbílico** ó **umbilical** si todas las curvaturas normales coinciden (todas las direcciones son principales);  $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ . Un punto se denomina **plano** si es simultáneamente umbílico y parabólico;  $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$ .

Esta clasificación se completa con un último tipo de puntos. No obstante, para definirlos es preciso presentar con anterioridad el siguiente concepto:

**Definición 3.19.** Las **líneas de curvatura** son curvas que siempre son tangentes a una dirección principal. En concreto, son las curvas integrales para los campos de direcciones principales.

Por definición, vemos que por cada punto no umbílico pasan dos líneas de curvatura que corresponden a cada una de las curvaturas principales.

**Definición 3.20.** Una **cresta** (ridge point) es un punto donde una de las curvaturas principales tiene un valor extremo (máximo o mínimo) a lo largo de su línea de curvatura correspondiente. Al igual que los puntos parabólicos, distinguimos **rojos** y **azules** en función de si hacen referencia a  $\kappa_1$  ó  $\kappa_2$ , respectivamente.



Dicho de otra manera, una *cresta* es un punto donde la superficie tiene un contacto de mayor orden con una de las esferas osculantes (ésta es una buena aproximación de la variedad en dichas zonas). Además, en los puntos umbílicos el color de las crestas cambia, por lo que sirven para delimitar regiones de manera análoga a como lo hacen los puntos parabólicos.

Tras haber visto las diferentes clasificaciones en que podemos encuadrar cada punto de una superficie, retomaremos la idea presentada en la Definición 3.16 para realizar dicha distinción desde un punto de vista alternativo.

**Proposición 3.5.** *Dada una superficie  $S$ ,*

- *$S$  tiene siempre dos superficies focales distintas para sus puntos no umbílicos; mientras que en los puntos umbilicales ambas evolutas coinciden.*
- *Si tiene una cresta, la superficie focal tendrá una cúspide.*
- *Para el caso de puntos con curvatura total nula, una de las superficies focales tendrá un punto en el infinito correspondiente a la curvatura principal nula en cuestión.*

La demostración de estos resultados, inmediata de las propias definiciones, puede encontrarse en textos como [41]. Algunos de estos casos pueden verse en la Figura 3.7.

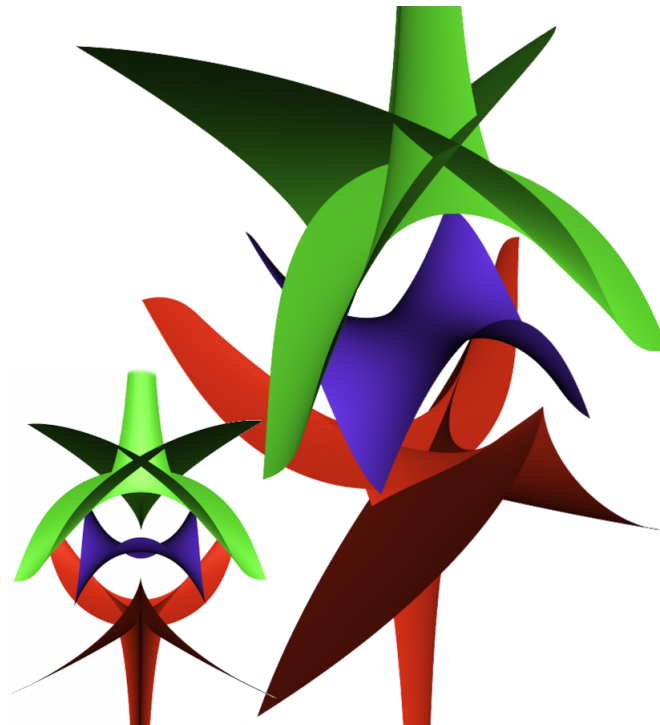


Figura 3.7: Superficies focales de una silla de mono. **Fuente:** Rocchini

### 3.4. Expresión local de curvaturas principales

Todos los conceptos que se han presentado en las secciones precedentes dependen de la parametrización escogida, lo cual no resulta eficiente a la hora de tratar con situaciones generales. Por ello, a lo largo de esta sección, se da la matriz de la aplicación de Weingarten en términos de las dos primeras formas fundamentales, relacionando elementos intrínsecos con otros que dependan de la parametrización elegida.

Recordemos que si  $r(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  es una parametrización local en un entorno de  $p_0 = r(u_0, v_0)$ , el vector normal con respecto a dicha parametrización es  $N \circ r = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$ , que determina la orientación local en  $S$ . Así, los coeficientes de la aplicación diferencial del endomorfismo lineal dados por la aplicación de Gauss  $d_p N$ , pueden darse en términos locales (según la parametrización) como:

$$(II) = \langle LX, Y \rangle = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_p N(r_u) \cdot r_u & -d_p N(r_u) \cdot r_v \\ -d_p N(r_u) \cdot r_v & -d_p N(r_v) \cdot r_v \end{pmatrix}.$$

Usando que  $(N \circ r)r_u = 0$  y  $(N \circ r)r_v = 0$ , podemos reescribir:

$$L = (N \circ r)r_{uu}, \quad M = (N \circ r)r_{uv}, \quad N = (N \circ r)r_{vv}.$$

Usando la matriz  $K$  de  $d_p N$  se tiene

$$K \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}r_u + a_{12}r_v \\ a_{21}r_u + a_{22}r_v \end{pmatrix}.$$

Obteniendo entonces:

$$-L = (a_{11}r_u + a_{12}r_v)r_u = a_{11}E + a_{12}F, \quad -M = (a_{11}r_u + a_{12}r_v)r_v = a_{11}F + a_{12}G$$

$$-M = (a_{21}r_u + a_{22}r_v)r_u = a_{21}E + a_{22}F, \quad -N = (a_{21}r_u + a_{22}r_v)r_v = a_{21}F + a_{22}G$$

que se reescribe en términos matriciales como;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

A partir de la expresión anterior se obtiene el *operador de forma*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{siendo} \quad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}^{-1}$$

que nos da las denominadas **ecuaciones de Weingarten**:

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{gF - fg}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Gracias a esta expresión, se obtiene una representación alternativa de las curvaturas principales definidas en el apartado anterior, cuya equivalencia en la definición se fundamenta en el hecho de que nos encontramos ante un cambio de parametrización:

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(K) = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)},$$

$$\mathbf{K} = |K| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

### 3.5. Caracterización de superficies

Dada una superficie  $S$ , se tiene una parametrización regular con una referencia  $\{r_u, r_v, N\}$ . Para dar su evolución espacial, derivamos con respecto a  $u$  y  $v$ , obteniendo los vectores que la determina. Ésta es la idea subyacente tras los símbolos de Christoffel.

Los **símbolos de Christoffel** son coeficientes que expresan la variación en  $T_p S$  con respecto a su base  $\{r_u, r_v\}$  (deformación del soporte). Son el análogo de las fórmulas de Frénet-Serret a superficies, pues asignan a cada punto de la misma un triedro para estudiar las derivadas de sus vectores. Podemos escribir entonces:

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + A_{11} N, \\ r_{uv} &= \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + A_{12} N, \\ r_{vu} &= \Gamma_{21}^1 r_u + \Gamma_{21}^2 r_v + A_{21} N, \\ r_{vv} &= \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + A_{22} N, \end{aligned}$$

donde la propagación del vector normal (extrínseco) se puede expresar, gracias al cálculo del producto interior de estas relaciones con  $N$ , como:

$$A_{11} = \langle r_{uu}, N \rangle = e, \quad A_{12} = \langle r_{uv}, N \rangle = f, \quad A_{22} = \langle r_{vv}, N \rangle = g.$$

Además,  $N$  se expresa en función de los vectores tangentes como:

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11} r_u + a_{12} r_v, \\ N_v &= a_{21} r_u + a_{22} r_v, \end{aligned}$$

siendo los coeficientes anteriores los definidos gracias a las ecuaciones de Weingarten.

**Definición 3.21.** *Los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  ( $i, j, k \in \{1, 2\}$ ) expresados anteriormente se conocen como los **símbolos de Christoffel** de la parametrización  $r$ , siendo las cuatro fórmulas donde se han presentado conocidas como las **ecuaciones de Gauss**. Puesto que  $r_{uv} = r_{vu}$ , obtenemos que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , por lo que los coeficientes de Christoffel son simétricos (hay 6 en total).*

En términos matriciales, las ecuaciones de Gauss se simplifican como:

$$\begin{pmatrix} r_{uu} \\ r_{uv} \\ r_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & e \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & f \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ N \end{pmatrix}.$$

### Obtención de los símbolos de Christoffel

1. Calcular las expresiones de los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$r_{uu} \cdot r_u = \frac{1}{2}E_u, \quad r_{uv} \cdot r_u = \frac{1}{2}E_v, \quad r_{uv} \cdot r_v = \frac{1}{2}G_u, \quad r_{vv} \cdot r_v = \frac{1}{2}G_v,$$

$$r_{uu} \cdot r_v = F_u - r_{uv} \cdot r_u = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad r_{vv} \cdot r_u = F_v - r_{uv} \cdot r_v = F_v - \frac{1}{2}G_u.$$

2. A partir de las fórmulas de Gauss, obtenemos:

$$r_{uu} \cdot r_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, \quad r_{uu} \cdot r_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G,$$

$$r_{uv} \cdot r_u = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F, \quad r_{uv} \cdot r_v = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G,$$

$$r_{vv} \cdot r_u = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F, \quad r_{vv} \cdot r_v = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G.$$

3. Sustituir los valores del paso 1 en las fórmulas del paso previo, obteniendo los siguientes tres subsistemas:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}$$

Las fórmulas resultantes para los símbolos de Christoffel se condensan en la siguiente ecuación matricial, donde sólo aparecen los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}.$$

Tal y como acabamos de ver, las expresiones de las derivadas de  $r_u, r_v, N$  con respecto a la base  $\{r_u, r_v, N\}$  dependen únicamente de los coeficientes de las dos primeras formas fundamentales de la superficie. Una manera de relacionar estos coeficientes consiste en considerar las expresiones:

$$(r_{uu})_v - (r_{uv})_u = 0, \quad (r_{vv})_u - (r_{vu})_v = 0, \quad N_{uv} - N_{vu} = 0.$$

Al expresarlo en términos de las ecuaciones de Gauss y de Weingarten, estas relaciones se escriben como:

$$A_i r_u + B_i r_v + C_i N = 0,$$

donde  $A_i, B_i, C_i (i = 1, 2, 3)$  son funciones de los coeficientes de las dos primeras formas fundamentales y sus derivadas. Además, al ser los vectores de la base linealmente independientes, todos los coeficientes  $A_i, B_i, C_i$  deben anularse, dando lugar a las nueve relaciones:

$$A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad C_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

**Proposición 3.6.** *Los coeficientes de la primera forma fundamental de una superficie  $S$  pueden obtenerse a partir de la curvatura total de la misma y los símbolos de Christoffel:*

$$\begin{aligned} EK &= (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2, \\ FK &= (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2, \\ GK &= (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2. \end{aligned}$$

*Demostración.* Únicamente probaremos la primera fórmula, conocida como la **fórmula de Gauss**, probándose las otras dos relaciones de manera análoga. Considerando la expresión  $(r_{uu})_v - (r_{uv})_u = 0$ , ésta puede reescribirse en términos de las ecuaciones de Gauss como:

$$\Gamma_{11}^1 r_{uv} + \Gamma_{11}^2 r_{vv} + e N_v + (\Gamma_{11}^1)_v r_u + (\Gamma_{11}^2)_v r_v + e_v N = \Gamma_{12}^1 r_{uu} + \Gamma_{12}^2 r_{vu} + f N_u + (\Gamma_{12}^1)_u r_u + (\Gamma_{12}^2)_u r_v + f_u N$$

que puede simplificarse a partir de la ecuación de los coeficientes de  $r_v$  y, de nuevo, las ecuaciones de Gauss:

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_2 2 + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 + f a_1 2 + (\Gamma_{12}^2)_u$$

donde, gracias a las ecuaciones de Weingarten, obtenemos:

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 = E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = EK$$

□

Gracias a este resultado tenemos la prueba del siguiente teorema que caracteriza superficies en función de su curvatura gaussiana. En concreto, dos superficies son equivalentes por un movimiento rígido (ver Sección 5.2) si, y sólo si, sus formas fundamentales están relacionadas por una transformación.

**Teorema 3.1** (Teorema Egregium de Gauss).

*La curvatura de Gauss de una superficie regular es invariante por isometrías locales.*

*Demostración.* Dadas dos superficies  $S, \tilde{S}$  y una isometría local  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  entre ellas, sabemos que sus parametrizaciones pueden expresarse como  $r(u, v)$  y  $\tilde{r}(u, v) = f \circ r(u, v)$ , por lo que ambas tienen la misma primera forma fundamental. Por lo tanto, gracias a las expresiones calculadas previamente, también tienen la misma curvatura de Gauss. □

**Observación.** *El recíproco no es cierto siempre. En efecto, dadas dos superficies con la misma curvatura gaussiana en todo punto, puede no existir una isometría que lo preserve. No obstante, sí que existe un difeomorfismo que mantiene dicha curvatura total [16].*

La descripción inicial de la curvatura de Gauss se basa en el embebimiento de una superficie en el espacio. Sin embargo, no depende del embebimiento sino únicamente de la estructura métrica de la propia superficie (primera forma fundamental). Esta idea motiva que la geometría de la primera forma fundamental sea conocida como **Geometría Intrínseca**, al poder desarrollarse sin hacer referencia al espacio en que está contenida la superficie.

### 3.6. Reconstrucción de superficies

Retomando las fórmulas presentadas en la Proposición 3.6, la segunda de ellas puede demostrarse de igual forma, pero sustituyendo en la expresión análoga de

$$(r_{uu})_v - (r_{uv})_u = 0$$

los coeficientes de  $r_u$  en vez de los de  $r_v$ . El procedimiento análogo en el que se usan los coeficientes de  $N$  da lugar a:

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2.$$

Procediendo de la misma forma sobre  $(r_{vv})_u - (r_{vu})_v = 0$ , obtenemos también la expresión:

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.$$

Ambas ecuaciones suelen presentarse de forma simultánea, tal y como se muestra en el siguiente resultado.

**Proposición 3.7** (Ecuaciones de Mainardi-Peterson-Codazzi).

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2,$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.$$

**Definición 3.22.** La fórmula de Gauss junto con las ecuaciones de Mainardi-Peterson-Codazzi se conocen como **ecuaciones de compatibilidad**.

El nombre de ecuaciones de compatibilidad surge por el hecho de que el conocimiento de las formas fundamentales primera y segunda determina localmente una superficie, por lo que es posible su reconstrucción. Esto quedaría indicado de manera más precisa en el siguiente teorema.

**Teorema 3.2** (Bonnet).

Sean  $E, F, G, e, f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables, siendo  $V$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$ , tales que  $E, G, EG - F^2 > 0$  en  $V$ . A partir de ellas, se construyen los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  tal y como se obtuvieron en el apartado anterior, y  $\mathbf{K} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ . Entonces, si todas estas funciones satisfacen las ecuaciones de compatibilidad, para cada  $v_0 \in V$  existe un abierto  $V' \subset V$  con  $v_0 \in V'$  y una carta local  $x' : V' \rightarrow x(V')$  tal que  $E, F, G, e, f, g$  son los coeficientes de su primera y segunda forma fundamental, respectivamente.

Además, si  $V'$  es conexo y existe una carta local  $y' : V' \rightarrow y(V')$  con las mismas condiciones, entonces existe un movimiento directo  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $y = F \circ x$ .

Este resultado es consecuencia del teorema de existencia y unicidad para sistemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP), dándose su demostración precisa en [16].

## Capítulo 4

# Evolución de superficies bajo flujos de curvatura

En el capítulo anterior hemos presentado una definición precisa del concepto de curvatura, así como de los resultados que permiten caracterizar y reconstruir superficies, lo cual permite dar una reconstrucción estática de la superficie del rostro en términos de la Geometría Diferencial de Superficies. No obstante, la cara humana no es una superficie fija; mas bien al contrario. Los seres humanos realizamos una gran cantidad de gestos faciales que expresan emociones o estados de ánimo y que resultan esenciales para comunicación no-verbal. En el marco topológico se describen mediante diferentes deformaciones de la superficie. Por lo tanto, nuestro siguiente paso será la reconstrucción y análisis del gesto facial a lo largo del tiempo. Para ello, recurrimos a la evolución de los valores de mapas de curvaturas en términos de flujos.

Este capítulo se basa en el artículo homónimo presentado por Mumford et al. en [31], pues introduce los conceptos básicos con una terminología sencilla, así como su aplicación inmediata al análisis de la cara humana. Si se adoptara un enfoque topológico, sería necesario introducir los conceptos básicos de **Teoría de Singularidades** de gérmenes de aplicaciones entre variedades, tal y como puede verse en [5] ó [11] para los aspectos más básicos. Si bien dicho enfoque se ajusta a varios de los conceptos presentados en este trabajo, la clasificación de (multi-)gérmenes de singularidades requiere elementos adicionales de **acciones de grupos de Lie** sobre **espacios de jets**<sup>1</sup>. El desarrollo de este formalismo requiere una extensión de la longitud de la memoria; por ello, se ha preferido optar por un enfoque geométrico más simplificado.

La evolución de las singularidades a lo largo del tiempo se aborda inicialmente en términos de “*slices*” (rodajas) del espacio de deformaciones universales de “tipos básicos” de (gérmenes de) funciones ó, con más generalidad, aplicaciones. Esta teoría fue desarrollada inicialmente para gérmenes de funciones a finales de los cincuenta y principios de los sesenta por René Thom y popularizada en la década posterior por Christopher Zeeman y recibe el nombre **Teoría de Catástrofes**.

---

<sup>1</sup>Intuitivamente, el  $k$ -jet de una función en un punto es el polinomio de Taylor truncado en orden  $k$ ; el  $k$ -jet de una aplicación  $f \in C^r(n, p)$  está dado por los  $k$ -jets de sus  $p$  componentes.

La clasificación de singularidades de gérmenes de aplicaciones fue llevada a cabo de forma simultánea por las escuelas anglosajona (liderada por J.Mather y C.T.C.Wall) y rusa (liderada por V.I.Arnold) en [6]. La extensión de este enfoque a multi-gérmenes es aplicable al análisis de gestos faciales, usando las correspondencias entre deformaciones universales y los modelos gestuales basados en apariencias. Por ejemplo, en la Figura 4.1 podemos ver cómo las dos transiciones presentadas se corresponderían con la animación de cerrar y abrir la boca (movimiento de los labios que corresponde a una de las catástrofes de Thom).

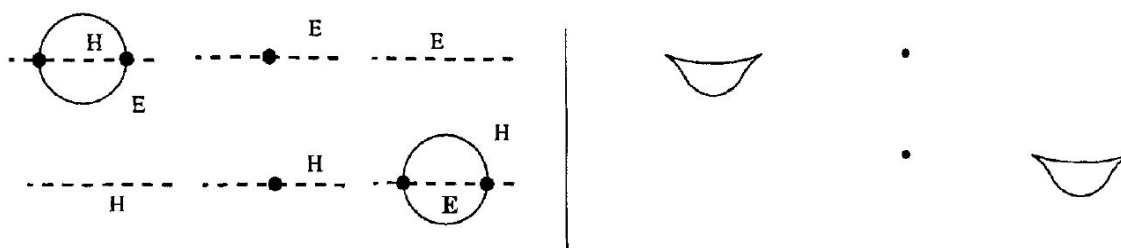


Figura 4.1: Transición de la catástrofe cúspide para curvaturas con mismo signo **Fuente:** [12]

Un análisis más detallado de estos elementos puede encontrarse en los artículos de Bruce et al. [12] y [13], centrados en el estudio de crestas o curvas parabólicas para superficies en evolución. Dicho análisis es algo más pormenorizado del que daremos en este capítulo, pues se realiza en términos de funciones de altura, conjuntos de bifurcación y superficies focales.

## 4.1. Flujos de Curvatura

Tras haber definido la curvatura como invariante extrínseco de la superficie, el siguiente paso será estudiar su evolución a lo largo del tiempo. Este estudio permitirá modelar la variación en la curvatura del rostro cuando se realiza un gesto facial, manteniendo la descripción de la cara humana dada y adaptarla a las deformaciones que sufra. Para este fin, se recurre al concepto de **flujos** presentado en la Sección 2.5, adaptándolo a la geometría de la cara como superficie suave (clase  $C^\infty$ ) a trozos.

Además de analizar la evolución de la superficie a lo largo del tiempo, un flujo también se puede considerar como un proceso de suavizado para la información discreta capturada de forma experimental. El enfoque basado en flujos permite estimar las características principales de la superficie que faciliten una descripción más sencilla disminuyendo la complejidad computacional de los modelos discretos. Este enfoque es el que adoptan Mumford et al. en [31], donde buscan flujos “ideales”, en el sentido de no incorporar nuevas características que no estuviesen en la superficie original.



Para adaptarnos a la notación empleada en dicho artículo, en este capítulo representaremos la superficie de manera explícita en lugar de la forma paramétrica, a través de la **forma de Monge**  $z = f(x, y)$ . Ésto permite dar una formulación equivalente de los distintos conceptos presentados a lo largo del capítulo anterior, y cuya obtención es inmediata tras realizar el cambio de variables pertinente.

**Proposición 4.1.** (*Expresión en forma de Monge*)

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2, \quad EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2,$$

$$e = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad f = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad g = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad N = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$H = \frac{(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{K} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}, \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{z_{ij}z_k}{1 + z_1^2 + z_2^2}.$$

A partir de ahora, describiremos localmente las superficies suaves a trozos usando “parches”, que se describen en términos de desarrollos de Taylor de orden 5 para cada trozo suave de superficie. La caracterización intrínseca se realiza usando las curvaturas principales, que en este caso se calculan fácilmente en términos del Hessiano de la forma de Monge. Este enfoque simplifica significativamente el término de segundo orden del desarrollo:

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) + \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} b_j x^{3-j} y^j +$$

$$+ \frac{1}{4!} \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} b_j x^{4-j} y^j + \frac{1}{5!} \sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} b_j x^{5-j} y^j + O((x, y)^5),$$

donde la  $O$  grande de Landau hace referencia a los términos de mayor grado. Tras una traslación y rotación adecuadas, cualquier punto de la superficie puede ser representado de esta manera. Por ello, basta centrar el foco de atención en un entorno pequeño del origen, que es donde se considera el desarrollo.

Podemos entonces comenzar con el estudio de la evolución de la superficie. Para ello, consideramos la familia uniparamétrica de superficies  $\{S_t\}$  parametrizada por  $t$ , el cual suele denominarse “tiempo” o “escala”. Localmente, dicha familia puede representarse en forma de Monge como:

$$S_t = \{(x, y, z) \mid z = F(x, y, t)\}$$

En un tiempo  $t$ , deformamos la superficie  $S_t$  a lo largo de la dirección normal  $N_t$  de cada punto a una velocidad  $\beta$ :

$$\frac{dS_t}{dt} = \beta N_t$$

expresado en términos de una aproximación de primer orden. A partir de la notación de Monge, esta ecuación se convierte en:

$$S_{t+\Delta t} - S_t = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \beta \frac{(-F_x, -F_y, 1)}{\sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2}} \Delta \cdot t + O(\Delta t)$$

donde  $\Delta z = \Delta F = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_t \Delta t + O(\Delta t)$ . Por lo tanto, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$F_t = \left( \frac{\beta \Delta t}{\sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2}} - F_x \Delta x - F_y \Delta y \right) / \Delta t + O(\Delta t) / \Delta t = \beta \sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2}.$$

Si suponemos que la superficie inicial  $S_0$  está descrita en forma de Monge como  $z = f(x, y)$ , obtenemos el problema de valores iniciales:

$$F_t(x, y, t) = \beta \cdot \sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2},$$

$$F(x, y, 0) = f(x, y).$$

Para un  $t$  pequeño, podemos aproximar la solución como:

$$F(x, y, t) = F(x, y, 0) + F_t(x, y, 0) \cdot t + o(t) = f(x, y) + \beta \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot t + O(t).$$

Esta aproximación resulta válida para la problemática de este trabajo, pues los gestos faciales se realizan la mayoría de las veces en poco más de un segundo, por lo que el tiempo en que se da la deformación es lo suficientemente pequeño como para que esta aproximación de la solución resulte adecuada.

**Definición 4.1.** *La aproximación de la solución al proceso de deformación descrita anteriormente se conoce como **flujo de curvatura** si se sustituye el término  $\beta$  por alguna de las curvaturas (principales, media o total). En concreto, los más relevantes son:*

- **Flujo de curvatura media:**

$$F(x, y, t) = f(x, y) + H(x, y) \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot t + O(t)$$

- **Flujo de curvatura principal:**

$$F(x, y, t) = f(x, y) + K_i(x, y) \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot t + O(t),$$

denominándose flujo  $K_i$  para cada uno de los respectivos casos, donde  $K_i(x, y)$  es una función asociada a las curvaturas principales.

La principal dificultad a la hora de dar solución a este problema consiste en que la ecuación a resolver es una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) parabólica no lineal. Incluso en el supuesto de que la superficie sea suave, la deformación de la familia de superficies dadas podría dar lugar a singularidades. En concreto, las curvaturas principales son funciones no diferenciables en los puntos umbílicos, por lo que dichos puntos se convertirán en singularidades bajo los flujos de curvatura principales.

La existencia y unicidad de dichas soluciones es un problema no trivial, pues implica la búsqueda de **soluciones viscosas** para EDPs. Por lo tanto, únicamente esbozaremos aquí la idea principal que justifica la existencia y unicidad de dichas soluciones, pudiendo consultarse los detalles concretos en [17].

Para poder dar la existencia y unicidad de soluciones en casos como el de la ecuación presentada, basta aplicar el Teorema 6.8 de [17], referente a la existencia global de soluciones para ecuaciones geométricas elípticas degeneradas. Dicho teorema puede aplicarse si se considera la familia uniparamétrica de superficies  $\{S_t\}$  como superficies de nivel de una determinada función  $u$ ,  $S_t = \{(x, y, z) \mid u(t, x, y, z) = 0\}$ , lo cual sabemos gracias a la proposición 3.3 (formulación alternativa de Meusnier).

#### 4.1.1. Buenos flujos vs. Malos flujos

Un “buen” flujo siempre debe simplificar una superficie. Esto significa que, a medida que  $t$  se incrementa (pasa el tiempo), no se generan nuevas características ni singularidades; más bien al contrario. Este descenso monótono de los principales hechos significativos de la superficie permite dar una representación jerárquica de la misma.

Para el caso de dos dimensiones (curvas planas), tomamos el flujo

$$\frac{dC_t}{dt} = \kappa N_t,$$

donde  $C_t = \{(x, y) \mid y = F(x, t)\}$  es una familia de curvas,  $\kappa$  la curvatura y  $N_t$  la dirección normal de  $C_t$ . De manera análoga al análisis realizado en el caso de la familia de superficies uniparamétricas, obtenemos que dicho flujo conduce a la ecuación

$$F_t = \frac{F_{xx}}{1 + F_x^2}$$

A modo de ejemplo, si consideramos la curva  $y = x^4$ , la cual tiene un punto de inflexión doble en el origen, vemos que:

$$F(x, t) = x^4 + 12x^2t + O(x^4, tx^2),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 + 2t) + O(t, x^2) = 0.$$

de donde vemos que, para esta simplificación, hay dos puntos de inflexión si  $t < 0$ ; mientras que para  $t > 0$  no hay ninguno. Por lo tanto, el flujo no genera puntos de inflexión, sino que los elimina. Asimismo, tampoco genera “vértices” (puntos donde la curvatura toma valores extremos). Podemos decir entonces que, para este caso, el flujo escogido es **bueno**.

El caso tridimensional, pues es el que nos interesa, tiene un tratamiento análogo. La única diferencia es que en este caso las singularidades que pueden surgir son puntos parabólicos, crestas, puntos umbílicos y cúspides de Gauss (puntos donde la curva definida por la aplicación de Gauss presenta una cúspide).

## 4.2. Efecto local de flujos de curvatura

Tras haber definido lo que es un flujo y, más concretamente, qué consideramos un buen flujo, analizaremos el efecto de los flujos presentados sobre las singularidades ya definidas en el capítulo previo: puntos parabólicos, crestas y puntos umbílicos. Cuando hagamos referencia a “**bucles**” de los mismos, nos referimos a la propagación de dicha singularidad a lo largo del tiempo (pues, por ejemplo, la secuencia temporal de un gesto se basa en deformar la superficie para acabar retornando a la posición inicial de la misma).

Cabe destacar que este estudio se realizará de manera local y estará enfocado a superficies genéricas. Por ello, las características aparecen y cambian de manera **estable** (ante leves perturbaciones no se modifica el patrón en base al cual se alteran las características de la superficie). Sin embargo, para el caso de superficies de revolución dicho tratamiento no resultaría válido, pues las simetrías que las caracterizan se verían afectadas.

### 4.2.1. Sobre puntos parabólicos

Generalmente, y sin entrar en mayor detalle, para una familia uniparamétrica de superficies las curvas parabólicas únicamente pueden crearse a través de la transición denominada  $A_3$  [12]. En el momento en que se produce, existe (localmente) un único punto parabólico., el cual puede desaparecer o convertirse en un bucle parabólico.

El conjunto de puntos parabólicos rojos (aquellos en los que  $\kappa_2 = 0$ ) de  $S_0$  entorno al origen satisfacen:

$$0 = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \kappa_1(b_2x + b_3y) + \left(\frac{1}{2}\kappa_1c_2 + b_0b_2 - b_1^2\right)x^2 + (\kappa_1c_3 + b_0b_3 - b_1b_2)xy + \left(\frac{1}{2}\kappa_1c_4 + b_1b_3 - b^2\right)y^2 + O((x, y)^2).$$

En caso de que se crease un bucle parabólico rojo, debería existir un momento en que la transición  $A_3$  diese lugar en algún punto de la superficie. Para poder realizar el estudio con mayor facilidad, suponemos que dicho momento es  $t = 0$  y el origen es un punto parabólico rojo aislado en  $S_0$  (el análisis sería análogo si fuese de tipo azul). Por lo tanto,  $b_2 = b_3 = 0$  y la relación anterior queda reducida únicamente a la forma cuadrática

$$Q(x, y) = \left(\frac{1}{2}\kappa_1c_2 - b_1^2\right)x^2 + \kappa_1c_3xy + \frac{1}{2}\kappa_1c_4y^2,$$

la cual es positiva definida, o negativa definida, en un entorno del origen.

Analicemos la influencia que pueden tener los flujos presentados en la sección previa:

- **Flujos de curvatura media:** Como ya conocemos el valor del flujo, únicamente debemos sustituir en dicha expresión el flujo considerado por la curvatura media y tomar la aproximación de la representación explícita dada previamente. Gracias a esto, obtenemos que el conjunto parabólico de  $S_t$  está dado por:

$$0 = F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = \left(\frac{1}{2}\kappa_1(c_2 + c_4) + O(x, y)\right)t + O(t) + \left(\frac{1}{2}\kappa_1c_2 - b_1^2\right)x^2 + \kappa_1c_3xy + \frac{1}{2}\kappa_1c_4y^2 + O((x, y)^2).$$

Para un  $t$  concreto, vemos que el conjunto de puntos parabólicos satisface:

$$t = -\frac{Q(x, y)}{\frac{1}{2}\kappa_1(c_2 + c_4)} + O((x, y)^2)$$

En este caso, el signo de la forma cuadrática depende del de  $\kappa_1c_4$ :

- Si  $\kappa_1c_4 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\kappa_1c_2 - b_1^2 > 0 \Rightarrow \kappa_1c_2 > 0$ . Por lo tanto,  $\kappa_1(c_2 + c_4) > 0$  y el signo del lado derecho de la expresión es siempre negativo. Por tanto, para un  $t > 0$  lo suficientemente pequeño, no se genera ningún bucle parabólico rojo.
- Si  $\kappa_1c_4 < 0$ , el signo del lado derecho puede llegar a ser positivo para algunos tipos de superficies, lo que daría lugar bucles parabólicos rojos.

El primer caso hace referencia a cuando una zona hiperbólica aparece o desaparece dentro de una región elíptica, mientras que el otro es el supuesto opuesto. Por tanto, bajo este flujo no pueden originarse regiones hiperbólicas, aunque sí pueden crearse regiones elípticas.

- **Flujos de curvatura principal:** Consideramos el  $K_2$ -flujo, el cual podemos expresar en torno al origen como:

$$K_2(x, y) = \left(\frac{c_2}{2} - \frac{b_1^2}{\kappa_1}\right)x^2 + c_3xy + \frac{c_4}{2}y^2 + O((x, y)^3),$$

pues recordemos que  $\kappa_2 = 0$  al ser un punto parabólico. Al igual que antes, podemos obtener la expresión del flujo para dar el conjunto parabólico de  $S_t$  como:

$$0 = F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = \left(\frac{1}{2}\kappa_1c_4 + O(x, y)\right)t + Q(x, y) + O(t, (x, y)^2).$$

Para un  $t$  determinado, el conjunto de puntos parabólicos debe cumplir:

$$t = -\frac{Q(x, y)}{\kappa_1c_4} + O((x, y)^2).$$

Vemos que en este caso numerador y denominador tienen siempre el mismo signo, por lo que para  $t > 0$  pequeño, el punto parabólico rojo aislado siempre es eliminado sin generarse un bucle.

A modo de resumen, vemos que únicamente se podrían generar bucles parabólicos (azules o rojos) bajo flujos de curvatura media. En concreto, si bien las regiones hiperbólicas no pueden generarse dentro de regiones elípticas, las zonas elípticas sí pueden crearse dentro de áreas hiperbólicas.

### 4.2.2. Sobre crestas

En esta subsección nos ceñiremos al estudio de crestas que no sean puntos umbílicos, pues dicho supuesto lo abordaremos inmediatamente después. Al igual que antes, nos centraremos en el estudio de crestas de tipo rojo, siendo el caso de crestas azules análogo.

Sea  $K_2$  la función de la curvatura principal menor y  $D_2$  su dirección principal asociada. Gracias a esto, podemos definir la condición que cumplen las crestas rojas, pues son máximos y mínimos de las líneas de curvatura:

$$\nabla K_2(x, y) \cdot D_2(x, y) = 0.$$

Como consecuencia se obtiene que, para un entorno lo suficientemente pequeño en el origen, la ecuación correspondiente a dichos puntos es:

$$0 = b_3(\kappa_1 - \kappa_2) - (3b_1b_2 - (\kappa_1 - \kappa_2)c_3)x - (3b_2^2 - (\kappa_1 - \kappa_2)(c_4 - 3\kappa_2^3))y + Q(x, y) + O((x, y)^2),$$

donde la función que representa a los términos cuadráticos es:

$$Q(x, y) = \alpha x^2 + \gamma xy + \left( \frac{1}{2}d_5(\kappa_1 - \kappa_2) - \frac{9}{2}b_2c_3 + \frac{6b_1b_2^2}{\kappa_1 - \kappa_2} - 9(\kappa_1 - \kappa_2)\kappa_2^2b_3 - \frac{4b_2^2b_3}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) y^2$$

en la cual únicamente hemos mostrado los coeficientes relativos a  $y^2$  para aligerar la representación, pues además son los únicos que usaremos en los casos específicos que consideramos para nuestro análisis asociado a los flujos.

Generalmente, para una familia de superficies, las crestas únicamente se pueden crear o destruir mediante **funciones de Morse**<sup>2</sup> (para más información, consultar [11] y [13]). En el momento de la transición, existe (localmente) una cresta aislada, el cual puede desaparecer o convertirse en un bucle de cresta.

Supongamos entonces que  $S_0$  es la superficie en el momento de la transición y el origen es una cresta roja aislada. Entonces, los términos lineales de la ecuación anterior se anulan, permitiendo ver que:

$$b_3 = 0, \quad 3b_1b_2 = (\kappa_1 - \kappa_2)c_3, \quad 3b_2^2 = (\kappa_1 - \kappa_2)(c_4 - 3\kappa_2^3).$$

Por lo tanto, dicha igualdad queda reducida a simplemente:

$$Q(x, y) + o((x, y)^2) = 0,$$

---

<sup>2</sup>Una **función de Morse** es aquella que no tiene puntos críticos degenerados.

donde:

$$Q(x, y) = \alpha x^2 + \gamma xy + \frac{1}{2} \left( d_5(\kappa_1 - \kappa_2) - \frac{15b_1 b_2^2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) y^2,$$

siendo positiva definida, o negativa definida, en un entorno del origen.

Analicemos la influencia que pueden tener los flujos ya presentados:

- **Flujos de curvatura principal:** Podemos describir la curva de crestas rojas en una superficie  $S_t$  como:

$$\nabla K_2(x, y, t) \cdot D_2(x, y, t) = 0,$$

que gracias a lo visto anteriormente, se expresa también como:

$$0 = Q(x, y) + \left( d_5(\kappa_1 - \kappa_2) - \frac{15b_1 b_2^2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) t + O(t, (x, y)^2).$$

Para un  $t$  concreto, estos puntos satisfacen:

$$t = - \frac{Q(x, y)}{d_5(\kappa_1 - \kappa_2) - \frac{15b_1 b_2^2}{\kappa_1 - \kappa_2}} + O((x, y)^2).$$

El denominador y el coeficiente de  $y^2$  de la forma cuadrática siempre tendrán el mismo signo. Como  $Q(x, y)$  es (localmente) definida positiva o negativa,  $t$  será siempre negativo cerca del origen. Por lo tanto, cuando  $t > 0$  no hay crestas y el  $K_2$ -flujo no puede entonces generar ninguna cresta roja. De manera análoga, ocurre lo mismo para el  $K_1$ -flujo y las crestas de tipo azul. En definitiva, no generan bucles de cresta.

- **Flujos de curvatura media:** Los cálculos de este supuesto serían similares a los ya vistos para el caso de los flujos de curvaturas principales. Para mayor brevedad, únicamente mencionaremos que el flujo de curvatura media puede moverse en cualquier dirección, lo cual puede generar o no bucles de crestas.

### 4.2.3. Sobre puntos umbílicos

En último lugar tenemos los puntos umbílicos, los cuales recordemos que son aquellos en los que las crestas “cambian de color”. Aparte de este hecho, en esta subsección nos será de utilidad la siguiente caracterización alternativa de los puntos umbílicos.

**Proposición 4.2.** *Un punto es umbílico si, y sólo si, los coeficientes de las dos primeras formas fundamentales son linealmente dependientes entre sí.*

*Demostración.* Expresado de manera alternativa, la condición de dependencia lineal entre los coeficientes de las formas fundamentales puede expresarse como:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} gE - eG = 0, \\ fG - gF = 0. \end{cases}$$

Las dos últimas ecuaciones se obtienen de manera inmediata gracias a la expresión local de curvaturas principales (ecuaciones de Weingarten), pues basta considerar la matriz de la aplicación de Weingarten expresada en forma diagonal, por lo que ambos términos de la diagonal secundaria se anulan. Además, el hecho de que el punto sea umbílico significa que ambas curvaturas principales (los elementos de la diagonal) también deben ser nulos. A partir de estas relaciones, obtenemos la caracterización buscada.  $\square$

Los puntos umbilicales se crean o desaparecen siempre en parejas, lo cual puede ocurrir cuando la familia de superficies sufre una transición no versal etiquetada en la terminología de Arnold como  $D_4$  [13]. Supongamos que, en el momento en que se produce la transición, el origen es un punto umbílico doble en  $S_0$ . Dicha superficie puede representarse como:

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2}\kappa(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}(b_0x^3 + 3b_1x^2y + 3b_2xy^2 + b_3y^3) + O((x, y)^3)$$

donde los coeficientes satisfacen:

$$\begin{vmatrix} b_0 - b_2 & b_1 - b_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Para simplificar, podemos asumir que  $b_1 = b_2 = 0$  simplemente rotando ejes.

Tal y como se ha visto en la demostración de la proposición previa, podemos caracterizar los puntos umbílicos gracias a las relaciones obtenidas mediante las ecuaciones de Weingarten. Además, como podemos sustituir los coeficientes de la segunda forma fundamental por las derivadas de segundo orden de  $F$ , obtenemos una caracterización análoga al de las subsecciones previas de los puntos umbílicos en función de los desarrollos de Taylor de dichas funciones aplicados a las ecuaciones mentadas. Únicamente presentaremos dicha representación para flujos en un instante  $t$  concreto.

Esta vez consideraremos flujos algo distintos de los analizados previamente, debido a las particularidades ocasionadas por los puntos umbílicos. Para ello, lo que haremos será considerar un nuevo término que sustituya a  $\beta$  en la aproximación de la solución para dar un flujo de curvatura, al que denominaremos **flujo de curvatura media generalizado**:

$$H_n(x, y) = \left( \frac{K_1^n(x, y) + K_2^n(x, y)}{2} \right)^{1/n}$$

Esta función puede obtenerse a partir de las curvaturas media y total (Gauss). Por lo tanto, su desarrollo de Taylor en torno al origen también puede obtenerse gracias a los de dichas funciones. Omitiendo dichos detalles, el resultado final es:

$$\begin{aligned} H_n(x, y) = & \kappa + \frac{1}{2}(b_0x + b_3y) + (-\kappa^3 + \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{(n-1)b_0^2}{8\kappa})x^2 + \\ & + (\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_3 - \frac{(n-1)b_0b_3}{4\kappa})xy + (-\kappa^3 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{4}c_4 + \frac{(n-1)b_3^2}{8\kappa})y^2 + O((x, y)^2). \end{aligned}$$



Retomando la caracterización de puntos umbílicos en términos del flujo, para un instante  $t$  concreto, obtendríamos:

$$t = -\frac{2\kappa(2b_0b_3c_2 + b_0^2c_3 + b_3^2c_1 - 2\kappa^3b_0b_3)}{b_3^2(2\kappa c_1 + 2\kappa c_3 - (n-1)b_0b_3)}x^2 + O(x^2).$$

Para una superficie genérica, el término derecho de esta igualdad puede ser tanto positivo como negativo, por lo que el flujo podría moverse por ambas direcciones. Esto significa que pueden tanto crearse como destruirse pares de puntos umbílicos.

Gracias a este nuevo flujo, podemos obtener los que hemos ido analizando a lo largo de todo el capítulo:

- **Flujos de curvatura media:** Caso  $n = 1$ . Si bien los cálculos previos se realizaron para un  $n > 1$ , también son válidos para el caso del flujo de curvatura media habitual. Por ende, los pares de puntos umbílicos pueden ser creados o destruidos.
- **Flujos de curvatura principal:** En los puntos umbílicos, ni  $K_1$  ni  $K_2$  son funciones de clase  $C^\infty$  en los puntos umbílicos, por lo que no podemos dar su representación como desarrollo en serie de Taylor. De todas formas, vemos que el  $K_1$ -flujo es el caso límite cuando  $n \rightarrow \infty$  del  $H_n$ -flujo definido previamente. El  $K_2$ -flujo se comporta también de manera idéntica. Al igual que antes, ambos flujos pueden moverse en cualquier dirección.

### 4.3. Flujos de curvatura principales sobre la cara

Veamos ahora el efecto de los flujos de curvatura principales sobre datos reales de una cara humana. El experimento se basa en datos obtenidos mediante dispositivos de rango (láser) del rostro de una mujer joven, que primero se han suavizado para eliminar posible ruido acumulado durante la toma de datos. Estos datos describen en coordenadas cilíndricas  $r = r(z, \theta)$  toda la cabeza. No obstante, nos enfocaremos únicamente en la cara e imponemos condiciones frontera de tipo Neumann ( $\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial z} = 0$ ), para así obtener un problema de valores frontera bien definido.

Para comprender mejor el experimento, cabe destacar que las líneas de curvatura correspondientes a  $\kappa_1$  suelen ser horizontales debido a la elección del tipo de coordenadas. Al realizar el proceso de suavizado, el rostro se acaba aproximando más a un elipsoide con  $\kappa_1$  máxima en la cresta correspondiente a la nariz y líneas de curvatura perpendiculares a

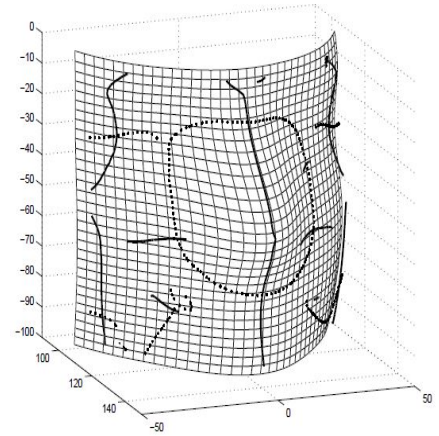


Figura 4.2: Mapa 3D del rostro escaneado, donde se muestran las crestas azules (líneas gruesas) y rojas (líneas punteadas). Fuente: [31]

ella, que cruzan ambos lados de la cara. En un rostro completamente formado, estas líneas rodean alrededor de la nariz, los ojos y los extremos de la boca. Por su parte, las líneas correspondientes a la curvatura menor  $\kappa_2$  tienden a ser verticales en las partes suaves de la cara.

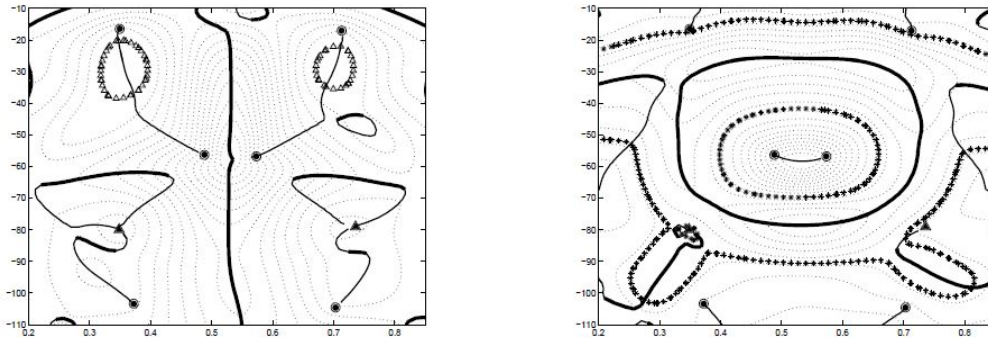


Figura 4.3: Crestas, línea parabólicas y conjuntos de nivel de  $K_1$  (izq.) y  $K_2$  (dcha.). Fuente: [31]

A partir de las Figuras 4.2 y 4.3 podemos comprender de mejor manera cuáles son las diversas singularidades presentes en el rostro, las cuales pretendemos simplificar a través de los flujos ya presentados.

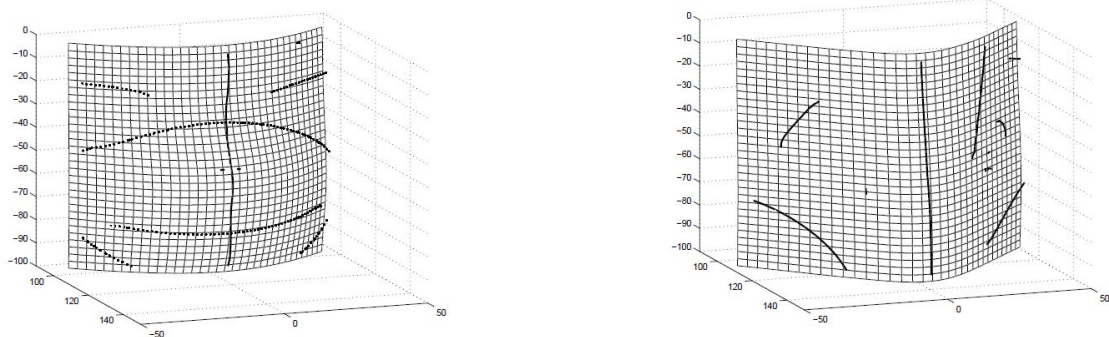


Figura 4.4: La cara tras pasar por los flujos  $K_1$  (izq.) y  $K_2$  (dcha.) en el instante  $t = 1000$ . Fuente: [31]

En concreto, la idea es que los flujos correspondientes a las curvaturas principales simplifiquen la superficie a través de sus direcciones principales asociadas. De hecho, bajo el  $K_1$ -flujo la cara en la dirección horizontal tiende a adoptar una forma más circular, mientras que en sentido vertical conserva la curva ondulada original provocada por los ojos, la nariz y la boca; recordando a los bosquejos básicos que usan los artistas para iniciar sus dibujos. En cambio, con el  $K_2$ -flujo la cara tiende a aplanarse verticalmente, mientras que en sentido horizontal existe un solo pico a lo largo de la nariz; por lo que, al cabo de un tiempo, la cara acabará asemejándose a un papel doblado. El efecto de ambos puede apreciarse en la Figura 4.4.

Ambos flujos acaban con los bucles parabólicos. También observamos que el  $K_2$ -flujo origina un bucle parabólico azul cerca del límite de la cara. Aunque se trata sin duda de una estructura nueva, se crea en una parte del rostro prácticamente plana, donde la mejilla interactúa con las condiciones de contorno de Neumann impuestas, por lo que no es una nueva estructura como tal. Además, en ambos flujos de curvatura principal, se pueden crear o eliminar un par de puntos umbílicos. Todos estos hechos pueden observarse en las Figuras 4.5 y 4.6.

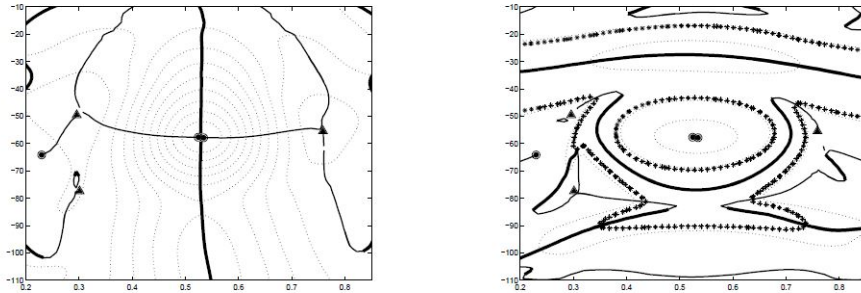


Figura 4.5: La cara tras pasar por el flujo  $K_1$  en el instante  $t = 100$ . Fuente: [31]

Centrándonos en este último fenómeno, referente al comportamiento de los puntos umbílicos, vemos en la figura 4.5 que el par de puntos umbilicales de la nariz se ha aproximado bastante tras pasar por el flujo correspondiente a la curvatura mayor. Si bien podría interpretarse que este hecho únicamente es fruto de la simulación numérica realizada, demostraremos que dicho comportamiento es común a singularidades de este tipo.

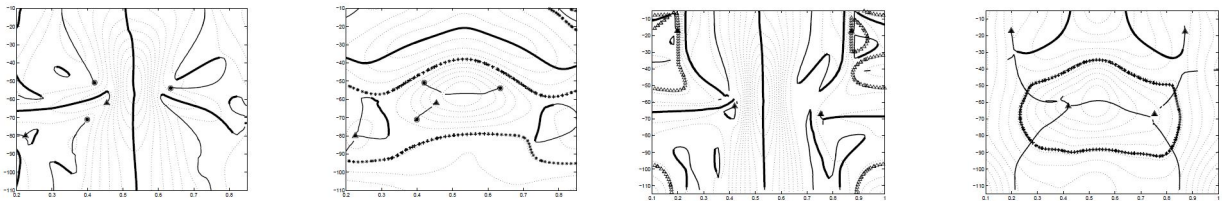


Figura 4.6: La cara tras pasar por el flujo  $K_2$  en  $t = 100$  (izq.) y  $t = 250$  (dcha.). Fuente: [31]

**Proposición 4.3.** *Dado un par de puntos umbílicos simétricos en una cresta, ambos se aproximarán tras pasar por el flujo correspondiente a la curvatura principal mayor. En concreto, acabarán evolucionando en un único punto umbílico degenerado.*

*Demostración.* Para simplificar los cálculos, asumimos que la superficie  $z = f(x, y)$  es simétrica en ambos ejes;  $(x, y) \rightarrow (-x, y)$  y  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ . Por lo tanto, los ejes  $x$  e  $y$  son cada uno una cresta roja y azul, respectivamente. Además, gracias a esta simetría vemos que en la forma de Monge únicamente se preservan los términos de orden par:

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 y^2 + \frac{1}{24}(c_0 x^4 + 6c_2 c^2 y^2 + c_4 y^4) + \frac{1}{6!}(e_0 x^6 + 15e_2 x^4 y^2 + 15e_4 x^2 y^4 + e_6 y^6) + \dots$$

Por lo tanto, las dos direcciones principales son dichos ejes. Una vez visto esto, retomemos la idea de la prueba. Supongamos que hay dos puntos umbílicos cerca del origen en el eje  $x$ . Tenemos entonces la siguiente condición:

$$c_2 - c_0 + 2\kappa_1^3 > 0$$

En este caso, las coordenadas de los puntos umbílicos son  $(\pm \sqrt{\frac{2(\kappa_1 - \kappa_2)}{c_2 - c_0 + 2\kappa_1^3}} + \dots, 0)$  Si pasamos ambos puntos por el flujo de curvatura principal mayor, obtenemos:

$$\begin{aligned} F(x, y, \Delta t) &= F(x, y, 0) + F(x, y, 0)\Delta t + o(\Delta t) = f(x, y) + K_1(x, y)\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\Delta t + o(\Delta t) = \\ &= \kappa_1 \Delta t + \frac{1}{2}(\kappa_1 + (c_0 - 2\kappa_1^3)\Delta t)x^2 + \frac{1}{2}(\kappa_2 + c_2 \Delta t)y^2 + \frac{1}{24}(c_0 + (e_2 - 20c_0\kappa_1^2 + 24\kappa_1^5)\Delta t)x^4 + \\ &+ \frac{1}{4}(c_2 + (e_4 + c_0\kappa_2^2 + 2c_2\kappa_1^2 - 4\kappa_1^5 - 4\kappa_1^4\kappa_2 + \frac{4(c_2 - \kappa_1^3)^2}{\kappa_1 - \kappa_2})\Delta t)x^2 y^2 + \frac{1}{24}(c_4 + e_6 \Delta t)y^4 + O(\Delta t, x^4, y^4). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial(\kappa_1 - \kappa_2)}{\partial t} = c_0 - c_2 - 2\kappa_1^3 < 0,$$

lo que acerca puntos umbílicos con el paso del tiempo. También podemos observar la derivada segunda, para lo cual consideraremos el denominador de la primera componente de la coordenada de cada punto umbilical:

$$\frac{\partial(C_2 - C_0 + 2K_1^3)}{\partial t} = b(x, y) + \frac{4}{\kappa_1 - \kappa_2}(c_2 - \kappa_1^3)^2,$$

donde la función:

$$b(x, y) = e_4 - e_2 + 26c_0\kappa_1^2 + c_0\kappa_2^2 + 2c_2\kappa_1^2 - 40\kappa_1^5 - 4\kappa_1^4\kappa_2,$$

vemos que está acotada por los coeficientes de  $z$ . Por lo tanto, cuando  $\kappa_1 - \kappa_2$  es lo suficientemente pequeño:

$$\frac{\partial(C_2 - C_0 + 2K_1^3)}{\partial t} > 0.$$

Gracias a las dos condiciones que hemos indicado vemos que, si aplicamos el  $K_1$ -flujo, ambos puntos umbílicos se aproximarán al origen con el paso del tiempo<sup>3</sup>.  $\square$

<sup>3</sup>En el caso límite se acabarán convirtiendo en un único punto umbílico degenerado con índice  $+1$  ó  $-1$ , dependiendo del tipo de par de puntos umbílicos iniciales.

# Capítulo 5

## Enfoque variacional

Tras haber visto la evolución global de la superficie de la cara a lo largo del tiempo gracias al uso de flujos de curvatura, en este capítulo daremos una visión alternativa y complementaria a dicho enfoque en términos de “caracterización de esfericidad” y la “falta de esfericidad” como responsable de las variaciones en la forma. Este punto de vista se basa en analizar la similitud o diferencia de la superficie (en nuestro caso, el rostro) para facilitar su modelado en dichos términos.

Este enfoque se fundamenta en segmentar la cara como un conjunto de modelos lineales a trozos asociados a ella. Dicha identificación de modelos puede reformularse como un problema de optimización. Una primera clasificación distingue entre optimización convexa de la no convexa. En el primer caso, las estrategias de tipo lineal proporcionan métodos generales; el segundo es mucho menos tratable y a menudo sólo se dispone de soluciones aproximadas. El ajuste de su evolución espacio-temporal y la “persistencia” de las apariencias es una extensión que se aborda en términos de Análisis Variacional. El problema inicial consiste en identificar el funcional más apropiado, imponer las restricciones naturales, caracterizar las ecuaciones estructurales y desarrollar métodos para la resolución exacta o aproximada minimizando el error.

La relación entre la Geometría Diferencial y el Cálculo Variacional es antigua y se desarrolla inicialmente en el siglo XVIII con los hermanos Bernouilli, L. Euler y J. Lagrange como figuras centrales consecutivas. La primera formulación general se debe a Euler; mientras que la adaptación a problemas de Mecánica Analítica se debe a Lagrange y Legendre, dando lugar a las formulaciones integrales de la Mecánica Clásica asociadas a la minimización de un funcional cuadrático. Los “ejemplos” clásicos corresponden a la minimización de la longitud (geodésicas), el área (superficies minimales) o algún funcional de energía (desde Newton hasta Yang-Mills).

## 5.1. Energía de Willmore

El flujo de energía de Willmore permite evaluar la “falta de esfericidad” de un trozo de superficie suave. Por ello, es muy apropiado para evaluar la variación de los radios de curvatura en esferas osculatrices a la superficie, tal y como definíamos tras la Proposición de Meusnier. El primer paso consiste en caracterizar la esfericidad de un trozo de superficie.

La motivación inicial para introducir el flujo de energía de Willmore procede de los trabajos de S. Germain (1821-1826), donde modela la elasticidad de una superficie en el espacio 3D en términos de (el doble de) la curvatura media  $2H = \kappa_1 + \kappa_2$  (la traza de la matriz de curvatura en cada punto). Los modelos elásticos para el análisis dinámico de los gestos motivan la introducción de una versión global a este resultado: la energía de Willmore y el correspondiente flujo asociado. Aunque existen diversas definiciones equivalentes de dichos conceptos, las cuales iremos viendo a lo largo del capítulo, comenzaremos por una que implica las curvaturas media y total (Gauss).

**Definición 5.1.** *La energía de Willmore de una superficie  $S$  se define como:*

$$\mathcal{W}(S) = \int_S (H^2 - \mathbf{K}) dA = \frac{1}{4} \int_S (\kappa_1 - \kappa_2)^2 dA$$

### 5.1.1. Teorema de Gauss para aplicaciones esféricas

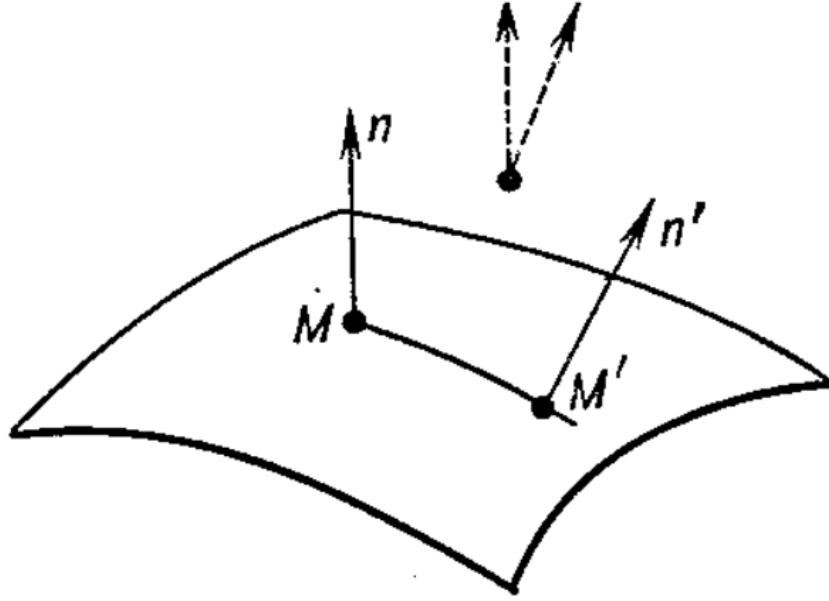
La definición anterior involucra dos términos que pueden separarse en dos integrales. Para el cálculo del flujo, lo más útil sería reducir dicha expresión lo máximo posible, buscando que alguna de ambas partes no varíe. Esta reducción puede aplicarse de manera simple al caso particular de la cara humana. Si ignoramos los “agujeros” más relevantes para gestos faciales (correspondientes a ojos y boca), el modelo topológico más simple de la cabeza es una esfera topológica  $\mathbb{S}^2$ . Esto permitirá simplificar la parte definida por la curvatura total. Para ello recuperamos la caracterización de las formas fundamentales definidas durante el Capítulo 3.

**Definición 5.2.** *La tercera forma fundamental de una superficie  $S$  en la base de  $T_p S$  se define como:*

$$(III) \equiv \langle L^2 r_u, r_v \rangle = \langle L r_u, L r_v \rangle = \langle r_u, L^2 r_v \rangle = \begin{pmatrix} n_u \cdot n_u & n_u \cdot n_v \\ n_v \cdot n_u & n_v \cdot n_v \end{pmatrix}$$

y suele representarse como  $n_u^2 du^2 + n_u n_v dudv + n_v^2 dv^2$ .

En concreto, dado un punto  $p \in S$  y  $u_p, v_p \in T_p S$ , podemos expresarlo en términos del operador de forma como  $(III)(u_p, v_p) = d_p N(u_p) d_p N(v_p)$ . Resulta evidente entonces que la tercera forma fundamental de la superficie es la **primera forma fundamental de la aplicación de Gauss**. Expresado en términos más cercanos a los de la Figura 5.1, es igual a la parte lineal principal del crecimiento del ángulo entre los vectores normales a dos puntos considerados de la superficie. Esta formulación muestra la conexión con el enfoque de la Geometría Conforme.


 Figura 5.1: Interpretación de la tercera forma fundamental. **Fuente:** [21]

No obstante, la tercera forma fundamental se encuentra completamente determinada por la primera y la segunda, tal y como demuestra la siguiente proposición<sup>1</sup>.

**Proposición 5.1.**

$$\mathbf{K}(I) - 2H(II) + (III) = 0$$

*Demostración.* Dado  $p \in S$ , escogeremos la parametrización  $r(u, v)$  donde  $r_u, r_v$  son paralelos a las direcciones principales (autovectores correspondientes a los autovalores  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  de la matriz de curvatura). Entonces,

$$\langle r_u, r_v \rangle = 0, \quad n_u = -\kappa_1 r_u, \quad n_v = -\kappa_2 r_v.$$

En base a esto, podemos reescribir, para  $a = (a_1, a_2) \in T_p S$ , los términos de la expresión previa de una manera más sencilla:

$$(I)(a, a) = E(a_1^2) + G(a_2^2), \quad (II)(a, a) = -\langle a, L_a n \rangle = \kappa_1 E(a_1^2) + \kappa_2 G(a_2^2)$$

$$(III)(a, a) = -\langle L_a n, L_a n \rangle = \kappa_1^2 E(a_1^2) + \kappa_2^2 G(a_2^2).$$

Podemos entonces desarrollar el cálculo de los elementos de la fórmula:

$$\mathbf{K}(I) - 2H(II) + (III) = \kappa_1 \kappa_2 (E + G) - 2 \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} (\kappa_1 E + \kappa_2 G) + \kappa_1^2 E + \kappa_2^2 G = 0$$

□

<sup>1</sup>Esta proposición es un caso particular de otro resultado más general; el **Teorema de Cayley**.

**Corolario 5.1.**

$$n_u^2 = 2He - \mathbf{K}E, \quad n_u n_v = 2Hf - \mathbf{K}F, \quad n_v^2 = 2Hg - \mathbf{K}G$$

Aunque esta dependencia pueda llevar a la idea de que (III) no tiene un significado propio, esto es incorrecto. Tal y como hemos visto, al ser la primera forma fundamental de la aplicación de Gauss, podemos emplearla para hallar de manera sencilla el área de una imagen esférica en la esfera de Gauss.

**Definición 5.3.** Sea  $D \subset S$  un dominio de la superficie. La **curvatura integral** de  $D$  se define como  $\omega(D) = \iint_D \mathbf{K} dA$ . En concreto, si  $D$  está contenido en un entorno coordenado de la carta local  $(U, \varphi)$ :

$$\omega(D) = \iint_D \mathbf{K}(u, v) \sqrt{EG - F^2} dudv$$

**Teorema 5.1** (Teorema de Gauss para aplicaciones esféricas).

Supongamos que  $D \subset S$  tiene una correspondencia unívoca con una región  $D^* = N(D)$  bajo la aplicación de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  y la curvatura Gaussiana tiene el mismo signo en cada punto de  $D$ . Entonces,

$$|\omega(D)| = \iint_{D^*} d\sigma,$$

siendo  $d\sigma$  el elemento de área de la esfera.

*Demostración.* Consideramos una parametrización de  $\mathbb{S}^2$  dada localmente por la aplicación normal  $r(u, v) = N(u, v)$ . El área se calcula como:

$$A(D^*) = \iint_{D^*} \sqrt{E_{\mathbb{S}^2} G_{\mathbb{S}^2} - F_{\mathbb{S}^2}^2} dudv,$$

donde los coeficientes de la primera forma fundamental son los correspondientes a la esfera. Estos coeficientes se expresan también en términos de la tercera forma fundamental de la superficie original:

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{S}^2} G_{\mathbb{S}^2} - F_{\mathbb{S}^2}^2 &= (2He - \mathbf{K}E)(2Hg - \mathbf{K}G) - (2Hf - \mathbf{K}F)^2 = \dots = \\ &= \mathbf{K}^2(EG - F^2) - 2H\mathbf{K}(eG - gE - 2fF) + 4H^2(ef - g^2) = \\ &= \mathbf{K}^2(EG - F^2) - 2H\mathbf{K}2H(EG - F^2) + 4H^2\mathbf{K}(EG - F^2) = \mathbf{K}^2(EG - F^2) \end{aligned}$$

A partir de esto, podemos probar el resultado pedido:

$$A(D^*) = \iint_{D^*} \sqrt{E_{\mathbb{S}^2} G_{\mathbb{S}^2} - F_{\mathbb{S}^2}^2} dudv = \iint_D |\mathbf{K}(u, v)| \sqrt{EG - F^2} dudv = |\omega(D)|$$

□



Tenemos entonces una manera de calcular el segundo término de la energía de Willmore gracias a este teorema<sup>2</sup>. En efecto, calculando dicha integral mediante el **Teorema de Stokes**, se obtiene que dicha integral es el área de la esfera de radio unitario:  $4\pi$ . Por lo tanto, para estudiar el flujo de esta energía puede ignorarse este término constante.

Como última observación, nótese que el enfoque clásico para calcular la segunda parte de la integral suele realizarse aplicando el **Teorema de Gauss-Bonnet**<sup>3</sup>. No obstante, la presentación y desarrollo de dicho resultado requeriría introducir nociones topológicas como la **característica de Euler-Poincaré**<sup>4</sup> y el **genus**<sup>5</sup>.

Los conceptos y resultados anteriores facilitan la representación topológica del rostro usando propiedades de las triangulaciones y sus representaciones simbólicas (grafos), que se utilizan en sistemas de reconocimiento de caras basados en pegado elástico de grafos para encontrar las caras “más próximas” a una dada. Las limitaciones inherentes a la extensión del trabajo impiden ahondar en los detalles.

### 5.1.2. Funcional de Willmore

La interpretación clásica de la energía de Willmore es la de una medida de bonanza de una superficie, en el sentido de determinar la energía asociada a ella, de manera análoga a como sucede con el funcional de área. Esto se puede ver de manera más clara si retomamos la definición que dimos antes de la energía de Willmore:

$$\mathcal{W}(S) = \int_S (H^2 - \mathbf{K}) dA = \frac{1}{4} \int_S (\kappa_1 - \kappa_2)^2 dA,$$

donde en cada punto tenemos un primer funcional cuadrático desacoplado en términos de las curvaturas principales. En particular, si  $\kappa_1 = \kappa_2$  (como es el caso de la esfera) la energía de Willmore es nula. Esta observación justifica porqué la energía de Willmore mide el “defecto de esfericidad” de una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$ .

No obstante, debido a que el segundo término es un invariante topológico tanto para la esfera (Teorema 5.1) como para superficies generales (Gauss-Bonnet), podemos simplificar dicha definición; siempre considerando superficies regulares, compactas y orientables.

**Definición 5.4.** *El funcional de energía de Willmore de una superficie  $S$  es:*

$$\mathcal{W}(S) = \int_S H^2 dA.$$

*Más generalmente, si denotamos por  $SCO(\mathbb{R}^3)$  al conjunto de superficies compactas y orientadas en  $\mathbb{R}^3$ , podemos definir el funcional previo como  $\mathcal{W} : SCO(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ .*

<sup>2</sup>El teorema probado se puede ver como un caso particular del **Teorema general de Stokes**, que generaliza a variedades arbitrarias teoremas como el de Riemann-Green o el de Gauss-Ostrogradski.

<sup>3</sup>Para ver una versión exhaustiva del resultado con su demostración, consultar [16].

<sup>4</sup>La **característica de Euler-Poincaré** es un invariante topológico calculable en términos de la triangulación de una superficie. Para más detalles, consultar [16].

<sup>5</sup>Intuitivamente, el **genus** ó **género topológico** es el “número de asas” o de “agujeros” de una superficie. Este invariante es clave para describir los tipos que aparecen en la clasificación topológica de las superficies compactas en  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 5.5.** Una *superficie de Willmore* es un punto crítico del funcional  $\mathcal{W}$ .

El siguiente paso será emplear el cálculo variacional para ver las características esenciales de estos tipos de superficies. En concreto, veremos que dicho funcional tiene un mínimo global que además ya nos es familiar. Si bien esta prueba ya la realizó el propio Willmore en textos como [19], [56] o [57]; en este trabajo nos ceñiremos a la presentación que se da en [2]. En dicho trabajo, el resultado buscado se prueba haciendo uso de los dos siguientes lemas, cuya demostración puede encontrarse en el propio documento.

**Lema 5.1.** Sea  $S$  una superficie regular, orientable, conexa y totalmente umbilical. Entonces,  $S$  es o bien un trozo de esfera o un trozo de plano.

**Lema 5.2.** Sea  $S \in SCO(\mathbb{R}^3)$ , definimos el trozo de superficie con curvatura total no nula como  $S^+ := \{p \in S \mid \mathbf{K}(p) \geq 0\}$ . Entonces, la aplicación de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  restringida a  $S^+$  es suprayectiva.

Una vez tenemos estos resultados a nuestra disposición, podemos dar el resultado para la obtención del mínimo global del que hemos hablado previamente.

**Teorema 5.2.** Sea  $S \in SCO(\mathbb{R}^3)$ ; entonces, se verifica,

$$\mathcal{W}(S) \geq 4\pi.$$

En concreto, la igualdad se da si, y sólo si,  $S = \mathbb{S}^2$

*Demostración.* Sea  $S^+$  la parte de  $S$  con curvatura total no negativa. Por un lado,

$$\mathcal{W}(S) = \int_S H^2 dA \geq \int_{S^+} H^2 dA.$$

Además, de manera análoga a como definíamos al inicio la energía de Willmore, se verifica que:

$$H^2 - \mathbf{K} = \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right)^2 - \kappa_1 \kappa_2 = \frac{\kappa_1^2 - 2\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2}{4} = \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4} \geq 0,$$

por lo que  $H^2 \geq \mathbf{K}$  y podemos aumentar la cadena de desigualdades a:

$$\mathcal{W}(S) = \int_S H^2 dA \geq \int_{S^+} H^2 dA \geq \int_{S^+} \mathbf{K} dA.$$

Este último término sería análogo al definido en el teorema de Gauss para aplicaciones esféricas si la aplicación considerada fuese un difeomorfismo. No obstante, gracias al lema previo, sí podemos garantizar que la aplicación de Gauss restringida a esta parte de la superficie  $(N|_{S^+})$  es suprayectiva. Por ello, se tiene la desigualdad:

$$\int_{S^+} \mathbf{K} dA \geq A(N(S^+)) = A(\mathbb{S}^2) = 4\pi,$$

lo cual prueba la primera parte del teorema.

El caso concreto en que se da la igualdad  $\mathcal{W}(S) = 4\pi$  se dará única y exclusivamente si  $H^2 = \mathbf{K}$  en todo  $S$  o, de manera equivalente, si  $\kappa_1 = \kappa_2$  en todo  $S$ . Esto último es análogo a pedir que la superficie sea totalmente umbilical. En virtud del Lema 5.1, las superficies totalmente umbilicales son trozos de plano o esfera. Sin embargo, como ésta es compacta, obligatoriamente debe ser una esfera completa.  $\square$

A modo de ejemplo, se puede consultar [2] para ver cómo computar el funcional de Willmore de la esfera de manera directa haciendo uso de su parametrización usual.

### 5.1.3. Aplicación al modelado de la cara

Los cálculos anteriores son aplicables en el caso de considerar el modelado de la cara como una esfera. De hecho, la mayor parte de los trabajos sobre el flujo de Willmore se aplican a modelos topológicos de tipo esférico. Una estrategia habitual consiste en los siguientes pasos:

1. Realizar un remapeado esférico mediante una discretización robusta del flujo de Willmore;
2. Descomponer el dominio de los armónicos esféricos<sup>6</sup> (funciones radiales) usando una base ortonormal;
3. Clasificación tosca sobre descriptores de la energía.

No obstante, el modelado esférico puede resultar algo simple, en especial cuando se requiere modelar gestos faciales debido a la alta expresividad y sutiles variaciones que suceden a lo largo de toda la superficie facial. En el caso más simple posible, habría que considerar tres agujeros correspondientes a ambos ojos más la boca. Se consideran estas partes debido a que es donde se ha detectado que más variaciones se producen en gestos de alegría y tristeza (arrugas alrededor de la comisura de los labios o bajo los párpados).

La extensión de la metodología explicada previamente para el caso esférico a superficies con agujeros sólo se ha abordado en el marco de la Geometría Riemanniana para toros. De hecho, considerando estos tres agujeros, el nuevo modelo de la cara sería la suma conexa  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  de tres toros  $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . La elección de esta variedad está justificada por el comportamiento de funciones analíticas sobre el soporte topológico y recuerda a modelos simples de figuras humanoides (como alienígenas) que se emplean en proyectos de animación, tal y como puede verse en la Figura 5.2.

Sin embargo, la extensión del análisis sobre una esfera o sobre un toro a la suma conexa de tres toros presenta dificultades importantes (salvo que se adopte el marco de la Geometría Conforme que excede el dominio de este trabajo). Para entender la dificultad, veamos los pasos a dar para desarrollar un análisis análogo al del caso de la esfera sobre el funcional de Willmore al nuevo modelo.

<sup>6</sup>Los **armónicos esféricos** son funciones armónicas que representan la variación espacial de un conjunto ortogonal de soluciones de la ecuación de Laplace, expresadas éstas en coordenadas esféricas.

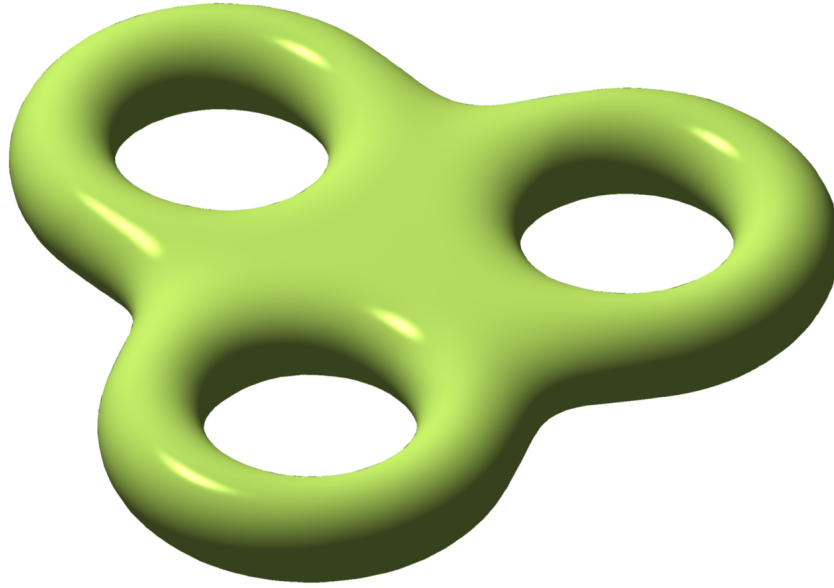


Figura 5.2: Representación en Matlab del toro triple generada por Oleg Alexandrov

El caso general de la suma conexas  $\#^g \mathbb{T}^2$  presenta una elevada dificultad para  $g \geq 2$ . Incluso para  $g = 1$  da lugar a la famosa **conjetura de Willmore**, que proporciona el valor del límite inferior de la energía Willmore  $\mathcal{W}(M) = \int_M H^2 dS$  de un toro; es decir,  $\mathcal{W}(M) \geq 2\pi^2$  para  $M = \mathbb{T}(r, \sqrt{2}r)$  [33]. Por este motivo, nos centraremos únicamente en presentar los resultados para el toro  $\mathbb{T}^2$ . Para mayor brevedad, omitiremos los cálculos detallados, pudiendo consultarse todos ellos en [2].

**Proposición 5.2.** *El funcional de Willmore para un toro de revolución  $\mathbb{T}(r, R)$ , donde  $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$  son los respectivos radios menor y mayor del toro, depende de la proporción entre sus dos radios. En concreto, si denominamos a dicha proporción  $a = \frac{r}{R}$ ,*

$$\mathcal{W}(\mathbb{T}(r, R)) = \frac{\pi^2}{a\sqrt{1-a^2}}.$$

Este funcional depende de la proporción entre los dos radios del toro, por lo que cabe preguntarse si existe un valor ideal mediante el cual obtengamos el “mejor” toro de revolución (aquel que minimiza el funcional de Willmore).

**Proposición 5.3.** *De entre todos los toros de revolución  $\mathbb{T}(r, R)$ , donde  $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$ , aquellos que minimizan el funcional de energía de Willmore son los que verifican  $a = \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Además, el valor de dicho mínimo es  $2\pi^2$ .*

La demostración de este resultado se basa únicamente en buscar el mínimo de la función definida en la Proposición 5.2. Los cálculos precisos pueden verse en [2].

## 5.2. Invarianza conforme del funcional de Willmore

El análisis previo puede resultar excesivamente complejo para resolver el problema que se pretende abordar, en especial si consideramos que algunas de los resultados presentados han permanecido sin demostración hasta hace relativamente poco. Por ello, conviene recurrir a aproximaciones más flexibles, como es el de la **Geometría Computacional Conforme**<sup>7</sup>. La **Geometría Computacional** combina modelos geométricos, estructuras de datos y algoritmos para resolver los problemas que aparecen en las diferentes Geometrías.

La mayor parte del enfoque desarrollado en este trabajo puede adaptarse al marco de la Geometría Computacional Conforme. A lo largo de la primera década del siglo XXI, Gu ha introducido e implementado algoritmos que simplifican los modelos estáticos iniciales y facilitan su extensión a la animación de personajes. La **Geometría Conforme** proporciona el soporte para el modelado de gestos faciales más allá del marco euclídeo inicial que resulta inapropiado para gestos. La clave consiste en que las transformaciones conformes preservan los ángulos entre las componentes más expresivas de la cara. En este apartado demostramos que no sólo se preservan los ángulos a través de aplicaciones conformes, sino que el funcional de Willmore también se conserva.

En virtud de la caracterización dada en la Definición 3.11, las aplicaciones conformes preservan los ángulos entre curvas contenidas en las superficies de partida y llegada, como extensión de las isometrías entre espacios métricos. Una versión alternativa más explícita consiste en usar las parametrizaciones locales de las superficies para volver a definirlo en esos términos.

**Definición 5.6.** Sean  $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$  abiertos y conexos. Una aplicación  $\Phi : W_1 \rightarrow W_2$  de clase  $C^\infty$  es una **aplicación conforme** si, para todo  $p \in W_1$ ,  $d\Phi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una aplicación lineal conforme entre espacios vectoriales. Esto es, existe una función diferenciable  $\lambda : W_1 \rightarrow \mathbb{R}_{\neq 0}$ , tal que:

$$\langle d\Phi_p(u), d\Phi_p(v) \rangle = \lambda(p)^2 d\Phi_p \langle u, v \rangle,$$

para cualesquiera  $u, v \in \mathbb{R}^3$ . La función  $\lambda$  se denomina **factor conforme**.

**Proposición 5.4.** Las aplicaciones conformes son difeomorfismos locales.

*Demostración.* Emplearemos la equivalencia entre que  $F : W_1 \rightarrow W_2$  es un difeomorfismo local si, y sólo si,  $dF_p$  es un isomorfismo vectorial, para todo  $p \in W_1$ . Dada una aplicación conforme  $\Phi$ , calculamos el núcleo de su diferencial;  $\ker(d\Phi_p)$ . Si  $d\Phi_p(v) = 0$ . Entonces

$$0 = \|d\Phi_p(v)\|^2 = \langle d\Phi_p(v), d\Phi_p(v) \rangle = \lambda(p)^2 \|v\|^2,$$

y como  $\lambda(p) \neq 0$ , para todo  $p$ , entonces debe ser  $v = 0$ . Véase,  $\ker(d\Phi_p) = \{0\}$ ,  $d\Phi_p$  es un isomorfismo vectorial y  $\Phi$  un difeomorfismo local.  $\square$

<sup>7</sup>Para más información sobre esta subárea, consultar [24].

Las transformaciones conformes se pueden entender como una “relajación” de las transformaciones Euclídeas con un gran número de aplicaciones en Física e Ingeniería. Una vez vista su definición en términos de espacios vectoriales, mostramos tres ejemplos de éstas, para acabar probando que cualquier aplicación conforme puede reducirse a una combinación de las mismas.

**Definición 5.7.**

- Una aplicación  $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^\infty$  es un **movimiento rígido** si, para todo  $p \in \mathbb{R}^3$ , es (composición de transformaciones) de la forma

$$M(p) = Ap + b,$$

donde  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  es una matriz especial ortogonal (correspondiente a una rotación) y  $b \in \mathbb{R}^3$  el vector de traslación.

- Una aplicación  $I : \mathbb{R}_{\neq 0}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\neq 0}^3$  de clase  $C^\infty$  es una **inversión** de centro 0 y radio  $r$  si, para todo  $p \in \mathbb{R}^3$ , puede escribirse como

$$I(p) = r^2 \frac{p}{\|p\|^2}.$$

- Una aplicación  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^\infty$  es una **homotecia** de razón  $\lambda \in \mathbb{R}$  si, para todo  $p \in \mathbb{R}^3$ , es de la forma

$$H(p) = \lambda p.$$

**Observación.**

- Un movimiento rígido consiste simplemente en la composición de una rotación y una traslación. Además, generan el grupo euclídeo  $SE(3) := SO(3) \times \mathbb{R}^3$  y son isometrías del espacio ordinario tridimensional; es decir, conservan la métrica euclídea y, en particular, ángulos y volúmenes.
- Una inversión realiza una reflexión de todos los puntos a través del centro definido; es decir, es como fijar una esfera de radio  $r$  e “intercambiar” su interior y exterior.
- Una homotecia es un escalado de factor  $\lambda$ .

**Proposición 5.5.**

- a) Los movimientos rígidos son aplicaciones conformes, con factor conforme constantemente igual a 1.
- b) Las inversiones de centro 0 y radio  $r$  son aplicaciones conformes, con factor conforme  $\lambda(p) = \frac{r^2}{\|p\|^2}$ .

c) *Las homotecias son aplicaciones conformes con factor constante e igual a la razón  $\lambda$  de la homotecia.*

*Demostración.* En todos los casos la demostración se basa en calcular la diferencial de la aplicación correspondiente, calcular el producto escalar de la diferencial sobre dos vectores distintos y extraer el valor del factor conforme. Únicamente probaremos el caso c), correspondiente a la homotecia. El resto puede verse en [2].

Calculemos la diferencial de la homotecia  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en  $p \in \mathbb{R}^3$  para  $v \in \mathbb{R}^3$ . Para ello, consideramos una curva  $\alpha(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow W_1$  que verifique  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ . Entonces,

$$dH_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(H(\alpha(t))) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\lambda\alpha(t)) = \lambda\alpha'(0) = \lambda v.$$

Por lo tanto, para cualesquiera  $u, v \in \mathbb{R}^3$ , se verifica:

$$\langle dH_p(u), dH_p(v) \rangle = \lambda^2 \langle u, v \rangle,$$

por lo que  $H$  es una aplicación conforme de factor conforme constantemente igual a  $\lambda$ .  $\square$

Tras haber visto estos tres tipos de aplicaciones conformes veremos que, a partir de las mismas, es posible definir cualquier tipo de aplicación conforme como una composición de éstas. Dicho teorema es de gran utilidad para probar la invarianza del funcional de energía de Willmore por transformaciones conformes.

**Teorema 5.3** (Teorema de Liouville).

*Toda aplicación conforme e inyectiva  $\Phi : W_1 \rightarrow W_2$ , siendo  $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$  abiertos, es composición de movimientos rígidos, inversiones y homotecias.*

La demostración de este resultado no es ni mucho menos trivial, requiriendo de una base sólida de conocimientos sobre Análisis Complejo. La prueba detallada puede consultarse en [40] o [48].

Con las herramientas anteriores, podemos abordar la demostración del teorema que establece la invarianza del funcional de energía de Willmore por aplicaciones conformes.

**Teorema 5.4** (Invarianza conforme del funcional de Willmore).

*Sea  $S \in SCO(\mathbb{R}^3)$  y  $\Phi$  una aplicación conforme e inyectiva. Entonces,*

$$S' = \Phi(S) \in SCO(\mathbb{R}^3) \text{ y } \mathcal{W}(S) = \mathcal{W}(S').$$

*Demostración.* En primer lugar, al ser la superficie compacta, podemos recubrirla con una cantidad finita de cartas  $\{(U_i, X_i)\}_{i=1}^n$  de tal forma que

$$\bigcap_{i=1}^n X_i(U_i) = \emptyset, \quad \overline{\bigcup_{i=1}^n X_i(U_i)} = S \quad \text{y} \quad \partial \bigcup_{i=1}^n X_i(U_i) \quad \text{tiene medida nula.}$$

Por tanto, basta probar que el funcional se conserva para una parametrización dada.

Veamos que la imagen por una aplicación conforme e inyectiva de una superficie compacta y orientable en  $\mathbb{R}^3$  también lo es. Al ser  $\Phi$  una aplicación conforme, por la Proposición 5.4 es un difeomorfismo local. Además, al ser inyectiva tenemos también que es un difeomorfismo global. Dado que  $S$  es compacta, su imagen por un difeomorfismo global también lo será, al ser la aplicación necesariamente continua. En concreto,  $S$  y  $S'$  son difeomorfas, por lo que ésta es a su vez una superficie.

Para probar la invarianza del funcional de Willmore, gracias a la Proposición 5.5 y el Teorema de Liouville, es suficiente probar dicha invarianza para cada uno de los tipos de aplicaciones conformes definidos anteriormente. La demostración se realiza de manera directa para cada uno de los supuestos, requiriendo a su vez del cómputo de curvaturas y formas fundamentales para dicha operación. Para no alargar aún más la extensión del trabajo, se omiten aquí dichos cálculos, pudiendo consultarse en [2].  $\square$

### 5.3. Análisis variacional del funcional de Willmore

Nuestro siguiente objetivo sería emplear el funcional de Willmore para mostrar una manera efectiva de modelar gestos. La estrategia es similar a la presentada en el capítulo previo: definir un flujo que muestre cómo varía el rostro a lo largo de cada gesto. Nuestra aproximación consistirá en considerar la cara como una suma conexa de superficies de Willmore, lo cual nos permitirá siempre analizar su estado. Por ello, el objetivo de este apartado es caracterizar la cara durante los gestos como superficies de Willmore.

Para ello, daremos primero una definición alternativa de flujo en términos de la variación normal de la parametrización de una superficie en términos de cartas locales.

**Definición 5.8.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie no necesariamente compacta y una parametrización de  $S$ ,  $(U, X)$ . Dada  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable con soporte compacto definida sobre  $U$ , tomamos la variación normal de  $X$  determinada por la carta como  $\Phi : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por*

$$\Phi(u, v, t) \equiv \Phi_t(u, v) = X(u, v) + t \cdot \varphi(u, v) \cdot N(X(u, v)),$$

siendo  $N(X(u, v))$  el vector normal a la superficie en dicho punto, tomando  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño como para que  $S_t = \Phi_t(U) \subset \mathbb{R}^3$  sea una superficie, siendo  $\Phi_t(u, v)$  una parametrización suya para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Bajo estas condiciones, podemos considerar la región  $R = X(V) \subset S$ , donde  $V = \text{sop}(\varphi)$ , que verifica  $\bar{R} \subset X(U)$  ( $R$  es un abierto conexo y relativamente compacto). Por tanto, podemos definir

$$R_t := \Phi_t(V) \subset S_t.$$

**Definición 5.9.** *El flujo de energía de Willmore se define como la función*

$$w(t) = \mathcal{W}(R_t) = \int_{R_t} H_t^2 dA_t,$$

donde  $H_t$  es la curvatura media de la superficie  $S_t$  y  $dA_t$  el elemento de área de la misma. Además, se cumple la condición de valor inicial  $w(0) = \mathcal{W}(R)$ .



Vemos entonces que este flujo es el gradiente introducido en la Definición 5.4, cuyas líneas de flujo satisfacen la ecuación diferencial ya mencionada<sup>8</sup>. Los extremos de energía correspondientes al funcional de Willmore permiten modelar “*gestos exagerados*”, como aquellos que se ven en la animación, compatibles con la geometría original de la cara humana.

En particular, nuestro objetivo será calcular  $w'(0)$  para saber si  $R$  es una superficie de Willmore en términos de la **caracterización de Euler-Lagrange**<sup>9</sup> que caracteriza las superficies de Willmore. Para presentar dicha caracterización, se requiere de un teorema previo, cuya demostración requiere del siguiente resultado.

**Proposición 5.6** (Fórmula de Jacobi). *Dada  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de clase  $C^\infty$ , se verifica*

$$\frac{d}{dt}(|A(t)|) = \text{tr} \left( \text{adj}(A(t)) \frac{dA(t)}{dt} \right),$$

donde  $\text{tr}(A)$  y  $\text{adj}(A)$  son la traza y matriz adjunta de  $A$ , respectivamente.

Tanto la demostración de esta igualdad, como el lema previo necesario para dar dicha prueba, pueden encontrarse en [2]. Gracias a este resultado, podemos dar ya el siguiente teorema, fundamentado en la terminología presentada en esta sección.

**Teorema 5.5** (Primera fórmula de variación del funcional de Willmore).

$$w'(0) = \int_R \phi(\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K})) dA$$

*Demostración.* La demostración de esta fórmula se basa en el cómputo progresivo de  $w(t)$ ,  $w'(t)$  y  $w'(0)$ . El cálculo de dichas integrales supondría una gran extensión, pues requiere obtener las formas fundamentales de las superficies, así como sus curvaturas. Durante este proceso, se hace uso de la Fórmula de Jacobi definida previamente para hallar el elemento de área. Los cálculos explícitos pueden encontrarse en [2].  $\square$

Una vez presentada esta fórmula de variación, podemos dar la caracterización buscada para las superficies de Willmore.

**Teorema 5.6** (Ecuación de Euler-Lagrange para las superficies de Willmore). *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie no necesariamente compacta. Decimos que  $S$  es una superficie de Willmore si, y sólo si, verifica la ecuación*

$$\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K}) = 0.$$

<sup>8</sup>Su correspondiente versión geométrica es el problema de evolución *steepest descent*.

<sup>9</sup>En el cálculo variacional y la mecánica clásica, las **ecuaciones de Euler-Lagrange** son un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden cuyas soluciones son puntos estacionarios de un funcional dado. Fueron descubiertas en la década de 1750 por los autores homónimos. En concreto, la aplicación de las ecuaciones de E.L. se basa en considerarlas como un sistema dinámico sobre la variedad considerada (superficie), en términos de su fibrado tangente. Para una adaptación del Análisis Variacional a este problema, consultar [35].

*Demostración.* Supongamos que  $S$  es una superficie de Willmore. Al ser un punto crítico del funcional de Willmore, tenemos que la derivada del flujo asociado es nula, es decir,  $w'(0) = 0$ . Supongamos que  $\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K}) \neq 0$ . Entonces,

$$\exists p_0 \in S \quad \text{tal que} \quad (\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K}))(p_0) \neq 0.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $(\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K}))(p_0) > 0$  y, por continuidad, existirá un entorno  $V \subset S$  de  $p_0$  donde  $\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K}) > 0$ . Pero entonces, tomando un entorno más pequeño de dicho punto y multiplicando la función positiva dada por una función meseta apropiada  $f$ , podemos elegir  $\phi$  de tal manera que  $\phi = f(\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K}))$  y tenemos

$$w'(0) = \int_R f(\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K})) dA \geq \int_{\text{sop}(f)} f(\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K})) dA > 0,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto,  $\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K}) = 0$ .

Recíprocamente, si  $\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K}) = 0$ , necesariamente  $H^2 = \mathbf{K}$ . Por ello, dicha superficie es un punto crítico del funcional de Willmore, aplicando la definición equivalente 5.1.  $\square$

Esta nueva caracterización permite ampliar aún más el concepto de superficie de Willmore. En concreto, a aquellas superficies que no son compactas, como es el caso de los planos. De hecho, toda superficie minimal de  $\mathbb{R}^3$  es una superficie de Willmore al ser  $H = 0$ . El caso más llamativo es el de los trozos abiertos de esferas, pues son las únicas superficies de Willmore en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante no nula (ver [2]).

## 5.4. Flujos geométricos

A lo largo de este capítulo únicamente hemos analizado la variación del flujo de energía de Willmore para estudiar las variaciones que sufre la cara humana. No obstante, existen otros flujos cuya variación nos permite extraer información sobre la geometría del rostro. En esta sección presentaremos dos de ellos, sin incurrir en los detalles de cómo estudiar su evolución.

### 5.4.1. Flujo óptico en secuencias de vídeo

Un gesto es una sucesión espacio-temporal de posturas o configuraciones de datos. El muestreo en una secuencia de vídeo permite analizar cada imagen por separado, detectando los “hechos” más significativos como valores extremos de un funcional. Una estrategia básica para el seguimiento de “hechos” utiliza el “Flujo Óptico”, que se basa en la “constancia” de la función de intensidad  $I(x, y; t)$  en la escala de grises y que se expresa como  $\nabla I = 0$ . Para ello, tal y como veremos a continuación, hay que minimizar un funcional cuadrático asociado a una “perturbación genérica” del campo gradiente.

En esta sección únicamente daremos una primera aproximación a este estudio, pudiendo recurrir a análisis a través de trabajos como [9] y [39]. En primer lugar, definamos los conceptos y nociones básicas para realizar dicho estudio.

Un objeto evolucionando en una secuencia de vídeo se representa mediante una superficie espacio-temporal. En esencia, una secuencia de vídeo es una sucesión de imágenes llamadas “*frames*”. La representación discreta en el dominio espacial de cada imagen de 8 bits en escala de grises está dada por una **función Intensidad**  $I : R \rightarrow [0, 255]$ , donde el dominio  $R$  es un rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$  y  $256 = 2^8$  es el número de valores que puede tomar la función. No obstante, al estar tratando con secuencias de vídeo, debe considerarse una sucesión de imágenes, por lo que es necesario incluir una dimensión temporal en la función de intensidad.

**Definición 5.10.** *La función Intensidad para una secuencia de vídeo puede definirse como*

$$I : R \times [0, D] \rightarrow [0, 255],$$

*dando como resultado la intensidad (en la escala de grises) para un píxel concreto de una imagen ( $p \in R$ ) en un momento  $t \in [0, D]$  determinado; siendo  $D$  la duración de la secuencia de vídeo.*

Las estrategias más habituales para el tratamiento de la información tienen un carácter “denso”, “semidenso” o discreto, dependiendo de la capacidad de procesamiento y de la necesidad de respuesta en tiempo real o no. Sin embargo, todas ellas se basan en la extracción de “hechos significativos” aislados sobre un muestreo de 4 ó 5 fps (*frames per second*). Los hechos significativos habituales son esquinas o máximos de intensidad. Una vez realizada la localización y extracción de hechos, se realiza la puesta en correspondencia y se lleva a cabo el seguimiento de hechos homólogos para estimar las trayectorias llevadas a cabo por hechos móviles. Todos estos procesos están sujetos a incertidumbre, incluyendo errores procedentes de las condiciones ambientales (iluminación pobre, p.e.), características del movimiento (de los agentes o de la cámara eventualmente móviles, p.e.) y de las fases iniciales de procesamiento y análisis de secuencias de vídeo. Por ello, es necesario implementar **estrategias de optimización** en cada una de las fases.

Para dos imágenes muestreadas próximas, se supone idealmente que la función intensidad  $I$  es constante, pues se supone que un píxel puede desplazarse temporal o espacialmente entre *frames*, pero sin modificar su intensidad durante el proceso.

Por este motivo, su gradiente temporal  $\nabla_t I$ , que reescribimos de forma más explícita como

$$\nabla_t I = \frac{dI}{dt} = v_x \frac{\partial I}{\partial x} + v_y \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial t},$$

se considera nulo; véase,  $\nabla_t I = 0$ . En la expresión anterior,  $v = (v_x, v_y)$  es un campo vectorial de dos componentes que contiene la información relevante para estimar el movimiento.

**Definición 5.11.** El **flujo óptico** está dado por las curvas integrales asociadas a la anulación del campo gradiente de la función intensidad en la escala de grises,

$$\int_{\Omega} \nabla_t I = 0.$$

Para adaptar el análisis a los datos discretos, se supone inicialmente que los campos vectoriales son lineales a trozos. Por ello, los patrones topológicos son una deformación de patrones lineales de EDO planas que pueden presentar una singularidad de tipo fuente, sumidero ó punto de silla. Cada región móvil en una secuencia de vídeo puede presentar un patrón diferente lineal de movimiento. Patrones topológicos más realistas se describen en términos de deformaciones (en general no lineales) de los patrones lineales mencionados más arriba. El movimiento de agentes móviles en la escena o de la propia cámara da lugar a efectos de emborronamiento (*blurr*) que es necesario modelar y corregir. Para el ajuste a modelos suaves, se utilizan técnicas de optimización o, en modelos más avanzados, de Cálculo Variacional. Únicamente consideraremos estrategias básicas de Optimización.

### Optimización para flujo óptico

Si  $\Delta I := I_2 - I_1$  es la sustracción de dos imágenes consecutivas, una vez suprimidos los *outliers* (usando la distancia  $L^1$ , p.e.), el funcional a minimizar está dado en cada punto  $p_0 = (x_0, y_0)$  por

$$\rho(p_0) = \sum_{p \in R(p_0)} \left[ v_x \frac{\partial I(p)}{\partial x} + v_y \frac{\partial I(p)}{\partial y} + \Delta I(p) \right]^2,$$

donde habitualmente  $R(p_0)$  es una región de  $5 \times 5$  píxeles centrada en  $p_0$ .

Para calcular el vector  $v$  que representa el flujo óptico, o al menos una estimación del mismo (en la discretización de la ecuación), debemos resolver un sistema  $Wv = -b$  donde

$$W = \begin{pmatrix} \sum \partial_x I^2 & \sum \partial_x I \cdot \partial_y I \\ \sum \partial_x I \cdot \partial_y I & \sum \partial_y I^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} \sum \partial_x I \cdot \Delta I \\ \sum \partial_y I \cdot \Delta I \end{pmatrix},$$

que se resuelve gracias a la diagonalización de la matriz  $W$ . Este es un problema básico de descomposición en valores singulares, tal y como se presenta en la Subsección 6.3.1.

**Observación.** La condición del flujo óptico puede resultar excesivamente restrictiva, ya que presupone que la intensidad de los píxeles permanece constante en todo momento. Para relajar dicha suposición, puede ampliarse la estimación previa añadiendo un término adicional que recoja las variaciones temporales en la iluminación, cuyo peso se controla mediante un parámetro  $\beta$ .

$$\rho(p_0, u) = \sum_{p \in R(p_0)} \left[ v_x \frac{\partial I(p)}{\partial x} + v_y \frac{\partial I(p)}{\partial y} + \Delta I(p) \right]^2 + \beta u,$$

donde  $u$  es un campo escalar que contiene la variación de la iluminación.

### Flujo óptico para nubes de puntos

Para nubes de puntos 3D procedentes de Visión Estéreo (espacial o temporal) o bien de escaneos láser 3D, se desarrolla un método similar usando coordenadas cilíndricas  $(h, \varphi)$ . En este caso, las matrices que aparecen en el funcional  $\rho(p_0)$  están dadas ahora por:

$$W = \begin{pmatrix} \sum \|\partial_h I^2\|^2 & \sum \partial_h I \cdot \partial_\varphi I \\ \sum \partial_h I \cdot \partial_\varphi I & \sum \|\partial_\varphi I^2\|^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} \sum \partial_h I \cdot \Delta I \\ \sum \partial_\varphi I \cdot \Delta I \end{pmatrix}$$

El seguimiento de nubes de puntos 3D presenta una complejidad mayor que el de hechos significativos en secuencias de vídeo. A diferencia de las imágenes, los datos contenidos en nubes de puntos 3D están muy dispersos. La ausencia de un modelo continuo como soporte sugiere una combinación de métodos estadísticos y PL-estructuras asociadas a trozos (*patches*) con características geométricas y cinemáticas similares (módulo un umbral de tolerancia). Ello requiere una segmentación volumétrica en regiones cambiantes que utiliza tanto criterios métricos (distancia de Wasserstein<sup>10</sup>) como topológicos (agrupamiento tosco provisional en PL-regiones a refinar en fases posteriores).

La generación de volúmenes continuos a partir de información discreta de rango soportada por nubes de puntos se lleva a cabo usando una PL-aproximación basada inicialmente en estructuras simpliciales<sup>11</sup>. La generación automática de estas mallas se lleva a cabo usando algoritmos de búsqueda de vecinos próximos (búsqueda NN<sup>12</sup>) con restricciones asociadas a criterios escalares (profundidad, altura) ó vectoriales (orientación, p.e.). En presencia de movimiento, es necesario añadir restricciones cinemáticas (Geometrías Simplécticas y de Contacto, p.e.).

Para facilitar la aplicación de modelos y herramientas de Geometría Diferencial es necesario aplicar un “suavizado” de la información. Esto se lleva a cabo mediante una relajación de técnicas clásicas de regularización (Tykhonov<sup>13</sup>) para facilitar su tratamiento computacional. A la superficie que acota el PS-modelo resultante se le pueden aplicar los métodos y resultados presentados más arriba.

#### 5.4.2. Flujos de volumen

El objetivo del vídeo 3D es la generación de volúmenes en movimiento que puedan ser visualizados en tiempo real desde una cámara virtual gestionada por cada usuario de forma interactiva. A pesar de los avances realizados en las primeras décadas del siglo XXI, aún estamos lejos de alcanzar dicho objetivo desde el punto de vista computacional.

<sup>10</sup>La **distancia de Wasserstein**, también conocida como **métrica de Kantorovich–Rubinstein**, es una distancia definida entre distribuciones de probabilidad de un espacio métrico dado. Se introduce inicialmente para dar respuesta a problemas de transporte óptimo.

<sup>11</sup>Una **variedad simpléctica** es un par  $(M, \omega)$  donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $\omega$  una 2-forma cerrada y no degenerada (para cada vector no nulo  $u$  en un punto del espacio tangente existe otro vector  $v$  tal que  $\omega(u, v) = 0$ ) en la variedad, llamada **forma simpléctica**.

<sup>12</sup>La **búsqueda NN** (*Nearest Neighbors*) es un problema de optimización que consistente en encontrar el punto de un conjunto dado más cercano (o más similar) a uno dado.

<sup>13</sup>Consultar [9] para más detalles sobre la **regularización de Tykhonov**.

La consideración de superficies en movimiento como variedades tridimensionales requiere la generación automática de PL-modelos, su ajuste mediante variedades algebraicas dadas inicialmente por T-splines (producto de tres *snakes* o curvas racionales), y el análisis de su evolución espacio-temporal mediante modificación de los puntos de control (extendiendo el enfoque basado en contornos activos<sup>14</sup> para curvas al caso de superficies y sólidos deformables).

Los modelos resultantes proporcionan el soporte para la reproyección de imágenes o de secuencias de vídeo, que debe ser depurada para obtener resultados aceptables. Para ello, es necesario aplicar diferentes criterios (enfoque híbrido) de tipo topológico (pegado y descomposición), métrico (para minimizar errores), conforme (para mantener la coherencia del soporte), cinemático (para la compatibilidad con características del movimiento) y dinámico (como soporte a la interacción). El enfoque variacional proporciona el marco para un tratamiento unificado de todas las cuestiones anteriores, aunque hay problemas abiertos en cada uno de estos tópicos.

Los avances más relevantes en la actualidad están relacionados con la síntesis (complementaria del análisis) de secuencias de vídeo basadas en modelos y herramientas de Inteligencia Artificial. En el marco de Redes Neuronales Profundas (*Deep Neural Networks*; DNN) a lo largo de la segunda década del siglo XXI se ha desarrollado TensorFlow (implementación en PyTorch bajo Python), que proporciona una aproximación computacional multilineal al cálculo de tensores (estimados mediante TensorVoting), a partir del cual se pueden incorporar trayectorias y restricciones “pesadas” de forma natural.

Las DNN proporcionan soporte para técnicas más sofisticadas (Transformers y Stable Diffusion, p.e.) que facilitan la incorporación de contenidos (siguiendo principios similares a los utilizados en EDO y EDP, respectivamente). La idea básica consiste en remapear las reconstrucciones tridimensionales móviles procedentes de Reconstrucción 3D y Análisis del Movimiento en Visión Computacional. Para ello, es necesario realizar una fusión de ambas subáreas usando herramientas de Inteligencia Artificial que faciliten el reconocimiento automático de “hechos significativos”, a partir de los cuales propagar los contenidos visuales 3D y 2D+1d a fusionar en un modelo volumétrico 3D+1d que evolucione en el espacio-tiempo. El análisis y síntesis de gestos faciales o corporales proporciona un banco de pruebas para integrar modelos y herramientas.

El elevado coste computacional de estos desarrollos sugiere la introducción de criterios de optimización según una estrategia tosca-fina que contribuyan a disminuir dicho coste. Ello requiere el desarrollo de elementos de Geometría Diferencial y Cálculo Variacional para variedades de dimensión tres que extiendan los límites de este trabajo, incluyendo la extensión apropiada del flujo de Willmore y de sus soluciones. Salvo algunos aspectos parciales teóricos, esta extensión aún no está disponible y es un reto para los próximos años, tanto para el modelado matemático como para una implementación computacional eficiente de los correspondientes algoritmos.

---

<sup>14</sup>Un **contorno activo**, comúnmente llamado *snake*, consiste en una curva elástica aproximada que, al ser superpuesta sobre una imagen, se deforma a partir de una forma inicial con el fin de ajustarse a condiciones de incidencia y tangencia para delimitar las regiones de interés de forma adaptativa. Para más información, consultar [3].

# Capítulo 6

## Estrategias basadas en los datos

Una vez presentado el enfoque basado en modelos para la caracterización de la cara humana, presentaremos ahora un enfoque alternativo, que toma como punto de partida los datos obtenidos a partir de dispositivos de imagen (una o varias cámaras digitales) o de rango (dispositivos de escaneo, sistemas de visión estéreo espacial o temporal), incluyendo la extensión al caso dinámico (basado en secuencias de vídeo o representaciones 3D cambiantes). En todos los casos se requiere el desarrollo de modelos continuos a partir de la información digital discreta proporcionada por los dispositivos de imagen o de rango. La disponibilidad de imágenes individuales de caras humanas o de animales permite aplicar técnicas de interpolación con aplicaciones a *morphing* (transición gradual entre imágenes), incluyendo interpretación, simulación y animación de gestos faciales.

Las estrategias basadas en datos son las que gozan de mayor popularidad hoy en día. Se etiquetan en la literatura anglosajona como *bottom-up*. La disponibilidad o la generación de modelos suaves a trozos disminuye el coste computacional para la gestión y modificación de gestos faciales. Por ello, es necesaria una retroalimentación entre las estrategias *bottom-up* y las basadas en modelos matemáticos presentados previamente (las cuales se denominan *top-down*). Uno de los retos actuales consiste en desarrollar enfoques que sepan aprovechar y combinar las virtudes que ofrecen ambas vertientes.

### 6.1. Captura de datos

La primera fase previa al reconocimiento de caras humanas consiste en la obtención de la información mediante dispositivos de imagen o de rango. La captura basada en imágenes utiliza habitualmente una cámara RGB-D (*Depth*), o bien dos cámaras para la captura de información volumétrica. Suponemos que las cámaras están **calibradas**; es decir, los parámetros internos de la cámara (longitud focal, coordenadas del centro de la cámara y distorsiones afines) son conocidos para minimizar sesgos en la interpretación de los datos.

En el caso estático, se puede proyectar un patrón geométrico (habitualmente dado por líneas regularmente espaciadas) sobre la cara humana que da curvas contenidas en un plano (habitualmente ortogonal), que resultan útiles para la estimación de las curvaturas seccionales ya mencionadas al presentar la Figura 3.4, donde los valores máximo y mínimo en cada punto son las curvaturas principales. Este último método se etiqueta como **luz estructurada** y la captura en sí de la información se fundamenta en el uso de herramientas de escaneo láser (dispositivos óptico-mecánicos capaces de emitir pulsos electromagnéticos y recibir la señal reflejada).

A partir de la diferencia en la posición, la fase o el intervalo de tiempo transcurrido; se calcula la distancia entre el instrumento y cada punto detectado. A partir de esta información, se genera un mapa denso de profundidad que permite evaluar la curvatura a partir de la deformación del patrón proyectado. No obstante, es importante remarcar que la calidad del modelo extraído depende de las condiciones de iluminación global, lo que limita el uso de estos sistemas a entornos con iluminación controlada.

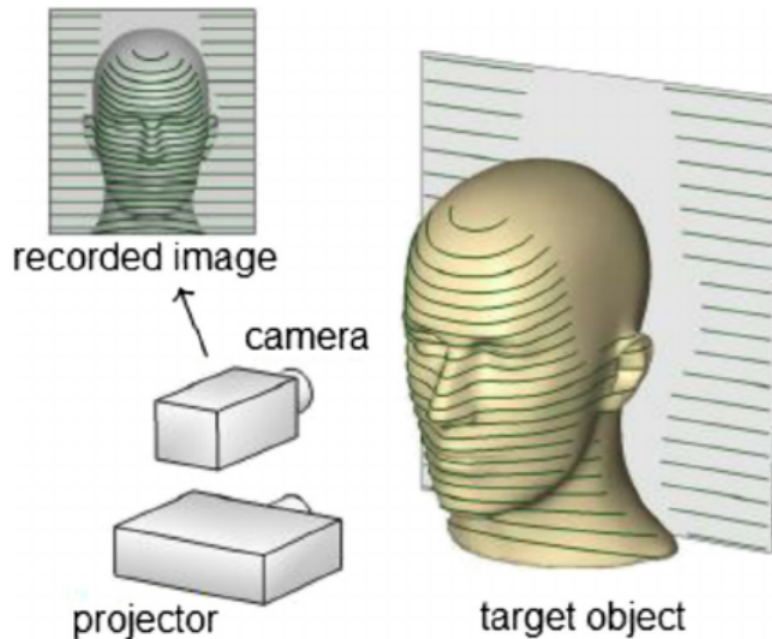


Figura 6.1: Escáner 3D basado en un sistema de luz estructurada. Fuente: [20]

La **Visión Estéreo**, basada en dos o más vistas capturadas de forma simultánea, permite generar un mapa de profundidad a partir de la comparación entre datos homólogos contenidos en pares de vistas próximas (la profundidad se aproxima por la inversa de la disparidad). El principio subyacente es la **puesta en correspondencia automática de pares de puntos homólogos** asociados a pares de imágenes y la aproximación de la profundidad por la inversa de la disparidad espacial (diferencia en la localización de puntos homólogos).



Una imagen digital se puede considerar como un mapa de píxeles coloreados o como la proyección de un “trozo de escena” sobre el plano de imagen. A este último se le llama el **modelo geométrico de imagen**. Cada dispositivo de captura proporciona “líneas de visión” que conectan cada punto espacial  $\mathbf{P}_i$  con su proyección sobre el plano de imagen  $\Pi_j$  desde el centro  $\mathbf{C}_j$  de la  $j$ -ésima cámara,  $\mathbf{p}_i^j = \pi_{\mathbf{C}_j}(\mathbf{P}_i) = \overline{\mathbf{P}_i\mathbf{C}_j} \cap \Pi_j$ . Idealmente, la intersección de cada par de líneas  $\ell_i^1 \cap \ell_i^2$  correspondiente a un par de puntos homólogos  $(\mathbf{p}_i^1, \mathbf{p}_i^2)$  proporciona las coordenadas 3D de los puntos de interés. Las rectas homólogas correspondientes a pares de puntos homólogos verifican relaciones estructurales expresadas por una matriz que se convierte en el objeto a estimar<sup>1</sup>.

El enfoque basado en pares de vistas proporcionadas por cámaras sincronizadas extiende la Visión Estéreo espacial al Estéreo temporal. En este enfoque se reemplazan pares de vistas tomadas de forma simultánea por pares próximos extraídos de un muestreo en la secuencia de vídeo. En este caso, la comparación de datos homólogos debe tener en cuenta la distorsión aparente asociada al cambio en la localización (posición y orientación) relativa de la cámara con respecto al objeto. La estrategia basada en vídeo se etiqueta frecuentemente como **Visión Estéreo Dinámica**, en contraposición con la estrategia basada en pares de vistas capturadas de forma simultánea, que se etiqueta como **Visión Estéreo Estática**.

La Visión Estéreo Dinámica utiliza un muestreo de aproximadamente cuatro o cinco *frames por segundo* (fps). Como output se obtiene una colección de puntos irregularmente distribuidos a los que se ajusta una PL-deformación de una malla inicialmente triangular. Las **triangulaciones de Delaunay**, usadas habitualmente en Geometría Computacional), proporcionan mallas óptimas que maximizan el ángulo mínimo (Figura 6.2). Alternativamente, los procedimientos basados en luz estructurada proporcionan curvas planas (secciones ortogonales habitualmente), a partir de las cuales se calculan las curvaturas principales  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ .

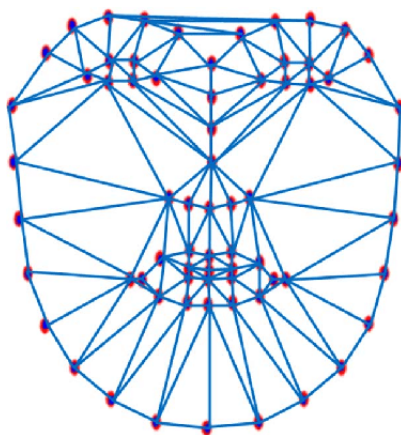


Figura 6.2: Triangulación de Delaunay de los puntos de interés del rostro. **Fuente:** [36]

<sup>1</sup>Para tres o más vistas, es necesario reemplazar la matriz por un tensor estructural asociado a la escena o al movimiento.

La cobertura completa de un objeto volumétrico requiere varias tomas de datos para objetos complejos y un pegado posterior a partir del solapamiento parcial de datos locales. Esta estrategia es una discretización del cambio de cartas utilizado en Geometría para pasar del enfoque local al global. La mayor ventaja de los dispositivos de escaneo láser consiste en que la distorsión métrica es muy pequeña (inferior a 0.1 mm para dispositivos láser de triangulación), y reproduce fielmente una aproximación discreta al objeto.

## 6.2. Métodos de reconocimiento facial

La mayor parte de las aplicaciones vinculadas al reconocimiento facial se centran en el uso de imágenes faciales estáticas para realizar las tareas de reconocimiento o identificación. Estas imágenes suelen darse como escala de grises, pues la consideración de los colores presentes en la imagen supone un mayor coste computacional añadido que no suele compensar la ínfima mejora obtenida en los resultados geométricos finales. Por otro lado, las secuencias de vídeo gozan de una mayor complejidad para el análisis, debido al hecho de tener que considerar una dimensión adicional como es la evolución temporal.

En general, los sistemas de reconocimiento de objetos volumétricos se basan en una combinación de principios de la Fotogrametría<sup>2</sup> y Geometría Proyectiva. Esta combinación recibe el nombre de **ajuste de haces**, pues incorpora aspectos métricos procedentes de la fotogrametría, por un lado, y transformaciones proyectivas entre haces de líneas proyectivas contenidos en los planos  $\Pi_j$  de las cámaras  $C_j$ .

Tras obtener los datos necesarios para llevar a cabo las labores de reconocimiento e identificación, el siguiente paso es adaptarlos a modelos con restricciones topológicas estructurales como la cara humana. Por ello, en esta sección se presentarán los principales enfoques de tipo estadístico para el reconocimiento de caras, centrándonos en realizar dicha labor sobre imágenes, debido a la mayor complejidad del caso 3D o de imágenes en movimiento 2D+1d asociado a secuencias de vídeo.

Si bien hoy en día existen una gran variedad de métodos y enfoques para el reconocimiento de rostros y gestos en imágenes, la gran mayoría de estas técnicas suelen poder encuadrarse en uno de los dos siguientes grupos:

- **Representación holística:** Métodos basados en considerar todo el rostro como elemento de entrada (*input*). Son los más usados, ya que preservan la configuración de la cara (interrelación entre las diferentes partes que lo conforman). La idea subyacente tras estos métodos consiste en emplear técnicas de reducción de la información para poder dar dicha descripción. Esto desemboca en la creación de autocaras y caras de Fisher mediante técnicas como Análisis de Componentes Principales (PCA), Análisis Discriminante Lineal (LDA) ó Máquinas de Soporte Vectorial (SVM). Esto se verá en mayor profundidad en la siguiente sección.

---

<sup>2</sup>La **Fotogrametría** utiliza información discreta y dispersa para describir la posición, la forma y el tamaño de un objeto a partir de un recubrimiento del mismo por fotografías usando información métrica asociada al dispositivo o al entorno. El método se basa en un proceso de optimización simultánea asociado a mapas de distancias, o bien a las mallas triangulares asociadas a nubes de puntos.

- **Local feature extraction:** Métodos centrados en la identificación y extracción de hechos/características significativas, también conocidos como puntos de interés. El interés en estos puntos radica en el hecho de que estas características locales no varían, por lo que podemos descomponer la cara en diferentes componentes como los ojos, la frente, la boca... El objetivo final es representar dichas regiones de una manera sencilla y comprensible a partir de estadísticas locales asociadas a la geometría de la apariencia, que después se emplean para entrenar un clasificador estructural como modelos de Markov ocultos (HMM) o redes convolucionales (CNN). Existen una gran variedad de métodos para extraer y almacenar estos hechos significativos, como las ondículas de Gabor (muy apropiadas para texturas), la Transformada Discreta del Coseno (DCT) o el uso de histogramas que representan el gradiente de la localización y la orientación. Un análisis pormenorizado de éstos e incluso más métodos puede encontrarse en [38].

Ambas metodologías pueden combinarse para paliar los defectos de la otra, dando lugar a métodos más robustos. Por ejemplo, la representación holística evita las pérdidas de información causadas por la descomposición que proponen las técnicas basadas en la extracción de hechos significativos, pero no gozan del mismo nivel de detalle al basarse en técnicas de reducción de la información como es el propio PCA. Algunas de estas técnicas mixtas se basan en la creación de “eigenfaces” modulares o un uso híbrido de la extracción de puntos de interés.

De forma complementaria, la Reconstrucción 3D en Visión Computacional desarrolla modelos de tipo continuo (cubren toda la imagen) basados en información densa que combina ideas básicas de la Geometría Proyectiva con modelos de propagación. Para simplificar, se adopta un modelo de **proyección central para cada cámara**; es decir, proyección desde un punto ideal  $C_j$  llamado centro de la cámara. El modelo proyectivo de la proyección central  $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$  está representado, salvo escala, por una matriz  $M \in \mathcal{M}_{3 \times 4}$ ; es decir, depende de 11 parámetros correspondientes a las 6 coordenadas de localización (posición y orientación) y a los 5 parámetros asociados a la calibración de la cámara. A éstos se les llama **parámetros extrínsecos** e **intrínsecos**, respectivamente.

## 6.3. Eigenfaces

Tras haber visto las diferentes maneras de capturar datos y algunos de los acercamientos más comunes para el reconocimiento de rostros, presentaremos ahora una de las técnicas más habituales para la detección de caras a partir de imágenes; las **eigenfaces**, también conocidas como autocaras. La idea de autocaras, que surge al considerar una imagen como un conjunto de píxeles, puede tener dos aproximaciones:

- **Holística:** Cada una de las imágenes de caras obtenidas durante la toma de datos se representa como un vector que contiene todos los píxeles de la imagen, obteniendo finalmente una matriz que hace referencia al conjunto de caras.

- **Bag of features:** Descomponer la cara en diversas regiones de interés y representar cada una de estas regiones como un vector, obteniendo al final una matriz que represente a todo el rostro.

Ambos enfoques son compatibles entre sí y retrocompatibles, pues las caras obtenidas como unión de regiones significativas pueden representarse también de manera vectorial y acabar formando una matriz que represente al conjunto de todas las imágenes obtenidas. Por lo tanto, en ambos casos obtenemos bien una matriz  $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$  o un vector  $v$  de tamaño  $m \times n$ .

Debido a que esta información tiene unas dimensiones considerables, buscamos comprimir estos datos de una manera concisa para manejarlos con mayor facilidad. Para ello recurriremos a calcular autovalores, los cuales representan a su vez algunas de sus características principales. No obstante, para llevar a cabo esta tarea, dado que los datos obtenidos muy probablemente resulten en una matriz que no sea cuadrada ( $m \neq n$ ), no podemos aplicar una descomposición de Jordan a la matriz, por lo que habrá que recurrir a otras técnicas. En particular, las matrices rectangulares se pueden interpretar geométricamente como elementos de una variedad de Grassmann<sup>3</sup>, y los modelos más simples de la evolución espacio-temporal de matrices en términos de EDO sobre espacios de matrices (las más sencillas son de tipo Riccati<sup>4</sup>). En esta sección nos restringimos únicamente al enfoque estático.

### 6.3.1. SVD

Dada una matriz  $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$ , buscamos dar una factorización de la misma en lo que se conoce como **descomposición en valores singulares** ó *Singular Value Decomposition* (SVD). Esta factorización es de la forma:

$$M = U\Sigma V^t$$

donde  $U$  y  $V$  son matrices cuadradas de orden  $m$  y  $n$ , respectivamente; mientras que  $\Sigma \in \mathcal{M}_{m \times n}$  y sus elementos no nulos se ubican en la diagonal principal. Además, consideraremos  $m \geq n$ .

**Definición 6.1.** Si el rango de una matriz  $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$ , denotado como  $\text{rg}(M)$ , es su número de filas linealmente independientes; la **nulidad**,  $\text{nul}(M)$ , es el conjunto más grande de vectores linealmente independientes  $v \in \mathbb{R}^n$  para el que  $Mv = 0$ ;  $\text{nul}(M) = n - \text{rg}(M)$ .

<sup>3</sup>La **variedad de Grassman**  $\text{Grass}(k, n)$  es un espacio homogéneo  $GL(n)/(GL(k) \times GL(n-k))$  que parametriza todos los subespacios lineales  $L^k$  de un espacio vectorial  $n$ -dimensional  $V$  de una dimensión fija  $k$ . Para más detalles, consultar [1].

<sup>4</sup>Una **ecuación de tipo Riccati** es una EDO no lineal de primer orden de la forma

$$y'(x) = q_0(x) + q_1(x)y(x) + q_2(x)y^2(x),$$

siendo  $q_0(x), q_2(x) \neq 0$ . Tiene multitud de aplicaciones desde ingeniería hasta matemática financiera, pues generaliza otros tipos de EDO como la ecuación de Bernoulli (caso  $q_0(x) = 0$ ) o el caso lineal ( $q_2(x) = 0$ ).

**Proposición 6.1.**

- (I) Las matrices  $M^tM$  y  $MM^t$  son simétricas.
- (II)  $\text{nul}(M) = \text{nul}(MM^t)$  y  $\text{rg}(M) = \text{rg}(MM^t)$
- (III) Los autovalores de  $MM^t$  son reales y no negativos.
- (IV) Los autovalores no nulos de  $MM^t$  son iguales a los autovalores de  $M^tM$ .

*Demostración.*

Únicamente presentaremos la demostración de la última afirmación, pudiendo consultarse el resto en [15]. Supongamos que  $v$  es un autovector correspondiente a un autovalor no nulo  $\lambda$  de  $M^tM$ . Entonces,  $MM^t v = \lambda v \Rightarrow (MM^t)Mv = \lambda Mv$ .

Si  $Mv = 0 \Rightarrow M^tMv = M^t0 = 0$ , pero esto contradice el hecho de que  $\lambda$  era no nulo. Por lo tanto,  $Mv \neq 0$  y  $Mv$  es un autovalor de  $MM^t$  relacionado con  $\lambda$ . Recíprocamente, si  $\lambda$  es un autovalor no nulo de  $MM^t = (M^t)^tM^t$ , también lo es de  $M^t(M^t)^t = M^tM$ .  $\square$

Gracias a este resultado construimos la factorización SVD mencionada más arriba. Este proceso consta de las siguientes fases:

1. **Construir la matriz  $\Sigma$ :** Para ello, calculamos primero los autovalores de la matriz simétrica  $M^tM$ , que es cuadrada de orden  $n$ . Todos los autovalores son reales no negativos y están ordenados como:

$$s_1^2 \geq s_2^2 \geq \dots \geq s_k^2 > s_{k+1} = \dots = s_n = 0$$

Sus raíces cuadradas positivas se denominan los **valores singulares** de  $M$  y permiten construir la matriz  $\Sigma \in \mathcal{M}_{m \times n}$ , que está compuesta por valores nulos salvo en la diagonal, donde se encuentran dichos valores singulares.

2. **Construir la matriz  $V$ :** La matriz  $M^tM \in \mathcal{M}_n$  es simétrica, por lo que sabemos que tiene una factorización  $M^tM = VD^tV$ , donde  $D$  es una matriz diagonal conformada por dichos autovalores  $d_i = s_i^2$  (ordenados en sentido decreciente) y  $V$  es una matriz ortogonal cuya  $i$ -ésima columna es el autovector  $v_i$  asociado a  $d_i$ .
3. **Construir la matriz  $U$ :** Consideramos las raíces cuadradas positivas de los autovalores no nulos  $s_i$ , así como sus autovectores asociados  $v_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$ . Definimos:

$$u_i = \frac{1}{s_i} Mv_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, k.$$

Como los vectores empleados para la definición son autovectores, esto implica:

$$u_i^t u_j = \left(\frac{1}{s_i} Mv_i\right)^t \frac{1}{s_j} Mv_j = \frac{1}{s_i s_j} v_i^t M^t M v_j = \frac{1}{s_i s_j} v_i^t s_j^2 v_j = \frac{s_j^2}{s_i} v_i^t v_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Así, las primeras  $k$  columnas de  $U$  forman un conjunto ortonormal de vectores en  $\mathbb{R}^n$ . No obstante, son también necesarias  $m - k$  columnas adicionales para terminar de construir la matriz  $U \in \mathcal{M}_m$ . Para obtener dichas columnas, aplicamos el método de Gram-Schmidt, pues garantizan que la matriz obtenida esté formada por  $m$  vectores linealmente independientes.

**Proposición 6.2.** *Las matrices obtenidas dan la factorización  $M = U\Sigma V^t$  buscada.*

*Demostración.* Probaremos que  $MV = U\Sigma$ , pues la inversa de  $V$  es su traspuesta al ser ésta una matriz ortogonal. Los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  forman una base para  $\mathbb{R}^n$ ,  $Av_i = s_i u_i$  para  $i = 1, \dots, k$ ; y  $Av_i = 0$  para  $i = k + 1, \dots, n$ . Sólo las primeras  $k$  columnas de  $U$  dan lugar a entradas no nulas en el producto  $U\Sigma$ , por lo que:

$$AV = A[v_1 \dots v_n] = [Av_1 \dots Av_n] = [s_1 u_1 \dots s_k u_k 0 \dots 0] = U\Sigma$$

□

### 6.3.2. PCA

El **análisis de componentes principales** ó *Principal Component Analysis* (PCA) es una técnica estadística empleada para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos e identificar nuevas variables relevantes subyacentes en ellos<sup>5</sup>.

La idea detrás de PCA consiste en la de proyectar objetos sobre un subespacio ortogonal para sus representaciones compactas. En concreto, implica el procedimiento matemático de transformar un número de variables correlacionadas en un número menor de variables no correlacionadas, denominadas **componentes principales**. Así, la primera de éstas representa la mayor varianza de los datos, la segunda hace lo propio con la segunda mayor varianza, y así sucesivamente.

El procedimiento para obtener estos valores, así como sus autovectores asociados, se basa en codificar y decodificar la matriz  $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$  que contiene los datos, buscando minimizar la distancia entre ambas representaciones. Ésta se calcula en términos de la **norma de Frobenius** dada por  $\|M\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(M^t M)}$ .

La matriz buscada  $V$  se hallará columna a columna, estimando la primera de ellas,  $d^*$ , como un problema de optimización:

$$d^* = \arg \min_d \|M - M d d^t\|_F^2 \text{ sujeto a } d^t d = 1$$

Reescribimos el problema de optimización en términos de la traza, utilizando las propiedades de ésta:

---

<sup>5</sup>Para procesos estocásticos esta técnica se conoce como la **transformada de Karhunen-Loève** y se basa en la representación en serie de Fourier de los mismos. Mientras que PCA sería la terminología empleada para el caso discreto, Karhunen-Loève sería el análogo para el caso continuo.

$$\begin{aligned}
& \arg \min_d \|M - Mdd^t\|_F^2 = \arg \min_d \operatorname{tr}((M - Mdd^t)^t(M - Mdd^t)) = \\
& = \arg \min_d \operatorname{tr}(M^tM - M^tMdd^t - dd^tM^tM + dd^tM^tMdd^t) = \\
& = \arg \min_d \operatorname{tr}(M^tM) - \operatorname{tr}(M^tMdd^t) - \operatorname{tr}(dd^tM^tM) + \operatorname{tr}(dd^tM^tMdd^t) = \\
& = \arg \min_d -2 \operatorname{tr}(M^tMdd^t) + \operatorname{tr}(dd^tM^tMdd^t) = \arg \min_d -2 \operatorname{tr}(M^tMdd^t) + \operatorname{tr}(M^tMdd^tdd^t)
\end{aligned}$$

Considerando la restricción impuesta al problema de optimización,

$$\begin{aligned}
& \arg \min_d -2 \operatorname{tr}(M^tMdd^t) + \operatorname{tr}(M^tMdd^tdd^t) = \arg \min_d -2 \operatorname{tr}(M^tMdd^t) + \operatorname{tr}(M^tMdd^t) = \\
& = \arg \min_d -\operatorname{tr}(M^tMdd^t) = \arg \max_d \operatorname{tr}(M^tMdd^t) = \arg \max_d \operatorname{tr}(d^tM^tMd)
\end{aligned}$$

y el problema de optimización<sup>6</sup> se resuelve usando la descomposición en autovalores de la matriz  $M^tM$ , siendo el vector óptimo el autovector asociado al mayor autovalor. El resto de componentes principales se hallan de manera análoga sobre el resultado de haber sustraído aquellas componentes ya halladas, Por lo tanto, la descomposición final de la matriz en componentes principales es  $T = MV$ .

#### Observación.

*Cabe destacar dos hechos reseñables que pueden haber sido pasados por alto a lo largo del razonamiento anterior:*

- *La matriz  $M^tM$  se corresponde con la **matriz de covarianza** del conjunto de datos considerado, por lo que se está obteniendo al final la ya mencionada relación entre las distintas componentes (bien sean las de todas las caras escaneadas o las de diferentes regiones que conforman un rostro) .*
- *Si bien el problema de optimización comienza siendo un intento de **minimizar la distancia** entre los datos originales y los obtenidos tras pasar por el proceso de codificación y decodificación, en el momento en que se cambia a un problema de maximización el objetivo pasa a ser el de **maximizar la varianza** entre ambos.*

Podemos dar una formulación alternativa de esta descomposición en componentes principales, simplemente aplicando la factorización en valores singulares de  $M$  que hemos presentado previamente:

$$T = MV = U\Sigma V^tV = U\Sigma$$

<sup>6</sup>En caso de no haber impuesto la condición  $d^td = 1$ , el problema de optimización anterior se formularía en términos de lo que se conoce como **cociente de Rayleigh**;  $\frac{\operatorname{tr}(d^tM^tMd)}{\operatorname{tr}(d^td)}$ .

### 6.3.3. Eigenfaces

El enfoque de eigenfaces o autocaras se presenta por primera vez en [47], aunque hay que esperar un par de años hasta que Turk y Pentland lo formalizasen en [53]. En él, las autocaras generadas sirven para crear una “base”<sup>7</sup> del conocido como “espacio de caras” a partir de la cual identificar e incluso generar rostros. Una de las condiciones necesarias para aplicar esta técnica consiste en que las imágenes empleadas deben haber sido tomadas en condiciones casi idénticas, tanto de iluminación y sombras (localización de cámaras y focos), como de ubicación de las diferentes partes del rostro (nariz, ojos, boca...). Además, cabe destacar que esta metodología es extrapolable a otros problemas de Visión Computacional como el reconocimiento de caracteres escritos o la lectura de labios, por lo que también se emplea a veces la terminología eigenimage o autoimagen.

Para generar la base de eigenfaces sobre este espacio de autocaras, es necesario seguir el siguiente procedimiento:

1. **Obtener el conjunto de imágenes de entrenamiento**, almacenando todas ellas en una matriz  $M$  cuyas columnas son las diferentes imágenes (representadas como píxeles) que conforman el conjunto de datos total.
2. **Calcular y sustraer la imagen promedio  $A$**  del total  $M$  para poder trabajar con un conjunto de datos normalizado<sup>8</sup>.
3. **Calcular los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza**. Cada uno de los autovectores tiene la misma dimensión que las imágenes originales, por lo que pueden ser vistos también como imágenes: las **eigenfaces**. Además, sus autovalores asociados indican cuánto varía cada una con respecto a la imagen promedio calculada anteriormente.
4. **Escoger las  $k$  componentes principales**. Se fija un umbral  $\epsilon$  sobre la varianza total  $\sum_{i=1}^n s_i^2$  para delimitar el número exacto de componentes principales a considerar, pues la gran cantidad de datos de entrenamiento da lugar a un número desorbitado de éstas.  $k$  es el menor número entero que satisface  $\frac{\sum_{i=1}^k s_i^2}{\sum_{i=1}^n s_i^2} > \epsilon$ .

La obtención de los autovalores y autovectores se realiza a partir de los métodos presentados a lo largo de esta sección. Como ejemplo, en la Figura 6.3 se puede observar el resultado de descomponer la imagen de un rostro en componentes principales para obtener la representación del mismo como eigenface.

---

<sup>7</sup>Si bien en la literatura se emplea el término “base”, la terminología más precisa sería la de “sistema de generadores”, pues se toman más elementos para formarla que la dimensión del espacio debido al hecho de que hay que prevenir posibles errores (humanos o mecánicos) que hayan podido surgir durante la toma inicial de los datos.

<sup>8</sup>Esto garantizará la obtención de un conjunto de variables independientes, pues la matriz de correlación que se obtendrá demuestra que no están correlacionadas (al ser diagonal) y siguen una distribución normal multivariante. Para más detalles, consultar [8].





Figura 6.3: Imagen de una cara (izq.) y su representación como eigenface (dcha.). Fuente: [53]

#### 6.3.4. LDA

Usando PCA se obtiene un sistema generador de caras que permitiría expresar cualquier otro rostro como una combinación lineal de las componentes principales obtenidas. Aplicando un enfoque como el que se usa en Aprendizaje Automático, podemos considerar estas componentes principales como grupos en los que aglutinar los diversos datos que tenemos, lo que se conoce como un problema de *clustering*. No obstante, el formato de los datos de entrenamiento empleado (imágenes representadas como píxeles en una única matriz) da lugar a que suela haber una mayor cantidad de información por elemento (píxeles por imagen) que datos de entrenamiento en sí (número de imágenes consideradas), lo cual provoca que el sistema final obtenido no represente de la mejor manera el conjunto de los datos, pues con PCA lo que se busca es encontrar componentes que maximicen la varianza con respecto a los datos originales (**mínimos cuadrados**).

Para solucionar este problema, es habitual emplear Análisis Discriminante Lineal, más conocido por su nomenclatura inglesa *Linear Discriminant Analysis* (LDA), *Normal Discriminant Analysis* (NDA) ó *discriminant function analysis*<sup>9</sup>. Es un método para la clasificación de elementos en grupos o clases, teniendo como requisito previo conocer el número de éstos de antemano<sup>10</sup>. La idea subyacente tras LDA consiste en maximizar la distancia entre los grupos ó *clústeres* creados, al tiempo que se minimiza la varianza entre los elementos de cada clase.

<sup>9</sup>Los métodos de función discriminante lineal permiten la clasificación de datos en clases a partir de la creación de hiperplanos. Otro ejemplo común de este tipo de métodos, cuya aplicación está muy extendida en el Aprendizaje Automático, son las máquinas de soporte vectorial ó *Support Vector Machines* (SVM).

<sup>10</sup>El caso más simple es en el que sólo hay dos clases y se conoce como **discriminante lineal de Fisher**. De hecho, suele usarse esta nomenclatura como sinónimo de LDA, si bien ambos términos no son totalmente sinónimos.

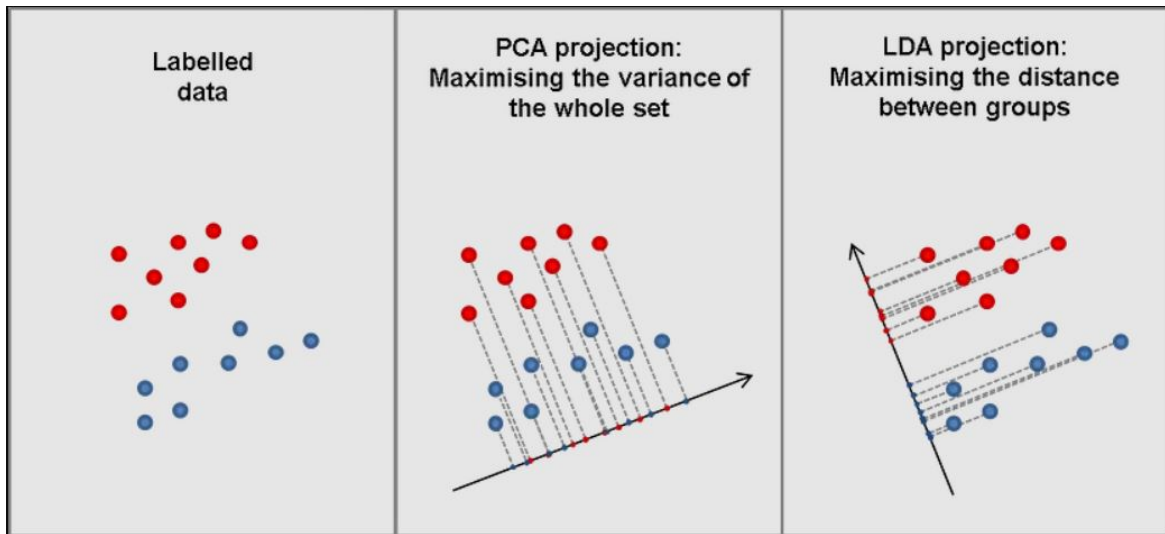


Figura 6.4: PCA vs LDA. Fuente: [37]

Veamos cuál es la formulación del problema de clasificación presentado por LDA, cuyos detalles se pueden ver en [38] y [46]. Denotemos por  $S$  al conjunto total de imágenes, las cuales queremos separar en  $q$  clases  $C_1, \dots, C_q$  diferentes, donde denotamos por  $l_i$  al número de puntos pertenecientes a la clase  $l_i$  y por  $l = \sum_i l_i$  al total de éstos. Los centroides de cada clase  $C_i$  los denotamos como  $\mu_i$ , siendo  $\mu$  el del conjunto total de datos de entrenamiento:

$$\mu_i = \frac{1}{l_i} \sum_{x_j \in C_i} x_j, \quad \mu = \frac{1}{l} \sum_{x_j \in S} x_j.$$

Sea  $A_i$  la matriz asociada a la clase  $C_i$  cuyas columnas consisten en los datos normalizados de cada imagen:

$$A_i = [x_1 - \mu_i, \dots, x_{l_i} - \mu_i], \quad x_i \in C_i.$$

Así,  $\frac{1}{l_i} A_i^t A_i$  es la matriz de covarianza asociada a la clase  $C_i$ . Definimos entonces la **matriz de varianzas intra-clases**  $S_w$  (donde “w” proviene del término inglés *within*) como la suma de estas matrices:

$$S_w = \sum_i^q \frac{1}{l_i} A_i^t A_i.$$

En base a la idea subyacente tras LDA, lo que se busca es **minimizar**  $d^t S_w d$ , de manera análoga a lo que se había hecho en PCA.

Además, también queremos maximizar la varianza entre las diferentes clases, por lo que definimos la matriz de centroides normalizados  $B = [\mu_1 - \mu, \dots, \mu_q - \mu]$ , la cual nos permite describir la **matriz de varianzas entre-clases**  $S_b$  (donde “ $b$ ” proviene del término inglés *between*) como:

$$S_b = \frac{1}{q} B^t B.$$

Así, buscamos **maximizar**  $d^t S_b d$ . Ambas condiciones se pueden unificar en una condición como cociente de Rayleigh:

$$\max_d J(d) = \frac{d^t S_b d}{d^t S_w d}$$

cuya condición necesaria de optimalidad es:

$$\frac{\partial J}{\partial d} = \frac{S_b d (d^t S_w d) - S_w d (d^t S_b d)}{(d^t S_w d)^2} = 0$$

a partir del cual obtenemos el autosistema generalizado:

$$S_b d = J(d) S_w d$$

donde  $d$  es el autovector de mayor valor absoluto de  $S_w^{-1} S_b$  (asumiendo que  $S_w$  es invertible), de manera análoga a lo que ocurría en PCA. Tal y como comentábamos al inicio de este apartado, el número de imágenes de entrenamiento suele ser mucho menor que el número de píxeles que contiene cada imagen, por lo que  $S_w$  puede ser singular y por tanto no invertible, aunque bastaría tomar su pseudoinversa.

Otra dificultad es el alto número de imágenes de entrenamiento y características a hallar. Para solventar esta problemática, se aplican técnicas de reducción de dimensionalidad (tanto PCA como LDA) que permiten obtener la matriz  $V$  óptima:

$$V = V_{FLD}^t V_{PCA}^t$$

donde

$$V_{PCA} = \arg \max_V |V^t M^t M V|, \quad V_{LDA} = \arg \max_V \frac{|V^t V_{PCA}^t S_b V_{PCA} V|}{|V^t V_{PCA}^t S_w V_{PCA} V|}.$$

Así, LDA se emplea para reducir el número de características a una cantidad más manejable previamente a la realización de tareas de clasificación. Cada una de estas nuevas dimensiones es una combinación lineal de valores de píxeles, que dan lugar a un sistema de generadores del espacio de caras. Esta metodología es análoga al de las eigenfaces, sólo que en este caso la nomenclatura empleada es **fisherfaces** ó caras de Fisher.

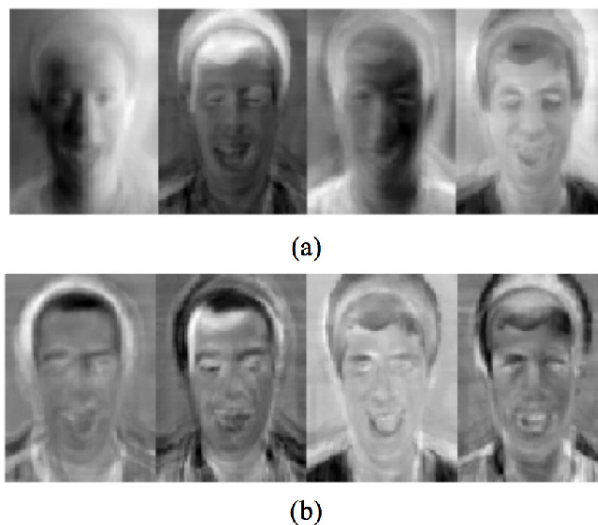


Figura 6.5: Eigenfaces (a) vs fisherfaces (b). **Fuente:** [52]

Tal y como se comenta en [38], las caras de Fisher suele dar mejores resultados que las eigenfaces. Principalmente, esto se debe a que es un enfoque robusto respecto a variaciones en las condiciones de iluminación o localización del conjunto de imágenes de entrenamiento consideradas. Esto puede apreciarse en la Figura 6.5, donde vemos que las eigenfaces han captado las variaciones causadas por la iluminación y/o el cambio de pose de la cabeza; mientras que las fisherfaces reducen esas variaciones no relacionadas con las imágenes faciales. No obstante, diversos estudios muestran que, para una muestra pequeña de datos, PCA obtiene mejores resultados y es incluso menos sensible a diferentes conjuntos de datos de entrenamiento.

### 6.3.5. Implementación

Una vez ya presentados los conceptos teóricos, daremos una implementación práctica en Python del método de eigenfaces. Para realizar dicho desarrollo, se han empleado a modo de guía [32] y [42]. El resultado final se puede descargar y probar siguiendo los pasos indicados en el Anexo A.1.

Las imágenes de rostros empleadas es el conocido como **dataset de Olivetti** (Figura 6.6), el cual fue obtenido entre abril de 1992 y abril de 1994 en los laboratorios AT&T de Cambridge. En él, hay 10 imágenes distintas de 40 personas diferentes, las cuales han sido tomadas bajo varias condiciones de iluminación, expresión facial y detalles como la ausencia o no de gafas. No obstante, todas las imágenes se tomaron sobre un fondo oscuro y homogéneo, con los sujetos en posición vertical y frontal (con tolerancia para algún movimiento lateral). Es necesario separar estos datos en un conjunto de datos de prueba y otro de entrenamiento, para que así seamos capaces de comprobar la efectividad del modelo creado.



Figura 6.6: Muestra de las primeras 25 imágenes del dataset de Olivetti

Tras obtener las componentes principales de dichos rostros, podemos visualizar algunas de éstas (Figura 6.7). Para ello, hemos seleccionado 106 datos para obtener un p-valor de 0.05 y así obtener una precisión final de reconocimiento de al menos un 95 %. Los datos resultantes presentan menor dimensionalidad y permiten entrenar el modelo para la clasificación de rostros y así facilitar la identificación de caras humanas.

Tras haber entrenado el modelo, es necesario evaluar su rendimiento para comprobar la efectividad del mismo. Para ello, se utiliza el conjunto de datos de prueba y se extraen diversas métricas de los resultados obtenidos, los cuales se calculan en función de si la labor de clasificación se ha realizado o no de manera correcta:

- **True Positive (TP)**: Valores predichos correctamente (predicción correcta).
- **False Positive (FP)**: Valores predichos incorrectamente (predicción incorrecta).
- **True Negative (TN)**: Valores rechazados correctamente (predicción correcta).
- **False Negative (FN)**: Valores rechazados incorrectamente (predicción incorrecta).



Figura 6.7: Las primera 25 eigenfaces obtenidas, ordenadas de mayor a menor varianza

Aunque estos valores resultan especialmente intuitivos en el caso binario, para la situación en la que hay  $n$ -clases basta realizar este análisis clase por clase. Estos resultados se pueden resumir mediante la técnica conocida como **matriz de confusión**, la cual proporciona información sobre los aciertos y errores del modelo de clasificación, así como del tipo de errores que comete. No obstante, para nuestro caso no emplearemos dicha técnica, pues obtendríamos una matriz de tamaño 40, que no supondría ninguna ventaja para la visualización en términos efectivos. En estos casos, es preferible aplicar técnicas de reducción en la dimensionalidad expuestas anteriormente (extendiendo SVD o PCA, p.e.), o bien recurrir a las **métricas** disponibles para evaluar la validez del modelo obtenido:

- **Accuracy**. Frecuencia con la que el método evaluado realiza la predicción correcta. Se calcula como la suma de las predicciones verdaderas dividida por el número total de predicciones.

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}$$

- **Precision**. Representa la exactitud del método. Se calcula como la proporción de casos que se predijeron como positivos y que efectivamente lo fueron, dividida por el número total de casos que se predijeron como positivos.

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP}$$

- **Recall**. Fracción de casos positivos que se predijeron como positivos.

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP + FN}$$

- **F-score**. Métrica que combina *recall* y *precision* para determinar la precisión de la prueba. Para problemas de  $n$ -clases, suele hallarse esta puntuación para cada una de ellas. Se calcula como:

$$F\text{-score} = 2 \cdot \frac{\text{precision} \cdot \text{recall}}{\text{precision} + \text{recall}}$$

- **Support**. Número de observaciones que se predicen en una clase determinada.

Si consultamos los resultados finales, vemos que hemos obtenido una *accuracy* del 93 %, por lo que el modelo generado es capaz de detectar estos rostros bajo estas condiciones con una certeza elevada. Estos resultados no son totalmente coherentes con la razón de verosimilitud obtenida, pues la precisión es ligeramente inferior al 95 %. Esto se debe a que el conjunto de datos no es especialmente grande, por lo que al realizar la división de los datos en conjuntos de entrenamiento y prueba puede haber ocasiones en que no haya datos suficientes de una cara para entrenar adecuadamente al modelo. Para solventar esto se incluyó la opción **estratificar**, la cual intenta preservar la disposición de los datos al hacer dicha división (garantizar imágenes suficientes de cada uno de los rostros), pero al haber sólo 10 imágenes de cada persona tampoco se puede lograr predicciones con una certeza mayor. Tras ejecutar el programa varias veces, lo único que se puede garantizar es una certeza superior al 90 %.





# Capítulo 7

## Conclusiones y trabajo futuro

### 7.1. Conclusiones

En esta memoria hemos hecho una recopilación de los conceptos teóricos subyacentes tras las técnicas empleadas para el modelado y reconocimiento de rostros. Empezando por las estrategias *top-down* para el modelado de la cara humana a partir de un enfoque basado en apariencias, presentamos el lenguaje formal de variedades para construir un modelo final descrito por la unión de subvariedades suaves con curvatura de signo constante. El análisis y evolución de dicho modelo se realizó en términos de mapas de curvaturas para la identificación y separación en regiones, permitiendo su caracterización y reconstrucción.

Tras realizar el modelado estático en términos de mapas de curvaturas, se ha presentado la terminología de flujos tanto para la simplificación de las características de la cara, como para controlar las deformaciones producidas en el rostro durante la realización de gestos. En el primer caso, además de considerar los flujos asociados a las curvaturas media y total (como invariantes de la estructura diferenciable en cada punto), hemos caracterizado la noción de “buen flujo”, viendo ejemplos como el del flujo de curvatura principal maximal, que permite simplificar singularidades como el par de puntos umbilicales que se da en la nariz.

Para el modelado de gestos, se adopta una estrategia más próxima a la Cinemática, donde los funcionales de energía juegan un papel fundamental. En particular, la caracterización de la esfericidad a través del flujo de energía de Willmore resulta una técnica de gran utilidad en combinación con métodos de Análisis Variacional y Geometría Conforme; aunque tampoco hay que descartar el uso de otros flujos geométricos que complementen la obtención de la información.

En último lugar, se ha realizado una somera introducción a las estrategias *bottom-up*, indicando los métodos principales para la captura de datos y el reconocimiento facial. Este último se puede realizar de manera sencilla y eficaz mediante métodos como eigenfaces o fisherfaces, que ya hemos visto pueden implementarse de manera efectiva. No obstante, estas técnicas también tienen limitaciones como la necesidad de un elevado conjunto de datos etiquetados para el entrenamiento de modelos de Aprendizaje Automático, así como las restricciones de variabilidad en las condiciones de iluminación u orientación.

## 7.2. Trabajo futuro

Debido a las limitaciones inherentes a la extensión del proyecto, así como la amplia variedad de disciplinas que abarca el modelado y reconocimiento de rostros, muchos temas y líneas de trabajo únicamente se han presentado de manera superficial. Algunos de los tópicos que sólo han sido esbozados en esta memoria y que podrían ser susceptibles de desarrollos futuros son los siguientes:

- Incorporar la geometría subyacente tanto de músculos como del esqueleto al modelo basado en apariencias, usando estrategias típicas en Informática Gráfica CSG (*Constructive Solid Geometry*).
- Relacionar los enfoques suaves y lineales a trozos (PS vs PL) tomando como soporte una discretización de los modelos basada en “hechos significativos” asociados al mapa de curvas parabólicas que separan regiones de curvatura positiva y negativa.
- Incorporar las relaciones entre las estrategias *top-down* (basadas en modelos) y *bottom-up* (basadas en hechos) típicas de la Visión Computacional.
- Realizar una simulación de gestos faciales usando mapas de curvaturas y sus relaciones en términos del funcional de energía de Willmore.
- Relacionar los modelos discretos basados en nubes de puntos (procedentes de escaneos, p.e.) con los PS-modelos usando PL-estructuras intermedias (complejos simpliciales vs cuboidales).
- Relacionar los PS-modelos, curvaturas seccionales asociadas a las apariencias (Capítulo 3); con los procedentes de luz estructurada sobre la cara, proyección de patrones lineales dados por haces de líneas paralelas (Capítulo 6).
- Desarrollar herramientas software para control interactivo de gestos, incluyendo la representación de gestos naturales vs exagerados, y remapeo de máscaras sin utilizar puntos de control (como en el personaje de Gollum, p.e.).
- Remapear modelos radiométricos (asociados al comportamiento de la luz) sobre la geometría de la cara y la dinámica gestual para efectos especiales.
- Adaptar las estrategias cuasi-estáticas basadas en mapas de curvatura al marco dinámico de personajes reales para facilitar la comunicación no-verbal hombre-máquina (*Human Computer Interaction*; HCI).
- Entrenar y validar modelos de Inteligencia Artificial para el reconocimiento, seguimiento y simulación de gestos faciales.

# Apéndice A

## Recursos software

### A.1. Eigenfaces

En esta sección se muestran los pasos necesarios para emular el entorno de desarrollo para la detección de caras mediante el método de eigenfaces, para así poder ejecutar el desarrollo final del mismo. El desarrollo se ha llevado a cabo en un ordenador que tiene Windows 10 como sistema operativo aunque, para otros sistemas, los pasos a seguir son prácticamente equivalentes salvo ligeras modificaciones en función del sistema operativo que se use.

1. **Instalar la plataforma de desarrollo Anaconda.** Para ello, basta descargar y ejecutar el instalador proporcionado en [4], manteniendo las opciones por defecto que ofrece. **Anaconda** es una distribución gratuita y de código abierto de los lenguajes de programación Python y R, utilizada para ciencia de datos y Aprendizaje Automático. Proporciona un entorno completo y listo para usar que incluye una gran cantidad de paquetes, bibliotecas y herramientas que son utilizados comúnmente en el ámbito de la ciencia de datos, así como una interfaz intuitiva que facilita su manejo.
2. **Descargar todos los paquetes y librerías requeridos por los diversos cuadernos.** Una vez completado el paso previo, únicamente hay que buscar entre los programas disponibles *Anaconda Prompt* y ejecutarlo. Al abrirlo, surgirá una consola de comandos desde la que se pueden modificar los distintos módulos descargados en el sistema. La descarga de nuevos paquetes se realiza mediante el mandato

**pip install <nombre\_del\_paquete>**

El siguiente listado muestra todos los comandos necesarios para realizar dicha descarga, por lo que basta copiar y ejecutar dichos mandatos uno por uno.

```
$ pip install numpy
$ pip install pandas
$ pip install matplotlib
$ pip install sklearn
```

3. **Abrir la interfaz que da acceso al cuaderno.** El acceso a los cuadernos de desarrollo se puede realizar de manera sencilla buscando el programa *Jupyter Notebook*. Al ejecutarlo, debe seleccionarse un navegador sobre el que acceder a la visualización de los documentos (durante el desarrollo se ha usado Google Chrome como opción predeterminada). Tras haber realizado dicha elección, basta dirigirse a la ubicación donde esté almacenado el proyecto, que puede descargarse desde la siguiente página de Github, y ejecutar el cuaderno. De hecho, debido a que se conservan los resultados de la última ejecución realizada, puede consultarse tal cual está. En caso de que quiera probarse en la propia máquina, la ejecución de cada una de las celdas se puede hacer gracias al botón *Run* (figura A.1).



Figura A.1: Cabecera de un archivo ejecutado por Jupyter Notebook

# Bibliografía

- [1] R. Abraham, J.E. Marsden y T. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications; Second edition*. Springer-Verlag, 1988.
- [2] Jose Antonio Lorenzo Abril. “Superficies de Willmore en el espacio euclídeo”. TFG. Universidad de Murcia, 2022.
- [3] Juan Gutiérrez Aguado. “Contornos activos: Bases teóricas, representación y minimización”. TFG. Universitat de Valencia, 1999.
- [4] *Anaconda Distribution: Free Download*. Anaconda. Accedido el 24/10/2023. URL: <https://www.anaconda.com/download>.
- [5] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade y A. N. Varchenko. *Singularities of Differentiable Maps*. Vol. 1. Birkhäuser, 1985.
- [6] Vladimir I. Arnold. *Catastrophe Theory*. Springer-Verlag, 1992.
- [7] Thomas F. Banchoff. *Meusnier’s Theorem*. Brown University, Accedido el 15/9/2023. URL: <https://www.math.brown.edu/tbanchof/balt/ma106/lab8.html?dtext86.html>.
- [8] Patrick Billingsley. *Probability and Measure; Third Edition*. WI, 1995.
- [9] Luis Llamas Binaburo. “Estimación online del flujo óptico a partir de una secuencia de vídeo”. TFG. Universidad de Zaragoza, 2013.
- [10] Nicolas Bourbaki. *Algebra I. Elements of Mathematics*. Springer-Verlag, 1989.
- [11] J. W. Bruce y P. J. Giblin. *Curves and Singularities: A Geometrical Introduction to Singularity Theory*. 2.<sup>a</sup> ed. Cambridge University Press, 1992.
- [12] J. W. Bruce, P. J. Giblin y F. Tari. “Parabolic Curves of Evolving Surfaces”. En: *Int. J. Comput. Vision* 17.3 (1996), 291–306. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00128235>.
- [13] J. W. Bruce, P. J. Giblin y F. Tari. “Ridges, Crests and Sub-Parabolic Lines of Evolving Surfaces”. En: *Int. J. Comput. Vision* 18.3 (1996), 195–210. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00123141>.
- [14] Theodor Bröcker y Klaus Jänich. *Introducción a la topología diferencial*. Editorial AC, 1977.

- [15] Richard L. Burden, Douglas J. Faires y Annete M. Burden. *Análisis numérico, 10<sup>a</sup> edición*. CENGAGE Learning, 2016.
- [16] Manfredo P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Editorial, 1990.
- [17] Yun Gang Chen, Yoshikazu Giga y Shuníchi Goto. “Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations”. En: *Journal of Differential Geometry* 33.3 (1991), págs. 749-786. URL: <https://doi.org/10.4310/jdg/1214446564>.
- [18] Keenan Crane. *A Quick and Dirty Introduction to the Curvature of Surfaces*. Technische Universität Berlin, Accedido el 03/12/2023. URL: <http://wordpress.discretization.de/geometryprocessingandapplicationsws19/a-quick-and-dirty-introduction-to-the-curvature-of-surfaces/>.
- [19] Franki Dillen y Leopold Verstraelen, eds. *Geometry and Topology of Submanifolds IV* (Conference on Differential Geometry and Vision). Katholieke Universiteit Leuven, Belgium. Leuven, Belgium: World Scientific, 1992, pág. 296. DOI: 10.1142/1723.
- [20] Fernando Manteca Fernández. “Generación de modelos 3D mediante luz estructurada”. TFG. Universidad de Cantabria, 2018.
- [21] *Fundamental Forms of a Surface*. Encyclopedia of Mathematics. Accedido el 23/11/2023. URL: [http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Fundamental\\_forms\\_of\\_a\\_surface&oldid=47024](http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Fundamental_forms_of_a_surface&oldid=47024).
- [22] Christoph Garth. *Apuntes de la asignatura Computergrafik*. Technische Universität Kaiserslautern, 2022.
- [23] Ian Goodfellow, Yoshua Bengio y Aaron Courville. *Deep Learning*. <http://www.deeplearningbook.org>. MIT Press, 2016.
- [24] Xianfeng David Gu y Shing-Tung Yau. *Computational conformal geometry (Advanced Lectures in Mathematics)*. International Press of Boston Inc, 2008.
- [25] María de los Ángeles Hernández Cifre y José Antonio Pastor González. *Un curso de Geometría Diferencial*. Ediciones Doce Calles, S.L., 2010.
- [26] David Hilbert y Stephan Cohn-Vossen. *Anschauliche Geometrie*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin, Heidelberg, 1932. DOI: 10.1007/978-3-662-36685-1.
- [27] Ana Núñez Jiménez. *Apuntes de la asignatura Geometría de curvas y superficies*. Universidad de Valladolid, 2019.
- [28] I. T. Jolliffe. *Principal Component Analysis, Second Edition*. Springer, 2002.
- [29] Wilhelm Klingenberg. *A Course in Differential Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1978. DOI: 10.1007/978-1-4612-9923-3.
- [30] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2013.

- 
- [31] Conglin Lu, Yan Cao y David Mumford. “Surface Evolution under Curvature Flows”. En: *Journal of Visual Communication and Image Representation* 13.1 (2002), págs. 65-81. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1047320301904766>.
- [32] Hassan Id Mansour. *Face Recognition using Eigenfaces (Python)*. Medium. Accedido el 24/04/2023. URL: <https://hassan-id-mansour.medium.com/face-recognition-using-eigenfaces-python-b857b2599ed0>.
- [33] Fernando C. Marques y André Neves. “Min-Max theory and the Willmore conjecture”. En: *Annals of Mathematics (2)* 179.2 (2014), págs. 683-782.
- [34] Fernando C. Marques y André Neves. “The Willmore conjecture”. En: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 116.4 (2014), págs. 201-222. DOI: 10.1365/s13291-014-0104-8.
- [35] Jerrold E. Marsden y Tudor S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry. A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. 2.<sup>a</sup> ed. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, NY, 1999. DOI: 10.1007/978-0-387-21792-5.
- [36] Hoda Mohammadzade, Amirhossein Sayyafan y Benyamin Ghojogh. “Pixel-Level Alignment of Facial Images for High Accuracy Recognition Using Ensemble of Patches”. En: *Journal of the Optical Society of America A* 35 (feb. de 2018). DOI: 10.1364/JOSAA.35.001149.
- [37] Vivek Muraleedharan. *What is Linear Discriminant Analysis (LDA)*. Brown University, Accedido el 20/10/2023. URL: <https://vivekmuraleedharan73.medium.com/what-is-linear-discriminant-analysis-lda-7e33ff59020a>.
- [38] Miloš Oravec. *Face Recognition*. IntechOpen, 2010.
- [39] Roberto Pablo Pérez Palomares. “Optical Flow. Related Problems”. Tesis doct. 2017. URL: <http://hdl.handle.net/10803/403061>.
- [40] Robert Phillips. “Liouville’s Theorem”. En: *Pacific Journal of Mathematics* 28.2 (1969).
- [41] Ian R. Porteous. *Geometric Differentiation*. Cambridge University Press, 2001.
- [42] Dario Radečić. *Eigenfaces — Face Classification in Python*. Towards Data Science. Accedido el 24/04/2023. URL: <https://towardsdatascience.com/eigenfaces-face-classification-in-python-7b8d2af3d3ea>.
- [43] Adrian Rosebrock. *OpenCV Eigenfaces for Face Recognition*. pyimagesearch. Accedido el 20/04/2023. URL: <https://pyimagesearch.com/2021/05/10/opencv-eigenfaces-for-face-recognition/>.
- [44] Walter Rudin. *Análisis real y complejo*. McGraw-Hill, 1988.
- [45] Eike Schling et al. “Design and Construction of Curved Support Structures with Repetitive Parameters”. En: sep. de 2018.
- [46] Amnon Shashua. *Introduction to Machine Learning*. The Hebrew University of Jerusalem, 2008.

- [47] Lawrence Sirovich y M Kirby. “Low-Dimensional Procedure for the Characterization of Human Faces”. En: *Journal of the Optical Society of America. A, Optics and image science* 4 (abr. de 1987), págs. 519-524.
- [48] Mirjam Soeten. “Conformal maps and the theorem of Liouville”. TFG. Rijksuniversiteit Groningen, 2011.
- [49] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Vol. 1. Publish or Perish, 1999.
- [50] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Vol. 2. Publish or Perish Inc, 1999.
- [51] Alex Taylor. *Equivalent definitions of the tangent space*. URL: <https://art-math.github.io/files/tangentspace.pdf>.
- [52] Ana Tsifouti. “Image usefulness of compressed surveillance footage with different scene contents”. Tesis doct. Mayo de 2016. DOI: 10.13140/RG.2.1.2047.9609.
- [53] Matthew Turk y Alex Pentland. “Eigenfaces for Recognition”. En: *Journal of Cognitive Neuroscience* (1991).
- [54] Luis Alberto Tristán Vega. *Apuntes de la asignatura Análisis Matemático*. Universidad de Valladolid, 2019.
- [55] Carlos Ruiz Vera. *Cartografía*. Universidad de Murcia, 2014.
- [56] Thomas J. Willmore. “Note on Embedded Surfaces”. En: *An. Sti. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat. (N.S.)* 11B (1965), págs. 493-496.
- [57] Thomas J. Willmore. *Riemannian Geometry*. New York: Oxford University Press, 1996.