Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

LA COMPLETITUD DEL CONJUNTO DE LAS EXPONENCIALES COMPLEJAS

Autor: Miguel Carranza de Castro
Tutor: Félix Galindo Soto
Año 2023

Abstract

We say that a subset S of a normed space X is complete in X if every element of the latter can be arbitrarily closely approximated in the norm of X by linear combinations of elements from S. The completeness of sets of complex exponentials is closely related to the zeros of certain entire functions, a fact that simplifies their study and confers them exceptional properties. The aim of this work is, following R. M. Young's *Introduction to nonharmonic Fourier Series*, to review some of the sufficient conditions for completeness for this type of sets in the spaces L^p and $\mathscr{C}$, of complex functions defined on $[-A, A]$, as well as to examine the most characteristic properties of such systems, previously reviewing some necessary results. To achieve this, we will begin by analyzing some generalities of both the spaces of interest and the exponential systems. Subsequently, we will study the well-known trigonometric system and systems in some sense close to it, concluding with a series of interesting properties of sets of complex exponentials.

Resumen

Decimos que un subconjunto S de un espacio normado X es completo en X si cada elemento de este último puede ser aproximado con precisión arbitraria en la norma de X por combinaciones lineales de elementos de S. La completitud de los conjuntos de exponenciales complejas guarda una estrecha relación con los ceros de determinadas funciones enteras, hecho que permite simplificar su estudio y les confiere unas propiedades excepcionales. El objetivo de este trabajo es, siguiendo el tercer capítulo de *Introduction to nonharmonic Fourier Series*, de R. M. Young, hacer un repaso a algunas de las condiciones suficientes de completitud para este tipo de conjuntos en los espacios L^p y $\mathscr{C}$, de funciones complejas definidas en $[-A, A]$, así como examinar las propiedades más características de este tipo de sistemas, revisando previamente algunos resultados necesarios. Para ello, se comenzará analizando algunas generalidades de los espacios que nos interesan y de los sistemas de exponenciales. Posteriormente, se estudiarán el conocido sistema trigonométrico y sistemas en algún sentido próximos a él, y se concluirá con una serie de interesantes propiedades de los conjuntos de exponenciales complejas.

Índice general

Introducción

El Análisis de Fourier no Armónico explora las propiedades de completitud y expansión de los conjuntos de funciones exponenciales $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, donde la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es de números complejos, y juega un papel fundamental en el desarrollo de la Teoría de Frames y en el estudio de las bases de Riesz, así como en otras áreas de aplicación de las Matemáticas tales como la Teoría de la Señal y la Teoría de Control. El término *completitud* hace referencia a la propiedad que tiene un subconjunto de un espacio normado de poder "aproximar con precisión" los elementos de dicho espacio en la norma del mismo, por medio de combinaciones lineales de sus elementos. Según se puede ver en [Chr16, teo. 3.1.4, teo. 3.6.6, lema 5.5.5], los conjuntos completos desempeñan un papel relevante al caracterizar las bases de Schauder, las bases de Riesz y los frames, hecho que acentúa el interés en tal propiedad.

Nuestro objetivo será realizar un estudio pormenorizado de las cinco primeras secciones de [You01, cap.3], sobre la completitud de los conjuntos de exponenciales complejas en los espacios $L^p[-A,A]$ y $\mathscr{C}[-A,A]$, deteniéndonos también en algunas de las cuestiones tratadas en el primer capítulo. Al mismo tiempo, examinaremos algunos de los textos originales a los que se refiere R.M. Young e indagaremos también en los requisitos previos de Variable Compleja, expuestos en el segundo capítulo de [You01], así como en otros resultados preliminares necesarios extraídos del resto de la bibliografía. A lo largo del trabajo, se considerarán sólamente espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ y, salvo que se indique lo contrario, los espacios $L^p(X)$ y $\mathscr{C}(X)$ serán de funciones definidas en subconjuntos X de la recta real y con llegada en el cuerpo de los números complejos.

Resulta esencial contar con una base de Teoría de la Medida y Análisis Funcional, ya que la completitud en los espacios que abordaremos se expresará comúnmente en términos de los funcionales lineales y continuos de dichos espacios. Por otra parte, se tiene que la completitud de los sistemas de exponenciales complejas guarda una estrecha relación con los ceros de determinadas funciones enteras, vínculo que utilizaremos como punto de apoyo para deducir tanto condiciones suficientes de completitud como fascinantes propiedades características de este tipo de conjuntos, basándonos en resultados de Variable Compleja. Es por esto que el presente trabajo depende fuertemente de la asignatura de tercer curso del grado *Variable Compleja* así como de las asignaturas de cuarto curso *Análisis Real* e *Introducción a los Espacios de Funciones*.

El primer capítulo constituye una introducción a algunos de los resultados de Análisis Real, Análisis Funcional y Variable Compleja en los que se fundamenta la teoría que desarrollamos, con el objeto de que la memoria sea lo más autocontenida posible.

En el segundo capítulo, presentamos la definición de conjunto completo, además de una serie de primeras propiedades que nos serán de utilidad. Posteriormente, estableceremos las relaciones antes mencionadas de los conjuntos completos en L^p y $\mathscr{C}$ con los funcionales lineales y continuos de estos espacios, del mismo modo que hablaremos de su vínculo con los ceros de las funciones enteras y excluiremos, de paso, algunos casos que no trataremos más en adelante.

El objetivo principal de los capítulos tercero y cuarto es revisar algunas condiciones suficientes de completitud: en el tercero, estudiaremos el conocido sistema trigonométrico y un sistema trigonométrico “reducido” consistente en eliminar una parte de los términos del original, mientras que en el cuarto, exploraremos sistemas de exponenciales complejas “cercanos”, en un sentido que precisaremos, al sistema trigonométrico. En la segunda parte del cuarto capítulo, nos centraremos en el caso particular del espacio de Hilbert $L^2[-\pi,\pi]$, en el que el célebre teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec nos permitirá afinar algo más.

La primera parte del último capítulo evidenciará la importancia de los sistemas de exponenciales complejas, así como las propiedades que les confiere su relación con las funciones enteras. En ella, expondremos una serie de importantes propiedades que simplifican notablemente el estudio de la completitud de este tipo de conjuntos, así como justificarán algunas de las consideraciones realizadas en los capítulos anteriores. En la segunda parte, revisaremos si es posible trasladar las ideas del cuarto capítulo a sistemas de exponenciales en algún sentido “próximos” entre sí, y concluiremos con una adenda al teorema de Kadec.

Capítulo 1

Prerrequisitos

El presente capítulo aborda una serie de resultados y conceptos necesarios para el desarrollo de la teoría central del trabajo, a la vez que sirve de introducción a los razonamientos que seguiremos. Para su lectura sólamente son necesarias nociones básicas de Teoría de la Medida y Análisis Funcional, que pueden consultarse en [Rud87] o [Fol99], y de Variable Compleja, para lo cual nuestra referencia principal es [AN07].

Algunos de los enunciados expuestos se suponen familiares al lector y no van acompañados de demostración, dándose en ese caso una referencia precisa a la bibliografía. Otros, por contra, no son materia del grado, y hemos optado por incluir una prueba detallada de los mismos, que enriquece el contenido del documento.

1.1. Resultados de Análisis Real

En lo relativo a Teoría de la Medida, es imprescindible conocer los conceptos de medida —positiva, real y compleja—, espacio medible y función medible, así como sus propiedades más generales; y la definición de integral con respecto de una medida, junto a las generalizaciones de resultados bien conocidos para la integral de Lebesgue. Por otra parte, en materia de Análisis Funcional, solo precisaremos de los aspectos básicos de los espacios vectoriales normados y sus espacios duales, así como del manejo tanto de las propiedades de los operadores lineales y continuos como de las propiedades de los espacios $L^p(X)$ y $\mathscr{C}(X)$.

1.1.1. Una importante consecuencia del teorema de Hahn-Banach

Recordamos un resultado, que se deduce del conocido teorema de Hahn-Banach, en relación con la adherencia de los subconjuntos de un espacio normado. Podemos encontrarlo, por ejemplo, recogido en [Rud87, teo. 5.19, pág. 107], y es materia básica de un curso de Análisis Funcional.

Teorema 1.1. *Sea M un subespacio lineal de un espacio normado X y sea $x_0 \in X$. Entonces $x_0 \in \overline{M}$ si y solo si no existe ningún funcional lineal y continuo no nulo $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ tal que $\Lambda(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

Es inmediato reescribir el teorema anterior en términos de conjuntos densos, enunciado más acorde a nuestros propósitos en el segundo capítulo, sin más que tener en cuenta la definición de densidad:

Teorema 1.2. *Sea M un subespacio lineal de un espacio normado X. Entonces M es denso en X si y solo si no existe ningún funcional lineal y continuo $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ tal que $\Lambda(x) = 0$ para todo $x \in M$ pero $\Lambda \not\equiv 0$.*

1.1.2. La derivada de Radon-Nikodym

Comenzamos dando una definición previa, necesaria para establecer los resultados centrales de este apartado.

Definición 1.3. Sean λ una medida arbitraria —positiva o compleja— y μ una medida positiva en el espacio medible $(X, \mathscr{M})$. Se dice que λ es **absolutamente continua** con respecto a μ, y se escribe $\lambda \ll \mu$, si para cualquier $E \in \mathscr{M}$ tal que $\mu(E) = 0$ se tiene que $\lambda(E) = 0$.

Podemos ahora enunciar el célebre teorema de Radon-Nikodym, resultado fundamental de un curso de Análisis Real, y cuya prueba podemos encontrar en [Rud87, teo. 6.10, pág. 121].

Teorema 1.4 (teorema de Radon-Nikodym)**.** *Sean μ una medida positiva σ-finita y λ una medida compleja en el espacio medible $(X, \mathscr{M})$, de forma que $\lambda \ll \mu$. Entonces existe una única función μ-integrable $h : X \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\lambda(E) = \int_E h \, d\mu \tag{1.1}$$

para cada $E \in \mathscr{M}$. Si λ es una medida positiva y σ-finita, el resultado sigue siendo cierto, con la salvedad de que la función h será medible y positiva, pero no necesariamente integrable.

Definición 1.5. A la función h en (1.1) se la conoce como la **derivada de Radon-Nikodym** de λ con respecto de μ. Es habitual expresarla como $d\lambda = h d\mu$ o en la forma $h = \frac{d\lambda}{d\mu}$.

Utilizaremos en varias ocasiones una interesante propiedad, relativa a la derivada de Radon-Nikodym. Encontramos este resultado en [Fol99, prop . 3.9, pág. 91] para medidas signadas, y puede generalizarse fácilmente a medidas complejas, sin más que tomar partes real e imaginaria, de la siguiente forma:

Proposición 1.6 (regla de la cadena)**.** *Sean λ una medida compleja y μ, ν medidas positivas y σ-finitas en el espacio medible $(X, \mathscr{M})$ tales que $\lambda \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$.*

1. *Si $g \in L^1(\lambda)$, entonces*
$$\int_X g\, d\lambda = \int_X g \frac{d\lambda}{d\nu}\, d\nu.$$
En particular, si $g \in L^1(\lambda)$, entonces $g\frac{d\lambda}{d\nu} \in L^1(\nu)$.

2. *Se verifica que $\lambda \ll \mu$ y*
$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{d\lambda}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}, \quad \mu\text{-c.s.}$$

1.1.3. La caracterización de los funcionales lineales en $L^p(X)$ y $\mathscr{C}_0(X)$

Los dos siguientes teoremas son fundamentales y forman parte de un curso de Análisis Real. Son consecuencia del teorema de Radon-Nikodym, y pueden ser consultados en [Rud87, teo. 6.16, pág. 127] y [Rud87, teo. 6.19, pág. 130], respectivamente. Junto con la anterior consecuencia del teorema de Hahn-Banach, nos permitirán caracterizar los conjuntos completos de los espacios sobre los que trabajaremos más adelante, en términos de la existencia de una función o de una medida no nulas.

Teorema 1.7. *Sean $1 \le p < \infty$, μ una medida σ-finita y positiva en un conjunto X y $\Lambda : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal y continuo. Existe una única función $g \in L^q(\mu)$, donde q es el exponente conjugado de p, tal que*
$$\Lambda(f) = \int_X f g\, d\mu$$

para cada $f \in L^p(\mu)$. *Más aún, se tiene que*

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q.$$

Teorema 1.8 (teorema de representación de Riesz)**.** *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $\Lambda : \mathscr{C}_0(X) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal y continuo. Existe una única medida de Borel compleja regular μ tal que*

$$\Lambda(f) = \int_X f \, d\mu$$

para cada $f \in \mathscr{C}_0(X)$. *Más aún, se tiene que*

$$\|\Lambda\| = |\mu|(X).$$

1.1.4. El teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue

Enunciamos a continuación dos resultados de Análisis Real, en relación con la extensión del conocido teorema fundamental del cálculo a la integral de Lebesgue, recogidos en [Rud87, teo. 7.11, teo. 7.18], y otro en relación con la fórmula de integración por partes, para el que nos referimos a [Bog07, cor. 5.4.3, pág. 343].

Teorema 1.9 (teorema fundamental del Cálculo, primera parte)**.** *Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *y*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

entonces $F'(x) = f(x)$ *c.s.*

Teorema 1.10 (teorema fundamental del Cálculo, segunda parte)**.** *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Son equivalentes:*

1. *f es absolutamente continua en* $[a,b]$.

2. *f es derivable casi seguro en* $[a,b]$, $f' \in L^1[a,b]$ *y*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) \, dt, \quad a \le x \le b.$$

Proposición 1.11 (fórmula de integración por partes)**.** *Sean $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continuas. Entonces*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

1.1.5. Límites superior e inferior de una función

Conviene recordar la definición de límite superior e inferior de una función real de variable real:

Definición 1.12. Sean $U \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no acotado superiormente y $\varphi : U \to \mathbb{R}$. Se definen el **límite inferior** de φ cuando x tiende a ∞ como

$$\liminf_{x\to\infty} \varphi(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} \inf_{\substack{x\geq y\\ x\in U}} \varphi(x) = \lim_{y\to\infty} \inf_{\substack{x\geq y\\ x\in U}} \varphi(x),$$

y el **límite superior** de φ cuando x tiende a ∞ como

$$\limsup_{x\to\infty} \varphi(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{\substack{x\geq y\\ x\in U}} \varphi(x) = \lim_{y\to\infty} \sup_{\substack{x\geq y\\ x\in U}} \varphi(x).$$

A lo largo del trabajo, se recurrirá a la comparación de los límites anteriores con los límites superiores o inferiores de sucesiones adecuadas que simplifiquen el problema. Para ello nos apoyaremos en el siguiente resultado:

Proposición 1.13. *Sean $U \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no acotado superiormente y $\varphi : U \to \mathbb{R}$. Para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de U con $\lim_{x\to\infty} x_n = \infty$ se tiene que*

$$\liminf_{x\to\infty} \varphi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \limsup_{x\to\infty} \varphi(x).$$

Demostración. La desigualdad

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(x_n)$$

es inmediata de las definiciones de límite superior e inferior de una sucesión, y ya conocida.

Veamos que
$$l_1 = \liminf_{x\to\infty} \varphi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) = l_2.$$
Supongamos que no se verifica la desigualdad, esto es, que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $l_1 > \alpha > l_2$. Como
$$l_1 = \lim_{y\to\infty} \inf_{\substack{x\geq y\\ x\in U}} \varphi(x),$$
de la definición de límite se deduce que existe $M > 0$ tal que
$$\inf_{\substack{x\geq y\\ x\in U}} \varphi(x) > \alpha$$
si $y \geq M$, luego se tiene que $\varphi(x) > \alpha$ para todo $x \in U$ con $x \geq M$. Pero entonces, como $x_n \to \infty$ si $n \to \infty$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ si $n \geq m_0$. Por lo tanto, $\inf_{n\geq m} \varphi(x_n) \geq \alpha$ para todo $m \geq m_0$, lo que implica que
$$l_2 = \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{m\to\infty} \inf_{n\geq m} \varphi(x_n) \geq \alpha,$$
y llegamos a una contradicción.

De forma análoga se prueba que
$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \limsup_{x\to\infty} \varphi(x).$$
□

1.2. Resultados de Variable Compleja

Nos centraremos primero en dos resultados: la fórmula de Jensen y la fórmula de Carleman. Ambas forman parte de un curso avanzado de Variable Compleja, fuera del contenido del grado, y serán utilizados en la prueba de dos de los resultados de completitud centrales del trabajo. Posteriormente, calcularemos la suma de los desarrollos en serie de las funciones tangente y cotangente, necesarias en el transcurso del cuarto capítulo.

1.2.1. La fórmula de Jensen

La fórmula de Jensen es un resultado clásico que relaciona el crecimiento de una función holomorfa en el interior de un disco con el módulo de sus ceros dentro de dicho disco. Para la demostración, seguiremos la prueba de [You01].

Comenzamos probando un lema previo, que nos permitirá dar una forma alternativa de la fórmula, más adecuada para nuestros propósitos.

Definición 1.14. Dada una sucesión de números complejos $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, definimos

$$n(r) = \#\{n : |\lambda_n| \leq r\}$$

para cada $r \in [0,\infty)$. Esto es, el número de puntos λ_n en el disco cerrado de centro 0 y radio r.

Si f es holomorfa en $D(0,R)$ y $r < R$, utilizamos la misma notación para referirnos al cardinal del conjunto de ceros de f en $\overline{D}(0,r)$, teniendo en cuenta su multiplicidad.

Lema 1.15. *Sean $r > 0$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tales que*

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq \cdots \leq |\lambda_n| \leq r.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{r}{|\lambda_k|}\right) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt.$$

Demostración. Si $|\lambda_k| \leq t < |\lambda_{k+1}|$, se tiene que $n(t) = k$. Además, si $0 < t < |\lambda_1|$, resulta que $n(t) = 0$, y si $t \geq |\lambda_n|$, obtenemos que $n(t) = n$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{|\lambda_k|}^{|\lambda_{k+1}|} \frac{k}{t}\,dt + \int_{|\lambda_n|}^{r} \frac{n}{t}\,dt \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k(\log|\lambda_{k+1}| - \log|\lambda_k|)\right) + n(\log r - \log|\lambda_n|).\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k(\log|\lambda_{k+1}| - \log|\lambda_k|) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\log|\lambda_{k+1}| - \sum_{k=1}^{n-1} k\log|\lambda_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k\log|\lambda_{k+1}| - \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\log|\lambda_{k+1}| \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k\log|\lambda_{k+1}| - \sum_{k=0}^{n-2} k\log|\lambda_{k+1}| - \sum_{k=0}^{n-2} \log|\lambda_{k+1}| \\ &= (n-1)\log|\lambda_n| - \sum_{k=1}^{n-1} \log|\lambda_k|,\end{aligned}$$

luego

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt = n\log r - \log|\lambda_n| - \sum_{k=1}^{n-1}\log|\lambda_k| = n\log r - \sum_{k=1}^{n}\log|\lambda_k| = \sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{r}{|\lambda_k|}\right),$$

y queda probado el resultado. □

Teorema 1.16 (fórmula de Jensen)**.** *Sean $R>0$, f holomorfa en $D(0,R)$ y supongamos que $f(0)\neq 0$. Si $z_1, z_2, \dots, z_n$ son los ceros de f en $\overline{D}(0,r)$, para $0<r<R$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta = \log|f(0)| + \sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{r}{|z_k|}\right)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta = \log|f(0)| + \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt.$$

Demostración. El resultado es inmediato si f no tiene ceros en $\overline{D}(0,r)$, pues entonces, fijada una determinación del logaritmo, la función f tiene un logaritmo analítico en $D(0,r)$ —véase [AN07, teo. 3.1.9]—, esto es, existe g holomorfa en $D(0,r)$ tal que

$$e^{g(z)} = f(z), \quad z\in D(0,r).$$

Al tomar módulos, teniendo en cuenta que $\left|e^{g(z)}\right| = e^{\operatorname{Re} g(z)}$, llegamos a que $\operatorname{Re} g = \log|f|$ es armónica en $D(0,r)$, y la fórmula se reduce a la propiedad del valor medio en el origen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta = \log|f(0)|. \tag{1.2}$$

Supongamos ahora que $|z_k| = r$ para todo $1\le k\le n$, y pongamos $z_k = re^{i\theta_k}$, donde $\theta_k \in [0,2\pi)$. Definimos

$$g(z) = f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{z_k}{z_k - z}, \quad z\in D(0,R).$$

Entonces g es holomorfa en $D(0,R)$ y no se anula en $\overline{D}(0,r)$. Podemos, por tanto, aplicar la fórmula (1.2) a g. Como $g(0) = f(0)$ y

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|g(re^{i\theta})\right|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\log\left|f(re^{i\theta})\right| + \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{e^{i\theta_k}}{e^{i\theta_k}-e^{i\theta}}\right|\right)d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\log\left|f(re^{i\theta})\right| + \sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{1}{1-e^{i(\theta-\theta_k)}}\right|\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\log\left|f(re^{i\theta})\right| - \sum_{k=1}^{n}\log\left|1-e^{i(\theta-\theta_k)}\right|\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi}\log\left|1-e^{i(\theta-\theta_k)}\right| d\theta,
\end{aligned}
$$

obtenemos que

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta = \log|f(0)| + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi}\log\left|1-e^{i(\theta-\theta_k)}\right| d\theta. \tag{1.3}
$$

Notemos que, por la periodicidad de la exponencial,

$$
\int_0^{2\pi}\log\left|1-e^{i(\theta-\theta_k)}\right| d\theta = \int_0^{2\pi}\log\left|1-e^{i\theta}\right| d\theta, \quad 1 \le k \le n,
$$

y que, por la identidad trigonométrica fundamental y las fórmulas del ángulo mitad,

$$
\left|1-e^{i\theta}\right|^2 = 2(1-\cos\theta) = 4\,\mathrm{sen}^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right),
$$

de donde se sigue que

$$
\int_0^{2\pi}\log\left|1-e^{i\theta}\right| d\theta = 2\pi\log 2 + \int_0^{2\pi}\log\left(\mathrm{sen}\,\tfrac{\theta}{2}\right) d\theta = 2\pi\log 2 + 2\int_0^{\pi}\log(\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta = 0
$$

—el cálculo de la última integral puede ser consultado en [GST03, ej. 9.10, pág. 337]—, luego (1.3) resulta en que

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta = \log|f(0)|,
$$

y se verifica la fórmula, ya que $\log\left(\frac{r}{|z_k|}\right) = \log 1 = 0$.

Resta entonces comprobar el caso general, en el que los ceros de f son arbitrarios dentro del disco $\overline{D}(0,r)$. Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son los ceros de f en $D(0,r)$, se define

$$
F(z) = f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2-\overline{z_k}z}{r(z-z_k)}, \quad z \in D(0,R).
$$

Entonces F es holomorfa en $D(0,R)$ y no tiene ceros en $D(0,r)$ —pero sí puede tenerlos en $S(0,r)$—. Por lo tanto, F está en alguno de los dos casos anteriores, y se verifica que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|F(re^{i\theta})\right|d\theta = \log|F(0)| &= \log\left(|f(0)|\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{r}{|z_k|}\right)\right)\\ &= \log|f(0)| + \sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{r}{|z_k|}\right).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Observamos que, para cada $1 \le k \le n$, la función

$$z \mapsto \frac{r^2 - \overline{z_k}z}{r(z - z_k)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_k\}$$

es una homografía que lleva $S(0,r)$ en $S(0,1)$, pues

$$\frac{\left|r^2 - \overline{z_k}re^{i\theta}\right|}{\left|r(re^{i\theta} - z_k)\right|} = \frac{\left|r - \overline{z_k}e^{i\theta}\right|}{\left|re^{i\theta} - z_k\right|} = \frac{\left|r - \overline{z_k}e^{i\theta}\right|}{\left|r - z_k e^{-i\theta}\right|\left|e^{i\theta}\right|} = \frac{\left|r - \overline{z_k}e^{i\theta}\right|}{\left|r - z_k e^{-i\theta}\right|} = 1.$$

De esta manera, $\left|F(re^{i\theta})\right| = \left|f(re^{i\theta})\right|$, y (1.4) resulta ser la fórmula buscada. □

Definición 1.17. Dada una sucesión de números complejos $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, definimos

$$N(r) = \int_1^r \frac{n(t)}{t}\,dt$$

para cada $r \in [1,\infty)$.

Podemos ahora, con la terminología anterior, establecer un corolario de la fórmula de Jensen que será realmente el resultado que emplearemos más adelante.

Corolario 1.18. *Sean $R > 0$ y f holomorfa en $D(0,R)$. Se tiene que, si $1 < r < R$,*

$$N(r) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta + M,$$

para cierto $M > 0$.

Demostración. Sean

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

el desarrollo en serie de potencias de f en $D(0,R)$, y $a_m z^m$ el primer término no nulo de dicho desarrollo —f presenta un cero de orden m en $z = 0$—. Consideremos, para

$1 < r < R$,

$$g(z) = f(z)\left(\frac{r}{z}\right)^m.$$

Entonces, g es holomorfa en $D(0,R)$, $g(0) = a_m r^m \neq 0$ y tiene los mismos ceros no nulos que f.

Denotemos por $n(r)$ y $n_g(r)$ al número de ceros de f y g, respectivamente, en $\overline{D}(0,r)$. Si aplicamos ahora la fórmula de Jensen a g, obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|g(re^{i\theta})\right| d\theta = \log|g(0)| + \int_0^r \frac{n_g(t)}{t}\,dt.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_1^r \frac{n_g(t)}{t}\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \log|a_m r^m| - \int_0^1 \frac{n_g(t)}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \log|a_m| - m\log r - \int_0^1 \frac{n_g(t)}{t}\,dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \log|a_m| - m\log r.
\end{aligned}$$

Como para cada $t \geq 0$ se tiene que $n_g(t) = n(t) - m$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_1^r \frac{n(t)}{t}\,dt &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \log|a_m| - m\log r + m\int_1^r \frac{1}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \log|a_m| \\
&< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + M,
\end{aligned}$$

para cierto $M > 0$. □

1.2.2. La fórmula de Carleman

Nos remitimos a [You01, teo. 13, pág. 87] para la demostración de este resultado, que será utilizado sólamente una vez a lo largo del presente trabajo, y cuya demostración se aleja del objetivo del mismo. De modo similar a la fórmula de Jensen, relaciona el módulo de los ceros de una función holomorfa con su crecimiento, pero con la información adicional del crecimiento de la misma a lo largo de la recta real.

Teorema 1.19 (fórmula de Carleman)**.** *Sea f una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ y sean $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, $1 \leq k \leq n$, sus ceros en la región*

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0,\ 1 \leq |z| \leq R\}.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R^2} \right) \operatorname{sen} \theta_k = \frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} \log \left| f(Re^{i\theta}) \right| \operatorname{sen} \theta \, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_1^R \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log |f(r) f(-r)| \, dr + \xi(R),$$

donde $\xi(R)$ es una función acotada de R.

1.2.3. Sumación de series por el teorema de los residuos

Recordamos un conocido resultado, derivado del teorema de los residuos, por el cual podemos obtener la suma de ciertas series. Puede encontrarse, por ejemplo, en [MH99, teo. 4.4.1, pág. 305], y nos permitirá calcular la suma de dos desarrollos en serie involucrados en la prueba del teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec.

Proposición 1.20. *Sea f holomorfa en $\mathbb{C}$, salvo por un número finito de singularidades, y tal que*

$$\lim_{|z| \to \infty} z f(z) = 0.$$

Entonces, si $S(f)$ es el conjunto de singularidades de f,

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \notin S(f)}}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{a \in S(f)} \operatorname{Res}\left(f(z) \operatorname{cotg} \pi z, a\right).$$

A partir del resultado anterior, calculamos la suma de las series que nos interesan.

Proposición 1.21. *Para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ se tiene que*

$$\frac{1}{\pi a} - \operatorname{cotg} \pi a = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}.$$

Si $a \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\tan \pi a = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - a^2}.$$

Demostración. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - a^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a, -a\},$$

que tiene dos polos de orden 1 en $z = a$ y $z = -a$. Tenemos que

$$\operatorname{Res}(f(z)\operatorname{cotg}\pi z, a) = \lim_{z\to a} \frac{z-a}{z^2-a^2}\operatorname{cotg}\pi z = \lim_{z\to a}\frac{1}{z+a}\operatorname{cotg}\pi z = \frac{1}{2a}\operatorname{cotg}\pi a$$

y, análogamente,

$$\operatorname{Res}(f(z)\operatorname{cotg}\pi z, -a) = \lim_{z\to -a} \frac{z+a}{z^2-a^2}\operatorname{cotg}(\pi z) = \frac{1}{2a}\operatorname{cotg}\pi a.$$

De la proposición 1.20 se sigue que

$$-\frac{\pi}{a}\operatorname{cotg}\pi a = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2} = -\frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}$$

o, equivalentemente, que

$$\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2} = \frac{1}{\pi a} - \operatorname{cotg}\pi a.$$

Para lo segundo, consideramos la función

$$f(z) = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 - a^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{a+\tfrac{1}{2}, -a+\tfrac{1}{2}\right\},$$

con polos simples en $z = a + \frac{1}{2}$ y $z = -a + \frac{1}{2}$. De forma análoga a lo anterior, tenemos que

$$\operatorname{Res}\left(f(z)\operatorname{cotg}\pi z, a+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2a}\operatorname{cotg}\left(\pi a + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

y que

$$\operatorname{Res}\left(f(z)\operatorname{cotg}\pi z, -a+\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2a}\operatorname{cotg}\left(-\pi a + \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Si ahora tenemos en cuenta la paridad del seno y el coseno, y las relaciones trigonométricas $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(\pi + x) = -\cos x$, podemos escribir

$$\operatorname{cotg}\left(\pi a+\tfrac{\pi}{2}\right)=-\tan\pi a \quad \text{y} \quad \operatorname{cotg}\left(-\pi a+\tfrac{\pi}{2}\right)=\tan\pi a.$$

Notamos que el polinomio $P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ cumple que

$$P(-x+1)=\left((-x+1)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=P(x)$$

para cada $x\geq 0$. Atendiendo esto, llegamos a que

$$\frac{\pi}{a}\tan\pi a=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-a^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-a^2}$$

o, equivalentemente, que

$$\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-a^2}=\tan\pi a. \qquad \square$$

Capítulo 2

Conjuntos completos

Es bien conocido que, dados un espacio de Hilbert H y un sistema ortonormal y completo $\{e_j\}_{j\in J}$ del mismo, cada elemento $x \in H$ admite una única representación, proporcionada por el producto interno de H, en la forma

$$x = \sum_{j\in J} \langle x, e_j \rangle \, e_j, \tag{2.1}$$

entendiéndose que la familia $\{\langle x, e_j\rangle \, e_j\}_{j\in J}$ es sumable hacia $x \in H$. En el caso en que el conjunto $\{e_j\}_{j\in J}$ sea un sistema ortonormal, la condición (2.1) es equivalente a que el subespacio lineal generado por los elementos del sistema sea denso en H.

En ocasiones, cuando no disponemos de una estructura tan rica sobre un espacio normado, como puede ser la de espacio de Hilbert, o bien cuando no necesitamos de ella, es interesante relajar la condición de base ortonormal y restringirnos a una más general: la de conjunto completo. Motivados por lo anterior, nuestro interés recae en la búsqueda de condiciones suficientes bajo las cuales el subespacio lineal generado por una familia de elementos $\{x_j\}_{j\in J}$ de un espacio normado X es denso en el mismo. En otras palabras, trataremos de encontrar subconjuntos $\{x_j\}_{j\in J}$ tales que sus combinaciones lineales finitas sean una buena aproximación de los elementos de X, en el sentido de que para cada $x \in X$ la cantidad

$$\left\| x - \left(c_1 x_{j_1} + c_2 x_{j_2} + \cdots + c_n x_{j_n}\right) \right\|$$

sea arbitrariamente pequeña y escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ y vectores $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n}$ adecuados que, a priori, no sabremos calcular.

2.1. Definiciones y primeros resultados

Antes de comenzar con el objeto central de nuestro análisis, los conjuntos de exponenciales complejas, nos detendremos a realizar algunas observaciones de carácter más general sobre los conjuntos completos. En la línea de la discusión anterior, introducimos las siguientes definiciones.

Definición 2.1. Diremos que un conjunto de elementos $\{x_j\}_{j\in J}$ de un espacio normado X es **completo** si el subespacio lineal generado por este es denso en dicho espacio. Esto es, si para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe una combinación lineal finita $c_1 x_{j_1} + c_2 x_{j_2} + \cdots + c_k x_{j_k}$ tal que

$$\left\| x - \left(c_1 x_{j_1} + c_2 x_{j_2} + \cdots + c_k x_{j_k}\right)\right\| < \varepsilon.$$

Diremos que dicho conjunto es **incompleto** si no es completo.

Ejemplo 2.2. Una **base ortonormal** en un espacio de Hilbert es un sistema completo.

Ejemplo 2.3. Sea $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto compacto. En virtud del teorema de aproximación polinomial de Weierstrass, el sistema $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ es completo en el espacio $\mathscr{C}(K)$, pues el conjunto de los polinomios está contenido en $\langle\{z^n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}\rangle$, donde $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ es el conjunto de los números enteros no negativos.

Definición 2.4. Se dice que un conjunto de elementos $\{x_j\}_{j\in J}$ de un espacio normado X es **exacto** en X si es completo, pero deja de serlo al eliminar cualquiera de sus términos.

Ejemplo 2.5. Una **base ortonormal** en un espacio de Hilbert es un sistema exacto.

A partir de la definición podemos inferir unas primeras propiedades, que nos permitirán obtener la completitud de algunos conjuntos por medio de los ya conocidos. Como puede intuirse, es suficiente que un sistema sea completo en un denso del espacio normado para tener la completitud en todo el espacio.

Proposición 2.6. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo tal que $T(X)$ es un subconjunto denso de Y. Si el sistema $\{x_j\}_{j\in J}$ es completo en X, entonces el sistema $\{T(x_j)\}_{j\in J}$ es completo en Y.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Si $T(X)$ es denso en Y, dado $y \in Y$ existe $x \in X$ de suerte que

$$\|y - T(x)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora bien, si el sistema $\{x_j\}_{j\in J}$ es completo en X, existen $j_1, j_2, \dots, j_n \in J$ y $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2\|T\|}.$$

Al aplicar la desigualdad triangular, si tenemos en cuenta que T es lineal y continuo, se deduce que

$$\begin{aligned}\left\| y - \sum_{k=1}^{n} c_k T(x_k) \right\|_Y &\le \|y - T(x)\|_Y + \left\| T(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k T(x_k) \right\|_Y \\ &\le \|y - T(x)\|_Y + \|T\| \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|_X < \varepsilon,\end{aligned}$$

y se concluye que el sistema $\{T(x_j)\}_{j\in J}$ es completo en Y. □

Corolario 2.7. *Sean X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ un operador lineal, continuo y sobreyectivo, y $\{x_j\}_{j\in J}$ un conjunto completo de X. Entonces $\{T(x_j)\}_{j\in J}$ es un conjunto completo de Y.*

Demostración. Basta tener en cuenta que $T(X) = Y$ y aplicar la proposición 2.6. □

En particular, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.8. *Sean X, Y espacios de Banach, $T : X \to Y$ un operador lineal, continuo y biyectivo. Entonces $\{x_j\}_{j\in J}$ es completo en X si y solo si $\{T(x_j)\}_{j\in J}$ es completo en Y.*

Demostración. Por el teorema de la aplicación abierta T^{-1} es también lineal, continuo y sobreyectivo. Es suficiente aplicar el corolario 2.7 a T y T^{-1} para concluir. □

Observación 2.9. Por comodidad, enunciaremos los resultados de completitud en un intervalo simétrico, generalmente $[-\pi, \pi]$. En virtud del corolario 2.8, se tienen resultados análogos a los que presentaremos en este texto para intervalos cualesquiera, tras aplicar un cambio de variable adecuado a las funciones del sistema. Más concretamente: si $b > a$, y definimos

$$\begin{aligned}\phi : [a,b] &\longrightarrow [-A, A] \\ t &\longmapsto \left(t - \frac{a+b}{2}\right)\frac{2A}{b-a},\end{aligned}$$

entonces los operadores lineales, continuos y biyectivos

$$\begin{aligned} T : L^p[-A,A] &\longrightarrow L^p[a,b] \\ f &\longmapsto f\circ\phi \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} S : \mathscr{C}[-A,A] &\longrightarrow \mathscr{C}[a,b] \\ f &\longmapsto f\circ\phi \end{aligned}$$

nos permiten “trasladar” dichos resultados al intervalo $[a,b]$.

Por último, es conveniente reformular el teorema 1.2 en términos de completitud para obtener una caracterización clave de los conjuntos completos en un espacio normado, en términos de su dual topológico.

Notación. Llamamos X' al **dual topológico** del espacio normado X.

Teorema 2.10. *Un conjunto de vectores $\{x_j\}_{j\in J}$ de un espacio normado X es completo si y solo si para cada $\Lambda \in X'$ que verifica que $\Lambda(x_j) = 0$ para todo $j \in J$ se tiene que, necesariamente, $\Lambda \equiv 0$.*

Destacamos la importancia del teorema 2.10, pues el hecho de conocer los funcionales lineales y continuos de un espacio normado, como es el caso de los espacios $L^p(X)$ y $\mathscr{C}_0(X)$, nos permitirá deducir la completitud de muchos conjuntos a partir de él.

2.2. Sistemas completos en $L^p(E)$ y $\mathscr{C}(E)$

Centramos nuestra atención ahora en los casos particulares de $L^p(E)$ y $\mathscr{C}(E)$, con $E\subset\mathbb{R}$, que conocemos ampliamente, y sobre los que podemos decir mucho más. Las relaciones de inclusión entre dichos espacios, dadas por la desigualdad de Hölder, y las caracterizaciones de sus duales nos permiten deducir rápidamente interesantes propiedades, sin más que aplicar los resultados ya vistos.

2.2.1. Resultados generales

Es interesante notar que, si $r<p$ y $E\subset\mathbb{R}$ es de medida finita —recuérdese que entonces $L^p(E)\subset L^r(E)$—, una vez sabemos que un sistema es completo en $L^p(E)$, se tiene también la completitud del mismo en $L^r(E)$.

Proposición 2.11. *Sean $E\subset\mathbb{R}$ un conjunto de medida finita y $1\le r<p\le\infty$. Si el sistema $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es completo en $L^p(E)$, entonces también es completo en $L^r(E)$.*

Demostración. Notamos que $L^p(E)$ es denso en $L^r(E)$: si $g \in L^r(E)$ y se define, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n = g\chi_{\{g \le |n|\}}$, entonces $g_n \in L^p(E)$ por ser acotada, y se tiene que

$$\|g - g_n\|_r^r = \int_E |g - g_n|^r = \int_{\{g > |n|\}} |g|^r \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

por el teorema de la convergencia dominada.

Consideremos la inclusión $j : L^p(E) \hookrightarrow L^r(E)$. Claramente, j es lineal. En virtud de la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\|f\|_r \le (m(E))^{\frac{1}{q}} \|f\|_p, \quad f \in L^p(E),$$

si $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ —entendiéndose que $\frac{1}{\infty} = 0$—, de donde se deduce que j es continua. Es suficiente aplicar la proposición 2.6 para concluir. □

De forma similar, si suponemos que E es compacto, se verifica que $\mathscr{C}(E) \subset L^p(E)$, y podemos ver que, entonces, la completitud en $\mathscr{C}(E)$ implica la completitud en $L^p(E)$, para $p \in [1,\infty)$.

Proposición 2.12. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Si el sistema $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es completo en $\mathscr{C}(E)$, entonces también es completo en $L^p(E)$, para $1 \le p < \infty$.*

Demostración. Es suficiente recordar que, si $1 \le p < \infty$, se tiene que $\mathscr{C}_0(E) = \mathscr{C}(E)$ es denso en $L^p(E)$. De nuevo, la desigualdad de Hölder permite deducir que

$$\|f\|_p \le (m(E))^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty, \quad f \in \mathscr{C}(E),$$

de donde se sigue que la inclusión $j : \mathscr{C}(E) \hookrightarrow L^p(E)$ es lineal y continua. Al aplicar la proposición 2.6, se obtiene el resultado. □

2.2.2. La caracterización de la completitud en $L^p(E)$ y $\mathscr{C}(E)$

Como anunciábamos antes, si recordamos la caracterización de los funcionales lineales en $L^p(X)$ y $\mathscr{C}_0(X)$, podemos establecer dos resultados que son casos particulares del teorema 2.10, que caracterizan la completitud en los espacios que nos interesan, y a los que haremos referencia de forma recurrente a lo largo del documento.

Proposición 2.13. *Sean $E \subset \mathbb{R}$ medible y $p \in [1,\infty)$. Un conjunto de funciones $\{f_j\}_{j\in J}$ de $L^p(E)$ es incompleto si y solo si existe $\phi \in L^q(E)$ no nula, con p y q exponentes conjugados, tal que*

$$\int_E \phi(t) f_j(t)\, dt = 0 \tag{2.2}$$

para cada $j \in J$.

Proposición 2.14. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Un conjunto de funciones $\{f_j\}_{j\in J}$ de $\mathscr{C}(E)$ es incompleto si y solo si existe una medida de Borel compleja μ en E, no nula y tal que*

$$\int_E f_j\, d\mu = 0 \tag{2.3}$$

para cada $j \in J$.

2.3. Sistemas de exponenciales complejas

Hablamos por último del conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, donde la sucesión de exponentes es de números complejos, y cuya estrecha relación con los ceros de ciertas funciones holomorfas nos permitirá obtener muchas más propiedades que en el caso de otros conjuntos.

2.3.1. Términos superfluos

En los sistemas de exponenciales complejas, la cuestión de si "sobran" o "faltan" términos para que un conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sea exacto es bastante sencilla pues, como constataremos en el teorema 5.3, el hecho de sustituir un número finito de exponenciales por otras distintas no afecta a la completitud del mismo. Por esta razón, introducimos las siguientes definiciones.

Definición 2.15. Se dice que un conjunto de exponenciales complejas $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tiene **exceso** N en $\mathscr{C}[a,b]$ o $L^p[a,b]$ si el sistema se torna exacto al eliminar N términos. Si, por el contrario, resulta exacto al añadirle N exponenciales complejas, se dice que el sistema tiene **deficiencia** N.

Definición 2.16. En caso de que al eliminar cualquier cantidad finita de términos el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no sea exacto en $\mathscr{C}[a,b]$ o $L^p[a,b]$, se dice que tiene **exceso infinito**. De forma similar, si el sistema sigue sin ser exacto al añadir cualquier cantidad finita de exponenciales complejas, se dice que tiene **deficiencia infinita**.

Observación 2.17. En virtud de la proposición 2.11, se tiene que la deficiencia de un conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en $L^p[a,b]$, $p \in [1,\infty)$, es una función creciente de p pues, si el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es exacto en $L^{p_1}[a,b]$ al añadir N términos, entonces también es completo en $L^{p_2}[a,b]$ al añadir N términos, si $p_2 < p_1$, luego tiene deficiencia a lo sumo N.

2.3.2. Ceros de las funciones definidas por integrales de exponenciales

Es posible decir aún más en lo que a la completitud de los conjuntos de exponenciales complejas se refiere, pues las funciones del tipo

$$f(z) = \int_K \phi(t) e^{izt}\, dt \quad \text{y} \quad g(z) = \int_K e^{izt}\, d\mu, \tag{2.4}$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, resultan ser enteras y, en virtud de las proposiciones 2.13 y 2.14, el problema del estudio de la completitud del sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es equivalente al de estudiar los ceros de funciones holomorfas de la forma (2.4).

La prueba de la afirmación anterior es sencilla y puede llevarse a cabo, por ejemplo, utilizando el teorema de Morera, o mediante una ligera modificación del teorema de holomorfía bajo el signo integral; no obstante, hemos optado por presentar una prueba más elemental, basada en el teorema de la convergencia dominada.

Proposición 2.18. *Sean $K \subset \mathbb{R}$ un subconjunto compacto y μ una medida de Borel compleja no nula. Entonces la función*

$$f(z) = \int_K e^{izt}\, d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C},$$

es entera y no idénticamente nula.

Demostración. Veamos que es entera. Desarrollando la exponencial en serie de potencias tenemos, para cada $z \in \mathbb{C}$ y cada $t \in K$ que

$$f(z) = \int_K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(izt)^k}{k!}\, d\mu(t).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(izt)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|zt|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|zt|^k}{k!} = e^{|zt|}.$$

Como, al ser continua, la función $t \mapsto e^{|zt|}$ es μ-integrable en K para cada $z \in \mathbb{C}$, del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se sigue que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_K \frac{(izt)^k}{k!}\, d\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_K \frac{(it)^k}{k!}\, d\mu(t) \right) z^k.$$

Luego f se puede desarrollar en serie de potencias para todo $z \in \mathbb{C}$ y, en conclusión, es entera.

Para comprobar que f no es idénticamente nula, veamos que el subespacio lineal $\mathscr{A} = \langle e^{nt} : n \in \mathbb{Z} \rangle$ es denso en $\mathscr{C}[a,b]$. Por definición, $\mathscr{A}$ es un espacio vectorial, y es suficiente recordar que $e^{nt}e^{kt} = e^{(n+k)t}$, para todos $n,k \in \mathbb{Z}$, para deducir que es un álgebra de funciones, pues en el producto de dos elementos de $\mathscr{A}$ solo aparecen combinaciones lineales de productos de esta forma.

Por otra parte, está claro que $1 \in \mathscr{A}$ y que, si $g \in \mathscr{A}$, entonces $\overline{g} \in \mathscr{A}$, pues las funciones que generan $\mathscr{A}$ son reales. Basta tener en cuenta que la función exponencial es inyectiva para obtener que, si $n \neq 0$, entonces $e^{nx} \neq e^{ny}$ para todo $x \neq y$, esto es, que $\mathscr{A}$ separa puntos. Del teorema de Stone-Weierstrass se sigue que el sistema $\{e^{nt}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo en $\mathscr{C}(K)$. De este modo, si f fuera idénticamente nula se tendría que

$$f(-in) = \int_K e^{nt}\, d\mu(t) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

y, al aplicar la proposición 2.14, llegaríamos a un absurdo. □

Corolario 2.19. *Sean $p \in [1,\infty]$, $K \subset \mathbb{R}$ un subconjunto compacto y $\phi \in L^p(K)$ una función distinta de cero c.s. Entonces la función*

$$f(z) = \int_K \phi(t) e^{izt}\, dt, \quad z \in \mathbb{C},$$

es entera y no idénticamente nula.

Demostración. Si m es la medida de Lebesgue en K, podemos aplicar el teorema de Radon-Nikodym y la proposición 1.6 a la medida compleja de Borel

$$\mu(E) = \int_E \phi(t)\, dt,$$

definida para cada $E \subset K$ medible, no nula, y que verifica que $\mu \ll m$ y que $\phi = \frac{d\mu}{dm}$. De este modo,

$$f(z) = \int_K \phi(t) e^{izt}\, dt = \int_K e^{izt} \frac{d\mu}{dm}(t)\, dt = \int_K e^{izt}\, d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C}$$

y, en virtud de la proposición anterior, se tiene que f es entera y no nula. □

Con lo anterior, podemos enunciar un primer resultado de completitud para los conjuntos de exponenciales complejas, sin más que recordar el principio de los ceros aislados.

Proposición 2.20. *Sea $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una sucesión de números complejos cuyo rango tiene algún punto de acumulación en $\mathbb{C}$. Entonces el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo tanto en $\mathscr{C}[a,b]$ como en $L^p[a,b]$, con $p \in [1,\infty)$.*

Demostración. Supongamos que $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no fuera completo en $\mathscr{C}[a,b]$. En virtud de la proposición 2.14 existiría una medida de Borel compleja μ en $[a,b]$, no nula y tal que la función

$$f(z) = \int_a^b e^{izt}\, d\mu, , \; z \in \mathbb{C},$$

entera como consecuencia de la proposición 2.18, se anulase en $z = \lambda_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Si el conjunto $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tuviese un punto de acumulación en $\mathbb{C}$, el conjunto de los ceros de f tendría un punto de acumulación. En virtud del principio de los ceros aislados, f debería ser idénticamente nula, lo que obliga a que $\mu \equiv 0$, de nuevo, en virtud de la proposición 2.18, y llegaríamos a una contradicción. Por lo tanto, el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ debe ser completo en $\mathscr{C}[a,b]$. Basta recordar ahora la proposición 2.12 para concluir. □

Ejemplo 2.21. Si la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene rango infinito y es convergente, se tiene que el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ es completo tanto en $\mathscr{C}[a,b]$ como en $L^p[a,b]$, con $p \in [1,\infty)$.

2.3.3. El caso de los ceros de orden mayor que 1

El hecho de haber caracterizado la completitud de los conjuntos de exponenciales complejas por medio de los ceros de funciones enteras nos lleva de forma natural a plantearnos que puedan existir ceros múltiples de dichas funciones. Por supuesto, considerar repeticiones en la sucesión $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ nos conduce a un sistema redundante, sin ninguna información nueva en cuanto a completitud se refiere.

Nos preguntamos entonces cómo debemos interpretar adecuadamente que haya exponentes repetidos. Por simplicidad en la notación, supongamos que solo un elemento, digamos λ_{n_0}, se repite un número entero de veces $m \geq 2$ en la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. En ese caso, las funciones definidas en (2.4) deben tener un cero de orden m en $z = \lambda_{n_0}$. Una aplicación recurrente del teorema de derivación bajo el signo integral nos permite deducir que, si $z = \lambda_{n_0}$ es un cero de orden m de f o de g, entonces también debe ser un cero de las funciones enteras

$$f^{(n)}(z) = i^n \int_K \phi(t) t^n e^{izt}\, dt \quad \text{o} \quad g^{(n)}(z) = i^n \int_K t^n e^{izt}\, d\mu,$$

para todo entero $0 \leq n \leq m-1$. Debemos, por tanto, estudiar la completitud del sistema

$$\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{t^k e^{i\lambda_{n_0} t}\}_{k=1}^{m-1},$$

en virtud de las proposiciones 2.13 y 2.14.

A modo de ejemplo, probaremos la siguiente proposición:

Proposición 2.22. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. El sistema $\{t^n e^{i\lambda t}\}_{n=0}^{\infty}$ es completo tanto en $\mathscr{C}[a,b]$ como en $L^p[a,b]$, $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Supongamos que el sistema no fuera completo en $\mathscr{C}[a,b]$. En virtud de la proposición 2.14 existiría una medida de Borel compleja μ en $[a,b]$, no nula y tal que las derivadas de la función g definida en (2.4),

$$g^{(n)}(z) = i^n \int_a^b t^n e^{izt}\, d\mu, \quad z \in \mathbb{C},$$

se anulasen en $z = \lambda$, para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Pero, entonces, todos los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de g centrado en $z = \lambda$ serían nulos y, por el teorema de unicidad para funciones holomorfas, debería de ser la función idénticamente nula. En virtud de la proposición 2.18, esto obliga a que $\mu \equiv 0$, lo cual es absurdo, y el sistema debe ser completo en $\mathscr{C}[a,b]$. Resta aplicar la proposición 2.12 para concluir la demostración. □

El resultado anterior no debe sorprendernos pues, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, la aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathscr{C}[a,b] &\longrightarrow \mathscr{C}[a,b] \\ f(t) &\longmapsto f(t)e^{i\lambda t} \end{aligned}$$

es lineal, continua y biyectiva —será comprobado en el lema 4.8—, y se tiene que $T(t^n) = t^n e^{i\lambda t}$ para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ —recuérdese el ejemplo 2.3 y el corolario 2.8—.

2.3.4. Consideraciones sobre la sucesión de exponentes

Por sencillez, nos limitamos a dar las indicaciones del apartado 2.3.3 y, a lo largo de nuestro estudio, asumiremos siempre que todos los términos de la sucesión de exponentes $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ son distintos. A su vez, por conveniencia, añadiremos el requisito adicional de que

$$\lim_{|n|\to\infty} |\lambda_n| = \infty$$

pues, de lo contrario, el rango de dicha sucesión tendría un punto de acumulación en $\mathbb{C}$, caso que ya fue revisado en la proposición 2.20.

Concluimos el capítulo con la justificación de la afirmación anterior.

Proposición 2.23. *Sea $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una sucesión de números complejos, todos ellos distintos entre sí. Si el rango de la sucesión no tiene un punto de acumulación en $\mathbb{C}$, entonces*

$$\lim_{|n|\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$

Demostración. Probaremos el contrarrecíproco de este enunciado. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que el límite de $\{|\lambda_n|\}_{n=1}^{\infty}$ no es ∞. Entonces, existe $M > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ con $n_k \geq k$ y tal que

$$\left|\lambda_{n_k}\right| < M. \tag{2.5}$$

De esta forma, podemos construir una subsucesión $\{\lambda_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ acotada que, en virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene una subsucesión $\{\lambda_{n_{k_j}}\}_{n=1}^{\infty}$ convergente. Se deduce que el rango de la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene un punto de acumulación en $\mathbb{C}$, que debe serlo también del rango de $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. $\square$

Capítulo 3

El sistema trigonométrico

Comenzamos con el sistema de exponenciales complejas por excelencia, que resulta de tomar como exponentes el conjunto de los números enteros. Es bien sabido que el sistema $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ constituye un sistema ortonormal y completo en el espacio de Hilbert $L^2[-\pi,\pi]$ con el producto interno

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt,$$

y que juega un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de series de Fourier. Por otra parte, el teorema de aproximación trigonométrica de Weiertstrass, al que haremos referencia más adelante, afirma que el sistema $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ también es completo en el espacio de las funciones continuas y 2π-periódicas $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

3.1. La completitud del sistema trigonométrico

Pese que debería de ser un hecho familiar al lector, deduciremos la completitud del sistema $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en el espacio $L^p[-\pi,\pi]$, en pro de un documento más completo, empleando para ello argumentos como los que ya hemos introducido. Posteriormente, estudiaremos si existen términos superfluos en dicho sistema, de donde se seguirá un importante resultado de completitud en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$.

Definición 3.1. Llamaremos **sistema trigonométrico** al conjunto de funciones definidas en el conjunto de los números reales $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

En primer lugar, presentamos una prueba del teorema de unicidad de series de Fourier, extraída de [You01], que sólamente requiere del teorema de aproximación polinomial de Weierstrass y del teorema fundamental del Cálculo para la integral de Lebesgue y sus consecuencias.

Teorema 3.2 (teorema de unicidad para series de Fourier)**.** *Si* $f \in L^1[-\pi,\pi]$ *verifica que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt = 0, \; n \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

entonces $f = 0$ *c.s.*

Demostración. Supongamos que f cumple (3.1). Pongamos, para $t \in [-\pi,\pi]$,

$$g(t) = \int_{-\pi}^{t} f(u)\,du.$$

De esta forma se tiene, como consecuencia del teorema fundamental del Cálculo, que g es absolutamente continua en $[-\pi,\pi]$, y que $(g(t)-c)' = f(t)$ c.s. para cualquier constante $c \in \mathbb{C}$.

Observamos que $g(\pi) = g(-\pi) = 0$. Ahora, al integrar por partes,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (g(t)-c)e^{int}\,dt = -\frac{i}{n}(g(t)-c)e^{int}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{i}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt = 0 \tag{3.2}$$

si $n \neq 0$. Escojamos $c = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt$, de modo que la integral se anule incluso si $n = 0$, y definamos

$$F(t) = g(t) - c,$$

continua en $[-\pi,\pi]$. Evidentemente $F(-\pi) = -c = F(\pi)$. De este modo, el teorema de aproximación trigonométrica de Weierstrass permite afirmar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

tal que $\|F - P\|_\infty < \varepsilon$.

Notemos que $|F(t)|^2 = \overline{F(t)}F(t)$ y que, por (3.2), para cada $k \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{ikt}\,dt = 0,$$

luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(t)} e^{-ikt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(t)e^{ikt}}\, dt = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{ikt}\, dt} = 0$$

y, entonces,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(t)} P(t)\, dt = 0.$$

Ahora, podemos escribir

$$\|F\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(t)}(F(t) - P(t))\, dt \le \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|\, dt \le \varepsilon\sqrt{2\pi}\, \|F\|_2,$$

donde la última acotación se deduce de la desigualdad de Hölder —nótese que, al ser continua, $F \in L^2[-\pi,\pi]$—. Finalmente, si suponemos $F \neq 0$, esto es, que $\|F\|_2 \neq 0$, podemos dividir en la anterior desigualdad, de donde se sigue que

$$\|F\|_2 \le \varepsilon\sqrt{2\pi}$$

para todo $\varepsilon > 0$, y debe ser $F \equiv 0$ en cualquier caso. De esta manera, se tiene que $g(t) = c$ para cada $t \in [-\pi,\pi]$, luego $f(t) = g'(t) = 0$ para casi todo $t \in [-\pi,\pi]$. □

Es sencillo deducir ahora, por medio de la caracterización que vimos en el anterior capítulo, el resultado que veníamos anunciando:

Teorema 3.3. *El sistema trigonométrico es completo en $L^p[-\pi,\pi]$ para todo $p \in [1,\infty)$.*

Demostración. Supongamos que no es completo. En ese caso, en virtud de la proposición 2.13, existiría una función no nula $\phi \in L^q[-\pi,\pi]$, con p y q exponentes conjugados, y tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{int}\, dt = 0.$$

Ahora bien, $L^q[-\pi,\pi] \subset L^1[-\pi,\pi]$ y, entonces, por el teorema anterior, debe ser $\phi = 0$ c.s., y llegamos así a una contradicción. □

Pese a que $\mathscr{C}[-\pi,\pi] \subset L^p[-\pi,\pi]$ para todo $p \in [1,\infty]$, el sistema trigonométrico no es completo en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, hecho que se deriva del siguiente resultado. En particular, se deduce que el recíproco de la proposición 2.12 es, en general, falso.

Proposición 3.4. *Las únicas funciones $f \in \mathscr{C}[-\pi,\pi]$ que pueden ser aproximadas uniformemente por polinomios trigonométricos son aquellas tales que $f(-\pi) = f(\pi)$.*

Demostración. Supongamos que $f \in \mathscr{C}[-\pi,\pi]$, y que existe una sucesión de polinomios trigonométricos $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente a f. Como los polinomios trigonométricos son periódicos y de período 2π, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P_n(-\pi) = P_n(\pi)$. Ahora bien, como la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, se tiene que

$$f(-\pi) = \lim_{n\to\infty} P_n(-\pi) = \lim_{n\to\infty} P_n(\pi) = f(\pi). \qquad \square$$

3.2. La exactitud del sistema trigonométrico

Veremos que, en analogía con el caso de $L^2[-\pi,\pi]$, en el que forma una base ortonormal, el sistema trigonométrico es exacto en $L^p[-\pi,\pi]$. Por contra, no aproxima las funciones continuas en $[-\pi,\pi]$, pero basta añadir un término adecuado para que sea completo en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$.

Proposición 3.5. *El sistema trigonométrico es exacto en* $L^p[-\pi,\pi]$ *para todo* $p \in [1,\infty)$ *y tiene deficiencia* 1 *en* $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$.

Demostración. Como ya hemos visto, el sistema trigonométrico es completo en $L^p[-\pi,\pi]$ si $p \in [1,\infty)$. Puesto que es un sistema ortogonal en $L^2[-\pi,\pi]$, se tiene que, fijado $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{ikt}\, dt = 0$$

si $k \neq n$. Como las exponenciales complejas son continuas, pertenecen, en particular, a $L^q[-\pi,\pi]$ para cada $q \in [1,\infty]$ y entonces, por la proposición 2.13 se tiene que el sistema $\{e^{ikt}\}_{k=-\infty}^{\infty} \setminus \{e^{int}\}$ no es completo en $L^p[-\pi,\pi]$.

Para la segunda afirmación consideremos $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, y sea $f \in \mathscr{C}[-\pi,\pi]$. Podemos tomar $c \in \mathbb{C}$ adecuado para que la función

$$g(t) = f(t) - ce^{i\lambda t}$$

verifique que $g(\pi) = g(-\pi)$: para que se dé la igualdad debe ser

$$f(\pi) - ce^{i\lambda\pi} = g(\pi) = g(-\pi) = f(-\pi) - ce^{-i\lambda\pi},$$

luego tomando

$$c = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi}}$$

se resuelve el problema. Obsérvese que el denominador no se anula, pues

$$e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi} = 2i \operatorname{sen} \lambda\pi \neq 0$$

si $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

Ahora, como g es continua en $[-\pi, \pi]$, el teorema de aproximación trigonométrica de Weierstrass, nos permite afirmar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico Q tal que

$$\|g - Q\|_\infty < \varepsilon.$$

Poniendo $P(t) = Q(t) + ce^{i\lambda t}$, llegamos a que, para cada $\varepsilon > 0$, existe una combinación lineal $P(t)$, de elementos del sistema

$$\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{e^{i\lambda t}\}$$

tal que

$$\|f - P\|_\infty < \varepsilon.$$

Esto es, que dicho sistema es completo en $\mathscr{C}[-\pi, \pi]$ y, en consecuencia, el sistema trigonométrico tiene deficiencia 1 en $\mathscr{C}[-\pi, \pi]$. □

En el proceso de demostración de la proposición anterior hemos probado también el siguiente resultado:

Teorema 3.6. *Para cada $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, el sistema*

$$\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{e^{i\lambda t}\}$$

es completo en $\mathscr{C}[-\pi, \pi]$.

Nos preguntamos si el sistema trigonométrico puede ser completo en un intervalo de amplitud mayor que 2π, en alguno de los espacios que nos interesan. La respuesta es negativa, como se deduce de la siguiente proposición.

Proposición 3.7. *El sistema trigonométrico es incompleto en $L^p(I)$ para cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con $m(I) > 2\pi$ y $p \in [1, \infty)$.*

Demostración. Asumiremos primero que existe $\varepsilon > 0$ tal que $[-\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon] \subset I$. Definamos

$$\phi(t) = \begin{cases} -1, & -\pi-\varepsilon < t < -\pi+\varepsilon, \\ 1, & \pi-\varepsilon < t < \pi+\varepsilon, \\ 0, & \text{en el resto de casos.} \end{cases}$$

Entonces $\phi \in L^q(I)$ para $q \in [1,\infty]$, por ser continua a trozos y acotada en todo I. Se tiene, si $n \neq 0$, que

$$\begin{aligned} \int_I \phi(t) e^{int}\, dt &= -\int_{-\pi-\varepsilon}^{-\pi+\varepsilon} e^{int}\, dt + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} e^{int}\, dt = \frac{i}{n} e^{int}\Big|_{t=-\pi-\varepsilon}^{t=-\pi+\varepsilon} - \frac{i}{n} e^{int}\Big|_{t=\pi-\varepsilon}^{t=\pi+\varepsilon} \\ &= (-1)^n \frac{i}{n}\left(e^{in\varepsilon} - e^{-in\varepsilon} - e^{in\varepsilon} + e^{-in\varepsilon}\right) = 0. \end{aligned}$$

Y para $n = 0$

$$\int_I \phi(t)\, dt = -\int_{-\pi-\varepsilon}^{-\pi+\varepsilon} 1\, dt + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} 1\, dt = -2\varepsilon + 2\varepsilon = 0.$$

De esta forma,

$$\int_I \phi(t) e^{int}\, dt = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

y, en virtud de la proposición 2.13, el sistema trigonométrico es incompleto en $L^p(I)$.

Sea J un intervalo tal que $[-\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon] \subset J$. Ahora, para un intervalo I cualquiera, con $m(I) > 2\pi$, bastaría realizar un desplazamiento adecuado de la variable t, de la forma $\phi(t) = t + a$, de tal manera que $\phi(I) = J$. De este modo, el operador

$$\begin{aligned} T : L^p(J) &\longrightarrow L^p(I) \\ f &\longmapsto f \circ \phi \end{aligned}$$

es lineal, continuo y biyectivo. Luego, en virtud del corolario 2.8, el sistema

$$\{T(e^{int})\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{e^{in\phi(t)}\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{e^{ina} e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

es incompleto en $L^p(I)$, pero

$$\langle \{e^{ina} e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty} \rangle = \langle \{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty} \rangle$$

y, entonces, el sistema trigonométrico es incompleto en $L^p(I)$. □

Es suficiente tener en cuenta la proposición 3.7 y la negación de la proposición 2.12 para deducir que el sistema trigonométrico tampoco puede ser completo en $\mathscr{C}(I)$, en caso de que I sea un intervalo compacto.

3.3. El conjunto $\{e^{int}\}_{n=1}^{\infty}$

Consideramos ahora el sistema $\{e^{int}\}_{n=1}^{\infty}$, resultante de suprimir los términos correspondientes a los enteros no positivos del sistema trigonométrico. Parece razonable, en vista de lo ya probado, que sea completo en $L^p(I)$ para intervalos I con $m(I) < \pi$; sin embargo, resulta serlo en intervalos de longitud mayor, tanto en $L^p(I)$ como en $\mathscr{C}(I)$.

Comenzamos con la prueba de un teorema que nos permite deducir la completitud de más conjuntos que el que hemos mencionado, y que precisa de la fórmula de Carleman.

Teorema 3.8. *Sea $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos y supongamos que para algún $A > 0$ se verifica que*

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \sum_{\lambda_n < R} \frac{1}{\lambda_n} > \frac{A}{\pi}.$$

Entonces $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ es completo en $\mathscr{C}[-A, A]$.

Demostración. Supongamos que el sistema es incompleto. Entonces, en virtud de la proposición 2.14 y de la proposición 2.18, existiría una medida de Borel compleja μ en $[-A, A]$ no nula y tal que la función entera

$$g(z) = \int_{-A}^{A} e^{izt}\, d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C}$$

se anula en cada λ_n, $n \in \mathbb{N}$, pero no es idénticamente nula. Consideremos ahora, para cada $z \in \mathbb{C}$, la función $f(z) = g\left(ze^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$, entera por ser composición de funciones enteras, y tal que

$$\{\lambda_n e^{i\frac{\pi}{2}}\}_{n=1}^{\infty}$$

forman parte de los ceros de f, todos ellos en la parte positiva del eje imaginario. Aplicaremos la fórmula de Carleman a f.

Escribamos $z = re^{i\theta}$, para $r \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Entonces,

$$izte^{-i\frac{\pi}{2}} = -rt\left(\operatorname{sen}\left(\theta - \tfrac{\pi}{2}\right) - i\cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{2}\right)\right).$$

Como $\left|e^{i\omega}\right| = e^{\operatorname{Re}(\omega)}$ para cada $\omega \in \mathbb{C}$ y la función exponencial es creciente, podemos acotar

$$\begin{aligned} |f(z)| = \left|g(ze^{-i\frac{\pi}{2}})\right| &\leq \int_{-A}^{A} \left|e^{izte^{-i\frac{\pi}{2}}}\right| d|\mu|(t) = \int_{-A}^{A} e^{-rt\operatorname{sen}(\theta-\frac{\pi}{2})}\, d|\mu|(t) \\ &\leq \int_{-A}^{A} e^{Ar|\operatorname{sen}(\theta-\frac{\pi}{2})|}\, d|\mu|(t) \leq Me^{Ar|\cos\theta|}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde se ha utilizado que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$, que la función sen es impar y que $M = |\mu|([-A, A]) > 0$.

Notemos que, si aplicamos la desigualdad anterior y tenemos en cuenta que la función logaritmo es creciente, para cada $R \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} \log\left|f(Re^{i\theta})\right| \operatorname{sen}\theta\, d\theta &\leq \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} \log\left(Me^{AR|\cos\theta|}\right) \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} (AR|\cos\theta| + \log M) \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi R}\left(AR\int_0^{\pi} |\cos\theta|\, d\theta + \log M\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\right) \\ &= \frac{1}{\pi R}(2AR + 2\log M) \\ &= \frac{2}{\pi}A + \frac{2}{\pi}\frac{\log M}{R} \leq \frac{2}{\pi}A + \frac{2}{\pi}\log M \end{aligned}$$

De nuevo, como $|\cos\theta| \leq 1$, de (3.3) podemos deducir que $\left|f(re^{i\theta})\right| \leq Me^{Ar}$, para cada $r > 0$. De esta forma,

$$\log|f(r)f(-r)| = \log|f(r)| + \log|f(-r)| \leq \log Me^{Ar} + \log Me^{Ar} \leq 2\log M + 2Ar$$

y entonces, si $R \geq 1$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_1^R \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)\log|f(r)f(-r)|\, dr \leq \\ &\qquad \leq \frac{\log M}{\pi}\int_1^R \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) dr + \frac{A}{\pi}\int_1^R \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) r\, dr \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\log M}{\pi}\frac{(R-1)^2}{R^2} + \frac{A}{\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^2}-1\right)+\log R\right)\\
&\leq \frac{\log M}{\pi} + \frac{A}{\pi}\log R.
\end{aligned}
$$

Si $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, $1 \leq k \leq n$, son los ceros de f en la región $\{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0,\ 1 \leq |z| \leq R\}$, al aplicar la fórmula de Carleman a f tenemos, para cada $R \geq 1$ —obsérvese que la condición $|z| \leq R$ implica que los sumatorios son de términos positivos—, que

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\leq\lambda_n<R}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{\lambda_n}{R^2}\right) &\leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{r_k}-\frac{r_k}{R^2}\right)\operatorname{sen}\theta_k\\
&= \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}\log\left|f(Re^{i\theta})\right|\operatorname{sen}\theta\, d\theta\\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_1^R\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}\right)\log|f(r)f(-r)|\, dr + \xi(R),
\end{aligned}
$$

donde $\xi(R)$ es una función acotada de R. Ahora, notemos que no puede haber infinitos ceros de f tales que $0 \leq \lambda_n \leq 1$ pues, como $[0, i]$ es compacto, existiría una subsucesión de estos convergente a un punto de $[0, i]$, en contra del principio de los ceros aislados. Por lo tanto,

$$
\sum_{0\leq\lambda_n<1}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{\lambda_n}{R^2}\right)
$$

es una función acotada de R. Podemos entonces escribir

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda_n<R}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{\lambda_n}{R^2}\right) &\leq \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}\log\left|f(Re^{i\theta})\right|\operatorname{sen}\theta\, d\theta\\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_1^R\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}\right)\log|f(r)f(-r)|\, dr + \xi(R),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

donde $\xi(R)$ es una función acotada de R, posiblemente distinta de la anterior. Llevando las cotas obtenidas a (3.4) llegamos a que

$$
\sum_{\lambda_n<R}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{\lambda_n}{R^2}\right) \leq \frac{A}{\pi}\log R + C
$$

para cierta constante $C > 0$. Entonces,

$$
\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{\log R}\sum_{\lambda_n<R}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{\lambda_n}{R^2}\right) \leq \frac{A}{\pi}.
$$

Veamos, para concluir, que

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \sum_{\lambda_n<R} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{R^2}\right) = \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \sum_{\lambda_n<R} \frac{1}{\lambda_n}.$$

Al ser $\frac{\lambda_n}{R^2} > 0$ para cada $R > 0$, el lado izquierdo no puede superar al derecho en la anterior igualdad. Para probar la desigualdad contraria, consideremos $\beta \in (0,1)$. De esta forma, para cada $R > 0$,

$$\sum_{\lambda_n<R} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{R^2}\right) \geq \sum_{\lambda_n<\beta R} \frac{1}{\lambda_n}\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{R^2}\right) > \sum_{\lambda_n<\beta R} \frac{1}{\lambda_n}(1-\beta^2).$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log \beta R} \sum_{\lambda_n<\beta R} \frac{1}{\lambda_n} &< \frac{1}{(1-\beta^2)} \frac{1}{\log \beta R} \sum_{\lambda_n<R} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{R^2}\right) \\ &= \frac{1}{(1-\beta^2)} \frac{1}{1+\frac{\log\beta}{\log R}} \frac{1}{\log R} \sum_{\lambda_n<R} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{R^2}\right)\end{aligned}$$

y, tomando límites superiores,

$$\begin{aligned}\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \sum_{\lambda_n<R} \frac{1}{\lambda_n} &= \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log \beta R} \sum_{\lambda_n<\beta R} \frac{1}{\lambda_n} \\ &\leq \frac{1}{(1-\beta^2)} \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \sum_{\lambda_n<R} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{R^2}\right).\end{aligned}$$

Basta ahora hacer $\beta \to 0^+$ en la última desigualdad para obtener el resultado. Se tiene, por tanto, que

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \sum_{\lambda_n<R} \frac{1}{\lambda_n} = \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \sum_{\lambda_n<R} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{R^2}\right) \leq \frac{A}{\pi},$$

y queda probado el resultado. □

Observación 3.9.

1. En la prueba anterior nada nos garantiza que las sumas converjan cuando $R \to \infty$, y el límite puede no existir. En cambio, los límites superior e inferior siempre existen.

2. Si revisamos la proposición 1.13, deducimos que bastará verificar la desigualdad del teorema anterior para una sucesión adecuada que nos permitirá obtener una condición, en general, más manejable. Habitualmente consideraremos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{\lambda_k<n} \frac{1}{\lambda_k}.$$

En virtud de la observación anterior, estaremos interesados en el siguiente límite:

Lema 3.10. *Se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1.$$

Demostración. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\log n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)-\log n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\log\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1,\end{aligned}$$

puesto que $\left\{\log \frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \sim \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Basta aplicar el criterio de Stolz a $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Podemos deducir ahora un corolario del teorema 3.8, en relación con el sistema $\{e^{int}\}_{n=1}^{\infty}$.

Corolario 3.11. *El sistema* $\{e^{int}\}_{n=1}^{\infty}$ *es completo en* $\mathscr{C}[-A,A]$ *si* $0<A<\pi$.

Demostración. Basta considerar la sucesión de los números naturales. Por la proposición 1.13 y el lema anterior se tiene que

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \sum_{\lambda_n<R} \frac{1}{\lambda_n} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1 > \frac{A}{\pi}.$$ □

Nos planteamos si, existiendo alguna relación entre el sistema $\{e^{int}\}_{n=1}^{\infty}$ y otro sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$, con exponentes positivos no necesariamente naturales, podemos deducir la completitud del último en $\mathscr{C}[-A,A]$. Dada la formulación del teorema 3.8, en términos de una sucesión de exponentes arbitraria, parece razonable deducir dicho resultado a partir de él.

Comenzamos probando un resultado más general que el del lema 3.10:

Lema 3.12. *Si $a > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{\lfloor an \rfloor} \frac{1}{k} = 1.$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{\lfloor an \rfloor} \frac{1}{k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log \lfloor an \rfloor}{\log n} \frac{1}{\log \lfloor an \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor an \rfloor} \frac{1}{k} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\log \lfloor an \rfloor}{\log n} \right) \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log \lfloor an \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor an \rfloor} \frac{1}{k} \right).\end{aligned}$$

Como la función logaritmo es creciente, de la definición de parte entera se deduce que

$$\frac{\log (an-1)}{\log n} \le \frac{\log \lfloor an \rfloor}{\log n} \le \frac{\log an}{\log n}$$

y, como

$$\frac{\log an}{\log n} = \frac{\log a}{\log n} + 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

y $\{\log (an-1)\}_{N=1}^{\infty} \sim \{\log an\}_{n=1}^{\infty}$, debe ser

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \lfloor an \rfloor}{\log n} = 1.$$

En virtud del lema 3.10, se tiene el resultado. □

Podemos ahora establecer el siguiente teorema que compara las sucesiones de exponentes mediante el límite inferior del cociente de sus términos:

Teorema 3.13. *Si $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos tal que*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} > \frac{A}{\pi},$$

entonces el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ es completo en $\mathscr{C}[-A, A]$.

Demostración. Veremos que

$$l_1 = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{\lambda_k < n} \frac{1}{\lambda_k} \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = l_2$$

y, por la proposición 1.13 y el teorema 3.8, quedará probado el enunciado.

Supongamos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $l_1 < \alpha < l_2$ —nótese que, necesariamente, $\alpha > 0$—. Pongamos $a_m = \text{ínf}_{n\geq m} \frac{n}{\lambda_n}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Ahora, como

$$\lim_{m\to\infty} a_m = l_2,$$

se deduce que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_m > \alpha$ si $m \geq n_0$. Luego, por definición de ínfimo,

$$\frac{n}{\lambda_n} > \alpha \tag{3.5}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{\lambda_n} > \frac{\alpha}{n}$$

para todo $n \geq n_0$.

Podemos escribir ahora, para cada $n \geq n_0$,

$$\sum_{\lambda_k<n} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{\substack{\lambda_k<n\\ k\geq n_0}} \frac{1}{\lambda_k} + \sum_{\substack{\lambda_k<n\\ k<n_0}} \frac{1}{\lambda_k} \geq \sum_{\substack{\lambda_k<n\\ k\geq n_0}} \frac{1}{\lambda_k} \geq \alpha \sum_{\substack{\lambda_k<n\\ k\geq n_0}} \frac{1}{k}$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{\log n} \sum_{\lambda_k<n} \frac{1}{\lambda_k} \geq \alpha \frac{1}{\log n} \sum_{\substack{\lambda_k<n\\ k\geq n_0}} \frac{1}{k}. \tag{3.6}$$

Notemos que la condición (3.5) implica que

$$\alpha\lambda_k < k \leq n$$

si $n_0 \leq k \leq n$, de donde se deduce que

$$\alpha\lambda_k < k \leq \lfloor \alpha n \rfloor \leq \alpha n$$

si $n_0 \leq k \leq \lfloor \alpha n \rfloor$. Esto último nos lleva a que

$$\lambda_k < n, \quad \text{si} \quad n_0 \leq k \leq \lfloor \alpha n \rfloor.$$

Llevando esto a la desigualdad (3.6) obtenemos que

$$\frac{1}{\log n}\sum_{\lambda_k<n}\frac{1}{\lambda_k}\geq \alpha\frac{1}{\log n}\sum_{\substack{\lambda_k<n\\ k\geq n_0}}\frac{1}{k}\geq \alpha\frac{1}{\log n}\sum_{k=n_0}^{\lfloor \alpha n\rfloor}\frac{1}{k}.$$

Tomando límites cuando $n\to\infty$ y teniendo en cuenta el lema 3.12 llegamos a que $l_1\geq\alpha$, en contra de lo que habíamos supuesto. □

Capítulo 4

Exponenciales cercanas al sistema trigonométrico

A la vista de las propiedades de completitud obtenidas en el anterior capítulo, parece oportuno plantearnos si, dada algún tipo de relación de "proximidad" entre un sistema de exponenciales complejas $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ y el sistema trigonométrico, se mantienen las propiedades de completitud. Estaremos interesados en perturbaciones λ_n de los enteros n tales que las cantidades $|\lambda_n| - |n|$, o bien $|\lambda_n - n|$, sean suficientemente pequeñas para garantizar la completitud del sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en $L^p[-\pi,\pi]$.

Comenzamos presentando una serie de resultados generales en los espacios $L^p[-\pi,\pi]$ y, posteriormente, revisaremos el caso particular del espacio $L^2[-\pi,\pi]$, en el que el teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec nos permitirá afinar un poco más, al disponer de un producto interno.

4.1. La estabilidad del sistema trigonométrico en $L^p[-\pi,\pi]$

Nuestro objetivo será demostrar que, si $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos tales que

$$|\lambda_n| \leq |n| + \frac{1}{2p}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

entonces el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo en $L^p[-\pi,\pi]$, para $p \in (1,\infty)$. La prueba de este resultado se debe a Norman Levinson —véase [Lev40, cap. 1]—, y en ella están involucrados varios teoremas.

La fórmula de Jensen juega un papel fundamental en la prueba del siguiente resultado, que a su vez es la clave para demostrar el enunciado que mencionábamos antes. Se emplearán las notaciones introducidas en el apartado 1.2.1 a lo largo de la sección.

Teorema 4.1. *Sean $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una sucesión de números complejos y $p \in (1,\infty)$. El conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo en $L^p[-\pi,\pi]$ si*

$$\limsup_{r\to\infty}\left(N(r) - 2r + \frac{1}{p}\log r\right) > -\infty.$$

Demostración. Supongamos que el sistema no es completo. Si q es el exponente conjugado de p, en virtud de la proposición 2.13 y el corolario 2.19, existe $\phi \in L^q[-\pi,\pi]$ tal que la función entera

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{izt}\, dt$$

verifica que $f(\lambda_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, pero no es idénticamente nula. Supongamos que $\|\phi\|_q \le 1$ —en caso contrario, bastaría tomar $\frac{\phi}{\|\phi\|_q}$, que cumple también con lo anterior—, y sea $0 < \varepsilon < \pi$. Si escribimos $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$|f(z)| \le \int_{|t|<\pi-\varepsilon} |\phi(t)|\, e^{-yt}\, dt + \int_{\pi-\varepsilon\le|t|\le\pi} |\phi(t)|\, e^{-yt}\, dt. \tag{4.1}$$

Al aplicar la desigualdad de Hölder y, puesto que la función exponencial es creciente y toma valores estrictamente positivos, como $p > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{|t|<\pi-\varepsilon} |\phi(t)|\, e^{-yt}\, dt &\le \left(\int_{|t|<\pi-\varepsilon} |\phi(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{|t|<\pi-\varepsilon} e^{-ytp}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \|\phi\|_q \left(\int_{|t|<\pi-\varepsilon} e^{|y|tp}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{|t|<\pi-\varepsilon} e^{|y|tp}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{e^{|y|tp}}{|y|\,p}\Big|_{t=-\pi+\varepsilon}^{t=\pi-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{e^{|y|(\pi-\varepsilon)p}}{|y|\,p}\right)^{\frac{1}{p}} \le e^{|y|(\pi-\varepsilon)}\,|y|^{-\frac{1}{p}}, \quad y \ne 0.
\end{aligned}$$

De forma similar,

$$\begin{aligned}
\int_{\pi-\varepsilon\le|t|\le\pi} |\phi(t)|\, e^{-yt}\, dt &\le \left(\int_{\pi-\varepsilon\le|t|\le\pi} |\phi(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\pi-\varepsilon\le|t|\le\pi} e^{-ytp}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \lambda(\varepsilon)\left(\int_{|t|\le\pi} e^{|y|tp}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda(\varepsilon)\left(\frac{e^{|y|tp}}{|y|\,p}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\leq \lambda(\varepsilon)\left(\frac{e^{|y|\pi p}}{|y|\,p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda(\varepsilon)e^{|y|\pi}\,|y|^{-\frac{1}{p}}, \quad y \neq 0,$$

donde

$$\lambda(\varepsilon) = \left(\int_{\pi-\varepsilon\leq|t|\leq\pi} |\phi(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0.$$

De este modo,

$$|f(z)| \leq e^{|y|\pi}\,|y|^{-\frac{1}{p}}\left(e^{-|y|\varepsilon}+\lambda(\varepsilon)\right)$$

y, si $z = re^{i\theta}$, como $y = r\operatorname{sen}\theta$, resulta que

$$|f(z)| \leq e^{r|\operatorname{sen}\theta|\pi}\,r^{-\frac{1}{p}}\,|\operatorname{sen}\theta|^{-\frac{1}{p}}\left(e^{-r|\operatorname{sen}\theta|\varepsilon}+\lambda(\varepsilon)\right), \quad \operatorname{sen}\theta \neq 0.$$

Si aplicamos el corolario 1.18 a f, se tiene que

$$N(r) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta + C,$$

para cierto $C > 0$ y, teniendo en cuenta la cota anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
N(r) &< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(e^{r|\operatorname{sen}\theta|\pi}\,r^{-\frac{1}{p}}\,|\operatorname{sen}\theta|^{-\frac{1}{p}}\left(e^{-r|\operatorname{sen}\theta|\varepsilon}+\lambda(\varepsilon)\right)\right)d\theta + C\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\pi r\int_0^{2\pi}|\operatorname{sen}\theta|\,d\theta - \frac{1}{p}\log r\int_0^{2\pi}1\,d\theta - \frac{1}{p}\int_0^{2\pi}\log|\operatorname{sen}\theta|\,d\theta\right.\\
&\qquad\left. + \int_0^{2\pi}\log\left(e^{-r|\operatorname{sen}\theta|\varepsilon}+\lambda(\varepsilon)\right)d\theta\right) + C\\
&= 2r - \frac{1}{p}\log r + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(e^{-\varepsilon r|\operatorname{sen}\theta|}+\lambda(\varepsilon)\right)d\theta - \frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi}\log|\operatorname{sen}\theta|\,d\theta + C,
\end{aligned}$$

luego

$$N(r) - 2r + \frac{1}{p}\log r < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(e^{-\varepsilon r|\operatorname{sen}\theta|}+\lambda(\varepsilon)\right)d\theta + C^*, \tag{4.2}$$

para cierto $C^* > 0$, pues $\theta \mapsto \log|\operatorname{sen}\theta|$ es integrable en $[0,2\pi]$.

Sea $M > 0$. Notemos que, como $\lambda(\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0^+$, existe $\delta > 0$, con $\delta < \pi$, tal que si $\varepsilon < \delta$, entonces

$$\lambda(\varepsilon) < \frac{1}{2}e^{-M}.$$

Consideremos un ε fijo tal que $0<\varepsilon<\delta\le\pi$. Se tiene que, si $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$, entonces

$$|\operatorname{sen}\theta|\ge \operatorname{sen}\gamma,\quad \theta\in[\gamma,\pi-\gamma]\cup[\pi+\gamma,2\pi-\gamma].$$

De esta forma, $0<e^{-\varepsilon r|\operatorname{sen}\theta|}\le e^{-\varepsilon r\operatorname{sen}\gamma}\to 0$ cuando $r\to\infty$, luego existe $K>0$ —que depende de γ y de ε— tal que si $r>K$, entonces

$$e^{-\varepsilon r|\operatorname{sen}\theta|}<\frac{1}{2}e^{-M}$$

para cada $\theta\in[\gamma,\pi-\gamma]\cup[\pi+\gamma,2\pi-\gamma]$.

Pongamos $\Omega_\gamma=[\gamma,\pi-\gamma]\cup[\pi+\gamma,2\pi-\gamma]$. Observamos que, para todos $\varepsilon>0$ y $\theta\in\mathbb{R}$, se tiene que $\log\left(e^{-\varepsilon r|\operatorname{sen}\theta|}+\lambda(\varepsilon)\right)\le\log(1+\|\phi\|_q)$. Por lo tanto, fijemos $\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ tal que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]\setminus\Omega_\gamma}\log\left(e^{-\varepsilon r|\operatorname{sen}\theta|}+\lambda(\varepsilon)\right)d\theta\le\frac{2}{\pi}\gamma\log\left(1+\|\phi\|_q\right)\le 1,$$

y notemos que

$$\frac{m(\Omega_\gamma)}{2\pi}=\frac{2\pi-4\gamma}{2\pi}>\frac{2\pi-\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}.$$

Como el logaritmo es creciente, al llevar las cotas anteriores a (4.2) obtenemos que

$$\begin{aligned}N(r)-2r+\frac{1}{p}\log r&<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left(e^{-\varepsilon r|\operatorname{sen}\theta|}+\lambda(\varepsilon)\right)d\theta+C^*\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_\gamma}\log\left(e^{-\varepsilon r|\operatorname{sen}\theta|}+\lambda(\varepsilon)\right)d\theta\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]\setminus\Omega_\gamma}\log\left(e^{-\varepsilon r|\operatorname{sen}\theta|}+\lambda(\varepsilon)\right)d\theta+C^*\\&\le -M\frac{2\pi-4\gamma}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]\setminus\Omega_\gamma}\log\left(e^{-\varepsilon r|\operatorname{sen}\theta|}+\lambda(\varepsilon)\right)d\theta+C^*\\&\le-\frac{1}{2}M+1+C^*\end{aligned}$$

para $r>K$. Como M es arbitrario y positivo, debe ser

$$\limsup_{r\to\infty}\left(N(r)-2r+\frac{1}{p}\log r\right)=-\infty,$$

en contra de la hipótesis. □

El siguiente lema nos proporcionará cotas adecuadas para las cantidades $N(r)$ del teorema 4.1, necesarias en la prueba del próximo teorema.

Lema 4.2. *Sea $a > -\frac{3}{2}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\int_n^{n+1} \frac{x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}}{x+a}\, dx < 0.$$

Demostración. Notamos que la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, es periódica con período 1. Por otro lado, si $x \in (n, n+\frac{1}{2})$, donde $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $2n - x \in (n - \frac{1}{2}, n)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} -f(x) &= -x + \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} = -x + n + \frac{1}{2} = 2n - x - (n-1) - \frac{1}{2} \\ &= 2n - x - \lfloor 2n - x \rfloor - \frac{1}{2} = f(2n-x). \end{aligned} \tag{4.3}$$

En virtud del teorema del cambio de variable, tenemos que

$$\int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x+a}\, dx = \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x+a}\, dx + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \frac{f(x)}{x+a}\, dx = \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x+a}\, dx + \int_{n-1}^{n-\frac{1}{2}} \frac{f(2n-x)}{2n-x+a}\, dx.$$

Por la periodicidad de la función,

$$f(2n-x) = f(2n-x-2) = f(2(n-1)-x)$$

y, por (4.3),

$$f(2(n-1)-x) = -f(x), \quad x \in \left(n-1, (n-1)+\tfrac{1}{2}\right) = \left(n-1, n-\tfrac{1}{2}\right).$$

De esta forma,

$$\int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x+a}\, dx = \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x+a}\, dx - \int_{n-1}^{(n-1)+\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{2n-x+a}\, dx.$$

Observamos que, si $x \in [n, n+\frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x) < 0$. Por lo tanto —utilizando, de nuevo, la periodicidad de f—, podemos acotar

$$\int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x+a}\, dx < \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{n+\frac{1}{2}+a}\, dx - \int_{n-1}^{(n-1)+\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{n+\frac{1}{2}+a}\, dx$$

$$= \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{n+\frac{1}{2}+a}\,dx - \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{n+\frac{1}{2}+a}\,dx = 0,$$

y se concluye. □

Teorema 4.3. *Sean $p \in (1,\infty)$, N un entero no negativo y $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una sucesión de números complejos tales que*

$$|\lambda_n| \le |n| + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2p}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Entonces el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tiene deficiencia N en $L^p[-\pi,\pi]$. En particular, se deduce que es suficiente que

$$|\lambda_n| \le |n| + \frac{1}{2p}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

para que el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sea completo en $L^p[-\pi,\pi]$, $1 < p < \infty$.

Demostración. Notemos que la condición (4.4) implica que, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$|\lambda_k| \le |n| + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2p}, \quad |k| \le |n|.$$

Esto es, para cada $n \in \mathbb{Z}$ hay al menos $2|n|+1$ puntos de la sucesión en el disco cerrado $\overline{D}\big(0, |n| + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2p}\big)$. De esta forma, si escribimos $n_1(t) = \#\{n : |\lambda_n| \le t\}$ para cada $t \ge 0$, se tiene que

$$n_1(t) \ge 2|n|+1 \quad \text{si} \quad |n+1| + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2p} > t \ge |n| + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2p},$$

lo que equivale a que

$$n_1(t) \ge 2|n|+1 \quad \text{si} \quad |n+1| > t - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2p} \ge |n|,$$

es decir,

$$n_1(t) \ge 2|n|+1 \quad \text{si} \quad \left\lfloor t - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2p} \right\rfloor = |n|.$$

En particular, para todo $t \ge N+1$, tenemos que

$$n_1(t) \ge 1 + 2\left\lfloor t - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2p} \right\rfloor$$

y, si $a \geq N+1$, entonces

$$\begin{aligned}\int_a^r \frac{n_1(t)}{t}\,dt &\geq 2\int_a^r \frac{\frac{1}{2}+\lfloor t-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}\rfloor}{t}\,dt \qquad (4.6)\\ &= 2\int_a^r \frac{t-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}}{t}\,dt - 2\int_a^r \frac{t-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}-\lfloor t-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}\rfloor-\frac{1}{2}}{t}\,dt\\ &= 2r - N\log r - \frac{1}{p}\log r - 2\int_a^r \frac{t-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}-\lfloor t-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}\rfloor-\frac{1}{2}}{t}\,dt + C,\end{aligned}$$

donde $C = N\log a + \frac{1}{p}\log a - 2a$.

Sean $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_N \in \mathbb{C}$ distintos de todos los elementos de la sucesión $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ y tales que $|\mu_1| < |\mu_2| < \cdots < |\mu_N|$. Si consideramos el sistema

$$\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{e^{i\mu_n t}\}_{n=1}^{N},$$

y ponemos

$$n_2(t) = \#\left(\{n : |\lambda_n| \leq t\} \cup \{n : |\mu_n| \leq t\}\right), \quad t \geq 0,$$

tenemos que $n_2(t) = n_1(t) + N$ para todo $t \geq |\mu_N|$. Así, fijado $a \geq \text{máx}\{|\mu_N|, N+1\}$, la desigualdad (4.6) nos permite escribir

$$\begin{aligned}N_2(r) = \int_1^r \frac{n_2(t)}{t}\,dt > \int_a^r \frac{n_2(t)}{t}\,dt &= \int_a^r \frac{n_1(t)}{t}\,dt + N\log r - N\log a\\ &= 2r - \frac{1}{p}\log r - 2\int_a^r \frac{t-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}-\lfloor t-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}\rfloor-\frac{1}{2}}{t}\,dt + C^*,\end{aligned}$$

con $C^* = \frac{1}{p}\log a - 2a$. En virtud de la proposición 1.13 y el lema 4.2,

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to\infty}\left(N_2(r) - 2r + \frac{1}{p}\log r\right) &\geq \limsup_{r\to\infty}\left(-2\int_a^r \frac{t-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}-\lfloor t-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}\rfloor-\frac{1}{2}}{t}\,dt + C^*\right)\\ &= \limsup_{r\to\infty}\left(-2\int_{a-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}}^{r-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}} \frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}N+\frac{1}{2p}}\,dt + C^*\right)\\ &\geq \limsup_{n\to\infty}\left(-2\int_{a-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}}^{n} \frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}N+\frac{1}{2p}}\,dt + C^*\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2 \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{a-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}}^{n} \frac{t-\lfloor t\rfloor -\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}N+\frac{1}{2p}}\, dt \right) + C^* \\
&= -2 \liminf_{n\to\infty} \left(\sum_{k=\lceil a-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}\rceil}^{n-1} \int_{k}^{k+1} \frac{t-\lfloor t\rfloor -\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}N+\frac{1}{2p}}\, dt \right) - 2M + C^* \\
&\geq -2M + C^*,
\end{aligned}
$$

donde

$$
M = \int_{a-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}}^{\lceil a-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2p}\rceil} \frac{t-\lfloor t\rfloor -\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}N+\frac{1}{2p}}\, dt < \infty.
$$

Al aplicar el teorema 4.1 se concluye que el sistema

$$
\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{e^{i\mu_n t}\}_{n=1}^{N}
$$

es completo en $L^p[-\pi,\pi]$, como queríamos. □

Podemos preguntarnos ahora si las cotas (4.4) son mejorables, en el sentido de que alguna cota más gruesa para el módulo de los elementos de la sucesión de exponentes $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ garantizase la completitud del sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en $L^p[-\pi,\pi]$, al añadirle N términos adicionales. La respuesta, negativa, es el contenido del teorema 4.5.

Lema 4.4. *Sean $t \in [-\pi,\pi]$ y h la función definida en $[-1,1]$ por*

$$
h(r) = 1 + 2r\cos t + r^2.
$$

Entonces h alcanza su mínimo absoluto en $r = -\cos t$, donde

$$
h(-\cos t) = 1 - \cos^2 t = \operatorname{sen}^2 t.
$$

Demostración. Está claro que h es continua, luego el teorema de Weierstrass permite afirmar que alcanza su mínimo absoluto en el intervalo $[-1,1]$. Se tiene que

$$
h'(r) = 2\cos t + 2r = 2(\cos t + r) = 0
$$

si y solo si $r = -\cos t$. Como $h''(-\cos t) = 2 > 0$, tenemos que h presenta un único mínimo relativo en $r = -\cos t$, en el interior del intervalo. Puesto que $(1+\cos t)^2 = 1 + 2\cos t +$

$\cos^2 t \geq 0$, resulta que

$$h(1) = 2 + 2\cos t \geq 1 - \cos^2 t = h(-\cos t)$$

y, como $(1-\cos t)^2 = 1 - 2\cos t + \cos^2 t \geq 0$, se tiene también que

$$h(-1) = 2 - 2\cos t \geq 1 - \cos^2 t = h(-\cos t),$$

y se concluye que h alcanza su mínimo absoluto en $r = -\cos t$. □

Teorema 4.5. *Sean $\varepsilon > 0$ y $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una sucesión de números complejos tales que*

$$|\lambda_n| \leq |n| + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2p} + \varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z},$$

para algún entero no negativo N. Entonces el conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no es necesariamente completo en $L^p[-\pi,\pi]$, $1 < p < \infty$, al añadir N exponenciales $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=1}^{N}$. En particular, para cada $\varepsilon > 0$ existe algún conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ que verifica que

$$|\lambda_n| \leq |n| + \frac{1}{2p} + \varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z},$$

y es incompleto en $L^p[-\pi,\pi]$, $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Dividiremos la prueba en dos partes.

Parte 1: *N es par.*

Consideremos, dado $\varepsilon > 0$,

$$\lambda_n = \begin{cases} n + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2p} + \varepsilon, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2p} - \varepsilon, & n < 0, \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$ —obsérvese que $|\lambda_n| = |n| + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2p} + \varepsilon$ si $n \neq 0$—. Notamos que, al ser N un número par, $\frac{1}{2}N$ es un entero no negativo y, entonces, el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, donde

$$\mu_n = \begin{cases} n + \frac{1}{2p} + \varepsilon, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n - \frac{1}{2p} - \varepsilon, & n < 0, \end{cases}$$

contiene al sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, además de a las N funciones exponenciales

$$e^{i(1+\frac{1}{2p}+\varepsilon)t}, e^{i(2+\frac{1}{2p}+\varepsilon)t}, \dots, e^{i(\frac{1}{2}N+\frac{1}{2p}+\varepsilon)t}, e^{-i(1+\frac{1}{2p}+\varepsilon)t}, e^{-i(2+\frac{1}{2p}+\varepsilon)t}, \dots, e^{-i(\frac{1}{2}N+\frac{1}{2p}+\varepsilon)t}.$$

Veamos que el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no es completo en $L^p[-\pi,\pi]$. Sean $c = \frac{1}{2p} + \varepsilon$ y

$$\phi(t) = \left(\cos \tfrac{1}{2} t\right)^{2c-1} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} t, \quad t \in [-\pi,\pi].$$

Observamos que $t \mapsto \cos \frac{1}{2} t$ se anula en los extremos del intervalo $[-\pi,\pi]$ y toma valores no negativos en dicho intervalo. Si q es el exponente conjugado de p y $2c-1 \geq 0$, se tiene que $\phi \in L^q[-\pi,\pi]$, al ser acotada. Por otro lado, si $2c-1<0$, tras aplicar la regla de L'Hôpital se obtiene que

$$\lim_{t\to\pi^-} \frac{\cos \frac{1}{2} t}{\pi - t} = \lim_{t\to\pi^-} \frac{1}{2} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} t = \frac{1}{2}$$

y que

$$\lim_{t\to-\pi^+} \frac{\cos \frac{1}{2} t}{\pi + t} = \lim_{t\to-\pi^+} -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} t = \frac{1}{2},$$

luego

$$\lim_{t\to\pi^-} \frac{\left(\cos \frac{1}{2} t\right)^{(2c-1)q}}{(\pi - t)^{(2c-1)q}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(2c-1)q} = \lim_{t\to-\pi^+} \frac{\left(\cos \frac{1}{2} t\right)^{(2c-1)q}}{(\pi + t)^{(2c-1)q}}.$$

Como $2q\varepsilon > 0$ y $\frac{q}{p} = q-1$, resulta que

$$(2c-1)q = \left(2\left(\tfrac{1}{2p}+\varepsilon\right)-1\right)q = \tfrac{q}{p} + 2q\varepsilon - q = 2q\varepsilon - 1 > -1,$$

y el criterio de comparación por cociente permite afirmar que la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos \tfrac{1}{2} t\right)^{(2c-1)q} \, dt$$

es convergente, de donde se sigue que $\phi \in L^q[-\pi,\pi]$.

Si tomamos la rama principal del logaritmo —esto es, con el argumento en $[-\pi,\pi)$—, al escribir seno y coseno en forma compleja, obtenemos que

$$\left(\cos \tfrac{1}{2} t\right)^{2c-1} = \left(\frac{e^{\frac{1}{2}it} + e^{\frac{1}{2}it}}{2}\right)^{2c-1} = \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}it}\left(e^{it}+1\right)}{2}\right)^{2c-1} = \frac{e^{-cit} e^{\frac{1}{2}it}\left(e^{it}+1\right)^{2c-1}}{2^{2c-1}}$$

y
$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t = \frac{e^{\frac{1}{2}it}-e^{-\frac{1}{2}it}}{2i} = \frac{e^{-\frac{1}{2}it}\left(e^{it}-1\right)}{2i}.$$
De este modo,
$$\phi(t) = \frac{e^{-cit}e^{\frac{1}{2}it}\left(e^{it}+1\right)^{2c-1}e^{-\frac{1}{2}it}\left(e^{it}-1\right)}{i2^{2c}} = i2^{-2c}e^{-cit}\left(1+e^{it}\right)^{2c-1}\left(1-e^{it}\right),$$
luego, si $n>0$, como $\mu_n = n+c$,
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(t)e^{i\mu_n t}\,dt &= i2^{-2c}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+e^{it}\right)^{2c-1}\left(1-e^{it}\right)e^{int}\,dt\\ &= i2^{-2c}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+e^{it}\right)^{2c-1}e^{int}\,dt - \int_{-\pi}^{\pi}\left(1+e^{it}\right)^{2c-1}e^{i(n+1)t}\,dt\right).\end{aligned}$$
Notamos que, para todo $r>0$ y cada $t\in[-\pi,\pi]$,
$$\left|\left(1+re^{it}\right)^{2c-1}e^{int}\right| = \left|\left(1+re^{it}\right)^{2c-1}\right|\left|e^{int}\right| = \left|1+re^{it}\right|^{2c-1}.$$
Pero
$$\left|1+re^{it}\right|^2 = (1+r\cos t)^2+(r\operatorname{sen} t)^2 = 1+2r\cos t+r^2,$$
luego se tiene que $\left|1+re^{it}\right|<2$ para todos $0<r<1$ y $t\in[-\pi,\pi]$, pues $|\cos t|\le 1$. Si tenemos en cuenta el lema 4.4, podemos escribir que
$$|\operatorname{sen} t| \le \left|1+re^{it}\right|,\quad 0<r<1 \text{ y } t\in[-\pi,\pi].$$
De esta forma, se tiene que
$$\begin{aligned}\left|\left(1+re^{it}\right)^{2c-1}e^{int}\right| &< 2^{2c-1} && \text{si}\quad 2c-1\ge 0,\ t\in[-\pi,\pi],\\ \left|\left(1+re^{it}\right)^{2c-1}e^{int}\right| &\le |\operatorname{sen} t|^{2c-1} && \text{si}\quad 2c-1<0,\ t\in(-\pi,\pi),\ t\neq 0.\end{aligned}$$
para todo $0<r<1$. De forma similar a como hicimos con $t\mapsto\cos\frac{1}{2}t$, vemos que la función $t\mapsto|\operatorname{sen} t|^{2c-1}$ es integrable en $[-\pi,\pi]$ cuando $2c-1<0$.

Teniendo en cuenta lo anterior, y que el desarrollo de Taylor de $(1+z)^\alpha$ converge uniformemente en los compactos de $D(0,1)$ para todo $\alpha\in\mathbb{C}$, al aplicar dos veces el teorema de la convergencia dominada, podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \left(1+e^{it}\right)^{2c-1} e^{int}\,dt &= \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1+re^{it}\right)^{2c-1} e^{int}\,dt \\ &= \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2c-1}{k} r^k e^{ikt} e^{int}\,dt \\ &= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2c-1}{k} r^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+k)t}\,dt, \quad n>0\end{aligned}$$

y los términos de la serie anterior son nulos para cada $n \in \mathbb{N}$, pues el sistema trigonométrico es ortogonal. Por tanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{i\mu_n t}\,dt = 0, \quad n>0. \tag{4.7}$$

Como el coseno es una función par y el seno es una función impar, resulta que ϕ es también impar y, en consecuencia, se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{i\mu_0 t}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)\,dt = 0.$$

Asimismo, si tomamos conjugados en (4.7), como ϕ es real y, como $\overline{i\mu_n t} = i\mu_{-n} t$, obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{i\mu_{-n} t}\,dt \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\phi(t) e^{i\mu_n t}}\,dt = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{i\mu_n t}\,dt} = 0, \quad n>0.$$

Luego para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{i\mu_n t}\,dt = 0$$

y, en virtud de la proposición 2.13, el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no es completo en $L^p[-\pi,\pi]$.

Parte 2: *N es impar.*

De forma similar, en caso de que N sea impar, consideramos, dado $\varepsilon > 0$, la sucesión definida por

$$\lambda_n = \begin{cases} n + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2p} + \varepsilon, & n \geq 0, \\ n - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2p} - \varepsilon, & n < 0, \end{cases}$$

Al ser N impar, podemos escribir

$$\frac{1}{2}N = \frac{1}{2}(N-1) + \frac{1}{2},$$

donde $\frac{1}{2}(N-1)$ es un entero no negativo. De esta manera, si ponemos

$$\mu_n = \begin{cases} n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} + \varepsilon, & n \geq 0, \\ n + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} - \varepsilon, & n < 0, \end{cases}$$

—obsérvese que $\mu_{-(n+1)} = -\mu_n$ para cada $n \geq 0$— resulta que el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, contiene al sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, además de a las N funciones exponenciales

$$e^{i\left(\frac{p+1}{2p}+\varepsilon\right)t}, e^{i\left(1+\frac{p+1}{2p}+\varepsilon\right)t}, \dots, e^{i\left(\frac{1}{2}(N-3)+\frac{p+1}{2p}+\varepsilon\right)t}$$

y

$$e^{-i\left(\frac{p+1}{2p}+\varepsilon\right)t}, e^{-i\left(1+\frac{p+1}{2p}+\varepsilon\right)t}, \dots, e^{-i\left(\frac{1}{2}(N-1)+\frac{1}{2p}+\varepsilon\right)t}.$$

Veamos que el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no es completo en $L^p[-\pi,\pi]$. Sean $c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} + \varepsilon$ y

$$\phi(t) = \left(\cos\tfrac{1}{2}t\right)^{2c-2}, \quad t \in [-\pi,\pi].$$

Si q es el exponente conjugado de p, podemos razonar de forma análoga al apartado anterior para ver que $\phi \in L^q[-\pi,\pi]$. De igual modo, al tomar la rama principal del logaritmo, tenemos que

$$\left(\cos\tfrac{1}{2}t\right)^{2c-2} = \left(\frac{e^{\frac{1}{2}it} + e^{-\frac{1}{2}it}}{2}\right)^{2c-2} = \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}it}\left(e^{it}+1\right)}{2}\right)^{2c-2} = \frac{e^{-cit}e^{it}\left(e^{it}+1\right)^{2c-2}}{2^{2c-2}}.$$

Por tanto, si $n \geq 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{i\mu_n t}\, dt = 2^{2-2c} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + e^{it}\right)^{2c-2} e^{i(n+1)t}\, dt.$$

De nuevo, al aplicar el teorema de la convergencia dominada y tener en cuenta la ortogonalidad del sistema trigonométrico, se obtiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{i\mu_n t}\, dt = 2^{2-2c} \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2c-2}{k} r^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+k+1)t}\, dt = 0, \quad n \geq 0.$$

De la misma manera que en el primer caso, al tomar conjugados en la igualdad anterior, para cada $n \geq 0$, se concluye que el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no es completo en $L^p[-\pi,\pi]$, en virtud de la proposición 2.13. □

Observación 4.6. Sean $1 < r < p < \infty$. Es sencillo, a partir del último resultado, encontrar conjuntos completos en $L^r[-\pi,\pi]$ que no lo son en $L^p[-\pi,\pi]$: si tomamos la sucesión de números complejos $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, definida para cada $n \in Z$ por

$$\lambda_n = \begin{cases} n + \frac{1}{2p} + \varepsilon, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n - \frac{1}{2p} + \varepsilon, & n < 0, \end{cases}$$

donde

$$0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2r} - \frac{1}{2p},$$

el teorema 4.3 permite afimar que el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo en $L^r[-\pi,\pi]$, pues

$$|\lambda_n| \leq |n| + \frac{1}{2p} + \varepsilon \leq |n| + \frac{1}{2r}$$

pero, como vimos en la demostración del teorema 4.5, tal sistema no es completo en $L^p[-\pi,\pi]$. En particular, se deduce que el recíproco del proposición 2.11 es, en general, falso.

4.1.1. La completitud del conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en $L^1[-\pi,\pi]$

Fijémonos en que aún no hemos dicho nada acerca del espacio $L^1[-\pi,\pi]$. Es sencillo comprobar que el teorema teorema 4.3 deja de ser válido en el caso en que $p = 1$. Si ponemos

$$\lambda_n = \begin{cases} n + \frac{1}{2}, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n - \frac{1}{2}, & n < 0, \end{cases}$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_n t} \operatorname{sen} \frac{1}{2} t \, dt \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{\frac{it}{2}} \frac{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}}{2i} \, dt = \frac{1}{2i} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t} \, dt - \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \, dt \right) = 0,$$

para $n>0$, pues el sistema trigonométrico es ortogonal. De modo similar, si $n<0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_n t}\operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-\frac{it}{2}}\frac{e^{\frac{it}{2}}-e^{-\frac{it}{2}}}{2i}\,dt = \frac{1}{2i}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} e^{+i(n-1)t}\,dt\right) = 0.$$

Si $n=0$, como el seno es impar, se tiene también que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_n t}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}t\,dt = 0$$

y, como $t\mapsto \operatorname{sen}\frac{1}{2}t$ es una función acotada, se concluye que el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es incompleto en $L^1[-\pi,\pi]$, en virtud de la proposición 2.13.

Como ya vimos en la proposición 2.11, la completitud en $L^p(E)$ implica la completitud en $L^q(E)$, si $r<p$ y E es de medida finita. De esta forma, el teorema 4.3 es suficiente para deducir la completitud de algunos conjuntos en $L^1(E)$; no obstante, daremos un resultado más débil en este último caso, con la ventaja de que no requiere encontrar un p como en (4.5).

Teorema 4.7. *Si $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos tal que*

$$|\lambda_n - n| \le L < \frac{1}{2},\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{4.8}$$

para cierto $L\in\mathbb{R}$, entonces el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo en $L^1[-\pi,\pi]$.

Demostración. Si $L=0$, entonces $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es el sistema trigonométrico, el cual ya sabemos que es completo en $L^1[-\pi,\pi]$. Por otro lado, si se verifica que $0<L<\frac{1}{2}$, entonces existe $p\in(1,\infty)$ tal que $L=\frac{1}{2p}$.

Por la desigualdad triangular, podemos escribir

$$|\lambda_n| \le |n| + |\lambda_n - n| \le |n| + L = |n| + \frac{1}{2p},\quad n\in\mathbb{Z}$$

y, por la proposición 2.11 y el teorema 4.3, se tiene el resultado. □

4.1.2. La completitud del conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$

Es evidente que el teorema 4.3 no es válido en el espacio $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$ pues, si el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ fuera completo en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$ para toda sucesión $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complejos tales que

$$|\lambda_n| \leq |n|, \quad n \in \mathbb{Z},$$

tendríamos, en particular, que el sistema trigonométrico sería completo en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, en contra de la proposición 3.5.

El resultado que demostraremos permite aplicar lo visto en los espacios $L^p[-\pi,\pi]$ para encontrar sistemas de exponenciales completos en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, sin más que añadir una exponencial adecuada a un sistema completo en $L^p[-\pi,\pi]$ —como se verá en el teorema 5.3, en realidad basta con que sea una cualquiera, distinta de las ya presentes—.

Lema 4.8. *Sean $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $X = \mathscr{C}[a,b]$ o $X = L^p[-\pi,\pi]$, $p \in [1,\infty]$, el operador*

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow X \\ f(t) &\longmapsto f(t)e^{i\lambda t} \end{aligned}$$

es lineal, continuo y biyectivo.

Demostración. Basta tener en cuenta la distributividad del producto sobre la suma para obtener la linealidad. Si $f \in X$, se tiene que, para cada $p \in [1,\infty]$,

$$\|T(f)\|_p \leq \left\|e^{i\lambda t}\right\|_\infty \|f\|_p$$

luego T es continua.

Es sencillo ver que T es inyectiva, puesto que la función exponencial no se anula nunca y, entonces, se tiene que $f^* = 0$ c.s. si y solo si $f = 0$ c.s. Resta entonces comprobar que es suprayectiva. Para ello, es suficiente notar que, para cada $f \in X$,

$$f^*(t) = f(t)e^{-i\lambda t}, \quad t \in [-\pi,\pi]$$

pertenece a X y verifica que $T(f^*) = f$. □

Proposición 4.9. *Si el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo en $L^p[-\pi,\pi]$, con $1 \leq p < \infty$, entonces tiene deficiencia a lo sumo 1 en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$.*

Demostración. Definimos S como el conjunto de las funciones complejas g definidas en $[-\pi,\pi]$ de la forma siguiente:

$$g(t) = \int_0^t f(s)\,ds + k, \quad \text{donde} \quad f \in L^p[-\pi,\pi] \quad \text{y} \quad k \in \mathbb{C};$$

que, en virtud del teorema fundamental del Cálculo, está contenido en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, pues $L^p[-\pi,\pi] \subset L^1[-\pi,\pi]$. De la linealidad de la integral y la propiedad distributiva del producto sobre la suma se deduce que, de hecho, es un subespacio vectorial de $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$.

Veamos que S es denso en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$. Se tiene que

$$\int_0^t i\alpha e^{i\alpha t}\,ds - 1 = e^{i\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

De esta forma, dado $\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, el sistema $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{e^{i\mu t}\}$ está contenido en S y es completo en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, en virtud del teorema 3.6. Como S es un espacio vectorial, se tiene que

$$\langle\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{e^{i\mu t}\}\rangle \subset S \subset \mathscr{C}[-\pi,\pi]$$

y, al tomar adherencias, se obtiene que S es denso en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$.

Definimos el operador

$$\begin{aligned} T : L^p[-\pi,\pi] &\longrightarrow S_0 = \left\{g \in S : g(0) = 0\right\} \\ f(s) &\longmapsto \int_0^t f(s)\,ds, \end{aligned}$$

que es claramente sobreyectivo, y lineal por la linealidad de la integral. En virtud de la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\left|\int_0^t f(s)\,ds\right| \le \int_0^t |f(s)|\,ds \le \|f\|_1 \le (2\pi)^q \|f\|_p,$$

para cada $f \in L^p[-\pi,\pi]$ y cada $t \in [0,\pi]$, donde q es el exponente conjugado de p. Se deduce, entonces, que

$$\|T(f)\|_\infty \le (2\pi)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p, \quad f \in L^p[-\pi,\pi],$$

luego T es lineal, continuo y sobreyectivo.

Supongamos primero que $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. El corolario 2.7 aplicado al operador T y al sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ nos permite afirmar que el conjunto

$$\left\{\tfrac{1}{\lambda_n} e^{i\lambda_n t} - \tfrac{1}{\lambda_n}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

es completo en S_0. De la definición de completitud, se deduce que esto equivale a que el sistema $\{e^{i\lambda_n t} - 1\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sea completo en S_0. De este modo, si $f \in L^p[-\pi,\pi]$, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, todos nulos salvo una cantidad finita, tal que

$$\left\| \int_0^t f(s)\,ds - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(e^{i\lambda_n t} - 1\right) \right\|_\infty = \left\| \int_0^t f(s)\,ds - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \right\|_\infty < \varepsilon.$$

Luego, dado $k \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\left\| \int_0^t f(s)\,ds + k - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n - k \right\|_\infty < \varepsilon,$$

y se deduce que el conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{1\}$ es completo en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, luego el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tiene deficiencia a lo sumo 1 en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$.

Si existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda_{n_0} = 0$, consideramos $\delta > 0$ tal que $\delta \neq -\lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Así, el operador

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathscr{C}[-\pi,\pi] &\longrightarrow \mathscr{C}[-\pi,\pi] \\ f(t) &\longmapsto f(t)e^{i\delta t}, \end{aligned}$$

lineal, continuo y biyectivo por el lema 4.8, nos permite afirmar que el sistema

$$\{\Lambda(e^{i\lambda_n t})\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{1\} = \{e^{i(\lambda_n+\delta)t}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{1\} \tag{4.9}$$

es completo en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, sin más que tener en cuenta el corolario 2.8 y lo anterior. Al aplicar, de nuevo, el corolario 2.8 con el sistema (4.9) y el operador Λ^{-1} llegamos a que el conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{e^{-i\delta t}\}$ es completo en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, y se concluye. □

4.2. La estabilidad del sistema trigonométrico en $L^2[-\pi,\pi]$

Nuestro siguiente objetivo será establecer un resultado más fuerte que el del teorema 4.3, en el caso particular del espacio de Hilbert $L^2[-\pi,\pi]$, aprovechando las ventajas que nos ofrece este último. Dicho resultado es comúnmente conocido como el teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec y, dada una condición de la forma

$$|\lambda_n - n| \leq L < \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

—compárese con (4.5) y (4.8)— nos permite afirmar que el conjunto $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ constituye una base de $L^2[-\pi,\pi]$. En particular, se deduce que tal sistema es exacto.

Cabe destacar que el teorema permite decir aún más sobre el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, pero nos conformaremos con dar una observación posterior a su demostración, pues es un contenido que excede nuestros propósitos.

4.2.1. Bases en espacios de Banach

Antes de comenzar con la prueba del teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec, necesitaremos hablar del concepto de *base de Schauder*, así como establecer algunos resultados generales en los espacios de Banach.

Definición 4.10. Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de un espacio de Banach X es una **base de Schauder** de X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n,$$

donde la igualdad se interpreta en el sentido de que la sucesión de las sumas parciales converge a x en la norma de X.

En lo que sigue llamaremos bases a las bases de Schauder en un espacio de Banach.

Observación 4.11.

1. Una base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X es, en particular, un sistema **completo!de un espacio de Banach**, pues por definición "genera" X, esto es, que para cada $x \in X$ existe

una única sucesión de escalares $\{c_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) x_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación

$$\begin{aligned} c_n : X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto c_n(x) \end{aligned}$$

es lineal y continua —véase [You01, sec. 6, pág. 19]— y, fijado n, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $c_n(x_m) = \delta_{n,m}$, pues x_n se escribe de forma única como

$$x_n = 1 \cdot x_n + \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \neq n}} 0 \cdot x_n.$$

De esta forma, $c_n \in X'$, y verifica que $c_n(x) = 0$ para cada $x \in \langle x_m : x_m \neq x_n \rangle$, pero $c_n \not\equiv 0$, pues $c_n(x_n) = 1$. En virtud del teorema 2.10, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{x_m : x_m \neq x_n\}$ no es completo, y se deduce que el sistema $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **exacto**.

2. Una **base ortonormal** en un espacio de Hilbert es, en particular, una base de Schauder, pues el producto interno determina de forma única los coeficientes del desarrollo en serie de los elementos de dicho espacio.

De forma similar a lo que ocurría con los conjuntos completos, las bases de espacios de Banach se mantienen por biyecciones lineales y continuas.

Proposición 4.12. *Sean X, Y espacios de Banach, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de X y $T : X \to Y$ un operador lineal, continuo y biyectivo. Entonces $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Y.*

Demostración. Basta notar que, si $y \in Y$ y $x = T^{-1}(y)$, existe una única sucesión de escalares $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n.$$

Ahora, por ser T lineal y continuo,

$$y = T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_n T(x_n).$$

Veamos que $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ es única para cada $y \in Y$: si existiera otra sucesión $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} d_n T(x_n),$$

como T^{-1} es lineal y continuo se tendría que

$$x = T^{-1}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x_n,$$

pero como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base de X, debe ser $c_n = d_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

El siguiente resultado nos permite garantizar que un operador lineal y continuo en un espacio de Banach es biyectivo.

Proposición 4.13. *Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X$ un operador lineal y continuo tal que*

$$\|T\| < 1.$$

Entonces el operador $I - T$ es biyectivo. Además, $(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.

Demostración. Definimos el operador lineal y continuo $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$ para cada número natural n. Se tiene que

$$\sum_{k=o}^{n} \left\|T^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|T\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $\|T\| < 1$, deducimos que $\sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k$ es una serie convergente, y llegamos a que la serie $\sum_{k=0}^{n} T^k$ es absolutamente convergente, luego convergente, al ser el espacio de los operadores lineales y continuos en X un espacio de Banach. De esta forma, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un operador lineal y continuo S.

Veamos que $(I-T)S = S(I-T) = I$ para concluir. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$S_n(I-T) = \left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)(I-T) = \sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=0}^{n} T^{k+1} = T^0 - T^{n+1} = I - T^{n+1}$$

y, de forma similar,

$$(I-T)S_n = (I-T)\sum_{k=0}^{n} T^k = \sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=0}^{n} T^{k+1} = T^0 - T^{n+1} = I - T^{n+1}.$$

Como $\|T\| < 1$, tenemos que

$$\left\|(I - T^{n+1}) - I\right\| = \left\|T^{n+1}\right\| \leq \|T\|^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

luego $I - T^{n+1} \to I$ si $n \to \infty$. Tomando ahora límites en la igualdad

$$(I - T)S_n = S_n(I - T) = I - T^{n+1}$$

llegamos a que $(I - T)S = S(I - T) = I$, como queríamos. $\square$

Con todo lo anterior, establecemos un importante criterio, que será fundamental en la prueba del teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec.

Teorema 4.14 (criterio de Paley-Wiener)**.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de un espacio de Banach X, y supongamos que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de X tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - y_k)\right\| \leq \lambda \left\|\sum_{k=1}^{n} c_k x_k\right\| \tag{4.10}$$

para cierto $0 \leq \lambda < 1$, independiente de n, y cualesquiera $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Entonces $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de X.

Demostración. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de X, podemos escribir, cada $x \in X$ en la forma $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)x_k$, para una única sucesión de números complejos $\{c_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Definamos $T : X \to X$ de la siguiente manera:

$$T(x) = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)(x_k - y_k), \quad x \in X.$$

Si $\lambda = 0$, necesariamente se tiene que $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y las conclusiones del teorema se verifican. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $\lambda > 0$. Fijado $x \in X$, como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)x_k$ es convergente se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n \geq n_0$,

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{m} c_k(x)x_k\right\| < \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

De (4.10), se deduce que

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{m} c_k(x)(x_k - y_k)\right\| \leq \lambda \left\|\sum_{k=n+1}^{m} c_k(x)x_k\right\| < \varepsilon,$$

y, entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)(x_k - y_k)$ verifica la condición de Cauchy de convergencia en X, luego es convergente. Con esto, se concluye que T está bien definido.
Claramente T es lineal. Por (4.10), se tiene que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k(x)(x_k - y_k) \right\| \le \lambda \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k(x) x_k \right\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tomando límites en la desigualdad anterior —recordamos que $\|\cdot\|$ es una aplicación continua en X—, se deduce que

$$\|T(x)\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)(x_k - y_k) \right\| \le \lambda \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) x_k \right\| = \lambda \|x\|$$

y, por tanto, que T es continuo y que $\|T\| \le \lambda < 1$. En virtud de la proposición 4.13, el operador $I - T$ es biyectivo y, como $(I - T)x_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de la proposición 4.12 se sigue el resultado. □

Observación 4.15. Si X es un espacio de Banach, se dice que dos bases $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X son equivalentes si existe $T: X \to X$ lineal, continuo y biyectivo tal que $T(x_n) = y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, el teorema anterior nos dice mucho más: $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Observación 4.16. En el caso de que X sea un espacio de Hilbert, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal y completo de X, tras aplicar la identidad de Parseval la condición (4.10) se traduce en que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - y_k) \right\| \le \lambda \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2}, \tag{4.11}$$

para cualesquiera $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

Se tiene el siguiente criterio equivalente para espacios de Hilbert:

Corolario 4.17. *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert H, y supongamos que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de H tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - y_k) \right\| \le \lambda \tag{4.12}$$

para cierto $0 \le \lambda < 1$, independiente de n, y cualesquiera escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ con $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \le 1$. Entonces $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de H.

Demostración. Veamos que (4.11) equivale a (4.12) en el caso que nos concierne.

Es inmediato comprobar que (4.11) es suficiente para que se verifique (4.12), pues si $\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 \leq 1$, entonces tenemos que $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2} \leq 1$ y, por tanto,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - y_k)\right\| \leq \lambda\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2} \leq \lambda.$$

Para ver la implicación contraria, definimos

$$d_j = \frac{c_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2}}, \quad j \in \mathbb{N},$$

si $\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 \neq 0$. De esta forma,

$$\sum_{k=1}^{n}|d_k|^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{|c_j|^2}{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n}|c_j|^2}{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2} = 1.$$

Si $\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 > 0$ y existe $0 \leq \lambda < 1$ de suerte que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} d_k(x_k - y_k)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2}}(x_j - y_j)\right\| \leq \lambda,$$

entonces se tiene que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - y_k)\right\| \leq \lambda\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2}.$$

El caso $\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 = 0$ es trivial, pues entonces todos los coeficientes son nulos. □

4.2.2. El teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec

La clave de la prueba del teorema reside en considerar un sistema ortonormal y completo adecuado de $L^2[-\pi,\pi]$. Para simplificar los cálculos, consideraremos en lo que sigue el espacio de Hilbert $L^2[-\pi,\pi]$ provisto del producto interno

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Proposición 4.18. *El conjunto*

$$\beta = \{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos nt\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)t\right)\}_{n=1}^{\infty},$$

es un sistema ortonormal y completo de $L^2[-\pi,\pi]$.

Demostración. Como

$$\{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos nt\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, nt\}_{n=1}^{\infty},$$

es un sistema ortonormal y completo de $L^2[-\pi,\pi]$, ya sabemos que 1 y $\sqrt{2}\cos nt$, $n \in \mathbb{N}$, tienen norma 1 y son ortogonales entre sí.

Si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left\|\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)t\right)\right\|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}^2\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)t\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos\left(2(n-\frac{1}{2})t\right)}{2}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt - \int_{-\pi}^{\pi}\cos\left((2n-1)t\right)dt\right) = 1,\end{aligned}$$

luego el conjunto está normalizado.

Se tiene que

$$\langle 1, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)t\right)\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)t\right)dt = 0,$$

al ser la integral de una función impar. De modo similar,

$$\langle \sqrt{2}\cos nt, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)t\right)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nt)\left(\mathrm{sen}\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)t\right)\right)dt = 0,$$

pues el producto de una función par y otra impar es una función impar. Por otro lado, si $n, k \in \mathbb{N}$, y $n \neq k$, de la fórmula del producto de senos se deduce que

$$\begin{aligned}&\langle \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)t\right), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right)\rangle = \\ &\qquad = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{sen}\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right)dt \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left((n-k)t\right)dt - \int_{-\pi}^{\pi}\cos\left((n+k-1)t\right)dt\right) = 0\end{aligned}$$

y, en conclusión, el sistema es ortonormal.

Notamos que, en virtud de la proposición 2.12, para ver que el sistema es completo, es suficiente probar que $\langle\beta\rangle$ es denso en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$. Para ello, recurriremos al teorema de Stone-Weierstrass.

Consideremos el espacio vectorial $\mathscr{A} = \langle\beta\rangle$. Se tiene, por las identidades del producto, que si $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$,

$$(\cos nt)(\cos kt) = \frac{1}{2}(\cos((n+k)t) + \cos((n-k)t)) \in \mathscr{A},$$

$$\left(\operatorname{sen}\left((n-\tfrac{1}{2})t\right)\right)\left(\operatorname{sen}\left((k-\tfrac{1}{2})t\right)\right) = \frac{1}{2}(\cos((n-k)t) - \cos((n+k-1)t)) \in \mathscr{A},$$

y la simetría de los factores anteriores permite eliminar la condición $n \geq k$. De modo similar, si $n \geq k$,

$$\begin{aligned}(\cos nt)\left(\operatorname{sen}\left((k-\tfrac{1}{2})t\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}((n+k-\tfrac{1}{2})t) + \operatorname{sen}((n-k+\tfrac{1}{2})t)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}((n+k-\tfrac{1}{2})t) + \operatorname{sen}((n-k+1-\tfrac{1}{2})t)\right) \in \mathscr{A}\end{aligned}$$

y, como el seno es una función impar, resulta también que

$$\begin{aligned}(\cos nt)\left(\operatorname{sen}\left((k-\tfrac{1}{2})t\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}((n+k-\tfrac{1}{2})t) + \operatorname{sen}((n-k+\tfrac{1}{2})t)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}((n+k-\tfrac{1}{2})t) - \operatorname{sen}((k-n-\tfrac{1}{2})t)\right) \in \mathscr{A}\end{aligned}$$

en el caso $n < k$. De esta forma, si $f, g \in \mathscr{A}$, se tiene que $fg \in \mathscr{A}$ —obsérvese que en el producto fg sólamente aparecen sumas de productos de las funciones de β—. Luego $\mathscr{A}$ es un álgebra de funciones.

Veamos que $\mathscr{A}$ separa puntos, esto es, que si $x, y \in [-\pi,\pi]$, existe $f \in \mathscr{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Notamos que, si $x, y \in [-\pi,\pi]$, $x \neq y$, la igualdad $\cos x = \cos y$ se da si y solo si $x = -y$. Por otro lado, si $x = -y$, $x \neq y$, como $t \mapsto \operatorname{sen}\frac{1}{2}t$ es impar, se tiene que

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x = -\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}y \neq \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}y$$

y, en conclusión, $\mathscr{A}$ separa puntos.

Por definición $1 \in \mathscr{A}$ y, como las funciones que generan $\mathscr{A}$ son reales, se tiene que $f \in \mathscr{A}$ si y solo si $\overline{f} \in \mathscr{A}$. Luego, en virtud del teorema de Stone-Weierstrass, se tiene que $\mathscr{A} = \langle \beta \rangle$ es denso en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, y se concluye que el sistema es ortonormal y completo. □

Demostramos continuación un par de resultados previos, en relación con algunas de las funciones involucradas en la prueba del teorema de Kadec, que nos facilitarán las acotaciones posteriores.

Lema 4.19. *La función*

$$x \mapsto 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

es creciente en $(0, \frac{\pi}{2})$.

Demostración. Notamos que el enunciado es equivalente a que

$$x \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

sea decreciente en $(0, \frac{\pi}{2})$. Para cada $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ se tiene que

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} < 0,$$

lo que ocurre si y solo si $x \cos x - \operatorname{sen} x < 0$, que a su vez equivale a que

$$x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x,$$

desigualdad ya conocida. □

Lema 4.20. *La función*

$$x \mapsto x \cos x$$

es creciente en $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Demostración. Sea $x \in [0, \frac{\pi}{4})$. Como $0 \le x < 1$, y el seno y el coseno son no negativos en el intervalo anterior, se tiene que

$$(x \cos x)' = \cos x - x \operatorname{sen} x > \cos x - \operatorname{sen} x \ge 0,$$

pues $\cos x > \operatorname{sen} x$ si $x \in [0, \frac{\pi}{4})$, y se concluye que es creciente en $[0, \frac{\pi}{4})$. Ahora, basta notar que la función es impar, por ser producto de una función par y otra impar, para obtener que es creciente en el intervalo $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. □

Con esto, ya tenemos todo lo necesario para probar el teorema.

Teorema 4.21 (teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec). *Si $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales tales que*

$$|\lambda_n - n| \le L < \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4.13}$$

entonces $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una base de $L^2[-\pi,\pi]$.

Demostración. Veamos que existe $0 \le \lambda < 1$ tal que

$$\left\| \sum_{j=-n}^{n} c_j (e^{ijt} - e^{i\lambda_j t}) \right\| \le \lambda.$$

para cualesquiera $c_{-n}, c_{-n+1}, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ con $\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \le 1$. Entonces, en virtud del corolario 4.17, quedará probado el teorema.

Escribimos, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$e^{int} - e^{i\lambda_n t} = e^{int}\left(1 - e^{i\delta_n t}\right),$$

donde $\delta_n = \lambda_n - n$ —nótese que $|\delta_n| \le L$—. Si $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, al desarrollar $t \mapsto 1 - e^{i\delta t}$ en serie de Fourier en el sistema ortonormal y completo anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\delta t} = \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \pi\delta}{\pi\delta}\right) &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2\delta \operatorname{sen} \pi\delta}{\pi(k^2 - \delta^2)} \cos kt \\ &+ i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2\delta \cos \pi\delta}{\pi((k-\frac{1}{2})^2 - \delta^2)} \operatorname{sen}\left(\left(k - \tfrac{1}{2}\right) t\right). \end{aligned}$$

Si intercambiamos el orden de sumación y seguidamente aplicamos la desigualdad triangular, obtenemos que

$$\left\| \sum_{j=-n}^{n} c_j (e^{ijt} - e^{i\lambda_j t}) \right\| \le A + B + C,$$

para

$$A = \left\| \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \pi\delta_j}{\pi\delta_j}\right) c_j e^{ijt} \right\|,$$

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| (-1)^k 2\cos kt \sum_{j=-n}^{n} \frac{\delta_j \operatorname{sen} \pi\delta_j}{\pi(k^2-\delta_j^2)} c_j e^{ijt} \right\| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=-n}^{n} \frac{\delta_j \operatorname{sen} \pi\delta_j}{k^2-\delta_j^2} c_j e^{ijt} \right\|,$$

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\| (-1)^k 2\operatorname{sen}\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right) \sum_{j=-n}^{n} \frac{\delta_j \cos \pi\delta_j}{\pi((k-\frac{1}{2})^2-\delta_j^2)} c_j e^{ijt} \right\| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=-n}^{n} \frac{\delta_j \cos \pi\delta_j}{(k-\frac{1}{2})^2-\delta_j^2} c_j e^{ijt} \right\|, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la monotonía de la integral y que $|\operatorname{sen} t| \leq 1$ y $|\cos t| \leq 1$ —obsérvese que en el caso $\delta_j = 0$ se tiene que $c_j(e^{ijt} - e^{i\lambda_j t}) = 0$, y las cotas anteriores son igualmente válidas—.

Si $\{a_j\}_{j=-n}^{n}$ es una sucesión de números complejos tales que $|a_j| \leq a$, $j \in \mathbb{Z}$, como el sistema trigonométrico es una base ortonormal de $L^2[-\pi,\pi]$, por la identidad de Parseval se tiene que

$$\left\| \sum_{j=-n}^{n} a_j c_j e^{ijt} \right\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|^2 |c_j|^2 \leq a^2 \sum_{j=-n}^{n} |c_j|^2 \leq a^2.$$

De esta manera, teniendo en cuenta el lema 4.19 y que el seno cardinal es par, podemos escribir

$$A \leq 1 - \frac{\operatorname{sen} \pi L}{\pi L}.$$

De igual modo, como la función $t \mapsto \operatorname{sen} t$ es creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y positiva, y la función $t \mapsto t \operatorname{sen} t$ es par, llegamos a que $\delta_j \operatorname{sen} \pi\delta_j \leq L \operatorname{sen} \pi L$ para cada $j \in \mathbb{Z}$. Como $\delta_j^2 \leq L^2 < 1$, resulta que

$$B \leq \frac{2L}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - L^2} \right) \operatorname{sen} \pi L = \left(\frac{1}{\pi L} - \operatorname{cotg} \pi L \right) \operatorname{sen} \pi L = \frac{\operatorname{sen} \pi L}{\pi L} - \cos \pi L,$$

donde se han tenido en cuenta los cálculos realizados en la proposición 1.21. Por último, puesto que $\delta_j^2 \leq L^2 < \frac{1}{4}$, y que, por el lema 4.20, $|\delta_j \cos \pi\delta_j| \leq L \cos \pi L$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, de nuevo, la proposición 1.21 permite escribir

$$C \leq \frac{2L}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2 - L^2} \right) \cos \pi L = (\tan \pi L)(\cos \pi L) = \operatorname{sen} \pi L.$$

Luego, poniendo

$$\lambda = 1 - \cos \pi L + \operatorname{sen} \pi L,$$

se tiene el resultado, pues $\cos t > \operatorname{sen} t$ si $t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ y, entonces, $\lambda < 1$. □

Observación 4.22.

1. En la línea de la observación 4.15, cuando X es un espacio de Hilbert y una base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a una base ortonormal, se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz de X, concepto en el que nosotros no entraremos. De esta forma, el teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec afirma que el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una base de Riesz de $L^2[-\pi,\pi]$.
2. Es posible dar una versión del teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec para una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complejos, más general que la que se presenta aquí —véase [You01, coro. 2, pág. 164]—.

4.2.3. El papel de la constante $\frac{1}{4}$ en el teorema de Kadec

El teorema 4.3 nos muestra, tras aplicar la desigualdad triangular a (4.5) que, si $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos de suerte que

$$|\lambda_n - n| \leq \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

entonces $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es un sistema completo en $L^2[-\pi,\pi]$. Por otro lado, el teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec nos dice que, si la desigualdad es estricta, el sistema anterior constituye una base de $L^2[-\pi,\pi]$; en particular, el sistema es exacto. Nos debemos preguntar entonces qué sucede cuando se da la igualdad

$$|\lambda_n - n| = \frac{1}{4}$$

para algún $n \in \mathbb{Z}$. Como veremos en lo que sigue, resulta que el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no es, en general, exacto.

Teorema 4.23. *Sea, para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,*

$$\lambda_n = \begin{cases} n - \frac{1}{4}, & n > 0, \\ n + \frac{1}{4}, & n < 0. \end{cases}$$

Entonces el sistema $\{e^{i\lambda_n t} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ es completo en $L^2[-\pi,\pi]$.

Demostración. Definimos el operador T como en el lema 4.8, tomando $\lambda = \frac{1}{2}$. Pongamos, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$\delta_n = \begin{cases} \lambda_n + \frac{1}{2} & = \quad n + \frac{1}{4}, \quad n > 0, \\ \lambda_{n-1} + \frac{1}{2} & = \quad n - \frac{1}{4}, \quad n \leq 0. \end{cases}$$

De esta forma,

$$|\delta_n| = n + \frac{1}{4} = |n| + \frac{1}{4}, \qquad n > 0,$$

$$|\delta_n| = -n + \frac{1}{4} = |n| + \frac{1}{4}, \quad n \leq 0$$

y, por el teorema 4.3, se tiene que el sistema

$$\{e^{i\delta_n t} : n \in \mathbb{Z}\} = \{T(e^{i\lambda_n t}) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

es completo en $L^2[-\pi,\pi]$. Basta ahora aplicar el corolario 2.8 para concluir. □

Del teorema 4.23 se deduce que la cota empleada en el teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec es la mejor posible. Por otro lado, podemos preguntarnos también si es necesaria la constante L en la condición (4.13); por medio de la proposición 5.12, veremos que el teorema 5.10 nos proporciona una respuesta sencilla a esta pregunta.

Capítulo 5

Conjuntos de exponenciales complejas

Concluiremos el trabajo investigando una serie de cuestiones relativas a conjuntos de exponenciales complejas arbitrarios. En primer lugar, expondremos una serie de propiedades intrínsecas de los conjuntos de exponenciales completos, con las que queda de manifiesto la ventaja de trabajar con sistemas de exponenciales complejas y, por tanto, nuestro interés en estas. En segunda instancia, trataremos de trasladar lo expuesto en el cuarto capítulo, sobre la estabilidad del sistema trigonométrico, a sistemas de exponenciales completos arbitrarios.

5.1. Propiedades intrínsecas del sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Si bien los resultados que veremos en esta sección no dependen de lo expuesto en los dos capítulos anteriores, hemos creído conveniente separarlos del apartado 2.3, tanto por la mayor complejidad de los razonamientos presentados como por estar involucrados en la prueba del teorema central del apartado 5.2.

5.1.1. Sustitución de exponenciales en el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Como ya anticipamos al introducir las definiciones 2.15 y 2.16, resulta que la completitud de un sistema de exponenciales complejas no se ve afectada al sustituir una cantidad finita de términos por otras exponenciales distintas de las ya presentes en él, hecho en el que la estrecha relación que guardan estos sistemas con las funciones holomorfas juega un papel fundamental. Esto justifica tanto las definiciones antes mencionadas como el curioso hecho de poder "completizar" los sistemas con deficiencia finita que expusimos en los capítulos tercero y cuarto añadiendo cualquier exponencial —recuérdese los teoremas 3.6 y 4.3, y la proposición 4.9—. La demostración es una consecuencia del siguiente resultado:

Proposición 5.1. *Sea*

$$f(z)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\,d\alpha(t),\quad z\in\mathbb{C},$$

donde α es una medida de Borel compleja en $[-\pi,\pi]$. Si $\mu\in\mathbb{C}$ es tal que $f(\mu)=0$ y, dado $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq\mu$, se define

$$g(z)=\frac{z-\lambda}{z-\mu}f(z)$$

para cada $z\in\mathbb{C}$, entonces existe una medida de Borel compleja β tal que

$$g(z)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\,d\beta(t),\quad z\in\mathbb{C}.$$

Además, se tiene que

$$d\beta(t)=d\alpha(t)+i(\lambda-\mu)e^{-i\mu t}\left(\int_{-\pi}^{t} e^{i\mu s}\,d\alpha(s)\right)dt. \tag{5.1}$$

Demostración. Comenzaremos definiendo la medida β como en (5.1). Claramente β es una medida de Borel compleja, pues está definida como suma de dos medidas de Borel complejas multiplicadas por funciones continuas. Multiplicando por $e^{i\lambda t}$ en la expresión (5.1) obtenemos que

$$e^{i\lambda t}d\beta(t)=e^{i\lambda t}d\alpha(t)+i(\lambda-\mu)e^{i(\lambda-\mu)t}\left(\int_{-\pi}^{t} e^{i\mu s}\,d\alpha(s)\right)dt.$$

Ahora, integrando obtenemos que, para cada $t\in[-\pi,\pi]$,

$$\int_{-\pi}^{t} e^{i\lambda s}d\beta(s)=\int_{-\pi}^{t} e^{i\lambda s}d\alpha(s)+i(\lambda-\mu)\int_{-\pi}^{t}\left(e^{i(\lambda-\mu)s}\int_{-\pi}^{s} e^{i\mu r}\,d\alpha(r)\right)ds. \tag{5.2}$$

Si aplicamos el teorema de Fubini a la segunda integral de la suma anterior —esto puede justificarse descomponiendo la medida α de la forma habitual,

$$\alpha=\alpha_r^+-\alpha_r^-+i\left(\alpha_i^+-\alpha_i^-\right),$$

y escribiendo la integral respecto de α como la suma de cuatro integrales respecto de medidas positivas, todas σ-finitas, y aplicando el teorema de Fubini a cada una de las integrales iteradas obtenidas—, podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{t}\left(e^{i(\lambda-\mu)s}\int_{-\pi}^{s}e^{i\mu r}\,d\alpha(r)\right)ds &= \int_{-\pi}^{t}\left(\int_{-\pi}^{s}e^{i(\lambda-\mu)s}e^{i\mu r}\,d\alpha(r)\right)ds\\ &= \int_{-\pi}^{t}\left(\int_{r}^{t}e^{i(\lambda-\mu)s}e^{i\mu r}\,ds\right)d\alpha(r)\\ &= \int_{-\pi}^{t}e^{i\mu r}\frac{1}{i(\lambda-\mu)}\left(e^{i(\lambda-\mu)s}\right)\Big|_{s=r}^{s=t}\,d\alpha(r)\\ &= \int_{-\pi}^{t}e^{i\mu r}\frac{1}{i(\lambda-\mu)}\left(e^{i(\lambda-\mu)t}-e^{i(\lambda-\mu)r}\right)d\alpha(r)\\ &= \frac{1}{i(\lambda-\mu)}\left(e^{i(\lambda-\mu)t}\int_{-\pi}^{t}e^{i\mu r}\,d\alpha(r)-\int_{-\pi}^{t}e^{i\lambda r}\,d\alpha(r)\right).\end{aligned}$$

Al llevar esto a (5.2) obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{t}e^{i\lambda s}\,d\beta(s)=e^{i(\lambda-\mu)t}\int_{-\pi}^{t}e^{i\mu s}\,d\alpha(s)$$

o, equivalentemente, que

$$-ie^{-i\mu t}\int_{-\pi}^{t}e^{i\mu s}\,d\alpha(s)=-ie^{-i\lambda t}\int_{-\pi}^{t}e^{i\lambda s}\,d\beta(s). \tag{5.3}$$

Razonando como antes, podemos aplicar el teorema de Fubini para obtener que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left(-ie^{-i\mu t}\int_{-\pi}^{t}e^{i\mu s}\,d\alpha(s)\right)e^{izt}\,dt &= \frac{1}{z-\mu}\left(\int_{-\pi}^{\pi}e^{izs}\,d\alpha(s)-e^{i(z-\mu)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\mu s}\,d\alpha(s)\right)\\ &= \frac{1}{z-\mu}\int_{-\pi}^{\pi}e^{izt}\,d\alpha(t),\quad z\in\mathbb{C},\, z\neq\mu,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\mu s}\,d\alpha(s)=f(\mu)=0$. Si repetimos los cálculos —esta vez teniendo en cuenta que $\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda s}\,d\beta(s)=g(\lambda)=0$—, obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(-ie^{-i\lambda t}\int_{-\pi}^{t}e^{i\lambda s}\,d\beta(s)\right)e^{izt}\,dt=\frac{1}{z-\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}e^{izt}\,d\beta(t),\quad z\in\mathbb{C},\, z\neq\lambda.$$

Basta entonces utilizar la igualdad (5.3) para concluir que

$$\frac{1}{z-\mu}\int_{-\pi}^{\pi}e^{izt}\,d\alpha(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(-ie^{-i\mu t}\int_{-\pi}^{t}e^{i\mu s}\,d\alpha(s)\right)e^{izt}\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-ie^{-i\lambda t} \int_{-\pi}^{t} e^{i\lambda s}\, d\beta(s) \right) e^{izt}\, dt = \frac{1}{z-\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\, d\beta(t)$$

para cada $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \lambda$, $z \neq \mu$. Por lo tanto,

$$g(z) = \frac{z-\lambda}{z-\mu} f(z) = \frac{z-\lambda}{z-\mu} \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\, d\alpha(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\, d\beta(t), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda, \mu\},$$

y se obtiene el resultado —la continuidad de las funciones involucradas permite obtener la igualdad para todo $z \in \mathbb{C}$—. □

Argumentando de manera similar a la demostración del corolario 2.19, obtenemos un resultado análogo para $L^p[-\pi,\pi]$:

Corolario 5.2. *Sea*

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) e^{izt}\, dt, \quad z \in \mathbb{C},$$

donde $\alpha \in L^p[-\pi,\pi]$, para $1 \leq p \leq \infty$. Si $\mu \in \mathbb{C}$ es tal que $f(\mu) = 0$ y, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \mu$, se define

$$g(z) = \frac{z-\lambda}{z-\mu} f(z)$$

para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces existe $\beta \in L^p[-\pi,\pi]$ tal que

$$g(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) e^{izt}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Además, se tiene que

$$\beta(t) = \alpha(t) + i(\lambda - \mu) e^{-i\mu t} \int_{-\pi}^{t} \alpha(s) e^{i\mu s}\, ds \tag{5.4}$$

para casi todo $t \in [-\pi,\pi]$.

Demostración. Definimos la medida compleja de Borel

$$\alpha_1(E) = \int_E \alpha(t)\, dt$$

para cada $E \subset [-\pi,\pi]$ medible. Se verifica que, si m es la medida de Lebesgue en $[-\pi,\pi]$, $\alpha_1 \ll m$ y que $\alpha = \frac{d\alpha_1}{dm}$. De esta forma, en virtud de la proposición 1.6,

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) e^{izt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \frac{d\alpha_1}{dm}(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\, d\alpha_1(t)$$

y, al aplicar la proposición anterior, se deduce que existe una medida compleja de Borel β_1 tal que

$$g(z)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\,d\beta_1(t),\quad z\in\mathbb{C},$$

donde

$$d\beta_1(t)=d\alpha_1(t)+i(\lambda-\mu)e^{-i\mu t}\left(\int_{-\pi}^{t} e^{i\mu s}\,d\alpha_1(s)\right)dt.$$

Si tenemos en cuenta la expresión anterior y aplicamos, de nuevo, la regla de la cadena, llegamos a que

$$\begin{aligned}
g(z)&=\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\,d\beta_1(t)\\
&=\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\,d\alpha_1(t)+\int_{-\pi}^{\pi} i(\lambda-\mu)e^{-i\mu t}\left(\int_{-\pi}^{t} e^{i\mu s}\,d\alpha_1(s)\right)e^{izt}\,dt\\
&=\int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t)e^{izt}\,dt+\int_{-\pi}^{\pi} i(\lambda-\mu)e^{-i\mu t}\left(\int_{-\pi}^{t} \alpha(s)e^{i\mu s}\,ds\right)e^{izt}\,dt\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\alpha(t)+i(\lambda-\mu)e^{-i\mu t}\left(\int_{-\pi}^{t} \alpha(s)e^{i\mu s}\,ds\right)\right)e^{izt}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\beta(t)e^{izt}\,dt,
\end{aligned}$$

que resulta ser la expresión buscada. Es sencillo comprobar que $\beta\in L^p[-\pi,\pi]$, pues en la expresión (5.4) sólamente aparecen sumas y productos que involucran a $\alpha\in L^p[-\pi,\pi]$ y a funciones continuas. □

Podemos ahora demostrar el resultado que queríamos:

Teorema 5.3. *Sea $1\le p<\infty$. Si el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo en $L^p[-\pi,\pi]$ o en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, entonces sigue siendo completo si se reemplaza alguno de los λ_n por otro $\mu\in\mathbb{C}$, distinto del resto.*

Demostración. Fijemos $n_0\in\mathbb{Z}$, y supongamos que el sistema

$$\left(\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}\setminus\{e^{i\lambda_{n_0} t}\}\right)\cup\{e^{i\mu t}\}$$

no es completo en $L^p[-\pi,\pi]$. Entonces existe una función $\alpha\in L^q[-\pi,\pi]$, donde q es el exponente conjugado de p, no idénticamente nula y tal que la función entera

$$f(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\alpha(t)e^{izt}\,dt,\quad z\in\mathbb{C}$$

verifica que $f(\mu)=0$ y $f(\lambda_n)=0$ para cada $n\in\mathbb{Z}\setminus\{n_0\}$, pero $f\not\equiv 0$, en virtud de la proposición 2.13 y el corolario 2.19. De este modo, la función

$$g(z) = \frac{z - \lambda_{n_0}}{z - \mu} f(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

es entera, no idénticamente nula, y se anula en el conjunto $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. En virtud del corolario 5.2, existe una función $\beta \in L^q[-\pi,\pi]$ tal que

$$g(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) e^{izt}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como $g \not\equiv 0$, debe ser $\beta \not\equiv 0$ y, por la proposición 2.13, el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no es completo en $L^p[-\pi,\pi]$.

En $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$ se razona de forma análoga, teniendo en cuenta la proposición 5.1. □

5.1.2. Una condición equivalente de completitud para los sistemas de exponenciales complejas

Por definición, para que un sistema de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ arbitrarias sea completo en un espacio normado X, se requiere que todos los elementos de dicho espacio sean aproximables en la norma de X por combinaciones lineales finitas $c_1 f_{n_1} + c_2 f_{n_2} + \cdots + c_k f_{n_k}$ de elementos de tal sistema. A partir del teorema 5.3 vemos que, en el caso que nos atañe, la cuestión anterior es mucho más sencilla: para que un sistema de exponenciales complejas $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sea completo en $L^p[-\pi,\pi]$ o en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, se necesita y basta que aproxime a otra función exponencial $e^{i\lambda t}$ cualquiera, en la norma correspondiente.

Precisamos del lema siguiente:

Lema 5.4. *Sean $\varepsilon > 0$ y $f, g \in L^p[-\pi,\pi]$, donde $p \in [1,\infty]$. Definimos*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad y \quad G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$$

para cada $x \in [-\pi,\pi]$. Si $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2\pi}$, entonces $\|F - G\|_p < \varepsilon$.

Demostración. Por la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\|f - g\|_1 \le (2\pi)^{\frac{1}{q}} \|f - g\|_p,$$

si q es el exponente conjugado de p. De este modo, si $1 \leq p < \infty$,

$$\begin{aligned}
\|F-G\|_p^p &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_0^x f(t)-g(t)\, dt \right|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^x |f(t)-g(t)|\, dt \right)^p dx \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f-g\|_1^p \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (2\pi)^{\frac{p}{q}} \|f-g\|_p^p \, dx = (2\pi)^{\frac{p}{q}+1} \|f-g\|_p^p \\
&= (2\pi)^p \|f-g\|_p^p .
\end{aligned}$$

Luego $\|F-G\|_p < \varepsilon$ como queríamos. □

Teorema 5.5. *Sea $p \in [1,\infty)$. El sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo en $L^p[-\pi,\pi]$ o en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$ si y solo si $\overline{\langle \{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty} \rangle}$ contiene a otra exponencial $e^{i\mu t}$, donde $\mu \in \mathbb{C}$ y es distinto de todos los λ_n.*

Demostración. La necesidad es consecuencia directa de la definición de completitud, pues $e^{i\mu t} \in L^p[-\pi,\pi] \cap \mathscr{C}[-\pi,\pi]$.

Pongamos $\gamma_n = \lambda_n - \mu$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ —obsérvese que $\gamma_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$—. Centramos primero nuestra atención en el caso de $L^p[-\pi,\pi]$, pues comprobaremos después que para el caso restante se puede proceder exactamente de la misma manera. Dividiremos la prueba en varias partes:

Parte 1: *Las constantes pueden ser aproximadas por el sistema $\{e^{i\gamma_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en la norma p en $[-\pi,\pi]$.*

Sean $a_0 \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$. Si $a_0 = 0$, entonces una combinación lineal nula de elementos del sistema $\{e^{i\gamma_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ nos sirve para aproximar a_0. Supongamos ahora que $a_0 \neq 0$ y que existe una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tal que todos sus términos son nulos salvo una cantidad finita y

$$\left\| e^{i\mu t} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t} \right\|_p < \frac{\varepsilon}{|a_0| \left\| e^{-i\mu t} \right\|_\infty}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left\| a_0 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_0 c_n e^{i\gamma_n t} \right\|_p &= \left\| a_0 e^{-i\mu t} \left(e^{i\mu t} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t} \right) \right\|_p \\
&\leq |a_0| \left\| e^{-i\mu t} \right\|_\infty \left\| e^{i\mu t} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t} \right\|_p < \varepsilon
\end{aligned}$$

para cualquier constante $a_0 \in \mathbb{C}$. Luego el sistema $\{e^{i\gamma_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ aproxima las constantes en la norma p en $[-\pi,\pi]$.

Parte 2: *Los monomios pueden ser aproximados por el sistema $\{e^{i\gamma_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en la norma p en $[-\pi,\pi]$.*

Procederemos por inducción sobre el grado del monomio. Por lo probado en la primera parte, ya sabemos que para un monomio de grado 0 se verifica la hipótesis. Supongamos ya demostrado que el sistema $\{e^{i\gamma_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ aproxima monomios de hasta grado $m-1$, y veámoslo para m.

Dados $a_m \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$, por la hipótesis de inducción, existe una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, todos nulos salvo una cantidad finita y tal que

$$\left\| a_m m t^{m-1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\gamma_n t} \right\|_p < \frac{\varepsilon}{4\pi}.$$

Al aplicar el lema 5.4 a la última desigualdad, deducimos que

$$\left\| a_m t^m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i\gamma_n)^{-1} c_n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i\gamma_n)^{-1} c_n e^{i\gamma_n t} \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como ya sabemos que las constantes pueden ser aproximadas, existe una sucesión de números complejos $\{d_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, todos nulos salvo una cantidad finita, tal que

$$\left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\gamma_n t} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i\gamma_n)^{-1} c_n \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En virtud de la desigualdad triangular podemos escribir

$$\begin{aligned} \left\| a_m t^m - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left((i\gamma_n)^{-1} c_n - d_n \right) e^{i\gamma_n t} \right\|_p &\le \\ \le \left\| a_m t^m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i\gamma_n)^{-1} c_n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i\gamma_n)^{-1} c_n e^{i\gamma_n t} \right\|_p & \\ + \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\gamma_n t} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i\gamma_n)^{-1} c_n \right\|_p &< \varepsilon \end{aligned}$$

y, en conclusión, el sistema $\{e^{i\gamma_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ aproxima cualquier monomio en la norma p en $[-\pi,\pi]$.

Parte 3: *Los polinomios pueden ser aproximados por el sistema $\{e^{i\gamma_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en la norma p en $[-\pi,\pi]$.*

Sean $\varepsilon > 0$ y $P(t) = \sum_{n=0}^{m} a_n t^n$ un polinomio con coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$ complejos. Existen, para cada $0 \le n \le m$, sucesiones de números complejos $\{c_{n,k}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, todos nulos salvo una cantidad finita y tales que

$$\left\| a_n t^n - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n,k} e^{i\gamma_k t} \right\|_p < \frac{\varepsilon}{m+1}, \quad 0 \le n \le m.$$

Entonces, por la desigualdad triangular,

$$\left\| P(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} c_{n,k} \right) e^{i\gamma_k t} \right\|_p \le \sum_{n=0}^{m} \left\| a_n t^n - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n,k} e^{i\gamma_n t} \right\|_p < \sum_{n=0}^{m} \frac{\varepsilon}{m+1} = \varepsilon,$$

y el sistema $\{e^{i\gamma_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ aproxima cualquier polinomio en la norma p en $[-\pi,\pi]$.

Parte 4: *El conjunto $S_\mu = \{e^{i\mu t} P(t) : P$ es un polinomio$\}$ es denso en $L^p[-\pi,\pi]$.*

Sea $\varepsilon > 0$. Como los polinomios son densos en $L^p[-\pi,\pi]$, dada $f \in L^p[-\pi,\pi]$ existe un polinomio P tal que

$$\left\| e^{-i\mu t} f(t) - P(t) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{\left\| e^{i\mu t} \right\|_\infty}.$$

De esta forma,

$$\left\| f(t) - e^{i\mu t} P(t) \right\|_p = \left\| e^{i\mu t} \left(e^{-i\mu t} f(t) - P(t) \right) \right\|_p \le \left\| e^{i\mu t} \right\|_\infty \left\| e^{-i\mu t} f(t) - P(t) \right\|_p < \varepsilon,$$

como queríamos ver.

Parte 5: *El sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo en $L^p[-\pi,\pi]$.*

Sea $S = \{P : P$ es un polinomio$\} \subset L^p[-\pi,\pi]$. Si definimos el operador lineal y continuo T como en el lema 4.8,

$$\begin{aligned} T : S &\longrightarrow L^p[-\pi,\pi] \\ f(t) &\longmapsto f(t) e^{i\mu t}, \end{aligned}$$

y ponemos S_μ como en el apartado anterior, se tiene que $T(S) = S_\mu$ es denso en $L^p[-\pi,\pi]$. Al aplicar la proposición 2.6 al sistema $\{e^{i\gamma_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, que es completo en S en virtud del tercer apartado, se concluye que $\{T(e^{i\gamma_n t})\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo en $L^p[-\pi,\pi]$.

La demostración para el caso en que $f \in \mathscr{C}[-\pi,\pi]$ es exactamente igual, pero tomando la norma $\|\cdot\|_\infty$ y teniendo en cuenta que los polinomios son densos en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, pues todas las propiedades utilizadas son también válidas si $p=\infty$. □

5.1.3. Aproximaciones entre las funciones del sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Establecemos la siguiente definición:

Definición 5.6. Decimos que un conjunto de vectores $\{x_j\}_{j\in J}$ de un espacio normado X es **minimal** si para cada $i \in J$ se tiene que $x_i \notin \overline{\langle x_j : j \in J \setminus \{i\}\rangle}$.

Ahora, de la negación del teorema 5.5, podemos inmediatamente deducir un corolario, en relación con la minimalidad.

Corolario 5.7. *Si el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es incompleto en $L^p[-\pi,\pi]$, donde $1 \le p < \infty$, o en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$, entonces es minimal.*

Finalizamos la sección con la interesante propiedad de que, dado un sistema de exponenciales complejas, o bien ningún elemento puede ser aproximado por los otros, o bien todos pueden serlo. Para ello, introducimos una nueva definición:

Definición 5.8. Decimos que un conjunto de vectores $\{x_j\}_{j\in J}$ de un espacio normado X es **vinculado** si para cada $i \in J$ se tiene que $x_i \in \overline{\langle x_j : j \in J \setminus \{i\}\rangle}$.

Teorema 5.9. *Todo sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en $L^p[-\pi,\pi]$, $1 \le p < \infty$, o en $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$ es, o bien minimal, o bien vinculado.*

Demostración. Si el sistema es incompleto, el corolario 5.7 garantiza que es minimal. Si es completo, o bien es minimal, o bien existe un $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$e^{i\lambda_{n_0} t} \in \overline{\langle e^{i\lambda_n t} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}\rangle}.$$

En ese caso, el sistema $\{e^{i\lambda_n t} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}\}$ sigue siendo completo y, por el teorema 5.3, también lo es el sistema $\{e^{i\lambda_n t} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}\}$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ fijo. Por lo tanto,

$$e^{i\lambda_k t} \in \overline{\langle e^{i\lambda_n t} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}\rangle}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

y se concluye que el sistema es vinculado. □

5.2. La estabilidad del sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$

Parece razonable, a tenor de lo expuesto sobre la estabilidad del sistema trigonométrico en $L^p[-\pi,\pi]$, preguntarnos si la completitud de un conjunto de exponenciales complejas se mantiene también bajo pequeñas perturbaciones de los exponentes, en el sentido de que se verifique una condición como las de los teoremas 4.3 y 4.7. La respuesta es negativa.

Veamos que, en general, si el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo, no existe ningún $\varepsilon > 0$ de manera que si $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos con

$$|\mu_n - \lambda_n| \leq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{5.5}$$

se pueda garantizar que el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sea completo en $L^2[-\pi,\pi]$. Pongamos

$$\lambda_n = \begin{cases} n - \frac{1}{4}, & n > 0, \\ n + \frac{1}{4}, & n < 0. \end{cases}$$

En virtud del teorema 4.23, el sistema $\{e^{i\lambda_n t} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ es completo en $L^2[-\pi,\pi]$. Consideremos $\varepsilon > 0$. Si definimos

$$\mu_n = \begin{cases} \lambda_n + \varepsilon, & n > 0, \\ \lambda_n - \varepsilon, & n < 0, \end{cases}$$

se tiene que $|\mu_n - \lambda_n| = \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Por otro lado, si $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$

$$|\mu_n - n| = \frac{1}{4} - \varepsilon < \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

y el teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec garantiza entonces que el sistema $\{e^{i\mu_n t} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{1\}$ es una base de $L^2[-\pi,\pi]$. Luego, si eliminamos un elemento de dicho sistema, en particular, la función constante 1, el conjunto $\{e^{i\mu_n t} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ deja de ser completo en $L^2[-\pi,\pi]$.

Como se deduce del siguiente teorema, en caso de que las sucesiones $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ y $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sean de números reales, basta con reforzar la condición (5.5): es suficiente encontrar una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ absolutamente sumable y tal que

$$|\mu_n - \lambda_n| \leq \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 5.10. *Sean $p \in [1,\infty)$, y $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n - \lambda_n| < \infty. \tag{5.6}$$

Si el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ es completo en $L^p[-\pi,\pi]$, entonces el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ también es completo en $L^p[-\pi,\pi]$.

Demostración. Supongamos que el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ no es completo. Entonces, en virtud de la proposición 2.13 y el corolario 2.19 existiría una función $\phi \in L^q[-\pi,\pi]$, donde q es el exponente conjugado de p, tal que la función entera

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{izt}\, dt$$

se anula en cada μ_n, $n \in \mathbb{N}$, pero no es idénticamente nula.

Definimos $\phi_0 = \phi$ y

$$\phi_n(t) = \phi_{n-1}(t) + i(\lambda_n - \mu_n) e^{-i\mu_n t} \int_{-\pi}^{t} \phi_{n-1}(s) e^{i\mu_n s}\, ds, \quad t \in [-\pi,\pi], \tag{5.7}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Procedemos por inducción sobre n para ver que $\phi_n \in L^q[-\pi,\pi]$. Por definición, se tiene que $\phi_0 \in L^q[-\pi,\pi]$. Si suponemos probado que $\phi_{n-1} \in L^q[-\pi,\pi] \subset L^1[-\pi,\pi]$, entonces se tiene que $s \to \phi_{n-1}(s) e^{i\mu_n s}$ es integrable y el teorema fundamental del Cálculo nos permite afirmar que la función

$$t \mapsto i(\lambda_n - \mu_n) e^{-i\mu_n t} \int_{-\pi}^{t} \phi_{n-1}(s) e^{i\mu_n s}\, ds$$

es continua en $[-\pi,\pi]$, al ser producto de funciones continuas en $[-\pi,\pi]$ y, por tanto, pertenece a $L^q[-\pi,\pi]$. De esta manera, $\phi_n \in L^q[-\pi,\pi]$, por ser suma de dos funciones de $L^q[-\pi,\pi]$.

Si ponemos, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$f_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(t) e^{izt}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}$$

se tiene que

$$f_n(z) = \frac{z-\lambda_n}{z-\mu_n} f_{n-1}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5.8}$$

en virtud del corolario 5.2 y, por tanto, f_n se anula en el conjunto $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \cup \{\mu_k\}_{k=n+1}^{\infty}$.

Veamos que $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^q[-\pi,\pi]$. Como $\mu_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\left|e^{i\mu_n t}\right| = \left|e^{-i\mu_n t}\right| = 1$, luego

$$\begin{aligned} \left|e^{-i\mu_n t}\int_{-\pi}^{t} \phi_{n-1}(s)e^{i\mu_n s}\,ds\right| &= \left|\int_{-\pi}^{t} \phi_{n-1}(s)e^{i\mu_n s}\,ds\right| \le \int_{-\pi}^{t} \left|\phi_{n-1}(s)e^{i\mu_n s}\right|\,ds \\ &= \int_{-\pi}^{t} |\phi_{n-1}(s)|\,ds \le \|\phi_{n-1}\|_1, \quad t \in [-\pi,\pi] \end{aligned} \tag{5.9}$$

y, entonces, de (5.7) y de la monotonía de la integral se deduce que

$$\begin{aligned} \|\phi_n - \phi_{n-1}\|_q &= \left\| i(\lambda_n-\mu_n)e^{-i\mu_n t}\int_{-\pi}^{t} \phi_{n-1}(s)e^{i\mu_n s}\,ds\right\|_q \\ &= |\lambda_n-\mu_n| \left\| e^{-i\mu_n t}\int_{-\pi}^{t} \phi_{n-1}(s)e^{i\mu_n s}\,ds\right\|_q \\ &= |\lambda_n-\mu_n| \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left| e^{-i\mu_n t}\int_{-\pi}^{t} \phi_{n-1}(s)e^{i\mu_n s}\,ds\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le |\lambda_n-\mu_n|\, \|\, \|\phi_{n-1}\|_1 \,\|_q = (2\pi)^{\frac{1}{q}} |\lambda_n-\mu_n|\, \|\phi_{n-1}\|_1 \end{aligned}$$

si $q \in (1,\infty)$. Como $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, tras aplicar la desigualdad de Hölder a ϕ_{n-1} llegamos a que

$$\|\phi_n - \phi_{n-1}\|_q \le 2\pi\, |\lambda_n-\mu_n|\, \|\phi_{n-1}\|_q, \quad 1 < q < \infty. \tag{5.10}$$

De modo similar, de (5.7) y de la definición de $\|\cdot\|_\infty$, si $p = 1$ y $q = \infty$ se sigue que

$$\|\phi_n - \phi_{n-1}\|_\infty \le |\lambda_n-\mu_n|\, \|\phi_{n-1}\|_1,$$

y al aplicar, de nuevo, la desigualdad de Hölder a ϕ_{n-1}, concluimos que

$$\|\phi_n - \phi_{n-1}\|_q \le 2\pi\, |\lambda_n-\mu_n|\, \|\phi_{n-1}\|_q$$

para $q \in (1,\infty]$. Si ponemos $\varepsilon_n = 2\pi\,|\lambda_n-\mu_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces podemos escribir que

$$\|\phi_n - \phi_{n-1}\|_q \le \varepsilon_n \|\phi_{n-1}\|_q, \quad n \in \mathbb{N}$$

y de (5.6) se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ es convergente. Luego de aplicar la desigualdad triangular obtenemos que

$$(1-\varepsilon_n)\|\phi_{n-1}\|_q \le \|\phi_n\|_q \le (1+\varepsilon_n)\|\phi_{n-1}\|_q, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

De este modo,

$$\|\phi_n\|_q \le \left(\prod_{k=1}^{n}(1+\varepsilon_k)\right)\|\phi\|_q \le C\|\phi\|_q \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.12}$$

donde $C = \text{lím}_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}(1+\varepsilon_k) \ge 1$ —obsérvese que la sucesión anterior es creciente, pues se tiene que $1+\varepsilon_k > 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y acotada pues, por la desigualdad $1+x \le e^x$, se tiene que

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\varepsilon_k) \le \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, luego es convergente—.

Sea $\varepsilon > 0$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ es convergente, verifica la condición de Cauchy: existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=n}^{m} \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{C\|\phi\|_q}$$

para todos $m \ge n \ge n_0$. En virtud de la desigualdad triangular y de las ecuaciones (5.10) y (5.12) deducimos que, para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n \ge n_0$,

$$\|\phi_m - \phi_n\|_q \le \sum_{k=n}^{m-1}\|\phi_{k+1} - \phi_k\|_q \le \sum_{k=n}^{m-1}\varepsilon_{k+1}\|\phi_k\|_q \le C\|\phi\|_q \sum_{k=n}^{m-1}\varepsilon_{k+1} < \varepsilon,$$

y resulta que $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $L^q[-\pi,\pi]$. Al ser $L^q[-\pi,\pi]$ un espacio de Banach, la sucesión $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia una función $\Phi \in L^q[-\pi,\pi]$.

Si tenemos en cuenta el lado izquierdo de (5.11), y que $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de términos no negativos y converge a 0 —recuérdese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ es convergente—, podemos escribir

$$\left(\prod_{k=n_0+1}^{n}(1-\varepsilon_k)\right)\|\phi_{n_0}\|_q \le \|\phi_n\|_q, \quad n > n_0, \tag{5.13}$$

donde $n_0 \in \mathbb{N}$ es tal que $1-\varepsilon_n > 0$ si $n \geq n_0$. Como $f_0 = f \not\equiv 0$, de (5.8) se deduce que, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n no es idénticamente nula y, por tanto, que $\phi_n \not\equiv 0$. Por otra parte,

$$\prod_{k=n_0}^{n} (1-\varepsilon_k) = \prod_{k=n_0}^{n} e^{\log(1-\varepsilon_k)} = \exp\left(\sum_{k=n_0}^{n} \log(1-\varepsilon_k)\right),$$

de donde se sigue que

$$\prod_{k=n_0}^{\infty} (1-\varepsilon_k) = \exp\left(\sum_{k=n_0}^{\infty} \log(1-\varepsilon_k)\right) > 0,$$

pues $\sum_{k=n_0}^{\infty} \log(1-\varepsilon_k)$ es convergente —basta aplicar el criterio de comparación y notar que la sucesión $\{\log(1-\varepsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $\{-\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$—. De esta forma, si tomamos límites en (5.13), llegamos a que

$$0 < \left(\prod_{k=n_0}^{\infty} (1-\varepsilon_k)\right) \left\|\phi_{n_0}\right\|_q \leq \|\Phi\|_q\,,$$

y Φ debe ser no idénticamente nula.

Finalmente, veamos que el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es incompleto en $L^p[-\pi,\pi]$. Pongamos

$$g(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) e^{izt}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como, por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} |f_n(z) - g(z)| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} (\phi_n(t) - \Phi(t)) e^{izt}\, dt\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left|(\phi(t)_n - \Phi(t)) e^{izt}\right| dt \\ &\leq \|\phi_n(t) - \Phi(t)\|_q \left\|e^{izt}\right\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

resulta que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a g y, como $f_n(\lambda_k) = 0$ para cada $1 \leq k \leq n$, debe ser $g(\lambda_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Al aplicar la proposición 2.13, se concluye la demostración del teorema. □

Observación 5.11. Es posible dar un resultado más general que el anterior si afinamos las cotas de las normas $\|\phi_n\|_q$, que permite que las sucesiones sean de números complejos —véase [Red77, teo 14]—.

A partir del teorema 5.10 podemos resolver la cuestión que quedó pendiente al hablar del teorema $\frac{1}{4}$ de Kadec: ¿es posible relajar la condición (4.13) y exigir sólamente que se verifique que

$$|\lambda_n - n| < \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}? \tag{5.14}$$

El sistema del teorema 4.23 nos facilita un contraejemplo:

Proposición 5.12. *Sea $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ la sucesión de números complejos definida por*

$$\mu_n = \begin{cases} n - \frac{1}{4} + \frac{1}{(n+1)^2}, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n + \frac{1}{4} - \frac{1}{(n-1)^2}, & n < 0. \end{cases}$$

Entonces el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ verifica que $|\mu_n - n| < \frac{1}{4}$, pero no es exacto y, en particular, no es una base de $L^2[-\pi,\pi]$.

Demostración. Sea $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ la sucesión de números complejos definida por

$$\lambda_n = \begin{cases} n - \frac{1}{4}, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ n + \frac{1}{4}, & n < 0. \end{cases}$$

El teorema 4.3 nos permite afirmar que el sistema $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es completo en $L^2[-\pi,\pi]$ y, como se verifica que

$$|\mu_n - \lambda_n| = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^2}, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

resulta que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mu_n - \lambda_n|$ es convergente y el sistema $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ debe ser también completo en $L^2[-\pi,\pi]$, en virtud del teorema 5.10.

Recordamos el teorema 4.23, en el que vimos que el sistema $\{e^{i\lambda_n t} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ es completo en $L^2[-\pi,\pi]$. Al igual que antes, como $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\mu_n - \lambda_n| < \infty$, llegamos a que el sistema $\{e^{i\mu_n t} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ es completo en $L^2[-\pi,\pi]$. Se concluye, entonces, que $\{e^{i\mu_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no es exacto, luego no puede ser una base de $L^2[-\pi,\pi]$. □

Bibliografía

[Lev40] N. Levinson. *Gap and Density Theorems*. American Mathematical Society colloquium publications. American Mathematical Society, 1940. ISBN: 9780821810262.

[Red77] Raymond M Redheffer. «Completeness of sets of complex exponentials». En: *Advances in Mathematics* 24.1 (1977), págs. 1-62.

[Rud87] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Higher Mathematics Series. McGraw-Hill Education, 1987. ISBN: 9780070542341.

[Fol99] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 1999. ISBN: 9780471317166.

[MH99] J.E. Marsden y M.J. Hoffman. *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman, 1999. ISBN: 9780716728771.

[You01] R.M. Young. *An Introduction to Non-Harmonic Fourier Series, Revised Edition, 93*. An Introduction to Nonharmonic Fourier Series. Elsevier Science, 2001. ISBN: 9780127729558.

[GST03] F. Galindo Soto, J. Sanz Gil y L.A. Tristán Vega. *Guía práctica de Cálculo Infinitesimal en una variable real*. Ediciones Paraninfo, S.A, 2003. ISBN: 9788497322072.

[AN07] R.B. Ash y W.P. Novinger. *Complex Variables*. Dover books on Mathematics. Dover Publications, 2007. ISBN: 9780486462509.

[Bog07] V.I. Bogachev. *Measure Theory*. Measure Theory v. 1. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 9783540345145.

[Chr16] O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Springer International Publishing, 2016. ISBN: 9783319256139.

Índice alfabético

Se listan apariciones de resultados clásicos y conceptos externos al trabajo que juegan un papel relevante en enunciados o demostraciones. Por otro lado, aquellos enunciados y conceptos propios del trabajo aparecen listados al menos una vez, refiriéndonos a su demostración o su definición en cada caso, así como pueden figurar también otras menciones de especial relevancia de los mismos.