



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Arreglos de Hiperplanos

Autora:
Sofía de Castro Galván

Tutor:
Antonio Campillo López

Agradecimientos

A mi tutor, Antonio, que ha hecho lo posible por guiarme y acompañarme a lo largo de este trabajo.

A Miguel, que ha estado a mi lado en el transcurso de toda esta etapa.

A mi familia, amigos, y a Fer.

Abstract

In this Final Degree Project we focus on developing the theory of hyperplane arrangements. Our objective is, following [6], to understand and present important results of this theory, with its pertinent demonstrations. Important, closely related algebraic concepts, such as the theory of posets and lattices or Möbius algebra, will be explained to strengthen and develop our understanding of this theory, and combinatorial aspects, such as the computation of regions, will be covered. This entire theory will also be related to the theory of graphs and matroids, developing some more basic aspects and definitions of both mathematical objects, and they will be combined with the previously developed arrangement theory. The finite fields method will also be discussed and some arrangements of interest will be exemplified.

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado nos centramos en desarrollar la teoría de arreglos de hiperplanos. Nuestro objetivo es, siguiendo [6] comprender y exponer importantes resultados de esta teoría, con sus pertinentes demostraciones. Se explicarán conceptos algebraicos importantes estrechamente relacionados, como la teoría de posets y retículos o el álgebra de Möbius, para afianzar y desarrollar nuestra comprensión de esta teoría, y se tratarán aspectos combinatorios, como el cómputo de regiones. También se relacionará toda esta teoría con la teoría de grafos y matroides, desarrollando algunos aspectos y definiciones más básicas de ambos objetos matemáticos, y se aunarán con la teoría de arreglos previamente desarrollada. También se tratará el método de cuerpos finitos y se ejemplificarán algunos arreglos de interés.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	5
2. HIPERPLANOS	7
2.1. Definiciones básicas	7
2.2. Poset de intersección	11
3. PROPIEDADES DEL POSET DE INTERSECCIÓN	17
3.1. Triple de arreglo	17
3.2. Retículos	18
3.3. Álgebra de Möbius	20
3.4. Polinomio característico	22
3.5. El número de regiones	26
4. ARREGLOS GRÁFICOS	28
4.1. Teoría de grafos	28
4.2. Arreglos gráficos	30
4.3. Teorema de los Cuatro Colores	33
5. MATROIDES	36
5.1. Matroides y sus definiciones	36
5.2. Retículo de <i>flats</i> y retículos geométricos	43
5.3. Matroides de los arreglos de hiperplanos	48
5.3.1. Polinomios característicos	50
6. CUERPOS FINITOS	52
6.1. El método de cuerpos finitos	52
6.2. Ejemplos de arreglos	54
6.2.1. Arreglos de trenzas	54
6.2.2. Arreglos de Catalan	55
6.2.3. Arreglo de Shi	57

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Este Trabajo de Fin de Grado se centra en el estudio de los arreglos de hiperplanos, en general en distintos espacios. Un arreglo de hiperplanos finito \mathcal{A} es un conjunto finito de hiperplanos afines, en algún espacio vectorial $V \cong K^n$, con K cuerpo. Nos centraremos en sus características y en ciertos conceptos como su polinomio característico, poset de intersección, etcétera.

Los arreglos de hiperplanos son una disciplina clásica; aunque su teoría empezó a surgir como algo más asentado a partir de finales del siglo XX. Principalmente, matemáticos como Thomas Zaslavsky perscuraron algunos resultados interesantes a lo largo de esta época.

Nos ha resultado particularmente interesante esta teoría, ya que, pese a su simplicidad, se puede estudiar desde diferentes disciplinas, como la topología, el álgebra o la combinatoria, en la que nos centraremos más a lo largo de este trabajo.

También resulta cautivador cómo se puede relacionar la teoría de arreglos de hiperplanos con otros objetos matemáticos, como los grafos o las matroides.

En nuestra primera sección, daremos algunas definiciones preliminares, y asentaremos conceptos como el poset de intersección de un arreglo o su polinomio característico. La siguiente sección se referirá a éstos últimos, haciendo un estudio más profundo sobre estos conceptos y ampliándolos. También se definirán nuevas nociones, como el Álgebra de Möbius, o los retículos y semi-retículos, ya que nos ayudarán a ilustrar y comprender mejor las características de cada arreglo.

Estas dos secciones estarán principalmente basadas en la referencia [6], ya que nos ha resultado un texto especialmente útil para la comprensión de estos campos.

Posteriormente, desarrollamos una sección entera sobre arreglos gráficos, que nos resultan particularmente interesantes al aunar la teoría de grafos con la teoría desarrollada sobre arreglos de hiperplanos. Se hace una breve introducción a la teoría de grafos con algunas definiciones básicas. Nos hemos basado para ello principalmente en las referencias [4], [8]; posteriormente, se relaciona el polinomio cromático de un grafo con el polinomio característico de un arreglo, y se añade alguna curiosidad más sobre el polinomio cromático.

En nuestra siguiente sección, introducimos en teoría de matroides; nos hemos guiado con los libros [2] y [3]. Se hace una introducción sobre teoría de matroides y después se estudia su retículo de *flats*, para acabar, de nuevo, relacionándolo con la teoría ya vista sobre arreglos.

La última subsección plantea el método de cuerpos finitos, gracias al cual podemos sacar el polinomio característico de un arreglo definiéndolo sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q . También desarrollamos varios ejemplos de arreglos interesantes, ejemplificando varios tipos de arreglos y ayudándonos con la teoría vista anteriormente.

Capítulo 2

HIPERPLANOS

2.1. Definiciones básicas

Para comenzar con esta sección inicial, primero recordaremos algunas definiciones básicas, como la función de Möbius o las propias definiciones de arreglo e hiperplanos, para lo que nos hemos ayudado de [6],[1]. Posteriormente, ahondaremos mejor en sus características en las siguientes secciones.

Comenzamos definiendo qué es un hiperplano de forma más detallada:

Definición 2.1

Sea V un K -espacio vectorial n -dimensional. Un subespacio afín de V con codimensión uno es un hiperplano H de V , es decir, un subespacio de dimensión $n - 1$, definido como [6]:

$$H = \{v \in V : \alpha \cdot v = 0\}, \quad (2.1)$$

donde $\alpha \in K^n - \{0\}$

También podemos dar la definición de hiperplano afín:

Definición 2.2

Un hiperplano afín es una traslación J de un hiperplano lineal:

$$J = \{v \in V : \alpha \cdot v = a\} \quad (2.2)$$

donde α es un vector distinto de cero, y a pertenece al cuerpo K .

Definición 2.3

Un subespacio afín es un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$, si x, y pertenecen a S , y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$.

Con esto podemos definir la dimensión de todo espacio afín S como la dimensión de un subespacio vectorial con $S - x$, con $x \in S$. Así, podemos hacer lo mismo con los hiperplanos afines, ya que su traslación será su vector ortogonal,

con lo que su dimensión será $d - 1$.

Bien sabemos entonces que cada hiperplano divide al espacio en que estamos trabajando en dos secciones. En particular, cada hiperplano afín de la forma (2) divide el espacio en dos regiones, $\alpha \cdot v > a$, y $\alpha \cdot v < a$, respectivamente.

Una vez estos conceptos están claros, podemos pasar a dar una definición de arreglo de hiperplanos.

Definición 2.4

Un arreglo de hiperplanos finito \mathcal{A} es un conjunto finito de hiperplanos afines, en algún espacio vectorial $V \cong K^n$, con K cuerpo.

Ahora, supongamos un arreglo formado por d hiperplanos, de ecuaciones $L_1(x) = a_1, L_2(x) = a_2, \dots, L_d(x) = a_d$, entonces el polinomio

$$Q_{\mathcal{A}}(x) = (L_1(x) - a_1)(L_2(x) - a_2)\dots(L_d(x) - a_d) \quad (2.3)$$

es el polinomio definidor del arreglo.

Así, un arreglo de hiperplanos \mathcal{A} dividirá a V en varias componentes conexas, a las que llamamos **regiones**; si tenemos, por ejemplo, el hiperplano de fórmula $L_1(x) = a_1$, dividirá al espacio en dos regiones, una a cada lado del hiperplano, tal que $L_1(x) > a_1$, y otra tal que $L_1(x) < a_1$.

Definición 2.5

Una región del arreglo \mathcal{A} es una componente conexa del complementario X de los hiperplanos:

$$X = \mathbb{R}^n - \bigcup H, \quad (2.4)$$

donde la unión se extiende a todos los hiperplanos H de \mathcal{A} .

Cada región es convexa (como ya habíamos mencionado) y abierta; por ello es homeomorfa al interior de una bola n -dimensional.

A lo largo de este texto se buscarán formas de contar las regiones de un arreglo, dependiendo de las intersecciones de los hiperplanos y, por ende, de su posición.

Se dice que un arreglo \mathcal{A} está en **posición general** cuando tiene el máximo número de regiones. En este caso,

- $H_1, \dots, H_p \subseteq \mathcal{A}, p \leq n \longrightarrow \dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) = n - p$
- $H_1, \dots, H_p \subseteq \mathcal{A}, p > n \longrightarrow H_1 \cap \dots \cap H_p = \emptyset$

Es decir,

- Dos hiperplanos distintos se intersectan en un subespacio afín de dimensión $n - 2$.

- Tres hiperplanos distintos se intersectan en un subespacio afín de dimensión $n - 3$.
- ...
- n hiperplanos distintos se intersectan en un punto.
- Más de n hiperplanos distintos no tienen intersección.

Ejemplo 2.6

Hemos visto este ejemplo en la referencia [1], y resulta particularmente interesante para familiarizarnos con el conteo de regiones.

Se elige para esto un arreglo \mathcal{A} en $V \cong \mathbb{R}^2$. Estamos ahora en el plano, luego los hiperplanos que forman \mathcal{A} serán rectas. En este caso, si queremos que \mathcal{A} esté en posición general, dos rectas diferentes se intersectarán en un único punto, por lo que no habrá rectas paralelas. Además, siguiendo el razonamiento anterior, para $n + 1$ hiperplanos nunca se intersectarán, por lo que no habrá tres rectas concurrentes.

También podemos señalar esto mismo en \mathbb{R}^3 . Cada dos planos distintos se intersectarán en una recta, y tres planos en un punto. Cuatro planos no se cortarían.

Siguiendo esto, podemos hallar el número de regiones de un arreglo en \mathbb{R}^2 en posición general, a través del llamado **método del hiperplano de barrido**.

Imaginemos un arreglo de k rectas en posición general, y una recta S que también esté en posición general para con el arreglo. Podemos arrastrar la recta S hasta el infinito barriendo todo el plano, pero independientemente de ello, al estar en posición general, se interseca una vez con cada recta del arreglo, k veces en total. Por cada intersección, la recta S genera una nueva región, más una al final, es decir, $L = k + 1$ regiones en total.

Por tanto,

$$r(\mathcal{A}_L) = r(\mathcal{A}_k) + L \tag{2.5}$$

Esto implica

$$r(\mathcal{A}_L) = \#intersecciones + \#rectas + 1 = \binom{L}{2} + \binom{L}{1} + \binom{L}{0} = \binom{L}{2} + L + 1 \tag{2.6}$$

Es evidente que el número de intersecciones será igual a $\binom{L}{2}$, ya que los hiperplanos están en posición general, con lo que cada recta interseca con cada una de las otras una única vez; con lo que será igual a los hiperplanos tomados de dos en dos; y evidentemente, el número de rectas será $\binom{L}{1}$.

También se puede así hallar el número de secciones acotadas, $b(\mathcal{A}_L)$. Sabemos que tenemos $b(\mathcal{A}_k)$ regiones acotadas, con $L = k + 1$. La recta S divide a n

regiones y $n - 2$ son acotadas, con lo que:

$$b(\mathcal{A}_L) = b(\mathcal{A}_k) + (L - 2) \quad (2.7)$$

$$b(\mathcal{A}_L) = \binom{L}{2} - \binom{L}{1} + \binom{L}{0} \quad (2.8)$$

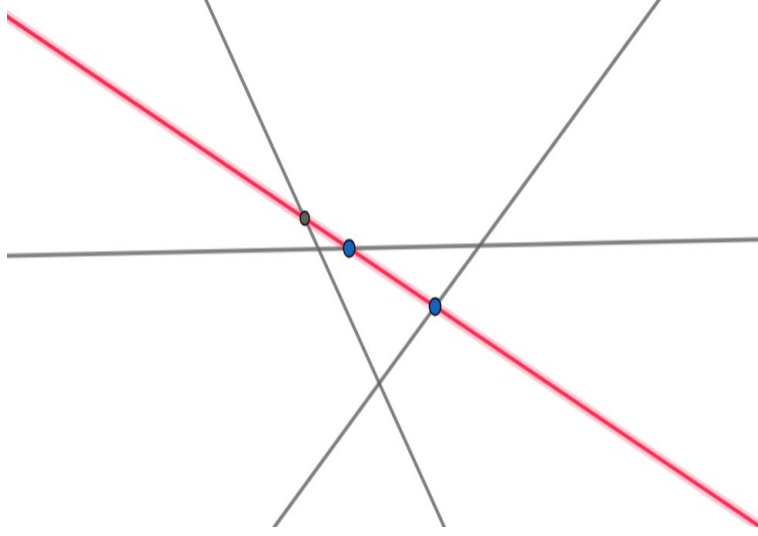


Figura 2.1: Se muestra un arreglo de 3 hiperplanos, con una nueva recta

Utilizando el mismo razonamiento, podemos probar lo mismo para \mathbb{R}^3 . Suponemos un arreglo de k planos en \mathbb{R}^3 , en posición general. Añadimos un plano P , de modo que los $k + 1$ planos estén también en posición general. Con el mismo procedimiento del hiperplano de barrido, vemos que el plano P se interseca en una única recta con cada plano, y dichas rectas estarán también en posición general (tres planos se intersectan únicamente en un punto). Ya hemos visto antes que dichas rectas forman $\binom{L}{2} + \binom{L}{1} + \binom{L}{0}$ regiones; $\binom{L}{2} - \binom{L}{1} + \binom{L}{0}$ de ellas acotadas. Si añadimos el plano P , se intersectará con las k rectas que dividirá las regiones que se forman en P en dos de nuevo, de forma que:

$$r_2(\mathcal{A}_k) = \binom{k}{2} + \binom{k}{1} + \binom{k}{0} \quad (2.9)$$

Y finalmente,

$$r_3(L) = r_3(k) + r_2(k) = r_3(k) + \binom{k}{2} + \binom{k}{1} + \binom{k}{0} \quad (2.10)$$

De la misma manera, cada región acotada generará una nueva región acotada, y:

$$b_3(L) = b_3(k) + b_2(k) = b_3(k) + \binom{k}{2} - \binom{k}{1} + \binom{k}{0} \quad (2.11)$$

Notemos que aquí los subíndices 2, 3 de r y b indican la dimensión 2, 3 a la que se refiere.

Definición 2.7

Definimos ahora la dimensión de \mathcal{A} , $\dim(\mathcal{A})$, que resulta ser $\dim(V) = n$, y su rango, $\text{rank}(\mathcal{A})$, que es la dimensión del espacio vectorial generado por las rectas normales de los hiperplanos que lo forman.

Decimos que un arreglo es **esencial** si $\text{rank}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A})$.

Supongamos ahora un arreglo \mathcal{A} tal que $\text{rank}(\mathcal{A}) = r$, y sea $V = K^n$. Sea Y un espacio vectorial complementario a X , siendo este último el espacio vectorial generado por las normales del arreglo. Se define:

$$W = \{v \in V : v \cdot y = 0 \quad \forall y \in Y\} \quad (2.12)$$

Podemos tomar simplemente $W = X$. Claramente, se tiene:

$$\text{codim}_W(H \cap W) = 1 \quad (2.13)$$

para todo $H \in \mathcal{A}$. Esto es, $H \cap W$ es un hiperplano de W , y $\mathcal{A}_W = \{H \cap W : \forall H \in \mathcal{A}\}$ es un arreglo esencial en W . Además, \mathcal{A} y \mathcal{A}_W son "esencialmente iguales", en particular, tienen el mismo poset de intersección que definiremos a continuación, y sus regiones estarán en biyección.

Llamaremos a \mathcal{A}_W esencialización de \mathcal{A} , y lo denotaremos por \mathcal{A}^{es} .

También son muy interesantes e importantes los **arreglos centrales**: un arreglo es central si todos los hiperplanos se intersecan, es decir, si $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$. Si un arreglo es central con $X = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$, tenemos que $\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{codim}(X)$; además, un arreglo central carece de regiones acotadas.

2.2. Poset de intersección

Hemos visto que las intersecciones de los arreglos definen sus regiones; a partir de sus intersecciones podemos llegar a definir un poset, cuyo estudio nos es muy interesante en este trabajo. Primero, vamos a revisar la definición de poset:

Definición 2.8

Un poset es un conjunto P que cuenta con una relación de orden parcial \leq , es decir, tal que

- Es reflexiva; $x \leq x$
- Es antisimétrica; si $x \leq y$, e $y \leq x$, entonces $x = y$
- Es transitiva; si $x \leq y$, e $y \leq z$, entonces $x \leq z$

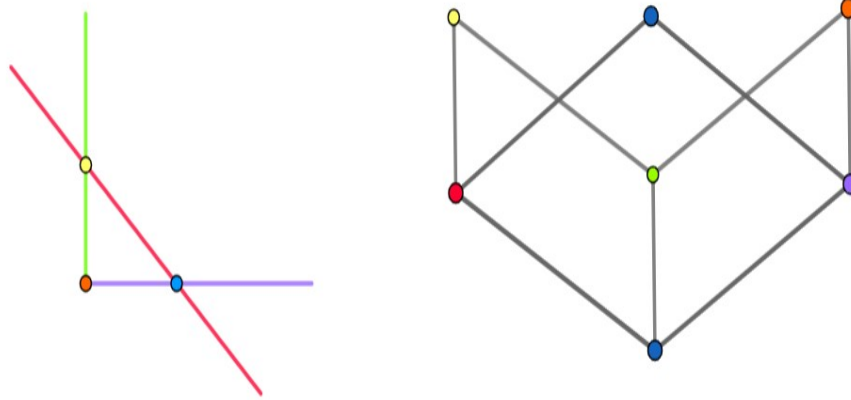


Figura 2.2: Un arreglo de tres hiperplanos junto a su poset de intersección

Definición 2.9

Sea \mathcal{A} un arreglo en V , $L(\mathcal{A})$ el conjunto de las posibles intersecciones de los hiperplanos de \mathcal{A} que no son vacías, incluyendo el propio V como la intersección con el conjunto vacío.

Definimos $x \leq y$ en $L(\mathcal{A})$ como $x \supseteq y$; es decir, $L(\mathcal{A})$ está parcialmente ordenado por relación inversa de inclusión. Llamamos a $L(\mathcal{A})$ poset de intersección de \mathcal{A} .

Como ya hemos dicho, el propio espacio vectorial V en que está definido un arreglo \mathcal{A} , estará también dentro del poset de intersección $L(\mathcal{A})$, luego para todo $x \in L(\mathcal{A})$, se dará $V \leq x$. Esto quiere decir que el poset tiene un mínimo y que ese mínimo es V .

En general, podemos denotar por $\hat{0}$ en un poset P al único elemento tal que $x \geq \hat{0}$ para cualquier x perteneciente a P , si dicho elemento existe. También, diremos que y cubre a x en un poset P , cuando $x < y$, y además no exista z tal que $x < z < y$. Lo representamos como $x < y$.

Podemos, sabiendo esto, representar el poset de intersección de un arreglo a través de un diagrama de Hasse, en el cual los elementos de nuestro poset de intersección P son representados como puntos, pintando x debajo de y si $x < y$, y una línea que los una si y cubre a x .

Una cadena de longitud k en un poset P , es un conjunto $x_0 < x_1 < \dots < x_k$,

de forma que además $x_0 < x_1 < \dots < x_k$. Decimos que P es **graduado** de rango n si sus cadenas maximales son de longitud n .

Si el poset P tiene un mínimo, se denotará por $\hat{0}$; si tiene un máximo, se denotará por $\hat{1}$. Si P es graduado, estará definida la siguiente aplicación: Definimos una **función rango**,

$$rk : P \longrightarrow \mathbb{N} \quad (2.14)$$

Como aquella función con valores en el conjunto de números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ que cumpla las dos condiciones siguientes:

- $rk(x) = 0$ si x es un elemento minimal de P .
- $rk(y) = rk(x) + 1$ si $x < y$ en P

Para un poset finito P , si existe la función rango, ésta es única, según se deduce de las dos propiedades anteriores. También se deduce que la función rango existe exactamente cuando P es graduado.

Por ende, si dicha función rango existe, también sabemos que si $x < y$, $rk(x, y) = rk(y) - rk(x) \geq 0$, valor al que llamamos la longitud del intervalo $[x, y]$. Además diremos que el rango de P es el máximo valor que toma la función rango.

Teorema 2.10

Sea \mathcal{A} un arreglo en un espacio vectorial $V \cong K^n$, entonces su poset de intersección $L(\mathcal{A})$ es graduado del mismo rango que \mathcal{A} . La función rango de $L(\mathcal{A})$ es:

$$rk(x) = \text{codim}(x) = n - \text{dim}(x) \quad (2.15)$$

Demostración Hemos visto que $L(\mathcal{A})$ tiene un único elemento minimal, $\hat{0} = V$. Como si $x < y$, no existe z tal que $x < z < y$, entonces $\text{dim}(x) - \text{dim}(y) = 1$; si H es un hiperplano y x un subespacio afín, entonces $H \cap x = x$ o $\text{dim}(x) - \text{dim}(H \cap x) = 1$.

Ahora supongamos que x tiene la codimensión más grande en el poset de intersección, supongamos $\text{codim}(x) = d$; entonces x es la intersección de d hiperplanos linealmente independientes, H_1, \dots, H_d en \mathcal{A} . Sea $y \in L(\mathcal{A})$ y supongamos $\text{codim}(y) = e$, sabemos que $e < d$. Entonces y es una intersección de H_1, \dots, H_e hiperplanos linealmente independientes, y algún hiperplano H_i , con $1 \leq i \leq d$ será linealmente independiente de ellos. Con esto, $\text{codim}(y \cap H_i) > \text{codim}(y)$, y encontramos que y no es un elemento maximal del poset. Hemos demostrado así que todos los elementos maximales del poset tienen dimensión $n - \text{rank}(\mathcal{A})$.

Definición 2.11

Sea P un poset de intersección de un arreglo \mathcal{A} . Su *función de Möbius* $\mu : P \longrightarrow Z$, se define por:

- $\mu(\hat{0}) = 1$

$$\blacksquare \mu(x) = -\sum_{y < x} \mu(y), \text{ para todo } x \neq \hat{0}$$

Más generalmente, para un poset P finito (o localmente finito en general, ver [6]) se puede definir la función de Möbius como función de dos valores como sigue:

Definición 1.11

Sea P un poset de intersección localmente finito de un arreglo. Definimos la función $\mu : P \rightarrow \mathbb{Z}$ por las siguientes condiciones:

- $\mu(x, x) = 1$, para todo $x \in P$.
- $\mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z)$, ‘para todo $x < y$ en P .

Dicha segunda condición implica que $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0$, para todo $x < y$ en P .

Si P tiene un $\hat{0}$, entonces escribiremos $\mu(x) = \mu(x, \hat{0})$, obteniendo así la función de Möbius de una variable.

Nos referimos ahora a la **fórmula de inversión de Möbius**. Consideramos ahora las funciones $f, g : P \rightarrow K$, de una sola variable. El conjunto $F(P)$ de tales funciones tiene definida una suma evidente $f + g$ con la que podemos definir un grupo abeliano. De hecho, podemos definir también un espacio vectorial sobre K , ya que también hay una multiplicación por escalares de K obvia. Ahora, para $fg \in F(L)$, tenemos el producto (o convolución):

$$fg(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y)$$

Esto hace de $F(L)$ un álgebra asociativa, con función identidad δ ; la conocida *delta de Kronecker*. En esta álgebra δ es la unidad con respecto a la multiplicación, y la función de Möbius $\mu(x, y)$ es la inversa de la función $\zeta(x, y) = 1$, para $x \leq y$, es decir $\mu\zeta = \delta$.

La fórmula de inversión de Möbius afirma lo siguiente: para dos funciones $f, g \in F(P)$, son equivalentes los dos grupos de fórmulas:

$$f(x) = \sum_{y \geq x} g(y) \quad g(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x, y)f(y) \quad (2.16)$$

Para demostrarlo, vemos simplemente que:

$$\xi f(x) = \sum_{y \geq x} \xi(x, y)f(y)$$

por ser $F(L)$ un álgebra. Simplemente vemos que

$$\zeta f = g \iff f = \mu g$$

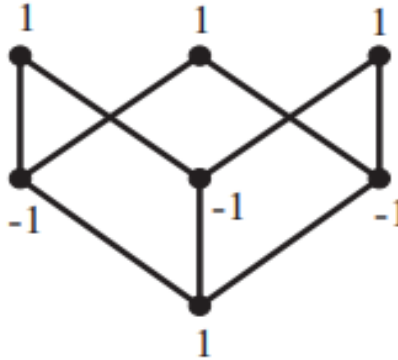


Figura 2.3: Valores de la función de Möbius en el anterior ejemplo. Imagen sacada de la referencia [1]

Definición 2.12

El **polinomio característico** $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ del arreglo \mathcal{A} está definido como:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu(x) t^{\dim(x)} \tag{2.17}$$

Aquí la función $\mu(x)$ está bien definida en una variable, pues siempre contamos con un mínimo en el poset de intersección del arreglo, y obtendremos que $\mu(x) = \mu(\hat{0}, x)$.

Ejemplo 2.13

La Figura 2.2 nos muestra un arreglo sencillo, de tres rectas, junto con su poset de intersección. La Figura 2.3 nos muestra los valores de la función de Möbius en el poset; su polinomio característico será:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 3t + 3$$

Ejemplos 2.14

Mencionamos ahora varios ejemplos de arreglos que nos resultan interesantes:

1. **Arreglo de trenzas clásico;** \mathcal{B}_n está formado por los hiperplanos de la forma $x_i - x_j = 0$, para $1 \leq i < j \leq n$. Claramente, este tipo de arreglo tiene $\binom{n}{2}$ hiperplanos.
2. **Arreglo de Shi;** este arreglo está formado por los hiperplanos de la forma $x_i - x_j = 0$, como el de trenzas, y además los de la forma $x_i - x_j = 1$, para $1 \leq i < j \leq n$. Habrá $n(n - 1)$ hiperplanos en total.

3. **Arreglo de Catalan;** está formado por los hiperplanos que forman el arreglo de Shi, $x_i - x_j = 0$, $x_i - x_j = 1$ más los de la forma $x_i - x_j = -1$, también para $1 \leq i < j \leq n$
4. **Arreglo de Linial;** está formado por los hiperplanos de la forma $x_i - x_j = 1$, $1 \leq i < j \leq n$.
5. **Arreglo semiordenado;** lo forman los hiperplanos $x_i - x_j = 1$, $x_i - x_j = -1$.
6. **Arreglo de trenzas genérico,** formado por los hiperplanos de la forma $x_i - x_j = a_{ij}$, con a_{ij} genéricos.
7. **Arreglo de trenzas semigenérico,** formado por los hiperplanos de la forma $x_i - x_j = a_i$, con a_i genéricos.

Los arreglos mencionados son todos claras deformaciones del primer arreglo mencionado, el arreglo de trenzas. Sobre algunos de estos arreglos se profundizará más en la subsección 6.2.

Es de interés también, señalar que existen dos arreglos interesantes relativos a un arreglo dado \mathcal{A} . Si tenemos un arreglo \mathcal{A} en K^n , formado por H_1, \dots, H_k hiperplanos, podemos elegir uno de ellos (supongamos H_1) como hiperplano del infinito, en un espacio proyectivo P_K^{n-1} . Tendremos:

$$P_K^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in K, \text{ no todos } x_i = 0\} / \sim$$

con $u \sim v$ si $u = \alpha v$ para $0 \neq \alpha \in K$, y

$$H = (\{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) : x_i \in K, \text{ no todos } x_i = 0\} / \sim) \cong P_K^{n-2}$$

Los demás hiperplanos serán de dimensión $n-2$, una menos que anteriormente, y pasarán a ser hiperplanos del espacio proyectivo. Por ejemplo, si tenemos el espacio \mathbb{R}^3 , y tomamos tres hiperplanos, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Tomamos por ejemplo el hiperplano $x_1 = 0$ como el hiperplano del infinito, y proyectamos sobre P^2 los otros dos hiperplanos.

Podemos hacer también un proceso inverso a este; supongamos que tenemos un arreglo afín \mathcal{A} , cuyos hiperplanos están dados por las ecuaciones: $L_1(x) = a_1, \dots, L_k(x) = a_k$. Se introduce una nueva coordenada y , sobre la que definimos un arreglo central $c\mathcal{A}$, al que llamamos *cono sobre \mathcal{A}* , en $K^n \times K \cong K^{n+1}$, por las ecuaciones:

$$L_1(x) = ya_1, \dots, L_k(x) = ya_k, \quad y = 0$$

Es decir, podemos pasar de arreglos de hiperplanos afines a arreglos de hiperplanos proyectivos y viceversa.

Capítulo 3

PROPIEDADES DEL POSET DE INTERSECCIÓN

3.1. Triple de arreglo

Sea \mathcal{A} un arreglo en el espacio vectorial V . Podemos definir un **subarreglo** \mathcal{B} , de forma que pertenezca a \mathcal{A} , $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de modo que también define un arreglo de el espacio vectorial V .

Si tenemos el elemento x perteneciente al conjunto de intersecciones del arreglo, podemos definir un subarreglo \mathcal{A}_x definido por los hiperplanos a los que x pertenece, es decir:

$$\mathcal{A}_x = \{H \in \mathcal{A} : x \subseteq H\} \quad (3.1)$$

Se define otro subarreglo de la forma opuesta, es decir:

$$\mathcal{A}^x = \{x \cap H \neq \emptyset : H \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_x\} \quad (3.2)$$

Podemos elegir, dentro de un arreglo \mathcal{A} un hiperplano concreto H_0 , y distinguir dos arreglos:

Tenemos por un lado el arreglo $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - \{H_0\}$ y el arreglo $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{H_0}$. Llamamos a $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ el triple de arreglos con hiperplano distinguido H_0 .

Teorema 3.1

Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ el triple de arreglos con hiperplano distinguido H_0 . Entonces:

$$r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'') \quad (3.3)$$

$$b(\mathcal{A}) = \begin{cases} b(\mathcal{A}') + b(\mathcal{A}'') & \text{si } \text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}') \\ 0 & \text{si } \text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}') + 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

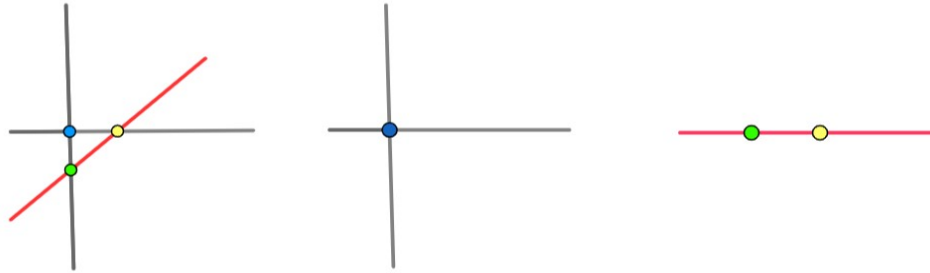


Figura 3.1: Tenemos un arreglo \mathcal{A} , con un hiperplano distinguido en rojo, y los arreglos \mathcal{A}' y \mathcal{A}''

Demostración.

Vemos que el número de regiones del arreglo \mathcal{A} es igual al número de regiones del arreglo \mathcal{A}' , más las regiones a las que el hiperplano H_0 corte en dos, generando nuevas. Elegimos R' región de \mathcal{A}' ; es evidente entonces que $R' \cap H_0$ pertenecerá a $\mathcal{R}(\mathcal{A}'')$. Ahora, supongamos una región en el arreglo \mathcal{A}'' , a la que llamaremos R'' . Los puntos a cada lado del hiperplano H_0 en \mathcal{A} formarán parte de la misma región en \mathcal{A}'' , pues si no, existiría otro hiperplano para separarlos que a su vez habría intersecado con H_0 , en particular con R'' , dividiéndolo en otra región. Con esto, R' es cortado en dos por H_0 . Se establece así una biyección entre las regiones de \mathcal{A}' cortadas en dos por H_0 y las regiones de \mathcal{A}'' , y con esto se satisface la primera ecuación.

Veamos ahora la segunda ecuación, para las regiones acotadas.

Primero, en el caso en el que $rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{A}')$. Hemos visto que el rango de un arreglo es la dimensión del espacio formado por las normales de los hiperplanos; por ende, el hiperplano H_0 será dependiente del conjunto de hiperplanos restantes. La prueba es análoga a la anterior.

En el segundo caso, en el que $rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{A}') + 1$, esto implicará que el hiperplano H_0 será independiente de los demás hiperplanos que forman el arreglo \mathcal{A} ; es más, por ser los hiperplanos de dimensión $n - 1$, siendo n la dimensión del espacio en el que estamos, esto implica necesariamente que $rank(\mathcal{A}') \leq n - 1$; es evidente que, al añadirle un hiperplano independiente H_0 , no se generará ninguna región acotada.

3.2. Retículos

Vamos ahora a estudiar la noción de retículo. Ya hemos repasado anteriormente la noción de poset finito, sobre la que nos basaremos para explorar este nuevo concepto.

Supongamos un poset L finito tal que para un par de elementos $x, y \in L$ tenemos un extremo inferior, es decir, un elemento $z' \in L$ tal que cumple que $z' \leq x$

y $z' \leq y$, y que es mayor o igual que cualquier otro elemento z tal que $z \leq x$, $z \leq y$. El elemento al que hemos llamado z' lo denotaremos habitualmente como $x \wedge y$.

Es más, si **todo par** de elementos de L tiene un extremo inferior, decimos que el poset L es un semirretículo inferior o semirretículo *meet* (o semirretículo intersección).

Igualmente, si esto sucede para el extremo superior. Supongamos un poset L finito, en el que para un par de elementos $x, y \in L$ tenemos un extremo superior, es decir, un elemento $z' \in L$ tal que cumple que $z' \geq x$ y $z' \geq y$, y que es menor o igual que cualquier otro z tal que $z \geq x$, $z \geq y$. El elemento al que hemos llamado z' lo denotaremos habitualmente como $x \vee y$.

Si **todo par** de elementos de L tiene un extremo superior, diremos que el poset L es un semirretículo superior o semirretículo *join* (o semirretículo unión).

Como vamos a estudiar retículos, hemos denotado a estos posets con la letra L , en lugar de P como hacíamos anteriormente.

Claramente, en un semirretículo *meet* o en un semirretículo *join* existirán, respectivamente, el extremo inferior o el extremo superior de cualquier conjunto de uno o más elementos.

Un **retículo** es un poset L que es a la vez un semirretículo *meet* y un semirretículo *join*. Si L es un semirretículo *meet*, y además tiene un máximo $\hat{1}$, entonces es un retículo. Dualmente, un poset L que es un semirretículo *join* y tiene un mínimo $\hat{0}$, es un retículo.

La razón de esto último es que, siendo L un semirretículo *meet*, contará con un mínimo $\hat{0}$ por definición, ya que para todo par de elementos x, y , tendremos que $\hat{0} \leq x$ y que $\hat{0} \leq y$. Ahora, si dicho semirretículo además cuenta con un máximo $\hat{1}$, es evidente que también será un semirretículo *join*, y se cumple la definición de retículo. Lo mismo sucede a la viceversa; un semirretículo *join* que tiene un mínimo $\hat{0}$ es un retículo.

Sea \mathcal{A} un arreglo de hiperplanos en un espacio vectorial V . Suponemos además $n = \dim(V)$. Definimos $L(\mathcal{A})$ como el poset (para el orden dado por la relación inversa a la inclusión) cuyos elementos x son las intersecciones no vacías de subconjuntos de hiperplanos de \mathcal{A} .

Sabemos que $L(\mathcal{A})$ es siempre un poset graduado; por ello, estará bien definida la función rango $rk : L(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{N}$.

En particular, podemos asociar la función rango a la codimensión de las intersecciones; es decir, $rk(x) = n - \dim(x)$. El rango del poset $L(\mathcal{A})$ será el máximo valor de la función rango y se corresponderá con el rango del arreglo.

Es claro además que el poset $L(\mathcal{A})$ será además siempre un semirretículo *meet*; en particular, contará con un mínimo $\hat{0}$. Dicho mínimo será todo el espa-

cio V , visto como la intersección del conjunto vacío de hiperplanos.

Ahora bien, no podemos asegurar que $L(\mathcal{A})$ vaya a ser un retículo puesto que no siempre será un semiretículo *join*, es decir, no sabemos si contará con un máximo $\hat{1}$.

Por ejemplo, en el caso visto en el capítulo anterior de este trabajo, (Figuras 2.2 y 2.3), hemos visto que no contamos con un máximo $\hat{1}$, ya que no hay un elemento que cubra todos los demás.

La condición necesaria y suficiente para que el poset de intersección de un arreglo sea un retículo es que dicho arreglo sea central. En este caso, podemos garantizar que $L(\mathcal{A})$ será un semiretículo *join*, ya que contará con un máximo $\hat{1}$; evidentemente, la intersección de todos los hiperplanos del arreglo, que no será vacía por ser central. Se deduce así que si el arreglo \mathcal{A} es central, como $L(\mathcal{A})$ es un semiretículo *meet* por definición, y contará también con un máximo, será también un semiretículo *join* y por ende, un retículo.

En la Figura 3.2 vemos claramente un ejemplo de un arreglo central en \mathbb{R}^2 , con

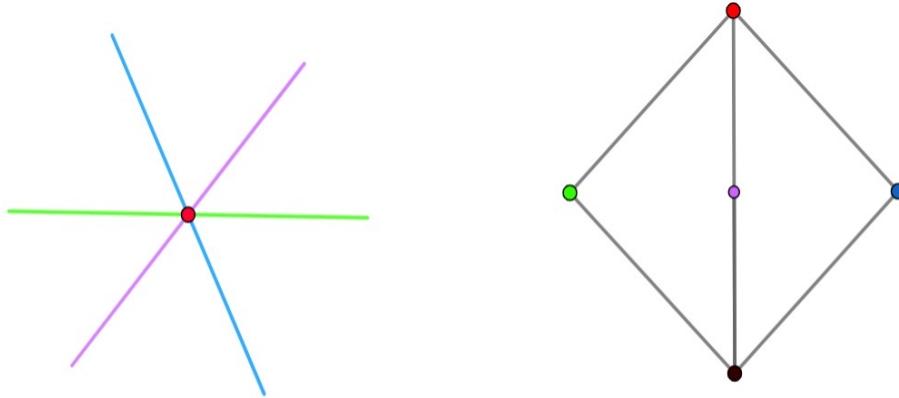


Figura 3.2: Un arreglo central y su poset de intersección

tres hiperplanos que lo forman, y su poset de intersección; vemos que cuenta con un máximo, que representa el punto en el que se cortan las tres rectas.

3.3. Álgebra de Möbius

Supongamos que $L(\mathcal{A})$ es un retículo finito; para más generalidad, lo llamaremos L , y supongamos que K es un cuerpo. El conjunto $F(L)$ de las aplicaciones $f : L \rightarrow K$ es un espacio vectorial sobre K de dimensión igual a $\#L$.

De hecho, para cada elemento x de L , podremos considerar la aplicación:

$$f_x : L \longrightarrow K \quad (3.5)$$

Esta aplicación estará dada por $f_x(x) = 1$, y $f_x(y) = 0, \forall y \neq x$.

Entonces, el conjunto de aplicaciones $\{f_x\}_{x \in L}$ formarán una base del espacio vectorial $F(L)$.

Expliquemos mejor esto último. Podemos representar cada aplicación $g \in F(L)$ de la forma $g = \sum_{x \in L} g(x)f_x$, de modo que el conjunto de aplicaciones $\{f_x\}_{x \in L}$ formará un sistema de generadores del espacio vectorial. Además, claramente será un sistema de generadores minimal, ya que su combinación lineal será única para cada elemento x del retículo L .

En la práctica, para no utilizar un exceso de notación, se denotará a las aplicaciones f_x como simplemente x , el propio elemento. Así, tendremos que cada aplicación g del espacio vectorial se representará como $g = \sum_{x \in L} a_x x$, siendo a_x el valor que tome g en x , para todo x .

Estudiemos bien el espacio vectorial $F(L)$. Tenemos, como definimos antes,

$$F(L) = \{L \longrightarrow K\} = \left\{ \sum_{x \in L} a_x x \mid a_x \in K \right\} \quad (3.6)$$

Vemos que este espacio vectorial lo es porque primero es un grupo abeliano; se forman sobre él una operación suma $+$, de la forma:

$$\left(\sum_{x \in L} a_x x \right) + \left(\sum_{x \in L} b_x x \right) = \sum_{x \in L} (a_x + b_x) x$$

Y también tenemos un claro producto por escalar, es decir:

$$c \left(\sum_{x \in L} a_x x \right) = \sum_{x \in L} (ca_x) x$$

Ahora, sobre $F(L)$, además de la suma, denotada por $+$ y la multiplicación por escalar evidentes, también habrá un nuevo producto inducido por la estructura de retículo de L . Representaremos este producto por \cdot por simplicidad, aunque deberíamos representarlo por \vee , como veíamos en los semiretículos *join*.

Este producto se definirá de la siguiente manera:

$$\left(\sum_{x \in L} a_x x \right) \cdot \left(\sum_{y \in L} b_y y \right) = \sum_{x, y \in L} a_x \cdot b_y (x \vee y) \quad (3.7)$$

Ahora, vemos que con las operaciones $+$ y \cdot el espacio vectorial $F(L)$ es un anillo, y lo denotaremos por $A(L)$ para matizar que lo es.

Es más, estaremos ante un álgebra sobre K si tomamos también en cuenta el producto por escalares. Notamos que el conjunto $F(L)$ y el conjunto $A(L)$

son el mismo, pero el segundo cuenta con más estructura que el primero. $A(L)$ se denominará **álgebra de Möbius** de L .

Ahora, para cada x perteneciente a L podemos definir otro elemento σ_x de $A(L)$ por las fórmulas:

$$\sigma_x = \sum_{y \geq x} \mu(x, y)y \quad (3.8)$$

Por la fórmula de inversión de Möbius, vista anteriormente, esas fórmulas equivaldrán a la siguiente:

$$x = \sum_{y \geq x} \sigma_y \quad (3.9)$$

Vemos entonces que, en el espacio vectorial $F(L)$, los conjuntos $\{x\}_{x \in L}$ y $\{\sigma_x\}_{x \in L}$ generan el mismo subespacio vectorial y, además, tienen igual cardinal. Luego como sabemos que el conjunto $\{x\}_{x \in L}$ es base, $\{\sigma_x\}_{x \in L}$ también lo será. Esta base es particularmente interesante, ya que se puede probar fácilmente que

$$\sigma_x \sigma_x = \sigma_x, \forall x \in L, \sigma_x \sigma_y = 0, \forall x, y \in L, x \neq y \quad (3.10)$$

De esta manera, esta base será de "idempotentes ortogonales". Así se enuncia en nuestra referencia [6]:

Teorema 3.2

Sean $x, y \in L$. Entonces $\sigma_x \sigma_y = \delta_{xy} \sigma_x$, donde δ_{xy} es el delta de Kronecker; es decir, obtendremos 0 cuando $x \neq y$, y 1 cuando $x = y$, esto es, $\sigma_x \sigma_x = \sigma_x$. En otras palabras, vemos que los σ_x son "idempotentes ortogonales".

$$A(L) = \bigoplus_{x \in L} K \cdot \sigma_x \quad (3.11)$$

Demostración

Sea una K -álgebra, $A'(L)$ con base $\{\sigma'_x : x \in L\}$. Definimos la multiplicación sobre dicha álgebra $\sigma'_x \sigma'_y = \delta_{xy} \sigma'_x$. Para $x \in L$, tomamos $x' = \sum_{s \geq x} \sigma'_s$. Entonces,

$$x'y' = \left(\sum_{s \geq x} \sigma'_s\right) \left(\sum_{t \geq y} \sigma'_t\right) = \sum_{s \geq x, s \geq y} \sigma'_s = \sum_{s \geq (x \vee y)} \sigma'_s = (x \vee y)' \quad (3.12)$$

Entonces, la transformación lineal $\phi : A(L) \rightarrow A'(L)$ definida por $\phi(x) = x'$ es un isomorfismo algebraico. Como $\phi(\sigma_x) = \sigma'_x$, vemos que $\sigma_x \sigma_y = \delta_{xy} \sigma_x$.

3.4. Polinomio característico

Sea L un retículo finito. Por cálculo, podemos ver que en su álgebra de Möbius se puede probar el siguiente resultado enumerativo [6]:

Teorema 3.3; Teorema del corte transversal

Si X es un subconjunto del retículo L tal que $\hat{0} \notin X$, y además, para todo $y \in L$, $y \neq 0$, existe $x \in X$ tal que $x \leq y$, entonces

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \dots \quad (3.13)$$

donde, para cada k , N_k es el número de suconjuntos de k elementos de X cuyo extremo superior es $\hat{1}$.

Recordemos que, en un retículo finito L , siempre hay $\hat{0}$ y $\hat{1}$, es decir, respectivamente, el extremos inferior y el extremo superior de todos los elementos de L .

Demostración

Suponemos, para probar el teorema, que estamos en el cuerpo $K = \mathbb{Q}$, para utilizar el álgebra de Möbius.

Primero, veamos que elemento unidad del álgebra de Möbius es $1 = \sum_{x \in L} \sigma_x$, ya que $1\sigma_y = \sum_{x \in L} \sigma_x \sigma_y = \sigma_y$.

Por tanto, tendremos $1(\sum_y a_y y) = \sum_y a_y y, \forall (a_y) \in \mathbb{Q}^n, y \in L$.

Ahora, vemos que

$$1 - x = \sum \sigma_y - \sum_{y \geq x} \sigma_y = \sum_{y \not\geq x} \sigma_y, \quad (3.14)$$

Y tenemos

$$\prod_{x \in X} (1 - x) = \prod_{x \in X} (\sum_{y \not\geq x} \sigma_y) \quad (3.15)$$

El producto se define sobre todos los elementos x pertenecientes al conjunto X del enunciado. El producto de la derecha de la ecuación, $\prod_{x \in X} (\sum_{y \not\geq x} \sigma_y)$ se distribuye en sumas de productos; y como la base de σ_y es ortogonal, solo tendremos aquellos $\sigma_y \sigma_y \dots \sigma_y = \sigma_y$, multiplicado $\#X$ veces, tales que $y \not\geq x, \forall x \in X$.

Ahora, por la definición de X , sabemos que para todo $y \in L, y \neq 0$ existe $x \in X$, tal que $x \leq y$; por tanto, para esos elementos x , σ_y no aparece en el sumatorio $\sum_{y \not\geq x} \sigma_y$, y por ende, tampoco en el producto.

Ahora bien, $\sigma_{\hat{0}}$ aparece en todas las sumas $\sum_{y \not\geq x} \sigma_y$, y, por tanto,

$$\prod_{x \in X} (1 - x) = \sigma_{\hat{0}} = \sum_{y \geq \hat{0}} \mu(\hat{0}, y) y \quad (3.16)$$

Veamos ahora que, si $x_1, \dots, x_k \in X, x_1 \dots x_k = x_1 \vee \dots \vee x_k$, es el producto en $A(L)$. El número N_k es igual al número de selecciones posibles de los x_1, \dots, x_k posibles tales que $x_1 \vee \dots \vee x_k = \hat{1}$.

Así, desarrollando $\prod_{x \in X} (1 - x)$ como sumas de productos, el coeficiente de $\hat{1}$ del resultado de dicho producto es $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \dots$

El coeficiente de $\hat{1}$ en $\sigma_{\hat{0}}$ es $\mu(\hat{0}, \hat{1})$, y con ello se deduce:

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \dots \quad (3.17)$$

Y queda probado.

Ahora consideramos el semirretículo *meet* $L(\mathcal{A})$ de un arreglo de hiperplanos \mathcal{A} . El **polinomio característico** de \mathcal{A} se define en términos de $L(\mathcal{A})$ como:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{z \in L(\mathcal{A})} \mu(z) t^{\dim z} \quad (3.18)$$

Aquí denotamos $\mu(z) = \mu(\hat{0}, z)$, con la expresión de una única variable de la función de Möbius, ya que está bien definida pues siempre contamos con un mínimo $\hat{0}$, y $\dim(z)$ es la dimensión geométrica de la variedad afín z ; sabemos también que $\dim(z) = n - rk(z)$, por ser $L(\mathcal{A})$ un poset graduado.

Ahora, el Teorema del corte transversar nos permitirá probar el Teorema de Whitney, que expresa $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ de otra manera:

Teorema 3.4; Teorema de Whitney[6]

Sea \mathcal{A} un arreglo en un espacio vectorial n -dimensional. Entonces,

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{A}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - \text{rank}(\mathcal{B})} \quad (3.19)$$

Con la suma extendida a todos los arreglos centrales \mathcal{B} .

Demostración

Esta prueba consiste en expresar explícitamente los coeficientes $\mu(z)$ de la definición de $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ en términos de los subarreglos centrales \mathcal{B} de nuestro arreglo \mathcal{A} .

Tomamos un elemento z del poset, $z \in L(\mathcal{A})$. Elegimos ahora el subarreglo:

$$\mathcal{A}_z = \{H \in \mathcal{A} \mid H \supset z\} = \{H \in \mathcal{A} \mid H \leq z\} \quad (3.20)$$

que es un arreglo central, ya que $\bigcap_{H \in \mathcal{A}_z} H \supset z$. Por tanto, $L(\mathcal{A}_z)$ es un retículo; ya que, por definición de poset de intersección, es un semirretículo *meet*, y, al ser central sobre z cuenta con un máximo, el propio elemento z , y es también semirretículo *join*.

Aplicando el teorema del corte transversal:

$$\mu(z) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k N_k(z) \quad (3.21)$$

donde $N_k(z)$ es el número de subarreglos \mathcal{B} de k hiperplanos de \mathcal{A}_z cuya intersección es z .

Es decir,

$$\mu(z) = \sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_z, \bigcup_{H \in \mathcal{B}} H = z} (-1)^{\#\mathcal{B}} \quad (3.22)$$

Si tenemos entonces en cuenta que todos los subarreglos centrales \mathcal{B} de \mathcal{A} tienen como intersección de sus hiperplanos un z concreto de $L(\mathcal{A})$, y que sabemos que $\dim(z) = n - \text{rank}(\mathcal{B})$ en dichos subarreglos, deducimos fácilmente la fórmula de Whitney y el teorema queda probado.

Gracias al Teorema de Whitney, ahora podemos probar la fórmula recursiva:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t) \quad (3.23)$$

Esto se enuncia en nuestra referencia[6], a través del Lema de Eliminación-R restricción.

Lema 3.5; Lema de Eliminación-R restricción

Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ un triple de arreglos reales. Entonces, $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t)$.

Demostración

Sea H_0 el hiperplano distinguido del triple de arreglos $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$. Ahora, vamos a utilizar la fórmula de Whitney, pero la vamos a desarrollar en dos sumas distintas, dependiendo de si $H_0 \in \mathcal{B}$, o si al contrario, $H_0 \notin \mathcal{B}$.

En el primer caso, establecemos \mathcal{B}_1 , tal que $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{B} - \{H_0\})^{H_0}$. Este subarreglo será un arreglo central en H_0 , un subarreglo del arreglo \mathcal{A}'' . Además, sabemos que $\#\mathcal{B}_1 = \#\mathcal{B} - 1$, y se deduce también que $\text{rank}(\mathcal{B}_1) = \text{rank}(\mathcal{B}) - 1$. Obtenemos así usando la fórmula de Whitney,

$$\sum_{H_0 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - \text{rank}(\mathcal{B})} = \sum_{\mathcal{B}_1 \in \mathcal{A}''} (-1)^{\#\mathcal{B}_1 + 1} t^{(n-1) - \text{rank}(\mathcal{B}_1)} = -\chi_{\mathcal{A}''}(t) \quad (3.24)$$

Ahora, si $H_0 \notin \mathcal{B}$, simplemente desarrollando la fórmula, obtenemos:

$$\sum_{H_0 \notin \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - \text{rank}(\mathcal{B})} = \chi_{\mathcal{A}'}(t) \quad (3.25)$$

Por ende, hemos visto que:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(t) &= \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - \text{rank}(\mathcal{B})} = \\ &= \sum_{H_0 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - \text{rank}(\mathcal{B})} + \sum_{H_0 \notin \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - \text{rank}(\mathcal{B})} = \\ &= \chi'_{\mathcal{A}}(t) - \chi''_{\mathcal{A}}(t) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Y queda probado.

3.5. El número de regiones

En esta subsección se desarrollarán nociones acerca del conteo o cómputo de regiones que forman los hiperplanos; cercano al ejemplo sencillo del hiperplano de barrido que vimos en el primer capítulo.

Todo lo que hemos desarrollado anteriormente nos servirá para probar el resultado que veremos ahora. Primero, comenzaremos con una definición importante para lo que después desarrollaremos.

Definición 3.6

Una región de \mathcal{A} es **relativamente acotada** si la región correspondiente de \mathcal{A}^{es} es un conjunto acotado. Sean $r(\mathcal{A})$ y $b(\mathcal{A})$ el número de regiones de \mathcal{A} y de regiones relativamente acotadas de \mathcal{A} respectivamente.

El siguiente teorema fue enunciado por Thomas Zaslavsky en 1975; utilizaremos para probarlo el Lema de Eliminación-R restricción que vimos en la sección anterior.

Teorema 3.7

Sea \mathcal{A} un arreglo en un espacio vectorial real n -dimensional. Entonces, los números de regiones y de regiones relativamente acotadas están dados por:

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) \quad (3.27)$$

$$b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1) \quad (3.28)$$

Demostración

La primera ecuación funciona para el arreglo $\mathcal{A} = \emptyset$. Sabemos que $\chi_{\emptyset}(t) = t^n$, y si lo sustituimos en la primera ecuación, tenemos $r(\emptyset) = (-1)^n (-1)^n = 1$, como se quería demostrar.

Vemos ahora, por el Lema 2.1, que $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}'')$. Ahora, por el Lema de Eliminación-R restricción, $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t)$; se deduce entonces que $(-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}'}(-1) + (-1)^n \chi_{\mathcal{A}''}(-1)$, con lo que $r(\mathcal{A})$ y $(-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$ satisfacen la misma recurrencia:

$$\begin{aligned} (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) &= (-1)^n (\chi_{\mathcal{A}'}(-1) - \chi_{\mathcal{A}''}(-1)) = \\ &= (-1)^n \chi_{\mathcal{A}'} + (-1)^{n+1} \chi_{\mathcal{A}''} = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}'} + (-1)^{n-1} \chi_{\mathcal{A}''} \end{aligned}$$

Y como el arreglo \mathcal{A}'' es de dimensión $n - 1$ queda probado.

Se verá ahora la segunda ecuación. Igualmente, funciona para $\mathcal{A} = \emptyset$, y tenemos $b(\emptyset) = 1$.

Ahora se tiene

$$\chi_{\mathcal{A}}(1) = \chi_{\mathcal{A}'}(1) - \chi_{\mathcal{A}''}(1) \quad (3.29)$$

Tomamos $d(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$. Si $\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}') = \text{rank}(\mathcal{A}'') + 1$, tendremos $d(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}') + d(\mathcal{A}'')$, porque

$$\begin{aligned}
 (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})}\chi_{\mathcal{A}}(1) &= (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})}(\chi_{\mathcal{A}'}(1) - \chi_{\mathcal{A}''}(1)) = \\
 &= (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})}\chi_{\mathcal{A}'}(1) + (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})+1}\chi_{\mathcal{A}''}(1) = \\
 &= (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})}\chi_{\mathcal{A}'}(1) + (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})-1}\chi_{\mathcal{A}''}(1)
 \end{aligned}$$

Si $\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}') + 1$, tenemos $b(\mathcal{A}) = 0$, como vimos en el Teorema 3.1; y $L(\mathcal{A}') \cong L(\mathcal{A}'')$. Del lema previo tenemos también $d(\mathcal{A}) = 0$ y se satisface siempre la misma recurrencia. Tenemos así $b(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A})$.

Capítulo 4

ARREGLOS GRÁFICOS

4.1. Teoría de grafos

Los arreglos gráficos nos han resultado llamativamente interesantes, ya que aúnan la teoría de grafos con los arreglos de hiperplanos. Antes de entrar en la teoría sobre arreglos gráficos, repasaremos algunos conceptos más básicos en la teoría de grafos; para esto, nos hemos apoyado en [8].

Definición 4.1

Definimos **grafo** (geoméricamente) como un conjunto de puntos (a los que llamamos vértices) y un conjunto de aristas, cada una de las cuales une dos de los vértices, que se llaman sus extremos.

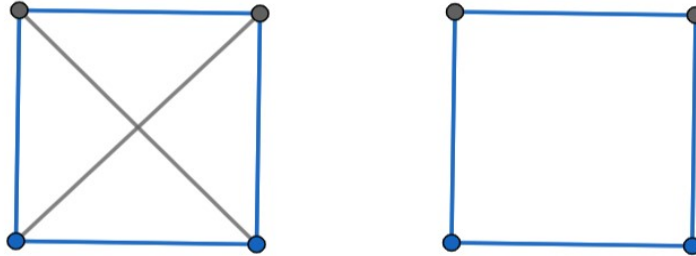
Definición 4.2

Un grafo simple es aquel en el que no hay aristas que conecten un vértice consigo mismo, ni hay aristas múltiples que unan dos extremos. En el resto del texto, consideraremos grafos de este tipo.

Sea V un conjunto de vértices, distinto del vacío, y sea E un conjunto de aristas del grafo G , entonces definimos un grafo como un par ordenado $G = (V, E)$. El **orden** de un grafo es su número de vértices, y su **tamaño** es su número de aristas. Un grafo **finito** tendrá un número finito de aristas y de vértices.

Como se enuncia en nuestra referencia [1], un tema clásico sobre teoría de grafos son las **coloraciones propias** de un grafo G .

Una **coloración propia** de un grafo G es una función (a la que llamaremos κ) de los vértices de G , en un conjunto de colores \mathbb{P} , tal que dos vértices que estén unidos por una arista no les corresponda el mismo color. La podemos representar de la siguiente manera, donde $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de vértices, y $\kappa(i) \neq \kappa(j)$ si hay una arista que una el vértice i con el j :

Figura 4.1: Grafo completo K_4 y grafo no completo

$$\kappa : [n] \rightarrow \mathbb{P} \quad (4.1)$$

Un grafo es **k-coloreable** cuando solo necesita de k colores para poder ser coloreado.

Definición 4.2

El **número cromático** de un grafo dado G es el número mínimo necesario para que este sea coloreable. Es decir es el número k de manera que G sea k -coloreable.

Definición 4.3

Si $G = (V, E)$ es un grafo con n vértices, su **polinomio cromático** $\chi_G(x)$ será una función que para cada $0 \leq k \leq n$, cumple que $\chi_G(k)$ es el número de k -coloraciones posibles.

Definición 4.4

Al grafo de n vértices tal que todos los vértices dos a dos están conectados por una arista lo llamamos **grafo completo**. Denotamos dicho grafo como K_n .

Ejemplo 4.5

En la Figura 4.1, vemos el ejemplo del grafo completo K_4 , junto con otro grafo de 4 vértices que no es completo

El grafo K_2 tiene evidentemente número cromático 2. De hecho, en general el grafo K_n tendrá número cromático n , ya que todos los vértices están conectados entre sí.

Definición 4.6

Un grafo es un grafo **bipartito** si su conjunto de vértices V admite una partición en dos subconjuntos, V_1 y V_2 , tal que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, y de manera que toda arista del grafo tenga un extremo en cada subconjunto.

Teorema 4.7

Un grafo G tiene número cromático 2 si y solo si tiene aristas y es un grafo bipartito.

Demostración

Sea G un grafo con número cromático 2.; supongamos una coloración con dos colores 1 y 2. Lógicamente, G tiene al menos una arista; llamamos V_1 y V_2 a los vértices coloreados por los colores 1 y 2 respectivamente. Es obvio que serán dos conjuntos disjuntos, y que al ser una 2-coloración cada arista conectará los vértices de V_1 con los de V_2 , luego es un grafo bipartito.

Supongamos ahora que G es un grafo bipartito con aristas. Sea V el conjunto de vértices de G y E el conjunto de aristas. Llamamos V_1 y V_2 a dos particiones de V tal que asignamos los colores 1 y 2 a V_1 y V_2 respectivamente. Como no hay aristas que unan ningún vértice de V_1 con otro del mismo conjunto, y tampoco ningún vértice de V_2 con uno de V_2 , tenemos una 2-coloración y el número cromático es 2.

Proposición 4.8

El polinomio cromático es un polinomio en k de grado n .

Demostración

Supongamos que tenemos k colores para colorear los vértices de un grafo $G = (V, E)$, y r los colores que utilizamos para colorear; evidentemente, $k \geq r$. Para elegir de entre los k colores los r que usaremos, tenemos $k(k-1)\dots(k-r+1)$ formas de hacerlo.

Así, si llamamos $P_r(G)$ al número de posibles particiones entre los r colores,

$$\chi_G(k) = \sum_{r=1}^n k(k-1)\dots(k-r+1)P_r(G) \quad (4.2)$$

Esto es un polinomio en k de grado n .

4.2. Arreglos gráficos

Definición 4.9

El arreglo gráfico \mathcal{A}_G es el arreglo en K_n de la forma

$$x_i - x_j = 0, \{i, j\} \in E \quad (4.3)$$

Es decir, está formado por los hiperplanos de la forma $x_i - x_j = 0$ para cada par de vértices adyacentes. Esto es, un arreglo gráfico es un subarreglo del arreglo de trenzas \mathcal{B}_n ; es claro que, si $G = K^n$, entonces $\mathcal{A}_G = \mathcal{B}_n$.

Suponiendo que nos hallamos en dicho caso, podemos encontrar una coloración propia fácilmente para el grafo G , $\kappa : [n] \rightarrow [p]$. Se elige un vértice, digamos el 1, y lo podemos colorear de p maneras, el siguiente de $p-1$ y así

sucesivamente, luego

$$\chi_G(p) = p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1) \quad (4.4)$$

Hay más casos sencillos de polinomios cromáticos. Por ejemplo, supongamos un grafo G sin aristas, con n vértices. Como no hay vértices adyacentes, cualquiera podrá recibir cualquiera de los p colores, y $\chi_G = p^n$.

En la referencia [6], también se enuncia que algunos grafos no pueden ser coloreados con el mismo método que en (17), y añade el ejemplo de un 4-ciclo. Supongamos, por ejemplo, que al vértice 1 se le asocia el mismo color que al vértice 3, es decir, siendo $\kappa : [4] \rightarrow p$ una coloración propia del grafo, $\kappa(1) = \kappa(3)$. Entonces, habrá p maneras de colorear el primer y tercer vértice, y $p-1$ de colorear el segundo y cuarto. Pero si $\kappa(1) \neq \kappa(3)$, habrá p formas de colorear el primer vértice, $p-1$ de colorear de colorear el tercero, y $p-2$ de colorear el segundo y cuarto; tal que:

$$\chi_G(p) = p(p-1)^2 + p(p-1)(p-2)^2 \quad (4.5)$$

Teorema 4.10[6]

Para cualquier grafo G , tenemos $\chi_G(t) = \chi_{\mathcal{A}_G}(t)$.

Demostración

Esta demostración está basada en el teorema de *eliminación-contracción*. Sea e una arista de nuestro grafo G , que conecta los vértices i y j .

Sea $G - e$ nuestro grafo sin la arista e , de modo que los vértices i y j no estén conectados, y sea G/e , el grafo resultante tras contraer nuestra arista a solo un punto, de forma que i y j queden en un solo punto.

Sea ahora H el hiperplano de nuestro arreglo \mathcal{A} de la forma $x_i = x_j$. Parece claro que $\mathcal{A} - \{H\} = \mathcal{A}_{G-e}$. También podemos comprobar que $\mathcal{A}^H = \mathcal{A}_{G/e}$.

Podemos tomar un isomorfismo afín $\varphi : H \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{n-1}$, tal que:

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \quad (4.6)$$

Donde claramente se omite la coordenada j . Así, sea H_{ab} el hiperplano de la forma $x_a = x_b$. Si $a, b \neq i, j$, entonces $\varphi(H_{ab} \cap H)$ será el hiperplano $x_a = x_b$ en \mathbb{R}^{n-1} . Si $a \neq i, j$, entonces $\varphi(H_{ia} \cap H) = \varphi(H_{aj} \cap H)$, será el hiperplano $x_a = x_i$ en \mathbb{R}^{n-1} . Con esto hemos definido un isomorfismo afín entre \mathcal{A}^H y el arreglo $\mathcal{A}_{G/e}$ en \mathbb{R}^{n-1} .

Sea ahora $n \cdot$ el grafo de n vértices sin aristas, y \emptyset el arreglo vacío en \mathbb{R}^n . Se prueba el teorema por inducción:

- Inicialización: $\chi_{n \cdot}(t) = \chi_{\emptyset}(t)$.
- Eliminación-contracción:

$$\chi_G(t) = \chi_{G-e}(t) - \chi_{G/e}(t) \quad (4.7)$$

Ya hemos visto que $\chi_n(t) = t^n$; es fácil notar que asimismo $\chi_\emptyset(t) = t^n$, y se prueba la inicialización.

Ahora, vemos que $\chi_{G-e}(t)$ es el número de coloraciones propias para G , $\kappa : [n] \rightarrow [p]$, sumándole en las que $\kappa(i) = \kappa(j)$, que sí son propias para el grafo $G - e$ al haber eliminado la arista e , pero no para el grafo original. También tenemos que $\chi_{G/e}(t)$ será el número de coloraciones propias para G en las que precisamente se dé $\kappa(i) = \kappa(j)$, al ser i y j un solo vértice.

Con esto queda probado.

De esto se puede deducir fácilmente el siguiente teorema:

Teorema 4.11

El polinomio característico del arreglo de trenzas \mathcal{B}_n será de la forma[6]:

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(t) = t(t-1)\dots(t-n+1) \quad (4.8)$$

La demostración es evidente teniendo en cuenta el teorema anterior y que, como hemos visto, $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_{K_n}$.

En las referencias [6] y [1] se menciona ahora una manera de representar las regiones de los arreglos gráficos, tal como veremos a continuación:

Definición 4.12

La **orientación** θ de un grafo G es la asignación de una dirección a cada una de sus aristas. Un **ciclo directo** de θ es una secuencia de vértices i_0, i_1, \dots, i_k tal que $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_0$ en θ . Una orientación es **acíclica** si carece de ciclos directos.

Estas orientaciones se pueden utilizar para representar las regiones de un arreglo gráfico, a partir del sistema de desigualdades. Por ejemplo, si tenemos el hiperplano $x_i = x_j$, para representar la región $x_i < x_j$, se dota de orientación a la arista que conecta los vértices i y j , de forma que va desde el vértice i al vértice j ; indicamos así con una flecha que estamos en la región $x_i < x_j$ con $i \rightarrow j$, y viceversa, para indicar $x_j < x_i$, utilizamos $j \rightarrow i$. Así, cada región R del arreglo define una orientación θ_R .

Proposición 4.13

Sea θ una orientación de G . Entonces $\theta = \theta_R$ si y solo si θ es acíclico. [6]

Demostración.

Supongamos $\theta = \theta_R$. Si θ_R tiene un ciclo $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1$, esto implicará $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_k} < x_{i_1}$, con lo que obtenemos $x_{i_1} < x_{i_1}$, lo que es absurdo, luego θ_R es acíclico, luego θ lo es.

Supongamos ahora que θ es acíclico. Habrá entonces al menos un vértice (llamémosle v) del que no saldrá ninguna flecha. Retiramos dicho vértice, junto con todas las aristas que lo conectan. El grafo resultante G' será también acíclico, luego

podemos encontrar un nuevo vértice v' del que no saldrá ninguna flecha, retirarlo, y así sucesivamente. Obtenemos así un conjunto $\{v, v', \dots, v^n\}$ de vértices; si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ satisface $x_v < x_{v'} < \dots < x_{v^n}$ la región R que contenga x_1, \dots, x_n satisfará $\theta = \theta_R$.

Claramente, esta última proposición implica que si θ es acíclico, el sistema de desigualdades del arreglo tiene solución ([1]).

Teorema 4.14[6]

El número de orientaciones acíclicas de un grafo G es $(-1)^n \chi_G(-1)$

Demostración

Sabemos que

$$r(A_G) = (-1)^n \chi_{A_G}(-1) \quad (4.9)$$

Y como sabemos que $\chi_{A_G} = \chi_G$, tendremos que $r(A_G) = (-1)^n \chi_G(-1)$. Ahora, como hemos visto antes, las regiones son representadas a través de orientaciones acíclicas en el grafo, luego las orientaciones acíclicas del grafo estarán en biyección con las regiones del hiperplanos, y con ello queda probado.

Como se ha visto, el polinomio característico de un arreglo gráfico A_G responderá con el polinomio cromático de su grafo, por ello podría resultar interesante el estudio de ceros de dicho polinomio.

4.3. Teorema de los Cuatro Colores

Cabe mencionar el tema de los ceros del polinomio cromático, relacionado con el **Teorema de los Cuatro Colores**. En lo referente a esta sección me apoyaré en la referencia[7],

El Teorema de los Cuatro Colores enuncia que cualquier mapa puede ser coloreado con cuatro colores sin que haya dos países vecinos del mismo color. Esto equivale a que si un grafo G es plano, entonces $\chi_G(4) = 0$, ya que todo grafo plano tiene un grafo dual que también es plano. [1]

Como conjetura surgió en 1852; Francis Gurthie observó que podía colorear un mapa complejo de Inglaterra con 4 colores y le propuso a su hermano Frederick si podría colorearse cualquier mapa con únicamente dichos colores., que a su vez se lo comentó a su profesor Augustus De Morgan. De Morgan se puso en contacto con otros matemáticos, con lo que finalmente el problema se hizo conocido.

El teorema no consiguió demostrarse sin embargo hasta el año 1970, por parte de Kenneth Appel y Wolfgang Haken, quienes consiguieron demostrarlo con el uso de un ordenador. Aún no se ha conseguido demostrar sin utilizar uno.

Daremos ahora unas cuantas definiciones que nos ayudarán a enunciar y demostrar el Teorema de los Cinco Colores.

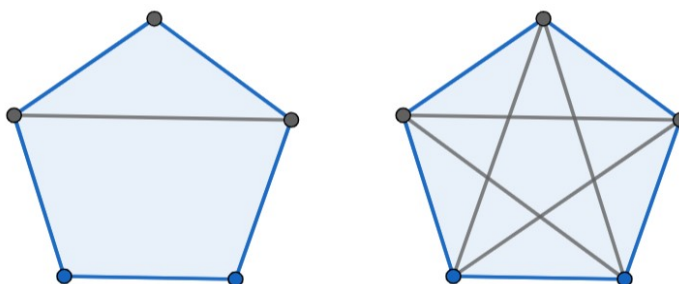


Figura 4.2: Grafo plano y grafo no plano

Definición 4.14

Un grafo **plano** es un grafo que se puede dibujar sin que sus aristas se crucen.

Ejemplo 4.15

En la Figura 4.2 se representa a la derecha un grafo plano, a la izquierda uno que no lo es.

Definición 2.8

Dado un grafo G y un vértice v , se denomina **grado de un vértice** al número de aristas que lo tienen por extremo.

Lema 4.15 (Lema del apretón de manos)

Sea $G = (V, E)$ un grafo; entonces la suma de los grados de todos los vértices es el doble de número de aristas, es decir:

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2\#E \quad (4.10)$$

En 1879, Arthur B. Kempe creyó haber hallado una demostración para la conjetura de los cuatro colores; dicha demostración se dió por buena 11 años. En 1890 P. J. Heawood encontró un error en la demostración de Kempe, pero gracias a ella encontraron una demostración al Teorema de los Cinco Colores.

Teorema 4.16

Un grafo plano tiene al menos un vértice de grado 5 o menos.

Teorema 4.17 (Teorema de los Cinco Colores)

Todo grafo plano es 5-coloreable.

Demostración

La demostración se hace por inducción sobre n vértices. Sea G un grafo de $n \leq 5$ vértices. Entonces es obvio que será 5-coloreable.

Ahora, supongamos que G tiene $n \geq 6$ vértices.

Por el teorema anterior, sabemos que todo grafo planar tiene un vértice de grado 5 o menos. Llamemos v a dicho vértice, $g(v) \leq 5$.

Sea H el grafo resultante de eliminar v de G . Por hipótesis de inducción, sabemos

que H es 5-coloreable.

Ahora veremos dos casos, uno en el que $g(v) < 5$ y otro en el que $g(v) = 5$.

Caso 1. Este es el caso más simple; si $g(v) < 5$, v tendrá como máximo 4 vértices adyacentes. Aún suponiendo que dichos 4 vértices estuvieran coloreados cada uno con diferente color, solo tendríamos que elegir el quinto color para colorear v y el grafo G será 5-coloreable.

Caso 2. Tenemos $g(v) = 5$. Supongamos que el grafo G no admite una 5-coloración. Esto es, v contará con 5 vértices adyacentes, cada uno de un color distinto, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Sea H_{ij} un subgrafo formado por los vértices de G que están coloreados de los colores i y j . Elegimos, por ejemplo, $i = 1$, $j = 3$. Tanto v_1 como v_3 están conectados con v , con lo que cerramos el círculo a través de un camino que una directamente v_1 con v_3 , $P_{1,3}$. Sin embargo, haciendo lo mismo para unir v_2 con v_4 , por el Teorema de la Curva de Jordan, su camino $P_{2,4}$ atravesaría el ciclo que hemos formado para unir v_1 con v_3 . Sin embargo, por definición de G , los caminos no se pueden cruzar; hemos llegado a una contradicción y G es 5-coloreable.

Otras curiosidades que son mencionadas en la referencia [1], que cabe mencionar aquí por su interés:

1. Todas las raíces reales del polinomio cromático son mayores o iguales que 0.
2. Cualquier raíz del polinomio r satisface la desigualdad $r < 8d$, con d el grado máximo que alcanza un vértice del grafo.
3. El conjunto de todas las raíces de todos los polinomios cromáticos es denso en el plano complejo \mathbb{C} .

Capítulo 5

MATROIDES

5.1. Matroides y sus definiciones

La teoría de matroides fue introducida por Hassler Whitney en 1935; quería desarrollar el concepto de independencia sobre la teoría de grafos y observó una estrecha relación con la independencia lineal en los espacios vectoriales. Inspirada en ambos conceptos, surgió la teoría de matroides, que aborda de manera abstracta la noción de independencia y la optimización combinatoria.

En esencia, una matroide generaliza la noción de independencia lineal al considerar familias de conjuntos que cumplen propiedades fundamentales. Estos conjuntos, conocidos como independientes, capturan la esencia de la dependencia estructural y permiten la formulación de teoremas y algoritmos eficientes para abordar diferentes cuestiones.

Resulta muy interesante el hecho de que se puede definir una matroide de diversas formas; por conjuntos independientes, por bases, por circuitos y por rangos. Para su relación con los arreglos, en la que nos centraremos más tarde, nos será más útil su definición por conjuntos independientes. En esta sección, nos centraremos en sus diversas definiciones, para lo que nos apoyamos en nuestra referencias [2] y [3].

Definición 5.1

Sea S conjunto finito distinto del vacío, 2^S denota el conjunto de partes de S . Una matroide M es un subconjunto J de 2^S con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in J$
2. Si $X \in J, Y \subseteq X, \Rightarrow Y \in J$
3. Para todo $T \subset S, T \neq \emptyset$, todos los conjuntos maximales de la intersección $J \cap 2^T$ tienen el mismo cardinal.

Las dos primeras propiedades significan exactamente que el conjunto J es un **complejo simplicial**; por tanto, una matroide es un complejo simplicial en

el que se satisface también la tercera propiedad. Dicha propiedad implica que, además, cada $T \subset S$ tiene bien definida su "dimensión", a la que llamamos rango de T , y es el número de elementos de todos los conjuntos maximales para la inclusión de $J \cap 2^T$.

En nuestra referencia [2], encontramos una definición similar, salvo que la propiedad tercera es una análoga a esta:

Definición 5.1

Una matroide finita es un par $M = (S, J)$, donde S es un conjunto finito y J una familia de subconjuntos de S que cumplen las siguientes condiciones:

1. $\emptyset \in J$
2. J es no vacío, y si $X \in J, Y \subset X, \Rightarrow Y \in J$
3. Si X e $Y \in J$, con $|X| < |Y|$, existirá un elemento $y \in Y$, tal que $y \notin X$, con $X \cup \{y\} \in J$.

Los elementos de J son llamados **conjuntos independientes**. S será un conjunto finito de elementos, con 2^S , el conjunto de partes de S .

Los conjuntos pertenecientes a $J - 2^S$ se llaman conjuntos dependientes.

Vemos ahora que la propiedad anteriormente enunciada (3), denota que, para cada conjunto $T \subset S$, tenemos bien definida su "dimensión", a la que llamaremos **rango** de T , y lo denotaremos como $rk(T)$. Posteriormente, ahondaremos más en la función rango; de momento es interesante notar que el rango de la matroide $rk(M)$ será el rango del conjunto total S , es decir, $rk(S)$.

Veremos ahora un lema interesante generaliza la tercera propiedad de los conjuntos independientes:[3] **Lema 5.2**

Sea $M = (S, J)$ una matroide, y sean J_1 y J_2 dos conjuntos independientes de ésta, tales que $|J_1| < |J_2|$, $n = |J_1| - |J_2|$. Entonces existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in J_2 - J_1$ tales que $J_1 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in J$.

Demostración

Demostrémoslo por inducción. Es claro para $n = 1$, pues está visto en la definición de matroide por conjuntos independientes. Supongámoslo cierto para n .

Sea ahora $|J_2| - |J_1| = n + 1$. Tomamos un elemento x en J_2 . Sabemos que $J_2 - \{x\}$ será también un conjunto independiente. Además, como $|J_2| - |J_1| = n + 1$, tendremos que $|J_2 - \{x\}| - |J_1| = n$. Por inducción, existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in (J_2 - \{x\}) - J_1$ tales que $J_1 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in J$. Con esto, $J_1 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y J_2 son dos conjuntos independientes tales que $|J_2| = |J_1 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}| + 1$. Ahora, de nuevo por la definición de conjuntos independientes, existirá un x_{n+1} en J_2 tal que $J_1 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\} \in J$. Con esto hemos encontrado $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\} \in J_2$ tales que $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\} \cup J_1 \in J$, probando nuestro lema.

También es interesante la definición por bases de una matroide. Si tenemos una matroide M , enumerar todos sus elementos independientes puede ser laborioso; para ello, se la define a partir de su conjunto independiente **maximal**. I será un conjunto independiente maximal si no hay otro conjunto independiente que lo contenga. De lo contrario, existirá un conjunto independiente I_1 tal que $I \subset I_1$; de nuevo, será maximal si no existe otro que lo contenga, etcétera. Así podremos llegar a un único conjunto independiente maximal al que llamaremos **base**: [2]

Definición 5.3

Llamamos **base** \mathcal{B} de una matroide a un conjunto independiente maximal.

Vamos a intentar definir una matroide a partir de su base. Podemos dar tres características de las bases [2]:

Teorema 5.4

El conjunto de bases \mathcal{B} de una matroide M verifica las siguientes propiedades:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, y $B_1 \subseteq B_2$, entonces $B_1 = B_2$.
- Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, y $x \in B_1 - B_2$, existirá un elemento y tal que $y \in B_2 - B_1$, tal que $B_1 - \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Antes de demostrar este teorema, hemos de mencionar y demostrar el siguiente lema, que nos será útil posteriormente:

Lema 5.5

Sea M una matroide. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $|B_1| = |B_2|$.

Demostración

Supongamos que B_1 y B_2 son dos bases de M con diferente cardinal. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|B_1| < |B_2|$. Como las bases son conjuntos independientes, existirá $e \in B_2$, $e \notin B_1$, tal que $B_1 \cup \{e\} \in \mathcal{B}$. Entonces, claramente hemos encontrado un conjunto mayor que B_1 que lo contiene y que es independiente; pero esto contradice la propia definición de B_1 , ya que una base es un conjunto independiente maximal. Con esto queda probado.

Demostración (Teorema 5.4)

Hemos visto antes que \emptyset es un conjunto independiente; claramente habrá algún conjunto mayor que lo contenga y $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Ahora, sean dos bases, B_1 y B_2 , tales que $B_1 \subseteq B_2$. Supongamos que $B_1 \neq B_2$. Entonces, tendremos que $|B_1| < |B_2|$. Sin embargo, ambos por ser bases serán conjuntos independientes maximales, y en este supuesto se podrá

aplicar lo visto en el lema anterior; llegamos a una contradicción con la definición de base, luego tendremos $B_1 = B_2$.

Para probar la tercera característica, sean dos bases B_1 y B_2 , y un elemento $x \in B_1 - B_2$. Sabemos que $B_1 - \{x\} = D$ es un conjunto independiente, y también que $|B_1| = |B_2|$, por el razonamiento anterior. Tenemos que $|D| < |B_2|$, existe entonces un elemento $y \in B_2 - D$, tal que $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\}$ es independiente. Veamos ahora que el conjunto $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\}$ es una base. Es obvio que $|(B_1 - \{x\}) \cup \{y\}| = |B_1|$ con lo que será un conjunto maximal, ya que si no lo es, existirá $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \subsetneq B_3$, y tendremos $|B_1| = |(B_1 - \{x\}) \cup \{y\}| < |B_3|$ y esto contradice la definición de base.

Veamos ahora que, solo con obtener el conjunto de bases de una matroide, podemos definir dicha matroide.

Hemos definido las bases como conjuntos independientes maximales; por su propia definición vemos que cualquier conjunto independiente estará contenido en una base, luego solo con conocer el conjunto de bases de una matroide conoceremos sus conjuntos independientes. Veámoslo en mayor detalle con el siguiente teorema: [6]

Teorema 5.6

Sea S un conjunto finito y \mathcal{B} una familia de subconjuntos de S que satisfacen las propiedades enunciadas en el teorema anterior. Definimos el conjunto $J = \{I \subseteq S / \exists B \in \mathcal{B} : I \subseteq B\}$. Entonces $M = (S, J)$ es una matroide, y el conjunto \mathcal{B} es su colección de bases.

Demostración

Para desarrollar esta demostración, veremos que teniendo el conjunto \mathcal{B} de bases de la matroide, podemos deducir sus conjuntos independientes, de manera que cumplan todas las propiedades enunciadas en la Definición 4.1. Vemos primero, como $\mathcal{B} \neq \emptyset$, el conjunto es no vacío, es evidente que se cumple la primera propiedad de J .

Ahora, supongamos un conjunto $I \in J$; por definición de \mathcal{B} , sabemos que existe un $B \in \mathcal{B}$, tal que $I \subseteq B$. Así, si $I' \subseteq I$, tendremos $I' \subseteq B$, con lo que I' será independiente por definición de base, y se satisface la segunda propiedad.

Para demostrar la tercera propiedad, necesitamos saber que todas las bases de la matroide tienen el mismo cardinal.

Vimos en el Lema 4.2, que si B_1 y B_2 eran bases de M , su cardinal era el mismo. Podemos repetir este razonamiento para las B_i bases en \mathcal{B} de la matroide.

Suponemos ahora que la tercera propiedad no se cumple. Entonces J tiene miembros J_1, J_2 con $|J_1| < |J_2|$, tales que, para todo $x \in J_2$, $x \notin J_1$, el conjunto $J_1 \cup \{x\} \notin J$.

Sabemos por definición de \mathcal{B} , que existen bases $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tal que $J_1 \subseteq B_1$ y $J_2 \subseteq B_2$. Suponemos que hemos elegido B_2 tal que $|B_2 - (J_2 \cup B_1)|$ es mínimo. Por ello, tendremos $J_2 - B_1 = J_2 - J_1$.

Suponemos ahora que $B_2 - (J_2 \cup B_1)$ es no vacío. Entonces, existirá un elemento x en este conjunto, y por ser bases, existirá un elemento y en $B_1 - B_2$, tal que $(B_2 - x) \cup y \in \mathcal{B}$. Entonces, tenemos $|((B_2 - x) \cup y) - (J_2 \cup B_1)| < |B_2 - (J_2 \cup B_1)|$;

y se contradice la elección de B_2 , que pedimos que fuera tal que $|B_2 - (J_2 \cup B_1)|$ fuera mínimo. Por esto, $B_2 - (J_2 \cup B_1)$ es un conjunto vacío, y obtenemos $B_2 - B_1 = J_2 - B_1$, y como hemos visto anteriormente que $J_2 - B_1 = J_2 - J_1$, obtenemos que:

$$B_2 - B_1 = J_2 - J_1 \quad (5.1)$$

Por otro lado, demostraremos también que $B_1 - (J_1 \cup B_2)$ es un conjunto vacío. Por reducción al absurdo, si no lo fuera, tendríamos un elemento y en $B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$, luego será un conjunto independiente; como $J_1 \cup y \subseteq (B_1 - x) \cup y$, tendremos que $I_1 \cup y$ es independiente.

Deducimos entonces que, como $y \in B_1 \cup B_2$, por definición de ambas bases, $y \in J_1 \cup J_2$, contradiciendo nuestro supuesto en el cual no cumplíamos la tercera propiedad, y vemos que $B_1 - (J_1 \cup B_2)$ es un conjunto vacío.

Por último, como $B_1 - B_2 = J_1 - B_2$, y $J_1 - B_2$ está contenido en $J_1 - J_2$, obtenemos

$$B_1 - B_2 \subseteq J_1 - J_2 \quad (5.2)$$

Y antes hemos visto que dos bases de una matroide siempre tienen el mismo cardinal, luego $|B_1| = |B_2|$, con lo que $|B_1 - B_2| = |B_2 - B_1|$. Además, comparando las ecuaciones (56) y (57), tenemos $|J_1 - J_2| \geq |J_2 - J_1|$, y se concluye que $|J_1| \geq |J_2|$, contradicción con nuestra hipótesis.

Por tanto, hemos llegado a un absurdo y vemos que la tercera propiedad se cumple.

Llegamos así al fin de nuestra demostración, habiendo visto que $M = (S, J)$ es una matroide.

Como mencionamos anteriormente, también podemos definir una matroide a partir de sus circuitos; si bien la base de una matroide será un conjunto independiente maximal, un circuito de una matroide será un suconjunto dependiente minimal. Así nos lo definen en la referencia [2]:

Definición 35.7

Dada una matroide M , llamamos circuito a cualquier subconjunto de S que sea dependiente minimal, es decir, que no está en J pero todos sus subconjuntos sí. El conjunto de circuitos de M será entonces:

$$C = \{X \subset S : X \notin J, X \setminus \{x\} \in J, \forall x \in X\} \quad (5.3)$$

Lema 5.8

Un conjunto X de la matroide es independiente si y solo si no contiene ningún circuito.

Teorema 5.9

Los circuitos de una matroide M cumplen las siguientes propiedades [2]:

- $\emptyset \notin C$.

- $X \in C, Y \in C, X \subset Y, \Rightarrow X = Y.$
- $X \in C, Y \in C, X \neq Y, z \in X \cap Y \Rightarrow \exists Z \in X \cup Y \setminus \{z\} : Z \in C$

Demostración.

La primera propiedad es obvia.

La segunda propiedad se deduce de que, suponiendo $X \neq Y$, como $X \in C$, es dependiente, pero como Y es un circuito, todos sus subconjuntos son independientes, y vemos que $X \subset Y$, llegamos a una contradicción.

La tercera y última propiedad se demostrará también por reducción al absurdo. Supongamos que no existe ningún circuito en $A = X \cup Y \setminus \{z\}$. Por el lema anterior, entonces A es independiente y pertenece a J .

Como $X \neq Y$, sabemos por la segunda propiedad que ninguno está contenido en el otro. Sea $f \in Y \setminus X$; como Y es un circuito, el conjunto $B = Y \setminus f$ es independiente.

Sea ahora D el subconjunto independiente de mayor cardinal de $X \cup Y$ que contiene a B . Evidentemente, D no puede contener a f , porque entonces contendría a Y , e Y es dependiente por ser un circuito; lo mismo sucede con X . Por lo tanto, $|D| \leq |X \cup Y| - 2 = |A| - 1$. Tenemos que $|A| > |D|$, ambos independientes, luego existirá un elemento $\{a\} \in A$, tal que $D \cup \{a\}$ sea independiente; pero habíamos dicho que D sería un conjunto independiente de mayor cardinal y llegamos a una contradicción.

La tercera condición se llama habitualmente *axioma de eliminación*.

Ahora, si bien hemos definido lo que es un circuito, veamos que a partir de un circuito podemos definir una matroide, exactamente de la misma manera que por conjuntos independientes, estableciendo una equivalencia entre ambas definiciones. Lo veremos con el siguiente teorema [2]:

Teorema 5.10

Sea S un conjunto y C una colección de subconjuntos de S que cumplen las propiedades anteriormente enunciadas. Si tomamos J como la colección de subconjuntos de S que no contienen ningún elemento de C , resulta que $M = (S, J)$ es una matroide.

Demostración

Veamos que el conjunto J satisface las propiedades enunciadas en la definición 3.1.

Primero, como sabemos que $\emptyset \notin C$, será evidente que $\emptyset \in J$, y la primera propiedad se satisface.

Para la segunda propiedad, es obvio que, como J no contiene ningún subconjunto de C , si tenemos $J_1 \subset J$, dicho subconjunto no pertenecerá a C , y se satisface también la segunda propiedad.

Por último, supongamos dos subconjuntos de J , a los que llamamos J_1 y J_2 , con $|J_1| < |J_2|$. Suponemos, por reducción al absurdo, que la última propiedad no

se cumple. Ahora, existe un subconjunto de J que pertenece a $J_1 \cup J_2$, con más elementos que J_1 . Elegimos entonces un subconjunto J_3 , tal que el conjunto de elementos que pertenecen a J_1 , pero no pertenecen a J_3 sea mínimo; $|J_1 - J_3|$ será mínimo. Por no satisfacerse la tercera propiedad, es no vacío, y tomamos un elemento y de este conjunto. Ahora, para cada elemento x de $J_3 - J_1$, elegimos T_x como $(J_3 \cup y) - x$. Es claro que $T_x \subseteq J_1 \cup J_2$, y que $|J_1 - T_x| < |J_1 - J_3|$, por tener J_3 más elementos que J_1 , y vemos entonces que el conjunto T_x no es independiente, pues habíamos visto que $|J_1 - J_3|$ era mínimo.

Como T_x no es independiente, contendrá algún miembro de C , C_x . Por ello, $C_x \subseteq (J_3 \cup y) - x$, con lo que $x \notin C_x$. Vemos entonces que $y \in C_x$, pues de otro modo, $J_3 \subset C_x$, y esto no puede ser por definición de J_3 .

Suponemos ahora $g \in J_3 - J_1$. Si $C_g \cap (J_3 - J_1) = \emptyset$, entonces tenemos que $C_g \subseteq ((J_1 \cap J_3) \cup x) - g \subseteq J_1$; y hemos llegado a una contradicción. Si suponemos ahora un $h \in C_g \cap (J_3 - J_1)$, y $C_h \neq C_g$, ya que evidentemente, $h \notin C_h$. Ahora, $y \in C_g \cap C_h$, y por el axioma de eliminación de los ciclos, sabemos que existe un C_1 en C , tal que $C_1 \subseteq (C_g \cup C_h) - y$, pero por definición, C_g y C_h son subconjuntos de $J_3 \cup y$, con lo que tendríamos $C_1 \subset J_3$, contradicción por definición de J_3 . Por tanto, vemos así que la tercera condición de la definición de matroide por conjuntos independientes se cumple.

Con esto, queda probado que podemos definir una matroide a partir de su conjunto de circuitos.

Retomamos ahora en concepto de rango anteriormente mencionado, a partir del cual también podemos definir matroides. El rango de un conjunto para una matroide es el tamaño del mayor conjunto independiente contenido en él.

Definición 5.11[2]

Dado un conjunto S , una función $r : P(S) \rightarrow \mathbb{N}$ es una función de rango si y solo si cumple:

- $\forall X \subset S, 0 \leq r(X) \leq |X|$
- $X \subset Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$
- $\forall X, Y \in S, r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Definimos la función rango que utilizaremos como:

$$rk(T) = \max\{\#I : I \in J, I \subseteq T\} \quad (5.4)$$

Con $M = (S, J)$ matroide y T subconjunto de S .

Claramente, todas las bases de una misma matroide tendrán el mismo tamaño, ergo el mismo rango, que será el máximo posible, el rango de la matroide.

5.2. Retículo de *flats* y retículos geométricos

Para continuar con este trabajo, primero definiremos las nociones de *flat* y su cerradura, para después estudiar de nuevo la noción de retículo, ya que los recientemente mencionados *flats* se estructuran formando uno. A lo largo de todo este apartado, nos hemos apoyado en las referencias [6] y [2].

Al explorar el retículo de *flats*, podemos identificar las inclusiones y exclusiones entre los conjuntos independientes, proporcionando una descripción visual y conceptual de cómo evolucionan las propiedades de independencia en la matroide.

Los *flats* de una matroide M son los subconjuntos $T \subset S$, tales que $rk(T \cup \{s\}) > rk(T)$, $\forall s \in S, s \notin T$; es decir, son los subconjuntos de S que son maximales para su valor de rango: Un k -*flat* es un subconjunto maximal de rango k ; se refiere a un conjunto maximal que satisface la propiedad de tener rango k de la matroide. Dicho de otra manera, un *flat* en una matroide es un conjunto que tiene rango k y no se puede extender agregando ningún elemento adicional sin perder dicho rango. Definámoslo con mayor precisión:

Definición 5.12[2]

Sea una matroide $M = (S, J)$, y F un subconjunto de S . F es un *flat* si $rk(F \cup \{s\}) > rk(F)$ para todo $s \notin F$.

Podemos definir entonces la **cerradura** de cualquier subconjunto T de la matroide. Sea M una matroide con conjunto de *flats* F , y la cerradura de T será [2]:

$$\bar{T} = \cap \{F : T \subseteq F\} \quad (5.5)$$

Veremos que \bar{T} será el *flat* más pequeño que contenga a T .

Ahora, como mencionamos antes, veamos que los *flats* forman un retículo; primero, parece fácil ver que los *flats* forman un poset por relación de inclusión. Ahora bien, veamos que dicho poset es además un semiretículo *meet*; para ello, veamos la siguiente proposición:

Proposición 5.13

La intersección de dos *flats* es un *flat*

Demostración

La demostración es muy sencilla y parte de la propia definición de *flat*. Hemos visto que un *flat* es un subconjunto $T \subset S$, tales que $rk(T \cup \{s\}) > rk(T)$, $\forall s \in S, s \notin T$; es decir, son los subconjuntos de S que son maximales para su valor de rango. Ahora, sabemos que el rango de un conjunto para una matroide es el tamaño del mayor conjunto independiente contenido en él. Supongamos $C = A \cap B$, con A y B *flats*. Ahora, supongamos que existe $s \notin C$, tal que $rk(C \cup \{s\}) = rk(C)$, con lo que C no es un *flat*. Ahora bien, por definición de rango, $rk(C) = \#I$, siendo I el tamaño del mayor conjunto independiente contenido

en C , luego $I \subseteq A, I \subseteq B$, es decir, es también un conjunto independiente de A y B . Si podemos añadir un elemento s a C , sin que aumente el tamaño de su conjunto independiente más grande, tendremos que tampoco lo hará con los mayores conjuntos independientes de A y B , y $rk(A \cup \{s\}) = rk(A)$ y $rk(B \cup \{s\}) = rk(B)$, y esto es una contradicción, ya que sabemos que $s \notin C = A \cap B$, luego $s \notin A, s \notin B$ y por ser A y B flats.

Con esto, hemos probado que C es un *flat* y que, por ende, la intersección de dos flats es un *flat*.

Hemos probado también lo mencionado anteriormente, que \overline{T} será el *flat* más pequeño que contenga a T , y claramente, $\overline{\overline{F}} = F$ si y sólo si F es un *flat*.

Vemos así que, aplicando la proposición anterior, podemos llegar a que la intersección de todos los flats de una matroide es también un *flat*; este *flat* será claramente el mínimo por relación de inclusión, dado que todos los demás flats lo contendrán. Los flats de M forman un poset, que de hecho es un retículo al que, como retículo, llamaremos $L(M)$.

Parece claro entonces que estamos en un semiretículo *meet*, ya que contamos con un mínimo $\hat{0}$, el *flat* intersección de todos los demás. Ahora, como además $L(M)$ tiene un elemento máximo S , es evidente que $L(M)$ también es un semiretículo *join*; por ende $L(M)$ es un retículo.

Entonces, para cada *flat* $T \subset S$, habíamos definido su cerradura; definiámos como \overline{T} la intersección de todos los flats que contienen a T . Los flats se reconocen entonces como aquellos T tales que $T = \overline{T}$.

El *flat* S es obviamente $\hat{1}$ de $L(M)$; si $T = x$, y $T' = y$ son flats entonces $T \vee T' = x \vee y$ será $\overline{T \cup T'}$.

Nos fijamos en que $\hat{0}$ no es igual al conjunto vacío, si no que $\hat{0} = \overline{\emptyset}$; como habíamos visto antes, la intersección de todos los flats de M . Además, como ya hemos mencionado, para dos flats T, T' , obtenemos su *meet* tal que $x \wedge y = T \wedge T' = T \cap T'$, ya que $\overline{T \cap T'} = T \cap T'$ por ser $T \cap T'$ un *flat*.

Con esto, también hemos de fijarnos en que $L(M)$ es graduado por rango, es decir, toda cadena maximal de $L(M)$ tiene longitud $m = rk(M)$. Así, si $x \prec y$, en $L(M)$, entonces $rk(y) = 1 + rk(x)$.

En particular, hemos visto que el rango de la matroide, $rk(M)$, es la longitud común a todas las cadenas $\hat{0} \prec x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_r$ de puntos de $L(M)$.

Podemos así definir su polinomio característico $\chi_M(t)$; de manera análoga a como lo hacíamos con $\chi_A(t)$.

$$\chi_M(t) = \sum_{x \in L(M)} \mu(\hat{0}, x) t^{rk(M) - rk(x)} \quad (5.6)$$

Podemos poner ahora algunos ejemplos básicos sobre matroides: **Ejemplo 5.14** El conjunto S es un subconjunto de vectores en un espacio vectorial de di-

mensión finita V . El conjunto J de subconjuntos independientes se formará, evidentemente, por subconjuntos I de S cuyos vectores sean linealmente independientes.

El rango $rk(T)$ de un subconjunto T de S , será la dimensión del subespacio vectorial generado por los vectores de T . Los *flats* serán aquellos $T \subset S$ que son la intersección de S con un subespacio vectorial W de V . Para $T \subset S$, \bar{T} es la intersección de S con el subespacio vectorial W_T generado por los vectores de T . Estas matroides se llaman **representables**.

Hay matroides que son representables en un espacio vectorial sobre determinado cuerpo, por ejemplo, sobre un cuerpo finito, pero no lo son sobre un cuerpo distinto. También existen matroides que no son representables por ningún espacio vectorial V y sobre ningún cuerpo K .

Ejemplo 5.15

El conjunto S es un conjunto finito de puntos de un espacio afín \mathbb{R}^n . La familia J de conjuntos independientes será denotada por los subconjuntos de S cuyos puntos son afínmente independientes.

En este ejemplo todo se da exactamente igual que en anterior; de hecho, introduciendo una coordenada más, z , los puntos de S se pueden representar en el hiperplano $z = 1$ de $\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e identificar los puntos $s \in S$ con los vectores $\vec{0}$ en \mathbb{R}^{n+1} , con 0 origen de \mathbb{R}^{n+1} . Con esta identificación, cada punto en S se convierte en un vector en un nuevo espacio vectorial V , y volvemos al ejemplo anterior.

Si tenemos un elemento s que pertenece a una matroide M , tal que $rk(s) = 0$ llamaremos a dicho elemento *lazo*. Si tenemos s, s' dos elementos de la matroide, tal que ninguno es un lazo, y $rk(\{s, s'\}) = 1$, llamamos a estos dos elementos *pares paralelos*.

Si la matroide es representable, los lazos son aquellos $\{s\}$ tales de $s = \vec{0}$; y los pares paralelos $\{s, s'\}$ serán aquellos pares en los que s, s' son vectores linealmente dependientes.

Si $M = (S, J)$ carece de lazos y de puntos paralelos, entonces diremos que M es una matroide **simple**[2].

Claramente, las matroides representables simples serán aquellas que carezcan de vectores nulos, tales que sus vectores sean todos linealmente independientes.

Es evidente que en una matroide simple todos los elementos de S son independientes, y que $\forall x, y \in S$ tendremos que $rk(\{x, y\}) = 2$ cuando $x \neq y$. También se puede observar que $\bar{\emptyset}$ será el conjunto de lazos de M ; como dicha matroide carece de lazos, $\bar{\emptyset} = \emptyset$. [6]

Dada una matroide M , no necesariamente simple, se tiene una relación de equivalencia entre los elementos de S : dados $s, s' \in S$, tenemos $s \sim s'$ si y solo si $\overline{\{s\}} = \overline{\{s'\}}$. A partir de esta relación, podemos construir otra matroide \widetilde{M} ,

cuyo \tilde{S} es el conjunto cociente:

$$\tilde{S} = \{\overline{\{s\}} \mid s \in S, s \notin \hat{\emptyset} = \hat{0}\} \quad (5.7)$$

Y la familia de conjuntos independientes \tilde{J} estará formada por subconjuntos de la forma $I = \{\overline{\{s_1\}}, \dots, \overline{\{s_k\}}\}$, tales que $I = \{s_1, \dots, s_k\}$ son independientes en M .

Ahora, en el supuesto de que la matroide sea simple, como hemos visto que $\hat{\emptyset}$ es el conjunto de lazos de M , pero esta carece de lazos y obtenemos $\bar{\emptyset} = \emptyset$, vemos que siempre se da la condición de $s \notin \bar{\emptyset}$.

Veamos que la matroide \tilde{M} cumple dos propiedades.

1. \tilde{M} es siempre simple.
2. Los retículos de *flats* de $L(M)$ y $L(\tilde{M})$ son isomorfos. Esto es fácil verlo ya que se define un isomorfismo que asocia a cada T , *flat* de M a un *flat* \tilde{T} de \tilde{M} , de la misma manera que se asocian los conjuntos independientes de cada matroide.

Notamos que hemos mostrado que hay matroides distintas (como M y \tilde{M} si M no es simple) cuyos retículos de *flats* son isomorfos. Sin embargo, si dos matroides simples, M_1 y M_2 tienen retículos de *flats* isomorfos, ambas matroides tienen que ser isomorfas.

Para probar esto, basta ver que si M es simple, su retículo de *flats* $L(M)$ determinará completamente la matroide. Esto se deduce de que si M es simple, entonces se tiene que los conjuntos unipuntuales $\{s\}$ son *flats*, porque s no es un lazo, ni tampoco formará parte de ningún par paralelo $\{s, s'\}$. Entonces es fácil probar que si $I = \{s_1, \dots, s_k\}$ entonces I es independiente en M si y solo si:

$$rk(\{s_1\} \vee \{s_2\} \vee \dots \vee \{s_k\}) = k \quad (5.8)$$

donde $\{s_1\} \vee \{s_2\} \vee \dots \vee \{s_k\}$ es el extremo inferior o *join* de todos los *flats* $\{s_k\}$ en el retículo $L(M)$; sabemos que dicho extremo es otro *flat*; la intersección de todos los *flats* que contienen a los puntos s_1, \dots, s_k de S . Como hemos visto que los conjuntos independientes están caracterizados por la ecuación (63), escrita en términos de $L(M)$, el conjunto J de independientes queda determinado por el retículo de *flats*.

Ahora, buscamos caracterizar qué retículos L son isomorfos a uno del tipo $L(M)$, con M matroide simple. Acabamos de ver que, si M existe, es única salvo isomorfismo; veamos bajo qué condiciones existe dicha matroide.

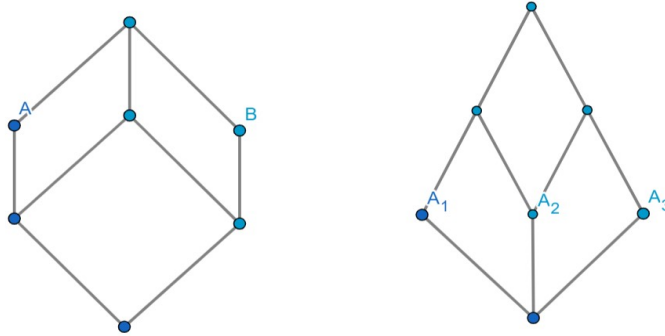


Figura 5.1: Imagen de un retículo semimodular y un retículo atómico

Es evidente que necesitaremos que L sea un retículo finito, y que, como poset, sea graduado; ya que hemos visto anteriormente que estas propiedades las cumplen los retículos de flats de una matroide.

Sin embargo, necesitaremos que el retículo L cumpla más propiedades para garantizar la existencia de una matroide M , con $L(M) \simeq L$. Necesitamos que el retículo L sea **semimodular** y **atómico**.

Proposición 5.16[6]

Sea L un retículo finito graduado. Son equivalentes:

1. Para todo $x, y \in L$, tenemos $rk(x) + rk(y) \geq rk(x \wedge y) + rk(x \vee y)$
2. Si x e y cubren ambos $x \wedge y$, entonces $x \vee y$ cubrirá x e y .

Definición 5.17

Un retículo finito L graduado será **semimodular** si cumple $rk(x) + rk(y) \geq rk(x \wedge y) + rk(x \vee y)$, es decir, si cumple las propiedades anteriores equivalentes.

Definición 5.18

Un retículo finito L se llama **atómico** si todos los elementos $x \in L$ son extremo superior de átomos. Los **átomos** son aquellos elementos x , tal que $x > \hat{0}$.

Definición 5.19

Un retículo finito L se llama **geométrico** si es semimodular y atómico.

Ejemplo 5.20

En la Figura 5.1 vemos a la izquierda un retículo que es semimodular; aunque vemos que no es atómico, ya que los elementos A y B no pueden ser obtenidos por el *join* de los átomos. A la izquierda tenemos un retículo que, al contrario, es atómico pero no es semimodular, ya que si bien A_1 , A_2 y A_3 cubren el elemento mínimo, no existe ningún elemento que cubra a los tres.

El resultado principal de esta subsección es lo planteado en nuestra referencia [6], a través del siguiente teorema:

Teorema 5.20

Sea L un retículo finito. Entonces L es un retículo geométrico si y solo si existe una matroide M tal que L y $L(M)$ son isomorfos.

Demostración

Supongamos L retículo geométrico y sea A su conjunto de átomos. Si $T \subseteq A$, escribimos $\vee T = \bigvee_{x \in T} x$, como es *join* de los elementos de T .

Ahora, sea

$$J = \{I \subseteq A : rk(\vee I) = \#I\} \quad (5.9)$$

Como es semimodular, vemos que para cualquier $S \subseteq A$, con $x \in A$, tenemos que $rk((\vee S) \vee x) \leq rk(\vee S) + 1$. Vemos que J es un complejo simplicial; con lo que solo nos queda probar que para todo $T \subset S$, $T \neq \emptyset$, todos los conjuntos maximales de la intersección $J \cap 2^T$ tienen el mismo cardinal.

Supongamos que $\#T < \#T'$, con T y T' elementos maximales de $2^S \cap J$. Entonces existe $y \in S$ tal que $y \leq \vee T'$; si no, tenemos $T'' = T' \cup y$, y T'' contradice la maximalidad de T' . Como $\#T < \#T'$, sabemos que $\vee T < \vee T'$. Como L es atómico, existirá $y \in S$ tal que $y \not\leq \vee T$, pero entonces $rk(T \cap y) = rk(T) + 1$, lo que contradice la maximalidad de T . Hemos llegado a un absurdo, con lo que es una matroide.

Ahora, sea una matroide M , que asumimos simple, veamos que $L(M)$ es un retículo geométrico. Claramente $L(M)$ es atómico, pues todo elemento es el *join* de sus átomos. Veamos que es también semimodular; sean $S, T \subseteq M$. Veamos que:

$$rk(S) + rk(T) \geq rk(S \cup T) + rk(S \cap T)$$

Como S y T son *flats*, $S \cap T = S \wedge T$, $rk(S \cup T) = rk(S \vee T)$. Suponemos que la ecuación anterior es falsa, tendríamos:

$$rk(S \cup T) > rk(S) + rk(T) - rk(S \cap T)$$

Definimos una base para $S \cup T$, y obtendríamos $\#(B \cup S) > rk(S)$ o $\#(B \cup T) > rk(T)$, que es una contradicción. Así, acabamos la demostración.

Además del resultado anterior, es importante enunciar que, dado L geométrico, existe una matroide M simple, única salvo isomorfismo, con L y $L(M)$ isomorfos. Si L es isomorfo a una matroide M' , siendo esta matroide no necesariamente simple, M y \widehat{M}' son isomorfos.

5.3. Matroides de los arreglos de hiperplanos

Vamos ahora a relacionar toda esta teoría de matroides con la teoría ya aprendida sobre arreglos de hiperplanos.

Para un arreglo de hiperplanos \mathcal{A} , su poset de intersección $L(\mathcal{A})$ tiene como puntos todas las posibles intersecciones no vacías de hiperplanos de \mathcal{A} . Este poset tiene $\hat{0}$, que es el espacio vectorial total V . También sabemos que es graduado, con función rango dada por la codimensión, es decir, $rk(x) = \dim(V) - \dim(x)$; aquí x es una intersección, que no es vacía, de algunos hiperplanos de \mathcal{A} , con lo que $\dim(x)$ denotará su dimensión como variedad lineal afín.

Hemos visto que $L(\mathcal{A})$ es un semirretículo *meet*, pero, como vimos anteriormente, para que sea un semirretículo *join*, debemos de contar con un máximo, $\hat{1}$, y esto solo sucede cuando el arreglo \mathcal{A} es central.

La siguiente proposición [6] nos muestra que si \mathcal{A} es central, el retículo $L(\mathcal{A})$ es isomorfo al retículo de flats $L(M_{\mathcal{A}})$ de una matroide simple $M_{\mathcal{A}}$ asociada a \mathcal{A} .

Proposición 5.21 Sea \mathcal{A} un arreglo central en el espacio vectorial V . Se define una matroide $M = M_{\mathcal{A}}$, tal que los hiperplanos independientes del arreglo \mathcal{A} pertenezcan a $J(M)$ (esto es, siendo B un conjunto independiente, $B \in J(M)$, luego $\{\eta_H : H \in B\}$). Entonces M es simple y $L(M) \cong L(\mathcal{A})$.

Demostración.

Tomamos un vector normal η_H para cada hiperplano H del arreglo. No importa cuál sea el vector normal de H , mientras $\eta_H \neq 0$. Como dos hiperplanos de \mathcal{A} son distintos, sus vectores normales no serán proporcionales. Ahora, la matroide $M_{\mathcal{A}}$ asociada al arreglo será como en el ejemplo 4.5, dado por el conjunto de vectores normales $\{\eta_H\}_{H \in \mathcal{A}}$ del espacio vectorial V .

Vemos que esta matroide no tiene lazos, por ser $\eta_H \neq 0$, y que no tiene pares paralelos por no ser los η_H proporcionales. Por tanto, la matroide $M_{\mathcal{A}}$ es simple.

Para ver que los retículos $L(M_{\mathcal{A}})$ y $L(\mathcal{A})$ son isomorfos, basta con elegir un $x \in L(\mathcal{A})$. Dicho x es una intersección de distintos hiperplanos del arreglo, $x = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_k$, que elegiremos tales que sean independientes. Con esto, $\eta_{H_1}, \eta_{H_2}, \dots, \eta_{H_k}$ serán vectores linealmente independientes. Entonces, a dicho punto x le podemos asociar el flat de $M_{\mathcal{A}}$ dado por todos los vectores normales η_H de hiperplanos de \mathcal{A} tales que η_H pertenezca al subespacio vectorial generado por $\eta_{H_1}, \dots, \eta_{H_k}$. Lo llamamos T y vemos que efectivamente T es un flat, como vimos en el ejemplo 4.5.

Recíprocamente, podemos elegir un flat del retículo de flats $L(M_{\mathcal{A}})$, y le asociamos una intersección del arreglo; para ello, le asignamos la intersección x de todos los hiperplanos H de \mathcal{A} tales que el vector η_H pertenezca al conjunto de vectores de T .

Por construcción, podemos deducir fácilmente que las asignaciones $x \rightarrow T$ y $T \rightarrow x$ son inversas la una de la otra y que conservan las respectivas relaciones de orden de ambos retículos $L(\mathcal{A})$ y $L(M_{\mathcal{A}})$, con esto queda probado.

5.3.1. Polinomios característicos

Si \mathcal{A} es un arreglo de hiperplanos, hemos definido previamente su polinomio característico en la sección 1, como:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim(X)} = \chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim(V) - rk(X)}$$

donde $\mu(X) = \mu(\hat{0}, X)$, ya que $L(\mathcal{A})$ siempre tiene un mínimo.

Si \mathcal{A} es un arreglo **central**, podemos asociarle una matroide simple $M_{\mathcal{A}}$, como vimos anteriormente. Hemos definido también el polinomio característico de una matroide como:

$$\chi_M(t) = \sum_{x \in L(M)} \mu(T) t^{rk(M) - rk(T)}$$

donde $\mu(X) = \mu(\hat{0}, T)$, ya que $L(T)$ siempre tiene un mínimo, el conjunto vacío. La biyección $X \longleftrightarrow T$ del apartado anterior es un isomorfismo de retículos; por tanto, $\mu(T) = \mu(X)$, para $X \in L(\mathcal{A})$ y su correspondiente *flat* asignado T en $L(M_{\mathcal{A}})$. Las fórmulas para el polinomio característico son idénticas y podemos concluir que $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{M_{\mathcal{A}}}(T)$.

En cambio, si tenemos un arreglo que no es central, $L(\mathcal{A})$ no será un retículo y no existirá una matroide asociada; en este caso, las relaciones con matroides serán las que se puedan sacar a partir de la fórmula de Whitney y el caso anterior:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{A}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - rank(\mathcal{B})} \quad (5.10)$$

Si consideramos el poset cuyos puntos son el arreglo \mathcal{A} y sus subarreglos centrales \mathcal{B} , ordenado por la inclusión inversa, dicho poset tiene un mínimo $\hat{0}$, que es \mathcal{A} , y por tanto se puede definir una función de Möbius de una variable, $\mu(\mathcal{B}) = \mu(\hat{0}, \mathcal{B})$. Entonces si expresamos la fórmula de Whitney también para todos los arreglos \mathcal{B} , se tiene un conjunto de igualdades, que por la fórmula de inversión nos permite deducir otras igualdades, como:

$$(-1)^{\#\mathcal{B}} t^{n - rk(\mathcal{B})} = \sum_{\mathcal{C} \subset \mathcal{B}} \mu(\mathcal{C}) \chi_{\mathcal{C}}(t) \quad (5.11)$$

y, por tanto,

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}} \mu(\mathcal{C}) \chi_{\mathcal{C}}(t)$$

y su segundo miembro es expresable en términos de las matroides $M_{\mathcal{C}}$ asociadas a los arreglos centrales \mathcal{C} , ya que $\chi_{\mathcal{C}}(t) = \chi_{M_{\mathcal{C}}}(t)$.

También por lo visto en el capítulo referido a arreglos gráficos, se tiene que:

Teorema 5.22

Si G es un grafo, y $\mathcal{A} = \mathcal{A}_G$, y $M = M_{\mathcal{A}}$, se tiene que:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_G(t) = \chi_M(t) \quad (5.12)$$

Capítulo 6

CUERPOS FINITOS

6.1. El método de cuerpos finitos

Ahora consideraremos arreglos sobre otros cuerpos, distintos a \mathbb{R} . Suponemos, por ejemplo un arreglo \mathcal{A} definido en sobre \mathbb{Z} ; en este caso podemos tomar coeficientes módulo p , con p primo, y llegar a un arreglo \mathcal{A}_q , con $q = p^r$. Este arreglo estará definido sobre un cuerpo \mathbb{F}_q . Diremos que \mathcal{A} es una buena reducción módulo p si obtenemos $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$.

Aquí, como \mathbb{F}_q no es un cuerpo ordenado, tendremos que prescindir de algunas nociones como el número de regiones; pero conceptos como el poset de intersección, como veremos a continuación, son isomorfos, con lo que continuarán siendo similares.

Proposición 6.1

Sea \mathcal{A} un arreglo definido sobre \mathbb{Z} . Entonces dicho arreglo tiene una buena reducción para todos excepto para un número finito de primos de p .

Demostración

Sean H_1, H_2, \dots, H_j los hiperplanos afines del arreglo. H_i estará formado por la ecuación $v_i x = a_i$, con $v_i, a_i \in \mathbb{Z}^n$.

Queremos que $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_j \neq \emptyset$. Por álgebra lineal, necesitaremos que:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} v_1 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ v_j & a_j \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Es más, tenemos:

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_j) = n - \text{rank} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Ahora, sabemos que el rango de una matriz A será $\geq t$ si y solo si podemos encontrar una submatriz B de rango $t \times t$ que satisfaga $\det(B) \neq 0$.

Entonces, $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$ si y solo si al menos un miembro S de una colección \mathcal{S} de subconjuntos de matrices B satisface:

$$(\forall B \in S) \text{ tenemos } \det(B) \neq 0, \text{ pero } \det(B) \equiv 0 \pmod{p}$$

Y esto solo puede pasar para una cantidad p finita de primos, es decir, $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$ para p lo suficientemente grande. Con esto queda probado.

Ahora, veamos el resultado principal de esta subsección, el método de cuerpos finitos; este método aparece en nuestra referencias [1] y [6]; ambos mencionan dicho teorema a raíz del trabajo de Crapo-Rota y Athanasiadis. Este resultado nos ayudará a encontrar el polinomio característico de distintos arreglos, como veremos próximamente con diferentes ejemplos interesantes.

Teorema 6.2

Sea \mathcal{A} un arreglo en \mathbb{Q}^n , y suponemos \mathcal{A}_q para algún $q = p^r$, con $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_r)$. Obtenemos que el número de puntos en \mathbb{F}_q^n que no pertenecen al arreglo \mathcal{A}_q es igual al polinomio característico en para q , $\chi_{\mathcal{A}}(q)$.

Dicho de otra manera, tenemos que:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(q) &= \# \left(\mathbb{F}_q^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H \right) = \\ &= q^n - \# \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H \end{aligned} \tag{6.3}$$

Demostración

Elegimos un x perteneciente al poset de intersección del arreglo \mathcal{A}_q . Como es una intersección de hiperplanos, supongamos que $\dim(x) = k$, al estar en el cuerpo \mathbb{F}_q^n tendrá q^k elementos.

Recordemos la definición de polinomio característico de un arreglo:

$$\chi_{\mathcal{A}}(q) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu(x) q^{\dim(x)} \tag{6.4}$$

Con esto, obtendremos para cada $x \in L(\mathcal{A}_q)$ tenemos $\mu(x) q^{\dim(x)}$, con $\dim(x) = k$, luego $\mu(x) q^k$. Así, tenemos que cada sumando cuenta el número de puntos de x y lo multiplica por $\mu(x)$.

Luego, cada punto v de \mathbb{F}_q^n contribuye a $\chi_{\mathcal{A}}(q)$ de la forma: $\sum_{x: v \in x} \mu(x) = \sum_{x \leq z} \mu(x)$ donde z es el mínimo elemento de $L(\mathcal{A})$ que contiene a v . Esta suma es igual a 0, cuando $z \neq \mathbb{F}_q^n$, y a 1 cuando $z = \mathbb{F}_q^n$ es el mínimo elemento del poset. Por esto, los únicos elementos que cuentan son los puntos que no están contenidos en ningún hiperplano del arreglo \mathcal{A} , y $\chi_{\mathcal{A}_q}(q) = \# \left(\mathbb{F}_q^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H \right)$. Como sabemos que $L(\mathcal{A}_r) \cong L(\mathcal{A})$, y el polinomio característico depende directamente del poset de intersección del arreglo, tendremos $\chi_{\mathcal{A}_q}(q) = \chi_{\mathcal{A}}(q)$, y con

esto queda probado.

6.2. Ejemplos de arreglos

Ahora, estudiaremos varios ejemplos de arreglos que pueden resultar interesantes para entender la teoría antes redactada; en particular, veremos la aplicabilidad del método de cuerpos finitos para hallar el polinomio característico de diferentes arreglos. Nos hemos apoyado de nuestra referencia [\[article.\]](#)

6.2.1. Arreglos de trenzas

Definición 6.3

Como mencionamos en nuestra sección primera, el arreglo de trenzas clásico \mathcal{B}_n está formado por los hiperplanos de la forma $x_i - x_j = 0$, para $1 \leq i < j \leq n$; este tipo de arreglo tiene $\binom{n}{2}$ hiperplanos.

Teorema 6.4

El polinomio característico del arreglo de trenza \mathcal{B}_n es de la forma:

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(t) = t(t-1)(t-2)(t-3)\dots(t-n+1) \quad (6.5)$$

Demostración

Utilizaremos el método de cuerpos finitos; sea \mathbb{F}_q un cuerpo finito, para un primo q lo suficientemente grande.

Vamos a contar los puntos de \mathbb{F}_q^n que no estén en los hiperplanos del arreglo; de la forma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, tales que $\alpha_i \neq \alpha_j$, para poder aplicar el método de los cuerpos finitos. Por nociones básicas de combinatoria, es fácil ver que hay $t(t-1)(t-2)(t-3)\dots(t-n+1)$ puntos que lo cumplen, pues tan solo debemos escoger como coordenadas a n elementos distintos de \mathbb{F}_q . Se sigue entonces que:

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(t) = t(t-1)(t-2)(t-3)\dots(t-n+1)$$

Notamos que para computar el número de regiones en \mathbb{R}^n , se tiene en cuenta para un punto $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ en qué lado del hiperplano se encuentra dicho punto, es decir, se especifica si $\alpha_i < \alpha_j$, o $\alpha_i > \alpha_j$.

Así, el número de regiones vendrá dado por el número de formas en que podemos especificar si $\alpha_i < \alpha_j$, o $\alpha_i > \alpha_j$, para $1 \leq i < j \leq n$. Esto nos obliga a imponer un orden lineal sobre los α_i .

Dicho de otra manera, si tomamos $w \in \mathfrak{S}_n$, con \mathfrak{S}_n el grupo de simetrías de todas las permutaciones en $1, 2, \dots, n$, se corresponde una región del arreglo R_w dada por:

$$R_w\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_{w(1)} > \alpha_{w(2)} > \dots > \alpha_{w(n)}\}$$

Y tenemos $r(\mathcal{B}_n) = n!$.

Se podría hacer esta demostración también aplicando el teorema de Zaslavsky,

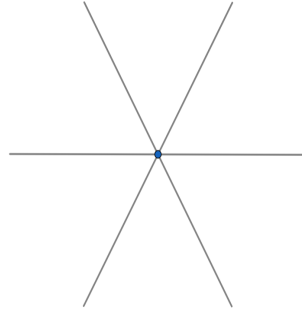


Figura 6.1: Arreglo de trenzas \mathcal{B}_3 cortado por $\ker(x + y + z)$

ya que tenemos el polinomio característico del arreglo.

Notemos que el arreglo carece de regiones acotadas, ya que todos los hiperplanos pasan por el origen.

En el ejemplo que vemos en la Figura 6.1, vemos la representación de un arreglo de trenzas \mathcal{B}_3 ; cortado el plano $x + y + z = 0$.

6.2.2. Arreglos de Catalan

Los Números de Catalan son una secuencia de números enteros que desempeñan un papel destacado en diversos campos de las matemáticas, desde la combinatoria hasta la teoría de la computación y la geometría. Son nombrados en honor al matemático francés Eugène Charles Catalan, quien los estudió por primera vez en el siglo XIX.

En la literatura matemática, los Números de Catalan se denotan comúnmente como C_n , donde n representa el índice del término en la secuencia. La sucesión comienza con $C_0 = 1$ y se define recursivamente de la siguiente manera:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \quad (6.6)$$

Es decir, cada término de la secuencia de Catalan se obtiene sumando el producto de dos términos anteriores en la secuencia.

Existe otra fórmula conocida para los Números de Catalan que no implica una recursión directa. Esta fórmula utiliza funciones binomiales y se expresa de la siguiente manera:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (6.7)$$

Esta fórmula proporciona una manera alternativa de calcular los Números de Catalan mediante coeficientes binomiales. La relación con las funciones combi-

natorias refleja la conexión intrínseca de los Números de Catalan con problemas de cómputo o conteo, y nos será más útil en este contexto.

Un ejemplo que se menciona en la referencia [1] y que nos resulta interesante, es el siguiente: el número de Catalan C_n es el número de sucesiones de votación b_1, b_2, \dots, b_{2n} . El ejemplo se ilustra en unas elecciones donde $2n$ votantes votan por uno de dos candidatos A y B. Los votos se reciben en orden, y el candidato A nunca está detrás del candidato B, pero al final el resultado es un empate. Cada b_i es 1 o -1 , dependiendo de si el voto va a un candidato u otro. Tenemos:

$$b_1 + \dots + b_n \geq 0 \quad i = 1, \dots, 2n - 1 \quad b_1 + \dots + b_{2n} = 0 \quad (6.8)$$

Vemos ahora que los números de Catalan satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$C_0 = 1 \quad (6.9)$$

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \dots + C_n C_0, \quad n \geq 0$$

Definición 6.5

El arreglo de Catalan \mathcal{C}_n es el arreglo de \mathbb{R}^n formado por los hiperplanos:

$$x_i - x_j = 0 \quad x_i - x_j = 1 \quad x_i - x_j = -1 \quad (1 \leq i < j \leq n) \quad (6.10)$$

Vemos que el arreglo \mathcal{C}_n tiene $3\binom{n}{2}$ hiperplanos, y su rango, $rank(\mathcal{C}_n) = n - 1$.

En particular, el arreglo de Catalan \mathcal{C}_3 está formado por los siguientes hiperplanos:

$$x_1 - x_2 = -1 \quad x_1 - x_2 = 0 \quad x_1 - x_2 = 1$$

$$x_2 - x_3 = -1 \quad x_2 - x_3 = 0 \quad x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 - x_3 = -1 \quad x_1 - x_3 = 0 \quad x_1 - x_3 = 1$$

Hemos de fijarnos también en que el arreglo de Catalan \mathcal{C}_n contiene, evidentemente, al arreglo de trenzas \mathcal{B}_n , definido anteriormente. Evidentemente, cada región de \mathcal{B}_n es de nuevo dividida por los hiperplanos que conforman el arreglo de Catalan. En particular, si $r_0(\mathcal{C}_n)$ es el número de regiones del arreglo de Catalan \mathcal{C}_n contenidas en una única región de \mathcal{B}_n , el número de regiones de \mathcal{C}_n será $r(\mathcal{C}_n) = n!r_0(\mathcal{C}_n)$.

Proposición 6.6

El número de regiones que forman los hiperplanos del arreglo \mathcal{C}_n es $n!C_n$, y el número de regiones acotadas es $n!C_{n-1}$.

Demostración

Como ya hemos visto, el arreglo de Catalan \mathcal{C}_n contiene al arreglo de trenzas. Hemos visto que un arreglo de trenzas \mathcal{B}_n forma $n!$ regiones iguales. Veamos que el arreglo de Catalan divide cada región del arreglo de trenzas en C_n regiones. Tomemos una región del arreglo de trenzas, por ejemplo, $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Ahora, es evidente que para cada x_i, x_j , tenemos $x_i - x_j > -1$ para $i < j$.

Debemos elegir ahora $x_i - x_j > 1$ ó $x_i - x_j < 1$, con $i < j$. Debemos decidir el orden de los números $x_1, \dots, x_n, x_1 + 1, \dots, x_n + 1$; podemos asignar un -1 a cada x_i y un 1 a cada $x_i + 1$; hemos de tener en cuenta que $x_1 > x_2 > \dots > x_n$, y por ende, que $x_1 + 1 > x_2 + 1 > \dots > x_n + 1$. Entonces el orden $x_1 > x_1 + 1 > x_2 + 1 > x_3 + 1 > x_2 > x_3 > x_4 + 1 > \dots$ se convierte en la sucesión $(-1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, \dots)$; esto es claramente una sucesión de votación, y cada una representa una subsección. El resultado se sigue.

Ahora, aplicando el método de los cuerpos finitos, podemos hallar el polinomio característico del arreglo de Catalan.

Teorema 6.7

El polinomio característico de un arreglo de Catalan \mathcal{C}_n es de la forma:

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(t) = t(t - n - 1)(t - n - 2)(t - n - 3)\dots(t - 2n + 1)$$

Demostración

Aplicamos el método de los cuerpos finitos. Sea $q > 2n$ un número primo, definimos el cuerpo \mathbb{F}_q^n . Buscamos las formas de seleccionar n valores (x_1, x_2, \dots, x_n) , pero no se puede dar que $x_i - x_j = 0$, y tampoco $x_i - x_j = 1$ ó $x_i - x_j = -1$, con lo que dichos valores no pueden ser iguales ni consecutivos. Para elegir la primera coordenada x_1 tenemos q posibilidades; para las demás, escogeremos $n - 1$ enteros $z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1}$ entre 1 y $q - n - 1$, para asociarle a las otras $n - 1$ coordenadas los valores $x_1 + z_1 + 1, x_1 + z_2 + 2, \dots, x_1 + z_{n-1} + n - 1$ en cualquiera de los $(n - 1)!$ órdenes posibles.

Así, obtenemos que hay $\binom{q-n-1}{n-1}(n-1)!$ maneras de elegir $n - 1$ valores que no sean repetidos ni consecutivos en el cuerpo \mathbb{F}_q^n .

Obtenemos así que que el número de puntos \mathbb{F}_q^n que no están en ninguno de los hiperplanos de \mathcal{C}_n es:

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(q) = q \binom{q-n-1}{n-1} (n-1)! = q(q-n-1)(q-n-2)\dots(q-2n+1)$$

Y con esto, queda probado. En la Figura 6.2 hemos representado, al igual que \mathcal{B}_3 , el arreglo de Catalan \mathcal{C}_3 cortado por el plano $x + y + z = 0$. En negro están los arreglos que también pertenecen a \mathcal{B}_3 , y en rojo los añadidos.

6.2.3. Arreglo de Shi

Definición 6.8 El arreglo de Shi \mathcal{S}_n está formado por los hiperplanos de la forma:

$$x_i - x_j = 0, \quad x_i - x_j = 1, \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (6.11)$$

Teorema 6.9

El polinomio característico del arreglo de Shi es:

$$\chi_{\mathcal{S}_n}(t) = t(t - n)^{n-1} \quad (6.12)$$

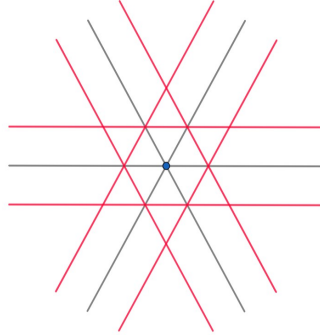


Figura 6.2: Arreglo de Catalan C_3 cortado por $\ker(x + y + z)$

Demostración

Sea p un primo tal que el arreglo \mathcal{S}_n tiene buena reducción módulo p , $q = p^r$. Consideramos los puntos de \mathbb{F}_q^n que no están en el arreglo, es decir, aquellos de la forma:

$$C = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{F}_q^n / i < j \rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j, \quad \alpha_i \neq \alpha_j + 1\}$$

Representamos cada uno de estos puntos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ con una q -tupla de la forma $\alpha^{-1} = (y_0, \dots, y_{q-1})$ de números y símbolos; pondremos $y_i = \circ$ cuando no exista ningún j tal que $\alpha_j = i$, y $y_i = j$ cuando tengamos $\alpha_j = i$.

Por ejemplo, si tenemos \mathbb{F}_{11}^6 , y tenemos por ejemplo el punto $(4, 9, 5, 1, 10, 6)$, le corresponderá la 11-upla $(\circ, 4, \circ, \circ, \circ, 1, 3, 6, \circ, \circ, 2, 5)$.

Construimos estas q -tuplas de otra manera: las construimos como un vector alrededor de un círculo, reflejando la estructura cíclica de \mathbb{F}_q^n , y dibujamos $p - n$ símbolos \circ . Ubicamos el 1 entre los símbolos \circ , y después ubicamos los demás $2, \dots, n$ en alguno de los $q - n$ espacios que quedan entre los \circ consecutivos. Esto se puede hacer de $(q - n)^{n-1}$ maneras. Si en un espacio entre dos \circ consecutivos tiene varios números, se ordenan en orden decreciente en sentido horario. Ahora, para pasar del orden cíclico antes determinado, hemos de fijar la posición de α_1 , y tenemos q maneras de posicionarlo. Con esto, podemos formar lo de $q(q - n)^{n-1}$ formas, y se sigue entonces que:

$$\chi_{\mathcal{S}_n}(t) = t(t - n)^{n-1}$$

Corolario 6.10

El arreglo \mathcal{S}_n tiene $(n + 1)^{n-1}$ regiones, de las cuales $(n - 1)^{n-1}$ son acotadas. *Demostración* Por el Teorema de Zaslavsky sabemos que el número de regiones y el número de regiones acotadas de un arreglo viene dado por:

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$$

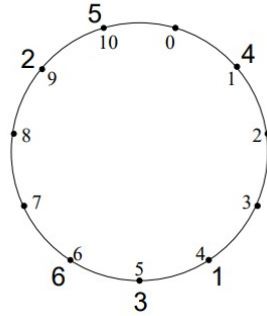


Figura 6.3: La q -tupla del ejemplo representada sobre un círculo; imagen sacada de la referencia [5]

$$b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$$

Y, sustituyendo, obtenemos $r(\mathcal{S}_n) = (-1)^n (-1) (-1-n)^{n-1}$, con lo que $r(\mathcal{S}_n) = (-1)^{n-1} (-1-n)^{n-1} = (n+1)^{n-1}$, y obtenemos el resultado. La prueba es análoga para la segunda igualdad.

Bibliografía

- [1] Federico Ardila et al. “Tres lecciones en combinatoria algebraica. III. Arreglos de hiperplanos”. En: (ene. de 2013).
- [2] Gary Gordon y Jennifer McNulty. *Matroids: A Geometric Introduction*. Cambridge University Press, ago. de 2012. DOI: 10.1017/cbo9781139049443. URL: <https://doi.org/10.1017/cbo9781139049443>.
- [3] James G. Oxley. *Matroid Theory (Oxford Graduate Texts in Mathematics)*. USA: Oxford University Press, Inc., 2006. ISBN: 0199202508.
- [4] Ricardo. Pérez Aguila. *Una introducción a las matemáticas discretas y teoría de grafos*. spa. Santa Fe: El Cid Editor, 2013. ISBN: 1-4492-9129-5.
- [5] Edgar Felipe Rincón Pabón. *Aspectos combinatorios del arreglo de Shi*. Inf. téc. Fundación Universitaria de Ciencias de la Salud, 2006. URL: <http://hdl.handle.net/1992/22791>.
- [6] Richard Stanley. “An introduction to hyperplane arrangements”. En: *Geometric Combinatorics*. American Mathematical Society, oct. de 2007. DOI: 10.1090/pcms/013/08. URL: <https://doi.org/10.1090/pcms/013/08>.
- [7] Vitaly Voloshin. “Graph Coloring: History, results and open problems”. En: *Alabama Journal of Mathematics* (ene. de 2009).
- [8] Douglas Brent West et al. *Introduction to graph theory*. Vol. 2. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.