Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

El módulo de diferenciales de orden N

Autora: Sofía Díez Ocharan

Tutor: Santiago Encinas Carrión

12 de marzo de 2024

Índice general

Introducción

Este Trabajo Fin de Grado está motivado por el estudio de las derivaciones y la diferencial sobre un módulo al observarlas desde el punto de vista algebraico. En particular nos centraremos en el estudio del *módulo de diferenciales de orden* N, generalización del llamado *módulo de diferenciales de Kähler* que debe su nombre al matemático alemán *Erich Kähler* (1906-2000).

En este contexto, una R-derivación se define como un R-homomorfismo que va de un R-álgebra A a un A-módulo M y cumple cierta propiedad que denominamos *regla del producto*, extensión de la conocida como *Regla de Léibniz* para derivaciones de primer orden. Las definiciones para derivaciones de primer orden y de orden arbitrario aparecen recogidas en 2.1.1 y 3.1.1 respectivamente.

Dados un R-álgebra A y un A-módulo M, recordamos que una R-derivación de primer orden $D \in \mathrm{Der}_R(A, M)$ cumple la *regla de Léibniz*

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f) \quad \forall\, f, g \in A.$$

Se puede generalizar la regla anterior de la siguiente manera: Sea A una R-álgebra y M un A-módulo, una R-derivación de orden n $D \in \mathrm{Der}^n_R(A, M)$, cumple la *regla de Leibniz generalizada*

$$D(x_0 x_1 ... x_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < ... < i_k} x_{i_1} ... x_{i_k} D(x_0 ... \check{x}_{i_1} ... \check{x}_{i_k} ... x_n) \quad \forall\, x_0, ..., x_n \in A$$

Respecto al *módulo de diferenciales de Kähler*, que habitualmente denotamos Ω^1, este se define mediante la *propiedad universal* 2.2.1, según la cual $\Omega^1_{A/R}$ es el *módulo de diferenciales de Kähler de* A *sobre* R si para cada A-módulo M y para cada R-derivación $D : A \to M$ existe una única aplicación A-lineal $\varphi : \Omega^1_{A/R} \to M$ tal que el diagrama mostrado a continuación es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d_{A/R}"] \arrow[dr, "D"'] & & \Omega^1_{A/R} \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

De forma natural, la generalización del *módulo de diferenciales de Kähler* también se define mediante una propiedad universal, definida en 3.2.1:

El par $(\Omega^n_{A/R}, d^n_{A/R})$ *cumple la propiedad universal del módulo de diferenciales de orden* $n \in \mathbb{N}$ *si para cada* R*-derivación* $D : A \to M$ *de orden* n *existe una única aplicación* A*-lineal* $\varphi : \Omega^n_{A/R} \to M$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d^n_{A/R}"] \arrow[dr, "D"'] & & \Omega^n_{A/R} \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

El grueso de este documento consiste en desarrollar de forma rigurosa todos los elementos necesarios para definir el *módulo de diferenciales de orden* n, probar su unicidad y dar una construcción del mismo. Haremos esto trabajando primero con derivaciones de primer orden, correspondientes al *módulo de diferenciales de Kähler*, para poder apoyarnos en conceptos ya vistos en este caso más sencillo a la hora de generalizarlo a órdenes superiores.

No obstante, una vez construido el andamiaje teórico tiene sentido tratar de estudiar algunas propiedades de los módulos de diferenciales. En este caso nos ocuparemos de propiedades relativas a cómo las transformaciones de los anillos y R-álgebras sobre los que construimos las derivaciones afectan al módulo de diferenciales, así como de dar una presentación del *módulo de diferenciales de orden* n *de* A *sobre* R en forma de sucesión exacta. Veremos que en ocasiones tener en cuenta estas propiedades nos va a permitir simplificar el cálculo de módulos de diferenciales a priori más complejos expresándolos en términos de módulos de diferenciales sencillos de calcular. Todos estos resultados complementarios a la construcción del módulo de diferenciales se encuentran recogidos en las secciones 2.3. *Propiedades de los módulos de diferenciales*, 3.4. *Presentación de* $\Omega^n_{A/R}$ y 3.4.1. *Otros resultados.*

Naturalmente ilustraremos todos los desarrollos teóricos con algunos ejemplos de cálculo aplicados a los casos más sencillos, con el fin de acompañar las construcciones teóricas y facilitar su comprensión. En general el R-módulo elegido para estos ejemplos es el anillo de polinomios sobre R en una o varias variables. Así, podemos encontrar en el ejemplo 2.2.13 una descripción del *módulo de diferenciales de Kähler* en el caso en que el módulo A es un anillo de polinomios en varias variables, que ampliamos en el ejemplo 2.3.6 describiendo cómo es el *módulo de diferenciales de Kähler* cuando lo consideramos sobre el módulo resultante de tensorizar dos anillos distintos de polinomios en varias variables sobre un mismo anillo R.

En el tercer capítulo, que trata la generalización del módulo de diferenciales, dedicamos la sección 3.3 a ver cómo en el caso de anillos de polinomios $\Omega^n_{A/R}$ resulta ser un módulo libre. Asimismo, desarrollamos el cálculo de los coeficientes que expresan $D(f)$ en distintas bases cuando D es una R-derivación de orden n sobre $A = R[t]$ y $f \in A = R[t]$. Por último trabajamos al final de la sección 3.4 el ejemplo 3.4.11, donde tomamos $A = R[x, y]$, I ideal de A y buscamos una expresión de $\Omega^n_{(A/I)/R}$. Para ello en lugar de hacer la construcción de $\Omega^n_{(A/I)/R}$ siguiendo el planteamiento teórico inicial, nos apoyamos en $\Omega^n_{A/R}$ por ser este un módulo más sencillo y con el que ya hemos trabajado.

Veamos cómo están organizados los contenidos en el documento:

Debido al carácter optativo de la asignatura de álgebra conmutativa, dedicamos el primer capítulo, [1], a recopilar brevemente los principales conceptos necesarios para definir y trabajar con módulos de diferenciales. Tomaremos como referencia bibliográfica el libro de *Bosch*[1] y notas de clase de *Andreas Gathman*[3]. Veremos en primer lugar las definiciones de módulos y submódulos, R-álgebras y sus respectivos morfismos (sección 1.1). Además haremos algunas observaciones respecto a situaciones que se repetirán constantemente a lo largo del trabajo y en las que no haremos más hincapié, como son la posibilidad de obtener un $R[x]$-módulo a partir de un anillo dado R o la de dotarlo de estructura de álgebra a través de un homomorfismo estructural. Recogemos también el teorema fundamental de homomorfía, algunas construcciones con módulos y losconceptos de suma directa, sistema de generadores, base y módulo libre.

Es natural hablar a continuación de sucesiones exactas (sección 1.2), lo que nos permite trabajar con aplicaciones lineales entre módulos. Nos limitaremos a definir las sucesiones exactas, exactas cortas y exactas cortas escindidas; así como el conúcleo y el concepto de presentación finita de un módulo. Queda recogido al final del documento el conocido como *Lema de la serpiente*, en forma de apéndice A.

Concluimos este capítulo presentando los tensores (sección 1.3), con lo que podremos identificar las aplicaciones bilineales con partida en $M \times N$ con aplicaciones lineales con partida en el módulo producto tensorial $M \otimes N$. Daremos la definición de tensor a través de una propiedad universal y probaremos seguidamente la existencia y unicidad del módulo que verifica esta propiedad. Para favorecer la claridad de la exposición en este capítulo introductorio, esta demostración realizada en detalle aparece recogida en el apéndice B. Sí mantenemos aquí algunos otros resultados útiles como los teoremas de isomorfía y los que se deducen de ellos.

En el segundo capítulo, [2], estudiaremos el módulo de diferenciales de primer orden (*módulo de diferenciales de Kähler*) que generalizaremos en el tercer y último capítulo. Empezaremos dando la definición de *derivación de primer orden*, caracterizándola a través de la *propiedad de Leibniz* (sección 2.1). En este capítulo nos apoyamos tanto en el libro de *Eisenbud* [2] como en un paper de Y. Nakai, *On the theory of differentials in commutative rings*[4].

Ya en la sección 2.2 definimos el módulo de diferenciales de primer orden a través de la propiedad universal 2.2.1 mencionada anteriormente en esta introducción. Si bien la prueba de unicidad es bastante inmediata, como se muestra en 2.2.2, la prueba de la existencia requiere realizar una construcción de manera algo elaborada.

Dotamos $A \otimes_R A$ de estructura de A-álgebra definiendo un producto interno, 2.2.3, y consideraremos el homomorfismo de anillos $\mu : A \otimes_R A \to A$ descrito en 2.2.5. Obtenemos así $\mathfrak{I} := \ker \mu$, que podemos considerar como A-módulo o como ideal de $A \otimes_R A$ según nos convenga como se demuestra en 2.2.7 y consideramos $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$, que puede ser entendido como $(A \otimes_R A)$-módulo o como $(A \otimes_R A)/\mathfrak{I}$-módulo (ver 2.2.9).

La proposición 2.2.10 junto con el corolario 2.2.11 proporcionan una R-derivación $d : A \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$. Comprobamos en el teorema 2.2.12 que el par $(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2, d)$ cumple la *propiedad universal del módulo de diferenciales*, con lo que concluye la demostración constructiva de la existencia del módulo de diferenciales de primer orden. Para facilitar la comprensión de esta construcción, ilustraremos brevemente el caso en que el módulo es un anillo de polinomios en varias variables; es el ejemplo 2.2.13.

Finalizamos el capítulo con la sección 2.3, observando algunas propiedades interesantes del módulo de diferenciales de Kähler, relativas a la relación entre módulos de diferenciales cuando tenemos en cuenta las relaciones entre los módulos sobre los que están construidos o consideramos el módulo de diferenciales tensorizado con otro módulo. Más concretamente veremos qué ocurre cuando la R-álgebra A induce morfismo de anillos de R en R' en 2.3.1, probaremos en 2.3.2 que un morfismo de R-álgebras $f : A \to B$ da lugar a la sucesión canónica exacta de B-módulos

$$\Omega^1_{A/R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_{B/R} \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \longrightarrow 0 \qquad \textit{(1}^{\underline{a}}\textit{ sucesión exacta fundamental)}$$

que se puede extender por la izquierda como vemos en 2.3.4

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{A/R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_{B/R} \longrightarrow 0 \qquad \textit{(2}^{\underline{a}}\textit{ sucesión exacta fundamental)}$$

Terminamos esta sección con la prop. 2.3.5, donde probamos que dadas R-álgebras A y B existe un isomorfismo canónico de $(A \otimes_R B)$-módulos de $(\Omega^1_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega^1_{B/R})$ en $\Omega^1_{(A \otimes_R B)/R}$; resultado que ilustramos con el ejemplo 2.3.6.

Por último estudiaremos el caso general, el *módulo de diferenciales de orden n* apoyándonos en otro de los papers publicados por Y.Nakai, *High order derivations* [5]. Para ello definimos en la sección 3.1 las *derivaciones de orden n* y pasamos a caracterizar el módulo de diferenciales de orden n y su derivación asociada en la sección 3.2, de nuevo a través de una propiedad universal 3.2.1. En este caso tras la prueba de unicidad 3.2.2 tendremos que definir el *operador corchete* 3.2.3:

$$[h, a] = h \circ a - a \circ h - h(a) \quad \forall\ h \in \mathrm{Hom}_R(A, M),\ a \in A$$

La utilidad de este operador está en que, como probaremos en el teorema 3.2.5, $D \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ es una R-derivación de orden n si, y solo si, para cuaquier n-upla de elementos $x_1, ..., x_n \in A$ se verifica $[...[[D, x_1], x_2]..., x_n] = 0$.
Estudiando el comportamiento de este operador al actuar sobre derivaciones de orden superior, llegaremos a probar que la generalización natural de los conceptos vistos al trabajar con derivaciones de primer orden cumple la *propiedad universal del módulo de diferenciales de orden n* (corolario 3.2.9).

$$(\Omega^n_{A/R}, d^n_{A/R}) = (\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}, d^{(n)})$$

En la sección 3.3 estudiaremos el caso particular del módulo de diferenciales de orden n cuando el R-módulo sobre el que se trabaja es anillo de polinomios en R, caso en el que veremos que el módulo de diferenciales de orden n es un *módulo libre*. Limitándonos a polinomios de una variable por ser el caso más sencillo, buscaremos obtener la expresión de los coeficientes que permiten expresar de manera única los elementos del módulo de diferenciales como combinación lineal de los elementos de cada una de las dos bases que consideramos.

A continuación, en la sección 3.4, volveremos al estudio de las propiedades del módulo de diferenciales ahora para oden n arbitrario. Nos ceñimos al caso en que A y B son R-álgebras relacionadas mediante un homomorfismo $f : A \to B$. Llegaremos a dar una *presentación finita* del módulo $\Omega^n_{B/R}$ cuando $B = A/I$ (A cocientado por un ideal) como muestra el teorema 3.4.9.

$$0 \to \mathfrak{N} \to (A/I) \otimes_A \Omega^n_{A/R} \to \Omega^n_{(A/I)/R} \to 0$$

y en el corolario 3.4.10 damos una expresión alternativa de $\Omega^n_{(A/I)/R}$

$$\Omega^n_{(A/I)/R} \simeq \frac{\Omega^n_{A/R}}{I\Omega^n_{A/R} + D^n(I)}$$

que ilustramos a través del ejemplo 3.4.11.

Finalmente aprovecharemos en la subsección 3.4.1 resultados ya vistos para enunciar y probar unas últimas propiedades de $\Omega^n_{B/R}$ cuando se aplica a R-derivaciones que se anulan en A y la exactitud de sucesiones construidas sobre el módulo $\Omega^n_{B/R}$.

Capítulo 1

Conceptos previos

Recogemos en este capítulo algunos conceptos que manejaremos a lo largo de todo este trabajo. Como primera observación, los resultados expuestos se desarrollan en el contexto del álgebra conmutativa, por lo que consideraremos siempre *anillos conmutativos con unidad* sin necesidad de mencionarlo explícitamente. Además, para referirnos a los anillos, adoptaremos en general la nomenclatura R tomada del ingés *ring*, reservando A para las álgebras.

Dada la importancia de asegurar que las sumas son finitas, a menudo usaremos la expresión "para casi todo"o "casi siempre", que abreviaremos *p.c.t.* o *c.s.* con el significado "para todos excepto una cantidad finita de valores".

1.1. Módulos

Definición 1.1.1. Sea R un anillo, un R-módulo es un conjunto M dotado de dos operaciones:

- Suma interna

$$\begin{aligned} M \times M &\to M \\ (m, n) &\mapsto (m + n) \end{aligned}$$

- Producto externo

$$\begin{aligned} R \times M &\to M \\ (r, m) &\mapsto (r \cdot m) \end{aligned}$$

Estas operaciones deben cumplir las siguientes condiciones:

1. $(M, +)$ es grupo abeliano
2. Distributividad de la suma con respecto al producto en M y en R:

$$(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m \text{ para todo } r, s \in R,\ m \in M.$$
$$r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n \text{ para todo } r \in R,\ m, n \in M.$$

3. Asociatividad del producto

$$(r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m) \text{ para todo } r, s \in R,\ m \in M.$$

4. $1_R \cdot m = m$ para todo $m \in M$

Ejemplo 1.1.2.

1. Si R es un cuerpo, la definición de R-módulo coincide con la de R-espacio vectorial.

2. $R^n = \{(r_1, ..., r_n) : r_1, ..., r_n \in R\}$ considerado con la suma componente a componente y la multiplicación por escalares es un módulo.

   De forma más general, el producto de dos R-módulos $M \times N$ considerado con la suma componente a componente y la multiplicación por escalares también tiene estructura de R-módulo. Nos referimos a este módulo y cualquiera isomorfo a él como *módulo libre de rango n*.

Definición 1.1.3. Sea M un R-módulo. Un subgrupo $N \subset M$ es *submódulo* de M si $r \cdot n \in N$ para todo $r \in R$, $n \in N$. En particular, N es un R-módulo considerado con la suma y el producto heredados de M.

Observación 1.1.4. Sea R un anillo, podemos considerarlo como R-módulo. Entonces por definición un submódulo de R como módulo es lo mismo que un ideal I de R como anillo y el anillo cociente R/I es a su vez un R-módulo.

Definición 1.1.5. Sean M, N R-módulos y $\varphi : M \to N$ aplicación entre ellos; φ es un *homomorfismo de R-módulos* o aplicación R-lineal si cumple:

1. $\varphi(m + n) = \varphi(m) + \varphi(n)$ para todo $m, n \in M$

2. $\varphi(r \cdot m) = r \cdot \varphi(m)$ para todo $r \in R$, $m \in M$.

Ejemplo 1.1.6.

1. Sea I un ideal de R, la aplicación de R en R/I que envía cada $r \in R$ a su clase $\overline{r}$ es un homomorfismo sobreyectivo de R-módulos

2. Sea M un R-módulo, los siguientes homomorfismos son inversos el uno del otro, con lo que $\mathrm{Hom}_R(R, M) \simeq M$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(R, M) &\longrightarrow M \\ \varphi &\longmapsto \varphi(1) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} M &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, M) \\ m &\longmapsto R \longrightarrow M \\ & \quad\ \ r \longmapsto a \cdot m \end{aligned}$$

Observación 1.1.7. Sea R un anillo, podemos interpretar un $R[x]$-módulo M como el R-módulo M considerado con el homomorfismo de R-módulos

$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto x \cdot m \end{aligned}$$

Sea M un R-módulo y $\varphi : M \to M$ un homomorfismo de R-módulos, podemos dotar M de estructura de $R[x]$-módulo tomando $x \cdot m := \varphi(m)$

Observación 1.1.8. Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos. Entonces

$$\ker \varphi := \{m \in M : \varphi(m) = 0\}$$

es el núcleo de φ y es un submódulo de M.

$$\mathrm{Im}\varphi := \varphi(M) = \{\varphi(m) : m \in M\}$$

es la imagen de φ, y es un submódulo de N.

Definición 1.1.9. Sea R un anillo. Una *R-álgebra* es un anillo A con estructura de R-módulo tal que se verifica

$$r \cdot (x \cdot y) = (r \cdot x) \cdot y = x \cdot (r \cdot y)$$

para todo $r \in R$, $x, y \in A$. Nótese que estamos usando el símbolo $\cdot$ para denotar tanto la multiplicación dentro del anillo como la multiplicación por escalares en A.

Definición 1.1.10. Un *morfismo de R-álgebras* $A \to B$ es una aplicación entre R-álgebras que conserva las estructuras de módulo y anillo de A y B.

Observación 1.1.11. Dado cualquier homomorfismo de anillos $\varphi : R \to A$, podemos ver A como una R-álgebra a través de φ tomando $r \cdot a := \varphi(r) \cdot a$ para todo $r \in R$, $a \in A$.

Recíprocamente para cualquier R-álgebra A como en la definición, la aplicación φ define un homomorfismo de anillos tal que la estructura como R-álgebra de A coincide con la estructura inducida por φ (siendo 1_A es el elemento unidad de A).

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow A \\ r &\longmapsto r \cdot 1_A \end{aligned}$$

Para dotar el anillo A de estructura de R-álgebra es suficiente dar un homomorfismo $R \to A$, al que nos referiremos como *homomorfismo estructural*. Desde este punto de vista un homomorfismo entre las R-álgebras dadas por $R \to A$, $R \to B$ es un homomorfismo de anillos $A \to B$ compatible con el homomorfismo estructural en el sentido de que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] & & B \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.1.12. Sea R un anillo, el anillo de polinomios $R[x_1, ..., x_n]$ considerado con la inclusión de R en $R[x_1, ..., x_n]$ como homomorfismo de anillos es una R-álgebra.
Tomando cualquier ideal $I \trianglelefteq R$ se verifica que el cociente $R[x_1, ..., x_n]/I$ también es una R-álgebra, a la que llamamos *álgebra de tipo finito sobre R*.

Sea M un R-módulo y $N \subset M$ un submódulo, nos planteamos la construcción de la clase de residuos módulo M/N. Esta consiste en las clases por la derecha $m + N$ de N donde m varía en M, que por trabajar con anillos conmutativos coincidirán con las clases por la izquierda.

M/N es grupo abeliano con la operación $(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$ para $x, y \in M$; y es un R-módulo si tomamos como multiplicación por escalares $r(x + N) = (rx) + N$ para $r \in R, x \in M$. Las leyes de composición quedan bien definidas, y la aplicación canónica π es un morfismo de R-módulos que verifica la propiedad universal enunciada a continuación.

$$\begin{aligned} \pi : M &\longrightarrow M/N \\ m &\longmapsto m + N \end{aligned}$$

Teorema 1.1.13 (Teorema fundamental de homomorfía)**.** *Sea M un R-módulo y $N \subset M$ un submódulo. Si $\varphi : M \longrightarrow M'$ es un morfismo de R-módulos que satisface $N \subset \ker \varphi$, entonces existe un único homomorfismo de R-módulos $\varphi' : M/N \longrightarrow M'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo.:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & M' \\ M/N \arrow[ur, dashed, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

Además se verifica que φ' es inyectiva si, y solo si, $N = \ker \varphi$; φ' es sobreyectiva si, y solo si, φ es sobreyectiva.

Demostración. Exigimos $\varphi' \circ \pi(m) = \varphi(m)$ para todo $m \in M$, con lo que necesariamente $\varphi'(m+N) = \varphi(m)$ para cada $m \in M$. Si $m_1 + N = m_2 + N$, entonces $m_1 - m_2 \in N$ y por tanto $\varphi(m_1 - m_2) = 0$. De la R-linealidad de φ se deduce $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$ y la aplicación φ' está bien definida.

φ' es un homomorfismo de R-módulos por las propiedades heredadas de φ:

$$\begin{aligned}
\varphi'(r(m+N)) = \varphi'(rm+N) &= \varphi(r\cdot m) = r\cdot\varphi(m) = r\cdot\varphi'(m+N) \\
\varphi'((m_1+N)+(m_2+N)) &= \varphi'((m_1+m_2)+N) = \varphi(m_1+m_2) \\
&= \varphi(m_1)+\varphi(m_2) = \varphi'(m_1+N)+\varphi(m_2+N)
\end{aligned}$$

donde tomamos $m, m_1, m_2 \in M$ y $r \in R$.

Caso de existir otro homomorfismo de R-módulos φ'' que hiciera conmutativo el diagrama, tendríamos $\varphi'' \circ \pi = \varphi = \varphi' \circ \pi$ y en consecuencia $\varphi'' = \varphi'$, con lo que se verifica la unicidad.

□

Definición 1.1.14.

- Sea $(m_i)_{i\in I}$ una familia de elementos de M. Entonces el submódulo de M generado por $(m_i)_{i\in I}$, mínimo de M que contiene todos los m_i, es

$$\sum_{i\in I} R\cdot m_i = \left\{\sum_{i\in I} r_i m_i : r_i \in R, r_i = 0\ c.s.\right\}$$

  Si existe un conjunto finito $m_1, ..., m_n \in M$ tal que $M = \sum_{i=1}^n R\cdot m_i$, decimos que M es *de tipo finito* o *de generación finita*.

- Sea (N_i) una familia de submódulos de M. Entonces la suma de los submódulos N_i de M es el submódulo $N \subset M$:

$$N = \sum_{i\in I} N_i := \left\{\sum_{i\in I} n_i : n_i \in N, n_i = 0\ c.s.\right\}$$

  Si para cada $n \in N$ su representación en la forma $n = \sum_{i\in I} n_i$ con $n_i \in N$ es única, decimos que se trata de una *suma directa*.

$$N = \bigoplus_{i\in I} N_i \Longleftrightarrow N_i \cap \left(\sum_{j\neq i} N_j\right) = \{0\}$$

  El segundo ejemplo comentado en 1.1.2, el *módulo libre de rango n*, corresponde a la suma directa $R^n = \bigoplus_{i=1}^n R\cdot e_i$.

- Dados dos R-módulos M, N, el conjunto de los homomorfismos de R-módulos entre M y N, $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, es también un R-módulo. Basta considerar la estructura de R-módulo de N para observar que la suma arbitraria de aplicaciones $M \longrightarrow N$ y sus productos escalares con constantes en R están bien definidos.

Definición 1.1.15. Sea M un R-módulo. Una familia $\{m_i\}_{i\in I}$ de elementos de M es *libre* si dados coeficientes arbitrarios $r_i \in R$ casi todos nulos, la ecuación $\sum_{i\in I} r_i \cdot m_i = 0$ implica $r_i = 0\ \forall\, i \in I$.

Una *base* es un *sistema libre de generadores* de un módulo. Así, una base es una familia de elementos $\{m_i\}_{i\in I}$ no todos nulos tales que todo $m \in M$ admite una representación única de la forma $m = \sum_{i\in I} r_i m_i$ con coeficientes $r_i \in R$ nulos para todos excepto una cantidad finita de $i \in I$.

Decimos que M es un *módulo libre* si admite base, lo cual no siempre está garantizado.

Ejemplo 1.1.16. Si $I \trianglelefteq R$ es un ideal no trivial de R, entonces para ninguna familia $\{x_i\}_{i\in\{1,...,n\}}$ de elementos de R/I puede existir un isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : R^n &\longrightarrow R/I \\ (r_1, ..., r_n) &\longmapsto r_1x_1 + ... + r_nx_n \end{aligned}$$

porque $\varphi(0, ..., 0) = \varphi(r, 0, ..., 0)$ para todo $r \in I$. En consecuencia no hay unicidad en la representación de los elementos de R y por tanto R/I nunca es un R-módulo libre siendo I un ideal no trivial.
Obtenemos inmediatamente ejemplos de módulos conocidos que no son libres, como puede ser $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ o la clase de residuos de un anillo de polinomios considerada con el ideal generado por un polinomio $f \in R[x]$, es decir $R[x]/\langle f\rangle$.

Observación 1.1.17. En la segunda parte del ejemplo 1.1.2 hemos visto que llamamos *módulo libre de rango n* a todo $M \simeq R^n = \bigoplus_{i=1}^n R\cdot e_i$. Como su nombre sugiere, la existencia de una base de M con n elementos es condición necesaria y suficiente para que M sea módulo libre de rango n.

1.2. Sucesiones exactas

Definición 1.2.1. Una sucesión exacta de R-módulos es una cadena de morfismos de R-módulos tal que para cada posición n se verifica $\mathrm{Im} f_{n-1} = \ker f_n$.

$$... \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} ...$$

Definición 1.2.2. Hablamos de sucesiones exactas cortas cuando f es inyectiva, $\mathrm{Im} f = \ker g$ y g es sobreyectiva en la siguiente situación:

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

Ejemplo 1.2.3. Para todo morfismo R-lineal $f : M \to N$ se verifica que

$$0 \to \ker f \to M \xrightarrow{f} \mathrm{Im} f \to 0 \tag{1.1}$$

En una sucesión exacta corta podemos ver M' como un submódulo de M a través de f. *El Teorema fundamental de homomorfía* 1.1.13 asegura entonces que g induce un isomorfismo $M/M' \xrightarrow{\sim} M''$.
Recíprocamente, todo submódulo $N \subset M$ da lugar a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

Es posible obtener sucesiones exactas cortas a partir de la suma de dos R-módulos M' y M'', es decir,

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M' \oplus M'' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

donde $M' \to M' \oplus M''$ es la aplicación inyectiva canónica y $M' \oplus M'' \to M''$ es la proyección sobre la segunda componente. Tales sucesiones son prototipos de las llamadas *sucesiones exactas escindidas*.

Definición 1.2.4. Una sucesión exacta corta de R-módulos

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

escinde si es isomorfa a una del tipo

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M' \oplus M'' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

en el sentido de que existe un isomorfismo $M' \oplus M'' \xrightarrow{\sim} M$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & M' \oplus M'' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Observación 1.2.5. Para que una sucesión exacta corta sea escindida es suficiente que g admita una *sección*, es decir, un morfismo de R-módulos $s : M'' \longrightarrow M$ tal que $g \circ s = \mathrm{Id}_{M''}$.

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \underset{s}{\overset{g}{\rightleftarrows}} M'' \longrightarrow 0$$

Necesariamente s será inyectiva y podremos identificar M'' con su imagen, con lo que M'' será submódulo de M. Viendo también M' como submódulo de M obtenemos $M' \cap M'' = 0$ y $M = M' + M''$, luego el morfismo es exacto en M. Como consecuencia, $M = M' \oplus M''$ y la sucesión exacta de arriba es isomorfa a nuestro prototipo de sucesión exacta escindida 1.3.

De manera similar se prueba que una sucesión exacta corta es escindida siempre que f admita una *retracción*, es decir, un morfismo de A-módulos $r : M \mapsto M'$ tal que $r \circ f = \mathrm{id}_{M'}$.

$$0 \longrightarrow M' \underset{r}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

En este caso $\ker r$ se identifica con M'' a través de g y, de forma análoga a lo anterior, se obtiene que $M = M' \oplus M''$.

Definición 1.2.6. Para cualquier morfismo de R-módulos $f : M' \to M$ podemos considerar la construcción del llamado *conúcleo*, $\operatorname{coker} f := M/\operatorname{im} f$, gracias al cual de cada morfismo f podemos obtener la *sucesión exacta natural*

$$0 \to \ker f \to M' \xrightarrow{f} M \to \operatorname{coker} f \to 0$$

Conocidas las sucesiones exactas, podemos volver brevemente a los módulos para dar una última definición.

Definición 1.2.7. Sea M un R-módulo. Decimos que M es *de tipo finito* o *finitamente generado* si para algún $n \in N$ existe una sucesión exacta

$$R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

En ocasiones cometemos cierto abuso y decimos que *R-módulo finito.*

M es *de presentación finita* si existe una sucesión exacta, a la que nos referiremos como *presentación finita de M*, que sea de la forma

$$R^m \to R^n \to M \to 0$$

1.3. Tensores

Definición 1.3.1. Dados R-módulos M, N y E sobre un anillo R, una aplicación $\phi : M \times N \longmapsto E$ es R-bilineal si las siguientes aplicaciones son R-lineales para todo $m \in M$, $n \in N$:

$$\begin{aligned} \phi(m, \cdot) : N &\longrightarrow E \\ z &\longmapsto \phi(m, z) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \phi(\cdot, n) : M &\longrightarrow E \\ z &\longmapsto \phi(z, n) \end{aligned}$$

Esto es, cada una de ellas define un morfismo de R-módulos.

Definición 1.3.2. Dados R-módulos M, N sobre un anillo R, el producto tensorial de M, N sobre R es un R-módulo T junto con una aplicacion bilineal $\tau : M \times N \mapsto T$ que cumple la siguiente propiedad universal:

Para cada aplicación R bilineal $\phi : M \times N \mapsto E$ existe una única aplicación R-lineal $\varphi : T \mapsto E$ tal que $\phi = \varphi \circ \tau$, es decir, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi"'] & T \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ E & \end{tikzcd}$$

Observación 1.3.3. Habitualmente el espacio de llegada de la aplicación τ lo denotamos $M \otimes_R N$ en lugar de T y escribimos $m \otimes n$ en lugar de $\tau(m, n)$, siendo este el tensor obtenido de m y n. Así, en general escribiremos

$$\begin{aligned} \tau : M \times N &\longrightarrow M \otimes_R N \\ (x, y) &\longmapsto (x \otimes y) \end{aligned}$$

En particular, se observa que los tensores tienen factores R-bilineales, es decir, que para todo $r, r', s, s' \in R$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$:

$$(rm + r'm') \otimes (sn + s'n') = rs(m \otimes n) + rs'(m \otimes n') + r's(m' \otimes n) + r's'(m' \otimes n')$$

Habitualmente nos referiremos a $M \otimes_R N$ como producto tensorial de M y N sobre R, obviando mencionar la aplicación R-bilineal $\tau : M \times N \mapsto M \otimes_R N$.

Para probar la existencia y unicidad del producto tensorial, justificamos que en caso de existir este es único y probamos su existencia de manera constructiva. Debido a la extensión de dicha demostración y con el objetivo de aligerar este primer capítulo nos limitaremos por ahora a enunciar los resultados, quedando sus demostraciones recogidas en el apéndice B

Lema 1.3.4 (Unicidad). *Los productos tensoriales quedan determinados por la propiedad universal de manera única salvo isomorfismos.*

Proposición 1.3.5 (Existencia). *Para cualquier pareja M, N de R-módulos arbitrarios, existe el producto tensorial $T = M \otimes_R N$.*

En la práctica rara vez se utiliza la construcción dada en la demostración B.0.3 del apéncice B, porque suele ser más útil obtener la información necesaria de la propiedad universal. Es el caso del siguiente resultado:

Lema 1.3.6. *Sean M, N R-módulos. Todo elemento $z \in M \otimes_R N$ se puede expresar, no necesariamente de forma única, como suma finita de tensores $z = \sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i$ con $m_i \in M$, $n_i \in N$.*

Demostración. Sea $T \subset M \otimes_R N$ el submódulo generado por todos los tensores $m \otimes n$ con $m \in M$ y $n \in N$. La aplicación R-bilineal canónica $\tau : M \times N \to M \otimes_R N$ puede ser restringida a una aplicación R-bilineal $\tau' : M \times N \to T$ que, al igual que τ, satisface la propiedad universal del producto tensorial de M y N sobre R.

En efecto, si $\Phi : M \times N \to E$ es una aplicación R-bilineal sobre un R-módulo E, existe una aplicación R-lineal $\varphi : M \otimes_R N \to E$ que verifica $\Phi = \varphi \circ \tau$; y su restricción $\varphi' = \varphi|_T$ satisface la relación $\Phi = \varphi' \circ \tau'$. De esta forma φ' queda unívocamente determinado, ya que $\tau'(m, n)$ se obtiene para cada $m \in M$, $n \in N$ de $\varphi'(\tau'(m, n)) = \Phi(m, n)$. Así, T es producto tensorial de M y N sobre R, y por la unicidad probada en 1.3.5 conocemos que la aplicación de inclusión $T \hookrightarrow M \otimes_R N$ es biyectiva, con lo que $T = M \otimes_R N$.

$\square$

Corolario 1.3.7. *Sean $\{m_i\}_{i \in I}$ y $\{n_j\}_{j \in J}$ sistemas generadores de M y N R-módulos. Entonces $\{m_i \otimes n_j\}_{i \in I, j \in J}$ es sistema generador de $M \otimes_R N$.*

Demostración. Dados $m \in M$ y $n \in N$, tenemos ecuaciones del tipo

$$m = \sum_{i \in I} r_i m_i, n = \sum_{j \in J} s_j n_j$$

con coeficientes $r_i, s_j \in R$. Obtenemos

$$m \otimes n = (\sum_{i \in I} r_i m_i) \otimes (\sum_{j \in J} s_j n_j) = \sum_{i \in I, j \in J} r_i s_j \otimes m_i n_j$$

Del lema anterior se deduce que $(m_i \otimes n_j)_{i \in I, j \in J}$ es un sistema generador de $M \otimes_R N$. $\square$

Observación 1.3.8. Sean M,N R-módulos y $\{z_{m,n}\}_{m\in M,n\in N}$ una familia de elementos de cierto R-módulo E.

- Si $\varphi : M\otimes_R N \mapsto E$ es una aplicación R-lineal que verifica $\varphi(m_i\otimes n_j) = z_{m_i,n_j}$ con $\{m_i\}_i \in M$, $\{n_j\}_j \in N$ sistemas de generadores de M y N respectivamente, entonces φ es la única aplicación con esta propiedad.
- Sea $\phi : M \times N \mapsto E$ dada por $\phi(m, n) = z_{m,n}\,\forall m \in M$, $n \in N$ una aplicación R-bilineal. Entonces, existe una aplicación R-lineal $\varphi : M \otimes_R N \mapsto E$ tal que $\varphi(m \otimes n) = z_{m,n}$ para todo $m \in M$, $n \in N$.
  Por la primera parte de la observación, la aplicación φ con esta propiedad es única.

En la práctica, puede resultar útil definir aplicaciones $M \otimes N \mapsto E$ de acuerdo con la segunda parte de la observación anterior.

Proposición 1.3.9. *Sean M, N, P R-módulos y $L \simeq R$ un R-módulo libre generado por un único elemento e. Entonces existen los siguiente isomorfismos canónicos entre R-módulos:*

$$\begin{aligned} L \otimes_R M &\xrightarrow{\sim} M \\ re \otimes m &\mapsto rm \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (M \otimes_R N) \otimes_R P &\xrightarrow{\sim} M \otimes_R N \otimes_R P \\ (m \otimes n) \otimes z &\mapsto m \otimes n \otimes z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \otimes_R N &\xrightarrow{\sim} N \otimes_R M \\ m \otimes n &\mapsto n \otimes m \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (M \oplus N) \otimes_R P &\xrightarrow{\sim} (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P) \\ (m \oplus n) \otimes z &\mapsto (m \otimes z) \oplus (n \otimes z) \end{aligned}$$

Demostración. Puesto que la construcción es similar en todos los casos, basada en la propiedad universal, vamos a limitarnos a probar el primero de los isomorfismos. La siguiente aplicación es R-bilineal

$$\begin{aligned} L \times M &\to M \\ (re, m) &\mapsto rm \end{aligned}$$

Induce una aplicación R-lineal bien definida

$$\begin{aligned} \varphi : L \otimes_R M &\to M \\ re \otimes m &\mapsto rm \end{aligned}$$

Por la propiedad universal podemos considerar la aplicación R-lineal

$$\begin{aligned} \psi : M &\to L \otimes_R M \\ m &\mapsto e \otimes m \end{aligned}$$

Las siguientes igualdades con $r \in R$, $m \in M$, evidencian que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_M$:

$$(\psi \circ \varphi)(re \otimes m) = \psi(rm) = e \otimes (rm) = r(e \otimes m) = re \otimes m$$

φ y ψ son inversas la una de la otra y por tanto isomorfas. $\square$

Proposición 1.3.10 (Propiedad universal de la extensión de coeficientes)**.** *Sea $R \to R'$ un morfismo de anillos y sea M un R-módulo, N' un R'-módulo, Denotando por $N'_{/R}$ el R-módulo que se obtiene al restringir los coeficientes a R, existe una biyección canónica*

$$\mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', N') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(M, N'_{/R})$$

Demostración. Ver [3, Construction 5.16] $\square$

Capítulo 2

El módulo de diferenciales de Kähler

Nuestro objetivo en este capítulo es, una vez dada la definición de *derivación*, probar que dada una R-álgebra A existen un A-módulo que denotamos $\Omega^1_{A/R}$ y una R-derivación $d_{A/R} : A \to \Omega^1_{A/R}$ que verifican la *propiedad univeral del módulo de diferenciales de primer orden*. Trataremos también algunas de sus propiedades, lo que nos aydará a fijar conceptos y llegado el momento comprender el caso de las derivaciones de orden superior con más facilidad.

2.1. Derivaciones

Definición 2.1.1. Sea A una R-álgebra y sea M un A-módulo. Una *R-derivación de A en M* es una aplicación R-lineal $D : A \to M$ que satisface la propiedad de Leibniz para todo $f, g \in A$:

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$$

Ejemplo 2.1.2. Consideramos como álgebras anillos de polinomios $R[x]$, donde conocemos la derivada habitual:

$$\sum_{k=0}^{n} r_k x^k \mapsto \sum_{k=1}^{n} k \cdot r_k x^{(k-1)}$$

Esta aplicación está definida de $R[x]$ en $R[x]$ y es R-lineal, por lo que solo queda comprobar que se verifica la regla de Leibniz para poder afirmar que efectivamente se trata de una derivación, de acuerdo a la definición anterior.

Puesto que los productos de estos polinomios son de la forma

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{m} q_j x^j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} p_i q_j \cdot (x^i \cdot x^j) \quad \text{con } p_i, q_j \in R$$

basta comprobar que la regla de Leibniz se verifica para $(x^i \cdot x^j)$:

$$(x^i \cdot x^j)' = (x^{i+j})' = (i+j) \cdot x^{i+j-1} = x^i(j \cdot x^{j-1}) + x^j(i \cdot x^{i-1}) = x^i(x^j)' + x^j(x^i)'$$

Observación 2.1.3. Sea $D : A \to M$ una R-derivación, entonces $D(r \cdot 1) = r \cdot D(1)$ por ser D R-lineal. Así, de la cadena de igualdades

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + 1 \cdot D(1) = D(1) + D(1)$$

se deduce que $D(1) = 0$ y por tanto $D(r \cdot 1) = 0$ para todo $r \in R$.

Observación 2.1.4. La suma de derivaciones y su producto por elementos de la R-álgebra A da lugar a nuevas derivaciones. En efecto, tomando $f, g, a \in A$:

$$a \cdot D(f \cdot g) = a(fD(g) + gD(f)) = a \cdot fD(g) + a \cdot gD(f) = f \cdot (a \cdot D(g)) + g \cdot (a \cdot D(f))$$

$$\begin{aligned}
&(D_1 + D_2)(f \cdot g) = D_1(f \cdot g) + D_2(f \cdot g) = \\
&fD_1(g) + gD_1(f) + fD_2(g) + gD_2(f) = \\
&f(D_1(g) + D_2(g)) + g(D_1(f) + D_2(f)) = \\
&f((D_1 + D_2)(g)) + g((D_1 + D_2)(f))
\end{aligned}$$

El conjunto de R-derivaciones de A en M con estas operaciones es un A-módulo, que denotaremos $\mathrm{Der}_R(A, M)$.

2.2. Módulo de diferenciales de primer orden

Dada una R-algebra A, definimos el *módulo de diferenciales de primer orden* como el único par formado por un A-módulo $\Omega^1_{A/R}$ y una R-derivación $d_{A/R} : A \to \Omega^1_{A/R}$ que verifica la siguiente propiedad:

Definición 2.2.1 (Propiedad universal del módulo de diferenciales)**.** El par $(\Omega^1_{A/R}, d_{A/R})$ cumple la propiedad universal del módulo de diferenciales si para todo A-módulo M la siguiente aplicación canónica es biyectiva:

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/R}, M) &\to \mathrm{Der}_R(A, M) \\
\varphi &\mapsto \varphi \circ d_{A/R}
\end{aligned}$$

Es decir, si para cada R-derivación $D : A \to M$ existe una única aplicación A-lineal $\varphi : \Omega^1_{A/R} \to M$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "d_{A/R}"] \arrow[dr, "D"'] & & \Omega^1_{A/R} \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.2.2 (Unicidad)**.** *Caso de existir, el par $(\Omega^1_{A/R}, d_{A/R})$ que verifica la propiedad universal anterior es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Sea $(\Omega^1_{A/R}, d_{A/R})$ un par que verifica la propiedad universal del módulo de diferenciales. Sea M un R-módulo arbitrario y $D \in \mathrm{Der}_R(A, M)$. Suponiendo que el par $(\omega^1_{A/R}, \delta_{A/R})$ también verifica la propiedad universal, entonces existen $\varphi : \Omega^1_{A/R} \to M$ y $\psi : \omega^1_{A/R} \to M$ aplicaciones A-lineales que hacen conmutativo el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "d_{A/R}"] \arrow[d, "\delta_{A/R}"'] \arrow[dr, "D"] & \Omega^1_{A/R} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
\omega^1_{A/R} \arrow[r, dashed, "\psi"'] & M
\end{tikzcd}$$

Tenemos así $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/R}, M)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_A(\omega^1_{A/R}, M)$ y definimos

$$\Phi_M : \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/R}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_R(A, M)$$

$$\Psi_M : \mathrm{Hom}_A(\omega^1_{A/R}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_R(A, M)$$

de modo que $\Phi_M(\varphi) = \varphi \circ d_{A/R} = D = \psi \circ \delta_{A/R} = \Psi_M(\psi)$. Las propiedades universales de $\Omega^1_{A/R}$ y $\omega^1_{A/R}$ implican que Φ_M y Ψ_M son biyectivas. En particular $\Phi_\Omega(\mathrm{id}) = d_{A/R}$ y $\Psi_\omega(\mathrm{id}) = \delta_{A/R}$, lo que da lugar a los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "d_{A/R}"] \arrow[dr, "\Psi_\omega(\mathrm{id}) = \delta_{A/R}"'] & \Omega^1_{A/R} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
& \omega^1_{A/R}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\delta_{A/R}"'] \arrow[dr, "d_{A/R} = \Phi_\Omega(\mathrm{id})"] & \\
\omega^1_{A/R} \arrow[r, dashed, "\psi"'] & \Omega^1_{A/R}
\end{tikzcd}$$

Así, puesto que tanto $(\Omega_{A/R}, d_{A/R})$ como $(\omega_{A/R}, \delta_{A/R})$ cumplen la *propiedad universal del módulo de diferenciales*, podemos afirmar que

- Si $M = \omega_{A/R}$, existe un único $\varphi : \Omega_{A/R} \to \omega_{A/R}$ tal que $\varphi \circ d_{A/R} = \delta_{A/R}$
- Si $M = \Omega_{A/R}$, existe un único $\psi : \omega_{A/R} \to \Omega_{A/R}$ tal que $\psi \circ \delta_{A/R} = d_{A/R}$

Veamos que la composición de φ con ψ en uno y otro sentido da lugar a la identidad en $\Omega_{A/R}$ y en $\omega_{A/R}$ respectivamente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_{A/R}"] \arrow[dr, "\delta_{A/R}"'] & \Omega^1_{A/R} \arrow[d, dashed, shift right, "\varphi"'] \\ & \omega^1_{A/R} \arrow[u, dashed, shift right, "\psi"'] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l} \delta_{A/R} = \varphi \circ d_{A/R} = \varphi \circ \psi \circ \delta_{A/R} \;\Rightarrow\; \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\Omega} \\ d_{A/R} = \psi \circ \delta_{A/R} = \psi \circ \varphi \circ d_{A/R} \;\Rightarrow\; \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\omega} \end{array}$$

Concluimos que en caso de haber varios módulos que verifican la propiedad universal del módulo de diferenciales, estos son necesariamente isomorfos.

□

Buscamos ahora dar una construcción del módulo de diferenciales de Kähler, con lo que quedará probada su existencia. Para ello, haremos uso de una serie de resultados que nos permitirán construir un A-módulo y una aplicación asociada con origen en A y llegada en el dicho módulo. Tras probar que la aplicación que definimos es R-derivación, bastará verificar que el par cumple la *propiedad universal del módulo de diferenciales* 2.1.1 para dar por concluida la demostración.

En primer lugar, puesto que la estructura de A-módulo garantiza que la suma de elementos de $A \otimes_R A$ es interna, nos planteamos la definición de una operación producto que también nos permita multiplicar entre sí elementos de $A \otimes_R A$, dotando $A \otimes_R A$ de estructura de A-álgebra. Con este fin, definimos el producto interno en $A \otimes_R B$ para dos R-álgebras, A y B, como sigue:

Proposición 2.2.3. *Sea $M := A \otimes_R B$ y fijamos $x := \sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes b_i) \in M$ un elemento cualquiera del módulo M. La multiplicación de $y := \sum_{j=1}^{m}(a'_j \otimes b'_j) \in M$ por x efectuada como sigue queda bien definida.*

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i a'_j \otimes b_i b'_j$$

Demostración. En primer lugar fijamos $x := (a \otimes b) \in M$ y definimos la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \varphi_x : A \times B &\longrightarrow M \\ (a', b') &\longmapsto aa' \otimes bb' \end{aligned}$$

Sea $\overline{\varphi}_x : M \to M$ la aplicación R-lineal cuya existencia y unicidad está garantizada por la propiedad universal del producto tensorial:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varphi_x"'] & A \otimes_R B =: M \arrow[dl, dashed, "\exists\,!\,\overline{\varphi}_x"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Para construir $\overline{\varphi}_x$ de modo que esté bien definida para cualquier x, podemos plantearnos tomar sumandos $x_i := (a_i \otimes b_i) \in M$ para $i \in \{1, ..., n\}$ y fijar el tensor $t = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (a_i \otimes b_i) \in M$, para llegar a la expresión general:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_t(y) = \overline{\varphi}_{\sum_{i=1}^n x_i}(y) = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi}_{x_i}(y) = \sum_{i=1}^n \Big(\overline{\varphi}_{x_i} \Big(\sum_{j=1}^m (a'_j \otimes b'_j) \Big) \Big) \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \overline{\varphi}_{x_i}(a'_j \otimes b'_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i a'_j \otimes b_i b'_j) \end{aligned}$$

Nos encontramos ante el problema de que a priori no sabemos si la expresión obtenida depende de los sumandos elegidos. Aunque por el lema 1.3.6 todo elemento $y \in M$ se puede expresar en forma $y = \sum_{j=1}^m a'_j \otimes b'_j$ como suma finita, esta suma no es necesariamente única.

Para asegurar que el producto sí es único independitentemente de la expresión que hayamos usado para calcularlo, debemos comprobar que las relaciones del módulo se mantienen al aplicar el producto, es decir, sea $t = \sum a_i \otimes b_i = 0$ debemos comprobar que $\varphi_t(y) = 0 \quad \forall\ y = \sum_{j=1}^m a'_j \otimes b'_j$.

$$\overline{\varphi}_t(y) = \sum_i \overline{\varphi}_{a_i \otimes b_i} \big(\sum_j a'_j \otimes b'_j \big) = \sum_i \sum_j a_i a'_j \otimes b_i b'_j = \sum_j \overline{\varphi}_{a'_j \otimes b'_j} \big(\sum_i a_i \otimes b_i \big)$$

Dado que $\sum_i a_i \otimes b_i = 0$ por hipótesis, $\sum_j \overline{\varphi}_{a'_j \otimes b'_j} \big(\sum_i a_i \otimes b_i \big) = 0$ y queda probado que $t = 0 \ \Rightarrow\ \sum_i \overline{\varphi}_t(y) = 0$ independientemente de la expresión elegida.

El elemento $1 \otimes 1$ es el neutro para este producto:

$$(1 \otimes 1) \cdot \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \cdot (1 \otimes 1)$$

y también se cumple la asociatividad:

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{i=1}^n (a_i \otimes b_i) \cdot \sum_{j=1}^m (a'_j \otimes b'_j) \Big) \cdot \sum_{k=1}^l (a''_k \otimes a''_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l a_i a'_j a''_k \otimes b_i b'_j b''_k \\ = \sum_{i=1}^n (a_i \otimes b_i) \cdot \Big(\sum_{j=1}^m (a'_j \otimes b'_j) \cdot \sum_{k=1}^l (a''_k \otimes b''_k) \Big) \end{aligned}$$

con lo que el producto interno de $(A \otimes_R B)$ está bien definido y en particular, cuando $B := A$, dota $A \otimes_R A$ de estructura de A-álgebra. □

Observación 2.2.4. Puesto que la R-álgebra A es conmutativa, el álgebra $A \otimes_R A$ también es conmutativa:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes a'_i) \cdot \sum_{j=1}^{m}(a'_{j_1} \otimes a'_{j_2}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i a'_{j_1} \otimes a'_i a'_{j_2}) =$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(a'_{j_1} a_i \otimes a'_{j_2} a'_i) = \sum_{j=1}^{m}(a'_{j_1} \otimes a'_{j_2}) \cdot \sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes a'_i)$$

Una vez definida la estructura de A-álgebra sobre $A \otimes_R A$ nos interesa considerar $\mu : A \otimes_R A \to A$, aplicación multiplicativa sobre la R-álgebra A que obtendremos al extender linealmente la aplicación bilineal μ_0:

$$\begin{aligned} \mu_0 : A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

Lema 2.2.5. *La aplicación multiplicativa μ es homomorfismo de anillos.*

Demostración. Se deduce de la definición del producto que $\mu(a \cdot b) = \mu(a) \cdot \mu(b)$ y $\mu(\sum_i t_i) = \sum_i \mu(t_i)\ \forall\, t_i, a, b \in A \otimes_R A$.
Para verlo basta considerar $a = \sum_i a_i \otimes a'_i$ y $b = \sum_j b_j \otimes b'_j$ tomando $a_i \otimes a'_i \in A \otimes_R A\ \forall\, i,\ \ b_j \otimes b'_j \in A \otimes_R A\ \forall j$:

$$\begin{aligned} \mu\Big(\Big(\sum_i a_i \otimes a'_i\Big) \cdot \Big(\sum_j b_j \otimes b'_j\Big)\Big) =& \mu\Big(\sum_{i,j} a_i b_j \otimes a'_i b'_j\Big) = \sum_{i,j} \mu(a_i b_j \otimes a'_i b'_j) \\ =& \sum_{i,j} a_i b_j a'_i b'_j = \sum_i (a_i a'_i) \cdot \sum_j (b_j b'_j) \\ =& \mu\Big(\sum_i a_i \otimes a'_i\Big) \cdot \mu\Big(\sum_j b_j \otimes b'_j\Big) \\ =& \sum_i \mu(a_i \otimes a'_i) \cdot \sum_j \mu(b_j \otimes b'_j) \end{aligned}$$

Trivialmente la aplicación conserva también el neutro: $\mu\big(1 \otimes 1\big) = 1$ □

Observación 2.2.6. En particular el núcleo $\ker \mu$ es un ideal de $A \otimes_R A$. De ahora en adelante lo denotaremos por $\mathfrak{I}$.

$$\mathfrak{I} = \left\{ \sum_{i \in I} x_i \otimes y_i \in A \otimes_R A : \sum_{i \in I} x_i y_i = 0 \right\} = \ker \mu$$

Lema 2.2.7. *Sea A una R-álgebra y sea $\mathfrak{I} := \ker \mu$ el núcleo de la aplicación multiplicativa $\mu : A \otimes_R A \to A$.*

1. *Sea $\lambda : A \to A \otimes_R A$ morfismo dado por $\lambda(x) = x \otimes 1$ que dota $A \otimes_R A$ de estructura de A-módulo. Consideramos el submódulo $\mathfrak{I} \subset A \otimes_R A$. Entonces los elementos $1 \otimes t - t \otimes 1$ con $t \in A$ generan $\mathfrak{I}$ como A-módulo.*

2. *Sea $(t_i)_{i \in I}$ una familia que genera A como R-álgebra, entonces los elementos $1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$ con $i \in I$ generan $\mathfrak{I}$ como ideal de $A \otimes_R A$.*

Demostración. Los elementos del tipo $1 \otimes t - t \otimes 1$ con $t \in A$ pertenecen a $\mathfrak{I}$ y podemos escribir, para cada $x, y \in A$

$$x \otimes y = xy \otimes 1 + x \otimes y - xy \otimes 1 = xy \otimes 1 + x(1 \otimes y - y \otimes 1)$$

Si suponemos que $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ pertenece a $\mathfrak{I}$ para ciertos $x_i, y_j \in A$, entonces $\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 0$ por ser $\mathfrak{I}$ el núcleo de μ y por tanto, si $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in \mathfrak{I}$:

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^n \big((x_i y_i \otimes 1) + x_i(1 \otimes y_i - y_i \otimes 1)\big) = \sum_{i=1}^n x_i(1 \otimes y_i - y_i \otimes 1)$$

En particular, los elementos de la forma $1 \otimes t - t \otimes 1$ con $t \in A$ generan $\mathfrak{I}$ como A-módulo, con lo que queda probada la primera parte del enunciado.

Una vez sabemos que los elementos de la forma $1 \otimes t - t \otimes 1$ con $t \in A$ generan $\mathfrak{I}$ como A-módulo, lo usaremos para comprobar la segunda parte del enunciado:

Dado que la familia $(t_i)_{i \in I}$ genera A como R-álgebra todo $t \in A$ se puede expresar como combinación R-lineal de productos finitos de t_i, es decir, de elementos del conjunto $\{t_{i_1} \cdot ... \cdot t_{i_r} \mid i_j \in R \ \forall\, i_j \in I,\ 1 \leq j \leq r,\ r \in \mathbb{N}\}$
Sea $t = t_1 \cdot t_2 \in A$ con $t_1, t_2 \in A$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
&1 \otimes t - t \otimes 1 = 1 \otimes t_1 t_2 - t_1 t_2 \otimes 1 = 1 \otimes t_1 t_2 - t_1 t_2 \otimes 1 + t_1 \otimes t_2 - t_1 \otimes t_2 = \\
&(t_1 \otimes 1)(1 \otimes t_2 - t_2 \otimes 1) + (1 \otimes t_1 - t_1 \otimes 1)(1 \otimes t_2) = \\
&(t_1 \otimes 1)(1 \otimes t_2 - t_2 \otimes 1) + (1 \otimes t_2)(1 \otimes t_1 - t_1 \otimes 1)
\end{aligned}$$

Obtenemos así una expresión de $t = t_1 \cdot t_2$ como combinación lineal de $(1 \otimes t_1 - t_1 \otimes 1)$ y $(1 \otimes t_2 - t_2 \otimes 1)$ con $(t_1 \otimes 1)$, $(1 \otimes t_2) \in A \otimes_R A$ como escalares.

Suponemos que para $t = t_1 \cdot \ldots \cdot t_{n-1}$ es posible obtener una expresión como combinación lineal de los elementos de $\{(1 \otimes t_i - t_i \otimes 1)\}_{i=1}^{n-1}$ con coeficientes en $A \otimes_R A$. Entonces podemos escribir $(1 \otimes (t \cdot t_n) - (t \cdot t_n) \otimes 1)$ como $(1 \otimes t)(1 \otimes t_n - t_n \otimes 1) + (1 \otimes t - t \otimes 1)(1 \otimes t_n)$, combinación lineal de elementos $(1 \otimes t_i - t_i \otimes 1)$ con escalares en $A \otimes_R A$.

Dado que la familia $(t_i)_{i \in I}$ genera A como R-álgebra y los elementos $(1 \otimes t - t \otimes 1)$ con $t \in A$ generan $\mathfrak{I}$ como A-módulo, podemos expresar todo elemento de $\mathfrak{I}$ como combinación lineal de elementos $(1 \otimes t_i - t_i \otimes 1)$ con escalares en $A \otimes_R A$, con lo que queda probado que los elementos $1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$ con $i \in I$ generan $\mathfrak{I}$ como ideal de $A \otimes_R A$. □

Sabiendo que μ es sobreyectiva, a partir del ideal $\mathfrak{I} := \ker \mu$ consideramos el isomorfismo $\overline{\mu} : (A \otimes_R A)/\mathfrak{I} \to A$, cuya inversa viene inducida por cualquiera de las dos aplicaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda_i : A &\longrightarrow A \otimes_R A \\ x &\longmapsto x \otimes 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \lambda_d : A &\longrightarrow A \otimes_R A \\ x &\longmapsto 1 \otimes x \end{aligned}$$

En función de cuál de las dos aplicaciones utilicemos, λ_i o λ_d, tomamos $A \otimes_R A$ con la multiplicación por la izquierda o por la derecha. Veámoslo:

Proposición 2.2.8. *Tomando como definición de λ cualquiera de las dos elecciones posibles $\lambda(a) = a \otimes 1$ o $\lambda(a) = 1 \otimes a$ con $a \in A$, la aplicación $\lambda : A \longrightarrow (A \otimes_R A)/\mathfrak{I}$ es la inversa del isomorfismo $\overline{\mu} : (A \otimes_R A)/\mathfrak{I} \longrightarrow A$.*

Demostración. Tomamos $\lambda(a) = 1 \otimes a \ \ \forall\, a \in A$ (la elección $\lambda(a) = a \otimes 1 \ \ \forall\, a \in A$ es análoga):

- Sea $a \in A$, se verifica $(\overline{\mu} \circ \lambda)(a) = \overline{\mu}(1 \otimes a) = a$
- Sea $\sum_i (a_i \otimes a_i') + \mathfrak{I} \in (A \otimes_R A)/\mathfrak{I}$, puesto que por 2.2.7 se cumple que $\sum_i (1 \otimes a_i) \cdot \sum_i (1 \otimes a_i' - a_i' \otimes 1) \in \mathfrak{I}$, tenemos

$$\begin{aligned} (\lambda \circ \overline{\mu})\Big(\sum_i (a_i \otimes a_i') + \mathfrak{I}\Big) &= \lambda\Big(\sum_i a_i a_i'\Big) = \sum_i (1 \otimes a_i a_i') = \\ &= \sum_i (1 \otimes a_i a_i') - \sum_i (a_i \otimes a_i') + \sum_i (a_i \otimes a_i') = \\ &= \sum_i (1 \otimes a_i) \cdot \sum_i (1 \otimes a_i' - a_i' \otimes 1) + \sum_i (a_i \otimes a_i') \\ &\equiv \sum_i (a_i \otimes a_i') \mod \mathfrak{I} \end{aligned}$$

De esta forma demostramos que $(\overline{\mu} \circ \lambda) = \mathrm{id}_A$ y $(\lambda \circ \overline{\mu}) = \mathrm{id}_{(A \otimes_R A)/\mathfrak{I}}$, con lo que las aplicaciones $\overline{\mu}$ y λ definen un isomorfismo entre $(A \otimes_R A)/\mathfrak{I}$ y A. El caso $\lambda(a) = a \otimes 1 \;\; \forall\, a \in A$ es análogo. $\square$

En ambos casos gracias al producto interno definido en 2.2.3 para $A \otimes_R A$, tiene sentido considerar el ideal $\mathfrak{I}^2 \subset A \otimes_R A$ dado por todos los productos de la forma

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes a_i') \right) \left(\sum_{j=1}^{m} (b_j \otimes b_j') \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i b_j \otimes a_i' b_j')$$

para $\sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes a_i')$, $\sum_{j=1}^{m} (b_j \otimes b_j') \in \mathfrak{I}$. Podemos ver $\mathfrak{I}^2$ bien como ideal de $A \otimes_R A$ (como anillo) o bien como submódulo de $A \otimes_R A$ (como A-módulo).

Observación 2.2.9. Considerando la cadena de A-módulos

$$\mathfrak{I}^2 \subset \mathfrak{I} \subset A \otimes_R A$$

podemos entender el cociente $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ bien como un $(A \otimes_R A)$-módulo o bien como un $(A \otimes_R A)/\mathfrak{I}$-módulo.
También podemos considerar la estructura de A-módulo de $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ obtenida de su estructura de $(A \otimes_R A)$-módulo al restringirla a escalares mediante una de las dos posibles inversas consideradas, λ_i o λ_d.

Puesto que ya hemos definido el A-módulo $\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}^2}$, candidato a verificar la propiedad universal 2.2.1, necesitamos dar una aplicación asociada que complete el par. Veremos a continuación cómo la aplicación $\eta = \lambda_d - \lambda_i$

$$\begin{aligned} \eta : A &\longrightarrow \mathfrak{I} \\ x &\longmapsto 1 \otimes x - x \otimes 1 \end{aligned}$$

induce una R-derivación $d : A \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$, para probar después que el par $(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2, d)$ es el módulo de formas diferenciales de A sobre R. Es decir que verifica la propiedad universal, que garantiza unicidad salvo isomorfismos.

Antes de nada, probamos algunos resultados técnicos:

Proposición 2.2.10. *Sea $f_0 : A \to B$ un morfismo de R-álgebras y sea $I \trianglelefteq B$ un ideal tal que $I^2 = 0$. Interpretando I como un A-módulo bajo f_0, se verifica:*

1. *Si $d : A \to I$ es una R-derivación, entonces $f_1 = f_0 + d$ define un morfismo de R-álgebras $A \to B$ tal que $f_1 \equiv f_0$ mod I.*

2. *Si $f_1 : A \to B$ es un morfismo de R-álgebra que satisface $f_1 \equiv f_0$ mod I, entonces $f_1 - f_0$ da lugar a una R-derivación $A \to I$.*

Como consecuencia, la correspondencia $f \mapsto f - f_0$ da lugar a un biyección entre el conjunto de morfismos de R-álgebras $f : A \to B$ que satisfacen $f \equiv f_0$ mod I y el conjunto de derivaciones de A en I, $\mathrm{Der}_R(A, I)$.

Demostración. Tengamos presente que una aplicación R-lineal $f : A \to B$ es un morfismo de R-álgebras si, y solo si, verifica que$f(1) = 1$ y es multiplicativa, $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in A$.

En la primera afirmación, $d : A \to I$ es una R-derivación y obtenemos el módulo I a través de la aplicación f_0. Sean $x, y \in A$, puesto que $d(x)d(y) \in I^2 = 0$, se verifica:

$$\begin{aligned}
f_1(xy) &= f_0(xy) + d(xy) = f_0(x)f_0(y) + yd(x) + xd(y) \\
&= f_0(x)f_0(y) + f_0(y)d(x) + f_0(x)d(y) + d(x)d(y) \\
&= (f_0(x) + d(x))(f_0(y) + d(y)) = f_1(x)f_1(y)
\end{aligned}$$

Además, $d(r) = 0 \ \forall\, r \in R$, con lo que también se verifica:

$$f_1(1) = f_0(1) + d(1) = f_0(1) = 1$$

y obtenemos que f_1 es morfismo de R-álgebras tal que $f_1 \equiv f_0 \pmod I$.

En la segunda afirmación tenemos el caso en que $f_1 \equiv f_0 \pmod I$.
Dado que el módulo I lo obtenemos a través de f_0 y ambas aplicaciones son morfismos de R-álgebras por hipótesis, veamos que $d := f_1 - f_0$ es R-derivación de A en I.

Por hipótesis,
$$\begin{aligned}
f_1 &= f_0 + d \\
f_1(xy) &= f_1(x)f_1(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(xy) = f_1(x)f_1(y) &= (f_0(x) + d(x))(f_0(y) + d(y)) \\
&= f_0(x)f_0(y) + f_0(x)d(y) + f_0(y)d(x) + d(x)d(y) \\
&= f_0(xy) + xd(y) + yd(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_1 - f_0)(xy) &= f_1(xy) - f_0(xy) \\
&= (f_0(xy) + xd(y) + yd(x)) - f_0(xy) \\
&= xd(y) + yd(x) \\
&= x(f_1 - f_0)(y) + y(f_0 - f_1)(x)
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.11. *Sea A una R-álgebra y sea $\mathfrak{I} \subset A \otimes_R A$ el núcleo de la aplicación $\mu : A \otimes_R A \to A$. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathfrak{I} \\ x &\longmapsto 1 \otimes x - x \otimes 1 \end{aligned}$$

da lugar a una R-derivación $d : A \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$.

Demostración. Consideramos los morfismos de R-álgebras

$$f_0, f_1 : A \longrightarrow \frac{(A \otimes_R A)}{\mathfrak{I}^2}$$

inducidos por las aplicaciones λ_i y λ_j respectivamente.

$$\lambda_i : x \longmapsto x \otimes 1 \qquad\qquad \lambda_d : x \longmapsto 1 \otimes x$$

Aplicamos la segunda parte de la proposición 2.2.10 a los morfismos f_0, f_1 y el ideal $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \trianglelefteq (A \otimes_R A)/\mathfrak{I}^2$. Basta observar que $f_0 \equiv f_1 \mod \frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}^2}$ para concluir que la aplicación $d = f_1 - f_0$ es R-derivación, como queríamos demostrar. □

Teorema 2.2.12. *Dada la situación del corolario previo, el módulo de formas diferenciales de grado 1 de A sobre R viene dado por el par $(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2, d)$, ya que este cumple con la propiedad universal.*

Demostración. Dado un A-módulo M y una R-derivación $D : A \to M$, a partir de la aplicación R-bilineal

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow M \\ (x, y) &\longmapsto xD(y) \end{aligned}$$

obtenemos la aplicación R-lineal φ:

$$\begin{aligned} \varphi : A \otimes_R A &\longrightarrow M \\ x \otimes y &\longmapsto xD(y) \end{aligned}$$

Podemos ver φ como aplicación A-lineal interpretando $A \otimes_R A$ como un A-módulo a través del morfismo λ_i.

$$\begin{aligned} \lambda_i : A &\longrightarrow A \otimes_R A \\ x &\longmapsto x \otimes 1 \end{aligned}$$

Por la segunda parte del lema 2.2.7 sabemos que $\mathfrak{I}^2$ visto como un A-módulo a través de $\lambda_i : A \to A \otimes_R A$ se puede obtener de los productos de la forma

$(1\otimes x - x\otimes 1)(1\otimes y - y\otimes 1)$ donde $x, y \in A$. Así, dada la derivación d obtenemos que $\varphi((1\otimes x - x\otimes 1)(1\otimes y - y\otimes 1)) = 0$ para cada $x, y \in A$:

$$\begin{aligned}
&\varphi((1\otimes x - x\otimes 1)(1\otimes y - y\otimes 1)) = \\
&\varphi(1\otimes xy) - \varphi(y\otimes x) - \varphi(x\otimes y) + \varphi(xy\otimes 1) = \\
&D(xy) - yD(x) - xD(y) + xy\cdot D(1) = \\
&D(xy) - D(xy) + 0 = 0
\end{aligned}$$

con lo que $\mathfrak{I}^2 \subset \ker\varphi$ y su restricción a $\mathfrak{I}$ induce una aplicación A-lineal $\overline{\varphi} : \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to M$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "D"'] & & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Sabemos por 2.2.7 que $\mathfrak{I}$ está generado por elementos de la forma $(1\otimes x - x\otimes 1)$ con $x \in A$, con lo que podemos considerar $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ generado por elementos $d(x)$ con $x \in A$. Así, se puede expresar todo elemento de $\mathrm{Im}(\overline{\varphi})$ en términos de elementos de la forma $\overline{\varphi}(d(x))$ y basta comprobar $\overline{\varphi}\circ d\,(x) = D(x)$ para cada $x \in A$:

$$\overline{\varphi}\circ d(x) = \overline{\varphi}(1\otimes x - x\otimes 1) = D(x) - D(1) = D(x)$$

siendo esta la única definición posible de $\overline{\varphi}$ que hace conmutativo el diagrama.

Así, $\overline{\varphi}$ es aplicación A-lineal única tal que $D = \overline{\varphi}\circ d$. Esto prueba que, en efecto, $(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2, d)$ es el módulo de formas diferenciales de grado 1 de A sobre R. □

Ejemplo 2.2.13. Consideramos como R-álgebra el anillo de polinomios en n variables $A := R[t_1, t_2, ..., t_n]$. El producto tensorial $A\otimes_R A$ coincide con $R[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$ donde las variables $\{x_i\}_{i=1}^n$ son las que actúan a la derecha del producto tensorial y las variables $\{y_i\}_{i=1}^n$, a la izquierda.

El ideal $\mathfrak{I}$ es el generado por $\{1\otimes t_i - t_i\otimes 1\}_{i=1}^n = \{x_i - y_i\}_{i=1}^n$, con lo que escribiendo $z_i = x_i - y_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ obtenemos las expresiones $\langle z_i\rangle$ y $\langle z_i z_j\rangle$ de los ideales $\mathfrak{I}$ y $\mathfrak{I}^2$ respectivamente. Podemos reescribir $R[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$ como $R[x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_n]$ para obtener una interpretación del módulo $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ como los polinomios de $(R[x_1, ..., x_n])[z_1, ..., z_n]$ de grado 1.

$$\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}^2} \trianglelefteq \frac{A\otimes_R A}{\mathfrak{I}^2} \qquad\qquad \frac{\langle\{z_i\}_{i=1}^n\rangle}{\langle\{z_j z_k\}_{j,k=1}^n\rangle} \trianglelefteq \frac{R[x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_n]}{\langle\{z_j z_k\}_{j,k=1}^n\rangle}$$

Tomamos $d : A \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ derivación dada en 2.2.11 y fijamos la derivación habitual $D : (R[t_1, ..., \check{t}_{i_o}, ..., t_n])[t_{i_o}] \to (R[t_1, ..., \check{t}_{i_o}, ..., t_n])[t_{i_o}]$ del ejemplo 2.1.2 para algún $i_0 \in \{1, ..., n\}$ fijo. Buscamos comprobar que $\overline{\varphi} : \frac{\langle \{z_i\}_{i=1}^n \rangle}{\langle \{z_j z_k\}_{j,k=1}^n \rangle} \to R[t_1, ..., t_n]$ definida tal y como aparece en el teorema 2.2.12 es la aplicación única tal que $\overline{\varphi} \circ d = D$.

Dado que la famlia $\{t_i\}_{i=1}^n$ genera $R[t_1, ..., t_n]$ como R-álgebra y las imágenes de sus elementos, $d(t_i) = z_i$ generan $\langle \{z_i\}_{i=1}^n \rangle / \langle \{z_j z_k\}_{j,k=1}^n \rangle$ como ideal de

$$R[x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_n] / \langle \{z_j z_k\}_{j,k=1}^n \rangle$$

basta ver que las imágenes de D y $\overline{\varphi} \circ d$ coinciden para $\{t_i\}_{i=1}^n$. La comprobación es inmediata:

$$\overline{\varphi} \circ d(t_i) = \overline{\varphi}(1 \otimes t_i - t_i \otimes 1) = 1D(t_i) + t_i D(1) = D(t_i)$$

2.3. Propiedades de los módulos de diferenciales

Concluimos este capítulo estudiando algunas propiedades relevantes del módulo de diferenciales de primer orden.

Proposición 2.3.1. *Sea A una R-álgebra, suponemos que existe un morfismo de anillos de R en R'. Sea $A' = A \otimes_R R'$, entonces $d_{A/R} : A \to \Omega^1_{A/R}$ induce una R'-derivación*

$$d_{A'/R'} : A' \longrightarrow \Omega^1_{A/R} \otimes_A A'$$

y el par $(\Omega^1_{A/R} \otimes_A A',\ d_{A'/R'})$ es el módulo de diferenciales de A' sobre R'. En particular, $\Omega^1_{A'/R'} \simeq \Omega^1_{A/R} \otimes_A A'$.

Demostración. Consideramos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathfrak{I} \to A \otimes_R A \xrightarrow{\mu} A \to 0$$

Por la observación 1.2.5, esta sucesión escinde en una sucesión exacta corta de R-módulos tomando λ como sección de la aplicación multiplicativa μ,

$$\begin{aligned} \lambda : A &\longrightarrow A \otimes_R A \\ x &\longmapsto x \otimes 1 \end{aligned}$$

de modo que $\mu \circ \lambda(a) = \mu(a \otimes 1) = a$ y por tanto $\mu \circ \lambda = id_A$.

La sucesión sigue siendo exacta porque escinde al tensorizarla con R' sobre R y podemos ver la sucesión resultante como la primera fila de un diagrama conmutativo canónico donde la fila de abajo es la sucesión exacta asociada a la aplicación multiplicativa $A' \otimes_{R'} A' \to A'$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}\otimes_R R' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A\otimes_R A\otimes_R R' \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & A\otimes_R R' \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}' \arrow[r] & A'\otimes_{R'} A' \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Puesto que las aplicaciones que aparecen en la columna central y en la de la derecha son isomorfismos, la de la izquierda debe serlo también por el lema de la serpiente (ver apéndice A), con lo que la aplicación canónica $\mathfrak{I}^2 \otimes_R R' \to \mathfrak{I}'^2$ es sobreyectiva. Así, tensorizando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I}^2 \longrightarrow \mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \longrightarrow 0$$

con R' sobre R resulta el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{I}^2\otimes_R R' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{I}\otimes_R R' \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2\otimes_R R' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\mathfrak{I}'^2 \arrow[r] & \mathfrak{I}' \arrow[r] & \mathfrak{I}'/\mathfrak{I}'^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de filas exactas, donde la aplicación de la columna de la izquierda es sobreyectiva y la aplicación de la columna central es un isomorfismo. Pero entonces la aplicación en la columna de la derecha

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \otimes_R R' \longrightarrow \mathfrak{I}'/\mathfrak{I}'^2$$

es también un isomorfismo, como se deduce del diagrama o de nuevo por el lema de la serpiente recogido en el apéndice A.

Podemos comprobar directamente de la definición del corolario 2.2.11 que el diferencial $d_{A/R} : A \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ da lugar al tensorizarlo con R' sobre R al diferencial $d_{A'/R'} : A' \to \mathfrak{I}'/\mathfrak{I}'^2$.

$$\begin{tikzcd}
A\otimes_R R' \arrow[r, "d_{A/R}"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2\otimes_R R' \arrow[d, "\simeq"] \\
A' \arrow[r, "d_{A'/R'}"] & \mathfrak{I}'/\mathfrak{I}'^2
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 2.3.2. *[Primera sucesión exacta fundamental] Sea $f : A \to B$ un morfismo de R-álgebras. Entonces existe una sucesión canónica exacta de B-módulos*

$$\Omega^1_{A/R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_{B/R} \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \longrightarrow 0$$

Demostración. Observamos el siguiente diagrama conmutativo, donde φ es la aplicación A-lineal única dada por la propiedad universal del módulo de diferenciales aplicada a la derivación $d_{B/R} \circ f$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_{A/R}"] \arrow[d, "f"] & \Omega^1_{A/R} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "d_{B/R}"] & \Omega^1_{B/R} \end{tikzcd}$$

Debemos notar que por ser $\Omega^1_{B/R}$ un A-módulo visto a través de $f : A \to B$, la aplicación $d_{B/R} \circ f$ es una R-derivación de A en $\Omega^1_{B/R}$

$$d_{B/R} \circ f : A \to \Omega^1_{B/R}$$

Puesto que $\Omega_{B/R}$ también es un B-módulo, obtenemos de $\varphi : \Omega^1_{A/R} \to \Omega^1_{B/R}$ una aplicación B-lineal

$$\Omega^1_{A/R} \otimes_A B \to \Omega^1_{B/R} \tag{2.1}$$

Además por el siguiente diagrama, en el que aplicamos la propiedad universal de $(\Omega^1_{A/R}, d_{A/R})$ a la derivación $d_{B/A} \in \mathrm{Der}_R(B, \Omega^1_{B/R})$, existe una aplicación B-lineal canónica de $\Omega^1_{B/R}$ en $\Omega^1_{B/A}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "d_{B/R}"] \arrow[dr, "d_{B/A}"'] & \Omega^1_{B/R} \arrow[d, dashed] \\ & \Omega^1_{B/A} \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Obtenemos así de (2.1) y (2.2) las aplicaciones canónicas que componen la sucesión

$$\Omega^1_{A/R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_{B/R} \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \longrightarrow 0$$

Para probar la exactitud nos basamos en que se da la exactitud por la izquierda si, y solo si, para todo B-módulo M la correspondiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/R}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{A/R} \otimes_A B, M)$$

Por *la propiedad universal de extensión de coeficientes* 1.3.10, hay biyección entre los homomorfismos sobre B de $\Omega^1_{A/R} \otimes_A B$ en M y los homomorfismos sobre A de $\Omega^1_{A/R}$ en M.

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{A/R} \otimes_A B, M) \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/R}, M)$$

y podemos usar la *propiedad universal del módulo de diferenciales* 2.2.1 para escribir la segunda de las sucesiones como

$$0 \to \mathrm{Der}_A(B, M) \xrightarrow{u} \mathrm{Der}_R(B, M) \xrightarrow{v} \mathrm{Der}_R(A, M) \tag{2.3}$$

siendo u la aplicación inyectiva a través de la cual interpretamos cualquier A-derivación de B en M como R-derivación, y v la composición de las R-derivaciones de B en M con $f : A \to B$. Por la observación 2.1.3 se da $v \circ u = 0$, con lo que $\operatorname{Im}(u) \subset \ker v$.

$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{Der}_A(B,M) & \xrightarrow{u} & \operatorname{Der}_R(B,M) & \xrightarrow{v} & \operatorname{Der}_R(A,M) \\ D_A & \longmapsto & D_R & \longmapsto & D_R \circ f \end{array}$$

Para probar que la sucesión (2.3) es exacta aún debemos probar la contención $\ker v \subset \operatorname{Im}(u)$. Para ello tomamos $D : B \to M$ una R-derivación en el núcleo de v, que por tanto verificará $D \circ f = 0$. Entonces por ser $f : A \to B$ el morfismo que dota B de estructura de A-álgebra y por la regla de Leibniz se da

$$D(a \cdot x) = D(f(a) \cdot x) = f(a) \cdot D(x) + x \cdot (D \circ f)(a) = a \cdot D(x)$$

para todo $a \in A$, $x \in B$, luego D es A-lineal. Se deduce que la R-derivación D es también una A-derivación, con lo que $D \in \operatorname{Im} u$ y concluye la demostración.

□

Si el morfismo $f : A \to B$ es sobreyectivo, entonces por la observación 2.1.3 tenemos $\Omega^1_{B/A} = 0$ y la sucesión exacta de la proposición anterior se puede extender por la izquierda, dando lugar a la sucesión

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{A/R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_{B/R} \longrightarrow 0$$

Probaremos su exactitud, haciendo uso de un pequeño resultado previo.

Lema 2.3.3. *Sea A una R-álgebra y $A \to B$ una aplicación sobreyectiva entre R-álgebras con núcleo $I \subset A$. Entonces la diferencial $d_{A/R}$ induce el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_{A/R}"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, dashed, "D"] & \Omega^1_{A/R} \arrow[d, two heads] \\ B \arrow[r, dotted, "d_{B/R}"] & \Omega^1_{A/R}/(I \cdot \Omega^1_{A/R} + A \cdot d_{A/R}(I)) \end{tikzcd}$$

En particular, $\Omega^1_{B/R} = \Omega^1_{A/R}/(I \cdot \Omega^1_{A/R} + A \cdot d_{A/R}(I))$ y $(\Omega^1_{B/R}, d_{B/R})$ es el módulo de formas diferenciales de B sobre R.

Demostración. Observamos que $\Omega^1_{A/R}/(A \cdot d_{A/R}(I) + I \cdot \Omega^1_{A/R})$ es un B-módulo y que cualquier R-derivación $D : A \to \Omega^1_{A/R}/(I \cdot \Omega^1_{A/R} + A \cdot d_{A/R}(I))$ contiene el ideal I en su núcleo. Debe existir entonces una aplicación

$$d_{B/R} : B \to \Omega^1_{A/R}/(I \cdot \Omega^1_{A/R} + A \cdot d_{A/R}(I))$$

que haga conmutativo el diagrama.

Puesto que podemos ver cualquier R-derivación de B en un B-módulo M como una derivación perteneciente a $\mathrm{Der}_R(A, M)$ (considerando M como A-módulo) y puesto que $[I \cdot \Omega^1_{A/R} + A \cdot d_{A/R}(I)] \subset \ker \varphi$, existe un único $\overline{\varphi} : \Omega^1_{A/R}/(I \cdot \Omega^1_{A/R} + A \cdot d_{A/R}(I)) \to M$ que hace conmutativo el diagrama. Es decir, la aplicación $d_{B/R}$ hereda la propiedad universal del módulo de diferenciales de $(\Omega^1_{A/R}, d_{A/R})$ para toda derivación $D : B \to M$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "d_{A/R}"] \arrow[dr] \arrow[dd, two heads] & & \Omega^1_{A/R} \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \varphi"] \arrow[dd, two heads] \\
& M & \\
B \arrow[ur, "\forall D"] \arrow[rr, "d_{B/R}"'] & & \Omega^1_{A/R}/(I \cdot \Omega^1_{A/R} + A \cdot d_{A/R}(I)) \arrow[ul, dotted, "\exists!\, \overline{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 2.3.4. *Sea $f : A \to B$ un morfismo sobreyectivo de R-álgebras con núcleo $I \subset A$. Entonces existe una sucesión canónica exacta de B-módulos en la forma de la segunda sucesión exacta fundamental. (1.2)*

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{A/R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_{B/R} \longrightarrow 0$$

Demostración. La aplicación $d_{A/R} : A \to \Omega^1_{A/R}$ restringida a I da lugar a una aplicación R-lineal de I en $\Omega^1_{A/R}$ que por la regla de Leibniz hace corresponder I^2 con $I \cdot \Omega^1_{A/R}$.

Se sigue que $d_{A/R}$ induce una aplicación de I/I^2 en $\Omega^1_{A/R}/(I \cdot \Omega^1_{A/R})$ que de hecho es lineal tanto en A como en $A/I \simeq B$, puesto que para todo $a \in A$, $x \in I$ se da

$$d_{A/R}(ax) = ad_{A/R}(x) + xd_{A/R}(a) \in \ a \cdot d_{A/R}(x) + I \cdot \Omega^1_{A/R}$$

Observamos que dada una aplicación $M \overset{\alpha}{\to} M \otimes (N/I)$ donde $I = \ker \alpha$, también se cumple $I \cdot M = \ker \alpha$, y podemos identificar $M/(IM)$ con $\mathrm{im}(\alpha)$.

Así podemos identificar $\Omega^1_{A/R}/(I \cdot \Omega^1_{A/R})$ con la imagen de la aplicación $\Omega^1_{A/R} \to \Omega^1_{A/R} \otimes_A B$ y, por ser $f : A \to B$ sobreyectiva, con $\Omega^1_{A/R} \otimes_A B$.

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{A/R} \otimes_A B \ \simeq \ \frac{\Omega^1_{A/R}}{(I \cdot \Omega^1_{A/R})}$$

Combinando esta aplicación con la aplicación $\Omega^1_{A/R} \otimes_A B \to \Omega^1_{B/R}$ de la proposición 2.3.4 obtenemos la sucesión cuya exactitud buscamos probar:

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{A/R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_{B/R} \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$$

En primer lugar notamos que $f : A \to B$ es sobreyectiva, con lo que se da $\Omega_{B/A} \equiv 0$ y la proposición 2.3.4 garantiza en este caso la sobreyectividad de la aplicación $\Omega^1_{A/R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_{B/R}$.

Por otro lado, hemos probado en 2.3.5 que la aplicación $\Omega^1_{A/R} \otimes_A B \to \Omega^1_{B/R}$ coincide con la aplicación sobreyectiva canónica

$$\Omega^1_{A/R}/(I \cdot \Omega^1_{A/R}) \to \Omega^1_{A/R}/(I \cdot \Omega^1_{A/R} + A \cdot d_{A/R}(I))$$

cuyo núcleo es el generado por la imagen de $d_{A/R}(I)$ en $\Omega^1_{A/R}/I \cdot \Omega^1_{A/R}$. En consecuencia la sucesión del enunciado es exacta, como queríamos demostrar. □

Proposición 2.3.5. *Sean A y B dos R-álgebras. Existe entonces un isomorfismo canónico de $(A \otimes_R B)$-módulos*

$$(\Omega^1_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega^1_{B/R}) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{(A \otimes_R B)/R}$$

Además, si $d_{A/R} : A \to \Omega^1_{A/R}$ y $d_{B/R} : B \to \Omega^1_{B/R}$ son derivaciones de A y B, entonces la derivación de $A \otimes_R B$ corresponde a la aplicación R-lineal

$$\begin{aligned} d : A \otimes_R B &\to (\Omega_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega^1_{B/R}) \\ x \otimes y &\longmapsto [d_{A/R}(x) \otimes y] \oplus [x \otimes d_{B/R}(y)] \end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar observamos que $M := \Omega^1_{A/R}$ es un A-módulo y $N := \Omega^1_{B/R}$ es un B-módulo, con lo que $M \otimes_R B$ y $A \otimes_R N$ son ambos $(A \otimes_R B)$-módulos. Esto es, considerándolos con el producto definido en 2.2.3 y con la suma $(a \otimes b), (a' \otimes b') \in A \otimes_R B \Rightarrow (a \otimes b) + (a' \otimes b') \in A \otimes_R B$

Se verifica que $(\Omega^1_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega^1_{B/R})$ es un $(A \otimes_R B)$-módulo y $\Omega_{(A \otimes_R B)(R)}$ también lo es, con lo que tiene sentido considerar un isomorfismo de R-álgebras entre ellos. Tal y como aparece definida en el enunciado, d es una aplicación R-

lineal que de hecho es una R-derivación, ya que para $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ se da:

$$\begin{aligned}
&d((a \otimes b)(a' \otimes b')) = d(aa' \otimes bb') \\
&= [d_{A/R}(aa') \otimes (bb')] \oplus [(aa') \otimes d_{B/R}(bb')] \\
&= (a \cdot d_{A/R}(a')) \otimes (bb') + (a' \cdot d_{A/R}(a)) \otimes (bb') \\
&\quad + (aa') \otimes (b \cdot d_{B/R}(b')) + (aa') \otimes (b' \cdot d_{B/R}(b)) \\
&= [(a \cdot d_{A/R}(a') + a' \cdot d_{A/R}(a)) \otimes (bb')] \oplus [(aa') \otimes (b \cdot d_{B/R}(b') + b' \cdot d_{B/R}(b))] \\
&= [(a \otimes b)(d_{A/R}(a') \otimes b') + (a' \otimes b')(d_{A/R}(a) \otimes b)] \\
&\quad \oplus [(a \otimes b)(a' \otimes d_{B/R}(b')) + (a' \otimes b')(a \otimes d_{B/R}(b))] \\
&= [(a \otimes b) \cdot d(a' \otimes b')] + [(a' \otimes b') \cdot d(a \otimes b)]
\end{aligned}$$

Para probar que d es el diferencial de $A \otimes_R B$ consideramos una R-derivación $D : A \otimes_R B \to M$ de $A \otimes_R B$ en algún $(A \otimes_R B)$-módulo M. Sean los morfismos canónicos

$$\sigma_1 : A \to A \otimes_R B \qquad\qquad \sigma_2 : B \to A \otimes_R B$$

Escribimos $M_{/A}$ para denotar el A-módulo que se obtiene al restringir M a escalares a través de σ_1. Las siguientes aplicaciones son entonces R-derivaciones

$$D_1 = D \circ \sigma_1 : A \to M_{/A} \qquad\qquad D_2 = D \circ \sigma_2 : B \to M_{/B}$$

y las correspondientes aplicaciones, A-lineal y B-lineal respectivamente

$$\Omega^1_{A/R} \to M_{/A} \qquad\qquad \Omega^1_{B/R} \to M_{/B}$$

inducen las aplicaciones $(A \otimes_R B)$-lineales

$$\varphi_1 : \Omega^1_{A/R} \otimes_R B \to M \qquad\qquad \varphi_2 : A \otimes_R \Omega^1_{B/R} \to M$$

que a su vez dan la aplicación $(A \otimes_R B)$-lineal

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : (\Omega^1_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega^1_{B/R}) \to M$$

Para $a, a' \in A$ y $b, b' \in B$ obtenemos

$$\varphi([d_{A/R}(a) \otimes b] \oplus [a' \otimes d_{B/R}(b')]) = D_1(a)(1 \otimes b) + (a' \otimes 1)D_2(b)$$

y usando la regla de Leibniz sobre D comprobamos $\varphi \circ d = D$:

$$
\begin{aligned}
& D\left((a\otimes b)(a'\otimes b')\right)\\
&= (a\otimes b)D(a'\otimes b') + (a'\otimes b')D(a\otimes b)\\
&= (a\otimes b)(D_1(a')(1\otimes b') + (a'\otimes 1)(D_2(b'))) + (a'\otimes b')(D_1(a)(1\otimes b) + (a\otimes 1)(D_2(b)))\\
&= (a\otimes b)\,\varphi([d_{A/R}(a')\otimes b'] \oplus [a'\otimes d_{B/R}(b')]) + (a'\otimes b')\,\varphi([d_{A/R}(a)\otimes b] \oplus [a\otimes d_{B/R}(b)])\\
&= \varphi(\ (a\otimes b)([d_{A/R}(a')\otimes b'] \oplus [a'\otimes d_{B/R}(b')]) + (a'\otimes b')([d_{A/R}(a)\otimes b] \oplus [a\otimes d_{B/R}(b)])\ )\\
&= \varphi((a\otimes b)\cdot d(a'\otimes b') + (a'\otimes b')\cdot d(a\otimes b))\\
&= \varphi(d(a\otimes b)(a'\otimes b'))\\
&= \varphi\circ d\left((a\otimes b)(a'\otimes b')\right)
\end{aligned}
$$

Además, puesto que $d(A\otimes_R B)$ genera $(\Omega^1_{A/R}\otimes_R B)\oplus(A\otimes_R \Omega^1_{B/R})$ como $(A\otimes_R B)$-módulo, se deduce que φ queda unívocamente determinado por la relación $\varphi\circ d = D$ y concluimos que d es el diferencial de $A\otimes_R B$.

□

Ejemplo 2.3.6. Veámoslo cuando las álgebras sobre las que trabajamos son anillos de polinomios $A = R[x_1, ..., x_r]$ y $B = R[y_1, ..., y_s]$. Vamos a denotar

$$
\begin{aligned}
x_k^{(i)} &= (x_k\otimes 1)\,, \quad x_k^{(d)} = (1\otimes x_k)\,, & z_k &= (x_k^{(d)} - x_k^{(i)}) = (1\otimes x_k - x_k\otimes 1)\\
y_j^{(i)} &= (y_j\otimes 1)\,, \quad y_j^{(d)} = (1\otimes y_j), & h_j &= (y_j^{(d)} - y_j^{(i)}) = (1\otimes y_j - y_j\otimes 1)
\end{aligned}
$$

con lo que escribiremos

$$
\begin{aligned}
A\otimes A &= R[x_1^{(d)}, ..., x_r^{(d)}, x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}] = R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}, z_1, ..., z_r]\\
B\otimes B &= R[y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}, y_1^{(i)}, ..., y_s^{(i)}] = R[y_1^{(d)}, ..., x_s^{(d)}, h_1, ..., h_s]
\end{aligned}
$$

Así, $\mathfrak{I}_A = \langle z_k\rangle$ y $\mathfrak{I}_A^2 = \langle z_k z_p\rangle$ son ideales de $A\otimes A$ y $\mathfrak{I}_B = \langle h_j\rangle$, $\mathfrak{I}_B^2 = \langle h_j h_q\rangle$ lo son de $B\otimes B$. Los correspondientes módulos de diferenciales de Kähler son entonces

- $\Omega^1_{A/R} = \mathfrak{I}_A/\mathfrak{I}_A^2$, polinomios de $(R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}])[z_1, ..., z_r]$ de grado 1

- $\Omega^1_{B/R} = \mathfrak{I}_B/\mathfrak{I}_B^2$, polinomios de $(R[y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}])[h_1, ..., h_s]$ de grado 1

De ahora en adelante escribiremos un asterisco * junto a las variables en las que no consideramos polinomios de grado mayor que 1.

Calculamos los productos tensoriales que vamos a necesitar:

$$\begin{aligned}
\Omega^1_{A/R} \otimes_R B =& (R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}])[z_1, ..., z_r]^* \otimes_R R[y_1, ..., y_s] \\
=& (R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}][z_1, ..., z_r]^*)[y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}] \\
\simeq& (R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}][y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}])[z_1, ..., z_r]^* \\
A \otimes_R \Omega^1_{B/R} =& R[x_1, ..., x_r] \otimes_R (R[y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}])[h_1, ..., h_s]^* \\
=& (R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}][y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}])[h_1, ..., h_s]^* \\
\simeq& (R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}][y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}])[h_1, ..., h_s]^*
\end{aligned}$$

Por otro lado, el módulo de diferenciales de Kähler $\Omega^1_{(A \otimes_R B)/R}$ del producto tensorial $A \otimes_R B = R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}, y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}]$ puede escribirse como el conjunto de polinomios de $(R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}, y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}])[z_1, ..., z_r, h_1, ...h_s]$ de grado 1, con lo que finalmente podemos escribir

$$\begin{aligned}
&(\Omega^1_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega^1_{B/R}) \simeq \\
&(R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}][y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}])[z_1, ..., z_r]^* \oplus (R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}][y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}])[h_1, ..., h_s]^* \simeq \\
&(R[x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}][y_1^{(d)}, ..., y_s^{(d)}])[z_1, ..., z_r, h_1, ..., h_s]^* = \Omega^1_{(A \otimes_R B)/R}
\end{aligned}$$

Además de acuerdo con la proposicion 2.3.5, sea $p(X) \in A$ y $q(Y) \in B$ y sea $k(X, Y) = p(X) \otimes q(Y) \in A \otimes_R B$, la diferencial $d^1_{(A \otimes B)/R}$ es:

$$\begin{aligned}
d^1_{(A \otimes B)/R}(k(X, Y)) =& d^1_{(A \otimes B)/R}(p(X) \otimes q(Y)) \\
=& [d^1_{(A/R)}(p(X)) \otimes q(Y)] \oplus [p(X) \otimes d^1_{B/R}(q(Y))] \\
=& [1 \otimes p(X)q(Y) - p(X) \otimes q(Y)] \oplus [p(X) \otimes q(Y) - p(X)q(Y) \otimes 1] \\
=& [k^{(d)}(X, Y) - k(X, Y)] + [k(X, Y) - k^{(i)}(X, Y)] \\
=& k^{(d)}(X, Y) - k^{(i)}(X, Y) \\
=& 1 \otimes k(X, Y) - k(X, Y) \otimes 1
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Generalización del módulo de diferenciales

En este capítulo buscamos construir el módulo de diferenciales de orden n, conocido ya el resultado para los diferenciales de primer orden. Posteriormente observaremos qué ocurre cuando la R-álgebra A sobre la que trabajamos es anillo de polinomios en R, en cuyo caso el módulo de difernciales de orden n es un R-módulo libre. Finalmente daremos una presentación finita del módulo de diferenciales sobre cualquier R-álgebra y estudiaremos algunas propiedades para concluir.

3.1. Derivaciones de orden n

Hasta ahora hemos tratado únicamente derivaciones de primer orden. Para dar una definición formal de derivaciones de orden n arbitrario, generalizamos la regla de Leibniz.

Definición 3.1.1. Sea R un anillo, A una R-álgebra y M un A-módulo. Una derivada de orden $n \in \mathbb{N}$ de A en M es una aplicación $D \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ tal que para cualquier conjunto de $n+1$ elementos de A, $(x_0, x_1, ..., x_n)$ se verifica la siguiente identidad, conocida como *Regla del producto*:

$$D(x_0 x_1 ... x_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < ... < i_k} x_{i_1} ... x_{i_k} D(x_0 ... \check{x}_{i_1} ... \check{x}_{i_k} ... x_n) \tag{3.1}$$

Aquí, usamos el símbolo $\check{x}_{i_j}$ para indicar que omitimos el correspondiente término.

Ejemplo 3.1.2. En el caso de las derivadas de primer orden esta propiedad corresponde a la regla de Leibniz:

$$D(x_0 \cdot x_1) = 1 \cdot (x_0 \cdot D(\check{x}_0 \cdot x_1) + x_1 \cdot D(x_0 \cdot \check{x}_1)) = x_0 D(x_1) + x_1 D(x_0)$$

Proposición 3.1.3. *Para cualquier R-derivación $D : A \to M$ con independencia del orden se verifica $D(r \cdot 1) = r \cdot D(1)$.*

Demostración. Observamos que el factor $\sum_{i_1<...<i_k} x_{i_1}...x_{i_k} D(x_0...\check{x}_{i_1}...\check{x}_{i_k}...x_n)$ aplicado a $1 = 1 \cdot ... \cdot 1$ es la suma de las $\binom{n+1}{k}$ formas en que podemos elegir los k términos que extraemos fuera de la derivación multiplicado siempre por $D(1)$, ya que en este caso $x_i = 1$ para todos los índices i.
Obtenemos así la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
D(1) = D(1^{n+1}) = D(1 \cdot ... \cdot 1) &= \left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}\right] D(1) \\
&= \left[\binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n+1}{n}\right] D(1) \\
&= \left(1 - \binom{n+1}{0} - \left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n+1}{k}\right] - (-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1} + (-1)^{n+1}\right) D(1) \\
&= \left(1 - \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k}\binom{n+1}{k} + (-1)^{n+1}\right) D(1) \\
&= \left(1 + (-1)^{n+1}\right) D(1)
\end{aligned}$$

con lo que si n es par entonces $D(1) = (1-1)D(1) = 0$ y si n es impar, $D(1) = 2D(1) \Rightarrow D(1) = 0$. □

En particular $D(r) = r \cdot D(1) = 0$ para todo $r \in R$, resultado que ya conocíamos para derivaciones de primer orden.

Observación 3.1.4. Para demostrar la proposición 3.1.3 hemos probado la igualdad $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k} = 1 + (-1)^{n+1}$, de donde se deduce

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k} = (-1)\binom{n+1}{0} + 1 + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$$

En la siguiente sección haremos uso de esta igualdad para demostrar la proposición 3.3.3.

Observación 3.1.5. El conjunto de R-derivaciones de orden n de A sobre M, que de ahora en adelante denotaremos $\mathrm{Der}^n_R(A, M)$ tiene estructura de A-módulo, ya que la suma de derivaciones da lugar a una derivación y si $D \in \mathrm{Der}^n_{A/R}$, entonces $a \cdot D \in \mathrm{Der}^n_{A/R}$ por la R-linealidad de D. (Análogo a 2.1.4)

$$
\begin{aligned}
a \cdot D(x_1 \dots x_n) =& a \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1<\dots<i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} D(x_0 \dots \check{x}_{i_1} \dots \check{x}_{i_k} \dots x_n) \\
=& \sum_{k=1}^{n} a \cdot \left((-1)^{k-1} \sum_{i_1<\dots<i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} D(x_0 \dots \check{x}_{i_1} \dots \check{x}_{i_k} \dots x_n) \right) \\
=& \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1<\dots<i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} \big(a \cdot D(x_0 \dots \check{x}_{i_1} \dots \check{x}_{i_k} \dots x_n) \big)
\end{aligned}
$$

3.2. El módulo de diferenciales de orden n

Del mismo modo que definimos el módulo de diferenciales de primer orden mediante una propiedad universal, en esta sección definimos el módulo de diferenciales de orden n arbitrario a través de una propiedad análoga.

Siguiendo la notación del capítulo anterior, denotaremos el módulo de diferenciales de orden n por $\Omega^n_{A/R}$ y la derivación canónica de orden n de A sobre R será $d^n_{A/R} : A \to \Omega^n_{A/R}$, siendo $(\Omega^n_{A/R}, d^n_{A/R})$ el par que queda definido por la siguiente propiedad universal:

Definición 3.2.1 (Propiedad universal del módulo de diferenciales)**.** El par $(\Omega^n_{A/R}, d^n_{A/R})$ cumple la propiedad universal del módulo de diferenciales de orden $n \in \mathbb{N}$ si para todo A-módulo M la siguiente aplicación canónica es biyectiva:

$$
\begin{aligned}
\Phi : \mathrm{Hom}_A(\Omega^n_{A/R}, M) &\to \mathrm{Der}^n_R(A, M) \\
\varphi &\mapsto \varphi \circ d^n_{A/R}
\end{aligned}
$$

Es decir, si para cada R-derivación $D : A \to M$ existe una única aplicación A-lineal $\varphi : \Omega^n_{A/R} \to M$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "d^n_{A/R}"] \arrow[dr, "D"'] & & \Omega^n_{A/R} \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

Proposición 3.2.2. *Caso de existir, el par $(\Omega^n_{A/R}, d^n_{A/R})$ que verifica la propiedad universal anterior es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Análoga al caso de orden 1, ver demostración 2.2.2 □

De forma análoga a lo que hicimos en $n = 1$, para dar la construcción de $\Omega^n_{A/R}$ consideraremos la sucesión exacta

$$0 \to \mathfrak{I} \to A \otimes_R A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

donde μ es la aplicación multiplicativa tal que para x_i, $y_i \in A$

$$\mu\left(\sum_i x_i \otimes y_i\right) = \sum_i x_i y_i$$

En el capítulo anterior probamos que $A \otimes_R A$ es álgebra (consecuencia de 2.2.3) y que $\mathfrak{I}$ es ideal 2.2.6. Entendiendo $A \otimes_R A$ como un A-módulo, veremos en esta sección que la aplicación de A en $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}$ que hace corresponder cada $a \in A$ con la clase de equivalencia $[1 \otimes a - a \otimes 1]$ módulo $\mathfrak{I}^{n+1}$ es una *R-derivación de orden n de A sobre R*, definiremos una derivación d y comprobaremos que el *A-módulo de diferenciales de orden n* coincide con $(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}, d)$.

Definición 3.2.3. Sea $h \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ y $a \in A$, confundimos a con la aplicación $a : A \to A$ que hace corresponder cada $x \in A$ con $ax \in A$ y definimos el operador *corchete* de la siguiente manera:

$$[h, a] = h \circ a - a \circ h - h(a)$$

De este modo, el corchete aplicado a $x \in A$ resulta en la expresión

$$[h, a](x) = h(a \cdot x) - a \cdot h(x) - x \cdot h(a)$$

Proposición 3.2.4. *Sea $h \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ y sean $x_1, ..., x_n \in A$. Entonces*

$$[...[[h, x_1], x_2], ..., x_n]$$

puede expresarse como

$$h \circ (x_1 \cdot ... \cdot x_n) - h(x_1 ... x_n) - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \big(h \circ (x_1 \cdot ... \cdot \check{x}_i \cdot ... \cdot x_n) - h(x_1 ... \check{x}_i ... x_n)\big)$$

$$+ ... + (-1)^k \sum_{i_1 < ... < i_k} x_{i_1} ... x_{i_k} \cdot \big(h \circ (x_i \cdot ... \cdot \check{x}_{i_1} \cdot ... \cdot \check{x}_{i_k} \cdot ... \cdot x_n) - h(x_1 ... \check{x}_{i_1} ... \check{x}_{i_k} ... x_n)\big)$$

$$+ ... + (-1)^n x_1 ... x_n \cdot h$$

Demostración. Cuando $n = 1$, esta expresión es simplemente

$$h \circ x_1 - h(x_1) - x_1 \cdot h = h \circ x_1 - x_1 \circ h - h(x_1) =: [h, x_1]$$

Suponemos que la proposición es cierta para n, resultando en la expresión que denotaremos E_n. Comprobemos que también es cierta para $n + 1$.

$$
\begin{aligned}
\left[E_n, x_{n+1}\right] :=& E_n \circ x_{n+1} - x_{n+1} \circ E_n - E_n(x_{n+1}) \\
=& \Bigg(\left[h \circ x_1 \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n+1} \right]^{(0)} - \cancel{x_{n+1} \cdot h(x_1 ... x_n)} \\
& - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Big(h \circ (x_1 \cdot ... \cdot \check{x}_i \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n+1}) \Big) \right]^{(1)} - \cancel{\sum_{i=1}^{n} x_{n+1} \cdot x_i \cdot (h(x_1 ... \check{x}_i ... x_n))} \\
& + ... + \left[(-1)^k \sum_{i_1 < ... < i_k} x_{i_1} ... x_{i_k} \cdot \Big(h \circ (x_i \cdot ... \cdot \check{x}_{i_1} \cdot ... \cdot \check{x}_{i_k} \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n+1}) \Big) \right]^{(k)} \\
& \cancel{-(-1)^k \sum_{i_1 < ... < i_k} x_{n+1} \cdot x_{i_1} ... x_{i_k} (h(x_1 ... \check{x}_{i_1} ... \check{x}_{i_k} ... x_n))} + ... + \left[(-1)^n x_1 ... x_n \cdot h \circ x_{n+1} \right]^{(n)} \Bigg) \\
& - \Bigg(\left[x_{n+1} \cdot h \circ (x_1 \cdot ... \cdot x_n) - x_{n+1} \cdot h(x_1 ... x_n) \right]^{(1)} \\
& - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+1} \cdot \Big(h \circ (x_1 \cdot ... \cdot \check{x}_i \cdot ... \cdot x_n) - h(x_1 ... \check{x}_i ... x_n) \Big) \right]^{(2)} + ... \\
& + \left[(-1)^k \sum_{i_1 < ... < i_k} x_{i_1} ... x_{i_k} x_{n+1} \Big(h \circ (x_i \cdot ... \check{x}_{i_1} ... \check{x}_{i_k} ... \cdot x_n) - h(x_1 ... \check{x}_{i_1} ... \check{x}_{i_k} ... x_n) \Big) \right]^{(k+1)} \\
& + ... + \left[(-1)^n x_1 ... x_n x_{n+1} \cdot h \right]^{(n+1)} \Bigg) \\
& - \Bigg(\left[h(x_1 ... x_n x_{n+1}) \right]^{(0)} - \cancel{x_{n+1} \cdot h(x_1 ... x_n)} \\
& - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Big(h(x_1 ... \check{x}_i ... x_n x_{n+1}) \Big) \right]^{(1)} - \cancel{\sum_{i=1}^{n} x_{n+1} \cdot x_i \cdot (h(x_1 ... \check{x}_i ... x_n))} \\
& + ... + \left[(-1)^k \sum_{i_1 < ... < i_k} x_{i_1} ... x_{i_k} \cdot \Big(h \circ (x_i \cdot ... \cdot \check{x}_{i_1} \cdot ... \cdot \check{x}_{i_k} \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n+1}) \Big) \right]^{(k)} \\
& \cancel{-(-1)^k \sum_{i_1 < ... < i_k} x_{n+1} \cdot x_{i_1} ... x_{i_k} (h(x_1 ... \check{x}_{i_1} ... \check{x}_{i_k} ... x_n))} + ... + \left[(-1)^n x_1 ... x_n \cdot h(x_{n+1}) \right]^{(n)} \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
= &\ \Big[h \circ (x_1 \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n+1}) - h(x_1 ... x_n x_{n+1})\Big]^{(0)} \\
&-\Big[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \big(h \circ (x_1 \cdot ... \cdot \check{x}_i \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n+1}) - h(x_1 ... \check{x}_i ... x_n x_{n+1})\big) \\
&+\ x_{n+1} \cdot \big(h \circ (x_1 \cdot ... \cdot x_n \cdot \check{x}_{n+1}) - h(x_1 ... x_n \check{x}_{n+1})\big)\Big]^{(1)} + ... \\
&+\Big[(-1)^k \sum_{i_1 < ... < i_k}^{n} x_{i_1} ... x_{i_k} \big(h \circ (x_i \cdot ... \check{x}_{i_1} ... \check{x}_{i_k} ... \cdot x_n \cdot x_{n+1}) - h(x_1 ... \check{x}_{i_1} ... \check{x}_{i_k} ... x_n x_{n+1})\big) \\
&\quad (-1)^k \sum_{i_1 < ... < i_{k-1}}^{n} x_{i_1} ... x_{i_{k-1} x_{n+1}} \cdot \big(h \circ (x_i \cdot ... \cdot \check{x}_{i_1} \cdot ... \cdot \check{x}_{i_{k-1}} \cdot ... \cdot x_n) - h(x_1 ... \check{x}_{i_1} ... \check{x}_{i_{k-1}} ... x_n)\big)\Big]^{(k)} \\
&+ ... + \Big[(-1)^n x_1 ... x_n \cdot \big(h \circ x_{n+1} - h(x_{n+1})\big)\Big]^{(n)} + \Big[(-1)^{n+1} x_1 ... x_n x_{n+1} \cdot h\Big]^{(n+1)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= &\ h \circ (x_1 \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n+1}) - h(x_1 ... x_n x_{n+1}) \\
&-\sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot \big(h \circ (x_1 \cdot ... \cdot \check{x}_i \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n+1}) - h(x_1 ... \check{x}_i ... x_n x_{n+1})\big) + ... \\
&+(-1)^k \sum_{i_1 < ... < i_k}^{n} x_{i_1} ... x_{i_k} \cdot \big(h \circ (x_i \cdot ... \cdot \check{x}_{i_1} \cdot ... \cdot \check{x}_{i_k} \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n+1}) - h(x_1 ... \check{x}_{i_1} ... \check{x}_{i_k} ... x_n x_{n+1})\big) \\
&+ ... + (-1)^{n+1} x_1 ... x_n x_{n+1} \cdot h
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.5. $D \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ *es una R-derivación de orden n si, y solo si, para cuaquier n-upla de elementos* $x_1, ..., x_n \in A$ *se verifica*

$$[...[[D, x_1], x_2]..., x_n] = 0$$

Demostración. Al evaluar $[...[[D, x_1], x_2]..., x_n]$ en un punto $x_0 \in A$ obtenemos, agrupando adecuadamente la identidad de la proposición 3.2.2:

$$\left[...\left[[D,x_1],x_2\right]...,x_n\right](x_0) = D(x_0x_1...x_n) + (-1)\left[x_0D(x_1...x_n) + \sum_{i=1}^{n} x_iD(x_0...\check{x}_i...x_n)\right]$$
$$+\left[\sum_{i=1}^{n} x_0x_iD(\check{x}_0x_1...\check{x}_i...x_n) + \sum_{i_1<i_2} x_{i_1}x_{i_2}D(x_0...\check{x}_{i_1}...\check{x}_{i_2}...x_n)\right] + ...$$
$$+(-1)^k\left[\sum_{i_1<...<i_{k-1}} x_0x_{i_1}...x_{i_{k-1}}D(\check{x}_0...\check{x}_{i_1}..\check{x}_{i_{k-1}}...x_n) + \sum_{i_1<...<i_k} x_{i_1}...x_{i_k}D(x_0...\check{x}_{i_1}...\check{x}_{i_k}...x_n)\right]$$
$$+... + (-1)^n\left[\sum_{i_1<...<i_{n-1}} x_0x_{i_1}...x_{i_{n-1}}D(\check{x}_0...\check{x}_{i_1}...\check{x}_{i_{n-1}}...x_n) + x_1...x_nD(x_0)\right]$$
$$= D(x_0x_1...x_n) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<...<i_k} x_{i_1}...x_{i_k}D(x_0...\check{x}_{i_1}...\check{x}_{i_k}...x_n)$$

con lo que $[...[[D,x_1],x_2],...x_n](x_0) = 0$ si, y solo si, se verifica la regla del producto

$$D(x_0x_1...x_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<...<i_k} x_{i_1}...x_{i_k}D(x_0...\check{x}_{i_1}...\check{x}_{i_k}...x_n)$$

Por definición el homomorfismo R-lineal D es derivación de orden n si, y solo si, verifica la regla del producto. Acabamos de probar que la regla del producto es equivalente a $[...[[D,x_1],x_2],...x_n] = 0$, con lo que queda probado el enunciado. □

Sea de ahora en adelante la aplicación R-lineal $d \in \mathrm{Hom}_R(A, A\otimes_R A)$ definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d : A &\longrightarrow A\otimes_R A \\ a &\longmapsto 1\otimes a - a\otimes 1 \end{aligned}$$

Proposición 3.2.6. *La aplicación R-lineal $d : A \to A\otimes_R A$ verifia*

$$[[...[d,x_1]...],x_n](x_0) = d(x_0)d(x_1)...d(x_n) \in \mathfrak{I}^{n+1}$$

Demostración. Probaremos el resultado por inducción. En primer lugar, comprobamos que se verifica para $n=1$

$$\begin{aligned}
[d, x_1](x_0) =& d(x_1x_0) - x_1d(x_0) - x_0d(x_1)\\
=& 1 \otimes x_1x_0 - x_1x_0 \otimes 1 - x_1(1 \otimes x_0 - x_0 \otimes 1) - x_0(1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)\\
=& 1 \otimes x_1x_0 - x_1x_0 \otimes 1 - (x_1 \otimes x_0 - x_1x_0 \otimes 1) - (x_0 \otimes x_1 - x_1x_0 \otimes 1)\\
=& 1 \otimes x_1x_0 - x_1 \otimes x_0 - x_0 \otimes x_1 - x_1x_0 \otimes 1\\
=& (1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)(1 \otimes x_0) - (1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)(x_0 \otimes 1)\\
=& (1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)(1 \otimes x_0 - x_0 \otimes 1)\\
=& d(x_1) \cdot d_{x_0} = d(x_0) \cdot d(x_1)
\end{aligned}$$

Hemos probado que $[d, x_1] = d(x_1) \cdot d$. Tomamos como hipótesis de inducción

$$[...[[d, x_1], x_2]..., x_{n-1}] = d(x_1)...d(x_{n-1}) \cdot d$$

y lo usamos para probar el caso n:

$$\begin{aligned}
&[[...[[d, x_1], x_2]..., x_{n-1}], x_n]\\
=&[d(x_1)...d(x_{n-1}) \cdot d, x_n]\\
=&d(x_1)...d(x_{n-1}) \cdot d \circ x_n - x_n \cdot d(x_1)...d(x_{n-1}) \cdot d - d(x_1)...d_(x_{n-1}) \cdot d(x_n)\\
=&d(x_1)...d(x_{n-1}) \cdot (d \circ x_n - x_n \cdot d - d(x_n))\\
=&d(x_1)...d(x_{n-1}) \cdot (d(x_n) \cdot d)\\
=&d(x_1)...d(x_{n-1})d(x_n) \cdot d
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$[...[[d, x_1], x_2]..., x_n](x_0) = d(x_1)...d(x_n) \cdot d(x_0) = d(x_0)d(x_1)...d(x_n)$$

Conocemos además que los elementos de la forma $d(t_i) = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$ generan $\mathfrak{I}$ como ideal de $A \otimes_R A$, luego $d(x_0)d(x_1)...d(x_n) \in \mathfrak{I}^{n+1}$ □

Corolario 3.2.7. *El paso al cociente $d : A \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}$ es R-derivación de orden n.*

Demostración. Puesto que $[[...[d, x_1]...], x_n](x_0) = d(x_0)d(x_1)...d(x_n) \in \mathfrak{I}^{n+1}$ y d tiene llegada en $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}$, se verifica $[[...[d, x_1]...], x_n] \equiv 0$ y por el teorema 3.2.5 queda probado que $d : A \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}$ es R-derivación de orden n. □

Una vez probado que $d : A \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}$ es R-derivación de orden n, queda por comprobar que el par $(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}, d)$ verifica la propiedad universal del módulo de diferenciales.

Dada $D \in \mathrm{Der}_R^n(A, M)$, definiremos la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} A \times A \longrightarrow & M \\ (x, y) \longmapsto & xD(y) \end{aligned}$$

que a continuación extendemos al R-homomorfismo Δ

$$\begin{aligned} \Delta : A \otimes_R A \longrightarrow & M \\ x \otimes y \longmapsto & xD(y) \end{aligned}$$

Este homomorfismo está definido de tal manera que $\Delta \circ d = D$:

$$\Delta \circ d\,(t) = \Delta(1 \otimes t - t \otimes 1) = 1D(t) - tD(1) = D(t) \quad \forall\, t \in A$$

Proposición 3.2.8.

$$\Delta \circ [d, a] = [\Delta \circ d, a] = [D, a] \;\forall\, a \in A$$

Demostración. Sea $b \in A$

$$\begin{aligned} \Delta \circ [d, a](b) =& \Delta(d \circ a - ad - d(a))(b) \\ =& \Delta((1 \otimes ab - ab \otimes 1) - a(1 \otimes b - b \otimes 1) - b(1 \otimes a - a \otimes 1)) \\ =& \Delta(1 \otimes ab - ab \otimes 1) - a\Delta(1 \otimes b - b \otimes 1) - b\Delta(1 \otimes a - a \otimes 1) \\ =& (\Delta \circ d)(a \cdot b) - a \cdot (\Delta \circ d)(b) - b \cdot (\Delta \circ d)(a) \\ =& [\Delta \circ d, a](b) = [D, a](b) \end{aligned}$$

□

Corolario 3.2.9. *El par $(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}, d)$ verifica la propiedad universal del módulo de diferenciales.*

Demostración. Interpretando $A \otimes_R A$ como un A-módulo a través del morfismo $\lambda_i : A \to A \otimes_R A$ tal que $\lambda_i(x) = x \otimes 1$, podemos ver Δ como aplicación A-lineal. Sabemos que los elementos $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$ con $a \in A$ generan $\mathfrak{I}$, con lo que podemos verificar fácilmente que $\Delta(\mathfrak{I}^{n+1}) = 0$ a través de una sencilla cuenta:

$$\Delta(d(x_0)...d(x_n)) = \Delta([...[d, x_1]..., x_n](x_0)) = \Delta(0) = 0$$

Así, la restricción de $\Delta : A \to M$ a $\mathfrak{I}$ induce un R-homomorfismo de $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}$ en M, que de ahora en adelante será el que denotemos por Δ y que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "D"'] & & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1} \arrow[dl, "\Delta"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Con esto tenemos la existencia de $\Delta \in \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}, M)$. Para probar la unicidad, basta considerar $\mathfrak{I}$ generado por elementos $d(a)$ con $a \in A$ y observar que

$$D(a) = \Delta \circ d\,(a) = \Delta(d(a)) \text{ para todo } a \in A.$$

Concluimos que Δ está determinado por los valores de $\Delta(ab)$. □

3.3. Un caso particular

En esta sección estudiaremos el caso en que $A := R[\{t_1, ..., t_\eta\}]$ es un anillo de polinomios sobre R. Denotamos $I = \{1, .., \eta\}$, así $A = R\,[\{t_i\}_{i \in I}]$.

Denotando $x_i = (1 \otimes t_i)$, $y_i = (t_i \otimes 1)$ para $i \in I$, ya hemos visto que podemos escribir $A \otimes_R A$ como $R[x_1, ..., x_\eta, y_1, ..., y_\eta]$. También es posible escribir $A \otimes_R A$ en términos de $x_i - y_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1 =: T_i$ como $R[x_1, ..., x_\eta, T_1, ..., T_\eta]$.

Lema 3.3.1. *$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}$ es A-módulo libre generado por la base $B_0 := \{dt_{i_1}...dt_{i_k} | 1 \leq k \leq n, i_j \in I\}$. Esto es, el producto de a lo sumo n factores de tipo dt_i siendo los t_i elementos generadores de $A := R[\{t_1, ..., t_\eta\}]$ que podemos considerar con repetición.*

Demostración. El núcleo $\mathfrak{I}$ del homomorfismo $\mu : A \otimes_R A \to A$ es ideal de $A \otimes_R A$ generado por variables T_i con $i \in I$, $\mathfrak{I} = \langle dt_i \mid i \in I \rangle \subset A \otimes A$. El ideal $\mathfrak{I}^{n+1}$ es el generado por monomios en variables T_i de grado $n+1$, $\mathfrak{I}^{n+1} = \langle dt_{i_1}, ..., dt_{i_{n+1}} \,|\, i_j \in I \rangle \subset A \otimes A$. Así, los polinomios en variables T_i de grado menor o igual que n son base del A-módulo libre $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}$.

Considerando d la R-derivación de A en $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}$ inducida por la aplicación

$$\begin{aligned} &A \to \mathfrak{I} \\ &a \to 1 \otimes a - a \otimes 1 \end{aligned}$$

basta observar que $\mathfrak{I}$ es módulo libre generado por productos de $d(t_i)$ para obtener el resultado.

□

Del lema que acabamos de demostrar se deduce que para cualquier polinomio $f(t_1, ..., t_\eta)$ en A podemos dar $d(f)$ en la base B_0 mediante una expresión

$$d(f) = \sum D_i f \cdot dt_i + \sum D_{i_1 i_2} f \cdot dt_{i_1} dt_{i_2} + ... + \sum D_{i_1 ... i_n} f \cdot dt_{i_1} ... dt_{i_n}$$

donde a priori no conocemos los coeficientes D_{i_1}, $D_{i_1 i_2}$, ..., $D_{i_1 ... i_n}$

Observamos que denotando $x_i = 1 \otimes t_i$, $y_i = t_i \otimes 1$, $T_i = x_i - y_i$ y usando la forma reducida $x = (x_1, ..., x_\eta)$, $y = (y_1, ..., y_\eta)$, $T = (T_1, ..., T_\eta)$ podemos escribir $d(f)$ como

$$d(f) = 1 \otimes f - f \otimes 1 = f(x) - f(y) = f(y + (x - y)) - f(y) = f(y + T) - f(y)$$

Puesto que $T = x - y = 1 \otimes t - t \otimes 1 = dt$, vamos a poder determinar los coeficientes D_{i_1}, $D_{i_1 i_2}$,... (derivaciones de orden $1, ..., n$ de A sobre R) a través de la fórmula

$$f(t + dt) - f(t) = \sum D_i f \cdot dt_i + ... + \sum D_{i_1 ... i_n} f \cdot dt_{i_1} ... dt_{i_n}$$

Si hacemos uso de multiíndices para facilitar la notación, siendo $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ tal que $\sum \alpha_i \leq n$, podemos reescribir $d(f)$ en B_0 como

$$d(f) = \sum_\alpha D_\alpha(f) \cdot (dt_1)^{\alpha_1} ... (dt_\eta)^{\alpha_\eta}$$

donde $D_\alpha : A \to A$ es una función aún por determinar.

Proposición 3.3.2. *El módulo de diferenciales de orden n, $\Omega^n_{A/R}$, es el módulo libre sobre A generado por el conjunto $\{d(t_{i_1} ... t_{i_k}) | 1 \leq k \leq n, i_j \in I\}$, es decir, d aplicado a monomios en t_i de grado menor o igual que n. Este sistema de generadores es además una base, que denotaremos B.*

Demostración. Nos planteamos si es posible expresar $dt_i dt_j$,..., $dt_{i_1} ... dt_{i_n}$ como combinaciones lineales de $d(t_i)$, $d(t_i t_j)$,..., $d(t_{i_1} ... t_{i_n})$ con coeficientes en A, es decir, escribir B_0 en términos de los elementos de B, sabiendo que entonces B será también sistema de generadores de $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{+1}$.

El caso más sencillo es $d(t_{i_1}) = dt_{i_1}$. Asumimos como hipótesis de inducción

$$d(t_{i_1} ... t_{i_\alpha}) = \sum_r t_{i_1} ... \check{t}_{i_r} ... t_{i_\alpha} \cdot dt_{i_r} + \sum_{r<s} t_{i_1} ... \check{t}_{i_r} ... \check{t}_{i_s} ... t_{i_\alpha} \cdot dt_{i_r} dt_{i_s} + ... + 1 \cdot dt_{i_1} ... dt_{i_\alpha}$$

Como parte de la demostración de la proposición 3.2.6 hemos probado

$$d(x_0 \cdot x_1) = x_0 \cdot d(x_1) + x_1 \cdot d(x_0) + d(x_0) d(x_1)$$

Tomando $x_0 = t_{i_1} ... t_{i_\alpha}$ y $x_1 = t_{i_{\alpha+1}}$, esto nos permite escribir

$$d(t_{i_1} ... t_{i_\alpha} \cdot t_{i_{\alpha+1}}) = t_{i_1} ... t_{i_\alpha} dt_{i_{\alpha+1}} + t_{i_{\alpha+1}} d(t_{i_1} ... t_{i_\alpha}) + d(t_{i_1} ... t_{i_\alpha}) dt_{i_{\alpha+1}}$$

En el segundo y tercer sumando podemos aplicar la hipótesis de inducción, sustituyendo $d(t_{i_1}...t_{i_\alpha})$ por la expresión

$$\sum_r t_{i_1}...\check{t}_{i_r}...t_{i_\alpha} \cdot dt_{i_r} + \sum_{r<s} t_{i_1}...\check{t}_{i_r}...\check{t}_{i_s}...t_{i_\alpha} \cdot dt_{i_r} dt_{i_s} + ... + dt_{i_1}...dt_{i_\alpha}$$

con lo que escribiendo la cuenta completa de esta forma y reagrupando términos obtenemos

$$d(t_{i_1}...t_{i_\alpha+1}) = t_{i_1}...t_{i_\alpha} dt_{i_{\alpha+1}} + t_{i_{\alpha+1}} d(t_{i_1}...t_{i_\alpha}) + d(t_{i_1}...t_{i_\alpha}) dt_{i_{\alpha+1}} =$$
$$\sum_r t_{i_1}...\check{t}_{i_r}...t_{i_\alpha+1} \cdot dt_{i_r} + \sum_{r<s} t_{i_1}...\check{t}_{i_r}...\check{t}_{i_s}...t_{i_{\alpha+1}} \cdot dt_{i_r} dt_{i_s} + ... + 1 \cdot dt_{i_1}...dt_{i_{\alpha+1}}$$

Concluimos así el proceso inductivo, con lo que podemos afirmar que la forma de expresar B_0 como combinación lineal de elementos de B es

$$d(t_{i_1}...t_{i_\alpha}) = \sum_r t_{i_1}...\check{t}_{i_r}...t_{i_\alpha} \cdot dt_{i_r} + \sum_{r<s} t_{i_1}...\check{t}_{i_r}...\check{t}_{i_s}...t_{i_\alpha} \cdot dt_{i_r} dt_{i_s} + ... + 1 \cdot dt_{i_1}...dt_{i_\alpha}$$

Ordenando B y B_0 de acuerdo al grado de sus monomios, observamos que el último coeficiente de la expresión anterior siempre es 1, con lo que los valores de la diagonal de la matriz de cambio de base son todos 1. Observamos también que las entradas por encima de la diagonal son todas nulas, con lo que tenemos una matriz triangular con 1s en la diagonal de la que podemos afirmar que es matriz de cambio de base.

Concluimos que B tal y como se describe en el enunciado es base de $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{n+1}$.

□

Representaremos por $\delta_{i_1}(f)$, $\delta_{i_1 i_2}(f)$, ..., $\delta_{i_1...i_n}(f)$ los coeficientes de $d(f)$ en la base B, obteniendo la expresión

$$d(f) = \sum \delta_{i_1}(f) \cdot d(t_i) + \sum \delta_{i_1 i_2}(f) \cdot d(t_{i_1} t_{i_2}) + ... + \sum \delta_{i_1...i_n}(f) \cdot d(t_{i_1}...t_{i_n})$$

que podemos reeescribir haciendo uso de multiíndices $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_\eta)$ tal que $\sum_i \alpha_i \leq n$ como

$$d(f) = \sum \delta_\alpha(f) \cdot d(t_{i_1}^{\alpha_1}...t_{i_\eta}^{\alpha_\eta})$$

Las expresiones de $d(f)$ en B_0 y B respectivamente son entonces

$$d(f) = \sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha|\leq n}} D_\alpha(f) \cdot (dt_1)^{\alpha_1}...(dt_\eta)^{\alpha_\eta} = \sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha|\leq n}} \delta_\alpha(f) \cdot d(t_{i_1}^{\alpha_1}...t_{i_\eta}^{\alpha_\eta})$$

Es posible calcular de forma explícita los coeficientes $D_\alpha(f)$ y $\delta_\alpha(f)$, que podemos ver como aplicaciones de A en A. De hecho será suficiente conocer cómo actúan estas aplicaciones sobre monomios en las variables t_i, puesto que estos forman base de $A := R[\{t_1, ..., t_\eta\}]$. Para ilustrarlo sin extendernos excesivamente, haremos los cálculos en el caso de anillos de una variable.

Consideramos un anillo de polinomios en una única variable, $A = R[t]$ y definimos la operación $D_k : R[t] \to R[t]$ mediante la expresión comentada anteriormente

$$d(f) = f(t + dt) - f(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k(f) \cdot (dt)^k \ \in \ (R[t])[dt] \tag{3.2}$$

Proposición 3.3.3. *Sea $A = R[t]$ anillo de polinomios en una variable, entonces se verifica la siguiente identidad:*

$$(dt)^k = \sum_{s=1}^{k} (-1)^{k-s} \binom{k}{s} t^{k-s} d(t^s) \tag{3.3}$$

Demostración. Haremos la demostración razonando por inducción sobre k: El caso $k = 1$ es trivial. Suponiendo que (3.3) se verifica para k, veamos que también debe verificarse para $k + 1$. Tomando $f(t) = t^{k+1} \ \ \forall\, t$ y apoyándonos en el binomio de Newton obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} d(t^{k+1}) &= (t + dt)^{k+1} - t^{k+1} = \cancel{t^{k+1}} + \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+1}{r} t^{(k+1)-r} (dt)^r - \cancel{t^{k+1}} \\ &= \binom{k+1}{1} \cdot t^k dt + \binom{k+1}{2} \cdot t^{k-1} (dt)^2 + ... + \binom{k+1}{k} \cdot t\, (dt)^k + (dt)^{k+1} \end{aligned}$$

de donde se sigue la cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
(dt)^{k+1} &= d(t^{k+1}) - \sum_{r=1}^{k} \binom{k+1}{r} t^{\,k+1-r} \cdot (dt)^r \\
&\overset{(HI)}{=} d(t^{k+1}) - \sum_{r=1}^{k} \binom{k+1}{r} t^{\,k+1-r} \cdot \left((-1)^r \sum_{s=1}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} t^{r-s} d(t^s) \right) \\
&= d(t^{k+1}) - \sum_{s=1}^{k} t^{k+1-s} \sum_{r=s}^{k} \left((-1)^{r-s} \binom{r}{s} \binom{k+1}{r} d(t^s) \right) \\
&\overset{(1)}{=} d(t^{k+1}) - \sum_{s=1}^{k} t^{\,k+1-s} \binom{k+1}{s} \sum_{r=s}^{k} \left((-1)^{r-s} \binom{k+1-s}{r-s} d(t^s) \right) \\
&\overset{(2)}{=} d(t^{k+1}) + \sum_{s=1}^{k} t^{\,k+1-s} \binom{k+1}{s} \sum_{m=0}^{k-s} \left((-1)^{m+1} \binom{k+1-s}{m} d(t^s) \right) \\
&\overset{(3)}{=} d(t^{k+1}) + \sum_{s=1}^{k} \left(t^{k+1-s} \binom{k+1}{s} (-1)^{k+1-s} d(t^s) \right) \\
&\overset{(4)}{=} \sum_{s=1}^{k+1} \left((-1)^{k+1-s} \binom{k+1}{s} t^{k+1-s} d(t^s) \right)
\end{aligned}$$

(1) $\binom{r}{s}\binom{k+1}{r} = \binom{k+1}{s}\binom{k+1-s}{r-s}$
(2) $m := r - s$
(3) $\sum_{m=0}^{k-s}(-1)^{m+1}\binom{k-s+1}{m} = (-1)^{k-s+1}$ (ver observación 3.1.4)
(4) reordenamos e incluimos $d(t^{k+1})$ en el sumatorio.

$\square$

Tenemos así que para cualquier $f \in A$

$$\begin{aligned}
d(f) &= \sum_{k=1}^{n} D_k(f)(dt)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} D_k(f) \sum_{s=1}^{k} (-1)^{k-s} \binom{k}{s} t^{k-s} d(t^s) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=s}^{n} (-1)^{k-s} D_k(f) \binom{k}{s} t^{k-s} d(t^s)
\end{aligned}$$

Fijando

$$\delta_s(f) = \sum_{k=s}^{n} (-1)^{k-s} D_k(f) \binom{k}{s} t^{k-s} \tag{3.4}$$

podemos dar las expresiones de $d(f)$ en B_0 y en B respectivamente como

$$d(f) = \sum_{k=1}^{n} D_k(f)(dt)^k = \sum_{s=1}^{n} \delta_s(f) d(t^s)$$

Lema 3.3.4. *Sea $d(f) = \sum_{k=1}^{n} D_k(f)(dt)^k$ derivación de orden n. Entonces*

$$D_k(t^q) = \begin{cases} \binom{q}{k} t^{(q-k)} & si\ k \leq q \\ 0 & si\ k > q \end{cases}$$

Demostración. Dado que $d(f) = \sum_{k=1}^{n} D_k(f) \cdot (dt)^k$, si $f = t^q$ tenemos

$$d(t^q) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t^q)(dt)^k$$

Al inicio de la demostración de la proposición 3.3.3 hemos notado que se da

$$d(t^q) = \sum_{k=1}^{q} \binom{q}{k} t^{q-k}(dt)^k$$

Puesto que las coordenadas en la base B_0 son únicas, igualando ambas expresiones obtenemos la expresión del enunciado.

$\square$

Observación 3.3.5. Es sencillo comprobar que la expresión de $D(t^q)$ que hemos obtenido coincide con la dada por el desarrollo de Taylor, según el cual $D_k(f) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{df}{(dt)^k}$. En efecto, puesto que basta comprobarlo para monomios, tomamos $f = t^q$ y obtenemos

$$\frac{1}{k!} \cdot \frac{df}{(dt)^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{q!}{(q-k)!} t^{q-k} = \binom{q}{k} t^{q-k} = D_k(t^q)$$

Lema 3.3.6. *Sea $d(f) = \sum_{s=1}^{n} \delta_s(f) d(t^s)$ derivación de orden n*

$$\delta_s(t^q) = \begin{cases} 1 & si\ s = q \leq n \\ 0 & si\ s \neq q \leq n \\ \sum_{m=0}^{n-s} (-1)^m \binom{q-s}{m} \binom{q}{s} t^{q-s} & si\ q > n \end{cases}$$

Demostración. Por cómo hemos fijado la notación en (3.4),

$$\delta_s(t^q) = \sum_{k=s}^{n} (-1)^{k-s} D_k(t^q) \binom{k}{s} t^{k-s}$$

Sustituyendo $D_k(t^q)$ por $\binom{q}{k}t^{q-k}$, podemos desarrollar esta expresión como:

$$\sum_{k=s}^{n}(-1)^{k-s}D_k(t^q)\binom{k}{s}t^{k-s} = \sum_{k=s}^{n}(-1)^{k-s}\binom{q}{k}t^{q-k}\binom{k}{s}t^{k-s}.$$
$$=\sum_{k=s}^{n}(-1)^{k-s}\binom{q}{k}\cdot\binom{k}{s}t^{q-s} = \sum_{m=0}^{n-s}(-1)^{m}\binom{q}{m+s}\binom{m+s}{s}\cdot t^{q-s}$$
$$=\left[\sum_{m=0}^{n-s}(-1)^{m}\binom{q-s}{m}\right]\binom{q}{s}\cdot t^{q-s}$$

La expresión obtenida es equivalente a $\delta_s(t^q)$ cuando $q > n$, con lo que este caso queda probado. Para analizar el caso $q \leq n$ será útil observar que si $s \leq q \leq n$ entonces

$$\sum_{m=0}^{n-s}(-1)^{m}\binom{q-s}{m} = \begin{cases} 0 & \text{si } s < q, \\ 1 & \text{si } s = q \end{cases}$$

Si $s = q \leq n$ entonces $D_k(t^q) = 0$ para todo $k > s = q$, y el único sumando no nulo de $\delta_s(t^q)$ es el correspondiente al caso $k = s = q$, que vale 1. Así en el caso $s = q \leq n$ se da $\delta_s(t^q) = 1$.
Si $s \neq q \leq n$ entonces puede ocurrir que o bien $q < s$, en cuyo caso $\delta_s(t^q) = 0$ porque $D_k(t^q) = 0$ para todo $k \geq s > q$, o bien $s < q$, en cuyo caso $\sum_{m=o}^{n-s}(-1)^m\binom{q-s}{m} = 0$, luego también resulta $\delta_s(t^q) = 0$.

Obtenemos así que cuando $q \leq n$ se da

$$\delta_s = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq q, \\ 1 & \text{si } s = q \end{cases}$$

y queda probado el resultado. □

3.4. Presentación de $\Omega^n_{A/R}$

Sean A y B dos R-álgebras relacionadas mediante un R-homomorfismo $f : A \to B$ y sean $d^n_{A/R}$ y $d^n_{B/R}$ las correspondientes R-derivaciones canónicas de orden n.

Observación 3.4.1. La aplicación $d^n_{B/R}\circ f$ es una R-derivación de orden n de A en $\Omega^n_{B/R}$. Dado que $\Omega^n_{A/R}$ cumple la propiedad universal del módulo de diferenciales, aplicándolo a $M = \Omega^n_{B/R}$ notamos que debe existir un homomorfismo de A-módulos $f^* : \Omega^n_{A/R} \to \Omega^n_{B/R}$ tal que $f^* \circ d_{A/R} = d_{B/R} \circ f$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d^n_{A/R}"'] & B \arrow[d, "d^n_{B/R}"] \\
\Omega^n_{A/R} \arrow[r, dashed, "f^*"] & \Omega^n_{B/R}
\end{tikzcd}$$

Proposición 3.4.2. *El par $(\Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi, \delta)$ cumple la propiedad universal del módulo de diferenciales siempre que la derivación sobre la que actúa se anule en A.*

Demostración. Tomamos $D \in \operatorname{Der}_R(B, M)$ tal que $D(f(a)) = 0\ \ \forall\, a \in A$. Por la propiedad universal del módulo de diferenciales $(\Omega^n_{B/R}, d^n_{B/R})$, existe $\Phi : \Omega^n_{B/R} \to M$ homomorfismo de B-módulos tal que $D(b) = \Phi \circ d^n_{B/R}(b)$ para todo $b \in B$.
Cuando $M = \Omega^n_{B/A}$, entonces $D : B \to \Omega_{B/R} \to \Omega^n_{B/A}$ es derivación tal que $D(f(a)) = 0\ \forall a \in A$ y puesto que Φ factoriza por $\Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi$, existe la aplicación $\widehat{\Phi} : \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \to \Omega^n_{B/A}$ tal que $D = \widehat{\Phi} \circ \delta$.
En particular, tomando la derivación $d^n_{B/A}$ cuando $M = \Omega^n_{B/A}$, podemos ampliar el diagrama para un nuevo M y $D \in \operatorname{Der}_R(B, M)$, cubriendo así todos los casos.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "d^n_{B/R}"] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[ddr, "D"'] & & \Omega^n_{B/R} \arrow[dl, "j"'] \arrow[ddl, dashed, "\Phi"] \\
& \frac{\Omega^n_{B/R}}{\operatorname{im}\varphi} \arrow[d, dotted] & \\
& \Omega^n_{B/A} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, "d^n_{B/A}"] & \frac{\Omega^n_{B/R}}{\operatorname{im}\varphi} \arrow[d, dotted] \\
M & \Omega^n_{B/A} \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}$$

□

Lema 3.4.3. *Sea φ el homomorfismo de B-módulos dado de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}
\varphi : B \otimes_A \Omega^n_{A/R} &\longrightarrow \Omega^n_{B/R} \\
b \otimes d^n_{A/R}(a) &\longmapsto b \cdot f^*(d^n_{A/R}(a)) \\
&\quad \big(= b \cdot (d^n_{B/R}(f(a))\big)
\end{aligned}$$

y sea $N := \ker\varphi$, de modo que la siguiente sucesión de B-módulos es exacta

$$0 \to N \to B \otimes_A \Omega^n_{A/R} \xrightarrow{\varphi} \Omega^n_{B/R} \xrightarrow{j} \frac{\Omega^n_{B/R}}{\operatorname{im}\varphi} \to 0$$

Entonces existe un homomorfismo sobreyectivo de B-módulos

$$\begin{aligned}
\psi : \frac{\Omega^n_{B/R}}{\operatorname{im}\varphi} &\longrightarrow \Omega^n_{B/A} \\
d^n_{B/R}(b) &\longmapsto d^n_{B/A}(b)
\end{aligned}$$

Demostración. Sea $\delta := j \circ d^n_{B/R}$, de modo que δ es una R-derivación de B sobre R de orden n. Por tener llegada en $\Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi$, δ verifica $\delta(a) = 0$ para todo $a \in A$. Sabemos por la proposición anterior que $(\Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi, \delta)$ cumple la propiedad universal del módulo de diferenciales siempre que la derivación sobre la que actúa se anule en A.

Sea $\Psi_M : \operatorname{Hom}(\Omega^n_{B/A}, M) \to \operatorname{Hom}(\Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi, M)$ aplicación tal que si $h \in \operatorname{Hom}(\Omega^n_{B/A}, M)$ entonces $h \circ d^n_{B/A} = D = \delta \circ \Psi_M(h)$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d^n_{B/A}"'] \arrow[dr, "D"] & \frac{\Omega^n_{B/R}}{\operatorname{im}\varphi} \arrow[d, dashed, "\Psi_M(h)"] \\ \Omega^n_{B/A} \arrow[r, dashed, "h"] & M \end{tikzcd}$$

Sea $M = \Omega^n_{B/A}$ y consideramos $h = id_{\Omega^n_{B/A}}$, con lo que $D = d^n_{B/A}$. Esta derivación se anula en A, luego existe una única aplicación $\psi = \Psi_{\Omega^n_{B/A}}(h)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "d^n_{B/A}"'] & \frac{\Omega^n_{B/R}}{\operatorname{im}\varphi} \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & \Omega^n_{B/A} \end{tikzcd}$$

Tenemos así un homomorfismo $\psi : \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \to \Omega^n_{B/A}$ que verifica $d^n_{B/A}(b) = (\psi \circ \delta)(b) = \psi(d^n_{B/R}(b))$ y que es sobreyectiva porque todo elemento de $\Omega^n_{B/A}$ puede expresarse como $d^n_{B/A}(b) = \psi(\delta(b))$, imagen por ψ de un elemento de $\Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi$.

Así, cuando tratamos con derivadas nulas en A podemos identificar el conúcleo $(\Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi)$ con el módulo de diferenciales de orden n de B sobre A, $\Omega^n_{B/A}$ a través del homomorfismo ψ.

□

Mantendremos las definiciones dadas en este lema a lo largo de toda la sección.

Definición 3.4.4. Decimos que una aplicación ϕ es inversa por la izq. (resp. dch.) de otra aplicación φ cuando $\phi \circ \varphi = \mathrm{Id}$, (resp. $\varphi \circ \phi = \mathrm{Id}$).

Proposición 3.4.5. *Una aplicación R-lineal $\varphi : M \to N$ tiene inversa por la izquierda si, y solo si, la secuencia $0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \to \operatorname{coker}\varphi \to 0$ es exacta y escinde, lo que equivale a que φ sea inyectiva y $\operatorname{Im}\varphi \subset N$ sea un sumando directo de N.*

Demostración. Si partimos de que φ tiene inversa por la izquierda debe serinyectiva para que la inversa izq. esté bien definida, y $N = \operatorname{Im}\varphi \oplus \ker\varphi$ suma directa. Veamos la otra implicación:

Sea φ inyectiva y $K \subset M$ tal que $N = \operatorname{Im}\varphi \oplus K$ suma directa. Al considerar la aplicación φ con llegada en $\varphi(M)$ obtenemos un isomorfismo de R-módulos $\widehat{\varphi} : M \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi$. Definimos $\phi : N \to M$ como la aplicación que para cada $x \in \operatorname{Im}\varphi$, $y \in K$, actúa sobre $x + y = n \in N$ como $\phi(x+y) = \widehat{\varphi}^{-1}(x)$. De este modo, $\phi \circ \varphi\,(m) = \phi(\varphi(m)) = \widehat{\varphi}^{-1}(\varphi(m)) = m$ para cualquier $m \in M$. Para concluir que ϕ es la inversa por la izquierda de φ solo queda comprobar que es R-lineal:

- Sean $x, x' \in \operatorname{Im}\varphi$, $y, y' \in K$ entonces $\phi(x+y+x'+y') = \widehat{\varphi}^{-1}(x+x') = \widehat{\varphi}^{-1}(x) + \widehat{\varphi}^{-1}(x') = \phi(x) + \phi(x') = \phi(x+y) + \phi(x'+y')$.
- Sean $x \in \operatorname{Im}\varphi$, $y \in K$, $r \in R$, entonces $\phi(r(x+y)) = \phi(rx+ry) = \widehat{\varphi}^{-1}(rx) = r\widehat{\varphi}^{-1}(x) = r\phi(x) = r\phi(x+y)$.

$\square$

Proposición 3.4.6.

- *La aplicación $\varphi : B \otimes_A \Omega^n_{A/R} \to \Omega^n_{B/R}$ definida en el lema 3.4.3 tiene inversa por la izquierda si, y solo si, toda $D \in \operatorname{Der}^n_R(A, M)$ puede ser extendida a $\operatorname{Der}^n_R(B, M)$ para un B-módulo arbitrario M.*
- *Si $f : A \to B$ es sobreyectiva, $\varphi : B \otimes_A \Omega^n_{A/R} \to \Omega^n_{B/R}$ es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $t = \sum_i b_i \otimes d^n_{A/R}\, a_i \in \ker\varphi$. Consideramos la R-derivación $D \in \operatorname{Der}^n_R(A, B \otimes_A \Omega^n_{A/R})$ de A en $B \otimes_A \Omega^n_{A/R}$, extensible a una R-derivación $D^* \in \operatorname{Der}^n_R(B, B \otimes_A \Omega^n_{A/R})$ de B en $B \otimes_A \Omega_{A/R^n}$

$$\begin{aligned} D : A &\longrightarrow B \otimes_A \Omega^n_{A/R} \\ a &\longmapsto 1 \otimes d^n_{A/R}\,(a) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} D* : B &\longrightarrow B \otimes_A \Omega^n_{A/R} \\ a &\longmapsto 1 \otimes d^n_{A/R}\,(a) \end{aligned}$$

Sea $\phi : \Omega^n_{B/R} \to B \otimes_A \Omega^n_{A/R}$ el B-homomorfismo tal que $D^*(x) = \phi(d^n_{B/R}(x))$ para todo $x \in B$, cuya existencia está garantizada por la *propiedad universal del módulo de diferenciales*. Puesto que $t \in \ker\varphi$, en $\Omega^n_{B/R}$ tenemos

$$\varphi(t) = \varphi\left(\sum_i b_i \otimes d^n_{A/R}\, a_i\right) = \sum_i b_i \cdot d^n_{B/R}\, a_i = 0$$

Por ser ϕ homomorfismo, $\phi(0) = 0$ y se da la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} 0 = \phi(\varphi(t)) = \phi\left(\sum_i b_i \cdot d^n_{B/R}\, a_i\right) &= \sum_i b_i \cdot \phi(d^n_{B/R} a_i) \\ = \sum_i b_i \cdot D(a_i) = \sum_i b_i \cdot (1 \otimes d^n_{A/R} a_i) &= \sum_i b_i \otimes d^n_{A/R} a_i = t \end{aligned}$$

con lo que $t \in \ker\varphi \Rightarrow t = 0$ y por tanto llegamos a que φ es inyectiva, $\Omega^n_{B/R} = \operatorname{Im}\varphi \oplus \ker\varphi$ es suma directa y φ tiene inversa por la izquierda, que es ϕ:

$$\begin{aligned} (\phi\circ\varphi)\left(\sum_i (b_i \otimes d^n_{A/R} a_i)\right) = \phi\left(\sum_i (b_i \cdot d^n_{B/R}(f(a_i))\right) &= \sum_i b_i(\phi(d^n_{B/R}(f(a_i)))) \\ &= \sum_i b_i D^*(f(a_i)) = \sum_i (b_i \otimes d^n_{A/R} a_i) \end{aligned}$$

Veamos el recíproco: si existe $\phi : \Omega^n_{B/R} \to B \otimes \Omega^n_{A/R}$ homomorfismo de B-módulos tal que $(\phi\circ\varphi)(t) = t$ para todo $t \in B \otimes \Omega^n_{A/R}$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} (\phi\circ\varphi)\left(\sum_i (b_i \otimes d^n_{A/R}(a_i))\right) &= \phi\left(\sum_i (b_i \cdot d^n_{B/R}(f(a_i)))\right) \\ &= \sum_i b_i \cdot \phi(d^n_{B/R}(f(a_i))) \quad = \sum_i (b_i \otimes d^n_{A/R}(a_i)) \end{aligned}$$

y usando la última igualdad podremos extender cualquier derivación $D \in \operatorname{Der}^n_R(A, M)$ a una derivación $D^* \in \operatorname{Der}^n_R(B, M)$.

Para probar la segunda parte de la proposición basta observar que $\Omega^n_{B/R}$ es el módulo generado por elementos $d^n_{B/R}(b)$ con $b \in B$, por lo que si $f : A \to B$ es sobreyectiva podemos escribir todo elemento de $\Omega^n_{B/R}$ como combinación lineal de elementos de la forma $d^n_{B/R}(b) = 1 \cdot d^n_{B/R}(f(a)) = \varphi(1 \otimes d^n_{A/R}(a))$ y en consecuencia φ es sobreyectiva.

$\square$

Teorema 3.4.7. *Sean A y B R-álgebras, existe el isomorfismo*

$$B \otimes_R \Omega^n_{A/R} = \Omega^n_{(B\otimes_R A)/B}$$

Demostración. Sea $d := d^n_{A/R}$, definimos

$$\begin{aligned} D : B \otimes_R A &\longrightarrow B \otimes_R \Omega^n_{A/R} \\ b \otimes a &\longmapsto b \otimes d(a) \end{aligned}$$

D es entonces una B-derivación de orden n de $B \otimes A$ en $B \otimes_R \Omega^n_{A/R}$ y por tanto existe un B-homomorfismo $f : \Omega^n_{(B\otimes A)/B} \to B \otimes_R \Omega^n_{A/R}$ tal que $D = f \circ d^n_{(B\otimes A)/B}$. Sea

$$\begin{aligned} d_1 : A &\longrightarrow \Omega^n_{(B\otimes A)/B} \\ a &\longmapsto d^n_{(B\otimes A)/B}(1 \otimes a) \end{aligned}$$

R-derivación de orden n de A en $\Omega^n_{(B\otimes A)/B}$. Así, existe un A-homomorfismo $g : \Omega^n_{A/R} \to \Omega_{(B\otimes A)/B}$ tal que $d_1 = gd$. Es posible extender g a un B-homomorfismo

$$\begin{aligned} G : B \otimes \Omega^n_{A/R} &\longrightarrow \Omega_{(B\otimes A)/R} \\ b \otimes d(a) &\longmapsto b \cdot g(d(a)) \end{aligned}$$

Observamos que dado $b \otimes d(a) \in B \otimes_R \Omega^n_{A/R}$ se verifica

$$\begin{aligned} f \circ G(b \otimes d(a)) =& f(b \cdot g(d(a))) = f(b \cdot d_1(a)) = f(b \cdot d^n_{\frac{A\otimes B}{B}}(1 \otimes a)) \\ =& b \cdot D(1 \otimes a) = b \cdot (1 \otimes d(a)) = b \otimes d(a). \end{aligned}$$

y dado $d^n_{\frac{A\otimes B}{B}}(a \otimes b)$ se verifica

$$\begin{aligned} G \circ f(d^n_{\frac{A\otimes B}{B}}(a \otimes a)) =& G(D(a \otimes b)) = G(b \otimes d(a)) = b \cdot g(d(a)) \\ =& b \cdot d_1(a) = b \cdot d^n_{\frac{A\otimes B}{B}}(1 \otimes a) = d^n_{\frac{A\otimes B}{B}}(b \otimes a) \end{aligned}$$

Así queda comprobado que fG y Gf son las identidades en uno y otro conjunto, de donde se deduce el enunciado.

$\square$

Observación 3.4.8. De acuerdo con la proposición 3.4.6 y el teorema 3.4.9, si A y B son R-álgebras tal que podemos escribir $B = A/I$ para algún ideal $I \subset A$, entonces existe un homomorfismo natural de $\Omega^n_{((A/I)\otimes_R A)/(A/I)} = A/I \otimes_R \Omega^n_{A/R}$ en $\Omega^n_{(A/I)/R}$

Sea I un ideal de la R-álgebra A y sea $d := d^n_{A/R}$ la derivación canónica de orden n de A sobre R. La aplicación descrita abajo, η, es A-homomorfismo nulo en I^{n+1} e induce un R-homomorfismo de I/I^{n+1} en $A/I \otimes_A \Omega^n_{A/R}$.

$$\begin{aligned} \eta : I &\to A/I \otimes_A \Omega^n_{A/R} \\ a &\longmapsto 1 \otimes da \end{aligned}$$

Denotaremos $\mathfrak{N} := \langle \mathrm{im}(\eta) \rangle$ el A-submódulo de $A/I \otimes_A \Omega^n_{A/R}$ generado por $\mathrm{im}(\eta)$ y β será su inclusión en $A/I \otimes_A \Omega^n_{A/R}$.

Sea $\widehat{d} = d^n_{(A/I)/R}$ y sea $\overline{a}$ la clase de $a \in A$ módulo I. Consideramos la R-derivación $D \in \mathrm{Der^n_R(A, \Omega^n_{(A/I)/R})}$ definida por

$$\begin{aligned} D : A &\xrightarrow{d} \Omega^n_{A/R} \xrightarrow{f} \Omega^n_{(A/I)/R} \\ a &\mapsto d(a) \longmapsto \overline{d}(\overline{a}) \end{aligned}$$

y $h : \Omega^n_{A/R} \to \Omega^n_{(A/I)/R}$ A-homomorfismo tal que $h \circ d$. Por último, denotaremos τ el homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \tau : A/I \otimes_A \Omega^n_{(A/I)/R} &\to \Omega^n_{(A/I)/R} \\ \sum_i \overline{a}_i \otimes dx_i &\longmapsto \sum_i \overline{a}_i \widehat{d} x_i \end{aligned}$$

y fijamos $\alpha = \tau(1 \otimes h)$.

Teorema 3.4.9. *La siguiente sucesión es exacta:*

$$0 \to \mathfrak{N} \xrightarrow{\beta} (A/I) \otimes_A \Omega^n_{A/R} \xrightarrow{\alpha} \Omega^n_{(A/I)/R} \to 0 \tag{3.5}$$

Demostración. Basta comprobar que $\alpha \circ \beta = 0$, lo cual implica $\mathrm{im}\,\beta = \ker \alpha$.

Puesto que $\Omega^n_{A/R}$ es un A-módulo, podemos identificar $(A/I) \otimes_A \Omega^n_{A/R}$ con el módulo cociente $\Omega^n_{A/R}/I\Omega^n_{A/R}$, con lo que $\mathfrak{N}$ equivale a $D^n(I) + \Omega^n_{A/R}/I\Omega^n_{A/R}$ siendo $D^n(I)$ el submódulo de $\Omega^n_{A/R}$ generado por elementos de la forma dx con $x \in I$.

Siendo β la inclusión de $\mathfrak{N} = D^n(I) + \Omega^n_{A/R}/I\Omega^n_{A/R}$ en $\Omega^n_{A/R}/I\Omega^n_{A/R}$, para probar la exactitud de la sucesión (3.5) es suficiente ver que existe un isomorfismo entre $\operatorname{coker} \beta := (\Omega^n_{A/R}/I\Omega^n_{A/R})/\operatorname{im}\beta = \Omega^n_{A/R}/(D^n(I) + I\Omega^n_{A/R})$ y $\Omega^n_{(A/I)/R}$

$$\frac{\Omega^n_{A/R}}{D^n(I) + I\Omega^n_{A/R}} \simeq \Omega^n_{(A/I)/R} \tag{3.6}$$

Tanto $D^n(I)$ como $I\Omega^n_{A/R}$ pertenecen al núcleo de $\alpha : \Omega^n_{A/R}/I\Omega^n_{A/R} \to \Omega^n_{(A/I)/R}$, con lo que α induce un homomorfismo

$$\widehat{\alpha} : \frac{\Omega^n_{A/R}}{D^n(I) + I\Omega^n_{A/R}} \longrightarrow \Omega^n_{(A/I)/R}$$

Para comprobar que este homomorfismo es un isomorfismo, empezamos por considerar la siguiente R-derivación

$$D : \frac{A}{I} \to \frac{\Omega^n_{A/R}}{D^n(I) + I\Omega^n_{A/R}}$$
$$\bar{a} \longmapsto \overline{d(a)}$$

que está bien definida porque si $a \in I$, entonces $d(a) \in D^n(I) \subset D^n(I) + I\Omega^n_{A/R}$. Por la propiedad universal del módulo de diferenciales, existe un homomorfismo $\tau : \Omega^n_{(A/I)/R} \to A/I \otimes_A \Omega^n_{A/R}$

□

Corolario 3.4.10.

$$\Omega^n_{(A/I)/R} \simeq \frac{\Omega^n_{A/R}}{I\Omega^n_{A/R} + D^n(I)}$$

Demostración. Esto es exactamente el isomomorfismo 3.6 □

Ejemplo 3.4.11. Consideremos el módulo $A = R[x, y]$ junto con el ideal $I = \langle x^2 - y^3 \rangle$ generado por el polinomio $f(x, y) = x^2 - y^3 \in A$, y estudiemos para $A/I = R[x, y]/\langle x^2 - y^3 \rangle$ el módulo de dieferenciales de orden $n = 2$.

En primer lugar observamos que la base que denotábamos B_0 en el lema 3.3.1 se corresponde ahora con la base $\{dx, dy, d(x)d(y), (dx)^2, (dy)^2\}$. Esta es la base en la que trabajaremos, expresando el módulo de diferenciales de segundo orden como

$$\Omega^2_{A/R} = A\, dx \oplus A\, dy \oplus A\, dxdy \oplus A(dx)^2 \oplus A(dy)^2$$

La expresión de $d(f)$ en esta base es

$$d(f) = d(x^2 - y^3) = 2x \cdot dx - 3y^2 \cdot dy + 0 \cdot d(x)d(y) + 1 \cdot (dx)^2 - \frac{3}{2}y \cdot (dy)^2$$

Podemos entender $I = \langle\, x^2 - y^3 \,\rangle$ ideal de $A = R[x, y]$ generado por f como el conjunto $\{\, g = hf \mid h \in A \,\}$. También podemos ver I como R-módulo expresando cada $g \in I$ como una suma finita de elementos de la forma $x^i y^j f$. Es decir, entenderemos I como el R-módulo generado por $x^i y^j f$ con $i, j \in \mathbb{N}$.

Esta interpretación resulta conveniente para trabajar con $d(I)$, que solo cuenta con estructura de R-módulo y no de A-módulo. Así, $d(I) = d(\{\, g = hf \,|\, h \in A \,\}) = d(\{\textit{Sumas finitas de elementos } x^i y^j f\}) = \langle\, d(x^i y^j f) \,|\, i, j \in \mathbb{N} \rangle$ y para calcular $d(I)$ basta conocer las expresiones $d(x^i y^j f)$, que generan $d(I)$ como R-módulo.

Aplicando la regla del producto (3.1) y escribiendo $d(x^iy^jf)$ como $d(y^jx^{i-1}xf)$ o $d(x^iy^{j-1}yf)$ según convenga, obtenemos respectivamente las expresiones

$$y^jx^{i-1}d(xf) + xd(y^jx^{i-1}f) + fd(y^jx^i) - xfd(y^jx^{i-1}) - y^jx^{i-1}fd(x) - y^jx^id(f)$$
$$x^iy^{j-1}d(yf) + yd(x^iy^{j-1}f) + fd(x^iy^j) - yfd(x^iy^{j-1}) - x^iy^{j-1}fd(y) - x^iy^jd(f)$$

Aplicamos sucesivamente la regla del producto tantas veces como sea necesario para eliminar las potencias y sustituimos los términos en $d(xy)$ haciendo uso de los cálculos ya desarrollados en la demostración de la proposición 3.2.6, que nos daban la realción $d(xy) = xd(y) + yd(x) + d(x)d(y)$. Llegamos así a una expresión de $[I\Omega^2_{A/R} + d(I)]$ en términos de

$$\{fd(x), fd(y), fd(x)d(y), fd(x)^2, fd(y)^2\} \cup \{d(f), d(xf), d(yf)\}$$

Concluimos que

$$\frac{A}{I} \otimes \Omega^2_{A/R} = \Omega^2_{(A/I)/R} \simeq \frac{\Omega^2_{A/R}}{I\Omega^2_{A/R} + D^2(I)}$$

está generado por el A-módulo

$$\Omega^2_{A/R} = A\,dx \oplus A\,dy \oplus A\,dxdy \oplus A(dx)^2 \oplus A(dy)^2$$

cocientado por

$$Afd(x) + Afd(y) + Afd(x)d(y) + Afd(x)^2 + Afd(y)^2 + Ad(f) + Ad(xf) + Ad(yf)$$

si lo consideramos como A-módulo, y cocientado por

$$\frac{A}{I}d(f) + \frac{A}{I}d(xf) + \frac{A}{I}d(yf)$$

si lo consideramos como A/I-módulo.

Con esta última expresión, conocido $\Omega^2_{A/R}$ basta calcular los términos $d(f)$, $d(xf)$ y $d(yf)$ para conocer también $\Omega^2_{(A/I)/R}$.

$$\begin{aligned}
d(f) =& 2x \cdot dx - 3y^2 \cdot dy + 0 \cdot d(x)d(y) + 1 \cdot (dx)^2 - \frac{3}{2}y \cdot (dy)^2 \\
d(xf) =& (2x^2 - y^3)dx - 3xy^2dy - y^2d(x)d(y) + \frac{3x + y^3x}{2}(dx)^2 - \frac{3xy}{2}(dy)^2 \\
d(yf) =& (2xy)dx + (x^2 - 4y^3)dy + xd(x)d(y) + y(dx)^2 - 2y^2(dy)^2
\end{aligned}$$

Estos términos son en general fáciles de calcular porque coinciden con el desarrollo del polinomio de Taylor.

3.4.1. Otros resultados

En esta última sección trataremos de ir un poco más allá del caso de dos R-álgebras A y B relacionadas mediante un R-homomorfismo $f : A \to B$ que hemos trabajado en la sección previa. Más precisamente, haremos una breve incursión en el estudio de los módulos de diferenciales de orden superior cuando trabajamos con R-derivaciones de B en M que se anulan en todo A y la forma de presentarlos en forma de sucesiones exactas.

Comenzaremos por determinar el núcleo del homomorfismo φ presentado en el lema 3.4.3 haciendo uso de la siquiente proposición:

Proposición 3.4.12. *Dado un orden n, sea $D^{(n)} \in \mathrm{Der}^n_R(B, M)$ fijo y M un B-módulo arbitrario, para cualquier $a \in A$ se cumple que $\rho(a) = [D^{(n)}, a] \in \mathrm{Der}^{n-1}_R(B, M)$ y la aplicación ρ es un elemento de $\mathrm{Der}^{n-1}_R(A, \mathrm{Der}^{n-1}_R(B, M))$.*

$$
\begin{aligned}
\rho : A &\longrightarrow \mathrm{Der}^{n-1}_R(B, M)\\
a &\longmapsto \quad [D^{(n)}, a] \;\; : \;\; B \longrightarrow M\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad b \longmapsto D^{(n)}(ab) - aD^{(n)}(b) - bD^{(n)}(a)
\end{aligned}
$$

Demostración. Nos será útil notar que un elemento $\Delta \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ es derivación de orden n si, y solo si, $[\Delta, a]$ es derivación de orden $n - 1$ para cualquier $a \in A$, como hemos probado en el teorema 3.2.5. De hecho, esto es suficiente para probar la primera parte de la proposición.

Para probar la segunda parte realizaremos un proceso inductivo sobre n, considerando $\rho : A \longrightarrow \mathrm{Der}^{n-1}_R(B, M)$ y una derivación $D^{(n)} \in \mathrm{Der}^n_R(B, M)$.

El caso $n = 1$ es trivial porque $D^{(1)}(a) = 0 \quad \forall\, a \in A$, luego $[D^{(1)}, a](b) = aD^{(1)}(b) + bD^{(1)}(a) - aD^{(1)}(b) - bD^{(1)}(a) = 0 \quad \forall\, b \in B$; $[D^{(1)}, a]$ es idénticamente nula para todo $a \in A$ y por tanto $\rho \equiv 0$.

Tomamos como hipótesis de inducción que la aplicación ρ correspondiente a $n-1$, que denotaremos ρ_0, es tal que $\rho_0 \in \mathrm{Der}^{n-2}_R(A, \mathrm{Der}^{n-2}_R(B, M))$. Nuestro objetivo es probar que $[\rho, x] \in \mathrm{Der}^{n-2}_R(A, \mathrm{Der}^{n-1}_R(B, M))$ para todo $x \in A$, lo que equivale a $\rho \in \mathrm{Der}^{n-1}_R(A, \mathrm{Der}^{n-1}_R(B, M))$.

Sea x un elemento fijo de A y $D^{(n)} \in \mathrm{Der}^n_R(B, M)$ la derivación con la que construimos ρ, entonces $D^{n-1} := [D^n, x] \in \mathrm{Der}^{n-1}_R(B, M)$. Observamos que al constuir ρ_0 a partir de esta derivación $D^{(n-1)}$ y aplicarlo a un $a \in A$ cualquiera obtenemos la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}\rho_0(a) = [[D^n, x], a] =& [D^n, xa] - x[D^n, a] - a[D^n, x] \\ =& \ \rho(xa) \ - \ x\rho(a) \ - \ a\rho(x) \ = [\rho, x](a)\end{aligned}$$

Como actúan igual sobre los elementos $a \in A$, deducimos que $[\rho, x] = \rho_0$. Por hipótesis de inducción $\rho_o \in \mathrm{Der}_R^{n-2}(A, \mathrm{Der}_R^{n-1}(B, M))$ y teniendo en cuenta que $\mathrm{Der}_R^{n-2}(B, M) \subset \mathrm{Der}_R^{n-1}(B, M)$ se deduce que $[\rho, x] \in \mathrm{Der}_R^{n-2}(A, \mathrm{Der}_R^{n-1}(B, M))$, como queríamos ver.

$$[\rho, x] \in \mathrm{Der}_R^{n-2}(A, \mathrm{Der}_R^{n-1}(B, M))] \Rightarrow \rho \in \mathrm{Der}_R^{n-1}(A, \mathrm{Der}_R^{n-1}(B, M))]$$

□

Observación 3.4.13. Si D se anula en A lo mismo se cumple para $\rho(a)$, ya que $[D, a](b) = D(ab) - aD(b) - bD(a) = aD(b) + bD(a) - aD(b) = bD(a) = 0$.

Siguiendo la notación de Nakai [5], enotaremos $\widehat{\mathrm{Der}_R}^{n-1}(B, M)$ el conjunto de R-derivaciones de orden n de B en M que se anulan en A.

Corolario 3.4.14. *Si D se anula en A entonces* $\rho \in \mathrm{Der}_R^{n-1}(A, \widehat{\mathrm{Der}_R}^{n-1}(B, M))$

Denotaremos las derivaciones que se anulen en A como δ en lugar de d, de modo que $[\delta, a](b) = \delta(ab) - a\delta(b) - b\delta(a) = \delta(ab) - b\delta(a)$. Aplicaremos el corolario 3.4.14 a la R-derivación fija $\delta : B \to \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi$, nula en A.

$$\begin{aligned}\rho : A &\longrightarrow \mathrm{Der}_R^{n-1}(B, \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi) \\ a &\longmapsto \ \rho_a : B \longrightarrow \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \\ &\qquad\qquad b \longmapsto \delta(ab) - a\delta(b)\end{aligned}$$

Así ρ es un elemento de $\mathrm{Der}_R^{n-1}(A, \widehat{\mathrm{Der}_R}^{n-1}(B, \Omega^n_{B/A}))$ y existe un homomorfismo $\rho^*_a : \Omega^{n-1}_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \to \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi$ tal que $\rho^*_a \circ \delta^{n-1} = \rho_a$, es decir

$$\begin{aligned}\rho^* : A &\longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega^{n-1}_{B/R}/\operatorname{im}\varphi, \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \\ a &\longmapsto \ \rho^*_a : \Omega^{n-1}_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \longrightarrow \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \\ &\qquad\qquad \delta^{n-1}(b) \mapsto \delta(ab) - a\delta(b)\end{aligned}$$

ρ^* es una R-derivación de orden $n-1$ de A en $\mathrm{Hom}_B(\Omega^{n-1}_{B/R}/\operatorname{im}\varphi, \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi$ y por tanto existe un homomorfismo $h : \Omega^{n-1}_{A/R} \to \mathrm{Hom}_B(\Omega^{n-1}_{B/R}/\operatorname{im}\varphi, \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi$ tal que $\rho^* = h \circ d^{n-1}_{A/R}$.

De las identidades $\rho^*_a \circ \delta^{n-1} = \rho_a$ y $\rho^* = h \circ d^{n-1}_{A/R}$ se sigue que para todo $a \in A$, $b \in B$

$$h(d^{n-1}_{A/R}(a))(\delta^{n-a}(b)) = \rho^*_a(\delta^{n-a}(b)) = \rho_a(b) = \delta(ab) - a\delta(b)$$

y dado que existe una biyección canónica

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega^{n-1}_{A/R}, \mathrm{Hom}_B(\Omega^{n-1}_{B/R}/\operatorname{im}\varphi, \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi)) \simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega^{n-1}_{A/R} \otimes_A \Omega^{n-1}_{B/R}/\operatorname{im}\varphi, \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi)$$

obtenemos que en la parte de la derecha existe un σ tal que

$$\begin{aligned}\sigma(d^{n-1}_{A/R}(a) \otimes \delta^{n-1}(b)) =& h(d^{n-1}_{A/R}(a))(\delta^{n-1}(b))\\ =& \delta(ab) - a\delta(b)\end{aligned}$$

Nos encontramos en condiciones de formular el siguiente teorema:

Teorema 3.4.15. *Sean A y B R-álgebras, las siguientes sucesiones son exactas:*

$$B \otimes_A \Omega^n_{A/R} \xrightarrow{\varphi} \Omega^n_{B/R} \xrightarrow{j} \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \to 0 \tag{3.7}$$

$$\Omega^{n-1}_{A/R} \otimes_A \Omega^{n-1}_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \xrightarrow{\sigma} \Omega^{n-1}_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \xrightarrow{\psi} \Omega^n_{B/A} \to 0 \tag{3.8}$$

Demostración. La primera sucesión es exacta por construcción (lema 3.4.3).
Para probar la exactitud de la segunda sucesión empezamos por observar que $\operatorname{im}\sigma \subset \ker\psi$, ya que todos los elementos de $\operatorname{im}\sigma$ son de la forma

$$\delta^n(ab) - a \cdot \delta^n(b) = b \cdot \delta^n(a) = 0$$

Sea $\eta : \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \to \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi/\operatorname{im}\sigma$ homomorfismo que cumple $\operatorname{im}\sigma = \ker\eta$ y, manteniendo la notación $\delta := \delta^n_{(B/A)/R}$, sea D la aplicación dada por $D = \eta \circ \delta : B \to \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi/\operatorname{im}\sigma$.

$$D : B \xrightarrow{\delta} \Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi \xrightarrow{\eta} \frac{\Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi}{\operatorname{im}\sigma} (= \operatorname{Coker}\sigma)$$

Entonces D es una R-derivación de B en $\Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi/\operatorname{im}\sigma$ de orden n verificando $D(a) = 0$ y por tanto $Da - aD = 0$ para todo $a \in A$. Así, para todo elemento $b \in B$

$$\begin{aligned}(Da - aD)(b) =& D(ab) - aD(b) = \eta \circ \delta\,(ab) - a \cdot\ \eta \circ \delta\,(b)\\ =& \eta((\delta a - a\delta)(b)) = \eta(\sigma(d^{n-1}_{A/R}(a) \otimes d^{n-1}_{B/R}(b))) = 0\end{aligned}$$

D es entonces una A-derivación contenida en $\widehat{\mathrm{Der}}^n_R(B, \operatorname{Coker}\sigma)$ donde por definición $\operatorname{Coker}\sigma = \frac{\Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi}{\operatorname{im}\sigma}$.

Sea g el B-homomorfismo de $\Omega^n_{B/A}$ en $\operatorname{Coker}\sigma = \frac{\Omega^n_{B/R}/\operatorname{im}\varphi}{\operatorname{im}\sigma}$ tal que $g \circ \delta^n_{B/A} = D$.

$$\begin{tikzcd}
& \Omega^n_{B/R} \arrow[d] \\
B \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "\delta^n_{B/A}"] \arrow[dr, "D"'] & \Omega^n_{B/A} \arrow[d, dashed, "g"] \\
& \operatorname{Coker}\sigma
\end{tikzcd}$$

Consideramos un elemento de $\ker\psi$ de la forma $\sum_i b_i{\cdot}\delta(\beta_i)$ con $b_i, \beta_i \in B$ para todo $i \in I$. Como $\sum_i b_i \cdot \delta(\beta_i) \in \ker\psi$, de la igualdad $\psi\left(\sum_i b_i \cdot \delta(\beta_i)\right) = 0$ deducimos

$$0 = \sum_i b_i{\cdot}d(\beta_i) = \sum_i b_i{\cdot}\delta^n_{B/A}(\beta_i) = \sum_i b_i{\cdot}D(\beta_i) = \sum_i b_i{\cdot}\eta\delta(\beta_i) = \eta\left(\sum_i b_i \cdot \delta(\beta_i)\right)$$

Con esto probamos que $\sum_i b_i \cdot \delta(\beta_i) \in \ker(\eta) = \operatorname{im}\sigma$ y dado que sabemos por el lema 3.4.3 que ψ es sobreyectiva, queda probada la exactitud de 3.8. $\square$

Pasando al dual, obtenemos inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 3.4.16. *Sea $\widehat{\operatorname{Der}}^n_R(B/A))$ el submódulo de $\operatorname{Der}^n_R(B)$ formado por todos los elementos $D \in \operatorname{Der}^n_R(A)$ tal que $D(a) = 0$ para todo $a \in A$. Definiendo τ por $\tau(D) = Da - aD$ para todo $a \in A$, son exactas las dos sucesiones siguientes:*

$$0 \to \widehat{\operatorname{Der}}^n_R(B/A), B) \to \operatorname{Der}^n_R(B, B) \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Der}^n_R(A, B) \tag{3.9}$$

$$0 \to \operatorname{Der}^n_A(B, B)) \to \widehat{\operatorname{Der}}^n_R(B/A)) \xrightarrow{\tau} \operatorname{Der}^{n-1}_R(A, \widehat{\operatorname{Der}}^{n-1}_R(B/A))) \tag{3.10}$$

Apéndice A

Lema de la Serpiente

Lema A.0.1 (Lema de la serpiente)**.**

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "u_2"] & M3 \arrow[d, "u_3"] \\
N1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3
\end{tikzcd}$$

Sea el diagrama superior un diagrama conmutativo de homomorfismos de A-módulos con sucesiones exactas en sus filas. Entonces hay una única extensión del diagrama a un un nuevo diagrama conmutativo como sigue, donde las sucesiones verticales son sucesiones exactas natirales asociadas a u_1, u_2, u_3*:*

$$\begin{tikzcd}
\ker u_1 \arrow[r, "f_1'"] \arrow[d] & \ker u_2 \arrow[r, "f_2'"] \arrow[d] & \ker u_3 \arrow[d] \\
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "u_2"] & M3 \arrow[d, "u_3"] \\
N1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d] & N_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d] & N_3 \arrow[d] \\
coker u_1 \arrow[r, "\overline{g_1}"] & coker U_2 \arrow[r, "\overline{g_2}"] & coker U_3
\end{tikzcd}$$

Se cumplen además las siguientes propiedades:

1. $f_2' \circ f_1' = 0$ *y* $\overline{g_2} \circ \overline{g_1} = 0$
2. *Si* g_1 *es inectiva, entonces la fila superior es una sucesión exacta.*
3. *Si* f_2 *es sobreyectiva, entonces la fila de abajo es una sucesión exacta.*

4. *Sea* g_1 *inyectiva y* f_2 *sobreyectiva. Entonces existe un homomorfismo de A-módulos* $d : \ker u_3 \to$ *coker*u_1 *que se define de la siguiente manera:*
   Tomamos $x_3 \in \ker u_3 \subset M_3$ *y elegimos una de sus preimágenes por* f_2*,* $x_2 \in M_2$*. Entonces* $u_2(x_2) \in \ker g_2 = \mathrm{Im}_{g_1}$ *y hay algún* $y_1 \in N_1$ *tal que* $g_1(y_1) = u_2(x_2)$*, con lo que hacemos corresponder* $d(x_3)$ *con la clase de residuos* $\overline{y_1}$ *de* y_1 *en* $\operatorname{coker} u_1$*.*

5. *En las condiciones del apartado anterior, las sucesión exactas de (2.) y (3.) dan lugar a la siguiente sucesión exacta:*

$$\begin{tikzcd}
\ker u_1 \arrow[r, "f_1'"] & \ker u_2 \arrow[r, "f_2'"] & \ker u_3 \arrow[dll, "d"] \\
\operatorname{coker} u_1 \arrow[r, "\overline{g_1}"] & \operatorname{coker} u_2 \arrow[r, "\overline{g_2}"] & \operatorname{coker} u_3
\end{tikzcd}$$

Apéndice B

Existencia y unicidad del producto tensorial

Para probar la existencia y unicidad del producto tensorial empezamos justificando que, caso de existir, este es único. Suponiendo conocidos todos los tensores $x \otimes y$ en $M \otimes_R N$ con $x \in M$, $y \in N$, veamos que es posible reconstruir la aplicación natural τ:

Lema B.0.1 (Unicidad)**.** *Los productos tensoriales quedan determinados por la propiedad universal de manera única salvo isomorfismos.*

Demostración. Supongamos que existen dos productos tensoriales de M y N sobre R que verifican la propiedad universal, llamémoslos τ y τ':

$$\tau : M \times N \longrightarrow T \qquad\qquad \tau' : M \times N \longrightarrow T'$$

Puesto que τ' es bilineal, la propiedad universal apicada a τ asegura que existe una única aplicación R-lineal $\varphi : T \to T'$ tal que $\tau' = \varphi \circ \tau$.

Análogamente, existe una única $\psi : T' \to T$ R-lineal tal que $\tau = \psi \circ \tau'$.

Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\tau'"'] & T \arrow[dl, dashed, bend left, "\varphi"'] \\ T' \arrow[ur, dashed, bend right, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Aplicando la propiedad universal al primero de los productos tensoriales, considerando que la aplicación $\tau : M \times N \to T$ es R-bilineal, obtenemos

$$\mathrm{id}_T \circ \tau = \tau = \psi \circ \tau' = \psi \circ (\varphi \circ \tau) = (\psi \circ \varphi) \circ \tau$$

de modo que tanto $\psi \circ \varphi$ como id_T hacen el diagrama conmutativo. La unicidad garantizada por la propiedad universal permite deducir $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_T$.
Análogamente, de la cadena de igualdades

$$\mathrm{id}_{T'} \circ \tau' = \tau' = \varphi \circ \tau = \varphi \circ (\psi \circ \tau') = (\varphi \circ \psi) \circ \tau'$$

se deduce $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{T'}$. $\square$

Observación B.0.2. Sean M, N módulos de generación finita sobre el anillo R, no necesariamente libres. Sean $(m_1, ..., m_k)$, $(n_1, ..., n_l)$ generadores de M y de N, respectivamente. Entonces $\{m_i \otimes n_j\}_{i,j}$ es un conjunto de generadores de $M \otimes_R N$ y para determinar los valores de una aplicación bilineal $\varphi : M \times N \to P$ cualquiera, basta conocer los valores de $\varphi(m_i, n_j)$ para $i \in \{1, ..., k\}$, $j \in \{1, ..., l\}$ y extender linealmente la aplicación:

$$\varphi(r_1 m_1 + ... + r_k m_k,\ s_1 n_1 + ... + s_l n_l) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} r_i s_j \cdot \varphi(m_i, n_j)$$

Ahora bien, no podemos elegir los $\varphi(m_i, n_j)$ de manera totalmente arbitraria, porque si los módulos no son libres existen relaciones entre los generadores que φ debe respetar. Así, si se diera la relación $2s_1 + 3s_2 = 0$ en M, tendríamos que exigir que se verificase $2\varphi(m_1, n_j) + 3\varphi(m_2, n_j) = 0$ para todo $j \in \{1, ..., l\}$. De ahí surge la necesidad a la hora de construir el producto tensorial de tomar el submódulo generado por todas las relaciones y considerar únicamente las aplicaciones lineales que se anulan en él, dando lugar a la expresión del producto tensorial como cociente que veremos en la demostración de la siguiente proposición.

Proposición B.0.3 (Existencia)**.** *Para cualquier pareja de M, N R-módulos arbitrarios, existe el producto tensorial $T = M \otimes_R N$.*

Demostración. Consideramos $R^{M \times N} := \prod_{(m,n) \in M \times N} R(m, n)$ el R-módulo de las combinaciones lineales finitas de elementos de $M \times N$, compuesto por sumas de la forma

$$r_1(m_1, n_1) + ... + r_k(m_k, n_k)$$

con $k \in \mathbb{N}$, $r_1, ..., r_k \in R$ y $(m_i, n_i) \in M \times N$ para $i = 1, ..., k$ distintos dos a dos. Podemos interpretarlo como el conjunto de aplicaciones de $M \times N$ en R que toman valores nulos para casi todo elemento, considerando que el valor que toma (m_i, n_i) en cada uno de los $i = 1, ..., k$ es el r_i correspondiente. Siguiendo esta idea, denotaremos el módulo por $R^{(M \times N)}$

$$R^{(M \times N)} := \bigoplus_{(m,n) \in M \times N} R(m, n)$$

Todos los elementos $(m,n) \in M \times N$ son independientes en $R^{(M\times N)}$, ya que al tratarse de una suma directa de copias de R lo que tenemos es una base $\{(m,n)\}_{(m,n)\in M\times N}$ del módulo $R^{(M\times N)}$. Para construir el producto tensorial tenemos que añadir algunas relaciones que transformen las combinaciones lineales en combinaciones bilinales. Así, consideramos $S \subset R^{(M\times N)}$ el submódulo generado por las expresiones del tipo

$$\begin{array}{cc} (m+m',n)-(m,n)-(m',n) & (rm,n)-r(m,n) \\ (m,n+n')-(m,n)-(m,n') & (m,rn)-r(m,n) \end{array}$$

donde $r \in R$, $m,m' \in M$, $n,n' \in N$. Esta es la menor clase módulo S o menor submódulo de $R^{(M\times N)}$ tal que las clases de residuos $[(m,n)]$ en el cociente $R^{M\times N}/S$ adquieren la propiedad universal de los tensores.

Fijando $T = R^{(M\times N)}/S$, la aplicación canónica $\tau : M \times N \longrightarrow T$ que envía el par (m,n) a la clase de residuos $[(m,n)] \in T$ es R-bilineal por construcción. Para comprobar que T junto con la aplicación τ es un producto tensorial de M y N sobre R, verificamos que se cumple la propiedad universal del producto tensorial:

Sea $\Phi : M \times N \longrightarrow E$ aplicación R-bilineal y sea $\hat{\varphi} : R^{(M\times N)} \to E$ la aplicación R-lineal asociada tal que $\hat{\varphi}([(m,n)]) = \Phi(m,n)$ para la base $(m,n) \in R^{(M\times N)}$; cuyos valores para el resto de $R^{(M\times N)}$ se obtienen por extensión R-lineal.

$$\hat{\varphi}(r_1[(m_1,n_1)] + ... + r_k[(m_k,n_k)]) = r_1\Phi(m_1,n_1) + ... + r_k\Phi(m_k,n_k)$$

La R-bilinealidad de Φ asegura que $\ker\hat{\varphi}$ contiene todos los elementos generadores de $S \subset \ker\hat{\varphi}$ considerados anteriormente, de modo que $\hat{\varphi}$ induce una aplicación R-lineal bien definida $\varphi : R^{(M\times N)}/S \to E$ tal que $\Phi = \varphi \circ \tau$.

$$\begin{tikzcd} \tau : M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "\phi"'] & R^{(M\times N)} \arrow[r] \arrow[d, "\hat{\varphi}"] & R^{(M\times N)}/S \arrow[dl, "\varphi"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Por último, observamos que φ queda unívocamente determinado por la relación $\Phi = \varphi \circ \tau$. En efecto, la clases de residuos $[(m,n)]$ para $(m,n) \in M \times N$ genera $R^{(M\times N)}/S$ como R-módulo y resulta

$$\varphi([(m,n)]) = \varphi(\tau(m,n)) = \Phi(m,n)$$

de modo que $\varphi([m,n])$ es conjunto de generadores de $T = \frac{R^{(M\times N)}}{S}$, con lo que φ queda unívocamente determimado y T también es único. Se satisface la propiedad universal, por lo que concluimos que el módulo T considerado con la aplicación τ es un producto tensorial. $\square$

En la práctica rara vez se utiliza la construcción dada en la demostración porque suele ser más útil obtener la información necesaria de la propiedad universal.

Bibliografía

[1] Siegfried Bosch. *Algebraic geometry and commutative algebra*. Universitext. Springer, London, [2022] ©2022. Second edition.

[2] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[3] Andreas Gathmann. *Commutative Algebra, class notes TU Kaiserslautern*. [2014].

[4] Yoshikazu Nakai. On the theory of differentials in commutative rings. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 13(1):63 – 84, 1961.

[5] Yoshikazu Nakai. High order derivations. I. *Osaka Math. J.*, 7:1–27, 1970.