Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Álgebras de Banach y teoría espectral

Autora: Irene Lago Merino
Tutor: Fernando Gómez Cubillo
Curso 2023-2024

Índice

Resumen e introducción

Resumen y abstract

RESUMEN: En este trabajo se presentan las álgebras de Banach, estructura base de la teoría de Gelfand. Se tratan los homomorfismos entre álgebras de Banach, en particular los homomorfismos complejos, que formarán el espectro del álgebra. En estas álgebras se define y estudia el espectro y el radio espectral de cada elemento. Dotando a las álgebras de Banach con una involución se llega a un caso particular interesante, las C*-álgebras. Se estudia la teoría de Gelfand para $*$-álgebras conmutativas, relacionando sus ideales maximales con los elementos de su espectro. El teorema de Gelfand-Naimark caracteriza las C*-álgebras conmutativas estableciendo un isomorfismo isométrico con el espacio de las funciones continuas en su espectro dotado de cierta topología por medio de la transformada de Gelfand. Se introducen los espacios con producto interno y sus completados, los espacios de Hilbert. El espacio de operadores acotados en un espacio de Hilbert es una C*-álgebra. Se presentan dos versiones del teorema espectral para una C*-subálgebra unitaria de este espacio de operadores, un caso particular para operadores normales, una versión para el caso no unitario y una versión para una $*$-álgebra de Banach conmutativa abstracta.

ABSTRACT: This paper presents Banach algebras, the basic structure of Gelfand's theory. The homomorphisms between Banach algebras are treated, in particular the complex homomorphisms, which will form the spectrum of the algebra. In these algebras, the spectrum and the spectral radius of each element are defined and studied. By endowing Banach algebras with an involution we arrive at an interesting particular case, the C*-algebras. The Gelfand theory for commutative $*$-algebras is studied, relating their maximal ideals to the elements of their spectrum. The Gelfand-Naimark theorem characterises commutative C*-algebras by establishing an isometric isomorphism with the space of continuous functions in their spectrum endowed with a certain topology by means of the Gelfand transform. The spaces with inner product and their completes, the Hilbert spaces, are introduced. The space of bounded operators on a Hilbert space is a C*-algebra. Two versions of the spectral theorem are presented for a unitary C*-subalgebra of this operator space, a particular case for normal operators, a version for the non-unitary case and a version for an abstract commutative Banach $*$-algebra.

Introducción

La teoría de álgebras de Banach conmutativas se empieza a desarrollar alrededor de 1940 por el matemático Israel M. Gelfand, aunque con el nombre de anillos normados conmutativos. Tal y como las define Gelfand, un álgebra de Banach es un espacio de Banach complejo donde se define un producto con la propiedad asociativa, permutable con el producto por escalares complejos, distributivo respecto a la suma y continuo en cada factor. En el primer capítulo de este trabajo se tratarán resultados para estas álgebras en el caso general no conmutativo. Gelfand muestra en [8] junto a Dmitri A. Raikov y George E. Shilov que la ausencia de un elemento neutro en un álgebra de Banach se puede remediar construyendo una extensión unitaria de esta, como se verá en este trabajo en (1.2).

En el caso de las álgebras de Banach unitarias en las que se puede definir el concepto de elemento invertible, Stanislaw Mazur publica previamente sin demostración en [10] en 1938 el teorema de Gelfand-Mazur, que se verá en (1.18). Este teorema establece un isomorfismo isométrico entre las álgebra de Banach unitarias donde todo elemento no nulo es invertible y el álgebra de los números complejos.

Gelfand y Naimark estudian en 1943 en el texto [5] las álgebras de Banach a las que se les puede dotar de una involución, llegando a enunciar el teorema de Gelfand-Naimark (3.12). Este teorema asegura que existe un isomorfismo isométrico entre un álgebra de Banach conmutativa con involución cumpliendo ciertas propiedades y el conjunto de funciones continuas en el espacio de ideales maximales del álgebra dotado de cierta topología. En el tercer capítulo de este trabajo se verá que la hipótesis que debe cumplir el álgebra para poder enunciar el teorema es que sea una C*-álgebra.

Gelfand, Raikov y Shilov estudian las representaciones de álgebras de Banach con involución también en el caso no conmutativo en el capítulo VIII de [8]. La representación de un álgebra será, como se ve en el quinto capítulo de este trabajo, una aplicación con llegada en el espacio de operadores acotados en un espacio de Hilbert que conserva las operaciones de espacio vectorial, el producto de elementos del álgebra y la involución. Este capítulo era un apéndice en el texto original [7] publicado en 1946, y se apoyó en las ideas del texto de Gelfand y Raikov en [6] de 1943.

El trabajo consta de cinco capítulos siguiendo principalmente las ideas de los capítulos 10, 11 y 12 del texto de Walter Rudin [13] y el primer capítulo del texto de Gerald B. Folland [4], teniendo más relevancia este último en el quinto capítulo del trabajo.

En el primer capítulo, *Álgebras de Banach*, se describen estas álgebras en la primera sección, pasando por la construcción de una extensión a un álgebra unitaria en el caso no unitario. En esta sección se ve que la definición que se da es equivalente a la dada por

Gelfand en [8] cuando define los anillos normados. En la segunda sección se estudian los homomorfismos entre álgebras de Banach, siendo los homomorfismos complejos un caso particular que tendrá relevancia cuando se defina el espectro de un álgebra en el tercer capítulo. Se define también el concepto de invertibilidad para elementos de un álgebra de Banach unitaria y se dan condiciones de invertibilidad que resultarán de gran utilidad en demostraciones de capítulos posteriores. En la tercera sección se definen el espectro y el radio espectral de los elementos de un álgebra de Banach unitaria. Esta sección termina con el teorema de Gelfand-Mazur.

En el segundo capítulo, *C*-álgebras*, se define y estudia la involución en un álgebra compleja, y con ella surge la definición de $*$-homomorfismo. Se define un caso particular de álgebras de Banach con involución, las C*-álgebras. Por último se continúa con el razonamiento visto en el primer capítulo para extender el caso no unitario a uno unitario conservando la estructura de C*-álgebra.

El tercer capítulo, *Teoría de Gelfand*, se centra en el caso de álgebras de Banach unitarias conmutativas. El capítulo comienza con la definición del espectro de un álgebra y algunas propiedades de este. La primera sección es un estudio de los ideales de un álgebra compleja conmutativa. Este estudio es relevante pues, como se ve en el último resultado de la sección, los ideales maximales de un álgebra de Banach unitaria conmutativa forman el espectro de dicho álgebra. En la segunda sección se define y estudia la transformada de Gelfand para llegar al teorema de Gelfand-Naimark, que asegura que esta es un isomorfismo isométrico que conserva la involución. Por último se sigue con las ideas de la extensión de un álgebra no unitaria a una unitaria para adaptar la teoría de Gelfand a este caso.

En la primera sección del cuarto capítulo, *Operadores acotados en espacios de Hilbert*, se tratan resultados útiles para el desarrollo del trabajo sobre espacios con producto interno y espacios de Hilbert. En esta sección destaca el teorema de Riesz que establece una isometría lineal conjugada entre un espacio de Hilbert y el espacio de funcionales lineales acotados en este. En la segunda sección se estudia el espacio de operadores lineales acotados en un espacio de Hilbert, probando que se puede definir una involución en este, que hace que sea una C*-álgebra.

En el quinto capítulo, *El teorema espectral*, se dan diferentes versiones del teorema espectral para $*$-álgebras de Banach conmutativas de operadores acotados en un espacio de Hilbert. En la primera sección se trata la primera versión del teorema, enunciada para C*-álgebras de Banach conmutativas unitarias. La sección se desarrolla con la construcción de la medida espectral que el enunciado del teorema afirma que existe. En la segunda sección se ve la segunda versión del teorema para C*-algebras de Banach conmutativas unitarias, y se mejoran con esta resultados de convergencia. En la tercera sección se estudia el cálculo funcional continuo en el espacio de operadores normales como consecuencia de la primera versión del teorema. En la última sección se da una versión del teorema espectral para C*-álgebras no unitarias no degeneradas y se usa esta para demostrar una versión para $*$-álgebras de Banach conmutativas abstractas con una $*$-representación no degenerada en el espacio de operadores acotados en un espacio de Hilbert.

Además se incluyen dos apéndices al final del trabajo tomados del tercer capítulo del texto de Walter Rudin [13]. El apéndice sobre topología débil se necesita para tratar conceptos topológicos en el espacio dual de un álgebra de Banach y por tanto en su espectro. El segundo apéndice describe los conceptos de holomorfía e integración para funciones con llegada en espacios vectoriales topológicos, necesarios en la demostración de que el espectro de un elemento es no vacío.

1. Álgebras de Banach

En este primer capítulo se tratarán las álgebras de Banach, estructura que será la base de todo el trabajo. En la primera sección se verá que, si estas carecen de elemento neutro, se pueden relacionar con un álgebra de Banach con elemento neutro conservando muchas propiedades de la original y se estudiará una propiedad equivalente a la definición. En la segunda sección se presentarán los homomorfismos entre álgebras de Banach, se darán varios resultados de invertibilidad y una propiedad equivalente a la definición de homomorfismo. En la tercera sección se definirá el espectro y radio espectral de un elemento de un álgebra de Banach, se verán propiedades importantes de estos como la compacidad del espectro y se dará el teorema de Gelfand-Mazur, que relaciona mediante un isomorfismo isométrico las álgebras de Banach que cumplen que todo elemento no nulo es invertible con el álgebra de los números complejos $\mathbb{C}$.

1.1. Conceptos básicos

Antes presentar la definición de álgebra de Banach es conveniente incluir unas definiciones previas que se necesitarán en esta.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Se dice que $\mathcal{A}$ es un *álgebra compleja* si para cada $x, y, z \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumplen:

(1) $x(yz) = (xy)z$.

(2) $(x + y)z = xz + yz$ y $x(y + z) = xy + xz$.

(3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

El motivo de que el estudio se centre en los espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ es que en este se tiene la conjugación, que es una involución no trivial como se verá en el segundo capítulo, a diferencia de $\mathbb{R}$.

Definición. Sea $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, se dice que es *de Banach* si es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}$ converge a un elemento de $\mathcal{A}$.

En general se usará $\mathcal{A}$ para referirse al espacio vectorial normado $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ cuando no sea necesario distinguir la norma.

Definición. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja y de Banach, se dice que es un *álgebra de Banach* si para cada $x, y \in \mathcal{A}$ se cumple

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Si además existe un elemento $e \in \mathcal{A}$ tal que

$$xe = ex = x \quad \forall x \in \mathcal{A},$$

se dice que A es un *álgebra de Banach unitaria* y e es el *elemento neutro.*

Nota 1.1. El elemento neutro e de la definición anterior es único: si existe e' de la misma forma, $e' = e'e = e$.

A continuación se verá que la ausencia de elemento neutro en un álgebra de Banach se puede solucionar manteniendo las propiedades de esta.

Nota 1.2. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach no unitaria podemos asociarla mediante un isomorfismo isométrico a una unitaria de la siguiente forma:
Sea $\mathcal{A}_1 = \{(x, \alpha) \ / \ x \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{C}\}$, donde la suma y el producto por escalares se realizan por componentes. El producto se define como

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta) \qquad x, y \in \mathcal{A},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$\mathcal{A}_1$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con estas operaciones.
Se denota $e = (0, 1)$ y se define

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha| \qquad x \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Entonces $\mathcal{A}_1$ es un álgebra de Banach unitaria:

- La norma está bien definida: Para todos $x, y \in \mathcal{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, por ser $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ normas en $\mathcal{A}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente,

    (1) $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha| \geq 0$ y $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha| = 0$ si, y sólo si $\|x\| = |\alpha| = 0$, que equivale a $(x, \alpha) = (0, 0)$.

    (2) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda(x, \alpha)\| = \|(\lambda x, \lambda\alpha)\| = \|\lambda x\| + |\lambda\alpha| = |\lambda|\|x\| + |\lambda||\alpha| = |\lambda|(\|x\| + |\alpha|) = |\lambda|\|(x, \alpha)\|$.

    (3) $\|(x, \alpha) + (y, \beta)\| = \|(x + y, \alpha + \beta)\| = \|x + y\| + |\alpha + \beta| \leq \|x\| + \|y\| + |\alpha| + |\beta| = \|(x, \alpha)\| + \|(y, \beta)\|$.

- $\mathcal{A}_1$ es un álgebra compleja: Para todos $(x, \alpha), (y, \beta), (z, \gamma) \in \mathcal{A}_1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

    (1) $(x, \alpha)[(y, \beta)(z, \gamma)] = (x, \alpha)(yz + \gamma y + \beta z, \beta\gamma) = (xyz + \gamma xy + \beta xz + \beta\gamma x + \alpha yz + \alpha\gamma y + \alpha\beta z, \alpha\beta\gamma) = (xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta)(x, \gamma) = [(x, \alpha)(y, \beta)](z, \gamma)$.

(2) $[(x,\alpha)+(y,\beta)](z,\gamma) = (x+y,\alpha+\beta)(z,\gamma) = ((x+y)z+(\alpha+\beta)z+\gamma(x+y),(\alpha+\beta)\gamma) = (xz+yz+\alpha z+\beta z+\gamma x+\gamma y,\alpha\gamma+\beta\gamma) = (xz+\alpha z+\gamma x,\alpha\gamma)+(yz+\beta z+\gamma y,\beta\gamma) = (x,\alpha)(z,\gamma)+(y,\beta)(z,\gamma)$,
$(x,\alpha)[(y,\beta)+(z,\gamma)] = (x,\alpha)(y+z,\beta+\gamma) = (x(y+z)+\alpha(y+z)+(\beta+\gamma)x,\alpha(\beta+\gamma)) = (xy+xz+\alpha y+\alpha z+\beta x+\gamma x,\alpha\beta+\alpha\gamma) = (xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta)+(xz+\alpha z+\gamma x,\alpha\gamma) = (x,\alpha)(y,\beta)+(x,\alpha)(z,\gamma)$.

(3) $\lambda[(x,\alpha)(y,\beta)] = \lambda(xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta) = (\lambda(xy+\alpha y+\beta x),\lambda\alpha\beta) = ((\lambda x)y+(\lambda\alpha)y+\beta(\lambda x),(\lambda\alpha)\beta) = (\lambda x,\lambda\alpha)(y,\beta) = [\lambda(x,\alpha)](y,\beta)$ y
$\lambda[(x,\alpha)(y,\beta)] = (x(\lambda y)+\alpha(\lambda y)+(\lambda\beta)x,\alpha(\lambda\beta)) = (x,\alpha)(\lambda y,\lambda\beta) = (x,\alpha)[\lambda(y,\beta)]$.

- $\mathcal{A}_1$ es un espacio de Banach: Sea $\{(x_n,\alpha_n)\}_n$ una sucesión de A_1 de Cauchy. Dado $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, si $n,m\geq n_0$,

$$\|x_n-x_m\|+|\alpha_n-\alpha_m| = \|(x_n-x_m,\alpha_n-\alpha_m)\| = \|(x_n,\alpha_n)-(x_m,\alpha_m)\| < \varepsilon.$$

Luego, si $n,m\geq n_0$, $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ y $|\alpha_n-\alpha_m|<\varepsilon$, es decir, $\{x_n\}_n$ y $\{\alpha_n\}_n$ son sucesiones de Cauchy en $\mathcal{A}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente. Como $\mathcal{A}$ y $\mathbb{C}$ son completos para las normas consideradas, existen $x\in\mathcal{A}$ y $\alpha\in\mathbb{C}$ tales que $\{x_n\}_n$ converge a x y $\{\alpha_n\}_n$ converge a α. Es decir, dado $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, si $n\geq n_0$, $\|x_n-x\|<\varepsilon$ y $|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$. Ahora, $(x,\alpha)\in\mathcal{A}_1$ y, si $n\geq n_0$,

$$\|(x_n,\alpha_n)-(x,\alpha)\| = \|(x_n-x,\alpha_n-\alpha)\| = \|x_n-x\|+|\alpha_n-\alpha| < 2\varepsilon.$$

Luego $\{(x_n,\alpha_n)\}_n$ converge a (x,α) en $\mathcal{A}_1$ y por lo tanto es completo para la norma considerada.

- $\mathcal{A}_1$ es álgebra de Banach unitaria: Sean $(x,\alpha),(y,\beta)\in\mathcal{A}_1$. Como $\mathcal{A}$ es álgebra de Banach,

$$\|(x,\alpha)(y,\beta)\| = \|(xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta)\| = \|xy+\alpha y+\beta x\|+|\alpha\beta| \leq$$
$$\leq \|xy\|+\|\alpha y\|+\|\beta x\|+|\alpha\beta| \leq \|x\|\|y\|+|\alpha|\|y\|+|\beta|\|x\|+|\alpha||\beta| =$$
$$= (\|x\|+|\alpha|)(\|y\|+|\beta|) = \|(x,\alpha)\|\|(y,\beta)\|.$$

Si $(x,\alpha)\in\mathcal{A}_1$,

$$(x,\alpha)e = (x,\alpha)(0,1) = (x,\alpha) = (0,1)(x,\alpha) = e(x,\alpha).$$

Por último, la aplicación lineal y biyectiva

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}_1 \\ & x & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

es un isomorfismo isométrico, pues

$$\|T(x)\| = \|(x, 0)\| = \|x\| + |0| = \|x\|.$$

De la definición de álgebra de Banach se deducen inmediatamente propiedades que no se piden explícitamente, como la continuidad del producto:

Nota 1.3. Sean $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ que convergen hacia x e y respectivamente en $\mathcal{A}$ álgebra de Banach. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, $\|x_n - x\| < \varepsilon$ y $\|y_n - y\| < \varepsilon$. Entonces, si $n \geq n_0$,

$$\|x_n y_n - xy\| = \|(x_n - x)y_n + x(y_n - y)\| \leq \|(x_n - x)y_n\| + \|x(y_n - y)\| \leq$$

$$\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| < M\varepsilon + \|x\|\varepsilon \leq 2\varepsilon \operatorname{máx}\{M, \|x\|\},$$

donde M es una cota de $\{y_n\}_n$ por ser esta convergente hacia $y \in \mathcal{A}$.
En particular se tiene la continuidad de la multiplicación por la izquierda y por la derecha, es decir, $\{x_n y\}_n$ y $\{xy_n\}_n$ convergen hacia xy.

Recíprocamente, se puede obtener un álgebra de Banach teniendo la continuidad del producto sin pedir la propiedad que caracteriza las álgebras de Banach: $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para cada $x, y \in \mathcal{A}$.

Teorema 1.4. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio de Banach y álgebra compleja con elemento unidad no nulo tal que se tiene la continuidad del producto por la izquierda y por la derecha. Entonces existe una norma en $\mathcal{A}$ que induce la misma topología que la dada y que hace $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach.*

Demostración.
Para cada $x \in \mathcal{A}$ se define

$$\begin{array}{rccl} M_x\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & z & \longmapsto & xz = M_x(z). \end{array}$$

Sean $\tilde{\mathcal{A}} = \{M_x \ / \ x \in \mathcal{A}\}$ y $\mathscr{B}(\mathcal{A})$ el conjunto de operadores lineales acotados en $\mathcal{A}$ en sí mismo. Notemos que $\mathscr{B}(\mathcal{A})$ es de Banach por serlo $\mathcal{A}$ y que $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{A})$ pues, si $M_x \in \tilde{\mathcal{A}}$:

- M_x es lineal:
  Si $y, z \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, como $\mathcal{A}$ es álgebra compleja $M_x(y+z) = x(y+z) = xy + xz = M_x(y) + M_x(z)$ y $M_x(\lambda y) = x(\lambda y) = \lambda(xz) = \lambda M_x(y)$.

- M_x es acotado:
  Como M_x es lineal, ver que es acotado equivale a ver que es continuo. Si $\{z_n\}_n$ converge a z en $\mathcal{A}$ entonces $\{M_x(z_n) = xz_n\}_n$ converge a xz en $\mathcal{A}$ por ser el producto por la derecha continuo en $\mathcal{A}$.

Se define la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}} \\ & x & \longmapsto & M_x = \varphi(x), \end{array}$$

que es un isomorfismo:

- φ es lineal: Para $x, y \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,
  Para cada $z \in \mathcal{A}$, $M_{x+y}(z) = (x+y)z = xz + yz = M_x(z) + M_y(z) = (M_x + M_y)(z)$ y $M_{\lambda x}(z) = (\lambda x)z = \lambda(xz) = \lambda M_x(z)$. Luego $\varphi(x+y) = M_{x+y} = M_x + M_y = \varphi(x) + \varphi(y)$ y $\varphi(\lambda x) = M_{\lambda x} = \lambda M_x = \lambda\varphi(x)$.

- $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para cualquier $x, y \in \mathcal{A}$:
  Entendiendo el producto de operadores como la composición, para cada $z \in \mathcal{A}$, $M_{xy}(z) = (xy)z = x(yz) = xM_y(z) = M_xM_y(z)$.

- φ^{-1} es continua:
  φ^{-1} es lineal por serlo φ, luego basta ver que es acotada. Sea $\varphi(x) = M_x \in \tilde{\mathcal{A}}$ para un $x \in \mathcal{A}$, entonces $\|\varphi^{-1}(\varphi(x))\| = \|x\| = \|xe\| = \|M_x(e)\| \leq \|M_x\|\|e\| = \|M_x\| = \|\varphi(x)\|$ por ser $M_x \in \tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{A})$ acotado. Luego φ^{-1} está acotada y por tanto es continua.

- $\tilde{\mathcal{A}}$ es álgebra compleja: Sean $x, y, x \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Por ser $\mathcal{A}$ álgebra compleja y las propiedades vistas de φ,

  (1) $M_x(M_yM_z) = M_xM_{yz} = M_{x(yz)} = M_{(xy)z} = M_{xy}M_z = (M_xM_y)M_z$.

  (2) $(M_x+M_y)M_z = M_{x+y}M_z = M_{(x+y)z} = M_{xz+yz} = M_{xz}+M_{yz} = M_xM_z+M_yM_z$ y $M_x(M_y+M_z) = M_xM_{y+z} = M_{x(y+z)} = M_{xy+xz} = M_{xy}+M_{xz} = M_xM_y+M_xM_z$.

  (3) $\alpha(M_xM_y) = \alpha M_{xy} = M_{\alpha(xy)} = M_{(\alpha x)y} = M_{x(\alpha y)} = M_{\alpha x}M_y = M_xM_{\alpha y} = (\alpha M_x)M_y = M_x(\alpha M_y)$.

- $\tilde{\mathcal{A}}$ es de Banach:
  Basta ver que es cerrado en $\mathscr{B}(\mathcal{A})$, pues este es de Banach. Sea $\{T_n\}_n$ una sucesión en $\tilde{\mathcal{A}}$ que converge a $T \in \mathscr{B}(\mathcal{A})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in \mathcal{A}$ tal que para cada $y \in \mathcal{A}$ se tiene $T_n(y) = x_ny = (x_ne)y = T_n(e)y$. Ahora, como la multiplicación por la izquierda es continua en $\mathcal{A}$ por hipótesis, tomando límites se tiene $T(y) = T(e)y = M_{T(e)}(y)$. Luego $T = M_{T(e)} \in \tilde{\mathcal{A}}$ y por tanto $\tilde{\mathcal{A}}$ es cerrado en $\mathscr{B}(\mathcal{A})$, luego de Banach.

- $\tilde{A}$ es álgebra de Banach unitaria:
  Ya se tiene que $\tilde{A}$ es un álgebra compleja y de Banach. Para $x, y \in \mathcal{A}$, por ser $M_x, M_y \in \tilde{A}$ operadores lineales acotados se tiene $\|M_x M_y\| \leq \|M_x\|\|M_y\|$. Además M_e es el operador identidad I, luego $\|M_e\| = \|I\| = 1$.

- φ es continua:
  Como φ^{-1} es una aplicación lineal, continua y biyectiva entre espacios de Banach, por el teorema de la aplicación abierta (ver [13] 2.12), su inversa φ es continua.

Por lo tanto φ es un isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y el álgebra de Banach $\tilde{\mathcal{A}}$, luego las normas $\|x\|$ y $\|M_x\|$ son equivalentes. □

Sin embargo, otras propiedades que se piden en la definición no se pueden suprimir de esta como se ve a continuación.

Nota 1.5. La hipótesis de que $\mathcal{A}$ sea de Banach en el teorema anterior no se puede omitir. Un ejemplo de esto es el álgebra

$$\mathcal{A} = \{f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \ \ / \ f = 0 \text{ excepto en una cantidad finita de puntos}\}$$

con las operaciones usuales entre funciones y la norma

$$\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(k)|}{k^2}.$$

Que la norma está bien definida y $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja se deduce de las propiedades del valor absoluto y de la linealidad y asociatividad de las funciones complejas.
Para ver la continuidad del producto por la izquierda sean $\{f_n\}_n$, f y h elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\{f_n\}_n$ converge a f, luego $\|f_n - f\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como $h \in \mathcal{A}$ toma un número finito de valores no nulos, está acotada, sea $M = \max\{h(k),\ k \in \mathbb{N}\}$. Entonces

$$\|f_n h - fh\| = \|(f_n - f)h\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f_n - f)(k)h(k)|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f_n - f)(k)|}{k^2} M = \|f_n - f\| M$$

tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Además, como $\mathcal{A}$ es conmutativa, se tiene también la continuidad del producto por la derecha.
Ahora bien, $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ no es de Banach: sea $\{f_n\}_n$ la sucesión de funciones de $\mathcal{A}$ dada por

$$f_n(k) = \begin{cases} \sqrt{k} & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Esta sucesión es de Cauchy pues dados $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$ se tiene

$$\|f_n - f_m\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f_n(k) - f_m(k)|}{k^2} = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|f_n(k)|}{k^2} = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Como la última cota es el resto de una serie convergente, $\|f_n - f_m\| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Sin embargo, la sucesión no converge a ningún elemento de $\mathcal{A}$. Si existiera $f \in \mathcal{A}$ de esta forma, se tendría $\|f_n - f\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, por ser f un elemento de $\mathcal{A}$, existiría un k_0 tal que $f(k) = 0$ para todo $k > k_0$. Entonces para $n \geq k_0$

$$\|f_n - f\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f_n(k) - f(k)|}{k^2} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|\sqrt{k} - f(k)|}{k^2} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} \geq \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}},$$

que no tiende a 0 cuando $n \to \infty$, luego $\mathcal{A}$ no es de Banach.
Notemos que la hipótesis de que $\mathcal{A}$ tenga elemento neutro se puede omitir vía el isomorfismo descrito previamente.
Entonces $\mathcal{A}$ cumple todas las hipótesis del teorema excepto la completitud, veamos que el producto no es continuo, algo que sí se cumple en un álgebra de Banach. Sea $\{f_n\}_n$ la sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ dada por

$$f_n(k) = \begin{cases} k^{3/2} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n, \end{cases}$$

que cumple

$$\|f_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n(k)|}{k^2} = \frac{|f_n(n)|}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Si el producto fuera continuo debería cumplirse $\|f_n^2\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$, sin embargo

$$\|f_n^2\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n^2(k)|}{k^2} = \frac{|f_n^2(n)|}{n^2} = n \xrightarrow{n \to \infty} \infty.$$

1.2. Homomorfismos entre álgebras de Banach

Los homomorfismos entre álgebras de Banach serán las aplicaciones principales que se considerarán a lo largo del trabajo, interesantes por su propiedad de conservar las operaciones.

Definición. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras complejas. Se dice que una función lineal no nula $\phi\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un *homomorfismo de* $\mathcal{A}$ *en* $\mathcal{B}$ si

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

En particular, si $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ se dice que ϕ es un *homomorfismo complejo en* $\mathcal{A}$.
Si $\mathcal{A}$ es unitaria y para $x \in \mathcal{A}$ existe $x^{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$, donde e es el elemento neutro de $\mathcal{A}$, se dice que x es *invertible*.

De la definición de homomorfismo se deducen inmediatamente las siguientes propiedades.

Proposición 1.6. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja unitaria con elemento neutro e y ϕ un homomorfismo complejo en $\mathcal{A}$, entonces $\phi(e) = 1$ y $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$ invertible.*

Demostración.
Como ϕ es no nula, existe $y \in \mathcal{A}$ con $\phi(y) \neq 0$, luego $\phi(y) = \phi(ye) = \phi(y)\phi(e)$, de donde se deduce que $\phi(e) = 1$. Ahora, si $x \in \mathcal{A}$ es invertible, $\phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(xx^{-1}) = \phi(e) = 1$, luego $\phi(x)$ no puede ser 0. $\square$

Nota 1.7. Si $x, y \in \mathcal{A}$ son invertibles, xy es invertible y su inverso es $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ pues $(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}ey = e = xex^{-1} = x(yy^{-1})x^{-1} = (xy)(y^{-1}x^{-1})$.

A continuación unas proposiciones sobre invertibilidad que facilitarán la demostración de varios resultados.

Proposición 1.8. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria y $x, y \in \mathcal{A}$. Se cumple:*

(a) Si $\|x\| < 1$, entonces $e - x$ es invertible y su inverso es $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

(b) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo es tal que $\|x\| < |\lambda|$, entonces $\lambda e - x$ es invertible y su inverso es $(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$.

(c) Si x es invertible e y cumple que $\|y\| < \|x^{-1}\|^{-1}$, entonces $x - y$ es invertible y su inverso es $(x - y)^{-1} = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (yx^{-1})^n$.

Demostración.

(a) Sea $s_n = e + x + ... + x^n$. Por las propiedades de las álgebras de Banach $\|x^n\| \leq \|x\|^n$. Si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x^n + ... + x^{m+1}\| \leq \|x^n\| + ... + \|x^{m+1}\| \leq \|x\|^n + ... + \|x\|^{m+1},$$

y como $\|x\| < 1$, el último término de la desigualdad tiende a 0 cuando $n, m \to \infty$, es decir, $\{s_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}$ completo, luego converge a un elemento $s \in \mathcal{A}$. Ahora, tomando límites en

$$s_n(e - x) = e - x^{n+1} = (e - x)s_n$$

teniendo en cuenta que $x^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y la continuidad del producto,

$$s(e - x) = e = (e - x)s$$

y por tanto $s = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es el inverso de $e - x$.

(b) Notemos que $\lambda e - x = \lambda(e - \lambda^{-1}x)$ y $\|\lambda^{-1}x\| = |\lambda^{-1}|\|x\| < |\lambda^{-1}\lambda| = 1$. Se aplica el apartado (a) y $e - \lambda^{-1}x$ es invertible con inverso $(e - \lambda^{-1}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}x)^n$. Luego, multiplicando por el escalar λ, $\lambda e - x$ es invertible y su inverso es

$$(\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

(c) Notemos que $x - y = (e - yx^{-1})x$ y, por ser $\mathcal{A}$ álgebra de Banach, $\|yx^{-1}\| \leq \|y\|\|x^{-1}\| < \|x^{-1}\|^{-1}\|x^{-1}\| = 1$. Se aplica el apartado (a) y $e - yx^{-1}$ es invertible con inverso $(e - yx^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(yx^{-1})^n$. Multilplicando por x invertible, $x - y$ es invertible y su inverso es

$$(x - y)^{-1} = x^{-1}(e - yx^{-1})^{-1} = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(yx^{-1})^n.$$

□

Proposición 1.9. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria y $x, y \in \mathcal{A}$. Se cumple:*

(a) Si $\|x\| < 1$, entonces $\|(e - x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$.

(b) Si x es invertible e y cumple que $\|y\| \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$, entonces $\|(x - y)^{-1} - x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^2\|y\|$.

Demostración.

(a) Por la proposición (1.8(a)),

$$\|(e - x)^{-1} - e - x\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} x^n - e - x\| = \|\sum_{n=2}^{\infty} x^n\| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\|x^n\| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\|x\|^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|x\|^n - 1 - \|x\| = \frac{1}{1 - \|x\|} - 1 - \|x\| = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|},$$

donde se ha usado que $\sum_{n=0}^{\infty}\|x\|^n$ es una serie geométrica de razón $\|x\| < 1$.

(b) Por la proposición (1.8(c)),

$$\|(x - y)^{-1} - x^{-1}\| = \|x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(yx^{-1})^n - x^{-1}\| = \|x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(yx^{-1})^n\| \leq$$

$$\leq \|x^{-1}\|\sum_{n=1}^{\infty}\|(yx^{-1})^n\| \leq \|x^{-1}\|\sum_{n=1}^{\infty}\|yx^{-1}\|^n \leq \|x^{-1}\|\sum_{n=1}^{\infty}(\|y\|\|x^{-1}\|)^n =$$

$$= \|x^{-1}\|(\|y\|\|x^{-1}\|)\sum_{n=1}^{\infty}(\|y\|\|x^{-1}\|)^{n-1} = \|x^{-1}\|^2\|y\|\sum_{n=0}^{\infty}(\|y\|\|x^{-1}\|)^n \leq$$
$$\leq \|x^{-1}\|^2\|y\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}\|x^{-1}\|\right)^n = \|x^{-1}\|^2\|y\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2\|x^{-1}\|^2\|y\|.$$

□

Todo homomorfismo complejo en un álgebra de Banach es continuo por ser lineal y acotado, como se verá a continuación.

Proposición 1.10. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria y $x \in \mathcal{A}$ con $\|x\| < |\lambda|$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo. Se tiene que $|\phi(x)| < |\lambda|$ para todo ϕ homomorfismo complejo en $\mathcal{A}$.*

Demostración.
Veamos primero el caso en el que $|\lambda| = 1$. Sean ϕ un homomorfismo complejo en $\mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \geq 1$. Entonces $\alpha e - x$ es invertible y por tanto $\phi(\alpha e - x) \neq 0$. Por la linealidad de ϕ, $\phi(\alpha e - x) = \alpha\phi(e) - \phi(x) = \alpha - \phi(x) \neq 0$, luego $\phi(x) \neq \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \geq 1$, de donde se deduce que $|\phi(x)| < 1$.
Ahora, para $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo arbitrario basta usar lo probado y la linealidad de ϕ. Como $\|\frac{x}{\lambda}\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|} < \frac{|\lambda|}{|\lambda|} = 1$ se tiene

$$|\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)| = \frac{1}{|\lambda|}|\phi(x)| < 1,$$

y por tanto $|\phi(x)| < |\lambda|$. □

Proposición 1.11. *El conjunto de elementos invertibles de un álgebra de Banach unitaria $\mathcal{A}$ es abierto y la aplicación de este conjunto en sí mismo dada por $x \longmapsto x^{-1}$ es continua.*

Demostración.
Sea H el conjunto de elementos invertibles. Sea $x \in H$, veamos que $B(x, \|x^{-1}\|^{-1}) \subseteq H$ para probar que H es abierto. Si $y \in B(x, \|x^{-1}\|^{-1})$ entonces $\|x - y\| < \|x^{-1}\|^{-1}$ y por tanto $x - (x - y) = y$ es invertible, es decir, $y \in H$.
Ahora, para ver que la aplicación $x \longmapsto x^{-1}$ es continua veamos que lo es en cada punto de H. Para $x \in H$, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $\frac{\varepsilon}{\|x^{-1}\|} \leq 1$, sea $\delta = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\|x^{-1}\|^2} \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Si $z \in H$ es tal que $\|x - z\| \leq \delta \leq \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$, se tiene que $x - (x - z) = z$ es invertible y

$$\|z^{-1} - x^{-1}\| = \|(x - (x - z))^{-1} - x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^2\|x - z\| \leq 2\|x^{-1}\|^2\delta =$$
$$= 2\|x^{-1}\|^2\left(\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\|x^{-1}\|^2}\right) = \varepsilon.$$

□

El siguiente lema será útil en la demostración del próximo teorema, que muestra que la definición de homomorfismo es equivalente a las propiedades que se obtenían en (1.6).

Lema 1.12. *Sea f una función compleja entera con $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ y*

$$0 < |f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Entonces $f(\lambda) = 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración.
Como f no se anula y es entera admite logaritmo analítico, es decir, existe una función g entera de forma que $f = \exp(g)$. Además, como $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$ se tiene que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 0$. Para $\lambda \in \mathbb{C}$, por las propiedades de la exponencial, $|f(\lambda)| = |\exp(g)| = e^{\mathrm{Re}(g(\lambda))}$, luego por la monotonía de la exponencial $\mathrm{Re}(g(\lambda)) \leq |\lambda|$. Se deduce entonces que $|g(\lambda)| \leq |2r - g(\lambda)|$ para todo $r \in \mathbb{R}$ con $|\lambda| \leq r$. Se define para $r \in \mathbb{R}$ la función

$$h_r(\lambda) = \frac{r^2 g(\lambda)}{\lambda^2(2r - g(\lambda))}.$$

Como $\lambda = 0$ es un cero de al menos orden 2 del numerador y de orden justamente 2 del denominador, la función presenta una singularidad evitable en este punto. Por lo tanto, por ser g entera, h_r es holomorfa en $\{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| < 2r\}$. Sea $U = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| < r\}$ y notemos que, si $|\lambda| = r$,

$$|h_r(\lambda)| = \frac{r^2|g(\lambda)|}{|\lambda|^2|2r - g(\lambda)|} \leq \frac{r^2}{|\lambda|^2} = 1.$$

Como h_r es holomorfa en U abierto conexo acotado y continua en $\overline{U}$ por ser holomorfa en $\{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| < 2r\} \supset \overline{U}$, el teorema del módulo máximo (ver [2] 2.4.12) asegura que $|h_r|$ alcanza su máximo en $\mathrm{Fr}(U)$, donde $|h_r(\lambda)| \leq 1$, luego se tiene esta desigualdad para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq r$. Fijado λ no nulo, si $g(\lambda) \neq 0$,

$$\lim_{r \to \infty} |h_r(\lambda)| = \lim_{r \to \infty} \frac{r^2|g(\lambda)|}{|\lambda|^2|2r - g(\lambda)|} = \infty,$$

en contra de lo visto, luego $g(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ (ya se tenía $g(0) = 0$) y $f(\lambda) = \exp 0 = 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. □

Teorema 1.13 (Gleason, Kahane, Zelazko). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria y $\phi\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación lineal con $\phi(e) = 1$ y $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$ invertible. Entonces*

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Demostración.
Sea $N = \{x \in \mathcal{A} \ / \ \phi(x) = 0\}$. Observemos que $N = \mathrm{Ker}(\phi)$, como la dimensión $\mathrm{Im}(\phi)$ es 1 y $e \notin N$, cada elemento de $\mathcal{A}$ se expresa de forma única como $a + \lambda e$ para ciertos $a \in N$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

- ϕ es un operador continuo en $\mathcal{A}$ y $\|\phi\| = 1$:
  Sea $x \in \mathcal{A}$ con $x = \lambda e - a$ para ciertos $\lambda \in \mathbb{C}$ y $a \in N$. Como $\phi(a) = 0$, a no puede ser invertible, luego por la proposición (1.8(b))
  $$\|x\| = \|\lambda e - a\| \geq |\lambda| = |\phi(\lambda e - a)| = |\phi(x)|,$$
  de donde se deduce que ϕ es continuo y $\|\phi\| \leq 1$. Como $|\phi(e)| = 1$ se tiene $\|\phi\| = 1$.

- Si $a \in N$ entonces $a^2 \in N$:
  Como ϕ es lineal se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\|a\| = 1$. Se define la función
  $$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(a^n)}{n!}\lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$
  Como $\|\phi\| = 1$ y por ser $\mathcal{A}$ álgebra de Banach, $|\phi(a^n)| \leq \|a^n\| \leq \|a\|^n = 1$. Entonces $|f(\lambda)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} = e^{|\lambda|}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, que implica que la serie de potencias que define f converge en todo $\mathbb{C}$ y por tanto f es entera. Se define
  $$E(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\lambda^n,$$
  bien definida pues la serie converge en la norma de $\mathcal{A}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$
  $$\|E(\lambda)\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\lambda^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{n!}|\lambda|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} = e^{|\lambda|}.$$
  Ahora, por la linealidad y continuidad de ϕ, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$
  $$\phi(E(\lambda)) = \phi(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!}\lambda^i) = \lim_{n\to\infty} \phi(\sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!}\lambda^i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{\phi(a^i)}{i!}\lambda^i = f(\lambda).$$
  Por las propiedades de la exponencial compleja, $E(\lambda)E(-\lambda) = E(\lambda - \lambda) = E(0) = a^0 = e$ el elemento neutro de $\mathcal{A}$. Luego $E(\lambda)$ es un elemento invertible de $\mathcal{A}$ y $\phi(E(\lambda)) = f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, por tanto $0 < |f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|}$. Como
  $$f'(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!}\phi(a^{n+1})\lambda^n,$$
  se tiene $f'(0) = \phi(a) = 0$, y $f(0) = \phi(e) = 1$. Se puede aplicar el lema (1.12) y f es constante, luego $f'' = 0$, en particular $f''(0) = 0$. Usando el desarrollo en series de potencias en torno a 0, $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n$, y por unicidad del desarrollo, $\phi(a^2) = f''(0) = 0$.

- Si $x \in \mathcal{A}$ entonces $\phi(x^2) = \phi(x)^2$:
  Sea $x = a + \lambda e$ para cierto $a \in N$ y aplicando ϕ se tiene $\phi(x) = \lambda$. Ahora $\phi(x^2) = \phi(a^2 + \phi(x)^2 e + 2\phi(x)a) = \phi(a^2) + \phi(x)^2 = \phi(x)^2$ pues $a \in N$.

- Si $a \in N$ y $b \in \mathcal{A}$ entonces $ab + ba \in N$:
  Por lo visto en el punto anterior
  $$\phi((a+b)^2) = \phi(a+b)^2 = \phi(a)^2 + \phi(b)^2 + 2\phi(a)\phi(b),$$
  y por otro lado
  $$\phi((a+b)^2) = \phi(a^2) + \phi(b^2) + \phi(ab+ba) = \phi(a)^2 + \phi(b)^2 + \phi(ab+ba),$$
  de donde se deduce $\phi(ab+ba) = 2\phi(a)\phi(b) = 0$ pues $a \in N$.

- Si $a \in N$ y $b \in \mathcal{A}$ entonces $ab \in N$:
  Por el punto anterior $ab + ba$, $a(bab) + (bab)a \in N$, y aplicando ϕ a la identidad $(ab - ba)^2 + (ab + ba)^2 = 2[a(bab) + (bab)a]$,
  $$\phi(ab-ba)^2 = \phi((ab-ba)^2) = 2\phi(a(bab) + (bab)a) - \phi((ab+ba)^2) = 0$$
  y $ab - ba \in N$. Luego $\phi(ab) = \frac{1}{2}(\phi(ab-ba) + \phi(ab+ba)) = 0$.

- Si $x, y \in \mathcal{A}$ entonces $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$:
  Sean $a, b \in N$ de forma que $x = a + \phi(x)e$ e $y = b + \phi(y)e$. Entonces, como $ab \in N$,
  $$\phi(xy) = \phi(ab + \phi(y)a + \phi(x)b + \phi(x)\phi(y)e) = \phi(x)\phi(y).$$

$\square$

1.3. Propiedades del espectro

En este apartado se estudiarán las propiedades del espectro de un elemento de un álgebra de Banach unitaria, así como su radio espectral. Se llegará con estos conceptos al teorema de Gelfand-Mazur, que permite asociar ciertas álgebras de Banach con $\mathbb{C}$ mediante un isomorfismo isométrico. Aquí $\mathcal{A}$ será un álgebra de Banach unitaria.

Definición. Sea $x \in \mathcal{A}$. Se llama *espectro de* x al conjunto
$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \lambda e - x \text{ no es invertible}\}$$
y *radio espectral de* x al valor real
$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| \ / \ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Proposición 1.14. $\sigma(x)$ *es compacto para cada* $x \in \mathcal{A}$.

Demostración.
Basta ver que $\sigma(x)$ es cerrado en el disco $C = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| \leq \|x\|\}$, que es acotado:

- $\sigma(x) \subseteq C$: Si $\lambda \in \sigma(x)$ entonces $\lambda e - x$ no es invertible y, por la proposición (1.8(b)), $\|x\| \geq |\lambda|$.

- $\sigma(x)$ es cerrado en C: Como C es cerrado en $\mathbb{C}$ basta ver que $\sigma(x)$ es cerrado en $\mathbb{C}$. Sea $\lambda \in \overline{\sigma(x)}$ y $\{\lambda_n\}_n$ una sucesión de elementos de $\sigma(x)$ tales que $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$. Entonces $\lambda_n e - x$ es no invertible para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_n e - x \xrightarrow{n\to\infty} \lambda e - x$ en $\mathcal{A}$. Por la proposición (1.11), el conjunto de los elementos no invertibles es cerrado en $\mathcal{A}$, luego $\lambda e - x$ es no invertible y $\lambda \in \sigma(x)$.

□

Proposición 1.15. $\sigma(x)$ *es no vacío para cada* $x \in \mathcal{A}$.

Demostración.
Para cada $x \in \mathcal{A}$ se define la función $R_x \colon \mathbb{C} \setminus \sigma(x) \longrightarrow \mathcal{A}$ dada por $R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$, continua por la proposición (1.11). Notemos que $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{A})$ es abierto en $\mathbb{C}$, pues se ha visto en (1.14) que $\sigma(\mathcal{A})$ es cerrado en $\mathbb{C}$ Ahora, dados $\lambda, \mu \notin \sigma(x)$ distintos,

$$(\mu - \lambda)e = [(\lambda e - x)(\lambda e - x)^{-1}](\mu e - x) - (\lambda e - x)[(\mu e - x)^{-1}(\mu e - x)] =$$

$$= (\lambda e - x)R_x(\lambda)(\mu e - x) - (\lambda e - x)R_x(\mu)(\mu e - x) = (\lambda e - x)(R_x(\lambda) - R_x(\mu))(\mu e - x),$$

que multiplicado por $R_x(\lambda)$ y $R_x(\mu)$ resulta $(\mu - \lambda)R_x(\lambda)R_x(\mu) = R_x(\lambda) - R_x(\mu)$. Se tiene entonces

$$\frac{R_x(\mu) - R_x(\lambda)}{\mu - \lambda} = -R_x(\lambda)R_x(\mu).$$

Haciendo el límite cuando $\mu \to \lambda$, este vale $-R_x(\lambda)^2$, por tanto R_x es fuertemente holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ (ver Apéndice B). Si $\sigma(x)$ fuera vacío, R_x sería una función fuertemente holomorfa y por tanto débilmente holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Haciendo $\lambda \to \infty$,

$$\|R_x(\lambda)\| = \|(\lambda e - x)^{-1}\| = |\lambda|^{-1}\|(e - \lambda^{-1}x)^{-1}\| \to 0.$$

Si $\phi \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal acotado arbitrario, $\phi \circ R_x$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ por ser R_x débilmente holomorfa en $\mathbb{C}$. Ahora, como $\phi \circ R_x$ es acotada, es constante por el teorema de Liouville (ver [2] 2.4.2). De hecho $\phi \circ R_x$ es nula pues $\|\mathbb{R}_x(\lambda)\| \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$ y ϕ es un funcional lineal y continuo. Por lo tanto R_x debe ser la función nula, absurdo por su definición. □

La definición de espectro depende del álgebra de Banach donde se considere como se muestra a continuación. Por eso, en caso de duda se denotará el espectro de un elemento x en $\mathcal{A}$ como $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Se puede encontrar una relación entre los espectros respecto a la relación entre las álgebras.

Proposición 1.16. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach unitarias tales que $\mathcal{A}$ es subálgebra de $\mathcal{B}$, es decir, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ con las operaciones, norma y elemento neutro de $\mathcal{B}$. Entonces $\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ para cada $x \in \mathcal{A}$.*

Demostración.
Se deduce directamente de la definición de espectro. Sea $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$, es decir, $\lambda e - x$ no tiene inverso en $\mathcal{B}$, luego tampoco en $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. □

Notemos que el siguiente teorema relaciona un valor que en principio depende de la norma considerada en $\mathcal{A}$ con el radio espectral, independiente de esta.

Teorema 1.17. *Si $x \in \mathcal{A}$,*

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Demostración.
De la igualdad

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e)^n - x^n = (\lambda e - x) \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j x^{n-1-j}$$

se deduce que si $\lambda^n e - x^n$ es invertible también lo es $\lambda e - x$. En términos del espectro, si $\lambda \in \sigma(x)$ entonces $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ y, por la proposición (1.8(b)), $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ para todo $\lambda \in \sigma(x)$. Luego $\sup\{|\lambda|^n \ / \ \lambda \in \sigma(x)\} \leq \|x^n\|$, por tanto

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| \ / \ \lambda \in \sigma(x)\} \leq \|x^n\|^{1/n}$$

y, tomando límites inferiores, $\rho(x) \leq \liminf \|x^n\|^{1/n}$.
Ahora, siendo R_x la función definida en la demostración de la proposición (1.15) y $\phi \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado arbitrario, $\phi \circ \mathbb{R}_x$ es analítica para $|\lambda| > \rho(x)$ como se probó en dicha demostración. Por la proposición (1.8(b)), el desarrollo en series de Laurent (ver [2] 4.1.3) de esta función es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(x^n)}{\lambda^{n+1}}$, que converge para $|\lambda| > \rho(x)$. Entonces, para $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \rho(x)$ existe $C_\phi > 0$ tal que $|\frac{\phi(x^n)}{\lambda^{n+1}}| \leq C_\phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de la acotación uniforme (ver [3] 5.13), existe $C > 0$ tal que $\frac{\|x^n\|}{|\lambda|^n} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\|x^n\|^{1/n} \leq C^{1/n}|\lambda|$. Tomando límites superiores, $\limsup \|x^n\|^{1/n} \leq |\lambda|$ para todo λ con $|\lambda| > \rho(x)$ y se tiene $\limsup \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x)$. Por lo tanto $\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$. □

Teorema 1.18 (Gelfand-Mazur). *Si todo elemento no nulo de $\mathcal{A}$ es invertible entonces existe un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{A}$ y $\mathbb{C}$.*

Demostración.
Sea $x \in \mathcal{A}$, por la proposición (1.15) se tiene que $\sigma(x)$ es no vacío. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ son distintos, $\lambda e - x$ o $\mu e - x$ es no nulo (o ambos), luego invertible, por lo que $\sigma(x)$ tiene un único elemento, llamémoslo λ_x. Como $\lambda_x e - x$ no es invertible, ha de ser nulo, es decir, $\lambda_x e = x$. La aplicación de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{C}$ dada por $x \longmapsto \lambda_x$ es biyectiva, lineal y cumple $\|x\| = \|\lambda_x e\| = |\lambda_x|$, luego es un isomorfismo isométrico. $\square$

2. C*-álgebras

Un álgebra compleja se puede dotar en ocasiones de una involución, una propiedad que será interesante para este trabajo más adelante cuando se considere el álgebra de Banach de los operadores acotados en un espacio de Hilbert. Este capítulo comenzará con el estudio de las álgebras con involución y los homomorfismos que conservan esta misma. Se definirá un caso particular de álgebras con involución, las C*-álgebras, sobre las que se enunciará el teorema espectral en el capítulo 5. Por último se verá cómo adaptar la extensión de una C*-álgebra no unitaria a una unitaria que se vio en el primer capítulo para que la nueva sea también una C*-álgebra.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja. Se dice que una aplicación de $\mathcal{A}$ en sí misma $x \longmapsto x^*$ es una *involución* si, dados $x, y \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumplen:

(1) $(x+y)^* = x^* + y^*$.

(2) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$.

(3) $(xy)^* = y^* x^*$.

(4) $x^{**} = x$.

Si $\mathcal{A}$ tiene una involución se dice que es un $*$-*álgebra*.

Definición. Si $x \in \mathcal{A}$ siendo $\mathcal{A}$ un $*$-álgebra cumple que $x^* = x$ se dice que es *autoadjunto*.

De la misma forma que los homomorfismos eran interesantes por conservar las operaciones en álgebras de Banach, será conveniente que conserven también la involución.

Definición. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ $*$-álgebras. Se dice que una aplicación $\phi\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un $*$-*homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$* si es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ que además cumple $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Algunas propiedades básicas que se dan en un $*$-álgebra unitaria son las siguientes.

Proposición 2.1. *Sea $\mathcal{A}$ un $*$-álgebra de Banach unitaria. Entonces*

(1) El elemento neutro e es autoadjunto.

(2) $x \in \mathcal{A}$ es invertible si, y solo si, x^* es invertible. En ese caso $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.

(3) $\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)}$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Demostración.

(a) Si $x \in \mathcal{A}$, $e^*x^* = (xe)^* = x^* = (ex)^* = x^*e^*$ y por la unicidad del elemento neutro vista en la nota (1.1), $e = e^*$.

(b) Si x es invertible, por (a), $(x^{-1})^*x^* = (xx^{-1})^* = e = (x^{-1}x)^* = x^*(x^{-1})^*$, luego x^* es invertible con inverso $(x^{-1})^*$. La otra implicación se deduce tomando en la primera x^* como x y por la propiedad de $x^{**} = x$.

(c) Si $\lambda \in \sigma(x^*)$, $\lambda e - x^*$ es no invertible, luego $(\lambda e - x^*)^* = \overline{\lambda} e - x$ es no invertible por (b), es decir, $\overline{\lambda} \in \sigma(x)$ y $\lambda \in \overline{\sigma(x)}$. Si $\lambda \in \overline{\sigma(x)}$, entonces $\overline{\lambda} \in \sigma(x)$, es decir, $\overline{\lambda} e - x = (\lambda e - x^*)^*$ es no invertible, luego $\lambda e - x^*$ tampoco lo es por (b) y $\lambda \in \sigma(x^*)$.

□

Proposición 2.2. *Sean $\mathcal{A}$ un $*$-álgebra y $x \in \mathcal{A}$. Entonces x se puede escribir de forma única como $x = u + iv$ donde $u, v \in \mathcal{A}$ son autoadjuntos.*

Demostración.
Sean $u = \frac{1}{2}(x+x^*)$ y $v = \frac{i}{2}(x^*-x)$, que cumplen $u^* = \frac{1}{2}(x^*+x) = u$ y $v^* = \frac{-i}{2}(x^*-x) = v$. Entonces $x = u + iv$ y, si $x = u' + iv'$ con $u', v' \in \mathcal{A}$ autoadjuntos, sea $w = v' - v$. Como w e iw son autoadjuntos pues

$$w^* = (v' - v)^* = v' - v = w \quad \text{y}$$

$$(iw)^* = (iv' - iv)^* = (x - u - x + u')^* = (u' - u)^* = u' - u = iw,$$

se tiene $iw = (iw)^* = -iw^* = -iw$ y por tanto $w = 0$, es decir, u y v son únicos. □

Considerando álgebras de Banach con involución, se tiene un caso interesante: las C*-álgebras.

Definición. Si $\mathcal{A}$ es un $*$-álgebra de Banach se dice que es una *C*-álgebra* si cumple que $\|x^*x\| = \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

El próximo resultado da una condición equivalente a la definición de C*-álgebra.

Proposición 2.3. *Sea $\mathcal{A}$ un $*$-álgebra de Banach. $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra si, y solo si, $\|x^*\| = \|x\|$ y $\|x^*x\| = \|x\|\|x^*\|$ para todo $x \in \mathcal{A}$.*

Demostración.
Si $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra,

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|.$$

Se deduce que $\|x\| \leq \|x^*\|$ para todo $x \in \mathcal{A}$ no nulo y la desigualdad es trivial para x nulo, luego es cierta para todo $x \in \mathcal{A}$. Aplicando esto a x^* y por las propiedades de la involución se tiene

$$\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$$

y por tanto la igualdad $\|x\| = \|x^*\|$. Entonces $\|x^*x\| = \|x\|^2 = \|x\|\|x^*\|$.
Ahora, si se cumple $\|x^*\| = \|x\|$ y $\|x^*x\| = \|x\|\|x^*\|$ para todo $x \in \mathcal{A}$, entonces $\|x^*x\| = \|x\|^2$ y $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra. □

De la misma forma que se hizo con las álgebras de Banach no unitarias, para una C*-álgebra no unitaria se puede encontrar un isomorfismo isométrico con una unitaria. En este caso se obtiene una compleción de la C*-álgebra con un punto.

Nota 2.4. Si $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra no unitaria se puede asociar por medio de la aplicación $x \longmapsto T(x) = (x, 0)$ de la nota (1.2) con $\mathcal{A}_1 = \{(x, \alpha) \;/\; x \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{C}\}$, que será una C*-álgebra unitaria. Vamos a ver que esta aplicación es un isomorfismo isométrico para la norma adecuada. La involución de $\mathcal{A}$ se extiende a $\mathcal{A}_1$ como

$$(x, \alpha)^* = (x^*, \overline{\alpha}) \qquad x \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

La norma que hay que considerar en $\mathcal{A}_1$ para tener un isomorfismo isométrico esta vez es

$$\|(x, \alpha)\| = \sup\{\|xy + \alpha y\| \;/\; y \in \mathcal{A},\ \|y\| \leq 1\} \qquad x \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

- La norma está bien definida: Sean $(x, \alpha), (y, \beta) \in \mathcal{A}_1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Por las propiedades de la norma $\|\cdot\|$ en $\mathcal{A}$,

  (1) $\|\lambda(x, \alpha)\| = \sup\{\|\lambda xz + \lambda\alpha z\| \;/\; z \in \mathcal{A},\ \|z\| \leq 1\} = |\lambda| \sup\{\|xz + \alpha z\| \;/\; z \in \mathcal{A},\ \|z\| \leq 1\} = |\lambda|\|(x, \alpha)\|$.

  (2) $\|(x, \alpha) + (y, \beta)\| = \sup\{\|(x + y)z + (\alpha + \beta)z\| \;/\; z \in \mathcal{A},\ \|z\| \leq 1\} \leq \sup\{\|xz + \alpha z\| + \|yz + \beta z\| \;/\; z \in \mathcal{A},\ \|z\| \leq 1\} = \|(x, \alpha)\| + \|(y, \beta)\|$.

  (3) $\|(x, \alpha)\| \geq 0$ y $\|(0, 0)\| = 0$. Ahora, si (x, α) es no nulo tal que $\|(x, \alpha)\| = 0$, por definición $\|xy + \alpha y\| = 0$ y por tanto $xy + \alpha y = 0$ para todo $y \in \mathcal{A}$. Si fuera $x = 0$ entonces $\alpha y = 0$ para todo $y \in \mathcal{A}$ y tendría que ser $\alpha = 0$, luego x es no nulo. Como $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra $\|xx^*\| = \|x^*x\| = \|x\|^2 \neq 0$, luego $xx* \neq 0$ y $\alpha \neq 0$, pues de lo contrario se tendría $xy = 0$ para todo $y \in \mathcal{A}$. Despejando se tiene $y = -\alpha^{-1}xy$ para todo $y \in \mathcal{A}$, en particular para $y^* \in \mathcal{A}$ se tiene $y^* = -\alpha^{-1}xy^*$. Por las propiedades de la involución $y = y^{**} = y^{**}(-\alpha^{-1}x)^* = y(-\alpha^{-1}x)^*$ para todo $y \in \mathcal{A}$. Entonces $-\alpha^{-1}x = (-\alpha^{-1}x)(-\alpha^{-1}x)^* = (-\alpha^{-1}x)^*$ y $-\alpha^{-1}x$ sería un elemento neutro en $\mathcal{A}$ en contra de lo supuesto, luego $(x, \alpha) = (0, 0)$.

- La aplicación T definida en la nota (1.2) es un isomorfismo isométrico por ser lineal, biyectiva y $\|T(x)\| = \|(x,0)\| = \|x\|$: Por ser $\mathcal{A}$ una C*-álgebra, para $x, y \in \mathcal{A}$ se cumple $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ y la igualdad se alcanza para $y = x^*$. Para $x \in \mathcal{A}$ no nulo, tomando $y = \frac{x^*}{\|x^*\|}$ y usando las equivalencias de la proposición (2.3), $\|T(x)\| = \|(x,0)\| = \frac{\|x^*x\|}{\|x^*\|} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$. Para $x = 0$ la igualdad es inmediata.

- $\mathcal{A}_1$ es un álgebra de Banach unitaria: En (1.2) se probó que $\mathcal{A}_1$ es álgebra compleja, propiedad que no depende de la norma considerada. Para ver la completitud de $\mathcal{A}_1$ para esta norma se considera $\{(x_n, \alpha_n)\}_n$ sucesión de Cauchy. Como $\mathcal{A}$ es completo y $\|x\| = \|(x,0)\|$, se tiene que $\mathcal{A} \times \{0\} \subset \mathcal{A}_1$ es completo y por tanto cerrado en $\mathcal{A}_1$. Entonces la aplicación lineal de $\mathcal{A}_1$ en $\mathbb{C}$ dada por $(x, \alpha) \longmapsto \alpha$ es continua y por tanto la sucesión $\{\alpha_n\}_n$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$. De aquí se deduce por la continuidad de la norma y dado que $\|(x_n - x_m, 0)\| = \|x_n - x_m\|$, la sucesión $\{x_n\}_n$ es de Cauchy en $\mathcal{A}$. Por ser $\mathcal{A}$ y $\mathbb{C}$ completos, las sucesiones $\{x_n\}_n$ y $\{\alpha_n\}_n$ convergen hacia x y α en $\mathcal{A}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n, \alpha_n)\| = \lim_{n\to\infty} \sup\{\|x_n y + \alpha_n y\| \ / \ y \in \mathcal{A}, \ \|y\| \leq 1\} = \|(x,\alpha)\|$$

y $\mathcal{A}_1$ es completo. Ahora, para $(x,\alpha), (y,\beta) \in \mathcal{A}_1$, por ser $\mathcal{A}$ una C*-álgebra,

$$\|(x,\alpha)(y,\beta)\| = \sup\{\|(xy + \beta x + \alpha y)z + \alpha\beta z\| \ / \ z \in \mathcal{A}, \ \|z\| \leq 1\} \leq$$

$$\leq \sup\{\|xz^{1/2} + \alpha z^{1/2}\|\|yz^{1/2} + \beta z^{1/2}\| \ / \ z \in \mathcal{A}, \ \|z\| \leq 1\} = \|(x,\alpha)\|\|(y,\beta)\|$$

y por tanto $\mathcal{A}_1$ es un álgebra de Banach. Es unitaria pues $(0,1) \in \mathcal{A}_1$ cumple $(0,1)(x,\alpha) = (x,\alpha) = (x,\alpha)(0,1)$ para todo $(x,\alpha) \in \mathcal{A}_1$.

- $\mathcal{A}_1$ es una C*-álgebra: En primer lugar, la extensión de la involución da una involución en $\mathcal{A}_1$ pues, para $(x,\alpha), (y,\beta) \in \mathcal{A}_1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumplen las propiedades:

  (1) $[(x,\alpha) + (y,\beta)]^* = ((x+y)^*, \overline{\alpha+\beta}) = (x^*, \overline{\alpha}) + (y^*, \overline{\beta}) = (x,\alpha)^* + (y,\beta)^*$.

  (2) $[\lambda(x,\alpha)]^* = ((\lambda x)^*, (\overline{\lambda\alpha})) = (\overline{\lambda}x^*, \overline{\lambda}\overline{\alpha}) = \overline{\lambda}(x,\alpha)^*$.

  (3) $[(x,\alpha)(y,\beta)]^* = ((xy+\beta x+\alpha y)^*, \overline{\alpha\beta}) = (y^*x^*+\overline{\beta}x^*+\overline{\alpha}y^*, \overline{\alpha}\overline{\beta}) = (y,\beta)^*(x,\alpha)^*$.

  (4) $[(x,\alpha)^*]^* = (x^*, \overline{\alpha})^* = (x^{**}, \overline{\overline{\alpha}}) = (x,\alpha)$.

  La igualdad $\|(x,\alpha)(x,\alpha)^*\| = \|(x,\alpha)\|^2$ es inmediata para $(0,0)$, falta verla para $(x,\alpha) \in \mathcal{A}_1$ no nulo. Por la definición de la norma considerada, dado $\varepsilon > 0$ existe $y \in \mathcal{A}$ con $\|y\| = 1$ de forma que $\|xy + \alpha y\| \geq (1-\varepsilon)\|(x,\alpha)\|$. Entonces

  $$((1-\varepsilon)\|(x,\alpha)\|)^2 \leq \|xy+\alpha y\|^2 = \|(xy+\alpha y)^*(xy+\alpha y)\| = \|(xy+\alpha y, 0)^*(xy+\alpha y, 0)\| =$$

$$= \|((x,\alpha)(y,0))^*((x,\alpha)(y,0))\| = \|(y,0)^*(x,\alpha)^*(x,\alpha)(y,0)\| \leq$$

$$\leq \|(y,0)^*\|\|(x,\alpha)^*(x,\alpha)\|\|(y,0)\| = \|y^*\|\|(x,\alpha)^*(x,\alpha)\|\|y\| = \|y\|^2\|(x,\alpha)^*(x,\alpha)\|.$$

Como la anterior desigualdad se cumple para todo $\varepsilon > 0$ arbitrario, por ser $\mathcal{A}_1$ álgebra de Banach,

$$\|(x,\alpha)\|^2 \leq \|(x,\alpha)^*(x,\alpha)\| \leq \|(x,\alpha)^*\|\|(x,\alpha)\|.$$

Luego $\|(x,\alpha)\| \leq \|(x,\alpha)^*\|$ y $\|(x,\alpha)^*\| \leq \|(x,\alpha)^{**}\| = \|(x,\alpha)\|$, es decir, $\|(x,\alpha)\| = \|(x,\alpha)^*\|$. Por lo tanto $\|(x,\alpha)\|^2 \leq \|(x,\alpha)^*(x,\alpha)\| \leq \|(x,\alpha)\|^2$.

3. Teoría de Gelfand

En este capítulo se estudiará la teoría de Gelfand, que está enunciada para álgebras de Banach unitarias y conmutativas, luego todos los resultados serán para álgebras de este tipo. Para ello primero se definirá el espectro de un álgebra y se estudiarán algunas propiedades, entre ellas destaca el resultado que asegura que es un espacio de Hausdorff compacto. En la primera sección se tratarán los ideales de un álgebra, pues, como se demostrará, los ideales maximales de un álgebra de Banach unitaria conmutativa forman el espectro de dicha álgebra. En la segunda sección se definirá la transformada de Gelfand y se estudiarán sus propiedades con el fin de llegar al teorema de Gelfand-Naimark, que asegura que la transformada es un isomorfismo isométrico que conserva la involución. Por último se verá cómo adaptar esta teoría a un álgebra no unitaria utilizando la extensión a una unitaria estudiada en los anteriores capítulos.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria conmutativa, esto es, dados $x, y \in \mathcal{A}$, $xy = yx$. Se llama *espectro de* $\mathcal{A}$ y se denota por $\sigma(\mathcal{A})$ al conjunto de homomorfismos complejos no nulos en $\mathcal{A}$.

Notemos que $\sigma(\mathcal{A})$ es un subespacio del espacio dual de $\mathcal{A}$, es decir, de los funcionales lineales acotados en $\mathcal{A}$, luego cuando se hable de propiedades topológicas referidas a $\sigma(\mathcal{A})$ serán en la topología $*$-débil de $\mathcal{A}'$ definida en el apéndice A.

Este resultado recoge algunas propiedades del espectro que se deducen de las de los homomorfismos complejos.

Proposición 3.1. *Sea $h \in \sigma(\mathcal{A})$ donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach unitaria conmutativa. Se cumple:*

(a) $h(e) = 1$.

(b) Si $x \in \mathcal{A}$ *es invertible entonces* $h(x) \neq 0$.

(c) $|h(x)| \leq \|x\|$ *para todo* $x \in \mathcal{A}$.

Demostración.

(a) Como h es no nulo, sea $x \in \mathcal{A}$ tal que $h(x) \neq 0$. Entonces $h(e)h(x) = h(ex) = h(x)$ y se deduce $h(e) = 1$.

(b) $h(x^{-1})h(x) = h(x^{-1}x) = h(e) = 1$ por (a), luego $h(x)$ no puede ser nulo.

(c) Se tiene aplicando la proposición (1.10).

□

A continuación una propiedad importante del espectro, pues permitirá la aplicación de resultados necesarios para demostrar el teorema espectral.

Proposición 3.2. *$\sigma(\mathcal{A})$ es un espacio de Hausdorff compacto.*

Demostración.
Como $\mathcal{A}$ es de Banach, su espacio dual $\mathcal{A}'$ también lo es. Sea B la bola cerrada unidad de $\mathcal{A}'$. Por el teorema de Banach-Alaoglu (A.2), B es compacto en la topología $*$-débil y, por (1.10), $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq B$. Entonces basta ver que $\sigma(\mathcal{A})$ es cerrado en $\mathcal{A}'$.
Sea $\Lambda_0 \in \overline{\sigma(\mathcal{A})}$, veamos que es un homomorfismo complejo no nulo en $\mathcal{A}$. Como $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}'$, ya se tiene que Λ_0 es un funcional lineal acotado en $\mathcal{A}$.
Sean $x, y \in \mathcal{A}$. Dado $\varepsilon > 0$, sea

$$W = \{\Lambda \in \mathcal{A}' \;/\; |\Lambda z - \Lambda_0 z| < \varepsilon \;\forall z \in \{e, x, y, xy\}\}.$$

W es un entorno de Λ_0 y por tanto existe un $h \in \sigma(\mathcal{A})$ que está en W. Se cumple

$$|1 - \Lambda_0 e| = |h(e) - \Lambda_0 e| < \varepsilon \qquad \text{y}$$

$$\begin{aligned} |\Lambda_0(xy) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y| &= |\Lambda_0(xy) - h(xy) + h(x)h(y) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y| = \\ &= |(\Lambda_0(xy) - h(xy)) + (h(y) - \Lambda_0 y)h(x) + (h(x) - \Lambda_0 x)\Lambda_0 y| < \\ &< \varepsilon + \varepsilon|h(x)| + \varepsilon|\Lambda_0 y| \leq \varepsilon(1 + \|x\| + M\|y\|), \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha usado (1.10) y que Λ_0 es acotado por M. Como esto se da para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $\Lambda_0 e = 1$ y $\Lambda_0(xy) = \Lambda_0 x \Lambda_0 y$, por tanto Λ_0 es un homomorfismo complejo no nulo en $\mathcal{A}$.

□

3.1. Ideales

Los elementos del espectro de un álgebra de Banach se pueden asociar mediante una biyección con los ideales maximales de ese álgebra como se verá en el último resultado de esta sección. Esto facilita algunos razonamientos y por eso conviene desarrollar algunas propiedades de los ideales.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja conmutativa. Una subálgebra $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ se dice que es un *ideal de* $\mathcal{A}$ si cumple $xy \in \mathcal{I}$ para todos $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{I}$. Si $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ se dice que $\mathcal{I}$ es un *ideal propio*, y si además no está contenido en ningún otro ideal propio se dice que es un *ideal maximal*.

Los ideales propios se pueden caracterizar de la siguiente forma.

Nota 3.3. Un ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ es propio si, y sólo si, no contiene al elemento neutro $e \in \mathcal{A}$ pues $x = ex = xe \in \mathcal{I}$ para $x \in \mathcal{A}$.

Algunas propiedades útiles de los ideales en álgebras de Banach son las siguientes.

Proposición 3.4. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria conmutativa e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ un ideal. Se tiene:*

(a) Si $\mathcal{I}$ es propio no contiene elementos invertibles.

(b) $\overline{\mathcal{I}}$ es un ideal. Si además $\mathcal{I}$ es propio, $\overline{\mathcal{I}}$ también lo es.

(c) Si $\mathcal{I}$ es propio entonces está contenido en un ideal maximal.

(d) Si $\mathcal{I}$ es maximal entonces es cerrado.

Demostración.

(a) Si existe $x \in \mathcal{I}$ invertible, $x^{-1} \in \mathcal{A}$ y $x^{-1}x = e \in \mathcal{I}$, luego $\mathcal{I}$ no es propio por lo visto en la nota (3.3).

(b) $\overline{\mathcal{I}}$ es subálgebra de $\mathcal{A}$. Para $x \in \mathcal{A}$, $y \in \overline{\mathcal{I}}$, existe una sucesión de elementos de $\mathcal{I}$, $\{y_n\}_n$, que converge a y en $\mathcal{A}$ y que cumple $xy_n \in \mathcal{I}$ por ser este un ideal. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 de forma que para todo $n \geq n_0$, por ser $\mathcal{A}$ álgebra de Banach,

$$\|xy - xy_n\| = \|x(y - y_n)\| \leq \|x\|\|y - y_n\| < \varepsilon,$$

de forma que $xy \in \overline{\mathcal{I}}$. Ahora, si $\mathcal{I}$ es propio, por (a) está contenido en el conjunto de elementos no invertibles de $\mathcal{A}$, cerrado por la proposición (1.11). Luego $\overline{\mathcal{I}}$ está en el conjunto de elementos no invertibles y $e \notin \overline{\mathcal{I}}$, por lo que $\overline{\mathcal{I}}$ es propio por (3.3).

(c) Sea H el conjunto de los ideales propios distintos de $\mathcal{I}$ que lo contienen ordenado por la inclusión estricta. Como H tiene un orden parcial estricto, por el principio del máximo (ver [11] pág. 78), existe $M \subset H$ simplemente ordenado y maximal en H. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los elementos de M, que es un ideal que contiene a $\mathcal{I}$ por ser unión de ideales simplemente ordenados que contienen a $\mathcal{I}$. $\mathcal{M}$ es propio pues no contiene al elemento neutro de $\mathcal{A}$ por ser unión de ideales propios. Por último, como M es maximal en H, $\mathcal{M}$ es un ideal maximal en $\mathcal{A}$.

(d) $\mathcal{I}$ es propio por ser maximal, luego $\overline{\mathcal{I}}$ es un ideal propio que contiene a $\mathcal{I}$ por (b). Por definición de ideal maximal debe ser $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}}$ e $\mathcal{I}$ es cerrado.

□

Este resultado se necesita para la demostración del próximo teorema y utiliza la aplicación cociente, cuyas propiedades están detalladas en el primer capítulo del libro de Rudin [13], en el apartado de espacios cocientes.

Proposición 3.5. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria conmutativa, $\mathcal{I}$ un ideal propio cerrado de $\mathcal{A}$ y $\pi\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ la aplicación cociente $x \longmapsto x + \mathcal{I}$. Entonces $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un álgebra de Banach y π es un homomorfismo.*

Demostración.
La aplicación π es lineal por definición como se puede comprobar en el apartado (1.40) de [13] y, para $(x' - x), (y' - y) \in \mathcal{I}$ donde $x, x', y, y' \in \mathcal{A}$, por ser $\mathcal{I}$ un ideal se tiene $(x' - x)y' + x(y' - y) = x'y' - xy \in \mathcal{I}$ y por tanto $\pi(x'y') = \pi(xy)$. Se puede definir entonces el producto en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ como $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$. Así $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un álgebra compleja y π un homomorfismo.
Como $\mathcal{A}$ es completo, por el resultado (1.41) de [13] se tiene que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es completo también. Ahora, para la norma del cociente definida como

$$\|\pi(x)\| = \text{ínf}\{\|x + m\| \;/\; m \in \mathcal{I}\}$$

se tiene $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ pues $0 \in \mathcal{I}$ por ser ideal y por tanto π es continua. Por definición de la norma cociente, para $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ y $\delta > 0$ se tiene $\|x_i + y_i\| \leq \|\pi(x_i)\| + \delta$ para $i = 1, 2$ y para ciertos $y_1, y_2 \in \mathcal{I}$. Como $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \in x_1x_2 + \mathcal{I}$ y $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach,

$$\|\pi(x_1x_2)\| \leq \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \leq \|x_1 + y_1\|\|x_2 + y_2\|.$$

Como δ es arbitrario, $\|\pi(x_1)\pi(x_2)\| \leq \|\pi(x_1)\|\|\pi(x_2)\|$ y $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un álgebra de Banach. El elemento neutro es $\pi(e)$ por cómo está definido el producto. □

Teorema 3.6. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria conmutativa. La aplicación $h \longmapsto \ker(h)$ es biyectiva entre $\sigma(\mathcal{A})$ y el conjunto de ideales maximales en $\mathcal{A}$.*

Demostración.
Para $h \in \sigma(\mathcal{A})$, $\ker(h)$ es un ideal. Como $h(e) = 1 \neq 0$, $e \notin \ker(h)$ y por tanto $ker(h)$ es propio. Además es un ideal maximal por tener codimensión 1. Luego la aplicación tiene llegada en el conjunto de ideales maximales de $\mathcal{A}$.
Como $ker(h)$ tiene codimensión 1 y $e \notin \ker(h)$, cualquier $x \in \mathcal{A}$ se puede expresar de forma única como $x = \alpha e + y$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ e $y \in \ker(h)$. Aplicando h se tiene $h(x) = h(\alpha e + y) = \alpha$ y entonces $x = h(x)e + y$.
Si $g \in \sigma(\mathcal{A})$ es tal que $\ker(g) = \ker(h)$ entonces

$$g(x) = g(h(x)e + y) = h(x)g(e) + g(y) = h(x)$$

para todo $x \in \mathcal{A}$, es decir, $g = h$ y la aplicación es inyectiva.
Sea $\mathcal{M}$ un ideal maximal de $\mathcal{A}$, que es cerrado por la proposición (3.4(d)). Considerando la acplicación cociente $\pi\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$, por la proposición (3.5), es un homomorfismo y $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ un álgebra de Banach. Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}/\mathcal{M}$ es un ideal, se tiene que $\pi^{-1}(\mathcal{I})$ es un ideal en $\mathcal{A}$ con $\mathcal{M} \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{A}$. Como $\mathcal{M}$ es maximal solo puede ser $\pi^{-1}(\mathcal{I}) = \mathcal{M}$ o $\pi^{-1}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}$, es decir, $\mathcal{I}$ es el ideal nulo o $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ y $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ no contiene ideales no triviales. Si $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ tuviera algún elemento no nulo no invertible, este generaría un ideal no trivial, luego todo elemento no nulo de $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ es invertible. Por el teorema de Gelfand-Mazur (1.18) existe un isomorfismo isométrico ϕ entre $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ y $\mathbb{C}$. Luego $\phi \circ \pi$ es un elemento de $\sigma(\mathcal{A})$ que cumple que $\ker(\phi \circ \pi) = \mathcal{M}$ y la aplicación es sobreyectiva. □

3.2. Transformada de Gelfand

En este apartado se estudiará la transformada de Gelfand, una aplicación que asocia los elementos de un álgebra de Banach con funciones continuas que toman valores en el espectro del álgebra. Además, como se verá en el teorema de Gelfand-Naimark, en una C*-álgebra la transformada conserva las operaciones, la norma y la involución.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria conmutativa. Para cada $x \in \mathcal{A}$ se define la función

$$\begin{array}{rccl} \hat{x}\colon & \sigma(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & h & \longmapsto & \hat{x}(h) = h(x). \end{array}$$

La *transformada de Gelfand en* $\mathcal{A}$ es la aplicación $\Gamma\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$, donde $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$ es el espacio de las funciones continuas en $\sigma(\mathcal{A})$, dada por $x \longmapsto \hat{x}$. Si es necesario especificar el álgebra donde se considera la transformada, esta se denota como $\Gamma_{\mathcal{A}}$.

Nota 3.7. La transformada de Gelfand está bien definida pues $\hat{x}$ es continua en $\sigma(\mathcal{A})$ considerando en $\sigma(\mathcal{A})$ la *topología de Gelfand*, que es la topología más débil que hace cada $\hat{x}$ continua para $x \in \mathcal{A}$. La topología de Gelfand es la restricción a $\sigma(\mathcal{A})$ de la topología $*$-débil en $\mathcal{A}'$ vista en el apéndice A.

A continuación se verán unos resultados sobre la transformada de Gelfand para álgebras de Banach unitarias conmutativas que se aplicarán en la prueba del teorema de Gelfand-Naimark. En ellos se ve además la necesidad de pedir que el álgebra sea una C*-álgebra, pues en caso contrario no se cumple necesariamente la propiedad de isomorfismo isométrico de la transformada, sólo propiedades más débiles.

Proposición 3.8. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria conmutativa. La transformada de Gelfand es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$ y $\hat{e} = 1$.*

Demostración.
Sean $x, y \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Para todo $h \in \sigma(\mathcal{A})$,

$$\widehat{\lambda x}(h) = h(\lambda x) = \lambda h(x) = \lambda \hat{x}(h) \quad \text{y}$$

$$\widehat{x+y}(h) = h(x+y) = h(x) + h(y) = \hat{x}(h) + \hat{y}(h),$$

es decir, $\Gamma(\lambda x) = \lambda \Gamma(x)$ y $\Gamma(x+y) = \Gamma(x) + \Gamma(y)$, luego Γ es lineal. También

$$\hat{x}(h)\hat{y}(h) = h(x)h(y) = h(xy) = \widehat{xy}(h)$$

para todo $h \in \sigma(\mathcal{A})$, luego $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(xy)$ y Γ es un homomorfismo. Además, por el resultado (3.1(a)), $\hat{e}(h) = h(e) = 1$ para todo $h \in \sigma(\mathcal{A})$. □

Proposición 3.9. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria conmutativa y $x \in \mathcal{A}$. Entonces:*

(a) x es invertible si, y sólo si, $\hat{x}$ no se anula nunca.

(b) La imagen de $\hat{x}$ es $\sigma(x)$ y
$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|.$$

Demostración.

(a) x es no invertible si, y sólo si, el ideal en $\mathcal{A}$ generado por x es propio, lo que equivale por la proposición (3.4(c)) a que x esté contenido en un ideal maximal. Ahora, por el teorema (3.6), x está contenido en un ideal maximal si, y sólo si, existe un $h \in \sigma(\mathcal{A})$ con $h(x) = \hat{x}(h) = 0$.

(b) Para $\lambda \in \mathbb{C}$, por definición $\lambda \in \sigma(x)$ es equivalente a que $\lambda e - x$ sea no invertible. Por el apartado anterior, $\lambda e - x$ es no invertible si, y sólo si, existe $h \in \sigma(\mathcal{A})$ con $(\widehat{\lambda e - x})(h) = 0$, es decir, $\hat{x}(h) = \lambda$ por ser la transformada de Gelfand un homomorfismo como se probó en la proposición (3.8). Por lo tanto la imagen de $\hat{x}$ es $\sigma(x)$. De aquí se deduce la igualdad

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\hat{x}(h)| \ / \ h \in \sigma(\mathcal{A})\} = \sup\{|\lambda| \ / \ \lambda \in \sigma(x)\} = \rho(x).$$

La desigualdad se tiene por la definición de radio espectral y la proposición (1.8(b)).

□

Proposición 3.10. *Sea $\mathcal{A}$ un $*$-álgebra de Banach unitaria conmutativa generada por $S = \{x_0, x_0^*, e\}$, esto es, que el conjunto de las combinaciones lineales de productos de elementos de S es denso en $\mathcal{A}$. Si se cumple $\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}$ para todo $x \in \mathcal{A}$, entonces $\widehat{x_0}$ es un homeomorfismo entre $\sigma(\mathcal{A})$ y $\sigma(x_0)$.*

Demostración.
Por (1.14), $\sigma(x_0)$ es un compacto de $\mathbb{C}$, que es un espacio de Hausdorff, luego $\sigma(x_0)$ es de Hausdorff compacto y, como se probó en (3.2), $\sigma(\mathcal{A})$ también lo es. Por (3.9(b)), la imagen de $\widehat{x_0}$ es $\sigma(x_0)$, luego por la continuidad de esta falta ver la inyectividad.
Notemos que todo $h \in \sigma(\mathcal{A})$ viene determinado por los valores $h(x_0)$ y $h(x_0^*)$, pero $h(x_0^*) = \overline{h(x_0)}$ y por tanto h está determinado únicamente por $h(x_0)$. Si $h_1, h_2 \in \sigma(\mathcal{A})$ cumplen $\widehat{x_0}(h_1) = \widehat{x_0}(h_2)$, por la definición de la transformada de Gelfand esto es $h_1(x_0) = h_2(x_0)$, de donde $h_1 = h_2$ y $\widehat{x_0}$ es inyectiva.
Como $\widehat{x_0}\colon \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow \sigma(x_0)$ es continua y biyectiva entre espacios de Hausdorff compactos, es un homeomorfismo. □

Proposición 3.11. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unitaria conmutativa y $x \in \mathcal{A}$. Se cumple $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$ si, y sólo si, $\|x^{2^k}\| = \|x\|^{2^k}$ para todo $k \geq 1$.*

Demostración.
Si $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$, para $k \geq 1$ se tiene

$$\|x^{2^k}\| \leq \|x\|^{2^k} = \|\hat{x}\|_\infty^{2^k} = \|\hat{x}^{2^k}\|_\infty = \|\widehat{(x^{2^k})}\|_\infty \leq \|x^{2^k}\|,$$

donde se ha usado que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach, las propiedades de la norma del supremo, el hecho de que la transformada de Gelfand es un homomorfismo visto en la proposición (3.8) y la desigualdad de (3.9(b)). Luego para cada $k \geq 1$ se cumple $\|x^{2^k}\| = \|x\|^{2^k}$.
Si $\|x^{2^k}\| = \|x\|^{2^k}$ para todo $k \geq 1$,

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) = \lim_{k\to\infty} \|x^{2^k}\|^{1/2^k} = \lim_{k\to\infty} (\|x\|^{2^k})^{1/2^k} = \|x\|,$$

donde se han usado las igualdades de los resultados (3.9(b)) y (1.17). □

Teorema 3.12 (Gelfand-Naimark). *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra unitaria conmutativa. La transformada de Gelfand es un $*$-isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$, es decir, un isomorfismo isométrico que cumple $\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}$ para todo $x \in \mathcal{A}$, o equivalentemente,*

$$h(x^*) = \overline{h(x)} \quad \forall x \in \mathcal{A},\ h \in \sigma(\mathcal{A}).$$

En particular, x es autoadjunto si, y sólo si, $\hat{x}$ es una función real.

Demostración.
En primer lugar veamos que $h(u)$ es real para $h \in \sigma(\mathcal{A})$ y $u \in \mathcal{A}$ autoadjunto. Sea $z = u + ite$ para $t \in \mathbb{R}$. Si $h(u) = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces por ser $h \in \sigma(\mathcal{A})$ se tiene $h(z) = \alpha + i\beta + it$. Como

$$z^*z = (u + ite)^*(u + ite) = (u - ite)(u + ite) = u^2 + t^2e$$

y usando el resultado (3.1(c)), se tiene

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |h(z)|^2 \leq \|z\|^2 = \|z^*z\| = \|u^2 + t^2 e\| \leq \|u\|^2 + t^2$$

por ser $\mathcal{A}$ una C*-álgebra. Entonces $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|u\|^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo que implica que β debe ser 0 y $h(u)$ real.
Sea $x \in \mathcal{A}$ y su descomposición $x = u + iv$ con $u, v \in \mathcal{A}$ autoadjuntos por lo visto en (2.2). Como $x^* = u - iv$ y $\hat{u}$ y $\hat{v}$ son reales por el paso anterior, para todo $h \in \sigma(\mathcal{A})$,

$$\widehat{x^*}(h) = h(x^*) = h(u - iv) = h(u) - ih(v) = (\hat{u} - i\hat{v})(h) = \overline{\hat{x}(h)}.$$

Para $x \in \mathcal{A}$ sea $y = x^*x$, que es autoadjunto pues $y^* = (x^*x)^* = x^*x^{**} = y$. Entonces para $k \geq 1$, por ser $\mathcal{A}$ una C*-álgebra,

$$\|y^{2^k}\| = \|(y^{2^{k-1}})^* y^{2^{k-1}}\| = \|y^{2^{k-1}}\|^2,$$

de donde se prueba por inducción que $\|y^{2^k}\| = \|y\|^{2^k}$ para cualquier $k \geq 1$. Luego por la proposición (3.11) se tiene $\|\hat{y}\|_\infty = \|y\|$. Usando que Γ es un homomorfismo visto en (3.8) y por tanto $\hat{y} = \widehat{x^*x} = \widehat{x^*}\hat{x} = \overline{\hat{x}}\hat{x} = |\hat{x}|^2$,

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|y\| = \|\hat{y}\|_\infty = \||\hat{x}|^2\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2,$$

de donde se deduce que $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$ y la transformada es una isometría.
Ahora, la imagen de Γ, $\Gamma(\mathcal{A})$, es una subálgebra de $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$ cerrada para la conjugación compleja. Además $\Gamma(\mathcal{A})$ contiene a las constantes pues $\hat{e} = 1$ y separa puntos pues, dados $h_1, h_2 \in \sigma(\mathcal{A})$ distintos, existe al menos un $x \in \mathcal{A}$ con $\hat{x}(h_1) = h_1(x) \neq h_2(x) = \hat{x}(h_2)$. Como $\sigma(\mathcal{A})$ es un compacto de Hausdorff por (3.2), se puede aplicar el teorema de Stone-Weierstrass (ver [13] pág. 122) para concluir que $\Gamma(\mathcal{A})$ es denso en $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$.
Como Γ es una isometría, $\Gamma(\mathcal{A})$ es cerrado en $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$ y, por ser también denso, $\Gamma(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$. Por último, por ser la transformada una isometría lineal, es inyectiva, luego se concluye que es un isomorfismo. □

El siguiente resultado es consecuencia de este último teorema y será necesario para demostrar el teorema espectral.

Proposición 3.13. *Sean $\mathcal{A}$ una C*-álgebra unitaria y $\mathcal{B}$ una $*$-algebra.*

(a) Si $x \in \mathcal{A}$ cumple $x^*x = xx^*$ entonces $\rho(x) = \|x\|$.

(b) Si $\phi\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un $*$-homomorfismo entonces $\|\phi\| \leq 1$.

Demostración.

(a) Sea $\mathcal{C}$ la subálgebra de $\mathcal{A}$ cerrada generada por $\{x, x^*, e\}$. Notemos que $\mathcal{C}$ es una C*-álgebra unitaria conmutativa, pues es completa por ser cerrada en $\mathcal{A}$, conmutativa por la hipótesis de x y el resto de propiedades se obtienen de las de $\mathcal{A}$. Por (3.9(b)), $\|\Gamma_{\mathcal{C}} x\| = \rho(x)$ y, por el teorema de Gelfand-Naimark (3.12), $\|\Gamma_{\mathcal{C}} x\| = \|x\|$ obteniendo la igualdad.

(b) Como ϕ es un homomorfismo, es lineal y continuo, luego acotado. Sea $M > 0$ con $\|\phi\| = M$. Para $y \in \mathcal{B}$ y $n \in \mathbb{N}$, por ser $\mathcal{A}$ una C*-álgebra,

$$\|\phi(y^*y)^n\| \leq M\|(y^*y)^n\| \leq M\|y^*y\|^n = M\|y^*y\|^{2n}.$$

Como $\phi(y^*y)^* = \phi((y^*y)^*) = \phi(y^*y)$, se tiene en particular que $\phi(y^*y)^*\phi(y^*y) = \phi(y^*y)\phi(y^*y)^*$ y, por el apartado (a) y el teorema (1.17),

$$\|\phi(y)\|^2 = \|\phi(y)^*\phi(y)\| = \|\phi(y^*)\phi(y)\| = \|\phi(y^*y)\| = \rho(\phi(y^*y)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \|\phi(y^*y)^n\|^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} M^{1/n}\|y\|^2 = \|y\|^2.$$

Luego efectivamente $\|\phi\| \leq 1$.

□

Nota 3.14. En la línea de (1.2) y (2.4), vamos a ver cómo podemos adaptar la teoría de Gelfand a un álgebra de Banach no unitaria conmutativa $\mathcal{A}$. Usaremos la misma notación que en dichas notas.

Notemos en primer lugar que $\mathcal{A} \times \{0\}$ es un ideal maximal de $\mathcal{A}_1$. El hecho de que sea una subálgebra se tiene por la forma en la que se han definido la suma y el producto en $\mathcal{A}_1$. Por ese mismo motivo, si $(x, \alpha) \in \mathcal{A}_1$ e $(y, 0) \in \mathcal{A} \times \{0\}$, $(x, \alpha)(y, 0) = (xy + \alpha y, 0) \in \mathcal{A} \times \{0\}$, cumpliendo la definición de ideal, que además es propio pues $(x, \alpha) \in \mathcal{A}_1$ no está en $\mathcal{A} \times \{0\}$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$ no nulo. Si $\widetilde{\mathcal{A}}$ fuera un ideal propio distinto de $\mathcal{A} \times \{0\}$ y que lo contiene, existiría un $(x, \alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ con $\alpha \neq 0$, por lo que se podría obtener cualquier $(y, \beta) \in \mathcal{A}_1$ haciendo

$$(y, \beta) = (y - \frac{x}{\alpha}, 0) + \frac{\beta}{\alpha}(x, \alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}.$$

Definiremos el espectro de $\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{A})$, como antes, es decir, el conjunto de homomorfismos complejos no nulos en $\mathcal{A}$. Cada $h \in \sigma(\mathcal{A})$ se extiende a $\mathcal{A}_1$ por

$$h_1(x, \alpha) = h(x) + \alpha \qquad \forall (x, \alpha) \in \mathcal{A}_1.$$

Cada h_1 definido de esta forma es un homomorfismo complejo no nulo en $\mathcal{A}_1$ pues, dados $(x, \alpha), (y, \beta) \in \mathcal{A}_1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

- $h_1((x,\alpha)+(y,\beta)) = h(x+y)+(\alpha+\beta) = (h(x)+\alpha)+(h(y)+\beta) = h_1(x,\alpha)+h_1(y,\beta)$.
- $h_1(\lambda(x,\alpha)) = h(\lambda x) + \lambda\alpha = \lambda(h(x)+\alpha) = \lambda h_1(x,\alpha)$.
- $h_1((x,\alpha)(y,\beta)) = h_1(xy+\alpha y+\beta x, \alpha\beta) = h(xy+\alpha y+\beta x)+\alpha\beta = h(xy)+\alpha h(y)+\beta h(x)+\alpha\beta = (h(x)+\alpha)(h(y)+\beta) = h_1(x,\alpha)h_1(y,\beta)$.

Esta extensión es única pues la imagen del elemento neutro de $\mathcal{A}_1$ por todo $h_1 \in \sigma(\mathcal{A}_1)$ debe ser $h_1(0,1) = 1$ por (3.1(a)).
Recíprocamente, si $h_1 \in \sigma(\mathcal{A}_1)$ distinguimos dos casos:

- Si el ideal maximal de $\mathcal{A}_1$ asociado a h_1 por el resultado (3.6) es $\mathcal{A} \times \{0\}$ se tiene $\ker h_1 = \mathcal{A} \times \{0\}$ y $h_1(x,\alpha) = \alpha$ para cada $(x,\alpha) \in \mathcal{A}_1$. Esto coincidiría con la extensión de la aplicación nula de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{C}$ como acabamos de definir, $0_1(x,\alpha) = 0(x)+\alpha = \alpha$.
- En otro caso, h_1 restringido a $\mathcal{A} \times \{0\}$ es un elemento de $\sigma(\mathcal{A})$ si vemos $\mathcal{A} \times \{0\}$ como $\mathcal{A}$.

Entonces podemos establecer una biyección entre $\sigma(\mathcal{A}_1)$ y $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$, donde aquí 0 es la aplicación nula de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{C}$.
Para cada $h \in \sigma(\mathcal{A})$ se tiene por (3.1(c))

$$|h(x)| = |h_1(x,0)| \leq \|(x,0)\| = \|x\| \qquad \forall x \in \mathcal{A}$$

para ambas normas consideradas en (1.2) y (2.4), pues vimos que se daba la última igualdad. Por lo tanto $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ es cerrado en la bola unidad para la topología $*$-débil de $\mathcal{A}'$, y, por ser esta un conjunto compacto de Hausdorff, $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ lo es. Además $\sigma(\mathcal{A})$ es compacto si $\{0\}$ no está en su adherencia y localmente compacto si lo está, siendo su compactificación por un punto $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$.
Definimos entonces la transformada de Gelfand en $\mathcal{A}$ de la misma forma que en el caso unitario: para $x \in \mathcal{A}$,

$$(\Gamma_{\mathcal{A}} x)(h) = \widehat{x}(h) = h(x) \qquad \text{para cada } h \in \sigma(\mathcal{A}).$$

La transformada en $\mathcal{A}$ se relaciona con la transformada en $\mathcal{A}_1$ de la siguiente forma

$$\widehat{x}(h) = h(x) = h_1(x,0) = \widehat{(x,0)}(h_1).$$

Es decir, en la transformada de Gelfand en $\mathcal{A}_1$ dada por

$$\begin{array}{rccl} \Gamma_{\mathcal{A}_1}: & \mathcal{A}_1 & \longrightarrow & \mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}_1)) \\ & (x,\alpha) & \longmapsto & \Gamma_{\mathcal{A}_1} = \widehat{(x,\alpha)}, \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccl} \widehat{(x,\alpha)}\colon & \sigma(\mathcal{A}_1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & h_1 & \longmapsto & \widehat{(x,\alpha)}(h_1) = h_1(x,\alpha) \end{array}$$

consideramos la restricción a $\mathcal{A} \times \{0\}$. Haciendo la identificación de $\mathcal{A} \times \{0\}$ con $\mathcal{A}$ y $\sigma(\mathcal{A}_1)$ con $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ obtenemos la transformada en $\mathcal{A}$, que va de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\})$.

Además $\widehat{(x,0)}(0_1) = 0$, luego por continuidad $\widehat{x}$ se anula en el infinito en caso de que $\sigma(\mathcal{A})$ no sea compacto, obteniendo que $\Gamma_{\mathcal{A}}$ es una aplicación de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}_0(\sigma(\mathcal{A}))$ (el conjunto de funciones continuas en $\sigma(\mathcal{A})$ que se anulan en infinito).

Por último se puede ver que si $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra, $\Gamma_{\mathcal{A}}$ es un $*$-isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}_0(\sigma(\mathcal{A}))$. Como $\mathcal{A}_1$ es una C*-álgebra unitaria conmutativa, su transformada de Gelfand es un $*$-isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}_1))$ por el teorema de Gelfand-Naimark (3.12). Como $\mathcal{A}$ (visto como $\mathcal{A} \times \{0\}$) es un ideal maximal de $\mathcal{A}_1$ con $\ker 0_1 = \mathcal{A}$, $\{f \in \mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}_1)) \ / \ f(0_1) = 0\}$ es un ideal maximal de $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}_1))$. Se usa la relación entre las transformadas para ver que es un $*$-isomorfismo. Es una isometría por el hecho de que $\Gamma_{\mathcal{A}_1}$ lo es y $\|(x,0)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

4. Operadores acotados en espacios de Hilbert

En este capítulo se estudiará el espacio de operadores acotados en espacios de Hilbert, que es el espacio para el cual se enuncia el teorema espectral. En la primera sección se presentarán las propiedades útiles para este trabajo del producto interno y de los espacios de Hilbert, y se dará un resultado que asocia mediante una isometría lineal conjugada cada elemento de un espacio de Hilbert con un funcional lineal acotado en este. En la segunda sección se verán algunas propiedades de los operadores acotados en un espacio de Hilbert con el fin de dotar a este espacio de una involución y ver que es una C*-álgebra.

4.1. Espacios de Hilbert

Antes de la definición de espacio de Hilbert es interesante ver algunas propiedades de los espacios con producto interno, que se define a continuación.

Definición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial complejo. Un *producto interno* sobre $\mathcal{H}$ es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ que cumple para $x, y, z \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:

(a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

(b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

(c) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

(d) $\langle x, x \rangle \geq 0$.

(e) $\langle x, x \rangle = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

Se dice que $\mathcal{H}$ es un espacio *prehilbertiano* o con producto interno.

De esta definición se pueden deducir algunas propiedades útiles del producto escalar:

(1) Dado $y \in \mathcal{H}$, si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ entonces $y = 0$ pues, tomando $x = y$ se tiene $\langle y, y \rangle = 0$.

(2) Dados $y, z \in \mathcal{H}$, si $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$ entonces $y = z$ aplicando la anterior propiedad a $y - z$.

Nota 4.1. El producto interno cumple que, fijado y, $x \longmapsto \langle x, y \rangle$ es lineal y, fijado x, $y \longmapsto \langle x, y \rangle$ es antilineal, esto es $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$ y $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

Definición. Para V y X espacios vectoriales, una aplicación $f \colon V \times V \longrightarrow X$ que cumple las propiedades de la nota anterior, es decir, es lineal en la primera componente y antilineal en la segunda, se dice que es *sesquilineal*.

En un espacio prehilbertiano se puede definir el concepto de ortogonalidad como sigue.

Definición. Sean $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano, $x, y \in \mathcal{H}$ y $E, F \subseteq \mathcal{H}$.

- Si $\langle x, y \rangle = 0$ se dice que x e y son *ortogonales* y se denota como $x \perp y$ (es una relación simétrica por las propiedades del producto interno).
- Si $x \perp y$ para todos $x \in E, y \in F$ se dice que E y F son *ortogonales* y se denota como $E \perp F$.
- El conjunto de elementos ortogonales a E es el *ortogonal de* E y se denota como $E^{\perp}$.

A partir del producto interno se puede obtener una norma, para verlo es útil la siguiente proposición. Además esta desigualdad aparecerá con frecuencia en demostraciones.

Proposición 4.2 (**Desigualdad de Cauchy-Schwarz**)**.** *Sean $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $x, y \in \mathcal{H}$. Entonces*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}.$$

Demostración.
Si $y = 0$ la desigualdad es inmediata porque ambos lados se anulan. Suponemos $y \neq 0$ y se tiene para todo $\alpha \in \mathbb{C}$

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha \langle y, x \rangle + \alpha\overline{\alpha} \langle y, y \rangle .$$

Tomando $\alpha = \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle}$ se tiene $\overline{\alpha} = \frac{\langle y,x \rangle}{\langle y,y \rangle}$ y

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} - \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} =$$

$$= \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle},$$

de donde se obtiene la desigualdad. □

Proposición 4.3. *En todo espacio $\mathcal{H}$ prehilbertiano se puede definir una norma de la siguiente forma*

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Demostración.
Se comprueba por las propiedades del producto interno que efectivamente es una norma:

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ y $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$ por las propiedades (d) y (e).

- Para $x \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, $\|\alpha x\| = \langle \alpha x, \alpha x \rangle^{1/2} = (\alpha\overline{\alpha}\langle x, x \rangle)^{1/2} = (|\alpha|^2 \langle x, x \rangle)^{1/2} = |\alpha|\|x\|$ por (c).
- Para $x, y \in \mathcal{H}$, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (4.2),

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle =$$

$$= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

de donde se obtiene la desigualdad triangular.

□

La continuidad del producto interno se deduce de la continuidad de la norma.

Proposición 4.4. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot, \cdot \rangle : & \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x, y) & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{array}$$

es continua.

Demostración.
Sea $(x_0, y_0) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Entonces, para todo $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (4.2)

$$|\langle x, y \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| = |\langle x, y \rangle - \langle x, y_0 \rangle + \langle x, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \leq$$

$$\leq |\langle x, y - y_0 \rangle| + |\langle x - x_0, y_0 \rangle| \leq \|x\|\|y - y_0\| + \|x - x_0\|\|y_0\|.$$

Por la continuidad de la norma, si $(x, y) \longrightarrow (x_0, y_0)$ el último término converge a 0 y por tanto $\langle x, y \rangle$ a $\langle x_0, y_0 \rangle$. □

De la norma definida a través del producto interno se obtienen las siguientes identidades.

Proposición 4.5 (Identidad del paralelogramo). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $x, y \in \mathcal{H}$, entonces*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Demostración.
$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. □

Proposición 4.6 (Identidades de polarización). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $x, y \in \mathcal{H}$. Entonces:*

$$Re(\langle x, y\rangle) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad y$$

$$Im(\langle x, y\rangle) = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2).$$

Demostración.
Notemos que, si $\langle x, y\rangle = a + ib$ para $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $i\langle x, y\rangle = ia - b$ y $\mathrm{Re}(i\langle x, y\rangle) = -\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle)$. Luego

- $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle = 2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle = 2(\langle x, y\rangle + \overline{\langle y, x\rangle}) = 4\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)$.

- $\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = \langle x+iy, x+iy\rangle - \langle x-iy, x-iy\rangle = \langle x, x\rangle - i\langle x, y\rangle + i\langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x, x\rangle - i\langle x, y\rangle + i\langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle = -2i\langle x, y\rangle + 2i\langle y, x\rangle = -2(i\langle x, y\rangle + \overline{i\langle x, y\rangle}) = -4\mathrm{Re}(i\langle x, y\rangle) = 4\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle)$.

□

A continuación se definen los espacios de Hilbert, espacios prehilbertianos a los que se les pide otra propiedad adicional.

Definición. Si $\mathcal{H}$ es un espacio prehilbertiano que es completo para la norma definida por su producto interno como en la proposición (4.3), se dice que es un *espacio de Hilbert.*

De aquí en adelante $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert. Estos espacios cuentan con muchas propiedades interesantes, a continuación se ven algunas que se usarán en el desarrollo del trabajo.

Teorema 4.7. *Si $C \subseteq \mathcal{H}$ es cerrado y convexo, entonces existe un único elemento de C con norma mínima.*

Demostración.
Sean $d = \text{ínf}\{\|x\| \ / \ x \in \mathbb{C}\}$ y $\{x_n\}_n$ una sucesión de elementos de C con $\|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} d$. Como C es convexo, $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in C$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$, luego $\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\| \geq d$ y por tanto $\|x_n + x_m\|^2 \geq 4d^2$. Por la identidad del paralelogramo, para todos $n, m \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - \|x_n + x_m\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4d^2,$$

y tomando límites se tiene que $\{x_n\}_n$ es de Cauchy en $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ es completo, existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $\{x_n\}_n$ converge a x en $\mathcal{H}$ y $\|x\| = d$. Además $x \in C$ por ser este cerrado en $\mathcal{H}$, luego se tiene la existencia de un elemento de norma mínima en C.

Si $y \in C$ es otro elemento de norma mínima $\|y\| = d$, por ser C convexo, $\frac{1}{2}(x+y) \in C$ y como antes $\|x+y\|^2 \geq 4d^2$. Por la identidad del paralelogramo,

$$0 \leq \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0,$$

de donde $\|x-y\| = 0$ y por tanto $x = y$. $\square$

Teorema 4.8. *Si $M \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio cerrado, entonces $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$, es decir, M y $M^{\perp}$ son subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ con intersección $\{0\}$ y cuya suma es $\mathcal{H}$.*

Demostración.
Para $E \subseteq \mathcal{H}$, como $x \longmapsto \langle x, y \rangle$ es lineal, $E^{\perp}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}$. Para ver que $E^{\perp}$ es cerrado sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de elementos de $E^{\perp}$ que converge hacia $x \in \mathcal{H}$. Para cualquier $y \in E$ se tiene por la continuidad del producto interno vista en (4.4) que

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, y \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle = 0,$$

luego $x \in E^{\perp}$ y es $E^{\perp}$ es cerrado.
Si $x \in M \cap M^{\perp}$ entonces $\langle x, x \rangle = 0$, luego $x = 0$ pues M y $M^{\perp}$ son subespacios vectoriales, si no, la intersección podría ser vacía.
Por último, sea $x \in \mathcal{H}$. El conjunto $x - M$ es convexo por ser subespacio vectorial y también cerrado, luego, usando el teorema (4.7), existe $z \in x - M$ con norma mínima. Notemos que z es de la forma $z = x - y$ con $y \in M$. Si $z \notin M^{\perp}$, existe un $y_1 \in M$ con $\langle z, y_1 \rangle = \alpha \neq 0$, donde se puede suponer $\alpha = 1$ dividiendo y_1 por $\overline{\alpha}$. Ahora, para todo $t > 0$, por ser z de norma mínima,

$$\|z\|^2 \leq \|z - ty_1\|^2 = \langle z - ty_1, z - ty_1 \rangle =$$

$$= \|z\|^2 - t\,\langle z, y_1 \rangle - t\,\langle y_1, z \rangle + t^2\|y_1\|^2 = \|z\|^2 + t^2\|y_1\|^2 - 2t.$$

Luego $t\|y_1\|^2 - 2 \geq 0$ para todo $t > 0$, es decir, $\|y_1\|^2 \geq \frac{2}{t}$ para todo $t > 0$, absurdo pues $\|y_1\|$ es constante. Entonces $z \in M^{\perp}$ y $x = y + z$ con $y \in M$ y $z \in M^{\perp}$. $\square$

Nota 4.9. De la proposición anterior podemos concluir que $\mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$.

Teorema 4.10. *Hay una isometría lineal conjugada de $\mathcal{H}$ en el espacio de funcionales lineales acotados en $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, dada por $y \longmapsto \Lambda$ donde*

$$\Lambda x = \langle x, y \rangle \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Demostración.
En primer lugar veamos que todo $\Lambda \in \mathcal{H}'$ es de la forma deseada. Si Λ es el funcional nulo, se toma $y = 0$ y $\Lambda x = \langle x, 0 \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Sea $\Lambda \in \mathcal{H}'$ y consideramos

$M = \ker(\Lambda)$, subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$ por ser Λ continuo. Por el teorema (4.8) se puede expresar $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$ y, como Λ es no nulo, existe $z \in M^{\perp}$ no nulo. Veamos que existe $y \in \mathcal{H}$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$ se tiene $\Lambda x = \langle x, y \rangle$. Primero unos casos particulares:

(1) Si $x \in M$ entonces $\Lambda x = 0$ por un lado y, como $z \in M^{\perp}$, $\langle x, \alpha z \rangle = 0$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$. Luego $\Lambda x = \langle x, \alpha z \rangle$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$.

(2) Si $x = \beta z$ para cualquier $\beta \in \mathbb{C}$ no nulo, $\Lambda x = \beta \Lambda z$ y $\langle x, \alpha z \rangle = \beta \overline{\alpha} \langle z, z \rangle = \beta \overline{\alpha} \|z\|^2$. Tomando $\alpha = \overline{\Lambda z}/\|z\|^2$ se tiene $\langle x, \alpha z \rangle = \beta \Lambda z = \Lambda x$.

Para $x \in \mathcal{H}$ arbitrario, se tiene para $\beta \in \mathbb{C}$ no nulo $x = (x - \beta z) + \beta z$ con $x - \beta z \in M$. Utilizando los dos casos anteriores,

$$\Lambda x = \Lambda(x - \beta z + \beta z) = \Lambda(x - \beta z) + \Lambda(\beta z) = \langle x - \beta z, \alpha z \rangle + \langle \beta z, \alpha z \rangle = \langle x, \alpha z \rangle \,,$$

donde $\alpha = \overline{\Lambda z}/\|z\|^2$. Luego el $y \in \mathcal{H}$ buscado es αz.
Si existiera otro $y_1 \in \mathcal{H}$ de forma que también $\Lambda x = \langle x, y_1 \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $\langle x, y - y_1 \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Por (4.9) se tiene $y - y_1 = 0$.
Para ver que es una isomorfía, sean $y \in \mathcal{H}$ y $\Lambda \in \mathcal{H}'$ definidos como en el enunciado. Como para $x \in \mathcal{H}$, $\|\Lambda x\| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (4.2), entonces $\|\Lambda\| \leq \|y\|$. Ahora, como para $y \in \mathcal{H}$ no nulo

$$0 \leq \|y\|^2 = \langle y, y \rangle = \Lambda y \leq \|\Lambda\| \|y\|,$$

se tiene que $\|\Lambda\| = \|y\|$. □

4.2. Operadores acotados

Sea $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ el espacio de los operadores lineales acotados en el espacio de Hilbert no nulo $\mathcal{H}$. Vamos a ver que $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ es una C*-álgebra. Como $\mathcal{H}$ es completo, como se puede ver en el resultado (4.1) de [13], $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ es un espacio vectorial normado completo para la norma de los operadores

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \;/\; x \in \mathcal{H}, \; \|x\| \leq 1\} \qquad T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}).$$

$\mathscr{B}(\mathcal{H})$ es un álgebra compleja si consideramos como producto de operadores la composición y, por ser operadores acotados, para $S, T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$,

$$\|ST(x)\| \leq \|S\| \|T(x)\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|,$$

luego $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$ y $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ es un álgebra de Banach. Además el operador identidad I es lineal, acotado ($\|I(x)\| = \|x\|$) y $TI = T = IT$ para todo $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, por lo que es

unitaria.
Veamos ahora que existe una involución de forma que $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ es una C*-álgebra. Para ello necesitaremos unos resultados previos.

Teorema 4.11. *Si $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ cumple $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.*

Demostración.
Para $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene

$$0 = \langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle = \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle \quad \text{y}$$

$$0 = \langle T(x+iy), x+iy\rangle = \langle Tx, x\rangle - i\,\langle Tx, y\rangle + i\,\langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle = -i\,\langle Tx, y\rangle + i\,\langle Ty, x\rangle\,.$$

Multiplicando la segunda igualdad por i y sumando ambas se llega a $\langle Tx, y\rangle = 0$. Tomando $y = Tx$ entonces $\|Tx\|^2 = 0$, y por tanto $Tx = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. □

Corolario 4.12. *Si $S, T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ cumplen $\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $S = T$.*

Demostración.
$\langle (S-T)x, x\rangle = \langle Sx, x\rangle - \langle Tx, x\rangle = 0$ y aplicando el teorema anterior (4.11) se tiene $S - T = 0$. □

Teorema 4.13 (**Teorema de representación de Riesz para formas sequilineales**). *Sea $f\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ sesquilineal y tal que*

$$\sup\{|f(x,y)| \;/\; \|x\| = \|y\| = 1\} = M < \infty,$$

entonces existe un único $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ que cumple

$$f(x,y) = \langle x, Ty\rangle \qquad x, y \in \mathcal{H}$$

y además $\|T\| = M$.

Demostración.
Por la condición de acotación de f se tiene $|f(x,y)| \leq M\|x\|\|y\|$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$. Fijado $y \in \mathcal{H}$, la aplicación $f(\cdot, y)\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $x \longmapsto f(x,y)$ es un funcional lineal acotado en $\mathcal{H}$ con $\|f(\cdot, y)\| \leq M\|y\|$. Por el teorema (4.10), $f(\cdot, y)$ se asocia mediante una isometría con un único elemento $Ty \in \mathcal{H}$ de forma que $f(x,y) = \langle x, Ty\rangle$ y $\|Ty\| = \|f(\cdot, y)\|$.
El operador $T\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ dado por $y \longmapsto Ty$ es lineal pues:

- Para $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$,

$$\langle x, T(y_1 + y_2) \rangle = f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2) =$$
$$= \langle x, Ty_1 \rangle + \langle x, Ty_2 \rangle = \langle x, Ty_1 + Ty_2 \rangle ,$$

  para todo $x \in \mathcal{H}$, luego $T(y_1 + y_2) = Ty_1 + Ty_2$.

- Para $\alpha \in \mathbb{C}$ e $y \in \mathcal{H}$,

$$\langle x, T(\alpha y) \rangle = f(x, \alpha y) = \overline{\alpha} f(x, y) = \overline{\alpha} \langle x, Ty \rangle = \langle x, \alpha Ty \rangle$$

  para todo $x \in \mathcal{H}$, luego $T(\alpha y) = \alpha Ty$ por el corolario (4.12).

Ahora, como $\|Ty\| = \|f(\cdot, y)\| \leq M\|y\|$, T es acotado con $\|T\| \leq M$. Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (4.2),

$$|f(x, y)| = |\langle x, Ty \rangle| \leq \|x\|\|Ty\| \leq \|x\|\|T\|\|y\|,$$

y por tanto $M = \|T\|$ y $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$.
Si $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ es otro operador que cumple lo pedido, para cada $y \in \mathcal{H}$ se tiene $\langle x, Sy \rangle = f(x, y) = \langle x, Ty \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$, luego $Sy = Ty$ y por tanto $S = T$. □

Para $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, como el producto interno es sesquilineal y T lineal, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle Tx, y \rangle \end{array}$$

es sesquilineal. Además es acotada en el sentido del teorema anterior (4.13) pues

$$|\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\|\|y\| \leq \|T\|\|x\|\|y\|$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (4.2) y por tanto

$$M = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| \ / \ \|x\| = \|y\| = 1\} \leq \|T\| < \infty.$$

Por el teorema de representación de Riesz para formas sesquilineales (4.13) existe un único $T^* \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ que cumple

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \qquad x, y \in \mathcal{H}$$

y con $\|T^*\| = M$. Haciendo el razonamiento análogo con $\langle T^* y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$ y por la unicidad se llega a $\|T\| = \|T^*\|$.
Entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{B}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathscr{B}(\mathcal{H}) \\ T & \longmapsto & T^* \end{array}$$

es una involución ya que, para $S, T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumplen por unicidad las propiedades:

(1) $(S+T)^* = S^* + T^*$: para $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle x, (S^* + T^*)y \rangle = \langle x, S^*y \rangle + \langle x, T^*y \rangle = \langle Sx, y \rangle + \langle Tx, y \rangle =$$
$$= \langle (S+T)x, y \rangle = \langle x, (S+T)^*y \rangle .$$

(2) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$: para $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle x, (\lambda T)^*y \rangle = \langle \lambda Tx, y \rangle = \lambda \langle Tx, y \rangle = \lambda \langle x, T^*y \rangle = \left\langle x, \overline{\lambda} T^*y \right\rangle .$$

(3) $(ST)^* = T^*S^*$: para $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle x, (ST)^*y \rangle = \langle (ST)x, y \rangle = \langle Tx, S^*y \rangle = \langle x, (T^*S^*)y \rangle .$$

(4) $T^{**} = T$: para $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \overline{\langle T^*y, x \rangle} = \overline{\langle y, T^{**}x \rangle} = \langle T^{**}x, y \rangle .$$

Ahora, para cada $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ se tiene por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (4.2)

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \leq \|x\| \|T^*Tx\| \leq \|x\|^2 \|T^*T\| \qquad \forall x \in \mathcal{H},$$

luego $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Por otro lado, como $\|T^*\| = \|T\|$,

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2.$$

Se tiene por tanto $\|T^*T\| = \|T\|^2$ y $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ es una C*-álgebra.

Teniendo una involución en el espacio de operadores acotados se tienen definiciones para casos concretos, como por ejemplo, los elementos autoadjuntos. Estas definiciones aparecen frecuentemente en el último capítulo.

Definición. Un operador $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ se dice que es:

(1) *normal* si $TT^* = T^*T$.

(2) *autoadjunto* si $T^* = T$.

(3) *unitario* si $T^*T = I = TT^*$, donde I es el operador identidad en $\mathcal{H}$.

(4) una *proyección* si $T^2 = T$.

5. El teorema espectral

En este capítulo se verá el teorema espectral en diferentes veriones para operadores acotados en un espacio de Hilbert. En todos los casos se tratará una $*$-subálgebra de Banach conmutativa del espacio de estos operadores. En la primera sección se hará la construcción de una medida espectral en el espectro de una C*-álgebra unitaria en este caso, definiendo también la integral de una función medible acotada respecto de esta medida, para luego ver que estas cumplen con el enunciado del teorema y además son únicas. En la segunda sección se enunciará una segunda versión del teorema para una C*-álgebra unitaria, aunque en este caso no se tendrá unicidad en la construcción del espacio de medida que el teorema asegura que existe. En la tercera sección se usará la primera versión del teorema para definir la imagen de un operador normal por una función medible acotada que en principio toma valores en un subconjunto de $\mathbb{C}$. En la cuarta sección se darán versiones análogas a la primera versión para una C*-álgebra no unitaria pero no degenerada y para un $*$-álgebra de Banach conmutativa por medio de una $*$-representación en el espacio de los operadores acotados.

La notación que se usará en todo el capítulo es la siguiente:
$\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{A}$ una $*$-subálgebra conmutativa del conjunto de operadores acotados en $\mathcal{H}$, $\mathscr{B}(\mathcal{H})$. En este capítulo denotaremos al espectro de $\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{A})$, como Σ. Para cada $T \in \mathcal{A}$, $\hat{T} \in \mathcal{C}(\Sigma)$ será la transformada de Gelfand de T. Recíprocamente, para $f \in \mathcal{C}(\Sigma)$, cuando se pueda aplicar el teorema de Gelfand-Naimark (3.12), denotaremos por $T_f \in \mathcal{A}$ a la transformada de Gelfand inversa de f.

Primero definiremos algunos conceptos sobre medidas que aparecerán a lo largo de todo el capítulo. Definiciones previas a las siguientes como la de medida, variación o medida de Borel se pueden encontrar en el libro [3].

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{M})$ un espacio de medida donde Ω es un espacio de Hausdorff localmente compacto y $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra de Borel.

- Dada una medida μ positiva en $(\Omega, \mathcal{M})$, se dice que $E \in \mathcal{M}$ es *regular exteriormente* si se tiene $\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) \ / \ E \subseteq V, \ V \text{ abierto}\}$.

- Dada una medida μ positiva en $(\Omega, \mathcal{M})$, se dice que $E \in \mathcal{M}$ es *regular interiormente* si se tiene $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \ / \ K \subseteq E, \ K \text{ compacto}\}$.

- Una medida μ positiva en $(\Omega, \mathcal{M})$ se dice que es *regular* si todo conjunto $E \in \mathcal{M}$ es regular exterior e interiormente.

- Una medida μ en $(\Omega, \mathcal{M})$ se dice que es *regular* si lo es $|\mu|$.

Definición. Una medida μ en $(\Omega, \mathcal{M})$ espacio de medida se dice que es *semi-finita* si para cada $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) = \infty$ existe un $F \in \mathcal{M}$ con $F \subset E$ y $0 < \mu(F) < \infty$.

Definición. Sea μ una medida en $(\Omega, \mathcal{M})$ espacio de medida.

- Se dice que μ es una *medida de Radon* si es una medida de Borel que es finita en los compactos, regular exteriormente en los conjuntos de Borel y regular interiormente en los abiertos.

- Se dice que μ es una *medida de Radon real* si es una medida de Borel real cuyas variaciones positiva y negativa, μ^+ y μ^-, son medidas de Radon.

- Se dice que μ es una *medida de Radon compleja* si es una medida de Borel compleja cuyas partes real e imaginaria son medidas de Radon reales.

El conjunto de medidas de Radon complejas se denotará por $M(\Omega)$.

5.1. Primera versión

En esta sección $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ es una C*-álgebra.

La siguiente construcción dará pie a la medida que se quiere encontrar en esta primera versión del teorema.

Dados $u, v \in \mathcal{H}$, para cada $f \in \mathcal{C}(\Sigma)$ se considera el funcional lineal $f \longmapsto \langle T_f u, v \rangle$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (4.2), dado que $T_f \in \mathcal{A} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ es acotado y que la transformada de Gelfand es una isometría como se comprobó en el teorema de Gelfand-Naimark (3.12),

$$|\langle T_f u, v \rangle| \leq \|T_f u\| \|v\| \leq \|T_f\| \|u\| \|v\| = \|f\|_\infty \|u\| \|v\|.$$

Entonces el funcional lineal es acotado y por tanto continuo en $\mathcal{C}(\Sigma)$.
Sea $\mathcal{C}_0(\Sigma)$, el espacio de las funciones continuas para las que existe un compacto de forma que la función es todo lo pequeña que se quiera fuera de él. En este caso el compacto que se toma es el propio Σ, que es un compacto de Hausdorff, y se tiene que el funcional está en $\mathcal{C}_0(\Sigma)$. Se puede aplicar el teorema de representación de Riesz para funcionales acotados (ver [12] 6.19) para concluir que existe una única medida de Borel regular $\mu_{u,v}$ de forma que

$$\langle T_f u, v \rangle = \int f d\mu_{u,v} \quad f \in \mathcal{C}(\Sigma)$$

y, por lo visto antes, $\|\mu_{u,v}\| \leq \|u\| \|v\|$.
Se tiene entonces que a cada par $u, v \in \mathcal{H}$ se le puede asociar una única medida de Borel regular. Esta asociación cumple la siguiente propiedad:

Proposición 5.1. *La aplicación de $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ en el conjunto de medidas de Borel en Σ dada por $(u,v)\longmapsto\mu_{u,v}$ es sesquilineal. Además, $\mu_{v,u}=\overline{\mu}_{u,v}$ y $\mu_{u,u}$ es positiva para todo $u\in\mathcal{H}$.*

Demostración.
La propiedad de sesquilinealidad se tiene por la unicidad de la medida $\mu_{u,v}$ para cada par $(u,v)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ por ser el producto interno una aplicación sesquilineal.
Ahora, por el teorema de Gelfand-Naimark (3.12), para cada $f\in\mathcal{C}(\Sigma)$ se tiene $T_f^*=T_{\overline{f}}$. Considerando las propiedades de la involución en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ vistas en el capítulo 4 se tiene para $(u,v)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ y $f\in\mathcal{C}(\Sigma)$

$$\int f d\mu_{v,u}=\langle T_f v,u\rangle=\left\langle v,T_f^* u\right\rangle=\overline{\left\langle T_f^* u,v\right\rangle}=\overline{\left\langle T_{\overline{f}} u,v\right\rangle}=\overline{\int \overline{f} d\mu_{u,v}}=\int f d\overline{\mu}_{u,v},$$

de donde se deduce por la unicidad que $\mu_{v,u}=\overline{\mu}_{u,v}$.
Para $u\in\mathcal{H}$, para ver que $\mu_{u,u}$ es una medida positiva basta ver que $\int f d\mu_{u,u}$ lo es para toda $f\in\mathcal{C}(\Sigma)$ positiva. Sea $g\in\mathcal{C}(\Sigma)$ la raíz cuadrada positiva de f de forma que $f=g^2$. Entonces, dado que la transformada de Gelfand es un isomorfismo y por lo que acabamos de ver,

$$T_f=T_{g^2}=T_{\overline{g}g}=T_{\overline{g}}T_g=T_g^*T_g.$$

Por lo tanto se tiene

$$\int f d\mu_{u,u}=\langle T_f u,u\rangle=\left\langle T_g^*T_g u,u\right\rangle=\langle T_g u,T_g u\rangle=\|T_g u\|^2\geq 0$$

como se quería. □

Definición. Una aplicación que asocia a cada par $(u,v)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ una medida cumpliendo las propiedades de la proposición anterior se dice que es un *producto interno espectral.*

Veamos que se puede extender la construcción anterior al espacio funciones medibles Borel acotadas en Σ, que denotaremos por $\mathcal{L}_B(\Sigma)$. Notemos que $\mathcal{L}_B(\Sigma)$ es una C*-álgebra para la conjugación compleja y la norma del supremo $\|\cdot\|_{\sup}$.
Sea $f\in\mathcal{L}_B(\Sigma)$, dados $(u,v)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ se ha obtenido la medida $\mu_{u,v}$. La aplicación dada por $(u,v)\longmapsto\int f d\mu_{u,v}$ es una forma sesquilineal y acotada pues

$$|\int f d\mu_{u,v}|\leq\|f\|_{\sup}\|\mu_{u,v}\|\leq\|f\|_{\sup}\|u\|\|v\|,$$

ya que f está acotada. Por el teorema de representación de Riesz para formas sesquilineales (4.13), existe un único operador acotado, $T_f\in\mathscr{B}(\mathcal{H})$, tal que

$$\langle T_f u,v\rangle=\int f d\mu_{u,v}$$

y $\|T_f\| \leq \|f\|_{\text{sup}}$. Observemos que $\mathcal{C}(\Sigma) \subset \mathcal{L}_B(\Sigma)$ por ser $\Sigma = \sigma(\mathcal{A})$ compacto y esta construcción coincide con la dada para funciones continuas en Σ.

Para el siguiente resultado se necesita una definición previa.

Definición. Dada $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones complejas que toman valores en S conjunto arbitrario, se dice que *converge a f p.b.* (de pointwise and boundedly) si $\{f_n(s)\}_n$ converge a $f(s)$ para todo punto $s \in S$ y además

$$\sup\{|f_n(s)| \ / \ s \in S, \ n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Este teorema muestra que en la extensión se sigue manteniendo la propiedad de la transformada de Gelfand inversa de ser $*$-homomorfismo.

Teorema 5.2. *La aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_B(\Sigma) & \longrightarrow & \mathscr{B}(\mathcal{H}) \\ f & \longmapsto & T_f \end{array}$$

es un $*$-homomorfismo. Además:

(a) Si $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ conmuta con todo $T \in \mathcal{A}$ entonces también conmuta con todo T_f para $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$.

(b) Si $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones de $\mathcal{L}_B(\Sigma)$ que converge a f p.b., entonces $\{T_{f_n}\}_n$ converge a T_f débilmente, es decir, $\{\langle T_{f_n}u, v\rangle\}_n$ converge a $\langle T_f u, v\rangle$ para todos $u, v \in \mathcal{H}$.

Demostración.
La linealidad se deduce de la linealidad de la integral y de la primera componente del producto interno: dadas $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, para todos $u, v \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\langle T_{f_1+f_2}u, v\rangle = \int (f_1 + f_2) d\mu_{u,v} = \langle T_{f_1}u, v\rangle + \langle T_{f_2}u, v\rangle = \langle (T_{f_1} + T_{f_2})u, v\rangle \quad \text{y}$$

$$\langle T_{\alpha f}u, v\rangle = \int \alpha f d\mu_{u,v} = \alpha \langle T_f u, v\rangle = \langle (\alpha T_f)u, v\rangle,$$

luego $T_{f_1+f_2} = T_{f_1} + T_{f_2}$ y $T_{\alpha f} = \alpha T_f$ por la unicidad de operadores vista.
Como la transformada de Gelfand es un isomorfismo, para $f, g \in \mathcal{C}(\Sigma)$ se cumple $T_{fg} = T_f T_g$, de donde

$$\int fg d\mu_{u,v} = \langle T_{fg}u, v\rangle = \langle (T_f T_g)u, v\rangle = \int f d\mu_{T_g u,v}.$$

Al ser la igualdad anterior cierta para toda $f \in \mathcal{C}(\Sigma)$, se tiene $gd\mu_{u,v} = d\mu_{T_g u,v}$ para cada $g \in \mathcal{C}(\Sigma)$. Luego, para $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$,

$$\int fgd\mu_{u,v} = \int fd\mu_{T_g u,v} = \langle T_f T_g u, v\rangle = \left\langle T_g u, T_f^* v\right\rangle = \int gd\mu_{u,T_f^* v}$$

para toda $g \in \mathcal{C}(\Sigma)$, de donde se tiene $fd\mu_{u,v} = d\mu_{u,T_f^* v}$. Ahora, para $g \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$,

$$\langle (T_f T_g)u, v\rangle = \left\langle T_g u, T_f^* v\right\rangle = \int gd\mu_{u,T_f^* v} = \int fgd\mu_{u,v} = \langle T_{fg} u, v\rangle\,,$$

de donde $T_f T_g = T_{fg}$ para todas $f, g \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$.
Para cada $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$, por las propiedades del producto interno espectral vistas en (5.1),

$$\left\langle T_{\overline{f}} u, v\right\rangle = \int \overline{f} d\mu_{u,v} = \overline{\int fd\overline{\mu}_{u,v}} = \overline{\int fd\mu_{v,u}} = \overline{\langle T_f v, u\rangle} = \overline{\left\langle v, T_f^* u\right\rangle} = \left\langle T_f^* u, v\right\rangle,$$

luego $T_{\overline{f}} = T_f^*$ y la aplicación $f \longmapsto T_f$ es un $*$-homomorfismo.

(a) Si $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ conmuta con todo $T \in \mathcal{A}$, entonces conmuta con T_f para toda $f \in \mathcal{C}(\Sigma)$. Para toda $f \in \mathcal{C}(\Sigma)$ se tiene

$$\int fd\mu_{u,S^* v} = \langle T_f u, S^* v\rangle = \langle ST_f u, v\rangle = \langle T_f Su, v\rangle = \int fd\mu_{Su,v},$$

y por tanto $\mu_{u,S^* v} = \mu_{Su,v}$. Ahora, si $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$,

$$\langle T_f Su, v\rangle = \int fd\mu_{Su,v} = \int fd\mu_{u,S^* v} = \langle T_f u, S^* v\rangle = \langle ST_f u, v\rangle\,,$$

y por unicidad $T_f S = ST_f$.

(b) Como la sucesión $\{f_n\}_n$ converge p.b., sea $M > 0$ tal que $\sup\{|f_n(s)| \;/\; s \in \Sigma,\; n \in \mathbb{N}\} \leq M$. La función constante M es integrable en Σ compacto, acota a la sucesión para todo punto y para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión converge puntualmente a f, por el teorema de la convergencia dominada (ver [1] 10.27),

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_{f_n} u, v\rangle = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu_{u,v} = \int fd\mu_{u,v} = \langle T_f u, v\rangle \qquad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

□

Definición. Sea Ω un conjunto con una σ-álgebra $\mathcal{M}$. Una *medida espectral* en $(\Omega, \mathcal{M})$ es una aplicación $P\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathscr{B}(\mathcal{H})$ que cumple:

(a) $P(E)$ es una proyección autoadjunta para cada $E \in \mathcal{M}$.

(b) $P(\varnothing) = 0$ y $P(\Omega) = I$, donde I es el operador identidad.

(c) $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ para todos $E, F \in \mathcal{M}$.

(d) Si $\{E_n\}_n$ es de elementos de $\mathcal{M}$ disjuntos, $P(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$ y la serie converge para la norma de los operadores.

Para P medida espectral en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{M})$ y $u, v \in \mathcal{H}$ se define la aplicación de $\mathcal{M}$ en $\mathbb{C}$

$$P_{u,v}(E) = \langle P(E)u, v\rangle \quad \text{para } E \in \mathcal{M}.$$

Proposición 5.3. *La aplicación $P_{u,v}$ es una medida compleja y la aplicación dada por $(u, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longmapsto P_{u,v}$ es un producto interno espectral con*

$$\|P_{vv}\| = P_{v,v}(\Omega) = \|v\|^2.$$

Demostración.
Como P es una medida espectral se tiene que $P_{u,v}$ es una medida compleja pues

- $P_{u,v}(\varnothing) = \langle P(\varnothing)u, v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$ y
- $P_{u,v}(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \left\langle P(\cup_{j=1}^{\infty} E_j)u, v\right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} P(E_j)u, v\right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle P(E_j u), v\rangle =$
  $= \sum_{j=1}^{\infty} P_{u,v}(E_j)$ para $E_1, E_2, ... \in \mathcal{M}$ disjuntos.

La sesquilinealidad de $(u, v) \longmapsto P_{u,v}$ se deduce directamente de la sesquilinealidad del producto interno:

- Fijado $v \in \mathcal{H}$, para $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y para cada $E \in \mathcal{M}$,
$$P_{\alpha u_1+u_2,v}(E) = \langle P(E)(\alpha u_1 + u_2), v\rangle = \alpha P_{u_1,v}(E) + P_{u_2,v}(E).$$
- Fijado $u \in \mathcal{H}$, para $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y para cada $E \in \mathcal{M}$,
$$P_{u,\alpha v_1+v_2}(E) = \langle P(E)u, (\alpha v_1 + v_2)\rangle = P_{u,v_1}(E) + \overline{\alpha} P_{u,v_2}(E).$$

Para cada $E \in \mathcal{M}$, $P(E)$ es un operador lineal acotado con $P(E) = P(E)^* = P(E)^2$ por ser P medida espectral. Luego

$$P_{v,u}(E) = \langle P(E)v, u\rangle = \overline{\langle u, P(E)v\rangle} = \overline{\langle P(E)^*u, v\rangle} = \overline{\langle P(E)u, v\rangle} = \overline{P_{u,v}(E)} \text{ y}$$

$$P_{u,u}(E) = \langle P(E)u, u\rangle = \left\langle P(E)^2u, u\right\rangle = \langle P(E)u, P(E)^*u\rangle =$$
$$= \langle P(E)u, P(E)u\rangle = \|P(E)u\|^2 \geq 0,$$

teniendo que $(u, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longmapsto P_{u,v}$ es un producto interno espectral. Por último, para $v \in \mathcal{H}$, como $P(\Omega)$ es el operador identidad en $\mathcal{H}$,

$$P_{v,v}(\Omega) = \langle P(\Omega)v, v\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2.$$

□

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{M})$ un espacio de medida donde Ω es un espacio de Hausdorff localmente compacto y $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra de Borel. Si P es una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{M})$, se dice que es *regular* si cada medida $P_{u,v}$ es una medida regular.

Veamos que teniendo una medida espectral P en $(\Omega, \mathcal{M})$, donde Ω es un espacio de Hausdorff localmente compacto y $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de Borel, se puede definir la integral de $f \in \mathcal{L}_B(\Omega)$ respecto de P. Por la proposición (5.3), para $v \in \mathcal{H}$,

$$|\int f dP_{v,v}| \leq \|f\|_{\sup} \|P_{v,v}\| = \|f\|_{\sup} \|v\|^2.$$

Por la identidad de polarización para formas sesquilineales (ver [4] A.1), para $u, v \in \mathcal{H}$,

$$P_{u,v} = \frac{1}{4}(P_{u+v,u+v} - P_{u-v,u-v} + iP_{u+iv,u+iv} - iP_{u-iv,u-iv}).$$

Si u y v tienen norma 1, por la desigualdad triangular y usando la igualdad de normas dada por 5.3,

$$P_{u,v} \leq \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 + \|u+iv\|^2 + \|u-iv\|^2) \leq 4,$$

luego

$$|\int f dP_{u,v}| \leq \|P_{u,v}\| \|f\|_{\sup} \leq 4\|f\|_{\sup}.$$

La aplicación $(u, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longmapsto \int f dP_{u,v}$ es una forma sesquilineal acotada, por lo que aplicando el teorema de representación de Riesz para formas sesquilineales (4.13), existe un único $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ con

$$\langle Tu, v \rangle = \int f dP_{u,v} \quad u, v \in \mathcal{H} \qquad \text{y} \qquad \|T\| = \sup\{|\int f dP_{u,v}| \ / \ \|u\| = \|v\| = 1\}.$$

Denotando $T = \int f dP$,

$$\int f dP_{u,v} = \left\langle (\int f dP)u, v \right\rangle.$$

Veamos que esta notación es coherente con la definición de integral. Sea $f \in \mathcal{L}_B(\Omega)$ simple expresada en su forma canónica $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$ donde $\alpha_j \in \mathbb{C}$ y $\{E_1, ..., E_n\}$ es una partición de conjuntos de Borel de Ω. Entonces

$$\int f dP_{u,v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j P_{u,v}(E_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle P(E_j)u, v \rangle = \left\langle (\sum_{j=1}^n \alpha_j P(E_j))u, v \right\rangle.$$

Por la unicidad del teorema de Riesz, $\sum_{j=1}^n \alpha_j P(E_j) = \int f dP$. Ahora, para $f \in \mathcal{L}_B(\Omega)$ arbitraria, existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_n$ que converge uniformemente a esta. Para la norma de operadores y por lo que se ha ido viendo,

$$\|\int f dP - \int f_n dP\| = \sup\{|\int f dP_{u,v} - \int f_n dP_{u,v}| \ / \ \|u\| = \|v\| = 1\} \leq 4\|f - f_n\|_{\sup}.$$

Luego para toda función $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$ se puede definir su integral con respecto de P como límite uniforme de integrales de funciones simples.

Ahora, en el espacio $(\Sigma, \mathcal{M})$ que estábamos considerando vamos a encontrar una medida espectral regular y a definir la integral de cualquier $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$ a partir de esta.
Para cada $E \in \mathcal{M}$ se define la aplicación $P\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathscr{B}(\mathcal{H})$ dada por $E \longmapsto P(E) = T_{\chi_E}$, donde T_{χ_E} es la transformada de Gelfand inversa de la función característica de E. Veamos que P es una medida espectral usando que la aplicación $f \longmapsto T_f$ es un $*$-homomorfismo por (5.2):

(a) $P(E)$ es una proyección autoadjunta para cada $E \in \mathcal{M}$: como toda función característica cumple $\chi_E = \chi_E^2 = \overline{\chi}_E$,

$$P(E)^2 = (T_{\chi_E})^2 = T_{\chi_E^2} = T_{\chi_E} = P(E) = T_{\overline{\chi}_E} = T^*_{\chi_E} = P(E)^*.$$

(b) $P(\varnothing) = 0$ y $P(\Sigma) = I$:

$$P(\varnothing) = T_{\chi_\varnothing} = T_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad P(\Sigma) = T_{\chi_\Sigma} = T_1 = 1.$$

(c) $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ para $E, F \in \mathcal{M}$: como toda función característica cumple $\chi_{E\cap F} = \chi_E \chi_F$,

$$P(E \cap F) = T_{\chi_{E\cap F}} = T_{\chi_E \chi_F} = T_{\chi_E} T_{\chi_F} = P(E)P(F).$$

(d) Si $\{E_n\}_n$ de elementos de $\mathcal{M}$ disjuntos, $P(\cup_{n=1}^\infty E_n) = \sum_{n=1}^\infty P(E_n)$ y la serie converge para la norma de los operadores: Si $\{E_1, ...E_n\}$ es un conjunto finito de elementos de $\mathcal{M}$ disjuntos, como $\chi_{(\cup_{j=1}^n E_j)} = \sum_{j=1}^n \chi_{E_j}$,

$$P(\cup_{j=1}^n E_j) = T_{\chi_{(\cup_{j=1}^n E_j)}} = T_{\sum_{j=1}^n \chi_{E_j}} = \sum_{j=1}^n T_{\chi_{E_j}} = \sum_{j=1}^n P(E_j).$$

Para el caso infinito, sean $F_n = \cup_{j=1}^n E_j$ y $F = \cup_{j=1}^\infty E_j$. Entonces $\{\chi_{F_n}\}_n$ converge puntualmente a χ_F, además, por ser funciones características son acotadas y por tanto la convergencia es p.b. Se puede aplicar el resultado (5.2(b)) y usando el caso finito, para todos $u, v \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle (\sum_{j=1}^n P(E_j))u, v \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P(F_n)u, v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_{\chi_{F_n}} u, v\rangle = \langle T_{\chi_F} u, v\rangle =$$

$$= \langle P(F)u, v\rangle = \langle P(\cup_{j=1}^\infty E_j)u, v\rangle .$$

Ahora, $P(F) = P(F_n) + P(F \setminus F_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ por ser unión disjunta finita. Para cada $u \in \mathcal{H}$, por ser $P(F \setminus F_n)$ proyección autoadjunta,

$$\|(P(F) - P(F_n))u\|^2 = \|P(F \setminus F_n)u\|^2 = \langle P(F \setminus F_n)u, P(F \setminus F_n)u\rangle =$$

$$= \left\langle P(F \setminus F_n)^2 u, u\right\rangle = \langle P(F \setminus F_n)u, u\rangle = \langle (P(F) - P(F_n))u, u\rangle ,$$

y usando la convergencia débil vista se tiene la convergencia en norma, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \|(P(F) - P(F_n))u\| = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Por lo visto para el caso general, para $E \in \mathcal{M}$ y $u, v \in \mathcal{H}$,

$$P_{u,v}(E) = \langle P(E)u, v\rangle = \langle T_{\chi_E} u, v\rangle = \int \chi_E d\mu_{u,v} = \mu_{u,v}(E),$$

de donde $P_{u,v} = \mu_{u,v}$. Como $\mu_{u,v}$ son todas regulares, P es una medida espectral regular. Para $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$ se tiene la integral de f con respecto de P definida como en el caso general, y de

$$\left\langle (\int f dP)u, v \right\rangle = \int f dP_{u,v} = \int f d\mu_{u,v} = \langle T_f u, v\rangle$$

se deduce por la unicidad del teorema de Riesz que

$$\int f dP = T_f \quad \forall f \in \mathcal{L}_B(\Sigma).$$

Teorema 5.4 (Teorema espectral, primera versión). *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-subálgebra conmutativa de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ que contiene al operador identitad I. Sea $\Sigma = \sigma(\mathcal{A})$. Existe una única medida espectral regular P en Σ de forma que*

$$T = \int \hat{T} dP \qquad \forall T \in \mathcal{A} \qquad y \qquad T_f = \int f dP \qquad \forall f \in \mathcal{L}_B(\Sigma).$$

Además, para $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ son equivalentes:

(a) S conmuta con todo $T \in \mathcal{A}$.

(b) S conmuta con $P(E)$ para todo conjunto de Borel $E \subseteq \Sigma$.

(c) S conmuta con $\int f dP$ para toda $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$.

Demostración.
La existencia de una medida espectral regular P que cumple las igualdades se ha visto en la construcción anterior, donde $P(E) = T_{\chi_E}$ para todo $E \in \mathcal{M}$.
Para la unicidad, notemos en primer lugar que las $\mu_{u,v} = P_{u,v}$ son únicas por el teorema

de representación de Riesz. Si existieran dos medidas espectrales P_1 y P_2 cumpliendo lo pedido, se tendría para cada $E \in \mathcal{M}$ que

$$\langle P_1(E)u, u\rangle = P_{u,u}(E) = \langle P_2(E)u, u\rangle \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

luego $P_1(E) = P_2(E)$ por (4.12). Como la igualdad anterior es para todo $E \in \mathcal{M}$, $P_1 = P_2$ y se tiene la unicidad.
Si $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ conmuta con todo $T \in \mathcal{A}$, también conmuta con $T_f = \int f dP$ para toda $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$ por el resultado (5.2(a)), es decir, el enunciado (a) implica (c).
Recíprocamente, (c) implica (a) pues, por el teorema de Gelfand-Naimark (3.12) la transformada de Gelfand es un isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}(\Sigma)$. Entonces todo $T \in \mathcal{A}$ es de la forma T_f para alguna $f \in \mathcal{C}(\Sigma) \subset \mathcal{L}_B(\Sigma)$. Luego $T = T_f = \int f dP$ para todo $T \in \mathcal{A}$ y (a) es un caso particular de (c).
También (b) es un caso particular de (c) pues para cada $E \in \mathcal{M}$ por definición $P(E) = T_{\chi_E}$ y $\chi_E \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$, luego $P(E) = \int \chi_E dP$.
Finalmente, por (5.2), $f \longmapsto T_f = \int f dP$ es un $*$-homomorfismo de $\mathcal{L}_B(\Sigma)$ en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, llamémoslo ϕ. Como $\mathcal{L}_B(\Sigma)$ y $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ son C*-álgebras, $\|\phi\| \leq 1$ por (3.13(b)) y para $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$ existe una sucesión $\{f_n\}_n$ de funciones simples de la forma $\sum_{j=1}^{m^n} \alpha_j^n \chi_{E_j^n}$ para $n \in \mathbb{N}$ que converge uniformemente a f. Luego de

$$\|\int f dP - \int f_n dP\| = \|T_f - T_{f_n}\| = \|\phi(f) - \phi(f_n)\| =$$
$$= \|\phi(f - f_n)\| \leq \|\phi\| \|f - f_n\|_{\sup} \leq \|f - f_n\|_{\sup}$$

se tiene que $\int f_n dP$ converge uniformemente en la norma de los operadores a $\int f dP$. Si $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ conmuta con $P(E) = \int \chi_E dP$ para todo $E \in \mathcal{M}$, entonces conmuta con $\int f_n dP$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por la propiedad (d) de las medidas espectrales. Por la convergencia uniforme se tiene que S también conmuta con el límite $\int f dP$ y se tiene la implicación de (b) a (c). $\square$

5.2. Segunda versión

Los próximos lemas serán útiles en la demostración del teorema.

Lema 5.5. *Si $X \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio cerrado que cumple $T(X) \subseteq X$ para todo $T \in \mathcal{A}$, entonces:*

(a) $T(X^{\perp}) \subseteq X^{\perp}$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

(b) Si $\mathcal{A}^X = \{T|_X \;/\; T \in \mathcal{A}\}$ y $\Sigma^X = \sigma(\mathcal{A}^X)$, entonces Σ^X se puede identificar con un subconjunto compacto de Σ de forma natural. Además las transformadas de Gelfand de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^X$ están relacionadas por $\widehat{T|_X} = \widehat{T}|_{\Sigma^X}$.

(c) *Toda medida de Borel* μ *en* Σ^X*, considerando este como subconjunto de* Σ*, se extiende a una medida* $\widetilde{\mu}$ *en* Σ *de la forma*

$$\widetilde{\mu}(E) = \mu(E \cap \Sigma^X), \quad E \subseteq \Sigma \text{ de Borel.}$$

Si $v \in X$ *y* $\mu_{v,v}$ *y* $\mu^X_{v,v}$ *son las medidas en* Σ *y* Σ^X *asociadas a* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{A}^X$ *respectivamente, entonces* $\mu_{v,v} = \widetilde{\mu^X_{v,v}}$.

Demostración.

(a) Sea $T \in \mathcal{A}$, todo elemento de $T(X^\perp)$ es de la forma Tu para $u \in X^\perp$. Como $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra, $T^* \in \mathcal{A}$ y para cada $v \in X$, $T^*v \in T^*(X) \subseteq X$ por hipótesis. Entonces, para $u \in X^\perp$,

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle = 0$$

para todo $v \in X$, luego $Tu \in X^\perp$.

(b) Sea $h \in \Sigma^X$, es decir, h es un homomorfismo complejo no nulo en $\mathcal{A}^X$. Se define $\widetilde{h} \in \Sigma$ como $\widetilde{h}(T) = h(T|_X)$ para cada $T \in \mathcal{A}$. Entonces Σ^X se puede ver como un subconjunto de Σ.
Como se ve en el apéndice A, la topología de subespacio de Σ^X para la topología $*$-débil en $(\mathcal{A}^X)'$ viene dada por la unión de intersecciones finitas de $(T|_X)^{-1}(V)$ para V abierto de $\mathbb{C}$, mientras que la topología de subespacio de Σ para la topología $*$-débil en $\mathcal{A}'$ viene dada por la unión de intersecciones finitas de $T^{-1}(V)$ para V abierto de $\mathbb{C}$. Para $T \in \mathcal{A}$ y siendo V un abierto de $\mathbb{C}$,

$$(T|_X)^{-1}(V) = \{h \in \Sigma^X \;/\; T|_X(h) \in V\} = \{h \in \Sigma^X \;/\; h(T|_X) \in V\} =$$

$$= \{\widetilde{h} \in \Sigma \;/\; \widetilde{h}(T) \in V\} = \{\widetilde{h} \in \Sigma \;/\; T(\widetilde{h}) \in V\} = T^{-1}(V),$$

y se puede ver Σ^X como subconjunto compacto de Σ por (3.2). Ahora, la transformada de Gelfand cumple

$$\widehat{T}(\widetilde{h}) = \widetilde{h}(T) = h(T|_X) = \widehat{T|_X}(h),$$

de donde se deduce $\widehat{T|_X} = \widehat{T}|_{\Sigma^X}$.

(c) Se define la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathcal{C}(\Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\Sigma^X) \\ & f & \longmapsto & f|_{\Sigma^X} \end{array}$$

sobreyectiva por el teorema de extensión de Tietze (ver [3] 4.34), y por tanto induce una aplicación inyectiva φ' de $\mathcal{C}(\Sigma^X)'$ en $\mathcal{C}(\Sigma)'$ dada por $\varphi'(\phi) = \phi \circ \varphi$ para $\phi \in$

$\mathcal{C}(\Sigma^X)'$. Por el resultado 7.18 de [3], existe un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{C}(\Sigma)'$ y $M(\Sigma)$ y de la misma forma con $\mathcal{C}(\Sigma^X)'$ y $M(\Sigma^X)$. Como se ve en el capítulo 7 de [3], cada elemento $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma^X)'$ se puede asociar con una medida μ de forma que $\phi(f) = \int f d\mu$ para toda $f \in \mathcal{C}(\Sigma^X)$, de donde se deduce que la aplicación φ' es la que extiende μ a $\widetilde{\mu}$ como en el enunciado.
Ahora, para $v \in X$, para toda $f \in \mathcal{C}(\Sigma)$ y siendo T_f su transformada de Gelfand inversa en $\mathcal{A}$, por el apartado (b) y considerando la extensión que se acaba de ver,

$$\int_\Sigma f d\mu_{v,v} = \langle T_f v, v\rangle = \langle T_f|_X v, v\rangle = \int_{\Sigma^X} f d\mu^X_{v,v} = \int_\Sigma f d\widetilde{\mu^X_{v,v}}.$$

Por la unicidad dada por el teorema de Riesz vista en la construcción de $\mu_{v,v}$ se tiene $\mu_{v,v} = \widetilde{\mu^X_{v,v}}$.

□

Lema 5.6. *Sean (Ω, μ) es un espacio de medida donde μ es semi-finita y $\phi \in L^\infty(\mu)$. Si $T \in \mathscr{B}(L^2(\mu))$ es de la forma $Tf = \phi f$ para toda $f \in L^2(\mu)$, entonces $\|T\| = \|\phi\|_\infty$.*

Demostración.
Notemos que para toda $f \in L^2(\mu)$ se tiene

$$\|Tf\|_2^2 = \|\phi f\|_2^2 = \int |\phi f|^2 d\mu \leq \|\phi\|_\infty^2 \int |f|^2 d\mu = (\|\phi\|_\infty \|f\|)^2,$$

de donde se tiene que $\|T\| \leq \|\phi\|_\infty$.
Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, sea $E = \{\omega \in \Omega \;/\; |\phi(\omega)| > \|\phi\|_\infty - \varepsilon\}$. Por la definición de la norma infinito, $\mu(E) > 0$, luego existe $F \subseteq E$ con $0 < \mu(F) < \infty$. Por tanto $\chi_F \in L^2(\mu)$ y

$$\|T\chi_F\|_2^2 = \|\phi\chi_F\|_2^2 = \int |\phi\chi_F|^2 d\mu \geq \int |(\|\phi\|_\infty - \varepsilon)\chi_F|^2 d\mu =$$
$$= (\|\phi\|_\infty - \varepsilon)^2 \int |\chi_F|^2 d\mu = ((\|\phi\|_\infty - \varepsilon)\|\chi_F\|_2)^2.$$

Se tiene entonces $\|T\| \leq \|\phi\|_\infty - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, luego $\|T\| \geq \|\phi\|_\infty$. □

Teorema 5.7 (teorema espectral, segunda versión). *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-subálgebra conmutativa de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ que contiene al operador identidad I. Existen un espacio de medida semi-finita $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, una aplicación unitaria, es decir, una isometría biyectiva, $U \colon \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\mu)$ y un $*$-homomorfismo isométrico $T \longmapsto \phi_T$ de $\mathcal{A}$ en $L^\infty(\mu)$ tales que*

$$UTU^{-1}\psi = \phi_T\psi \qquad \forall\psi \in L^2(\mu),\ T \in \mathcal{A}.$$

Ω se puede tomar como unión disjunta de copias del espectro de $\mathcal{A}$, $\Sigma = \sigma(\mathcal{A})$, de forma que μ es finita en cada copia y $\phi_T = \hat{T}$ en cada copia.

Demostración.
Supongamos en primer lugar que existe un $v \in \mathcal{H}$ de forma que $\mathcal{A}v = \{Tv \,/\, T \in \mathcal{A}\}$ es denso en $\mathcal{H}$. Se considera la medida regular finita $\mu = \mu_{v,v}$ definida como en la primera sección de este capítulo.
Para cada $T \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv\rangle = \langle T^*Tv, v\rangle = \int \widehat{(T^*T)}d\mu = \int \widehat{T^*}\widehat{T}d\mu = \int \overline{\widehat{T}}\widehat{T}d\mu = \int |\widehat{T}|^2 d\mu.$$

Se deduce que si $T, S \in \mathcal{A}$ cumplen $Tv = Sv$ entonces $\widehat{T} - \widehat{S} = 0$ salvo en un conjunto de medida μ-nula. Luego la aplicación de $\mathcal{A}v$ en $L^2(\mu)$ dada por $Tv \longmapsto \widehat{T}$ es una isometría lineal (y por tanto continua) bien definida.
Como $\mathcal{A}v$ es denso en $\mathcal{H}$ se puede extender esta aplicación por continuidad de forma única a una isometría lineal $U\colon \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\mu)$. La imagen de U contiene a las funciones continuas en Σ pues, si $f \in \mathcal{C}(\Sigma)$, como la transformada de Gelfand es un isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}(\Sigma)$, existe un $T \in \mathcal{A}$ de forma que $f = \widehat{T} = U(Tv)$. Además la imagen de U es cerrada en $L^2(\mu)$ por ser una isometría.
Por el resultado de aproximación por funciones continuas que se puede encontrar en 3.14 [12], como Σ es un compacto de Hausdorff, $\mathcal{C}(\Sigma)$ es denso en $L^2(\mu)$. Se tiene entonces $U(\mathcal{H}) = \overline{U(\mathcal{H})} \supseteq \overline{\mathcal{C}(\Sigma)} = L^2(\mu)$, es decir, la imagen de U es todo $L^2(\mu)$ y por tanto la isometría lineal (y por tanto inyectiva) U es una isometría biyectiva.
Por último en este caso, para $\psi \in \mathcal{C}(\Sigma)$ y $T \in \mathcal{A}$, como la transformada de Gelfand es un $*$-isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}(\Sigma)$ se puede considerar la transformada de Gelfand inversa de ψ, T_ψ, y se tiene

$$UTU^{-1}\psi = UTT_\psi v = U(TT_\psi v) = \widehat{TT_\psi} = \widehat{T}\widehat{T_\psi} = \widehat{T}\psi.$$

Por densidad de $\mathcal{C}(\Sigma)$ en $L^2(\mu)$, la igualdad $UTU^{-1}\psi = \widehat{T}\psi$ se da para toda $\psi \in L^2(\mu)$ y $T \longmapsto \widehat{T}$ es el $*$-homomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ en $L^\infty(\mu)$ pedido.

Ahora, si no existe $v \in \mathcal{H}$ como en el caso anterior, sea $v_1 \in \mathcal{H}$ no nulo y se define el subespacio cerrado $\mathcal{H}_1 = \overline{\mathcal{A}v_1}$. Por (4.8) se tiene $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$, luego se toma $v_2 \in \mathcal{H}_1^\perp$ no nulo y se define $\mathcal{H}_2 = \overline{\mathcal{A}v_2}$. Notemos que $\mathcal{H}_i$ es invariante si se le aplica $T \in \mathcal{A}$ pues para $x \in \mathcal{H}_i$ existe una sucesión de elementos de $\mathcal{A}v_i$, es decir, una sucesión de la forma $\{T_n v_i\}_n$, que converge a x y por tanto $\{TT_n v_i\}_n$ converge a Tx por continuidad y $Tx \in \mathcal{H}_i$. Entonces $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son ortogonales y $\mathcal{H}_1^\perp = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2^\perp$ donde el ortogonal de $\mathcal{H}_2$ en este caso se considera en $\mathcal{H}_1^\perp$.
Razonando de forma recurrente, por el lema de Zorn (ver [11] pág. 80), existe una colección maximal $\{v_i\}_{i\in I}$ de forma que los $\mathcal{H}_i$ son mutuamente ortogonales. Como cada $\mathcal{H}_i$ es invariante al aplicarle cualquier $T \in \mathcal{A}$, también lo es $\oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$. Si $\oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i \neq \mathcal{H}$, existiría

$v \in \mathcal{H}$ ortogonal a $\oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ y, como $T((\oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i)^{\perp}) \subseteq (\oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i)^{\perp}$, por (5.5) $\overline{\mathcal{A}v}$ sería ortogonal a $\oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$, en contradicción con que $\{v_i\}_{i\in I}$ sea maximal. Luego $\oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i = \mathcal{H}$.
Para cada $i \in I$ sean Σ_i una copia de Σ y $\mu_i = \mu_{v_i,v_i}$ medida en Σ_i. Sean Ω la unión disjunta de las copias Σ_i y $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de los conjuntos $E \subseteq \Omega$ que cumplen que $E \cap \Sigma_i$ es de Borel en Σ_i para todo $i \in I$.
Definiendo la medida μ en $\mathcal{M}$ como $\mu(E) = \sum_{i\in I}\mu_i(E\cap\Sigma_i)$ para $E \in \mathcal{M}$ se tiene que es semi-finita: como todas las medidas μ_i son finitas, si $E \in \mathcal{M}$ tiene medida μ infinita, existen infinitos $i \in I$ con $0 < \mu_i(E\cap\Sigma_i) < \infty$ y para un i de estos se coge $E\cap\Sigma_i$, que pertenece a $\mathcal{M}$ pues $(E\cap\Sigma_i)\cap\Sigma_j = \varnothing$ si $j \neq i$, obteniendo $0 < \mu(E\cap\Sigma_i) = \mu_i(E\cap\Sigma_i) < \infty$.
Como μ es semi-finita, $L^2(\mu) \cong \oplus_{i\in I}L^2(\mu_i)$.
Ahora, para cada $i \in I$ se define el álgebra $\mathcal{A}_i = \{T|_{\mathcal{H}_i} \ / \ T \in \mathcal{A}\}$. Tratando cada $\mathcal{A}_i$ como en el caso particular estudiado al principio de la demostración usando el espectro, la transformada de Gelfand y la medida dados por los apartados (b) y (c) del lema (5.5), se tiene una aplicación unitaria $U_i \colon \mathcal{H}_i \longrightarrow L^2(\mu_i)$ que cumple $U_iTU_i^{-1}\psi = \widehat{T}\psi$ para todos $\psi \in L^2(\mu_i)$ y $T \in \mathcal{A}_i$.
Considerando $U = \oplus_{i\in I}U_i \colon \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\mu)$, unitaria por serlo toda U_i, cumple $UTU^{-1}\psi = \phi_T\psi$ para todos $\psi \in L^2(\mu)$ y $T \in \mathcal{A}$, donde $\phi_T = \widehat{T}$ en cada Σ_i. Como la transformada de Gelfand es un $*$-homomorfismo en cada copia, $T \longmapsto \phi_T$ lo es y, por el lema (5.6), $\|T\| = \|UTU^{-1}\| = \|\phi_T\|_\infty$. □

Una consecuencia de este teorema es la mejora del resultado (5.2(b)), que se usó en la demostración de la primera versión.

Proposición 5.8. *Si $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones de $\mathcal{L}_B(\Sigma)$ que converge a f p.b., entonces $\{T_{f_n}\}_n$ converge a T_f fuertemente, es decir, $\|T_{f_n}u - T_fu\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ para todo $u \in \mathcal{H}$.*

Demostración.
Para toda $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$, por la segunda versión del teorema espectral (5.7), $UT_fU^{-1}\psi = \phi_f\psi$ para toda $\psi \in L^2(\mu)$, donde $\phi_f = f$ en cada copia de Σ. Como ϕ_f toma valores en Ω (la unión disjunta de copias de Σ) y $\{f_n\}_n$ converge a f p.b., $\{\phi_{f_n}\}_n$ converge a ϕ_f p.b. pues $\phi_{f_n}(h) \xrightarrow{n\to\infty} \phi_f(h)$ para todo $h \in \Omega$ y

$$\sup\{|\phi_{f_n}(h)| \ / \ h \in \Omega, \ n \in \mathbb{N}\} = \sup\{|f_n(h)| \ / \ h \in \Sigma, \ n \in \mathbb{N}\} = M < \infty.$$

Ahora, para toda $\psi \in L^2(\mu)$ se tiene que $\lim_{n\to\infty}(\phi_{f_n}\psi - \phi_f\psi)^2(h) = 0$ y $|(\phi_{f_n}\psi - \phi_f\psi)(h)|^2 = |(\phi_{f_n} - \phi_f)(h)\psi(h)|^2 \leq (M+N)^2|\psi(h)|^2$ para todo $h \in \Sigma$, donde $N > 0$ es una cota de $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$. Como $|\psi|^2$ es integrable por ser $\psi \in L^2(\mu)$, por el teorema de la convergencia dominada (ver [1] 10.27),

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi_{f_n}\psi - \phi_f\psi\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \int |\phi_{f_n}\psi - \phi_f\psi|^2 d\mu = 0.$$

Para $u \in \mathcal{H}$ sea $\psi = Uu \in L^2(\mu)$. Por ser U una isometría lineal biyectiva y por lo visto en el teorema espectral,

$$\|T_{f_n}u - T_f u\| = \|U(T_{f_n}u - T_f u)\|_2 = \|UT_{f_n}u - UT_f u\|_2 =$$

$$= \|UT_{f_n}(U^{-1}U)u - UT_f(U^{-1}U)u\|_2 = \|\phi_{f_n}Uu - \phi_f Uu\|_2 = \|\phi_{f_n}\psi - \phi_f\psi\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

de donde se tiene la convergencia pedida. □

5.3. Caso particular para operadores normales

Sea $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ un operador normal y se considera $\mathcal{A}_T$ el álgebra generada por T, T^*, I. Notemos que $\mathcal{A}_T$ es una C*-álgebra unitaria conmutativa, pues es completa por ser cerrada en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, conmutativa por ser T normal y el resto de propiedades se obtienen de las de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ como C*-álgebra. Por el teorema de Gelfand-Naimark (3.12), la transformada de Gelfand conserva la involución, luego se puede aplicar el resultado (3.10) y se puede identificar $\sigma(\mathcal{A}_T)$ con $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ mediante un homeomorfismo. De esta forma, siendo $\lambda = h(T) \in \sigma(T)$ para $h \in \sigma(\mathcal{A}_T)$, $\widehat{T}\lambda = \lambda$, haciendo un abuso de notación asumiendo dicha identificación entre los espectros. Por la primera versión del teorema espectral (5.4), existe una única medida espectral P_T en $\sigma(T)$ tal que

$$T = \int \lambda dP_T(\lambda) \qquad \text{y} \qquad T_f = \int f dP_T \qquad \forall f \in \mathcal{L}_B(\sigma(T)).$$

Sabemos por (5.2) que la aplicación $f \in \mathcal{L}_B(\sigma(T)) \longmapsto T_f = \int f dP_T$ es un $*$-homomorfismo, luego si $p(\lambda) = \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk}\lambda^j\overline{\lambda}^k$ es un polinomio en λ y $\overline{\lambda}$, entonces

$$\int p(\lambda)dP_T(\lambda) = \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk}\Big(\int \lambda dP_T(\lambda)\Big)^j\Big(\int \lambda dP_T(\lambda)\Big)^{*k} = \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk}T^jT^{*k}.$$

Por lo tanto tiene sentido plantearse definir para $f \in \mathcal{L}_B(\sigma(T))$ el operador $f(T)$ como

$$f(T) = \int f(\lambda)dP_T(\lambda).$$

A continuación vamos a ver un teorema que detalla algunas propiedades de estos operadores. El siguiente resultado será útil en la demostración del teorema.

Lema 5.9. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^k$ compacto y $\mathcal{B}$ la menor álgebra de funciones en K que contiene a los polinomios y es cerrada para límites p.b. Entonces $\mathcal{B}$ es el álgebra de las funciones medibles Borel acotadas en K, $\mathcal{L}_B(K)$.*

Demostración.
Por el Teorema de Stone-Weierstrass (ver [3] 4.51), $\mathcal{B}$ contiene a las funciones continuas en K.
Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo, las bolas abiertas $B(\frac{p}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}})$ para todo $p \in \mathbb{Z}^k$ son un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}^k$. Si U es un abierto de K, por ser este compacto, existe un número finito de bolas que lo recubre. Tomando de entre estas bolas aquellas con $\overline{B}(\frac{p}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}) \subseteq U$, su unión B_n es un conjunto compacto contenido en U. Por el lema de Urysohn (ver [3] 4.32), existe una función f_n continua en K, cuya imagen está en $[0,1]$ y que cumple $f_n = 1$ en B_n y $f_n = 0$ fuera de U. Haciendo esto para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos una sucesión expansiva de compactos $\{B_n\}_n$ que converge a U cuando $n \to \infty$. Entonces la sucesión de funciones $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a la función característica de U y por tanto p.b. por estar todas acotadas entre 0 y 1. Luego $\mathcal{B}$ contiene a las funciones características de los abiertos de K por ser cerrada para límites p.b.
Sea $\mathcal{M} = \{E \subseteq K \ / \ \chi_E \in \mathcal{B}\}$, veamos que es una σ-álgebra por las propiedades de las funciones características y por ser $\mathcal{B}$ un álgebra de funciones:

- Si $E \in \mathcal{M}$ entonces $\chi_E \in \mathcal{B}$, de donde $\chi_{K \setminus E} = 1 - \chi_E \in \mathcal{B}$, luego $K \setminus E \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es cerrada para complementarios.

- Si $E, F \in \mathcal{M}$ entonces $\chi_E, \chi_F \in \mathcal{B}$, luego $\chi_{E \cap F} = \chi_E \chi_F \in \mathcal{B}$ y por tanto $E \cap F \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es cerrada para intersecciones finitas.

- Si $\{E_n\}_n$ es de elementos de $\mathcal{M}$, cada $\chi_{E_n} \in \mathcal{B}$. Como $\chi_{\cap_{n=1}^{\infty} E_n}$ es límite p.b. de $\chi_{\cap_{j=1}^{n} E_j}$ entonces $\chi_{\cap_{n=1}^{\infty} E_n} \in \mathcal{B}$ y $\cap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$, luego $\mathcal{M}$ es cerrada para intersecciones numerables.

Como $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra que contiene a los abiertos, contiene entonces a los conjuntos de Borel. Se tiene por tanto que $\mathcal{B}$ contiene a las funciones medibles Borel simples y, tomando límites p.b., a las funciones medibles Borel acotadas en K. Como $\mathcal{L}_B(K) \subseteq \mathcal{B}$ es un álgebra de funciones que contiene a los polinomios y es cerrada para límites p.b. y $\mathcal{B}$ era la menor con estas propiedades, son iguales. □

Teorema 5.10. *Sea $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ un operador normal. Existe un único $*$-homomorfismo de $\mathcal{L}_B(\sigma(T))$ en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ dado por $f \longmapsto f(T)$ que cumple:*

(1) Si $f(\lambda) = \lambda$ para $\lambda \in \sigma(T)$, $f(T) = T$.

(2) Si $\{f_n\}_n$ *converge a* f *p.b.,* $\{f_n(T)\}_n$ *converge a* $f(T)$ *fuertemente, es decir,* $\|f_n(T)u - f(T)u\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *para todo* $u \in \mathcal{H}$.

Además, en los siguientes casos particulares se tiene:

(a) Si $\mathcal{A}$ *es una* C^**-álgebra conmutativa unitaria que contiene a* T*, entonces* $f(T) = \int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}}$*, donde* $P_{\mathcal{A}}$ *es la medida espectral en* $\sigma(\mathcal{A})$ *que se construyó en la primera versión del teorema espectral.*

(b) Si $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *conmuta con* T *y con* T^**, entonces* S *conmuta con* $f(T)$ *para toda* $f \in \mathcal{L}_B(\sigma(T))$.

Demostración.
Definiendo $f(T) = \int f(\lambda) dP_T(\lambda)$ como al principio de este apartado, veamos que cumple las propiedades pedidas.
Por la primera versión del teorema espectral (5.4) se tiene $T_f = f(T)$ para cada $f \in \mathcal{L}_B(\sigma(T))$ usando la identificación mediante un homeomorfismo vista entre $\sigma(T)$ y $\sigma(\mathcal{A}_T)$. Entonces $f \longmapsto f(T)$ es un $*$-homomorfismo por el teorema (5.2). Si $f(\lambda) = \lambda$,

$$f(T) = \int f(\lambda) dP_T(\lambda) = \int \lambda dP_T(\lambda) = T$$

y se cumple (1). La propiedad (2) se cumple teniendo en cuenta que $f(T) = T_f$ y aplicando la proposición (5.8).
Para ver la unicidad, sea $f \longmapsto \widetilde{f}(T)$ otro $*$-homomorfismo que cumple (1) y (2). Se define $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{L}_B(\sigma(T)) \ / \ f(T) = \widetilde{f}(T)\}$, que es un álgebra de funciones por ser $f \longmapsto f(T)$ y $f \longmapsto \widetilde{f}(T)$ $*$-homomorfismos. Por el resultado (1.14), $\sigma(T)$ es un compacto de $\mathbb{C}$, luego se puede ver como compacto de $\mathbb{R}^2$. Sea $p(\lambda) = \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} \lambda^j \overline{\lambda}^k$ un polinomio en λ y $\overline{\lambda}$. De nuevo por ser ambas aplicaciones $*$-homomorfismos y por la propiedad (1) que cumplen, como $p(\lambda) = \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} \mathrm{id}(\lambda^j) \mathrm{id}(\overline{\lambda}^k)$ siendo id la identidad en $\mathcal{L}_B(\sigma(T))$,

$$\widetilde{p}(T) = \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} \widetilde{\mathrm{id}}(T)^j \widetilde{\mathrm{id}}(T)^{*k} = \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} T^j T^{*k} = p(T).$$

Veamos que además $\mathcal{B}$ es cerrada para límites p.b. Siendo $\{f_n\}_n$ una sucesión de elementos de $\mathcal{B}$ que converge p.b. a $f \in \mathcal{L}_B(\sigma(T))$, por la propiedad (2), $f_n(T) = \widetilde{f_n}(T)$ converge a $f(T)$ y a $\widetilde{f}(T)$ fuertemente, esto es

$$\|f_n(T)u - f(T)u\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{y} \qquad \|f_n(T)u - \widetilde{f}(T)u\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Por unicidad del límite, $f(T)u = \widetilde{f}(T)u$ para todo $u \in \mathcal{H}$, luego $f(T) = \widetilde{f}(T)$. Entonces $\mathcal{B}$ es como en el lema (5.9) y por tanto es $\mathcal{L}_B(\sigma(T))$, es decir, los $*$-homomorfismos coinciden, obteniendo la unicidad.

(a) Se considera la aplicación de $\mathcal{L}_B(\sigma(T))$ en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ dada por $f \longmapsto \int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}}$. Por la primera versión del teorema espectral (5.4), $\int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}} = T_{f\circ\widehat{T}}$. Como por (5.2) la aplicación $f \in \mathcal{L}_B(\sigma(\mathcal{A})) \longmapsto T_f$ es un $*$-homomorfismo, para $f, g \in \mathcal{L}_B(\sigma(T))$ y $\alpha \in \mathbb{C}$,

- $\int (\alpha f) \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}} = T_{(\alpha f)\circ\widehat{T}} = \alpha T_{f\circ\widehat{T}} = \alpha \int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}}$.
- $\int (f+g) \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}} = T_{(f\circ\widehat{T})+(g\circ\widehat{T})} = T_{f\circ\widehat{T}} + T_{g\circ\widehat{T}} = \int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}} + \int g \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}}$.
- $\int (fg) \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}} = T_{(f\circ\widehat{T})(g\circ\widehat{T})} = T_{f\circ\widehat{T}} T_{g\circ\widehat{T}} = \big(\int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}}\big)\big(\int g \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}}\big)$.
- $\int \overline{f} \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}} = T_{\overline{f}\circ\widehat{T}} = T^*_{f\circ\widehat{T}} = \big(\int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}}\big)^*$.

Luego la aplicación considerada es un $*$-homomorfismo que además cumple las propiedades:

(1) Si $f(\lambda) = \lambda$, $\int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}} = \int \widehat{T} dP_{\mathcal{A}} = T$ por la primera versión del teorema espectral.

(2) Aplicando directamente el resultado (5.8) teniendo en cuenta que $\int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}} = T_{f\circ\widehat{T}}$ y $f \circ \widehat{T} \in \mathcal{L}_B(\sigma(\mathcal{A}))$ para toda $f \in \mathcal{L}_B(\sigma(T))$.

Por unicidad, esta aplicación coincide con $f \longmapsto f(T)$, es decir, $f(T) = \int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}}$.

(b) Considerando la C*-álgebra $\mathcal{A}_T$ que generan $T, T^*, I \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, si $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ conmuta con T y T^*, conmuta con cualquier operador de $\mathcal{A}_T$. Identificando $\sigma(\mathcal{A}_T)$ con $\sigma(T)$ como antes, por (5.2(a)), S conmuta con T_f para toda $f \in \mathcal{L}_B(\sigma(T))$ y, por el teorema espectral (5.4), conmuta con $T_f = \int f dP_T = f(T)$ para toda $f \in \mathcal{L}_B(\sigma(T))$.

$\square$

5.4. El teorema espectral para $*$-representaciones

En este apartado se dará una extensión de la primera versión del teorema espectral para $*$-álgebras.

En primer lugar, notemos que puede ser que una C*-subálgebra del espacio de operadores acotados en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, tenga elemento neutro pero que no sea el operador identidad:
Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. Sea $\mathcal{A}$ una C*-subálgebra de $\mathscr{B}(\mathcal{H}_1)$ que contiene al operador identidad I_1 en $\mathcal{H}_1$. Para $T \in \mathcal{A}$ se define $T' \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ como $T'(x_1, x_2) = (Tx_1, 0)$. Entonces $\mathcal{A}' = \{T' \;/\; T \in \mathcal{A}\}$ es una C*-subálgebra de $\mathscr{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$. El elemento I_1' es el elemento neutro de $\mathcal{A}'$ pues para cada $T' \in \mathcal{A}'$,

$$(I_1'T')(x_1, x_2) = ((I_1T)x_1, 0) = (Tx_1, 0) = T'(x_1, x_2) = ((TI_1)x_1, 0) = (T'I_1')(x_1, x_2).$$

Sin embargo, el operador identidad en $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ no está en $\mathcal{A}'$.

La siguiente definición nos ayudará a distinguir un caso en el que se puede evitar este problema.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ un $*$-subálgebra de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$. Se dice que $\mathcal{A}$ es *no degenerada* si no existe ningún $v \in \mathcal{H}$ no nulo que cumpla $Tv = 0$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Nota 5.11. Si $\mathcal{A}$ es no degenerada y tiene elemento neutro E, entonces todo $v \in \mathcal{H}$ que anula E cumple $Tv = TEv = 0$ para todo $T \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es no degenerada, $v = 0$ y E sólo se anula en 0, y por ser lineal es inyectiva. Como E es el elemento neutro, es una proyección autoadjunta, en particular, sea $u \in \mathcal{H}$ y $v = E(u)$, entonces $v = E(u) = E^2(u) = E(v)$. Como E es inyectiva, $u = v$, teniendo entonces que $E(u) = u$ para todo $u \in \mathcal{H}$, es decir, E es el operador identidad I en $\mathcal{H}$. Luego si $\mathcal{A}$ es no degenerada y no contiene al operador identidad, no puede tener elemento neutro.

Consideramos el caso de $\mathcal{A}$ una C*-subálgebra de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ no degenerada y que no contiene al operador identidad I. Como no tiene elemento neutro, por lo visto en (2.4), se puede obtener una C*-álgebra unitaria $\mathcal{A}_1$ relacionada con $\mathcal{A}$ mediante un isomorfismo isométrico. En este caso $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}I$. Como se vio en (3.14), se puede identificar el espectro $\sigma(\mathcal{A}_1)$ con $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$. Por la primera versión del teorema espectral (5.4) aplicada a $\mathcal{A}_1$, se tiene una medida espectral regular P en $\sigma(\mathcal{A}_1)$.
Si $T \in \mathcal{A}$, la transformada de Gelfand en $\mathcal{A}$, $\widehat{T}\colon \sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, cumple $\widehat{T}(0) = 0$. Por otro lado $\chi_{\{0\}}(h) = 0$ si $h \neq 0$, luego

$$(\widehat{TP(\{0\})})(h) = (\widehat{TT_{\chi_{\{0\}}}})(h) = (\widehat{T}\chi_{\{0\}})(h) = 0 \text{ para todo } h \in \sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$$

y por tanto $TP(\{0\}) = 0$. Se tiene entonces que todo v en la imagen de $P(\{0\})$ cumple $Tv = 0$ para todo $T \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es no degenerada, el operador $P(\{0\})$ debe ser nulo. Podemos ver entonces la medida espectral P como una medida espectral en $\sigma(\mathcal{A})$. Esta medida sigue siendo regular, esto es, cada medida en $\sigma(\mathcal{A})$ con la σ-álgebra restringida a este espectro dada por

$$P_{u,v}(E) = \langle P(E)u, v\rangle \quad \text{para } E \subseteq \sigma(\mathcal{A}) \text{ de Borel}$$

fijados $u, v \in \mathcal{H}$, es regular por serlo para $\sigma(\mathcal{A}_1)$, identificado con $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$.

Con estas consideraciones se puede enunciar una variante de la primera versión del teorema espectral, donde podemos sustituir la hipótesis de que la C*-álgebra contenga al operador identidad.

Teorema 5.12 (**Teorema espectral para C*-álgebras no degeneradas**). *Sea $\mathcal{A}$ una C*-subálgebra conmutativa de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ no degenerada. Sea $\Sigma = \sigma(\mathcal{A})$. Existe una única medida espectral regular P en Σ de forma que*

$$T = \int \hat{T} dP \qquad \forall T \in \mathcal{A} \qquad y \qquad T_f = \int f dP \qquad \forall f \in \mathcal{L}_B(\Sigma).$$

Además, para $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ son equivalentes:

(a) S conmuta con todo $T \in \mathcal{A}$.

(b) S conmuta con $P(E)$ para todo conjunto de Borel $E \subseteq \Sigma$.

(c) S conmuta con $\int f dP$ para toda $f \in \mathcal{L}_B(\Sigma)$.

Ahora trataremos el caso en el que $\mathcal{A}$ es un $*$-álgebra de Banach.

Definición. Si ϕ es un $*$-homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, diremos que ϕ es una *$*$-representación de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}$.*

Nota 5.13. Veamos que la adherencia de $\phi(\mathcal{A})$ en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ es una C*-subálgebra de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$. En primer lugar, ϕ es continua por ser un homomorfismo de un $*$-álgebra de Banach en una C*-álgebra por (3.13(b)). De esta continuidad se tiene que $\overline{\phi(\mathcal{A})}$ es subálgebra de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, como es un cerrado en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ completo entonces es completa. La definición de C*-álgebra se cumple en $\overline{\phi(\mathcal{A})}$ por serlo $\mathscr{B}(\mathcal{H})$.

Definición. Diremos que una $*$-representación de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}$ es *no degenerada* si la adherencia de $\phi(\mathcal{A})$ en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ es no degenerada.

Teorema 5.14 (**Teorema espectral para $*$-representaciones**). *Sean $\mathcal{A}$ un $*$-álgebra de Banach conmutativa y ϕ una $*$-representación no degenerada de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. Existe una única medida espectral regular P en $\sigma(\mathcal{A})$ de forma que*

$$\phi(x) = \int \widehat{x} dP \qquad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Ademas, para $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ son equivalentes:

(a) S conmuta con $\phi(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

(b) S conmuta con $P(E)$ para todo conjunto de Borel $E \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

Demostración.
En primer lugar supongamos que $\mathcal{A}$ es unitaria. Si denotamos la adherencia de la imagen de ϕ como $\mathcal{B} = \overline{\phi(\mathcal{A})}$, tenemos que $\phi(e)$ es el elemento neutro de $\mathcal{B}$, donde e es el elemento neutro de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{B}$ es no degenerada por serlo ϕ, $\phi(e)$ debe ser el operador identidad I en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ como se ha visto en (5.11). Se define

$$\begin{array}{rccc} \phi^*: & \sigma(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \sigma(\mathcal{A}) \\ & h & \longmapsto & \phi^* h = h \circ \phi. \end{array}$$

Como se ha descrito en el apéndice A, los elementos de la forma $T^{-1}(V)$ siendo V abierto de $\mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{A}$ generan la topología $*$-débil en $\sigma(\mathcal{A})$. Como

$$(\phi^*)^{-1}(T^{-1}(V)) = \{h \in \sigma(\mathcal{B}) \ / \ h \circ \phi(T) \in V\} =$$

$$= \{h \in \sigma(\mathcal{B}) \ / \ \phi(T)(h) \in V\} = (\phi(T))^{-1}(V),$$

se tiene que ϕ^* es continua por serlo ϕ.
Veamos que ϕ^* es inyectiva pues, si $h_1, h_2 \in \sigma(\mathcal{B})$ son tales que $\phi^* h_1 = \phi^* h_2$, entonces $h_1 \circ \phi = h_2 \circ \phi$. Como h_1 y h_2 coinciden en $\phi(\mathcal{A})$, por ser ϕ continua coinciden en todo $\mathcal{B}$ y por tanto $h_1 = h_2$.
Como $\sigma(\mathcal{B})$ es un espacio de Hausdorff compacto por (3.2), ϕ^* es un homeomorfismo sobre su imagen, que es un subconjunto compacto de $\sigma(\mathcal{A})$. Aplicando el teorema espectral (5.4) a $\mathcal{B}$, existe una única medida espectral regular P_0 en $\sigma(\mathcal{B})$ de forma que

$$T = \int \widehat{T} dP_0 \qquad \forall T \in \mathcal{B}.$$

Ahora, para cada $E \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ definimos $P(E) = P_0((\phi^*)^{-1}(E))$. P es una medida espectral en $\sigma(\mathcal{A})$ por serlo P_0 y ser los conjuntos $(\phi^*)^{-1}(E)$ de Borel en $\sigma(\mathcal{B})$ siendo ϕ^* continua. Para cada $u, v \in \mathcal{H}$ y $E \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ de Borel,

$$P_{u,v}(E) = \langle P(E)u, v\rangle = \left\langle P_0((\phi^*)^{-1}(E))u, v\right\rangle = (P_0)_{u,v}((\phi^*)^{-1}(E)).$$

Como $(P_0)_{u,v}$ es regular para cada $u, v \in \mathcal{H}$ y ϕ^* es continua, también lo es $P_{u,v}$ y por tanto P.
Por último en este caso, vamos a relacionar las transformadas de Gelfand en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Para $x \in \mathcal{A}$ y $g = \phi^* h \in \phi^*(\sigma(\mathcal{B}))$,

$$\widehat{x}(g) = \widehat{x}(\phi^* h) = (\phi^* h)(x) = (h \circ \phi)(x) = h(\phi(x)) = \widehat{(\phi(x))}(h).$$

Entonces, para todo $x \in \mathcal{A}$,

$$\phi(x) = \int \widehat{\phi(x)}(h) dP_0(h) = \int \widehat{x}(\phi^* h) dP_0(h) = \int \widehat{x}(g) dP_0((\phi^*)^{-1} g) = \int \widehat{x}(g) dP(g).$$

Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ es no unitaria. Puede ser que $\mathcal{B}$ contenga al operador identidad I, este caso lo cubre el razonamiento que acabamos de hacer, pues lo que se ha usado en todo este es que $I \in \mathcal{B}$ y el hecho de que $e \in \mathcal{A}$ sólo se necesita para obtener esa hipótesis. Supongamos entonces que $I \notin \mathcal{B}$. Considerando $\mathcal{A}_1$ la extensión de $\mathcal{A}$ a un $*$-álgebra unitaria estudiada en (1.2), ϕ se puede extender a $\mathcal{A}_1$ como

$$\phi_1(x,\alpha) = \phi(x) + \alpha I, \qquad (x,\alpha) \in \mathcal{A}_1.$$

ϕ_1 es una $*$-representación de $\mathcal{A}_1$ en $\mathcal{H}$: si $(x,\alpha),(y,\beta) \in \mathcal{A}_1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, por ser ϕ una $*$-representación,

- $\phi_1((x,\alpha)+(y,\beta)) = \phi(x+y)+(\alpha+\beta)I = \phi(x)+\alpha I+\phi(y)+\beta I = \phi_1(x,\alpha)+\phi_1(y,\beta)$.
- $\phi_1(\lambda(x,\alpha)) = \phi(\lambda x) + (\lambda\alpha)I = \lambda(\phi(x) + \alpha I) = \lambda\phi_1(x,\alpha)$.
- $\phi_1((x,\alpha)(y,\beta)) = \phi_1(xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta) = \phi(x)\phi(y) + \alpha\phi(y) + \beta\phi(x) + (\alpha\beta)I = \phi_1(x,\alpha)\phi_1(y,\beta)$.
- $\phi_1((x,\alpha)^*) = \phi_1(x^*,\overline{\alpha}) = \phi(x^*) + \overline{\alpha}I = \phi(x)^* + \overline{\alpha}I^* = \phi(x)^* + (\alpha I)^* = \phi_1(x,\alpha)^*$.

La imagen de ϕ_1 es $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \oplus \mathbb{C}I$. $\mathcal{B}_1$ es no degenerada pues, si existiera $v \in \mathcal{H}$ de forma que todo elemento de $\mathcal{B}_1$ se anula en v, como todo $S \in \mathcal{B}_1$ es de la forma $T + \alpha I$ con $T \in \mathcal{B}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se tendría

$$(T + \alpha I)v = 0 \qquad \forall T \in \mathcal{B}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},$$

en particular para $\alpha = 0$, en contradicción con que $\mathcal{B}$ es no degenerada.
Como antes, tenemos la aplicación $\phi^*\colon \sigma(\mathcal{B}) \longrightarrow \sigma(\mathcal{A})$ dada por $\phi^* h = h\circ\phi$. ϕ^* se extiende de forma continua a $\phi_1^*\colon \sigma(\mathcal{B}_1) \longrightarrow \sigma(\mathcal{A}_1)$ haciendo $\phi_1^*(0) = 0$ con las identificaciones de los espectros con $\sigma(\mathcal{B}) \cup \{0\}$ y $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ respectivamente. Como en el caso anterior, ϕ_1^* es un homeomorfismo de $\sigma(\mathcal{B}_1)$ en un subconjunto compacto de $\sigma(\mathcal{A}_1)$ y por tanto ϕ^* es un homeomorfismo de $\sigma(\mathcal{B})$ en un subconjunto cerrado de $\sigma(\mathcal{A})$.
Por el teorema espectral para C*-álgebras no degeneradas (5.12), existe una única medida espectral regular P_0 en $\sigma(\mathcal{B})$ de forma que

$$T = \int \widehat{T} dP_0 \qquad \forall T \in \mathcal{B}.$$

Ahora, el razonamiento para obtener una medida espectral regular P en $\sigma(\mathcal{A})$ que cumpla lo pedido es el mismo que el visto para el caso $\mathcal{A}$ unitaria.
Por último, la equivalencia de (a) y (b) se obtiene directamente al aplicar la primera versión del teorema espectral en el caso de $\mathcal{A}$ unitaria y el teorema espectral para C*-álgebras no degeneradas en el caso de $\mathcal{A}$ no unitaria. $\square$

A. Topología débil

Definición. Sea (X, τ) donde X es un espacio vectorial y τ una topología en X. Se dice que (X, τ) o simplemente X es un *espacio vectorial topológico* si todo punto de X es cerrado y las operaciones del espacio vectorial son continuas para τ.

Definición. Si (X, τ) es un espacio vectorial topológico se dice que es *localmente convexo* si para cada punto existe una base de entornos en la que todos los elementos son convexos.

Definición. Sean X un conjunto, Y un espacio topológico de Hausdorff y $\mathcal{F}$ una familia no vacía de aplicaciones $f\colon X \longrightarrow Y$. La topología

$$\tau = \{\text{unión de intersecciones finitas de } f^{-1}(V) \ / \ f \in \mathcal{F},\ V \text{ es abierto en } Y\}$$

es la *$\mathcal{F}$-topología en X*.

Esta topología es la más débil en X que hace toda $f \in \mathcal{F}$ continua, es decir, todo abierto de τ es abierto de cualquier topología que haga toda $f \in \mathcal{F}$ continua.

Como se puede ver en el resultado (3.8(b)) de [13], si $\mathcal{F}$ separa puntos en X entonces X es de Hausdorff para la $\mathcal{F}$-topología.

Ahora, para (X, τ) un espacio vectorial topológico sea X' su espacio dual, esto es, el espacio vectorial de los funcionales lineales acotados en X. Como X es un espacio vectorial, es convexo y entonces X' separa puntos por el corolario de (3.4) de [13].

El siguiente resultado se encuentra demostrado en (3.10) de [13].

Proposición A.1. *Si X es un espacio vectorial y $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de funcionales lineales en X que separa puntos, entonces la $\mathcal{F}$-topología hace que X sea localmente convexo y su espacio dual sea $\mathcal{F}$.*

Definición. Si (X, τ) es un espacio vectorial topológico, la X'-topología en X se llama *topología débil de X*.

Por (A.1), X es localmente convexo y su dual es $\mathcal{F}$ para la topología débil.

Todo $x \in X$ induce un funcional lineal $f_x\colon X' \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $f_x\Lambda = \Lambda x$ para todo $\Lambda \in X'$. El conjunto $\mathcal{F} = \{f_x \ / \ x \in X\}$ separa puntos en X' pues, si $\Lambda_1, \Lambda_2 \in X'$ son distintos y se tuviera $f_x\Lambda_1 = f_x\Lambda_2$ para todo $x \in X$, entonces $\Lambda_1 x = \Lambda_2 x$ para todo $x \in X$, lo que es absurdo. Luego se puede aplicar el resultado (A.1) a X' y se obtiene una topología localmente convexa donde todo funcional lineal continuo en X' es de la forma $\Lambda \longmapsto \Lambda x$.

Definición. La $\mathcal{F}$-topología anterior se llama la *topología $*$-débil de X'*.

Teorema A.2 (Banach-Alaoglu). *Sean V un entorno de 0 en un espacio vectorial topológico X y*

$$K = \{\Lambda \in X' \ / \ |\Lambda x| \leq 1 \ \forall x \in V\}.$$

Entonces K es compacto en la topología $*$-débil.

La demostración de este resultado se puede encontrar en 3.15 de [13].

B. Holomorfía de funciones con valores vectoriales

Definición. Sean (Q, μ) un espacio de medida y X un espacio vectorial topológico cuyo dual X' separa puntos. Sea $f\colon Q \longrightarrow X$ una función que cumple que Λf es integrable respecto de μ para todo $\Lambda \in X'$. Si existe un $y \in X$ de forma que

$$\Lambda y = \int_Q \Lambda f d\mu$$

para todo $\Lambda \in X'$, entonces se define la *integral de f (con respecto de μ)* como

$$\int_Q f d\mu = y.$$

Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y X un espacio vectorial topológico complejo. Diremos que una función $f\colon \Omega \longrightarrow X$ es:

- *Débilmente holomorfa en* Ω si Λf es una función holomorfa para todo $\Lambda \in X'$ funcional lineal acotado.
- *Fuertemente holomorfa en* Ω si el límite
$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$
existe para todo $z \in \Omega$.

Nota B.1. Por la continuidad de los funcionales $\Lambda \in X'$ de la definición anterior por ser acotados y lineales, toda función fuertemente holomorfa es débilmente holomorfa.

El siguiente resultado se enuncia en [13] 3.31 para *espacios de Fréchet*, esto es un espacio vectorial topológico localmente convexo cuya topología está inducida por una métrica d completa e invariante ($d(x+z, y+z) = d(x, y)$ para $x, y, z \in X$). Las álgebras de Banach son espacios de Fréchet.

Teorema B.2. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y X un espacio de Fréchet complejo. Si $f\colon \Omega \longrightarrow X$ es una función débilmente holomorfa en Ω, se cumple:*

(a) f es continua en Ω para la topología original de X.

(b) El teorema de Cauchy y la fórmula de Cauchy (ver [2] 3.3.1) se cumplen: si Γ es un camino cerrado en Ω tal que $\mathrm{Ind}_\Gamma(w) = 0$ para todo $w \notin \Omega$, entonces

$$\int_\Gamma f(w) dw = 0$$

y, si $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1$ *para* $z \in \Omega$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (w - z)^{-1} f(w) dw.$$

Si Γ_1 *y* Γ_2 *son caminos cerrados en* Ω *con* $\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(w) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_2}(w)$ *para todo* $w \notin \Omega$, *entonces*

$$\int_{\Gamma_1} f(w) dw = \int_{\Gamma_2} f(w) dw.$$

(c) f *es fuertemente holomorfa en* Ω.

Referencias

[1] Tom M. Apostol. *Análisis matemático.* Reverté, Barcelona, 2ªnd edition, 1996.

[2] Robert B. Ash and W.P. Novinger. *Complex variables.* Dover, 2004.

[3] Gerald B. Folland. *Real analysis : modern techniques and their applications.* Pure and applied mathematics. John Wiley and Sons, New York, 2nd edition, 1999.

[4] Gerald B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis.* Studies in advanced mathematics. CRC, 2015.

[5] Izrail M. Gelfand and M. A. Naimark. *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space.* Mat. Sb., 1943.

[6] Izrail M. Gelfand and D. Raikov. *Continuous unitary representations of locally compact groups.* Mat. Sb., 1943.

[7] Izrail M. Gelfand, D. Raikov, and G. Shilov. *Commutative normed rings.* Uspehi Mat. Nauk, 1946.

[8] Izrail M. Gelfand, D. Raikov, and G. Shilov. *Commutative normed rings.* Chelsea Publishing Company, New York, 1964.

[9] Balmohan V. Limaye. *Functional analysis.* New Age International, London, 3rd. rev. edition, 2017.

[10] S. Mazur. *Sur les anneaux linéaires.* C.R. Acad. Sci, Paris, 1938.

[11] James R. Munkres and Ángel Ferrández. *Topología.* Prentice-Hall, Madrid, 2nd edition, 2007.

[12] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* New York ; London : McGraw-Hill, 3th edition, 1987.

[13] Walter Rudin. *Functional analysis.* International series in pure and applied mathematics. MacGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1991.

[14] Antonio Vera López and Pedro Alegría Ezquerra. *Un curso de análisis funcional : teoría y problemas.* Antonio Vera López, 1997.