Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Teoremas de Picard. El rango de una función armónica en el plano

Autor: Juan Dueñas Ruiz

Tutores: Javier Sanz Gil
Ignacio Miguel Cantero

2023/24

Resumen

El Teorema Pequeño y Grande de Picard son dos resultados fundamentales sobre el rango de funciones holomorfas. Se presentarán dos métodos distintos para probar estos teoremas. En la primera parte, se demostrará el Teorema Pequeño de Picard mediante el Teorema de Bloch y el Teorema Grande de Picard a través del Teorema de Schottky y el Teorema de Montel-Carathéodory, así como utilizando familias normales de funciones con llegada a $\mathbb{C}_\infty$. En la segunda parte, se abordará el estudio del rango de las funciones armónicas definidas en todo el plano complejo, proporcionando una perspectiva innovadora y real al Teorema Pequeño de Picard. Aunque esta segunda alternativa es más larga y tediosa, utiliza exclusivamente resultados clásicos sobre funciones armónicas y proporciona un teorema a partir del cual se derivará trivialmente el Teorema de Lewis y, posteriormente, el Teorema Pequeño de Picard.

Palabras clave: rango de una función entera y de una función armónica; teoremas de Bloch, Schottky y Montel-Carathéodory; teoremas pequeño y grande de Picard.

Abstract

Little and Great Picard's Theorems are two well-known results on the range of holomorphic functions. In this Degree Thesis two ways of proving these findings will be presented. In particular, Little Picard's Theorem will be proved through Bloch's Theorem and the Great Picard's Theorem through Schotkky's Theorem and Montel-Carathéodory's Theorem, as well as through the use of normal families of functions with arrival at $\mathbb{C}_\infty$. The second alternative for proving Little Picard's Theorem, although longer and more tedious, provides an innovative real perspective to this theorem, using only and exclusively classical results on harmonic functions. In fact, a Theorem is presented and proved from which Lewis' Theorem, as well as Picard's Theorem, is trivially proved.

Key words: range of an entire function and of a harmonic function; Bloch, Schottky and Montel-Carathéodory theorems; Little and Great Picard's theorems.

A mi familia, especialmente a mis padres, por creer en mí incluso cuando yo no lo hacía, por soportar mis berrinches y enfados, por ser el amor más puro y por ayudarme a ser quien soy.

A mis amigos del colegio, por haber crecido juntos, por siempre estar ahí y por enseñarme los verdaderos valores de la amistad.

A mis amigos de la carrera, por acompañarme en este viaje, por superar juntos todas las dificultades y por estar a mi lado día a día durante estos últimos cinco años.

A mis amigos del Erasmus, por hacer que la palabra "hogar"trascienda fronteras.

A mis tutores Javi y Nacho, por aceptar dirigirme este trabajo, por su dedicación y esfuerzo, por su entusiasmo al dar clase y por hacerme coger tanto cariño a esta rama de las matemáticas.

Índice general

Introducción

En el año 1879, el matemático Émile Picard asombró a la comunidad científica matemática cuando demostró lo que hoy en día se conoce como Teorema Pequeño de Picard ([10]). Este resultado afirma que una función entera que omita dos valores necesariamente ha de ser constante. Ese mismo año, poco después, este mismo autor publicó otro resultado de gran repercusión, conocido hoy en día como Teorema Grande de Picard ([9]), el cual asegura que una función analítica en un abierto excepto en un punto en el que tiene una singularidad esencial, para cualquier entorno suyo, la función tomará cada valor complejo, con una sola posible excepción, un número infinito de veces.

Estos teoremas esclarecieron los conocimientos que se tenían hasta el momento sobre el rango de funciones holomorfas. En concreto, el Teorema Pequeño de Picard fortalece considerablemente el Teorema de Liouville, mientras que el Teorema Grande de Picard extiende el Teorema de Casorati-Weierstrass.

Debido a la popularidad que alcanzaron estos teoremas, desde su publicación han ido surgiendo diversas pruebas alternativas. Así, se han ido obteniendo desde entonces generalizaciones, extensiones y conexiones con otras áreas de las matemáticas facilitando el progreso de múltiples líneas de investigación. Por ello, González Llorente ([5]) muestra, desde un punto de vista global, cuatro variaciones sobre los Teoremas de Picard, que son, a través del Teorema de Bloch y familias normales, de la ecuación funcional de Fermat, del rango de la aplicación de Gauss de una superficie mínima y una perspectiva real con funciones armónicas. El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es mostrar todos los detalles acerca de los resultados que permiten demostrar los Teoremas de Picard a través de la primera y última variación.

La primera de ellas, está fundamentada en las familias normales y en los

Teoremas de Bloch y Schottky. Por ello, el primer capítulo del presente documento presenta todos los resultados previos necesarios para detallar la demostración del Teorema de Bloch, así como sus corolarios, utilizando como principal referencia el texto de Conway [2, págs. 292-296]. A partir de este teorema, cuyo autor lo escribió desde el psiquiátrico de Charenton, así como de ciertos lemas auxiliares, se demuestra fácilmente el Teorema Pequeño de Picard. Sin embargo, para la prueba del grande, son necesarios los Teoremas de Schottky y de Montel-Carathéodory, y las familias normales. Según González Llorente ([5]), el nacimiento de la moderna Teoría de Funciones de Variable Compleja coincide con el primer tratado de Montel ([7]), en el que se introduce el concepto de una familia normal. En este tratado, se define, como de forma clásica, que una familia de funciones holomorfas es normal, si para cada sucesión de funciones de la familia, existe una subsucesión que, o bien converge uniformemente en los compactos hacia una función holomorfa o bien diverge uniformemente en los compactos hacia ∞. Sin embargo, muchos autores prescinden de la posibilidad de que diverja hacia infinito en la definición formal de familia normal. Sin embargo, en la esfera de Riemann carece de sentido descartar esta opción. Por ello, en el capítulo segundo de este Trabajo de Fin de Grado se demuestran los Teoremas Picard (pequeño) y de Schottky, utilizando como principal referencia el texto de Conway [2, págs. 296-299], así como una breve introducción acerca del plano completado $\mathbb{C}_\infty$ ($\hat{\mathbb{C}}$ en otras referencias) incluyendo una descripción de su topología, destacando que es un espacio métrico completo a partir del texto de Galindo Soto *et al.* [3, págs 14-16].

Uno de los tratados más importantes de Montel es aquel en el que se demuestra lo que se conoce hoy en día como Teorema de Montel-Carathéodory o Criterio fundamental de normalidad, el cual asegura que la familia de funciones holomorfas en la bola unidad que omiten los valores 0 y 1 es normal ([8]). Por ello, el tercer capítulo de este documento incluye una demostración de este Teorema basada en el Teorema de Schottky, a partir del cual se prueba el Teorema grande de Picard. La principal bibliografía utilizada en este capítulo es el texto de Conway [2, págs. 300,301], sin embargo también fue necesario demostrar otro de los Teoremas de Montel como resultado auxiliar a la prueba de Teorema de Montel-Carathéodory utilizando como referencia el texto de Ash y Novinger [1, pág. 111].

Los capítulos cuarto y quinto detallan la demostración del Teorema de Picard a través de funciones armónicas, otra de las variaciones descritas desde un punto de vista muy general en el texto de González Llorente [5]. Durante la década de los años 80 y el principio de los 90, se dedicaron numerosos trabajos a generalizar el Teorema de Picard desde una perspectiva real. En concreto, en 1980, Rickman obtuvo un teorema similar al de Picard, pero para funciones cuasirregulares de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, no fue hasta 1994 cuando Lewis publicó su artículo en el que realizó una demostración acortada del Teorema de Rickman ([6]). Además, este autor incluyó la primera prueba real del Teorema Pequeño de Picard utilizando única y exclusivamente funciones armónicas. Por ello, el cuarto capítulo de este Trabajo de Fin de Grado contiene un compendio de resultados clásicos sobre funciones armónicas que se utilizarán en el quinto capítulo. En particular, la principal referencia bibliográfica utilizada en el cuarto capítulo es el texto de Ransford [11, págs. 3-17] donde se demuestran los principales resultados sobre funciones armónicas. Sin embargo, para la prueba de la Fórmula Integral de Poisson se ha utilizado el libro de Ash y Novinger [1, págs. 86-91], así como para resultados auxiliares para la demostración del Teorema de Harnack, por su sencillez a la hora de los cálculos y razonamientos. Finalmente, el cuarto capítulo concluye con una demostración de este teorema adaptada del texto de Ransford [11, págs. 16-17].

A partir del Teorema de Lewis se deduce fácilmente el Teorema de Picard. Sin embargo, González Llorente ([4]) demuestra un teorema más general en el que reinterpreta el Teorema de Lewis en términos del rango de una función $f : u + iv$ en la que u y v sean armónicas. Por lo tanto, en el quinto capítulo se explican todos lo resultados auxiliares necesarios para demostrar este teorema. La referencia bibliográfica utilizada por excelencia en este capítulo es la mencionada anteriormente, sin embargo, también han sido necesarios los textos de Ransford [11, págs. 17-20] para completar demostraciones sobre el método de reescalamiento, así como el artículo de Wen *et al.* [12] para describir el conjunto de ceros de una función armónica de dos variables.

Capítulo 1

Teorema de Bloch

Sea f una función analítica en un abierto conexo que contiene a la adherencia del disco unidad, con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. El Teorema de Bloch expuesto en esta sección estudia el tamaño el $f(B(0,1))$. Dicho de otra manera, como $f'(0) = 1 \neq 0$, f no puede ser constante y por tanto $f(B(0,1))$ será abierto. Por consiguiente, $f(B(0,1))$ debe contener una bola abierta de radio positivo. El Teorema de Bloch da una aproximación de cómo debe ser ese radio. El capítulo comienza con una serie de lemas auxiliares necesarios para demostrar el Teorema de Bloch. Finalmente, se expondrán los corolarios del mismo así como la definición de *constante de Bloch* y *de Landau*.

Lema 1.1. *Sea f una función holomorfa en la bola unidad. Supongamos además que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in B(0,1)$. Entonces $M \geq 1$ y $f(B(0,1)) \supseteq B\left(0, \frac{1}{6M}\right)$.*

Demostración. Por ser f analítica en la bola unidad, también será holomorfa. Luego si $0 < r < 1$, se tiene que $\overline{B}(0,r) \subseteq B(0,1)$ y estamos en condiciones de usar las Estimaciones de Cauchy para las derivadas:

$$1 = |f'(0)| \leq \frac{1}{r}\sup\{|f(w)| \colon |w| = r\} \leq \frac{M}{r} \quad \text{y} \quad |f^{(n)}(0)| \leq \frac{M}{r^n} n!.$$

Es decir, $r \leq M$ para todo $r \in (0,1)$, lo que implica que $1 \leq M$. De forma completamente análoga se demuestra que $\dfrac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq M$, para cada n natural. Por analiticidad, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$. Además, si $|z| = \dfrac{1}{4M}$, entonces

$|z| \geq \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\right|$. Veámoslo:

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} |z|^n \leq M \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4M}\right)^n = M \frac{\frac{1}{16M^2}}{1-\frac{1}{4M}}$$
$$= \frac{1}{16M-4} \leq \frac{1}{12M} \leq \frac{1}{4M} = |z|.$$

Teniendo en cuenta estos cálculos y la desigualdad triangular, se tiene que

$$|f(z)| = \left|(-z) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\right| \geq \left||z| - \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\right|\right|$$
$$= |z| - \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\right| \geq \frac{1}{4M} - \frac{1}{12M} = \frac{1}{6M}.$$

Falta por comprobar que $f(B(0,1)) \supseteq B(0, \frac{1}{6M})$. Sea $w \in B(0, \frac{1}{6M})$, es necesario encontrar w_0 en el disco unidad tal que $f(w_0) = w$. Esto es equivalente a probar que la función $g : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = f(z) - w$ tenga al menos un cero. Tanto f como g son funciones holomorfas en el disco unidad y no constantes pues $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Si consideramos la curva cerrada $\gamma^* = C\left(0, \frac{1}{4M}\right)$ claramente es nulhomólogo respecto de $B(0,1)$, pues para cualquier $z \notin B(0,1)$, $\eta(\gamma, z) = 0$, ya que z pertenecerá a la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus C\left(0, \frac{1}{4M}\right)$. Además, si $z \in C\left(0, \frac{1}{4M}\right)$, es decir, si $|z| = \frac{1}{4M}$, acabamos de ver que

$$|f(z) - g(z)| = |w| < \frac{1}{6M} \leq |f(z)|.$$

Luego estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Rouché y llegar a la conclusión de que g y f tienen el mismo número de ceros en $B(0, \frac{1}{4M})$. Como $f(0) = 0$, se tiene que existe cierto w_0 tal que $f(w_0) = w$. □

Lema 1.2. *Sea g una función holomorfa en $B(0,R)$ para cierto $R > 0$ que verifica que $g(0) = 0$, $|g'(0)| = \mu > 0$ y $|g(z)| \leq M$ para todo $z \in B(0,R)$. Entonces*

$$g(B(0,R)) \supseteq B\left(0, \frac{R^2\mu^2}{6M}\right).$$

Demostración. Tomemos $f : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{Rg'(0)}g(Rz)$. Por construcción, y por la analiticidad de g, f es analítica en $B(0,1)$. Además, verifica:

- $f(0) = g(0) = 0$,
- $f'(0) = \dfrac{1}{g'(0)R}Rg'(0) = 1$,
- $|f(z)|= |\dfrac{1}{g'(0)R}g(Rz)|\leq \dfrac{M}{\mu R}, \qquad$ si $z \in B(0,1)$.

Por lo que estamos en condiciones de aplicar el Lema 1.1, es decir

$$f(B(0,1)) \supseteq B\left(0, \frac{R\mu}{6M}\right). \tag{1.1}$$

Falta por comprobar $g(B(0,R)) \supseteq B\left(0, \frac{R^2\mu^2}{6M}\right)$. Para ello, sea z perteneciente al conjunto de la derecha, luego $|z|< \frac{R^2\mu^2}{6M}$. Llamemos $y = \frac{z}{g'(0)R}$ que pertenece a $B(0, \frac{R\mu}{6M})$. Debido a (1.1), se tiene que existe $y_0 \in B(0,1)$ tal que $f(y_0) = \frac{1}{g'(0)R}g(Ry_0) = y$. Tomando $z_0 = Ry_0$ se verifica que $g(z_0) = z$ y que $z_0 \in B(0,R)$. □

Lema 1.3. *Sea f una función holomorfa en $B(a,r)$ tal que $|f'(z) - f'(a)|< |f'(a)|$ para todo $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$. Entonces, f es inyectiva en $B(a,r)$.*

Demostración. Sean $z_1, z_2 \in B(a,r)$ tales que $z_1 \neq z_2$, veamos que $f(z_1) \neq f(z_2)$. Llamemos $[z_1, z_2] = \gamma$ al segmento de extremos z_1 y z_2. Así, como γ^* es un compacto,

$$\sup_{w\in\gamma^*}|f'(w) - f'(a)|= \max_{w\in\gamma^*}|f'(w) - f'(a)|= |f'(w_0) - f'(a)|.$$

Nótese que w_0 es el punto de γ^* donde se alcanza el máximo anterior. Se distinguen dos casos:

1) Si $w_0 = a$, entonces f' sería constante igual a $f'(a)$ en γ^* y, por el Principio de Identidad, lo sería también en $B(a,r)$. Se deduce entonces que $f(z) = f'(a)z + c$ en esta bola, con $c \in \mathbb{C}$. Además, teniendo en cuenta la hipótesis del enunciado, $|f'(a)|> 0$ y por tanto, f sería inyectiva.

2) Si $w_0 \neq a$, entonces, por hipótesis, $|f'(w_0) - f'(a)| < |f'(a)|$, y por tanto

$$\begin{aligned}\Big|\int_\gamma (f'(w) - f'(a))dw\Big| &\leq \int_\gamma |f'(w) - f'(a)|dw \leq \sup_{w\in\gamma^*} |f'(w) - f'(a)||z_2 - z_1| \\ &= |f'(w_0) - f'(a)||z_2 - z_1| < |f'(a)||z_2 - z_1| \\ &= \Big|\int_\gamma f'(a)\Big|.\end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta esto y se aplica convenientemente la linealidad de la integral y la desigualdad triangular, entonces

$$\begin{aligned}|f(z_1) - f(z_2)| &= \left|\int_\gamma f'(w)dw\right| = \left|\int_\gamma \big(-f'(w) + f'(a) - f'(a)\big)dz\right| \\ &\geq \left|\Big|\int_\gamma \big(f'(w) - f'(a)\big)dw\Big| - \Big|\int_\gamma f'(a)dw\Big|\right| \\ &= \Big|\int_\gamma f'(a)dz\Big| - \Big|\int_\gamma f'(z) - f'(a)dz\Big| \\ &\geq |z_2 - z_1|\big(|f'(a)| - |f'(w_0) - f'(a)|\big) > 0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Se deduce entonces que $f(z_1) \neq f(z_2)$. □

Una vez demostrados estos lemas accesorios, se procede a enunciar y demostrar el Teorema de Bloch.

Teorema 1.4 (Teorema de Bloch). *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $\overline{B}(0,1) \subseteq U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica que verifica que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Entonces existe una bola abierta $S \subseteq B(0,1)$ tal que $f|_S$ es inyectiva y tal que $f(S)$ contiene una bola de radio $1/72$.*

Demostración. Sea $K : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $K(r) = \max\{|f'(z)| : |z| = r\}$ y $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(r) = (1-r)K(r)$.

1. h es continua. La analiticidad de f en U equivale a la holomorfía en dicho abierto y como consecuencia del Teorema integral de Cauchy, es infinitamente derivable. Luego, la función $z \longrightarrow |f'(z)|$ es continua por ser composición de funciones continuas. Además, por ser $\partial(B(0,r))$ compacto, $|f'|$ alcanzará su máximo en dicho conjunto, donde además

en uniformemente continua como consecuencia del Teorema de Heine-Cantor. De aquí, se deduce que K es continua y en consecuencia h también.

2. $h(0) = K(0) = f'(0) = 1$ y $h(1) = 0$.

Sea $A = \{r \in [0,1] : h(r) = 1\}$ y definamos $r_0 = \sup A$. Es evidente que $A = h^{-1}(\{1\})$, y como h es continua, entonces A es cerrado. Como además $A \subseteq [0,1]$, entonces A es acotado, y por tanto compacto. De esta manera $r_0 = \max A$, y como $1 \notin A$, entonces $r_0 < 1$. Además, para todo r tal que $r_0 < r < 1$, se cumple que $h(r) < 1$. Veámoslo:

Por definición de r_0, $\nexists r \in (r_0, 1]$ tal que $h(r) = 1$. Falta por comprobar que tampoco puede ocurrir que $h(r) > 1$. Razonando por reducción al absurdo, si existiera r_1 con $1 > r_1 > r_0$ tal que $h(r_1) > 1$, como $h|_{[r_1,1]}$ es continua, el Teorema de del valor intermedio implica que existiría $c \in (r_1, 1)$ tal que $h(c) = 1$, lo cual es absurdo por definición de r_0.

Sea a tal que $|a|= r_0$ y $|f'(a)|= K(r_0)$. Operando de forma sencilla, se obtiene que $1 = h(r_0) = (1 - r_0)K(r_0) = (1 - r_0)|f'(a)|$ luego

$$|f'(a)|= \frac{1}{1 - r_0}. \tag{1.3}$$

Sea $S = B\left(a, \frac{\rho_0}{3}\right)$ donde $\rho_0 = \frac{1-r_0}{2}$. Comprobemos que f es inyectiva en S. Para ello, en primer lugar veamos que

$$|f'(z)|< \frac{1}{\rho_0}, \qquad \text{si } z \in B(a, \rho_0). \tag{1.4}$$

Si $|z - a|< \frac{1-r_0}{2}$, entonces se tiene que $|z|\leq |z - a|+|a|< \frac{1-r_0}{2} + r_0 = \frac{1+r_0}{2}$, es decir $B\left(a, \frac{1-r_0}{2}\right) \subseteq B\left(0, \frac{1+r_0}{2}\right)$. Además, como $B\left(0, \frac{1+r_0}{2}\right)$ es conexo y acotado y f' es continua en $\overline{B}\left(0, \frac{1+r_0}{2}\right)$, el Principio del módulo máximo asegura que el máximo absoluto se alcanzará en la frontera. La figura 1.1 muestra un esquema de las bolas utilizadas en la demostración. Por lo que si $z \in B(a, \rho_0) \subseteq B\left(0, \frac{1+r_0}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \max_{x \in B\left(0, \frac{1+r_0}{2}\right)} |f'(z)|= \max_{|z|=\frac{1+r_0}{2}} |f'(z)|= K\left(\frac{1 + r_0}{2}\right) \\ &= h\left(\frac{1 + r_0}{2}\right) \frac{1}{1 - \frac{1+r_0}{2}} < \frac{1}{1 - \frac{1+r_0}{2}} = \frac{1}{\rho_0}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es estricta pues $r_0 < \frac{1+r_0}{2}$ y consecuentemente $h\left(\dfrac{1+r_0}{2}\right) < 1$. Ahora, si $z \in B(a, \rho_0)$, por (1.3) se cumple que

$$|f'(z) - f'(a)| \leq |f'(z)| + |f'(a)| < \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{1-r_0} = \frac{3}{2\rho_0}. \tag{1.5}$$

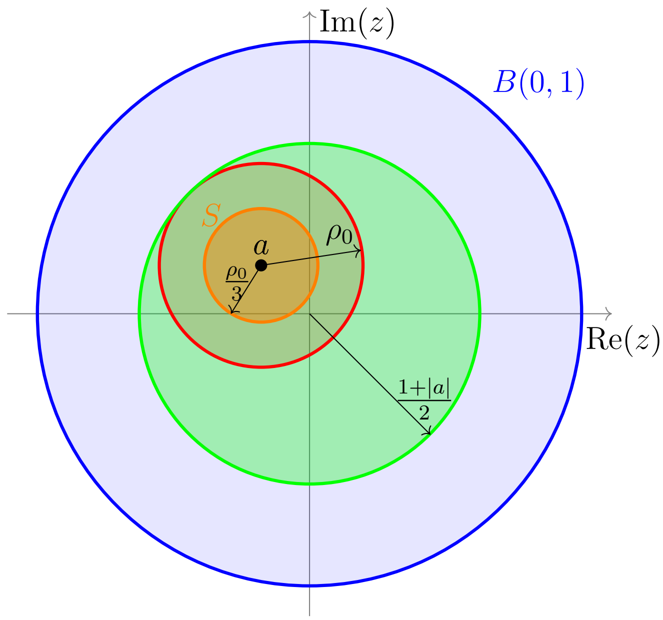


Figura 1.1: Esquema gráfico de la demostración.

Observemos que $g : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \frac{f'(\rho_0 z + a) - f'(a)}{\frac{3}{2}\rho_0},$$

es holomorfa por ser composición de holomorfas y verifica que $g(0) = 0$ y $|g(z)| \leq 1$ debido a (1.5). Por el Lema de Schwarz, se tiene que

$$|g(z)| = \left| \frac{f'(\rho_0 z + a) - f'(a)}{\frac{3}{2}\rho_0} \right| \leq |z|.$$

Aplicando el cambio de variable $\phi(z) = \rho_0 z + a$, se tiene que, si $z \in B(a, \rho_0)$, entonces

$$|f'(z) - f'(a)|\leq \frac{|z-a|}{\rho_0}\frac{3}{2\rho_0}.$$

Finalmente, si $z \in S \subseteq B(a, \rho_0)$,

$$|f'(z) - f'(a)|\leq \frac{3|z-a|}{2\rho_0^2} < \frac{\frac{1}{3}3\rho_0}{2\rho_0^2} = \frac{1}{2\rho_0} = \frac{1}{1-r_0} = |f'(a)|.$$

El Lema 1.3 implica que f es inyectiva en S.

Falta por probar que $f(S)$ contiene una bola de radio $1/72$. Para ello definamos $\Psi : B\left(0, \dfrac{\rho_0}{3}\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\Psi(z) = f(z+a) - f(a)$. Claramente $\Psi(0) = 0$ y $|\Psi'(0)|= |f'(a)|= \dfrac{1}{2\rho_0}$. Si z pertenece a la bola donde está definida Ψ, se tendría que $|z+a-a|= |z|< \frac{\rho_0}{3}$, es decir $z+a \in S$. Por ser el centro de la bola, $a \in S$. Como S es convexo, el segmento $[a, z+a]$ está contenido en $S \subseteq B(a, \rho_0)$, por lo que

$$\begin{aligned} |\Psi(z)| = |f(z+a) - f(a)| &= \left| \int_{[a,z+a]} f'(z)dz \right| \\ &\leq |z|\sup\{|f'(w)|\colon w \in [a, z+a]\} \leq \frac{|z|}{\rho_0} < \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

donde en la penúltima desigualdad se ha utilizado (1.4). Por el Lema 1.2,

$$\Psi\left(B\left(0, \frac{\rho}{3}\right)\right) \supseteq B(0, \sigma), \qquad \text{con } \sigma = \frac{\left(\dfrac{\rho_0}{3}\right)^2 \left(\dfrac{1}{2\rho_0}\right)^2}{6\left(\dfrac{1}{3}\right)} = \frac{1}{72}. \tag{1.6}$$

Veamos ahora que $f(S) \supseteq B\left(f(a), \dfrac{1}{72}\right)$. Sea z tal que $|z - f(a)|< 1/72$, es decir, $z - f(a) \in B(0, 1/72)$. Debido a (1.6), existe $z_0 \in B\left(0, \dfrac{\rho_0}{3}\right)$ tal que $\Psi(z_0) = f(z_0+a) - f(a) = z - f(a)$, luego $f(z_0+a) = z$ y $|z_0+a-a|< \frac{\rho_0}{3}$, por lo que $z_0 + a \in B\left(a, \dfrac{\rho_0}{3}\right)$, quedando demostrado que $z \in f(S)$, concluyendo así la prueba del Teorema de Bloch. $\square$

Nótese que en el Teorema de Bloch es necesario que $\overline{B}(0,1)$ estuviera contenida en el abierto de definición y que $f'(0)=1$. A continuación, se muestra un corolario del Teorema de Bloch en el que se generaliza a una bola $B(a,R)$ cualquiera y a un punto a en el que $f'(a)\neq 0$.

Corolario 1.5. *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica tal que $\overline{B}(a,R)\subseteq U$ con $f'(a)\neq 0$. Entonces existe una bola abierta de radio $\dfrac{|f'(a)|R}{72}$ contenida en $f(B(a,R))$.*

Demostración. Llamemos $U^* = \{\frac{z-a}{R} : z\in U\}$ y sea $g: U^* \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \frac{f(Rz+a)-f(a)}{Rf'(a)}.$$

Observemos que g está bien definida y que es holomorfa en U^* por serlo tanto f como la función $z \longrightarrow Rz+a$ en U y verifica que $g(0)=0$ y $g'(0)=1$. Además, como $\overline{B}(a,R)\subseteq U$ se tiene que $\overline{B}(0,1)\subseteq U^*$. De esta manera, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Bloch llegando a que existen $b\in U$ y $r>0$ tal que

$$g(B(b,r)) \supseteq B\left(g(b), \frac{1}{72}\right). \tag{1.7}$$

A partir esto, demostremos que $f(B(a,R)) \supseteq B\left(f(Rb+a), \dfrac{R|f'(a)|}{72}\right)$ y habremos concluido. Sea z perteneciente al conjunto de la derecha, es decir, $|z-f(Rb+a)|< \dfrac{R|f'(a)|}{72}$. Operando, se tiene que

$$\left|\frac{z-f(Rb+a)}{Rf'(a)}\right| = \left|\frac{z-f(a)}{Rf'(a)} - g(b)\right| < \frac{1}{72}.$$

Debido a (1.7), existe $z_0\in B(b,r)$ tal que

$$g(z_0) = \frac{z-f(a)}{R|f'(a)|} = \frac{f(Rz_0+a)-f(a)}{Rf'(a)},$$

o dicho de otra manera, $f(Rz_0+a)=z$. Obsérvese que el Teorema de Bloch afirma que $B(b,r)\subseteq B(0,1)$ por lo que $|z_0|<1$, y por tanto, se deduce que $Rz_0+a\in B(a,R)$, como queríamos comprobar. $\square$

Definición 1.6. Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones f holomorfas definidas en un abierto conexo de $\mathbb{C}$ que contenga a $\overline{B}(0,1)$ tales que $f(0)=0$ y $f'(0)=1$. Para cada $f\in\mathcal{F}$, se define $\beta(f)=\sup B_f$, donde B_f es el conjunto de los $r>0$ para los cuales existe una bola abierta $S\subseteq\overline{B}(0,1)$ en la que f es inyectiva y tal que $f(S)$ contiene una bola abierta de radio r. El Teorema de Bloch implica que $\frac{1}{72}\le\beta(f)$. Se define la *constante de Bloch* como $B=\text{ínf}\{\beta(f):f\in\mathcal{F}\}$. De nuevo, por el Teorema de Bloch, $B\ge\frac{1}{72}$.

Definición 1.7. Sea $f\in\mathcal{F}$, se define $\lambda(f)=\sup L_f$, donde L_f es el conjunto de los $r>0$ tales que existe una bola abierta de radio r contenida en $f(B(0,1))$. Llamamos *constante de Landau* a $L=\text{ínf}\{\lambda(f):f\in\mathcal{F}\}$.

Nota. Es preciso observar que, como $B_f\subseteq L_f$, entonces $\beta(f)\le\lambda(f)$ para cada $f\in\mathcal{F}$. Además, es evidente que la aplicación identidad Id pertenece a la familia $\mathcal{F}$, y como $\lambda(f)=1$ ya que $Id(B(0,1))=B(0,1)$, entonces $L\le 1$.

Sin embargo, hoy en día sigue siendo una incógnita el valor real de estas constantes.

Proposición 1.8. *Si $f\in\mathcal{F}$, entonces existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tal que $f(B(0,1))\supseteq B(\alpha,L)$.*

Demostración. Comencemos probando que, de hecho, existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tal que $f(B(0,1))\supseteq B(\alpha,\lambda(f))$. Como $\lambda(f)\ge L$ la prueba quedaría concluida. Para facilitar la notación $\lambda=\lambda(f)$. Sea $n\in\mathbb{N}$, por definición de extremo superior, como $\lambda-\frac{1}{n}$ no es cota superior del conjunto donde está definido λ, se tiene que existen $\alpha_n\in\mathbb{C}$ y $r_n>0$ tales que $B(\alpha_n,r_n)\subseteq f(B(0,1))$ y $r_n>\lambda-\frac{1}{n}$. Por lo tanto,

$$B\left(\alpha_n,\lambda-\frac{1}{n}\right)\subseteq B(\alpha_n,r_n)\subseteq f(B(0,1)). \tag{1.8}$$

Consideremos la sucesión de números complejos $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ que está contenida en $f(B(0,1))$ y por lo tanto, también en $f(\overline{B}(0,1))$. Por la continuidad de f, $f(\overline{B}(0,1))$ es compacto y debido al criterio secuencial de compacidad, existe una subsucesión $\{\alpha_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente. Sea $\alpha=\text{lím}_{k\to\infty}\alpha_{n_k}$. Probemos que $B(\alpha,\lambda)\subseteq f(B(0,1))$. Sea w tal que $|w-\alpha|<\lambda$. Se escoge $k_0\in\mathbb{N}$ verificando

que $|w-\alpha|< \lambda - \dfrac{1}{k_0}$. Por definición de límite, $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_1$ entonces
$$|\alpha_{n_k} - \alpha|< \lambda - \frac{1}{k_0} - |w-\alpha|,$$
pues por la elección de k_0 la cantidad de la derecha es estrictamente positiva. Finalmente, si se toma $k > \text{máx}\{k_0, k_1\}$,
$$|w-\alpha_{n_k}|\leq |w-\alpha|+|\alpha_{n_k}-\alpha|< \lambda - \frac{1}{k_0} < \lambda - \frac{1}{k} \leq \lambda - \frac{1}{n_k},$$
por lo que $w \in B\left(\alpha_{n_k}, \lambda - \dfrac{1}{n_k}\right)$ y por (1.8), $w \in f(B(0,1))$. □

Nota. Obsérvese que la Proposición anterior implica que, en la definición de $\lambda(f)$, el supremo es en realidad un máximo.

Corolario 1.9. *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ cumpliendo que $\overline{B}(a,R) \subseteq U$. Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces, existe una bola de radio $R|f'(a)|L$ contenida en $f(B(a,R))$.*

Demostración. Definiendo g igual que en el Corolario 1.5, la Proposición 1.8 implica que existe un complejo α tal que $g(B(0,1)) \supseteq B(\alpha, L)$. Supongamos de nuevo que $f'(a) \neq 0$, pues en caso contrario es trivial. Probemos que
$$f(B(a,R)) \supseteq B\Big(R\alpha f'(a) + f(a), R|f'(a)L|\Big).$$

Sea z perteneciente al conjunto de la derecha, dicho de otra manera, z verifica que $|z - (R\alpha f'(a) + f(a))|< R|f'(a)|L$. Operando en esta expresión se tiene que
$$\left|\frac{z-f(a)}{Rf'(a)} - \frac{\alpha f'(a)R}{f'(a)R}\right| = \left|\frac{z-f(a)}{Rf'(a)} - \alpha\right| < L.$$

Por lo que $\frac{z-f(a)}{Rf'(a)} \in B(\alpha, L)$. Luego existe $z_0 \in B(0,1)$ tal que
$$g(z_0) = \frac{z-f(a)}{Rf'(a)} = \frac{f(Rz_0+a)-f(a)}{Rf'(a)}.$$

Es decir, $z = f(Rz_0+a)$ y como $Rz_0 + a \in B(a,R)$ habríamos concluido la prueba. □

Capítulo 2

Teorema Pequeño de Picard y Teorema de Schottky

El presenta capítulo, a través de dos lemas auxiliares y del Teorema de Bloch del capítulo anterior, demuestra de una sencilla forma el Teorema Pequeño de Picard. Finalmente, se prueba el Teorema de Schotkky, necesario para la prueba del Teorema Grande de Picard, así como uno de sus corolarios. Además, se introduce de forma topológica el plano ampliado $\mathbb{C}_\infty$.

Lema 2.1. *Sea U un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en U tal que $f(z) \neq 0$ y $f(z) \neq 1$, para todo $z \in U$. Entonces, existe $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica que cumple que*

$$f(z) = -\exp(i\pi \cosh(2g(z))), \qquad z \in U.$$

Demostración. Por el Teorema Homotópico de Cauchy, f admite logaritmo analítico en U, es decir, existe $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\exp(h(z)) = f(z)$. Sea $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $F(z) = \dfrac{h(z)}{2\pi i}$. Probemos que $F(z) \neq n$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Si existiera $a \in U$ tal que $F(a) = n$, entonces $h(a) = 2\pi i n$, que tomando exponenciales, se tiene que $\exp(h(a)) = \exp(2\pi i n)$ y por tanto, $f(a) = \exp(2\pi i n) = 1$, que contradice la hipótesis del enunciado. Como U es simplemente conexo y F no toma los valores 0 y 1, el Teorema Homotópico de Cauchy asegura que F y $F - 1$ admiten raíz cuadrada analítica. Por ello, sea $H : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z) - 1}$. Obsérvese que además $H(z) \neq 0$ $\forall z \in U$. Por este motivo, el Teorema Homotópico de

Cauchy asegura que H admite logaritmo analítico, esto es, existe $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\exp(g(z)) = H(z)$. Si además se tiene en cuenta que

$$\begin{aligned}\frac{1}{H(z)} =& \frac{1}{\sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z)-1}} \\ =& \frac{\sqrt{F(z)} + \sqrt{F(z)-1}}{(\sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z)-1})(\sqrt{F(z)} + \sqrt{F(z)-1})} \\ =& \sqrt{F(z)} + \sqrt{F(z)-1},\end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\cosh\big(2g(z)\big) + 1 =& \frac{1}{2}\big(\exp(2g(z)) + \exp(-2g(z))\big) + 1 \\ =& \frac{1}{2}\big(\exp(g(z)) + \exp(-g(z))\big)^2 = \frac{1}{2}\left(H(z) + \frac{1}{H(z)}\right)^2 \\ =& \frac{1}{2}\left(2\sqrt{F(z)}\right)^2 = 2F(z) = \frac{h(z)}{\pi i}.\end{aligned}$$

Finalmente, pasando el factor πi hacia el lado izquierdo de la ecuación y tomando exponenciales se concluye que

$$f(z) = \exp(h(z)) = \exp(\pi i + \pi i \cosh(2g(z))) = -\exp(\pi i \cosh(2g(z))).$$

$\square$

Lema 2.2. *Sean f y g como en el Lema 2.1. Entonces, $g(U)$ no contiene ninguna bola de radio 1.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{Z}$. Si existiera $a \in U$ tal que $g(a) = \pm\log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2}im\pi$. Como $\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)^{-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, entonces

$$\begin{aligned}2\cosh(2g(a)) =& \exp(2g(a)) + \exp(-2g(a)) = \exp(im\pi)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)^{\pm 2} \\ &+ \exp(-im\pi)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)^{\mp 2} = (-1)^m\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)^2 \\ &+ (-1)^m\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)^2 = (-1)^m(2(2n-1)).\end{aligned}$$

Lo que equivale a que $\cosh(2g(a)) = (-1)^m(2n-1)$ y debido al Lema 2.1, $f(a) = -\exp((-1)^m(2n-1)\pi i) = 1$ que por hipótesis es imposible. Por tanto, g no puede tomar ningún valor del siguiente conjunto

$$\{\pm \log(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+\frac{1}{2}im\pi : n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{Z}\}. \tag{2.1}$$

Haciendo variar n y m, este conjunto son los vértices de un retículo rectangular de altura

$$\left|\frac{1}{2}im\pi-\frac{1}{2}i(m+1)\pi\right|=\frac{1}{2}\pi<\sqrt{3},$$

y anchura

$$\log(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-\log(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})>0.$$

Si consideramos dicha anchura como una función $\alpha(x)=\log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})-\log(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$ entonces $\alpha'(x)=-\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x}\sqrt{x+1}}<0$ cuando $x\in[1,\infty)$ por lo que es una función decreciente, y por tanto la anchura de cualquier rectángulo será a lo sumo $\alpha(1)=\log(1+\sqrt{2})<1$. De esta manera, su diagonal será estrictamente menor que $\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$ y por tanto, la bola de mayor radio que se puede considerar para que no contenga ninguno de los puntos de (2.1) tiene que tener radio estrictamente menor que 1. Para comprobar esta afirmación, razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existe z_0 tal que $B(z_0,1)\subseteq g(U)$. Entonces, existe un rectángulo (cerrado) R de vértices v_1,v_2,v_3,v_4 pertenecientes al retículo dado por 2.1, tal que $z_0\in R$. Nótese que diam$(R)<2$. Que $v_i\notin B(z_0,1)$ se traduce en que $|z_0-v_i|\geq 1$ para cada $i=1,\ldots,4$. Si se subdivide R en cuatro subrectángulos iguales R_1,R_2,R_3 y R_4 tal que $v_i\in R_i$ para cada i, solo existe una manera de hacerlo (véase la figura 2.1). Así, existe al menos un $i_0\in\{1,\ldots,4\}$ tal que $z_0\in R_{i_0}$. Nótese que diam$(R_i)<1$, para cada i, por lo que, por definición de diámetro de un conjunto, $|z_0-v_{i_0}|<1$, llegando así a una contradicción.

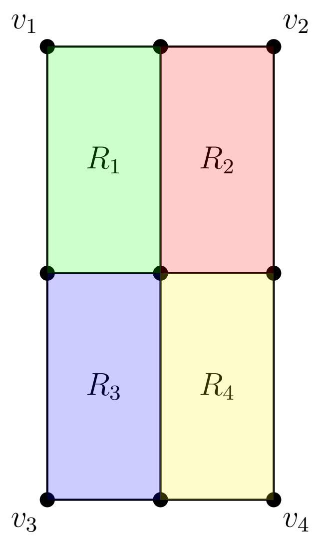


Figura 2.1: Esquema de la subdivisión del rectángulo R.

$\square$

Teorema 2.3 (Pequeño Teorema de Picard)**.** *Si f es una función entera que omite dos valores, entonces es constante.*

Demostración. Supongamos que f omite los valores $a, b \in \mathbb{C}$, es decir, $f(z) \neq a$ y $f(z) \neq b$ para todo z del plano complejo. Entonces la función $\phi(z) = \dfrac{f(z) - a}{b - a}$ definida en todo $\mathbb{C}$ omite los valores 0 y 1 y es entera. El Lema 2.1 implica que existe una función g que será también entera que cumple que $\phi(z) = -\exp(i\pi \cosh(2g(z)))$. Razónese por reducción al absurdo, y supongamos que f no es constante, luego ϕ tampoco lo es y consecuentemente g tampoco lo es, por lo que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $g'(z_0) \neq 0$. Por el Corolario 1.9, para cualquier $R > 0$, $g(B(z_0, R))$ contiene una bola de radio $RL|g'(z_0)|$. Si se toma $R = \dfrac{1}{L|g'(z_0)|}$, $g(\mathbb{C})$ contendría una bola de radio 1, contradiciendo el Lema 2.2. $\square$

Teorema 2.4 (Teorema de Schottky)**.** *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $0 < \alpha$ y $0 < \beta < 1$. Entonces, existe una constante $C(\alpha, \beta)$ tal que para cualquier función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica que cumpla:*

- *U es un abierto simplemente conexo con $\overline{B}(0,1) \subseteq U$,*
- *$f(z) \neq 0$, $f(z) \neq 1$ para todo $z \in U$,*
- *$|f(0)| \leq \alpha$,*

entonces $|f(z)| \leq C(\alpha, \beta)$ si $|z| \leq \beta$.

Demostración. Recordando la demostración del Lema 2.1, sea h tal que $\exp(h(z)) = f(z)$. Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{Im}(h(0)) \in [2\pi n, 2\pi(n+1))$. Si consideramos la función $\tilde{h}(z) = h(z) - 2\pi i n$, entonces, se tiene que $\exp(\tilde{h}(z)) = \exp(h(z))\exp(-2\pi i n) = \exp(h(z)) = f(z)$ por lo que $\tilde{h}$ también sería un logaritmo analítico de f. Además, nótese que $\mathrm{Im}(\tilde{h}(0)) \in [0, 2\pi)$. Considérese ahora la rama del logaritmo l_0, entonces

$$\begin{aligned} l_0(f(0)) =& l_0(\exp(\tilde{h}(0))) = \log(e^{\mathrm{Re}(\tilde{h}(0))}) + i\arg(\exp(\tilde{h}(0))) \\ =& \mathrm{Re}(\tilde{h}(0)) + i\arg(\exp(\tilde{h}(0))), \end{aligned}$$

donde $\arg(\exp(\tilde{h}(0)))$ se escoge en el intervalo $[0, 2\pi)$. Se sabe que $\mathrm{Im}(\tilde{h}(0))$ es un argumento de $\exp(\tilde{h}(0))$ y que además $\mathrm{Im}(\tilde{h}(0)) \in [0, 2\pi)$, luego $l_0(f(0)) = \tilde{h}(0)$. Este comentario se ha realizado para convencer al lector de que se puede suponer sin ninguna pérdida de generalidad que h es logaritmo analítico de f que cumple que $\mathrm{Im}(h(0)) \in [0, 2\pi)$.

Recordando la prueba del Lema 2.1 y el inciso anterior, sea f una función cumpliendo los requisitos del enunciado, entonces:

- Existe h tal que $\exp(h(z)) = f(z)$ y $\mathrm{Im}(h(0)) \in [0, 2\pi)$.
- $F(z) = \dfrac{1}{2\pi i} h(z)$.
- $H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z) - 1}$.
- Existe g tal que $\exp(g(z)) = H(z)$ y $\mathrm{Im}(g(0)) \in [0, 2\pi)$.

Basta probar el Teorema para $2 \leq \alpha < \infty$. La prueba se dividirá en dos casos.

Caso 1: Supongamos $\frac{1}{2} \leq |f(0)| \leq \alpha$. Entonces

$$\begin{aligned}|F(0)| &= \frac{1}{2\pi}|h(0)| = \frac{1}{2\pi}|l_0(f(0))| = \frac{1}{2\pi}\Big|\log(|f(0)|) + i\arg(f(0))\Big| \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big|\log(|f(0)|) + i\mathrm{Im}(h(0))\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big||\log(|f(0)|)| + |\mathrm{Im}(h(0))|\Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\log(\alpha) + 1.\end{aligned}$$

Llamemos $C_0(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi}\log(\alpha) + 1$. También se tiene que

$$\begin{aligned}\Big|\sqrt{F(0)} \pm \sqrt{F(0)-1}\Big| &\leq \Big|\sqrt{F(0)}\Big| + \Big|\sqrt{F(0)-1}\Big| \leq \sqrt{|F(0)|} + \sqrt{|F(0)-1|} \\ &\leq C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + (C_0(\alpha)+1)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Llamemos $C_1(\alpha) = C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + (C_0(\alpha)+1)^{\frac{1}{2}}$. Ahora, si $|H(0)| \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned}|g(0)| = |l_0(H(0))| &= \Big|\log(|H(0)|) + i\arg(H(0))\Big| \leq \Big|\log(|H(0)|)\Big| + \mathrm{Im}(g(0)) \\ &= \log(|H(0)|) + \mathrm{Im}(g(0)) \leq \log(C_1(\alpha)) + 2\pi.\end{aligned}$$

Si $|H(0)| < 1$, entonces

$$\begin{aligned}|g(0)| &= \Big|\log(|H(0)|) + i\arg(\exp(g(0)))\Big| \leq \Big|\log(|H(0)|)\Big| + \Big|\mathrm{Im}(g(0))\Big| \\ &= -\log(|H(0)|) + \Big|\mathrm{Im}(g(0))\Big| = \log\left(\frac{1}{|H(0)|}\right) + \Big|\mathrm{Im}(g(0))\Big| \\ &= \log\left(\Big|\sqrt{F(0)} + \sqrt{F(0)-1}\Big|\right) + \Big|\mathrm{Im}(g(0))\Big| \leq \log(C_1(\alpha)) + 2\pi.\end{aligned}$$

Llamemos ahora $C_2(\alpha) = \log(C_1(\alpha)) + 2\pi$.

Si $|a| < 1$, entonces $\overline{B}(a, 1-|a|) \subseteq \overline{B}(0,1) \subseteq U$ y el Corolario 1.9 implica que existe cierto complejo z_0 tal que $g(B(a, 1-|a|)) \supseteq B(z_0, L(1-|a|)|g'(a)|)$. Además, el Lema 2.1 implica que $g(B(0,1))$ no contiene ninguna bola de radio 1. Como $g(B(0,1)) \supseteq g(B(a, 1-|a|))$, entonces, necesariamente

$$L(1-|a|)|g'(a)| < 1 \Longrightarrow |g'(a)| < \frac{1}{L(1-|a|)} \text{ si } |a| < 1. \tag{2.2}$$

Si se toma el segmento $[0,a]=\gamma^*$, entonces

$$\begin{aligned}|g(a)|=&|g(a)+g(0)-g(0)|\leq |g(0)|+|g(a)-g(0)|\\ \leq& C_2(\alpha)+\left|\int_\gamma g'(z)dz\right|\leq C_2(\alpha)+|a|\text{máx}\{|g'(z)|\colon z\in\gamma^*\}.\end{aligned}$$

Como $\gamma^*\subseteq B(0,1)$, debido a (2.2) se tiene que $\text{máx}\{|g'(z)|\colon z\in\gamma^*\}\leq \dfrac{1}{L(1-|a|)}$ y por tanto $|g(a)|\leq C_2(\alpha)+\dfrac{|a|}{L(1-|a|)}$. Llámese $C_3(\alpha,\beta)=C_2(\alpha)+\dfrac{\beta}{L(1-\beta)}$.

Acabamos de demostrar que si $|z|\leq \beta$, entonces $|g(z)|\leq C_3(\alpha,\beta)$. De esta manera, debido al Lema 2.1

$$\begin{aligned}|f(z)|=&|\exp(\pi i\cosh(2g(z)))|=\exp(\text{Re}(\pi i\cosh(2g(z))))\\ \leq&\exp(|\text{Re}(\pi i\cosh(2g(z)))|)\leq\exp(\pi|\cosh(2g(z))|)\\ \leq&\exp(\pi e^{2|g(z)|})\leq\exp(\pi e^{2C_3(\alpha,\beta)}).\end{aligned}$$

Si se define $C_4(\alpha,\beta)=\exp(\pi e^{2C_3(\alpha,\beta)})$, el caso 1 quedaría probado.

Caso 2: Supongamos que $0<|f(0)|<\dfrac{1}{2}$. Entonces, la función $1-f$ definida también en U satisface

- $1-f(z)\neq 1$ y $1-f(z)\neq 0$,
- $|1-f(0)|<\dfrac{3}{2}<2\leq\alpha$,
- $\dfrac{1}{2}<1-|f(0)|<1<\alpha$.

Por lo que estamos en condiciones de aplicar el caso 1 para $\alpha=2$, es decir, existe $C_4(2,\beta)$ tal que $|1-f(z)|\leq C_4(2,\beta)$ si $|z|\leq\beta$, es decir $|f(z)|\leq C_4(2,\beta)+1$.

Si se llama $C(\alpha,\beta)=\text{máx}\{C_4(\alpha,\beta),C_4(2,\beta)+1\}$ el Teorema quedaría probado. $\square$

Nota. Obsérvese que si $\alpha < 2$ se podría seguir aplicando lo demostrado, ya que, si f cumpliese las condiciones del enunciado, $|f(0)| \leq \alpha < 2$ y la misma constante $C(\alpha, \beta)$ construida previamente serviría para acotar f en $B(0, \beta)$.

Antes de exponer uno de los corolarios del Teorema de Schottky , es necesario introducir el plano ampliado $\mathbb{C}_\infty$, así como su métrica y su topología.

Definición 2.5. Denominamos *esfera de Riemann* al conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \left(x_3 - \frac{1}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\}.$$

Nótese que este conjunto no es más que la esfera centrada en $(0, 0, 1/2)$ y radio $1/2$. Al conjunto $\mathcal{S}$ se le dota de la topología inducida por $\mathbb{R}^3$, es decir, la topología dada por la distancia euclídea. Además, es evidente que $\mathcal{S}$ es cerrado y acotado y por lo tanto compacto. Denominamos *polo norte de* $\mathcal{S}$ al punto $N = (0, 0, 1)$ y *polo sur de* $\mathcal{S}$ al punto $(0, 0, 0)$.

Definición 2.6. Llamamos *plano completado* a $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, es decir, al conjunto que resulta de añadir a $\mathbb{C}$ el *punto del infinito* ∞.

Observación 2.7. Se identifica $\mathbb{C}$ con el plano de $\mathbb{R}^3$ dado por $\{x_3 = 0\}$. De esta manera, cada número complejo $x + iy$ se identifica con el punto $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$. En particular, el polo sur de $\mathcal{S}$ se identifica con el complejo 0.

Definición 2.8. Llamamos la *proyección estereográfica* a la aplicación $\rho : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida de la siguiente manera:

1. $\rho(N) := \infty$.

2. Si el punto $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}$ y además es distinto de N, entonces se define $\rho(P)$ como la proyección de P sobre $\{x_3 = 0\}$ (es decir, sobre $\mathbb{C}$) de la semirrecta que comienza en N y pasa por el punto P. En concreto, de forma rigurosa, se define así:

$$\rho(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}, \qquad \text{si } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1).$$

Es evidente que ρ es una función biyectiva. La figura 2.2 muestra un esquema de estos conceptos de forma gráfica.

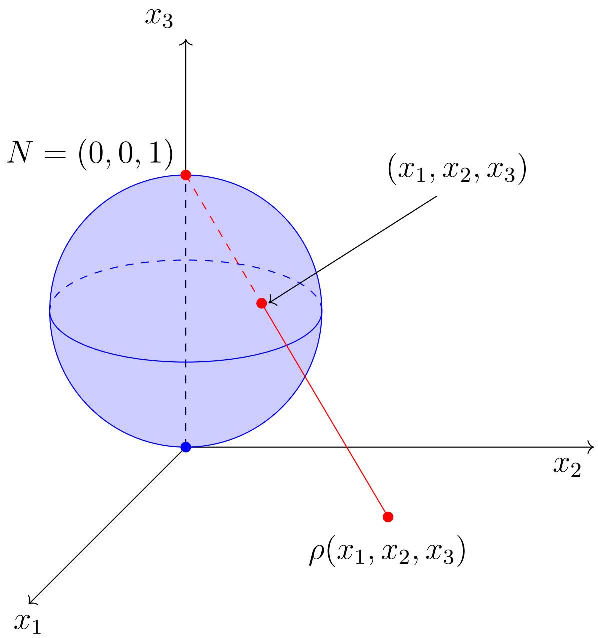


Figura 2.2: Representación gráfica de la esfera de Riemann y de la proyección estereográfica.

Definición 2.9. Denominaremos *métrica cordal* a la aplicación $\delta : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} \delta(w,z) &:= \frac{|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}, & w,z \in \mathbb{C}, \\ \delta(z,\infty) &:= \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, & z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

En consonancia con la definición de proyección estereográfica, se observa que $\delta(z,w) = d(\rho^{-1}(z), \rho^{-1}(w))$ para $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ donde d es la distancia euclídea de $\mathbb{R}^3$. De esta manera, se deduce que $(\mathcal{S}, d)$ y $(\mathbb{C}_\infty, \delta)$ son espacios isométricos y por tanto, $(\mathbb{C}_\infty, \delta)$ es también un espacio topológico compacto.

Observación 2.10. Como $(\mathbb{C}_\infty, \delta)$ es un espacio topológico compacto, entonces es completo.

Proposición 2.11. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1) Sea $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ *una sucesión de puntos de* $\mathbb{C}$*. Entonces,* $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ *converge* *a ∞ en $\mathbb{C}_\infty$ si, y solamente si, $\{|z_n|\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite infinito.*

2) *Si U es un abierto de $\mathbb{C}_\infty$ tal que $\infty \notin U$, entonces U es un abierto de $\mathbb{C}$. Además, si W es un abierto de $\mathbb{C}$, entonces es un abierto de $\mathbb{C}_\infty$ que no contiene al punto ∞.*

3) *Si U es un abierto de $\mathbb{C}_\infty$ tal que $\infty \in U$, entonces existe V abierto en $\mathbb{C}$ tal que $U = V \cup \{\infty\}$ y el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ está contenido en V para algún $r > 0$. Recíprocamente, si W es un abierto de $\mathbb{C}$ tal que $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subseteq W$ para cierto $r > 0$, entonces $W \cup \{\infty\}$ es un abierto de $\mathbb{C}_\infty$ que contiene al punto del infinito.*

Demostración. Veamos en primer lugar la demostración de). Supongamos que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a ∞ en $\mathbb{C}_\infty$. Sea $M > 0$, y pongamos $\varepsilon = 1/\sqrt{M^2+1}$. Por la definición de convergencia en el espacio métrico $(\mathbb{C}_\infty, \delta)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, entonces $\delta(z_n, \infty) < 1/\sqrt{M^2+1}$. Por definición de la métrica cordal, esto equivale a decir que,

$$\frac{1}{\sqrt{1+|z_n|^2}} < \frac{1}{\sqrt{M^2+1}}, \text{ es decir, } |z_n| > M.$$

Para probar el recíproco, supongamos que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Sean $\varepsilon > 0$ y $M > 1/\varepsilon$. Por definición de convergencia a infinito de una sucesión de números reales, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, entonces $|z_n| > 1/\varepsilon$. Elevando al cuadrado obtenemos $|z_n|^2 > 1/\varepsilon^2$ y por tanto

$$|z_n|^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon^2} + 1 > \frac{1}{\varepsilon^2}, \qquad \text{luego,} \qquad \frac{1}{|z_n|^2+1} < \varepsilon^2.$$

Si se toman raíces cuadradas en la expresión anterior, se obtiene el resultado buscado.

Para probar el apartado 2), supongamos en primer lugar que U es un abierto de $\mathbb{C}_\infty$ que no contiene al punto del infinito. Por definición, para cada $z \in U$, existe $r_0 > 0$ tal que

$$B_{\mathbb{C}_\infty}(z, r_0) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{|z-w|}{\sqrt{(1+|z^2|)(1+|w^2|)}} < r_0 \right\} \subseteq U.$$

Si se define la función $f_z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f_z(w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{(1+|z^2|)(1+|w^2|)}}$, entonces, es evidente que f_z es continua y que $f_z^{-1}((-\infty, r_0)) = B_{\mathbb{C}_\infty}(z, r_0)$. Se deduce entonces que $B_{\mathbb{C}_\infty}(z, r_0)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, y por tanto, existirá $r_1 > 0$ tal que

$$B_{\mathbb{C}}(z, r_1) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r_1\} \subseteq B_{\mathbb{C}_\infty}(z, r_0) \subseteq U,$$

como se quería probar. Para demostrar el recíproco, sea W un abierto de $\mathbb{C}$, entonces, para cada $z \in W$, existe $B_{\mathbb{C}}(z, r) \subseteq W$. Como se verifica

$$\frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z^2|)(1 + |w^2|)}} < |w - z|,$$

se deduce que $B_{\mathbb{C}_\infty}(z, r) \subseteq B_{\mathbb{C}}(z, r) \subseteq W$, lo cual implica W es abierto de $\mathbb{C}_\infty$.

Finalmente, para probar el apartado 3), supongamos que U es un abierto de $\mathbb{C}_\infty$ que contiene al punto del infinito. Entonces, existe $r > 0$, que podemos tomar $r < 1$ tal que

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{C}_\infty}(\infty, r) =& \{w \in \mathbb{C}_\infty : \delta(w, \infty) < r\} \\ =& \{\infty\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} < r \right\} \subseteq U. \end{aligned}$$

Además, se tiene que

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} < r \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{\sqrt{1 - r^2}}{r} \right\}. \tag{2.3}$$

Sea $V = U \setminus \{\infty\}$, que evidentemente en abierto en $\mathbb{C}_\infty$. Por el apartado 2., V es abierto en $\mathbb{C}$ y además contiene al conjunto de (2.3), lo que probaría el resultado. Para demostrar el recíproco, sea W abierto en $\mathbb{C}$ tal que existe $r > 0$ con $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subseteq W$. De nuevo, por el apartado 2., W será abierto en $\mathbb{C}_\infty$. Además

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{C}_\infty}\left(\infty, \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}}\right) =& \left\{ w \in \mathbb{C}_\infty : \delta(w, \infty) < \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}} \right\} \\ =& \{\infty\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} < \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}} \right\} \\ \subseteq& \{\infty\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > r \right\} \subseteq W \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Por lo que $W \cup \{\infty\}$ es abierto en $\mathbb{C}_\infty$. □

Corolario 2.12. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $0 < \alpha$ y $0 < \beta < 1$ y U un abierto de $\mathbb{C}$ simplemente conexo tal que $\overline{B}(a, R) \subseteq U$. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica tal que $f(z) \neq 0$ y $f(z) \neq 1$ si $z \in U$ y además $|f(a)| \leq \alpha$, entonces $|f(z)| \leq C(\alpha, \beta)$ si $|z - a| \leq \beta R$ siendo $C(\alpha, \beta)$ la constante obtenida del Teorema de Schottky.*

Demostración. Sea $U^* = \left\{\dfrac{z-a}{R} : z \in U\right\}$ y $g : U^* \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = f(Rz + a)$. Nótese que esta función no asume los valores 0 ni 1 y además $|g(0)| \leq \alpha$. Por construcción $\overline{B}(0, 1) \subseteq U^*$. Veamos que U^* es simplemente conexo. Como U es simplemente conexo, $\mathbb{C}_\infty \setminus U$ es conexo. Se define $h : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{z-a}{R} & \text{si } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Por construcción, h es continua en $\mathbb{C}_\infty$, por lo que $h(\mathbb{C}_\infty \setminus U)$ es conexo. Como además h es biyectiva, entonces $h(\mathbb{C}_\infty \setminus U) = h(\mathbb{C}_\infty) \setminus h(U) = \mathbb{C}_\infty \setminus U^*$. Por tanto, U^* es simplemente conexo. Estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Schottky, luego $|g(z)| \leq C(\alpha, \beta)$ si $|z| \leq \beta R$. Si ahora se llama $w = Rz + a$, se tiene que $|f(w)| \leq C(\alpha, \beta)$ si $|w - a| \leq R\beta$, como se quería probar. $\square$

Capítulo 3

Teorema grande de Picard

Este capítulo cierra la primera parte de este Trabajo de Fin de Grado. A través del concepto de familias normales, y del Teorema de Montel-Carathéodory se demuestra el Teorema Grande de Picard. Se comienza definiendo el concepto de familia normal así como el Teorema de Montel. A continuación, a partir de dos lemas accesorios se prueba el Teorema de Montel-Carathéodory, finalizando con el Teorema Grande de Picard.

Definición 3.1. Sea E un espacio métrico completo y U un abierto de $\mathbb{C}$. Se llama $\mathscr{C}(U, E) = \{f : U \longrightarrow E : f \text{ es continua}\}$.

Definición 3.2. Sea E un espacio métrico completo, U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{C}(U, E)$. Decimos que $\mathcal{F}$ es *normal* si para toda sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{F}$, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en los compactos hacia $f \in \mathscr{C}(U, E)$.

Definición 3.3. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathscr{H}(U)$ a la familia de funciones complejas holomorfas definidas en U. Se dice que $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{H}(U)$ está *localmente acotado* si para todo $a \in U$, existen $M, r > 0$ tales que para todo $f \in \mathcal{F}$ se verifica que:

$$|f(z)| \leq M, \qquad \text{si } |z - a| < r.$$

Lema 3.4. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{H}(U)$. $\mathcal{F}$ está localmente acotado si, y solo si, para cada compacto $K \subseteq U$, existe una constante $M > 0$ tal que*

$$|f(z)| \leq M, \qquad \textit{para cada } f \in \mathcal{F} \textit{ y } z \in K.$$

Demostración. Para la implicación hacia la derecha, supongamos que $\mathcal{F}$ está localmente acotado y sea $K \subseteq U$ compacto. Para cada $a \in K$, existe $M_a > 0$ y $r_a > 0$ tal que, para cada $f \in \mathcal{F}$

$$|f(z)| \leq M_a \qquad \text{para } z \in B(a, r_a).$$

Si se pone

$$K \subseteq \bigcup_{a \in K} B(a, r_a),$$

entonces, al ser K compacto, se puede extraer un subrecubrimiento finito, es decir, existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(a_j, r_{a_j}).$$

Si se toma $M = \max\{M_{a_1}, M_{a_2}, \ldots, M_{a_n}\}$ se obtiene el resultado buscado.

Para la implicación hacia la izquierda, no hay más que tomar, para cada $a \in U$, $r > 0$ tal que $\overline{B}(a, r) \subseteq U$, y aplicar la hipótesis de que la familia está uniformemente acotada en los compactos de U. □

Definición 3.5. Sea dice que una familia de funciones $\mathcal{F}$ definidas en $U \subseteq \mathbb{C}$ es *equicontinua en* $z_0 \in U$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

Lema 3.6. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{H}(U)$ una familia localmente acotada. Entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada punto de U.*

Demostración. Sea $z_0 \in U$ y $r > 0$ tal que $\overline{B}(z_0, r) \subseteq U$. Entonces, para cada $z \in B(z_0, r)$ y $f \in \mathcal{F}$ se tiene que, debido a la Fórmula integral de Cauchy

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)(z_0 - z)}{(w - z)(w - z_0)} dw. \end{aligned}$$

Si se toman valores absolutos en la expresión anterior,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r |z - z_0| \sup \left\{ \left| \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)} \right| : w \in C(z_0, r) \right\} \\ &= r |z - z_0| \sup \left\{ \left| \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)} \right| : w \in C(z_0, r) \right\}. \end{aligned}$$

Por hipótesis, debido al Lema 3.4, existe M_r tal que $|f(w)|\leq M_r$ para cada $w \in C(z_0, r)$ y $f \in \mathcal{F}$. Por tanto, si $z \in B(z_0, r/2)$ y $f \in \mathcal{F}$, entonces

$$\sup\left\{\left|\frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)}\right| : w \in C(z_0,r)\right\} \leq \frac{M_r}{(r/2)^2} = \frac{4M_r}{r^2},$$

por lo que, si se toma $\varepsilon > 0$ y $\delta < \text{mín}\{\frac{r\varepsilon}{4M_r}, r/2\}$, entonces si $|z - z_0|< \delta$,

$$|f(z) - f(z_0)|\leq |z - z_0|\frac{4M_r}{r} < \delta\frac{4M_r}{r} < \varepsilon.$$

$\square$

Teorema 3.7. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{C}(U, \mathbb{C})$ una familia de funciones equicontinuas en cada punto de U. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones de $\mathcal{F}$ tal que f_n converge puntualmente a f en U, entonces f es continua en U y $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en los compactos de U. Más generalmente, si $f_n \longrightarrow f$ puntualmente en un denso de U, entonces $f_n \longrightarrow f$ puntualmente en U y por tanto, se mantiene la misma conclusión.*

Demostración. Veamos en primer lugar que f ha de ser continua. Sea $\varepsilon > 0$, y $z_0 \in U$. Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones equicontinua en U, existe $\delta > 0$ tal que, si $|z - z_0|< \delta$ entonces $|f_n(z) - f_n(z_0)|< \varepsilon/3$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $z \in B(z_0, \delta)$, como f_n converge puntualmente a f en U, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que , si $n \geq n_1$, $|f_n(z_0)-f(z_0)|< \varepsilon/3$. Análogamente, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$, $|f_n(z) - f(z)|< \varepsilon/3$. Sea $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, entonces, si $n \geq n_0$

$$|f(z) - f(z_0)|\leq |f_n(z_0) - f(z_0)|+|f_n(z_0) - f_n(z)|+|f_n(z) - f(z)|< \varepsilon.$$

Para probar la segunda parte de la demostración, sea K un compacto de U. Por la equicontinuidad, para cada $w \in K$ existe $\delta_w > 0$ tal que si $|z-w|< \delta_w$, entonces $|f_n(z) - f_n(w)|< \varepsilon/6$. Es evidente que $\{B(w, \delta_w) : w \in K\}$ es un recubrimiento por abiertos de K. Por tanto, como K es compacto, existen $w_1, \dots, w_m \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(w_j, \delta_{w_j}).$$

Para cada $j = 1, \dots, m$, debido a la convergencia puntual en w_j, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_j$, entonces $|f_n(w_j) - f(w_j)|< \varepsilon/3$. Se escoge

$N = \text{máx}\{N_j : j = 1, \ldots, m\}$. Si $z \in K$, existe al menos $w_{j_0} \in K$ tal que $z \in B(w_{j_0}, \delta_{w_{j_0}})$. Además, como f es continua en w_{j_0}, fijándose en la demostración de la primera parte, se puede escoger el mismo $\delta_{w_{j_0}} > 0$ para asegurar que si $|z - w_{j_0}| < \delta_{w_{j_0}}$ entonces $|f(z) - f(w_{j_0})| < \varepsilon/2$. Finalmente, si se toma $n \geq N$, se tiene que

$$|f_n(z) - f(z)| \leq |f(z) - f(w_{j_0})| + |f(w_{j_0}) - f_n(w_{j_0})| + |f_n(w_{j_0}) - f_n(z)| < \varepsilon,$$

lo que garantiza la convergencia uniforme en los compactos de U.

Finalmente, para la última parte de la demostración, sea $S \subseteq U$ un conjunto denso y supongamos que $f_n \longrightarrow f$ puntualmente en S. Debido a la equicontinuidad de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, como antes, para cada $w \in U$ existe $\delta_w > 0$ tal que si $z \in B(w, \delta_w)$, entonces $|f_n(z) - f_n(w)| < \varepsilon/3$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como S es denso en U, debe existir $w_0 \in S \cap B(w, \delta_w)$. Debido a la convergencia puntual en S, la sucesión $\{f_n(w_0)\}_{n=1}^{\infty}$ ha de ser de Cauchy, por lo que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_0$, entonces $|f_m(w_0) - f_n(w_0)| < \varepsilon/3$. Finalmente, para cada $n, m \geq N_0$, se tiene que

$$|f_m(w) - f_n(w)| \leq |f_m(w) - f_m(w_0)| + |f_m(w_0) - f_n(w_0)| + |f_n(w_0) - f_n(w)| < \varepsilon.$$

Por tanto, la sucesión $\{f_n(w)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ y por tanto es convergente, lo que garantiza la convergencia puntual en U. $\square$

Teorema 3.8 (Teorema de Montel). *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{H}(U)$. Si la familia $\mathcal{F}$ es localmente acotada, entonces $\mathcal{F}$ es normal.*

Demostración. Como la familia $\mathcal{F}$ es localmente acotada, por el Lema 3.6, es equicontinua en cada punto de U. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{F}$ y S un conjunto denso y numerable de U de la forma $S = \{z_1, z_2, \ldots\}$. Veamos que debe existir una subsucesión de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente en S. En primer lugar, considérese la sucesión $\{f_n(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$. Teniendo en cuenta el Lema 3.4, y que $\{z_1\}$ es compacto, se tiene que la sucesión $\{f_n(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. El Teorema de Bolzano-Weierstrass asegura que existe una subsucesión de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que llamaremos $\{f_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{f_{1n}(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Razonando de forma análoga con $\{f_{1n}(z_2)\}_{n=1}^{\infty}$, se tiene que existe una subsucesión de $\{f_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ que llamaremos $\{f_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, $\{f_{2n}(z_2)\}_{n=1}^{\infty}$ converge (y por construcción, $\{f_{2n}(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$ también converge). Procediendo de forma inductiva, para cada $m \geq 1$ y $k = 1, \ldots, m$ se construyen sucesiones

$\{f_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ que convergen en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_k$, siendo cada sucesión una subsucesión de la anterior. A través de un argumento diagonal, si se escoge ahora la subsucesión de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $\{f_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$, se tiene que converge puntualmente en cada punto de S. Finalmente, si se aplica el Teorema 3.7, se obtiene el resultado buscado. □

El siguiente Lema es una consecuencia directa del Teorema de Hurwitz (véase [2, pág. 152]), sin embargo, debido a su importancia en los resultados posteriores, se incluye su demostración completa sin hacer uso de este Teorema.

Lema 3.9. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en U que converge uniformemente en los compactos hacia una función f y tal que $f_n(z) \neq 0$ para todo $z \in U$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, o bien f es idénticamente nula, o bien $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.*

Demostración. En primer lugar, nótese que el Teorema de Weierstrass asegura que f es también analítica en U. Si f no fuera idénticamente nula pero tuviera un cero z_0 en U, entonces z_0 será aislado. Así, existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(z_0, r) \subseteq U$ donde $f(z) \neq 0$ si $z \in \overline{B}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Definamos entonces $\varepsilon = \text{ínf}\{|f(z)|: z \in C(z_0, r)\}$ que será estrictamente positivo por ser f continua y no nula en el compacto $C(z_0, r)$. Por definición de convergencia uniforme, se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ para cualquier $z \in \overline{B}(z_0, r)$. En particular, si $|z - z_0| = r$,

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|.$$

Como $C(z_0, r)$ es nulhomólogo respecto de U, el Teorema de Rouché asegura que f tiene los mismos ceros que f_n, que, por hipótesis, no se anula, lo cual es absurdo. □

Lema 3.10. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $\gamma : [a, b] \to U$ una curva de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, de extremos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$. Entonces existe una cantidad finita de puntos en la curva, $z_0 = \gamma(a)$, $\ldots$, $z_{n+1} = \gamma(b)$, de modo que es posible construir bolas centradas en dichos puntos y de radio adecuado, tales que*

$$z_i, z_{i+1} \in B(z_i, r_i) \cap B(z_{i+1}, r_{i+1}), \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Y además $\overline{B}(z_i, r_i) \subseteq U$.

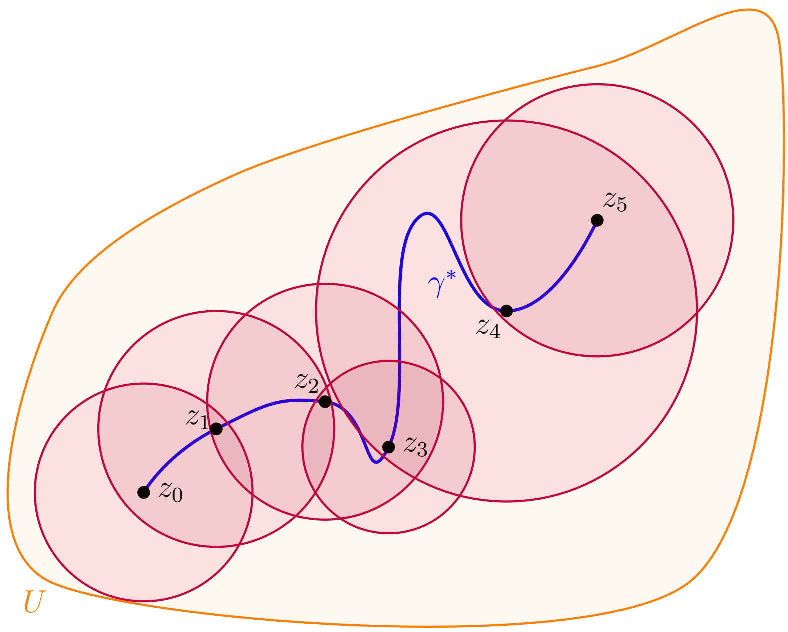


Figura 3.1: Representación gráfica del Lema 3.10.

Demostración. En primer lugar denotemos por α la distancia entre el soporte de la curva y el complementario del abierto U, es decir, el dado por:

$$\alpha = \operatorname{dist}(\gamma^*, \mathbb{C} \setminus U).$$

Como $\mathbb{C} \setminus U$ es un cerrado y γ^* es un compacto, entonces $\alpha > 0$. Además, como la curva es continua en el cerrado $[a, b]$, será uniformemente continua en dicho intervalo y por tanto dado $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$, existirá $\delta > 0$ tal que, para cada $s, t \in [a, b]$ con $|s - t| < \delta$, entonces $|\gamma(s) - \gamma(t)| < \varepsilon = \frac{\alpha}{2}$. Definamos entonces $\{s_0 = a < s_1 < \ldots < s_{n-1} < s_n = b\}$ una partición de $[a, b]$ de diámetro menor o igual que $\delta/2$. Podemos recubrir la curva mediante la unión:

$$\gamma^* \subset \bigcup_{k=0}^{n} B\left(\gamma(s_k), \frac{\alpha}{2}\right).$$

Nótese que si $t \in [a, b]$, entonces existe un k natural con $0 \leq k \leq n - 1$ tal que $t \in [s_k, s_{k+1}]$, cumpliéndose que $|t - s_k| \leq \delta/2$ y por tanto, se cumple que $|\gamma(t) - \gamma(s_k)| < \alpha/2$. En particular, $|\gamma(s_k) - \gamma(s_{k+1})| < \alpha/2$, por lo que $\gamma(s_k) \in B\big(\gamma(s_{k+1}), \alpha/2\big)$ y $\gamma(s_{k+1}) \in B\big(\gamma(s_k), \alpha/2\big)$. □

Teorema 3.11 (Teorema de Montel-Carathéodory)**.** *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F}$ la familia de funciones analíticas definidas en U que no toman los valores 0 ni 1. Entonces $\mathcal{F}$ es normal en $\mathscr{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$.*

Demostración. Sea $z_0 \in U$. Se define

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \leq 1\},$$
$$\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \geq 1\}.$$

Claramente $\mathcal{S} \cup \mathcal{H} = \mathcal{F}$. Si llamamos $\mathscr{H}(U)$ a la familia de funciones complejas holomorfas definidas en U, veamos en primer lugar que $\mathcal{S}$ es normal en $\mathscr{H}(U)$, y a continuación, que $\mathcal{H}$ es normal en $\mathscr{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$. Como $\mathscr{H}(U) \subseteq \mathscr{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$, el Teorema estaría probado.

Para probar que $\mathcal{S}$ es normal en $\mathscr{H}(U)$, por el Teorema de Montel, basta probar que $\mathcal{S}$ es localmente acotado. Para ello, sea $a \in U$ y $f \in \mathcal{S}$ arbitrarios. Como U es un abierto conexo, será arcoconexo, luego existe una curva γ de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos de extremos z_0 y a. El Lema 3.10 implica que existen $z_0, z_1, \ldots, z_n = a \in \gamma^*$ tales que, para todo $k = 0, \ldots, n$, existe $B(z_k, r_k) = B_k$ tal que $\overline{B}(z_k, r_k) \subseteq U$. Además para $k = 0, \ldots, n-1$ se verifica que $z_k, z_{k+1} \in B(z_k, r_k) \cap B(z_{k+1}, r_{k+1})$. Sea $R > r_0$ tal que $\overline{B}(z_0, R) \subseteq U$, entonces se escoge $0 < \beta < 1$ tal que $r_0 < \beta R$. Si también se elige $\alpha = 1$, por el Corolario 2.12, se tiene que existe una constante C_0 tal que $|f(z)| \leq C_0$ si $z \in B(z_0, \beta R)$. En particular, se va a verificar en B_0 por la elección de β y además $|f(z_1)| \leq C_0$ por la construcción de las bolas B_k. A continuación, volvemos a aplicar el Corolario 2.12 para $\alpha = C_0$ y para β escogido de forma análoga pero para la bola B_1, llegando a que existe C_1 tal que $|f(z)| \leq C_1$ si $z \in B_1$, en particular, $|f(z_2)| \leq C_1$. Aplicando el mismo razonamiento $n + 1$ veces, se tiene que existe C_k tal que $|f(z)| \leq C_k$ si $z \in B_k$ para todo $k = 0, \ldots n$. En particular, existe $C_n, r_n > 0$ tales que, para cualquier $f \in \mathcal{S}$, $|f(z)| \leq C_n$ si $|z - a| < r_n$, es decir, es localmente acotado, como queríamos probar. Es importante notar que las cotas C_k son válidas para todas las funciones $f \in \mathcal{S}$, de ahí que podemos concluir que es localmente acotado.

Falta por demostrar que $\mathcal{H}$ es normal en $\mathscr{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$. Para ello, se define el conjunto $\tilde{\mathcal{H}} = \{1/f : f \in \mathcal{H}\}$. Si $f \in \mathcal{H}$, como f es analítica y nunca se anula, entonces $1/f$ también será analítica y tampoco se anulará. Además, como f no toma el valor 1, la función $1/f$ tampoco lo tomará. Finalmente, al verificarse que $|f(z_0)| \geq 1$, se tiene que $|(1/f)(z_0)| \leq 1$. Por lo demostrado en la primera parte de la prueba, $\tilde{\mathcal{H}}$ es normal en $\mathscr{H}(U)$. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones de $\mathcal{H}$. Si consideramos $\{1/f_n\}_{n=1}^\infty$, estará contenida en $\tilde{\mathcal{H}}$. Por ello, existe una subsucesión $\{1/f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ que converge uniformemente en los compactos hacia una función g holomorfa. Por el Lema 3.9, o bien g es idénticamente nula, o bien $g(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.

- Si g es la función idénticamente nula y $K \subseteq U$ un compacto, se tiene que si $M > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq k_0$, entonces $\left|\dfrac{1}{f_{n_k}(z)}\right| < \dfrac{1}{M}$ para todo $z \in K$, por lo que $|f_{n_k}(z)| > M$, es decir, $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}| = \infty$ uniformemente en los compactos de U.
- Si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, entonces la función $1/g$ será holomorfa. Como $\{1/f_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ converge uniformemente en los compactos hacia g, entonces $\{f_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ convergerá uniformemente en los compactos hacia $1/g$.

Observamos que en ambos casos, la subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ converge uniformemente en los compactos a una función de $\mathscr{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$, en el primer caso, a la función constante igual a ∞ y en el segundo caso, a $1/g$, como queríamos probar. $\square$

Teorema 3.12 (Teorema grande de Picard)**.** *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y una función $f : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica con una singularidad esencial en a. Entonces, para todo entorno de a, f toma todos los valores, con una posible excepción, un número infinito de veces.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $a = 0$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe $R > 0$ tal que f omite dos valores en $B(0, R)$. También, supongamos que dichos valores son 0 y 1. Es decir, $f(z) \neq 0$ y $f(z) \neq 1$ si $z \in B(0, R)$. Llamemos $W = B(0, R) \setminus \{0\}$ que es un abierto conexo. Defínase $f_n : W \longrightarrow \mathbb{C}$ por $f_n(z) = f(z/n)$ que será analítica por ser composición de funciones analíticas y además omite los valores 0 y 1. Por el Teorema de Montel-Carathéodory, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es normal en $\mathscr{C}(W, \mathbb{C}_\infty)$, es decir, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ que converge uniformemente en los compactos hacia una función $g \in \mathscr{C}(W, \mathbb{C}_\infty)$. En particular, converge uniformemente en el compacto $C(0, R/2)$. De nuevo, hay que distinguir dos casos.

Caso 1: Supongamos que la función g es analítica. Como g es continua, estará acotada en $C(0, R/2)$, por lo que existe $M > 0$ tal que $|g(z)| \leq M$ si $|z| = R/2$. Además, existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq k_0$, entonces $|f_{n_k}(z) - g(z)| < M$ para todo $z \in C(0, R/2)$. Entonces, si $k \geq k_0$ y $|z| = R/2$

$$|f(z/n_k)| = |f_{n_k}(z) - g(z) + g(z)| \leq |f_{n_k}(z) - g(z)| + |g(z)| \leq 2M,$$

o dicho de otra manera,

$$|f(z)| \leq 2M, \qquad \text{si } |z| = \frac{R}{2n_k} \text{ y } k \geq k_0. \tag{3.1}$$

Es importante notar que el valor de la cota no depende de k. Considérense las coronas circulares $C_k = C\left(0, \frac{R}{2n_k}, \frac{R}{2n_{k_0}}\right)$, para $k \geq k_0$, definida de la siguiente manera

$$C\left(0, \frac{R}{2n_k}, \frac{R}{2n_{k_0}}\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{R}{2n_k} < |z - z_0| < \frac{R}{2n_{k_0}}\right\}.$$

Es evidente que C_k un abierto conexo y además f es continua en $\overline{C_k}$. De esta manera, el Principio del módulo máximo asegura que $|f|$ alcanza su máximo en ∂C_k, es decir, cuando $|z| = \frac{R}{2n_k}$ o $|z| = \frac{R}{2n_{k_0}}$. Teniendo en cuenta (3.1)

$$|f(z)| \leq \text{máx}\{|f(z)| : z \in \partial C_k\} \leq 2M.$$

si $\dfrac{R}{2n_k} \leq |z| \leq \dfrac{R}{2n_{k_0}}$ y $k \geq k_0$. Haciendo tender k a infinito, se tiene que $|f(z)| \leq 2M$ si $z \in \overline{B}\left(0, \frac{R}{2n_{k_0}}\right) \setminus \{0\}$. Por la caracterización de las singularidades evitables, 0 será una singularidad evitable, llegando a una contradicción.

Caso 2: Si $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ converge uniformemente en los compactos hacia ∞, es sencillo comprobar que $\{1/f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ converge uniformemente en los compactos hacia 0. Sea $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$, entonces $|1/f_{n_k}(z)| < \varepsilon$

para todo $|z|= R/2$. Por como se ha definido la sucesión de funciones, es lo mismo que decir que

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| < \varepsilon, \qquad \text{si } k \geq k_0 \text{ y } |z|= \frac{R}{2n_k}.$$

Haciendo exactamente el mismo razonamiento que en el caso 1 con las coronas C_k y el principio del módulo máximo, llegamos a que $|1/f(z)|< \varepsilon$ si $z \in B\left(0, \frac{R}{2n_{k_0}}\right) \setminus \{0\}$. Por la caracterización de las singularidades aisladas, la función $1/f$ tendrá en 0 una singularidad evitable, y de hecho, $\lim_{z\to 0} 1/f(z) = 0$. Por la caracterización de las singularidades polares, f tiene un polo en $z = 0$, y por tanto, hemos llegado a una contradicción.

En ambos casos se llega a un absurdo y por tanto queda probado que para todo entorno de 0, la función omite a lo sumo un solo valor. Nótese que para simplificar la demostración se ha supuesto que $a = 0$ y que en cierto entorno de a, la función f no asumía los valores 0 y 1. En el caso general, para a cualquiera y $f(z) \neq b$ y $f(z) \neq c$ en un cierto entorno de a, basta tomar la función $g : U - a \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \frac{f(z + a) - c}{b - c},$$

y aplicar lo que ya se ha demostrado.

Falta por probar que los valores que la función asume, se toman un número infinito de veces. Si existiesen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ que no se toman infinitas veces, entonces o bien se omite uno y el otro se toma un número finito de veces, o bien los dos se toman un número finito de veces. En el primero de los casos, supongamos que para w_1 existen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, puntos del plano complejo que cumplen que $f(z_1) = \cdots = f(z_n) = w_1$ y que f no asume w_2. Sea $r < \min\{|z_i - a|: 1 \leq i \leq n\}$. Entonces en $B(a, r)$, f omite los valores w_1 y w_2, llegando a una contradicción con lo probado en la primera parte. El segundo caso se prueba de manera análoga reduciendo de la misma manera el entorno. $\square$

Capítulo 4

Resultados clásicos sobre funciones armónicas

La segunda parte de este Trabajo de Fin de Grado comienza con los resultados clásicos sobre funciones armónicas como pueden ser el Teorema de Liouville, el Principio de Identidad, la Propiedad de la Media, el Principio del Módulo Máximo/Mínimo o la Fórmula Integral de Poisson, la desigualdad de Harnack y una versión ligeramente modificada del Teorema de Harnack. Este capítulo no pretende ilustrar al lector con todos los resultados clásicos sobre funciones armónicas sino aquellos que se utilizarán en el capítulo siguiente, con el objetivo de que este Trabajo de Fin de Grado sea autocontenido.

Definición 4.1. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^2$ en U, que se denotará por $h \in \mathscr{C}^2(U)$. Siguiendo la notación habitual, si $z_0 = (x_0, y_0) \in U$, se define el *laplaciano de* h como

$$\Delta h(z_0) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Definición 4.2. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $h \in \mathscr{C}^2(U)$. Se dice que h *es armónica en* U si $\Delta h(z) = 0$ para todo $z \in U$.

Proposición 4.3. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Si f es holomorfa, entonces su parte real e imaginaria son dos funciones armónicas en U.*

Demostración. Con ánimo de facilitar la notación, pongamos que

$$u = \mathrm{Re}(f) : U \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$v = \mathrm{Im}(f) : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Como f es holomorfa, entonces $u, v \in \mathscr{C}^2(U)$, y por tanto, las Condiciones de Cauchy-Riemann aseguran que, si $z_0 \in U$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

A continuación, únicamente se demostrará que u es armónica en U, ya que la prueba para v es completamente análoga. Para ello, la expresión anterior se deriva con respecto de x la primera parte y con respecto de y la segunda, obteniendo así

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(z_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(z_0).$$

El Teorema de Schwarz asegura que se puede permutar el orden de derivación con respecto a distintas variables, es decir

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(z_0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(z_0),$$

y por tanto,

$$\Delta u(z_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(z_0) - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(z_0) = 0.$$

Como z_0 es un elemento arbitrario de U, la demostración quedaría finalizada. □

Proposición 4.4. *Sea U un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica. Entonces existe $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $u = \mathrm{Re}(f)$. De hecho, f es única salvo suma de constantes imaginarias puras.*

Demostración. En primer lugar, veamos la existencia de f. Para ello, se define $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ por $g(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0)$. Como $u \in \mathscr{C}^2(U)$, entonces es claro que $\dfrac{\partial u}{\partial x}, -\dfrac{\partial u}{\partial y} \in \mathscr{C}^1(U)$. Comprobemos ahora que estas dos últimas funciones cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en cada punto de U. Para ello, sea $z_0 \in U$ arbitrario. Como u es armónica en U, se tiene que

$$\Delta u(z_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0) = 0 \quad \text{es decir} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0).$$

Ahora, por el Teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(z_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(z_0).$$

Cumpliendo así las Condiciones de Cauchy-Riemann. De esta manera, g es holomorfa en U.

Sea $z_0 \in U$ un elemento fijo y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida por

$$f(z) = u(z_0) + \int_\gamma g(w)dw, \qquad z \in U,$$

siendo γ cualquier curva $\mathscr{C}^1$ a trozos en U de extremos z_0 y z. Veamos que f es la función que se busca. Para ello, es importante recalcar que U es un abierto simplemente conexo y g es holomorfa en U, por tanto, admite primitiva. Luego existe $G : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $G'(z) = g(z)$, para cada $z \in U$. De esta manera, la Regla de Barrow asegura que, para cada $z \in U$,

$$f(z) = u(z_0) + G(z) - G(z_0).$$

Se deduce que (1) f está bien definida, pues no depende de la curva γ, sino únicamente depende de sus extremos; (2) f es holomorfa en U por serlo G. Derivando la expresión anterior, obtenemos que

$$f'(z) = g(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z). \tag{4.1}$$

Llamando $\mathrm{Re}(f) = \tilde{u}$, solo falta por comprobar que $u(z) = \tilde{u}(z)$, para cada $z \in U$. Es importante notar que, como f es holomorfa en U, cumplirá las Condiciones de Cauchy-Riemann, y por tanto, para cada $z \in U$,

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(z) - i\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(z). \tag{4.2}$$

Como consecuencia de (4.1) y (4.2) se obtiene que

$$\frac{\partial(\tilde{u}-u)}{\partial x}(z) - i\frac{\partial(\tilde{u}-u)}{\partial y}(z) = 0.$$

Separando la parte real e imaginaria, se llega a que $\frac{\partial(\tilde{u}-u)}{\partial x}(z) = 0$ y $\frac{\partial(\tilde{u}-u)}{\partial y}(z) = 0$ para todo $z \in U$. Como U es un abierto conexo, entonces la función $\tilde{u}-u$ será constante en U. Para finalizar, si se tiene en cuenta que

$$\tilde{u}(z_0) = \mathrm{Re}(f(z_0)) = \mathrm{Re}((u(z_0) + G(z_0) - G(z_0)) = u(z_0),$$

es decir, $(\tilde{u}-u)(z_0) = 0$, y por tanto $\tilde{u}-u$ es idénticamente nula en U. Esto termina la prueba de la existencia, pues $\mathrm{Re}(f) = \tilde{u} = u$.

Falta comprobar la unicidad salvo suma de constantes. Para ello, supongamos que existen dos funciones f_1 y f_2 holomorfas en U tal que $\mathrm{Re}(f_1)$ =$\mathrm{Re}(f_2) = u$. Por Cauchy-Riemann, para cada $z_0 \in U$,

$$f_1'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = f_2'(z_0).$$

Luego. la función $(f_1' - f_2') = (f_1 - f_2)'$ es idénticamente nula en U, y como U es conexo, $(f_1 - f_2)$ es constante. Por consiguiente, existe $C \in \mathbb{C}$ tal que $f_1(z_0) = f_2(z_0) + C$ para cada $z_0 \in U$, como queríamos comprobar. □

Teorema 4.5 (Propiedad de la media)**.** *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ tal que $\overline{B}(w,\rho) \subseteq U$ y $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica. Entonces*

$$h(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(w + \rho e^{i\theta})d\theta.$$

Demostración. Sea $\rho' > \rho$ tal que $B(w,\rho') \subseteq U$. Por la Proposición 4.4, existe una función f holomorfa en $B(w,\rho')$ tal que $h(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ para cada $z \in B(w,\rho')$. De esta manera, la Fórmula Integral de Cauchy asegura que

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(w,\rho)} \frac{f(z)}{z-w}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(w+\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(w+\rho e^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

Si se toma la parte real de la expresión anterior, se obtiene el resultado buscado. □

Teorema 4.6 (Principio de identidad para funciones armónicas)**.** *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $h, k : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones armónicas. Si $W \subseteq U$ es abierto y $h = k$ en W, entonces $h = k$ en U.*

Demostración. Por hipótesis, la función $h - k$ es idénticamente nula en W. Definamos $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(x, y) = \frac{\partial(h-k)}{\partial x} + i\frac{\partial(h-k)}{\partial y}.$$

En la demostración de la Proposición 4.4, se probó que, g así definida, es holomorfa en U y además, por construcción, $g = 0$ en W. Por el Principio de identidad para funciones holomorfas, g es idénticamente nula en U, es decir,

$$\frac{\partial(h-k)}{\partial x} + i\frac{\partial(h-k)}{\partial y} = 0.$$

Tomando parte real y imaginaria se obtiene que

$$\frac{\partial(h-k)}{\partial x} = 0 \text{ y } \frac{\partial(h-k)}{\partial y} = 0.$$

Como U es un abierto conexo, necesariamente $h - k$ es constante en U, y dado que $h - k$ es idénticamente nula en W, dicha constante ha de ser 0, como queríamos probar. □

Teorema 4.7 (Principio del módulo máximo para funciones armónicas)**.** *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica. Si h tiene un máximo local en U, entonces h es constante.*

Demostración. Supongamos que existen $z_0 \in U$ y $r > 0$, tal que $B(z_0, r) \subseteq U$ y que además, para cada $z \in B(z_0, r)$, se tiene que $h(z_0) \geq h(z)$. Por la Proposición 4.4, existe una función f holomorfa en $B(z_0, r)$ tal que, para cada $z \in B(z_0, r)$, $h(z) = \mathrm{Re}(f(z))$. Además, si consideramos la función definida en esta misma bola dada por $|e^{f(z)}| = e^{h(z)}$, entonces, como la exponencial es creciente y h alcanza un máximo en z_0, está claro que $|e^f|$ alcanzará un máximo en z_0. Dado que e^f es holomorfa en $B(z_0, r)$, por el principio del módulo máximo para funciones holomorfas, e^f será constante en $B(z_0, r)$. Veamos que necesariamente f también es constante en esta misma bola. Si e^f fuese constante igual a $c \in \mathbb{C}$ en $B(z_0, r)$, se tendría que, para cada $z \in B(z_0, r)$, el valor $f(z)$ debe ser un logaritmo de c. Por una parte, el conjunto de logaritmos de c es discreto, sin embargo, como f es continua y la bola es conexa, se tiene que $f(B(z_0, r))$ es un conexo. Consecuentemente, se tendría que $f(B(z_0, r))$ es un conjunto discreto y conexo, por lo que ha de ser unipuntual, luego f es constante en la bola. □

Teorema 4.8 (Principio del módulo mínimo para funciones armónicas)**.** *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica. Si h tiene un mínimo local en U, entonces h es constante.*

Demostración. La demostración es completamente análoga a la prueba del Principio del módulo máximo para funciones armónicas. □

Lema 4.9. *Sea f una función continua en $\overline{B}(0, 1)$ y holomorfa en $B(0, 1)$. Entonces*

1. $\displaystyle\oint_{C(0,1)} f(w)\, dw = 0$

2. *Para cada $z \in B(0, 1)$ se tiene que* $\displaystyle f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$

Demostración. Para probar el primer apartado, si se toma $0 < r < 1$, entonces, por el Teorema de Cauchy-Goursat se tiene que

$$\oint_{C(0,1)} f(w) dw = 0. \tag{4.3}$$

Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $f_n : B\left(0, \frac{n+1}{n}\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_n(z) = f\left(\frac{n}{n+1} z\right)$. Por ser f holomorfa en $B(0, 1)$, es evidente que f_n lo será en $B\left(0, \frac{n+1}{n}\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, f_n converge uniformemente a f en $C(0, 1)$. Comprobemos esta última afirmación. Sea $\varepsilon > 0$, como f es continua en $\overline{B}(0, 1)$, por el Teorema de Heine, será uniformemente continua, es decir,

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall z, w \text{ con } |z - w| < \delta, \text{ se tiene que } |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Además, es sencillo de probar que la sucesión de funciones $\{\frac{n}{n+1}z\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a z en $C(0,1)$. Dicho de otra manera,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que, si } n \geq n_0, \text{ entonces } \left|\frac{n}{n+1}z - z\right| < \delta \ \forall z \in C(0,1).$$

Teniendo en cuenta esto, para cada $z \in C(0,1)$ se tiene que

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| f\left(\frac{n}{n+1}z\right) - f(z)\right| < \varepsilon,$$

lo que probaría la convergencia uniforme. Esto implica que

$$\oint_{C(0,1)} f_n(w)dw \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \oint_{C(0,1)} f(w)dw.$$

Si además se tiene en cuenta que

$$\oint_{C(0,1)} f_n(w)dw = \frac{n+1}{n} \oint_{C\left(0,\frac{n}{n+1}\right)} f_n(w)dw = 0,$$

donde la última igualdad se debe a (4.3), se tiene que

$$\oint_{C(0,1)} f(w)dw = 0,$$

como se quería probar.

Para probar la segunda parte, tomemos $z \in B(0,1)$ y definamos g por

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z, \\ f'(z) & \text{si } w = z. \end{cases}$$

Esta función, por definición de derivada, es continua en $\overline{B}(0,1)$. Además, por construcción, es holomorfa en $B(0,1)$. Si aplicamos el primer apartado a esta función g se tiene que

$$\oint_{C(0,1)} g(w) = 0 \text{ es decir, } \oint_{C(0,1)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = 0.$$

Esto equivale a

$$\oint_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-z}dw = \oint_{C(0,1)} \frac{f(z)}{w-z}dw = f(z)\oint_{C(0,1)} \frac{1}{w-z} = f(z)2\pi i,$$

lo que demuestra el segundo apartado. □

Definición 4.10. Para cada $z \in B(0,1)$ se definen las funciones de variable real $P_z, Q_z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$P_z(t) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} \qquad \text{y } Q_z(t) = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}.$$

P_z se denomina el *núcleo de Poisson* y Q_z el *núcleo de Cauchy*.

Observación 4.11. Nótese que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(Q_z(t)) &= \operatorname{Re}\left(\frac{(e^{it}+z)(e^{-it}-\overline{z})}{|e^{it}-z|^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1-|z|^2+ze^{-it}-\overline{z}e^{it}}{|e^{it}-z|^2}\right)\\ &= P_z(t).\end{aligned}$$

Si ponemos $z = e^{i\theta}$, entonces

$$P_z(t) = \frac{1-r^2}{|e^{it}-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{|e^{i(t-\theta)}-r|^2} = P_r(t-\theta).$$

Además, como se cumple que

$$\begin{aligned}|e^{i(t-\theta)}-r|^2 &= (e^{i(t-\theta)}-r)(e^{i(\theta-t)}-r) = 1-re^{i(t-\theta)}-re^{i(\theta-t)}+r^2\\ &= 1-2\cos(t-\theta)+r^2,\end{aligned}$$

entonces, por ser el coseno una función par,

$$P_r(t-\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} = P_r(\theta-t).$$

De esta manera, para $0 \leq r \leq 1$, P_r es una función par. Además, también es positiva y decreciente en $[0,\pi]$.

Teorema 4.12 (Fórmula integral de Poisson)**.** *Sea $f = u + iv$ una función continua en $\overline{B}(0,1)$ y holomorfa en $B(0,1)$. Entonces, para cada $z \in B(0,1)$ se cumple que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(t) f(e^{it})dt.$$

En particular,

$$\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(t)\operatorname{Re}(f(e^{it}))dt.$$

Demostración. Como consecuencia del Lema 4.9,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w}dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_0(t)f(e^{it})dt,$$

ya que $P_0(t) = 1$, lo que resuelve el caso $z = 0$. Para $z \in B(0,1) \setminus \{0\}$, de nuevo por el Lema 4.9,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Además, $1/\overline{z} \notin B(0,1)$, lo que implica que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-1/\overline{z}}dw = 0.$$

Si restamos ambas expresiones se tiene que

$$\begin{aligned}
f(z) =& \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(0,1)} \left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-1/\overline{z}}\right) f(w)dw \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{e^{it}-z} - \frac{1}{e^{it}-1/\overline{z}}\right) e^{it} f(e^{it})dt \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it}}{e^{it}-z} + \frac{\overline{z}e^{it}}{1-\overline{z}e^{it}}\right) f(e^{it})dt \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it}}{e^{it}-z} + \frac{\overline{z}}{e^{-it}-\overline{z}}\right) f(e^{it})dt \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} f(e^{it})dt \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(t)f(e^{it}).
\end{aligned}$$

Esto demuestra la primera parte. Para la segunda, no hay más que tomar la parte real de la expresión anterior. □

Corolario 4.13. *Si $z \in B(0,1)$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(t)dt = 1.$$

Demostración. No hay más que tomar la función identidad en el teorema anterior. □

Teorema 4.14. *Sea f una función continua en $\overline{B}(z_0, R)$ y holomorfa en $B(z_0, R)$. Entonces, para cada $z \in B(z_0, R)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{(z-z_0)/R}(t) f(z_0 + Re^{it}) dt.$$

En forma polar, si $z = z_0 + re^{i\theta}$, entonces

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{r/R}(\theta - t) f(z_0 + Re^{it}) dt.$$

Demostración. Se define g en $\overline{B}(0, 1)$ por $g(w) = f(z_0 + Rw)$, que será continua en $\overline{B}(0, 1)$ y holomorfa en $B(0, 1)$ por construcción. Debido a Fórmula integral de Poisson aplicado a g, se tiene que, para cada $w \in B(0, 1)$,

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_w(t) g(e^{it}) dt.$$

Si $z \in B(z_0, R)$, entonces $w = (z - z_0)/R \in B(0, 1)$ y además

$$f(z) = g\left(\frac{z - z_0}{R}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{(z-z_0)/R}(t) f(z_0 + Re^{it}) dt.$$

Para la segunda parte, si se pone $z = z_0 + re^{i\theta}$, entonces $w = re^{it}$ y $P_{(z_0-z)/R}(t) = P_{r/R}(t-\theta)$. Si se aplica el resultado que se acaba de demostrar, se obtiene la fórmula de Poisson en forma polar. □

Teorema 4.15 (El Problema de Dirichlet)**.** *Sea u_0 una función real y continua en $\partial B(0, 1)$. Se define u en $\overline{B}(0, 1)$ por*

$$u(z) = \begin{cases} u_0(z) & si\ |z| = 1, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(t) u_0(e^{it})\, dt & si\ |z| < 1. \end{cases}$$

Entonces u es continua en $\overline{B}(0, 1)$ y armónica en $B(0, 1)$.

Demostración. Si u_0 fuese idénticamente nula, el resultado sería evidente. En caso contrario, veamos en primer lugar que u es armónica en $B(0,1)$. Sea $z = re^{i\theta}$ tal que $0 \leq r < 1$. Teniendo en cuenta la observación 4.11,

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right) u_0(e^{it})dt \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}} u_0(e^{it})dt\right). \end{aligned}$$

Si se define $g : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} u_0(e^{it})dt, \qquad z \in B(0,1),$$

basta ver que g es holomorfa en $B(0,1)$ para tener que u es armónica en la misma bola, como consecuencia de la Proposición 4.3. Para comprobar esto, si $z \in B(0,1)$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} u_0(e^{it})\frac{ie^{it}}{ie^{it}}dt = \oint_{C(0,1)} \frac{w+z}{w-z} u_0(w)\frac{1}{iw}dw.$$

Si se define $F : B(0,1) \times C(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$F(z,w) = \frac{w+z}{w-z} u_0(w)\frac{1}{iw}, \qquad (z,w) \in B(0,1) \times C(0,1),$$

se tiene que F es continua y por tanto, como consecuencia de la Holomorfía bajo el signo integral, la función g, que es

$$g(z) = \oint_{C(0,1)} F(z,w)dw, \qquad z \in B(0,1),$$

será holomorfa en $B(0,1)$.

Para finalizar la prueba, solo queda por demostrar que u es continua en los puntos de $\partial B(0,1)$. Se va a demostrar la siguiente afirmación: para cada $\varepsilon > 0$, existe $r_0 \in (0,1)$ tal que, si $r \in (r_0, 1)$ y para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces $|u(re^{i\theta}) - u_0(e^{i\theta})| < \varepsilon/2$. Esta afirmación junto con la continuidad de u_0 en $\partial B(0,1)$, implican que u es continua es $\partial B(0,1)$. Para comprobar esto, sea $e^{i\alpha} \in \partial B(0,1)$, entonces, existe $\delta > 0$ tal que si $|e^{i\theta} - e^{i\alpha}| < \delta$ entonces $|u_0(e^{i\theta}) - u_0(e^{i\alpha})| < \varepsilon/2$. Por tanto, si $|e^{i\theta} - e^{i\alpha}| < \delta$ y $r_0 < r < 1$ entonces

$$|u(re^{i\theta}) - u_0(e^{i\alpha})| \leq |u(re^{i\theta}) - u_0(e^{i\theta})| + |u_0(e^{i\theta}) - u_0(e^{i\alpha})| < \varepsilon,$$

demostrando que u sería continua en un elemento arbitrario $e^{i\alpha} \in \partial B(0,1)$. Para probar la afirmación inicial, sean $\theta, r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Entonces, si $z = re^{i\theta}$ y tendiéndose en cuenta el corolario 4.13 y la observación 4.11, se tiene que

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) - u_0(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(t)u_0(e^{it})dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(t)u_0(e^{i\theta})dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-\theta)\big(u_0(e^{it}) - u_0(e^{i\theta})\big)dt. \end{aligned}$$

Si se realiza el cambio de variable $x = t-\theta$ y se tiene en cuenta que P_r es una función par para $0 \le r < 1$ y que el integrando tiene periodo 2π, entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) - u_0(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{2\pi-\theta} P_r(x)\big(u_0\left(e^{i(\theta+x)}\right) - u_0(e^{i\theta})\big)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\big(u_0\left(e^{i(\theta+x)}\right) - u_0(e^{i\theta})\big)dx. \end{aligned}$$

Sea $\delta \in (0,\pi)$ fijo, entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) - u_0(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(x)\big(u_0\left(e^{i(\theta+x)}\right) - u_0(e^{i\theta})\big)dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(x)\big(u_0\left(e^{i(\theta+x)}\right) - u_0(e^{i\theta})\big)dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} P_r(x)\big(u_0\left(e^{i(\theta+x)}\right) - u_0(e^{i\theta})\big)dx. \end{aligned}$$

Vamos a acotar el valor absoluto de estos tres sumandos. Para el primero,

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(x)\big(u_0\left(e^{i(\theta+x)}\right) - u_0(e^{i\theta})\big)dx\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |P_r(x)|\left|u_0\left(e^{i(\theta+x)}\right)\right|dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |P_r(x)|\left|u_0\left(e^{i\theta}\right)\right|dx \\ &\le \frac{1}{2\pi}\sup_{-\pi\le t\le -\delta}|u_0(e^{it})|P(-\delta)2\pi + \frac{1}{2\pi}|u_0(e^{i\theta})|P(-\delta)2\pi \\ &\le 2\sup_{-\pi\le t\le \pi}|u_0(e^{it})|P(\delta), \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que P_r es una función decreciente y positiva en $[0, \pi]$ y que además es par. De manera completamente análoga, se obtiene la cota para la tercera integral

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(x) \big(u_0 \left(e^{i(\theta+x)} \right) - u_0(e^{i\theta}) \big) dx \right| \leq 2 \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |u_0(e^{it})| P(\delta).$$

Para el sumando del medio, si llamamos

$$M_\theta(\delta) = \sup\{ |u_0 \left(e^{i(\theta+x)} \right) - u_0(e^{i\theta})| \colon -\delta \leq x \leq \delta \},$$

entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(x) \big(u_0 \left(e^{i(\theta+x)} \right) - u_0(e^{i\theta}) \big) dx \right| &\leq \frac{1}{2\pi} M_\theta(\delta) \int_{-\delta}^{\delta} P_r(x) dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} M_\theta(\delta) \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} M_\theta(\delta), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe al Corolario 4.13. Juntando las cotas para cada uno de los sumandos se tiene que

$$|u(re^{i\theta}) - u_0(e^{i\theta})| \leq 4 \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |u_0(e^{it})| P_r(\delta) + \frac{1}{2\pi} M_\theta(\delta).$$

Como u_0 es continua en $\partial B(0,1)$ y este conjunto es compacto, es uniformemente continua, por lo que existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, $\sup\{ |u_0 \left(e^{i(\theta+x)} \right) - u_0(e^{i\theta})| \colon -\delta \leq x \leq \delta \} < \frac{\pi}{2}\varepsilon$. Además, si llamamos $C = \max_{-\pi \leq t \leq \pi} |u_0(e^{it})| > 0$, que por continuidad de u_0 se alcanza, se tiene que, como $P_r(\delta) \longrightarrow 0$ cuando $r \to 1$, existe $r_0 \in (0,1)$ tal que, si $r_0 < r < 1$, entonces $P_r(\delta) < \frac{\varepsilon}{16C}$. Por tanto, se tiene que

$$|u(re^{i\theta}) - u_0(e^{i\theta})| < 4C \frac{\varepsilon}{16C} + \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{2} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2},$$

como queríamos probar. □

Corolario 4.16. *Sea ϕ una función real y continua en $\partial B(z_0, R)$. Entonces existe una función continua $w : \overline{B}(z_0, R) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que w es armónica en $B(z_0, R)$ y tal que $w(z) = \phi(z)$ para cada $z \in \partial B(z_0, R)$.*

Demostración. Se define $u_0 : \partial B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $u_0(e^{i\theta}) = \phi(z_0 + Re^{i\theta})$. Por construcción, u_0 es continua en $\partial B(0,1)$. Sea $u : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función obtenida por El Problema de Dirichlet, es decir, u es armónica en $B(0,1)$, continua en $\overline{B}(0,1)$, y además $u(e^{i\theta}) = u_0(e^{i\theta}) = \phi(z_0 + Re^{i\theta})$ para cada $\theta \in (0, 2\pi]$. Finalmente, se define $w : \overline{B}(z_0, R) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $w(z) = u\left(\frac{z-z_0}{R}\right)$, que por construcción, es continua en $\overline{B}(z_0, R)$. Si además se tiene en cuenta que

$$\Delta w(z) = \frac{1}{R^2}\Delta u\left(\frac{z - z_0}{R}\right), \qquad z \in B(z_0, R),$$

y que u es armónica en $B(0,1)$, entonces $\Delta w(z) = 0$ para cada $z \in B(z_0, R)$. □

Teorema 4.17 (Fórmula integral de Poisson para funciones armónicas)**.** *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\overline{B}(z_0, R) \subseteq U$. Entonces, si $r < R$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, se tiene que*

$$h(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\theta) + r^2} h(z_0 + Re^{it})dt.$$

Demostración. Por el Lema 4.4, existe una función f holomorfa en U tal que $\mathrm{Re}(f) = h$. De esta manera, si se aplica el Teorema 4.14 a la función f se tiene que, para $z = z_0 + re^{i\theta}$ con $r < R$ y $0 < \theta < 2\pi$

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{r/R}(\theta - t) f(z_0 + Re^{it})dt.$$

Si se toma la parte real de la expresión anterior y además se tiene en cuenta la Observación 4.11,

$$P_{r/R}(t-\theta) = \frac{1 - r^2/R^2}{1 + 2(r/R)\cos(t-\theta) + r^2/R^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\theta) + r^2},$$

se llega a la expresión buscada, ya que $P_{r/R}(t-\theta)$ es un número real. □

Teorema 4.18 (Desigualdad de Harnack)**.** *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ tal que $B(w, \rho) \subseteq U$ y $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica y positiva en $B(w, \rho)$. Si $r < \rho$ y $0 \leq t < 2\pi$, entonces*

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} h(w) \leq h(w + re^{it}) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} h(w).$$

Demostración. Sea s tal que $r < s < \rho$. Como consecuencia de la Fórmula integral de Poisson para funciones armónicas aplicada a h en $\overline{B}(w, s)$, se tiene que

$$\begin{aligned} h(w + re^{it}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{s^2 - 2sr\cos(\theta - t) + r^2} h(w + se^{i\theta})d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{s^2 - 2sr + r^2} h(w + se^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{s + r}{s - r} h(w + se^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{s + r}{s - r} h(w), \end{aligned}$$

donde la última igualdad viene de la Propiedad de la media. Si se hace tender $s \to \rho$, entonces se obtiene que

$$h(w + re^{it}) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} h(w),$$

lo que nos proporciona la cota superior. La cota inferior se obtiene de forma análoga. □

Corolario 4.19 (Teorema de Liouville para funciones armónicas)**.** *Si $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica y está superiormente, es decir, existe $M_1 > 0$ tal que $h(z) \leq M_1$ para cada $z \in \mathbb{C}$, o inferiormente, es decir, existe $M_2 < 0$ tal que $h(z) \geq M_2$ para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces h ha de ser constante.*

Demostración. Supongamos que h está acotada inferiormente, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $z \in \mathbb{C}$, $M \leq h(z)$. Dicho de otra manera, la función $h - M$ es positiva. Veamos que es constante. Para ello, sea $z \in \mathbb{C}$ y pongamos $r = |z|$. Sea $\rho > r$, entonces, por la Desigualdad de Harnack en $B(0, \rho)$, se tiene que

$$h(z) - M \leq \frac{\rho + r}{\rho - r}(h(0) - M),$$

Si se hace tender $\rho \to \infty$, se obtiene que $h(z) - M \leq h(0) - M$, es decir, se tiene que $h(z) \leq h(0)$. De esta manera, h tiene un máximo local en 0, luego, por el Principio del módulo máximo para funciones armónicas, h es constante. Para el caso en que h esté acotada superiormente, se razonaría de forma análoga con la función $M - h$. □

Teorema 4.20. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que cumple que si $\overline{B}(z_0, R) \subseteq U$ entonces*

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(z_0 + Re^{it})dt.$$

Entonces ϕ es armónica en U.

Demostración. Basta ver que ϕ es armónica en cualquier bola $B(z_0, R)$ tal que $\overline{B}(z_0, R) \subseteq U$. Si se restringe ϕ a $\partial B(z_0, R)$ y se aplica el Corolario 4.16, se obtiene una función w continua en $\overline{B}(z_0, R)$ y armónica en $B(z_0, R)$ tal que $\phi(z) = w(z)$ para cada $z \in \partial B(z_0, R)$. A continuación se va a demostrar que, de hecho, $\phi(z) = w(z)$ para cada $z \in B(z_0, R)$ por lo que ϕ sería armónica en esta misma bola. Para ello, se considera la función $\phi - w$ que es continua en el compacto $\overline{B}(z_0, R)$, por lo que alcanzará su máximo y mínimo en algún $z_1, z_2 \in \overline{B}(z_0, R)$ respectivamente. Si z_1 y z_2 pertenecen simultáneamente a $\partial B(z_0, R)$, entonces, como $w \equiv \phi$ en $\partial B(z_0, R)$, tanto el máximo como el mínimo de $\phi - w$ deben ser ambos 0. Por tanto, $\phi \equiv w$ en $\overline{B}(z_0, R)$ lo que terminaría la prueba. En caso contrario, supongamos que $z_1 \in B(z_0, R)$. Llamamos $M = (\phi - w)(z_1)$ y se define el siguiente conjunto

$$A = \{z \in B(z_0, R) : (\phi - w)(z) = M\}.$$

Como $\{M\}$ es cerrado y $\phi - w$ continua, el $A = (\phi - w)^{-1}(\{M\})$ es cerrado. Si se demuestra que A es también abierto, como consecuencia de las propiedades de conexión, $A = B(z_0, R)$ lo que terminaría la prueba. Sea $a \in A$ y $r > 0$ tal que $\overline{B}(z, r) \subseteq B(z_0, R)$. Entonces, por hipótesis y por la construcción de la función w

$$M = \phi(a) - w(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(\phi(a + \rho e^{it}) - w(a + \rho e^{it})\big)dt, \qquad 0 < \rho \leq r. \quad (4.4)$$

Si $B(a, r)$ no estuviera contenida en A, existiría un punto $a + \rho e^{it_0} \in B(a, r)$ tal que $(\phi - w)(a + \rho e^{it_0}) < M$. Por continuidad, existiría $\delta > 0$ tal que, si $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$, entonces $|(\phi - w)(a + \rho e^{it})| < M$. Como $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ no es de medida nula en $\mathbb{R}$, y los valores del integrando de 4.4 son todos menores o iguales que M, exceptuando aquellos en los que $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, que son estrictamente menores que M, se tendría que

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(\phi(a + \rho e^{it}) - w(a + \rho e^{it})\big)dt < M,$$

lo cual es absurdo, por lo que $B(a,r) \subseteq A$, y por tanto A es abierto.

En caso de que $z_2 \in B(z_0, R)$ es completamente análogo. □

Corolario 4.21. *Sea $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones armónicas definidas en un abierto conexo U de $\mathbb{C}$ que converge uniformemente en los compactos hacia una función h. Entonces h es también armónica en U.*

Demostración. Como consecuencia de la Propiedad de la media, para cada $\overline{B}(z_0, R) \subseteq U$ se tiene que

$$h_n(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + Re^{it})dt.$$

Como consecuencia de la convergencia uniforme en los compactos,

$$h_n(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + Re^{it})dt \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + Re^{it})dt = h(z_0).$$

Finalmente, si se aplica el Teorema 4.20, se termina la prueba. □

Para finalizar el capítulo, se demuestra una versión más débil del Teorema de Harnack que se utilizará en el siguiente capítulo.

Teorema 4.22 (Teorema de Harnack)**.** *Sea $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones armónicas definidas en $B(w,\rho)$. Si la sucesión está uniformemente acotada, es decir, si existe $M > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in B(w,\rho)$, $|h_n(z)| < M$, entonces existe una subsucesión $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $h_{n_k} \to h$ uniformemente en los compactos de $B(w,\rho)$, donde h es una función armónica.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que cada función h_n es positiva y que está uniformemente alejada del 0, es decir, que existe $C > 0$, tal que $h_n(z) \geq C$ para cada $z \in B(w,\rho)$ y $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario, bastaría con considerar la sucesión de funciones $\{2M + h_n\}_{n=1}^{\infty}$. Consideramos la sucesión $\{\log(h_n)\}_{n=1}^{\infty}$, que también estará uniformemente acotada por estarlo la sucesión original. Si se toma un conjunto denso y numerable S de $B(w,\rho)$ y se realiza exactamente el mismo argumento diagonal que en la prueba del Teorema de Montel, se obtiene una subsucesión $\{\log(h_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$\{\log(h_{n_k}(\zeta))\}_{k=1}^{\infty}$ converge para cada $\zeta \in S$. Sea K un compacto contenido en $B(w,\rho)$ y $\varepsilon > 0$. Para cada $z \in K$ se define el conjunto

$$V_z = \left\{ z' \in B(w,\rho) : \log\left(\frac{\rho + |z-z'|}{\rho - |z-z'|}\right) < \frac{\varepsilon}{8} \right\},$$

que está bien definido y además será no vacío pues $z \in V_z$. Por tanto,

$$K \subseteq \bigcup_{z \in K} V_z.$$

La aplicación $\log\left(\frac{\rho+|z-z'|}{\rho-|z-z'|}\right)$ es continua en $B(w,\rho)$ y por tanto V_z es abierto al ser la contraimagen de $(-\infty, \varepsilon/8)$ por una función continua. Por tanto, se puede extraer un subrecubrimiento finito de K, luego existen $z_1, \ldots, z_m$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_{z_j}.$$

Como S es denso en $B(w,\rho)$, para cada $j = 1, \ldots, m$ existe $w_j \in S \cap V_{z_j}$. Como $\{\log(h_{n_k}(\zeta))\}_{k=1}^{\infty}$ converge para cada $\zeta \in S$, se tiene que, para cada $j = 1, \ldots, m$, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que si $n_i, n_k \geq N_j$, entonces

$$|\log(h_{n_i}(w_j)) - \log(h_{n_k}(w_j))| < \varepsilon/2.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $z \in V_{z_l}$ y se tiene en cuenta la Desigualdad de Harnack y que el logaritmo es una función creciente, se tiene que

$$|\log(h_n(z)) - \log(h_n(w_l))| \leq |\log(h_n(z))| + |\log(h_n(w_l))| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Finalmente, sea $z \in K$, y $n_i, n_k \geq \max\{N_1, \ldots, N_m\}$, entonces debe existir j_0 tal que $z \in V_{z_{j_0}}$ y por tanto

$$\begin{aligned} |\log(h_{n_i}(z)) - \log(h_{n_k}(z))| \leq & |\log(h_{n_i}(z)) - \log(h_{n_i}(w_{j_0}))| \\ & + |\log(h_{n_i}(w_{j_0})) - \log(h_{n_k}(w_{j_0}))| \\ & + |\log(h_{n_k}(w_{j_0})) - \log(h_{n_k}(z))| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\{\log(h_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy en K y por tanto, uniformemente convergente en este mismo conjunto. Consecuentemente, $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ también será uniformemente convergente en los compactos hacia una función h. Como cada h_n es armónica, el Corolario 4.21 asegura que h debe ser armónica. $\square$

Capítulo 5

Transformaciones armónicas

Esta capítulo cierra el Trabajo de Fin de Grado demostrando el Teorema Pequeño de Picard utilizando única y exclusivamente funciones armónicas. De hecho, el teorema final demostrado es una generalización que implica el Teorema de Lewis y por tanto, el de Picard. El capítulo comienza con la definición de transformación armónica así como con una reinterpretación del Teorema de Liouville. A continuación, se define el concepto de direcciones asintóticas, fundamental en este capítulo, y sus propiedades y resultados principales. Posteriormente, se exponen los resultados en los que se combinan tanto las direcciones asintóticas como las transformaciones armónicas. Tras plantear el método de reescalamiento y las transformaciones armónicas reescaladas, se concluye demostrando el teorema principal de este capítulo, así como deduciendo a partir de este el Teorema de Lewis y el Teorema Pequeño de Picard.

5.1. Contexto

Esta primera sección introduce el concepto de transformación armónica asociada a dos funciones, así como una reinterpretación del Teorema de Liouville para funciones armónicas en términos de una transformación armónica.

Definición 5.1. Dadas dos funciones armónicas enteras $u, v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, llamaremos *la transformación armónica asociada a las funciones* u y v a

$f = u + iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = u(z) + iv(z)$.

Observación 5.2. Una transformación armónica $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ será cualquier función definida en el plano complejo cuya parte real e imaginaria son dos funciones armónicas enteras.

Nota. Para facilitar la notación, dada una función compleja $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ se denotará por $\mathcal{R}_f$ a su rango, es decir, $\mathcal{R}_f = f(U)$.

Teorema 5.3 (Reinterpretación del Teorema de Liouville)**.** *Consideremos una transformación armónica $f = u+iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{R}_f$ esté contenido en un semiplano cerrado. Entonces existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que, para cada $z \in \mathbb{C}$, $au(z) + bv(z) = c$. Dicho de otra manera, $\mathcal{R}_f$ es, o bien un punto si u y v son constantes, o bien una recta en caso contrario.*

Demostración. En primer lugar, un semiplano en $\mathbb{C}$ está definido a partir de una recta. Es sencillo comprobar que la recta que pasa por los puntos distintos del plano complejo $z_1 \neq z_2$ es el conjunto $\left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) = 0\right\}$ y por tanto, los correspondientes semiplanos son aquellos que se obtienen cambiando la igualdad anterior por una desigualdad. Si $\mathcal{R}_f \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) \geq 0\}$ (para la otra desigualdad el razonamiento es análogo). Tómese un elemento arbitrario del conjunto de la izquierda, $u(z) + iv(z)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(\frac{u(z)+iv(z)-z_1}{z_2-z_1}\right) &= \mathrm{Im}\left(\frac{(u(z)+iv(z)-z_1)\overline{z_2-z_1}}{|z_2-z_1|^2}\right) \\
&= \frac{\mathrm{Im}(z_2)-\mathrm{Im}(z_1)}{|z_2-z_1|^2}u(z) \\
&- \frac{\mathrm{Re}(z_2)-\mathrm{Re}(z_1)}{|z_2-z_1|^2}v(z) \\
&+ \frac{-\mathrm{Re}(z_1)(\mathrm{Im}(z_2)-\mathrm{Im}(z_1))}{|z_2-z_1|^2} \\
&+ \frac{\mathrm{Im}(z_1)(\mathrm{Re}(z_2)-\mathrm{Re}(z_1))}{|z_2-z_1|^2} \geq 0.
\end{aligned}$$

Renombrando constantes, se llega a la expresión

$$au(z) + bv(z) \geq M.$$

Como u y v son funciones armónicas enteras, $au+bv$ también lo será. El Teorema de Liouville para funciones armónicas asegura que esta última función es constante, y por tanto, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $au(z) + bv(z) = c$ para todo $z \in \mathbb{C}$. $\square$

5.2. Direcciones asintóticas

La presente sección introduce el concepto de direcciones asintóticas asociadas a un conjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$, así como una caracterización de las mismas. Asimismo, se demuestran varios resultados asociados a este concepto y se define la noción de puntos antipodales.

Definición 5.4. Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto cualquiera. Se dice que el punto $e^{i\theta} \in \partial B(0,1)$ es una *dirección asintótica de* $\mathcal{R}$ si existen sucesiones $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de $\mathcal{R}$ y $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números positivos tales que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n w_n = e^{i\theta}.$$

El conjunto de direcciones asintóticas de $\mathcal{R}$ se denota por $\mathcal{D}(\mathcal{R})$.

A continuación, se demuestra una caracterización de las direcciones asintóticas que será de gran utilidad en la mayor parte de las pruebas posteriores.

Proposición 5.5. *Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$. Se tiene que $e^{i\theta} \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$ si, y solamente si, existe $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty}|w_n|= \infty$ y $\lim_{n\to\infty}|w_n|^{-1}w_n = e^{i\theta}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $e^{i\theta} \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$. Por definición, existe $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$ y $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n w_n = e^{i\theta}$. Como el módulo es una función continua, si se toman módulos en el último límite, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n |w_n|= 1$. Además,

$$\varepsilon_n w_n - |w_n|^{-1} w_n = \big(\varepsilon_n |w_n| - 1\big)|w_n|^{-1} w_n, \qquad n \geq 1,$$

de donde, tomando límites, como $\{|w_n|^{-1}w_n\}$ está acotada, la expresión a la derecha del igual tiende a 0. Por tanto, deducimos que $\lim_{n\to\infty}|w_n|^{-1}w_n = e^{i\theta}$.

$\Leftarrow$) Sea $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty}|w_n|= \infty$ y $\lim_{n\to\infty}|w_n|^{-1}w_n = e^{i\theta}$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer, suprimiendo unos primeros términos de la sucesión y reenumerándola, que sus términos w_n son todos no nulos. Si se toma $\varepsilon_n = |w_n|^{-1}$, resulta que la sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números positivos, verifica que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ y que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n w_n = e^{i\theta}$. $\square$

Corolario 5.6. *Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq \mathbb{C}$. Si $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, entonces $\mathcal{D}(\mathcal{R}_1) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{R}_2)$.*

Demostración. Es consecuencia directa de la proposición anterior. □

Proposición 5.7. *Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$.*

1) Si $\mathcal{R}$ está acotado, entonces $\mathcal{D}(\mathcal{R}) = \emptyset$.

2) Si $\mathcal{R}$ no está acotado, entonces $\mathcal{D}(\mathcal{R}) \neq \emptyset$ y además es un conjunto cerrado.

Demostración. 1) Supongamos que, existe $M > 0$, de modo que $|w| \leq M$ para cada $w \in \mathcal{R}$. Es evidente que no se puede encontrar ninguna sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} w_n = \infty$. Por tanto, la Proposición 5.5 asegura que $\mathcal{D}(\mathcal{R}) = \emptyset$.

2) Veamos en primer lugar que, en estas condiciones, $\mathcal{D}(\mathcal{R}) \neq \emptyset$. Para ello, tómese cualquier sucesión de números reales positivos $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ que tienda a infinito. Como $\mathcal{R}$ no está acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in \mathcal{R}$ tal que $|w_n| \geq M_n$. En particular, $\lim_{n\to\infty} |w_n| = \infty$. Nótese que $\partial B(0,1)$ es un compacto y que $\{|w_n|^{-1} w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \partial B(0,1)$, luego existe una subsucesión $\{|w_{n_k}|^{-1} w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a $w \in \partial B(0,1)$. Si ponemos $w = e^{i\theta}$ para cierto $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces, por la Proposición 5.5, $e^{i\theta} \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$, es decir, $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ es no vacío, como queríamos probar.

Falta por demostrar que $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ es cerrado. Para ello, veamos que coincide con su adherencia. Sea $w \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{R})}$. Por definición, existe una sucesión de puntos $\{e^{i\theta_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{R})$ tal que $\lim_{k\to\infty} e^{i\theta_k} = w$. Si se toman módulos en el límite anterior, por continuidad, $\lim_{n\to\infty} |e^{i\theta_k}| = \lim_{n\to\infty} 1 = |w|$. Se deduce que necesariamente $w \in \partial B(0,1)$, y por tanto, existe θ que podemos tomar en el intervalo $[0, 2\pi)$ tal que $w = e^{i\theta}$. Como para cada $k \in \mathbb{N}$, $e^{i\theta_k} \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$, la Proposición 5.5 asegura que existe $\{w_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |w_n^{(k)}| = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} |w_n^{(k)}|^{-1} w_n^{(k)} = e^{i\theta_k}$. Dicho de otra manera, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\exists m_k \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq m_k, \text{ entonces } |w_n^{(k)}| > k, \tag{5.1}$$

y

$$\exists n_k \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq n_k, \text{ entonces } \left| \frac{w_n^{(k)}}{|w_n^{(k)}|} - e^{i\theta_k} \right| < \frac{1}{k}. \tag{5.2}$$

Tomemos la sucesión $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ dada por $w_k = w^{(k)}_{\text{máx}\{n_k, m_k\}}$. Nótese que, por definición, esta sucesión verifica (5.1) y (5.2). Buscamos aplicar de nuevo la Proposición 5.5. Para ello comprobemos que $|w_k| \longrightarrow \infty$ y que $\dfrac{w_k}{|w_k|} \longrightarrow e^{i\theta}$ cuando $k \longrightarrow \infty$. En cuanto a la primera consigna, sea $M > 0$, luego existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$, entonces $k > M$. De esta manera, si $k \geq k_0$, por definición de w_k, se tiene que $|w_k| > k > M$. Para la segunda parte, fijemos $\varepsilon > 0$, entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_1$ se tiene que $|e^{i\theta_k} - e^{i\theta}| < \varepsilon/2$. También, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_2$, entonces $1/k < \varepsilon/2$. Si se escoge $k \geq \text{máx}\{k_1, k_2\}$, se verifica que

$$\left| \frac{w_k}{|w_k|} - e^{i\theta} \right| \leq \left| \frac{w_k}{|w_k|} - e^{i\theta_k} \right| + |e^{i\theta_k} - e^{i\theta}| \leq \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, se cumplen las condiciones suficientes de la Proposición 5.5, y, por tanto, $w = e^{i\theta} \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$, como se quería probar. □

Proposición 5.8. *Sean $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto no acotado y $\mathcal{D}(\mathcal{R}) \subseteq \partial B(0,1)$ su conjunto de direcciones asintóticas. Entonces, se cumple que:*

1) Si $I \subseteq \partial B(0,1)$ es un arco de circunferencia abierto y $I \cap \mathcal{D}(\mathcal{R}) = \emptyset$, entonces, para cualquier arco de circunferencia cerrado $J \subseteq I$, existe $\rho > 0$ que verifica que $\mathcal{R} \cap \{re^{i\theta} : r \geq \rho,\ e^{i\theta} \in J\} = \emptyset$.

2) Si $I \subseteq \partial B(0,1)$ es un arco de circunferencia abierto, y además existe $\rho > 0$ tal que $\mathcal{R} \cap \{re^{i\theta} : r \geq \rho,\ e^{i\theta} \in I\} = \emptyset$, entonces $I \cap \mathcal{D}(\mathcal{R}) = \emptyset$.

Demostración. 1) Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existe un arco de circunferencia cerrado $J \subseteq I$ tal que, para cualquier $\rho > 0$, existe $r \geq \rho$ y $e^{i\theta} \in J$ cumpliendo que $re^{i\theta} \in \mathcal{R}$. Tomemos una sucesión $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales positivos que cumplan $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \infty$. Entonces, por nuestra suposición inicial, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $r_n \geq \rho_n$ y $e^{i\theta_n} \in J$ verificando que $r_n e^{i\theta_n} \in \mathcal{R}$. De aquí se deduce que la sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ también tiende a ∞ cuando $n \to \infty$. Llamemos $w_n = r_n e^{i\theta_n}$. Como J es compacto, existe una subsucesión $\{e^{i\theta_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente tal que $e^{i\theta_{n_k}} \xrightarrow{k\to\infty} e^{i\theta} \in J$. Dicho de otra manera, la sucesión $\{|w_{n_k}|^{-1} w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $e^{i\theta} \in J$ y además

$|w_{n_k}|= r_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, por ser una subsucesión de la original. La Proposición 5.5 asegura que $e^{i\theta} \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$ y por tanto, $I \cap \mathcal{D}(\mathcal{R}) \neq \emptyset$, llegando a una contradicción con la suposición inicial.

2) De nuevo, razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existe $e^{i\theta} \in I \cap \mathcal{D}(\mathcal{R})$. Por la Proposición 5.5, existe una sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty}|w_n|= \infty$ y $\lim_{n\to\infty}|w_n|^{-1}w_n = e^{i\theta}$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que w_n es distinto de 0 para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotemos por $e^{i\theta_n} = |w_n|^{-1}w_n \in \partial B(0,1)$. Llamemos C_1, C_2 a los extremos del arco I. Sea $\varepsilon < \min\{d(e^{i\theta}, C_1), d(e^{i\theta}, C_2)\}$, entonces, por definición de límite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, se tiene que $|e^{i\theta_n} - e^{i\theta}|< \varepsilon$. Es decir, si $n \geq n_0$, entonces $e^{i\theta_n} \in I$. Además, como la sucesión $\{|w_n|\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞ cuando $n \to \infty$, existirá $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_1$, entonces $|w_n|\geq \rho$. Para terminar la demostración, basta con tomar $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, ya que, en este caso, $w_n = e^{i\theta_n}|w_n|\in \mathcal{R} \cap \{re^{i\theta} : r \geq \rho,\ e^{i\theta} \in I\}$, llegando a una contradicción. □

Definición 5.9. Sea $z_1, z_2 \in \partial B(0,1)$. Se dice que z_1 *y* z_2 *son puntos antipodales* si son diametralmente opuestos, es decir, si $z_1 = -z_2$.

Lema 5.10. *Sea $E \subseteq \partial B(0,1)$ un conjunto cerrado que no contiene puntos antipodales. Entonces existe $\xi \in \partial B(0,1)$ tal que $\{\xi, i\xi, -i\xi\} \subseteq \partial B(0,1) \setminus E$.*

Demostración. Supongamos que $E \neq \emptyset$, pues en caso contrario, el resultado sería inmediato. Basta con probar que existe η tal que $\{\eta, -\eta\} \subseteq \partial B(0,1)\setminus E$, ya que, por hipótesis, $i\eta, -i\eta$ no pueden pertenecer simultáneamente a E. Así, al menos uno de estos dos elementos debe pertenecer a $\partial B(0,1) \setminus E$ y tras renombrar estas variables, obtendríamos el resultado buscado. La prueba de este Lema se basa en una cuestión topológica. En primer lugar, consideremos $\partial B(0,1)$ como subespacio topológico de $\mathbb{C}$ con la topología usual. Una base de esta topología es el conjunto de arcos de circunferencia abiertos contenidos en $\partial B(0,1)$, ya que es el conjunto de intersecciones de las bolas abiertas contenidas en $\mathbb{C}$ con $\partial B(0,1)$. Por hipótesis, E es cerrado en $\mathbb{C}$, luego también lo será en $\partial B(0,1)$, es decir, $\partial B(0,1) \setminus E$ es abierto en $\partial B(0,1)$. Además, $\mathbb{C}$ cumple el segundo axioma de numerabilidad (pues es espacio métrico con la topología usual), y por tanto $\partial B(0,1)$ también lo cumplirá con la topología de subespacio. De esta manera, $\partial B(0,1) \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, donde I_n es un arco de circunferencia abierto. Sea I una de las componentes conexas de

$\partial B(0,1) \setminus E$, que por construcción, será también un arco de circunferencia abierto. Tómese z_0 uno de sus extremos. Nótese que $z_0 \in E$ por ser I un arco abierto y una componente conexa de $\partial B(0,1) \setminus E$. Por hipótesis, $-z_0 \notin E$, es decir, $-z_0 \in \partial B(0,1) \setminus E$, luego existe un arco abierto I_{n_0} centrado en $-z_0$ de modo que $-z_0 \in I_{n_0} \subseteq \partial B(0,1) \setminus E$. Como z_0 es un extremo de I, necesariamente $-I \cap I_{n_0} \neq \emptyset$, donde $(-I) = \{-z : z \in I\}$. Por tanto, existe $\eta \in I_{n_0} \cap (-I)$, es decir, $-\eta \in I$. De esta manera, se concluye la demostración, pues $\eta \in I_{n_0} \subseteq \partial B(0,1) \setminus E$ y $-\eta \in I \subseteq \partial B(0,1) \setminus E$, como queríamos probar. □

5.3. Transformaciones armónicas y direcciones asintóticas.

Esta sección trata de mostrar al lector las propiedades de las direcciones asintóticas del rango de una transformación armónica. Asimismo, se muestran los primeros resultados acerca del rango de una transformación armónica.

Corolario 5.11. *Sea $f = u + iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una transformación armónica no constante y $\mathcal{R}_f = f(\mathbb{C})$. Entonces $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $\partial B(0,1)$.*

Demostración. Como consecuencia del Teorema de Liouville para funciones armónicas, ni u ni v están acotadas superior e inferiormente. Consecuentemente, $|f|$ es una función no acotada, es decir, $\mathcal{R}_f$ es un conjunto no acotado. Para concluir, no hay más que aplicar la Proposición 5.7 2). □

Proposición 5.12. *Sea $f = u + iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una transformación armónica y $\mathcal{R}_f = f(\mathbb{C})$.*

1) Si $\mathcal{R}_f$ es acotado, entonces f es constante y $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f) = \emptyset$.

2) Si u es constante y v no lo es, entonces $\mathcal{R}_f$ es una línea vertical y $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f) = \{-i, i\}$.

3) Si v es constante y u no lo es, entonces $\mathcal{R}_f$ es una línea horizontal y $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f) = \{-1, 1\}$.

Demostración. 1) Supongamos que $\mathcal{R}_f$ es acotado, luego existe $M > 0$ tal que, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)|\leq M$. Es decir, $u(z)^2 + v(z)^2 \leq M^2$, y por tanto, obtenemos que $|u(z)|\leq M$ y $|v(z)|\leq M$. El Teorema de Liouville para funciones armónicas asegura que tanto u como v son constantes, por tanto, f también lo será. Para concluir, basta aplicar la Proposición 5.7 1).

2) Como v no es constante, el Teorema de Liouville para funciones armónicas asegura que v no está acotada ni superior ni inferiormente. Veamos ahora que $v(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$. La contención hacia la derecha es evidente. Para la contención hacia la izquierda, sea $x \in \mathbb{R}$. Como v no está acotada inferiormente, existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $v(z_1) < x$. Análogamente, como v no está acotada superiormente, existe $z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $v(z_2) > x$. Por la continuidad de v, el Teorema de Valor Intermedio asegura que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $v(z_0) = x$, como queríamos ver. Supongamos que $u(z) = x_0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\mathcal{R}_f = \{u(z) + iv(z) : z \in \mathbb{C}\} = \{x_0 + ix : x \in \mathbb{R}\},$$

es decir, $\mathcal{R}_f$ es una línea vertical que pasa por x_0.
Falta por probar que $\{-i, i\} = \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$. Para ver que $i \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$, escojamos la sucesión $\{x_0 + in\}_{n=1}^{\infty}$. Es evidente que la sucesión de sus módulos tiende a ∞ cuando $n \to \infty$, ya que $|x_0 + ni|= \sqrt{x_0^2 + n^2}$. Además, $\dfrac{x_0 + ni}{\sqrt{x_0^2 + n^2}} = \dfrac{x_0/n + i}{\sqrt{x_0^2/n^2 + 1}} \xrightarrow{n\to\infty} i$, y la Proposición 5.7 nos permite concluir. El caso con $-i$ es completamente análogo.

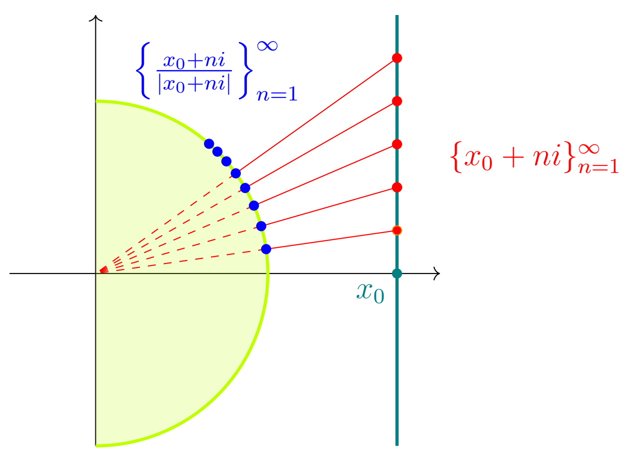


Figura 5.1: Esquema gráfico de la demostración.

3)La demostración se obtiene siguiendo el mismo procedimiento que en 2). □

Definición 5.13. Sea $\xi = e^{i\alpha}$ y $0 < \phi < \pi/4$. Se denota por $\mathcal{C}_{\xi,\phi}$ (resp. $\mathcal{C}^+_{\xi,\phi}$) al *cono* (resp. *medio cono*) *con vértice en el origen, eje paralelo a* ξ *y apertura* 2ϕ. Es decir,

$$\mathcal{C}_{\xi,\phi} = \{te^{i\theta} : t \in \mathbb{R},\ |\theta - \alpha| \leq \phi\},$$

$$\mathcal{C}^+_{\xi,\phi} = \{te^{i\theta} : t \geq 0,\ |\theta - \alpha| \leq \phi\}.$$

Lema 5.14. *Sea $f = u+iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una transformación armónica no constante y $\mathcal{R}_f = f(\mathbb{C})$. Supongamos que $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ no contiene puntos antipodales. Entonces existen $\xi \in \partial B(0,1)$, $0 < \phi < \pi/4$ y $\rho > 0$ tal que*

$$\mathcal{R}_f \subseteq \overline{B}(0,\rho) \bigcup \left(\mathbb{C} \setminus (\mathcal{C}_{i\xi,\phi} \cup \mathcal{C}^+_{\xi,\phi})\right).$$

Demostración. Por el Corolario 5.11, $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ es cerrado y no vacío y por hipótesis, no contiene puntos antipodales. El Lema 5.10 asegura que existe $\xi = e^{i\alpha} \in \partial B(0,1)$ tal que $\{-i\xi, i\xi, \xi\} \subseteq \partial B(0,1) \setminus \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$. En primer lugar, fijémonos en $i\xi$. Por una cuestión topológica similar a la descrita en la demostración del Lema 5.10, existe un arco abierto I_1 centrado en $i\xi$ que tomaremos de longitud $2\phi_1$, con $\phi_1 < \pi/4$, de tal manera que $I_1 \bigcap \mathcal{D}(\mathcal{R}_f) = \emptyset$. Análogamente, existe un arco abierto I_2 centrado en $-i\xi$ de longitud $2\phi_2$, con $\phi_2 < \pi/4$, de tal manera que $I_2 \bigcap \mathcal{D}(\mathcal{R}_f) = \emptyset$. Finalmente, siguiendo esta misma línea, existe un arco abierto I_3 centrado en ξ de longitud $2\phi_3$, con $\phi_3 < \pi/4$, de tal manera que $I_3 \bigcap \mathcal{D}(\mathcal{R}_f) = \emptyset$. Sea $\phi' = \text{mín}\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ y consideremos el arco abierto I'_1 centrado en $i\xi$ de longitud $2\phi'$, que por construcción, cumple que $I'_1 \bigcap \mathcal{D}(\mathcal{R}_f) = \emptyset$. Estamos en condiciones de aplicar la Proposición 5.8 1) para así asegurar que, si tomamos $\phi < \phi'$ y consideremos el arco cerrado $J_1 \subseteq I'_1$ centrado en $i\xi$ y de longitud 2ϕ, entonces existe $\rho_1 > 0$ tal que

$$\mathcal{R}_f \subseteq \mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta} : r \geq \rho_1,\ e^{i\theta} \in J_1\} = \overline{B}(0,\rho_1) \bigcup \left(\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^+_{i\xi,\phi}\right).$$

Razonando exactamente igual para $I'_2 = -I'_1$ y para $J_2 = -J_1$ se tiene que existe $\rho_2 > 0$ tal que

$$\mathcal{R}_f \subseteq \mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta} : r \geq \rho_2,\ e^{i\theta} \in J_2\} = \overline{B}(0,\rho_2) \bigcup \left(\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^+_{-i\xi,\phi}\right).$$

Finalmente, considerando el arco abierto I_3' centrado en ξ y de longitud $2\phi'$ y el arco cerrado J_3 centrado en ξ y de longitud 2ϕ, se tiene que existe $\rho_3 > 0$ tal que

$$\mathcal{R}_f \subseteq \mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta} : r \geq \rho_3,\ e^{i\theta} \in J_3\} = \overline{B}(0, \rho_3) \bigcup \left(\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}^+_{\xi,\phi}\right).$$

Si ahora se toma $\rho = \text{máx}\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ y se hace la intersección de los tres conjuntos de la derecha, se llega a que

$$\mathcal{R}_f \subseteq \overline{B}(0, \rho) \bigcup \left(\mathbb{C} \setminus (\mathcal{C}_{i\xi,\phi} \cup \mathcal{C}^+_{\xi,\phi})\right),$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathcal{C}_{i\xi,\phi} = \mathcal{C}^+_{i\xi,\phi} \cup \mathcal{C}^+_{-i\xi,\phi}$. □

Corolario 5.15. *Sea $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una transformación armónica tal que $\mathcal{D}(\mathcal{R}_g)$ no contiene puntos antipodales. Entonces, existen $\theta \in [0, 2\pi)$, $\rho > 0$ y $a > 1$ tales que si $f = e^{i\theta} g$ entonces*

$$\mathcal{R}_f \subseteq \overline{B}(0, \rho) \bigcup \Big(\{u + iv : |v| \leq a|u|\} \setminus \{u + iv : |v| \leq -\frac{1}{a} u\}\Big).$$

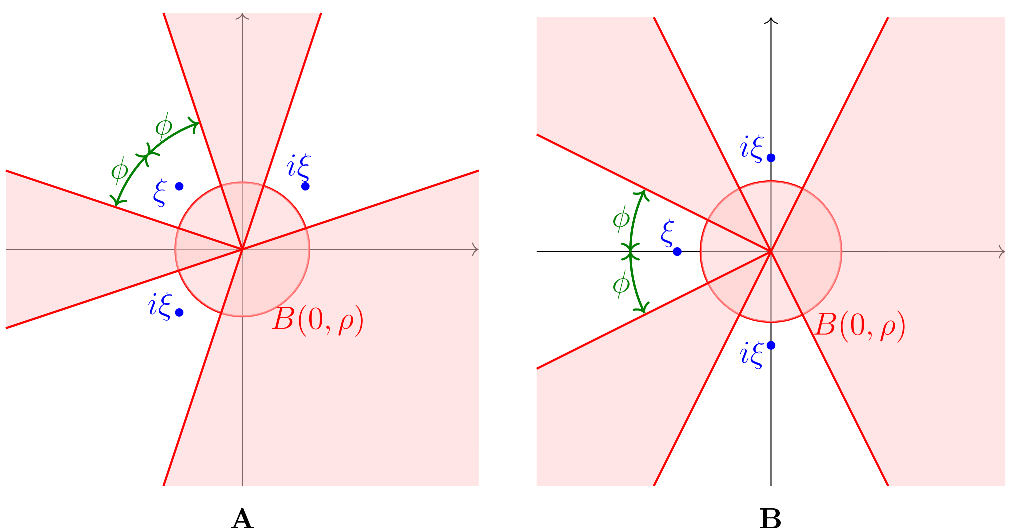


Figura 5.2: Esquema gráfico. (**A**) Representación del conjunto definido por $\overline{B}(0, \rho) \bigcup \left(\mathbb{C} \setminus (\mathcal{C}_{i\xi,\phi} \cup \mathcal{C}^+_{\xi,\phi})\right)$; (**B**) Representación del conjunto definido por $\overline{B}(0, \rho) \bigcup \Big(\{u + iv : |v| \leq a|u|\} \setminus \{u + iv : |v| \leq -\frac{1}{a} u\}\Big)$ obtenido tras girar la subfigura **A** un ángulo de $\theta = \pi/4$.

Demostración. La figura 5.2 muestra una representación gráfica de la prueba de este corolario para ilustrar al lector de que no es más que un giro. Sin embargo, veámoslo analíticamente. Para facilitar la notación, llamemos $\mathcal{U}_A = \{u + iv : |v| \leq A|u|\} \setminus \{u + iv : |v| \leq -\frac{1}{A}u\}$, con $A > 1$. Por el Lema 5.14, existe $\xi \in \partial B(0,1)$, $0 < \phi < \pi/4$ y $\rho > 0$ tal que

$$\mathcal{R}_g \subseteq \overline{B}(0,\rho) \bigcup \left(\mathbb{C} \setminus (\mathcal{C}_{i\xi,\phi} \cup \mathcal{C}^+_{\xi,\phi})\right). \tag{5.3}$$

Sea $\alpha \in (-\pi, \pi]$ tal que $\xi = e^{i\alpha}$ y sea $\theta = \pi - \alpha$ tal que $e^{i\theta}\xi = -1$. Por construcción, $\theta \in [0, 2\pi)$. Se define $a > 1$ por $a = 1/\tan(\phi)$. Si consideramos, como dice el enunciado, $f = e^{i\theta}g$, entonces, probemos que

$$\mathcal{R}_f \subseteq \overline{B}(0,\rho) \cup \mathcal{U}_a.$$

Sea $u(z) + iv(z) \in \mathcal{R}_f$. Llamemos $r = |u(z) + iv(z)|$ y $\beta \in [\pi/2, 2\pi + \pi/2)$ un argumento de $u(z) + iv(z)$, es decir $re^{i\beta} = u(z) + iv(z)$. Entonces, por cómo se ha definido f, se tiene que $re^{i(\beta-\theta)} \in \mathcal{R}_g$. Se pueden distinguir varios casos:

Caso 1: Si $r \leq \rho$, es evidente que como $re^{i(\beta-\theta)} \in \overline{B}(0,\rho)$, entonces, se tiene que $re^{i\beta} \in \overline{B}(0,\rho)$ y por tanto habríamos terminado.

Caso 2: Si $r > \rho$, entonces necesariamente $re^{i(\beta-\theta)}$ pertenece al conjunto de la derecha de la unión de (5.3). Por ello, atendiendo a la geometría de dicho conjunto (véase la figura 5.2), podemos distinguir tres subcasos más.

Caso 2.1. Supongamos que $\beta - \theta \in (\alpha - \pi/2 + \phi, \alpha - \phi)$. Nótese que, como $\phi < \pi/4$, este intervalo tiene sentido. Por ello, se tiene que

$$\begin{aligned}\beta \in \ & \Big(\alpha + \theta - \pi/2 + \arctan(1/a), \alpha + \theta - \arctan(1/a)\Big) = \\ & \Big(\frac{\pi}{2} + \arctan(1/a), \pi - \arctan(1/a)\Big) = \\ & \Big(\pi - \arctan(a), \pi - \arctan(1/a)\Big) = \\ & .\Big(\pi + \arctan(-a), \pi + \arctan(-1/a)\Big).\end{aligned} \tag{5.4}$$

Nótese que en la penúltima igualdad se ha utilizado que $\arctan(1/a) + \arctan(a) = \pi/2$, y en la última se ha tenido en cuenta que la arcotangente es una función impar. Como la función tangente es creciente y de periodo π, se tiene que

$$-a < \operatorname{tg}(\beta) < -\frac{1}{a}.$$

De aquí se deduce que $|v/u| = |\operatorname{tg}(\beta)| < a$. Además, como consecuencia de (5.4), $\pi/2 < \beta < \pi$, por lo que $\cos(\beta) < 0$ y $\sin(\beta) > 0$, es decir,

$$\frac{|v|}{u} = \operatorname{tg}(\beta) < -\frac{1}{a},$$

esto es, $|v| > (-1/a)u$. Por consiguiente, $re^{i\beta} \in \mathcal{U}_a$.

Caso 2.2. Supongamos que $\beta - \theta \in (\alpha + \phi, \alpha + \pi/2 - \phi)$. Entonces

$$\begin{aligned}\beta \in\ & (\alpha + \theta + \phi, \alpha + \theta + \pi/2 - \phi) = \\ & \Big(\pi + \arctan(1/a), \pi + \pi/2 - \arctan(1/a)\Big) = \\ & \Big(\pi + \arctan(1/a), \pi + \arctan(a)\Big).\end{aligned} \tag{5.5}$$

En la última igualdad, como antes, se ha tenido en cuenta la relación $\arctan(1/a) + \arctan(a) = \pi/2$. De nuevo, debido a la periodicidad de la función tangente y a su monotonía,

$$\frac{1}{a} < \operatorname{tg}(\beta) < a,$$

es decir, $|v/u| = |\operatorname{tg}(\beta)| < a$. Asimismo, (5.5) implica que $\pi < \beta < 3\pi/2$, por lo que $\cos(\beta) < 0$ y $\sin(\beta) < 0$. Por tanto

$$\frac{|v|}{u} = -\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = -\operatorname{tg}(\beta) < -\frac{1}{a},$$

así pues, $|v| > (-1/a)u$. Por tanto, $re^{i\beta} \in \mathcal{U}_a$.

Caso 2.3. El último caso es cuando $\beta - \theta \in (\alpha + \pi/2 + \phi, \alpha + 3\pi/2 - \phi)$. Si se escoge k_0 igual a los casos anteriores, entonces

$$\begin{aligned}\beta \in\ & (\alpha + \theta + \pi/2 + \phi, \alpha + \theta + 3\pi/2 - \phi) = \\ & \Big(\pi + \pi/2 + \arctan(1/a), \pi + 3\pi/2 - \arctan(1/a)\Big) = \\ & \Big(2\pi - \arctan(a), 2\pi + \arctan(a)\Big) = \\ & \Big(2\pi + \arctan(-a), 2\pi + \arctan(a)\Big).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Como en el resto de casos, en la penúltima igualdad se ha utilizado la relación trigonométrica de la arcotangente antes expuesta. De nuevo, debido a la periodicidad de la tangente y a su monotonía, se tiene que

$$-a < \operatorname{tg}(\beta) < a,$$

lo cual implica que $|v/u| = |\operatorname{tg}(\beta)| < a$. Además, como consecuencia de (5.6), $3\pi/2 < \beta < 2\pi + \pi/2$, por lo que $\cos(\beta) > 0$ y por tanto

$$\frac{|v|}{u} \geq 0 > -\frac{1}{a},$$

dicho de otra manera, $|v| > (-1/a)u$. Por consiguiente, $re^{i\beta} \in \mathcal{U}_a$.

Se ha demostrado que, para cualquiera de los casos posibles, el complejo $u(z) + iv(z) = re^{i\beta} \in \overline{B}(0,\rho) \cup \mathcal{U}_a$, concluyendo así la demostración. □

5.4. Estudio local de las funciones armónicas en sus ceros

La presente sección comienza demostrando lo que algunos autores conocen como el Lema de Lewis (véase 5.16) acerca del comportamiento de las funciones armónicas en un entorno de sus ceros. Asimismo, se prueban resultados derivados de este lema.

Lema 5.16. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y supongamos que $\overline{B}(0,2R) \subseteq U$. Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en $B(0,2R)$ y continua en $\overline{B}(0,2R)$ tal que $f(0) = 0$. Entonces existen $z_0 \in U$ y $\rho > 0$ tales que $B(z_0,\rho) \subseteq B(0,2R)$ y*

$$f(z_0) = 0, \tag{5.7}$$

$$\sup_{w \in B(z_0,\rho)} f(w) \geq C_0 \sup_{w \in B(0,R)} f(w), \tag{5.8}$$

$$\sup_{w \in B(z_0,\rho/2)} f(w) \geq C_0 \sup_{w \in B(z_0,\rho)} f(w), \tag{5.9}$$

para cierta constante $C_0 > 0$.

Demostración. Se va a demostrar que, de hecho, la constante $C_0 = 3^{-11}$. Para cada $z \in B(0, 2R)$, llamamos

$$\delta(z) = d\left(z, \partial B(0, 2R)\right) = 2R - |z|.$$

Se definen además los conjuntos siguientes

$$\mathcal{Z} = \{z \in B(0, 2R) : f(z) = 0\},$$
$$\mathcal{B} = \bigcup_{z \in \mathcal{Z}} B(z, \delta(z)/4),$$

y finalmente se define

$$\sigma = \sup_{w \in \mathcal{B}} f(w) = \sup_{z \in \mathcal{Z}} \left(\sup_{w \in B(z, \delta(z)/4)} f(w) \right).$$

Nótese que el superior finito pues f es continua en el compacto $\overline{B}(0, 2R)$. Se escoge $z_0 \in \mathcal{Z}$ tal que

$$\sup_{w \in B(z_0, \delta(z_0)/4)} f(w) \geq \sigma/3 \qquad \text{y} \qquad \rho = \delta(z_0)/2.$$

Veamos que $B(z_0, \rho)$ satisface las tesis del lema. Claramente, se tiene que $B(z_0, \rho) \subseteq B(0, 2R)$ y $f(z_0) = 0$. Además, teniendo en cuenta que se cumple que $\sup_{w \in B(z_0, \rho/2)} f(w) \geq \sigma/3$, para concluir bastará probar:

$$a) \quad \sup_{w \in B(0, R)} f(w) \leq 3^{10}\sigma,$$
$$b) \quad \sup_{w \in B(z_0, \rho)} f(w) \leq 3^{10}\sigma,$$

ya que, si se cumple a), entonces

$$\frac{1}{3^{10}} \sup_{w \in B(0, R)} f(w) \leq \sigma \leq 3 \sup_{w \in B(z_0, \rho/2)} f(w) \leq 3 \sup_{w \in B(z_0, \rho)} f(w).$$

Si se multiplican las desigualdades anteriores por $1/3$, se obtiene (5.8). Análogamente, si se verificase b), obtendríamos (5.9).

Sólo se demuestra a) ya que el razonamiento con b) es análogo. Para ello, sea $z \in B(0,R)$ tal que $f(z) \geq 0$ (existe al menos $z=0$). Distinguimos dos casos:

Si $z \in \overline{\mathcal{B}}$ entonces, existiría una sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de $\mathcal{B}$ tal que $\lim_{n\to\infty} w_n = z$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in \mathcal{B}$, y por tanto, existirá $z_n \in \mathcal{Z}$, de modo que $w_n \in B(z_n, \delta(z_n)/4)$. De esta manera, se verifica que

$$f(w_n) \leq \sup_{w\in B(z_n,\delta(z_n)/4)} f(w) \leq \sup_{z\in\mathcal{Z}} \left(\sup_{w\in B(z,\delta(z)/4)} f(w) \right) = \sigma.$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(w_n) \leq \sigma$ y por continuidad, $\lim_{n\to\infty} f(w_n) = f(z) \leq \sigma$.

Si $z \notin \overline{\mathcal{B}}$, entonces se define z' como el punto de $\partial\mathcal{B} \cap [z,0]$ que hace mínima la función $d(z,w)$ cuando se hace variar $w \in \partial\mathcal{B} \cap [z,0]$, donde, como de costumbre, $[z,0]$ es el segmento cerrado que une los puntos z y 0. Nótese que z' está bien definido pues la distancia d es continua en el compacto $\partial\mathcal{B} \cap [z,0]$ y por tanto, el mínimo se alcanza. Es importante observar que $\partial\mathcal{B} \cap [z,0] = \partial\mathcal{B} \cap (z,0)$ pues $z \notin \overline{\mathcal{B}}$ y $0 \in \mathring{\mathcal{B}}$. En particular, necesariamente $z' \neq 0$, $z' \neq z$ y cumple que:

- $z' \in (z,0)$
- $z' \in \overline{\mathcal{B}}$
- $[z,z') \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$

Notemos que, en el segmento abierto por la derecha $[z,z')$, f no se anula y como $f(z) > 0$ y el segmento es un conjunto conexo, el Teorema del valor intermedio asegura que necesariamente $f > 0$ en $[z,z')$. De hecho, $f > 0$ en $B(w,R/5)$ para cualquier $w \in [z,z')$, pues, en caso contrario, existiría $w_0 \in B(w,R/5)$ tal que $f(w_0) = 0$. Es decir, $w_0 \in \mathcal{Z}$ y además:

$$\begin{aligned}\delta(w_0) &= 2R - |w_0| = 2R - |w_0 + w - w| \geq 2R - |w_0 - w| - |w| \\ &\geq 2R - R - R/5 = \frac{4R}{5} > 4|w_0 - w|,\end{aligned}$$

y por tanto, $\delta(w_0)/4 > |w - w_0|$, lo cual implica que $w \in B(w_0, \delta(w_0)/4) \subseteq \mathcal{B}$, llegando así a un asbsurdo pues $w \in [z,z')$ y $[z,z') \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$, es decir $w \notin \overline{\mathcal{B}}$.

De esta manera, estamos en condiciones de aplicar la Desigualdad de Harnack en $B(w, R/5)$, con $w \in [z, z')$. Si $r < R/5$ y $0 \leq t < 2\pi$,

$$\frac{R/5 - r}{R/5 + r} f(w) \leq f(w + re^{it}) \leq \frac{R/5 + r}{R/5 - r} f(w).$$

Tomando extremos inferiores en esta expresión cuando $r \in [0, R/10]$ y cuando $t \in [0, 2\pi)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} f(w) &= \operatorname*{\acute{i}nf}_{0 \leq r \leq R/10} \left(\frac{R/5 - r}{R/5 + r} f(w) \right) \leq \operatorname*{\acute{i}nf}_{\substack{0 \leq r \leq R/10 \\ 0 \leq t < 2\pi}} f(w + re^{it}) \\ &= \operatorname*{\acute{i}nf}_{\zeta \in B(w, R/10)} f(\zeta) \leq \operatorname*{\acute{i}nf}_{0 \leq r \leq R/10} \left(\frac{R/5 + r}{R/5 - r} f(w) \right) = f(w). \end{aligned}$$

Análogamente, tomando extremos superiores tenemos que

$$\begin{aligned} f(w) &= \sup_{0 \leq r \leq R/10} \left(\frac{R/5 - r}{R/5 + r} f(w) \right) \leq \sup_{\substack{0 \leq r \leq R/10 \\ 0 \leq t < 2\pi}} f(w + re^{it}) \\ &= \sup_{\zeta \in B(w, R/10)} f(\zeta) \leq \sup_{0 \leq r \leq R/10} \left(\frac{R/5 + r}{R/5 - r} f(w) \right) = 3f(w). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier $w \in [z, z')$,

$$\sup_{\zeta \in B(w, R/10)} f(\zeta) \leq 3f(w) = \frac{1}{3} 3^2 f(w) \leq 3^2 \operatorname*{\acute{i}nf}_{\zeta \in B(w, R/10)} f(\zeta). \tag{5.10}$$

Recuérdese que $\ell = \text{long}([z, z']) < R$, por tanto, se puede recubrir el segmento $[z, z')$ por cinco bolas de radio $R/10$ centradas en puntos de $[z, z')$ que se solapan de tal manera que forman una “cadena”(véase la figura 5.3).

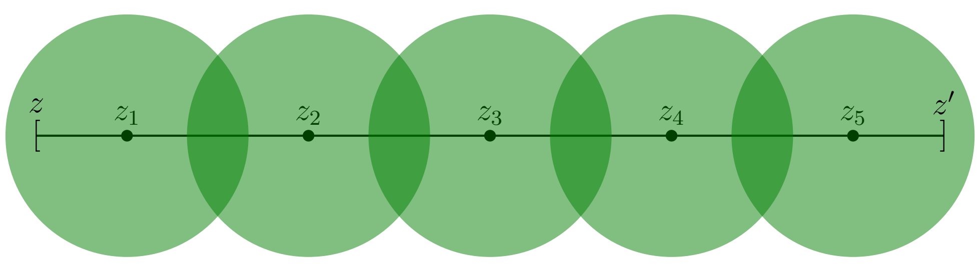


Figura 5.3: Representación gráfica de la cadena de bolas centradas en puntos de $[z, z')$ que recubren el segmento [z,z’]

Para demostrar esta afirmación, consideramos la curva $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\alpha(t) = z(1-t) + tz'$ que evidentemente es la parametrización del segmento $[z, z']$. Tomamos los puntos $t_i = \dfrac{2i-1}{10}$ con $i = 1, \ldots, 5$ y los puntos $z_i = \alpha(t_i)$. De esta manera, las bolas $B(z_i, R/10)$ recubren el segmento $[z, z')$ y además $B(z_i, R/10) \cap B(z_{i+1}, R/10) \neq \emptyset$ con $i = 1, \ldots, 4$. Escogemos w_i en dicha intersección para $i = 1, \ldots, 4$. Entonces, teniendo en cuenta (5.10) y la construcción de cada w_i, se tiene que

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \sup_{\xi \in B(z_1, R/10)} f(\xi) \leq 3^2 \inf_{\xi \in B(z_1, R/10)} f(\xi) \leq 3^2 f(w_1) \leq 3^2 \sup_{\xi \in B(z_2, R/10)} f(\xi) \\ &\leq 3^4 \inf_{\xi \in B(z_2, R/10)} f(\xi) \leq 3^4 f(w_2) \leq \cdots \leq (3^2)^5 \inf_{\xi \in B(z_5, f)} f(\xi) \leq (3^2)^5 f(z') \\ &\leq 3^{10} \sigma. \end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se debe a que $z' \in \overline{\mathcal{B}}$, y por tanto, $f(z') \leq \sigma$ como se demostró en el primer caso. Al haber tomado $z \in B(0, R)$ arbitrario, a partir de la desigualdad anterior, queda probado a). $\square$

A partir del lema anterior se podría demostrar casi de forma directa el Teorema de Lewis, sin embargo, el objetivo no es ese, sino dar una reinterpretación más general del mismo.

Proposición 5.17. *Sea $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica no constante. Entonces existe al menos un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $u(z_0) = 0$.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que u nunca es 0. Debido a que u es continua, $u(\mathbb{C})$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Esto implica que $u(\mathbb{C})$ es un intervalo que no contiene 0. Por lo tanto, o bien $u(\mathbb{C}) \subset (0, \infty)$, o bien $u(\mathbb{C}) \subset (-\infty, 0)$. Supongamos que es el segundo caso. Sea v el conjugado armónico de u en $\mathbb{C}$. Entonces, $f(z) = e^{u+iv}$ es una función entera tal que $|f(z)| = e^{u(z)} < e^0 = 1$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Esto implica que f es una función entera acotada. Por el Teorema de Liouville, f es constante. Esto implica que u es constante, lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 5.18. *Sea $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica no constante. Entonces existe una sucesión de bolas $B(z_n, \rho_n)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se* *tiene que*

$$u(z_n) = 0, \tag{5.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{w\in B(z_n,\rho_n)} u(w) \right) = \infty, \tag{5.12}$$

$$\sup_{w\in B(z_n,\rho_n)} u(w) \le C \sup_{w\in B(z_n,\rho_n/2)} u(w), \tag{5.13}$$

para cierta constante uniforme $C > 0$.

Demostración. Por la Proposición 5.17, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $u(z_0) = 0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $z_0 = 0$, ya que, en caso contrario, bastaría tomar la función $u(z + z_0)$. Como u es no constante, el Teorema de Lioville asegura que u no está acotada ni superior ni inferiormente, luego, está claro que

$$\lim_{R\to\infty} \left(\sup_{w\in B(0,R)} u(w) \right) = \infty. \tag{5.14}$$

Tómese una sucesión $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales positivos que verifiquen que $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$. Aplicando el Lema 5.16 a cada $B(0, R_n)$, se tiene que existen $C_0 > 0$, $z_n \in \mathbb{C}$ y $\rho_n > 0$ tales que $B(z_n, r_n) \subseteq B(0, R_n)$ y

$$u(z_n) = 0,$$
$$\sup_{w\in B(z_n,\rho_n)} u(w) \ge C_0 \sup_{w\in B(0,R_n/2)} u(w),$$
$$\sup_{w\in B(z_n,\rho_n/2)} u(w) \ge C_0 \sup_{w\in B(z_n,\rho_n)} u(w).$$

La primera ecuación implica directamente (5.11) y la tercera, si se toma $C = 1/C_0$, implica (5.13). Para obtener (5.12), basta tomar límites en la segunda ecuación cuando $n \to \infty$ teniendo en cuenta (5.14). $\square$

Lema 5.19. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en $B(z_0, r)$, continua en $\overline{B}(z_0, r)$, y tal que $u(z_0) = 0$. Entonces*

$$\sup_{w\in B(z_0,2r/3)} |u(w)| \le 4 \sup_{w\in B(z_0,r)} u(w).$$

Demostración. Sea $M = \sup_{w\in B(z_0,r)} u(w)$ y $v : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $v(z) = M - u(z)$. Nótese que, por construcción, $v(z) \ge 0$ cuando $z \in B(z_0, r)$.

Además, v es armónica en dicha bola. La desigualdad de Harnack asegura que, si $0 \leq \rho \leq r$ y $0 \leq t < 2\pi$, entonces

$$v(z_0 + \rho e^{it}) \leq \frac{r+\rho}{r-\rho} v(z_0).$$

Si se toman extremos superiores en la expresión anterior cuando ρ varía en el intervalo $(0, 2r/3)$ y cuando t varía en $[0, 2\pi)$, se obtiene

$$\sup_{w \in B(z_0, 2r/3)} v(w) \leq 5v(z_0) = 5M.$$

Dicho de otra manera, $u(z) \geq -4M$ si $z \in B(z_0, 2r/3)$. Además,

$$u(z) \leq \sup_{w \in B(z_0, 2r/3)} u(w) \leq \sup_{w \in B(z_0, r)} = M,$$

cuando $z \in B(z_0, 2r/3)$. Juntando ambas expresiones, se obtiene que $-4M \leq u(z) \leq M$ si $z \in B(z_0, 2r/3)$, es decir, $\sup_{w \in B(z_0, 2r/3)} |u(w)| \leq 4M$. $\square$

Corolario 5.20. *Sea $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica no constante. Entonces existen una sucesión de bolas $\{B(z_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$u(z_n) = 0, \tag{5.15}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{w \in B(z_n, r_n)} u(w) \right) = \infty, \tag{5.16}$$

$$\sup_{w \in B(z_n, r_n)} |u(w)| \leq C_1 \sup_{w \in B(z_n, 3r_n/4)} u(w), \tag{5.17}$$

para cierta constante uniforme $C_1 > 0$.

Demostración. Sea $\{B(z_n, \rho_n)\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de las bolas obtenidas del Corolario 5.18 y pongamos $r_n = \frac{2}{3}\rho_n$. Entonces, (5.15) es directo. Para probar (5.17), si llamamos $C_1 = 4C$, se tiene que

$$\sup_{w \in B(z_n, r_n)} |u(w)| = \sup_{w \in B(z_n, \frac{2}{3}\rho_n)} |u(w)| \leq 4 \sup_{w \in B(z_n, \rho_n)} u(w) \leq C_1 \sup_{w \in B(z_n, \frac{3}{4}r_n)} u(w),$$

donde la penúltima desigualdad se debe al Lema 5.19 y la última se debe a (5.13). Resta por comprobar (5.16). Para ello, es necesario tener en cuenta (5.13), ya que

$$\sup_{w \in B(z_n, \rho_n)} u(w) \leq C \sup_{w \in B(z_n, \rho_n/2)} u(w) \leq C \sup_{w \in B(z_n, \frac{2}{3}\rho_n)} u(w) = C \sup_{w \in B(z_n, r_n)} u(w).$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ en la expresión anterior, debido a (5.12), obtenemos (5.16). $\square$

5.5. Método de reescalamiento y sus consecuencias

La presente sección se divide en dos subsecciones. La primera expone el método de reescalamiento, resultado esencial para poder demostrar el teorema fundamental de este capítulo. La segunda, define el concepto de transformaciones armónicas reescaladas, noción que deriva del método de reescalamiento, así como algunos resultados acerca de su rango.

5.5.1. Método de reescalamiento

Sea $f = u+iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una transformación armónica tal que $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ no contiene puntos antipodales. Tras una rotación, el Corolario 5.15 nos permite asumir que existe $a > 1$ y $\rho > 0$ tal que

$$\mathcal{R}_f \subseteq \overline{B}(0,\rho) \bigcup \Big(\{u+iv : |v| \leq a|u|\} \setminus \{u+iv : |v| \leq -\frac{1}{a}u\} \Big). \tag{5.18}$$

Supongamos también que f no es constante. Entonces, u y v necesariamente tampoco lo son, ya que, en caso contrario, la Proposición 5.12 aseguraría que $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ contendría puntos antipodales. De esta manera, estamos en condiciones de aplicar el Corolario 5.20 a la función u. Por ello, existen $z_n \in \mathbb{C}$ y $r_n > 0$ verificando (5.15),(5.16) y (5.17).

Definamos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, las funciones$u_n, v_n : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$u_n(z) = \frac{u(z_n + r_n z)}{M_n} \qquad \text{y} \qquad v_n(z) = \frac{v(z_n + r_n z)}{M_n},$$

donde $M_n = \sup\limits_{w \in B(z_n, r_n)} |u(w)|$. Evidentemente, esta funciones son armónicas en $B(0,1)$ por serlo u y v y además, gracias a (5.15), (5.16) y (5.17) cumplen que

$$u_n(0) = 0, \tag{5.19}$$
$$|u_n(z)| \leq 1 \qquad \text{para cada } z \in B(0,1), \tag{5.20}$$
$$0 < C_1^{-1} \leq \sup_{w \in B(0,\frac{3}{4})} u_n(w). \tag{5.21}$$

La propiedad (5.19) es evidente ya que

$$u_n(0) = \frac{u(z_n)}{M_n} = 0.$$

Para comprobar la propiedad (5.20), si $z \in B(0,1)$,

$$|u_n(z)| = \frac{|u(z_n + r_n z)|}{M_n} \leq \frac{\sup_{w \in B(0,1)} |u(z_n + r_n w)|}{M_n} = \frac{\sup_{w \in B(z_n, r_n)} |u(w)|}{M_n} = 1.$$

Finalmente, la propiedad (5.20) proviene de

$$C_1^{-1} M_n \leq \sup_{w \in B(z_n, \frac{3}{4} r_n)} u(w) = \sup_{w \in B(0,\frac{3}{4})} M_n u_n(w) = M_n \sup_{w \in B(0,\frac{3}{4})} u_n(w).$$

Ahora vamos a acotar uniformemente $|v_n|$. Para ello, sea $z \in B(0,1)$ y consideremos el elemento $u(z_n + r_n z) + iv(z_n + r_n z) \in \mathcal{R}_f$. Debido a (5.18) y siguiendo la notación del Corolario 5.15, se tiene que $u(z_n + r_n z) + iv(z_n + r_n z) \in \overline{B}(0,\rho) \cup \mathcal{U}_a$.

Si $u(z_n + r_n z) + iv(z_n + r_n z) \in \mathcal{U}_a$, entonces

$$|v_n(z)| = \frac{|v(z_n + r_n z)|}{M_n} \leq a \frac{|u(z_n + r_n z)|}{M_n} \leq a \frac{M_n}{M_n} = a.$$

Si $u(z_n + r_n z) + iv(z_n + r_n z) \in \overline{B}(0,\rho)$, entonces $|u(z_n + r_n z) + iv(z_n + r_n z)| \leq \rho$ y aplicando la segunda desigualdad triangular, se obtiene

$$\begin{aligned} |v_n(z)| - |u_n(z)| &\leq \big| |v_n(z)| - |u_n(z)| \big| = \left| \frac{|v(z_n + r_n z)|}{M_n} - \frac{|u(z_n + r_n z)|}{M_n} \right| \\ &\leq \left| \frac{u(z_n + r_n z)}{M_n} + i \frac{v(z_n + r_n z)}{M_n} \right| \leq \frac{\rho}{M_n}. \end{aligned}$$

De esta manera, se obtiene que

$$|v_n(z)| \leq \frac{\rho}{M_n} + |u_n(z)| \leq \frac{\rho}{M_n} + 1 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\rho}{M_n} + 1.$$

Si llamamos $L = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\rho}{M_n} + 1$, entonces, $L < \infty$ ya que $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$.

Atendiendo a estos dos casos, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $z \in B(0,1)$, se tiene que $|v_n(z)| \leq \max\{a, L\}$.

De esta manera, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones de funciones armónicas uniformemente acotadas en $B(0,1)$, luego, el Teorema de Harnack asegura que existe una subsucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ y dos funciones armónicas definidas en la bola unidad $U, V : B(0,1) \to \mathbb{R}$ tales que u_{n_k} tiende uniformemente hacia U en los compactos de $B(0,1)$ y v_{n_k} tiende uniformemente hacia V en los compactos de $B(0,1)$. Nótese que, teniendo en cuenta las propiedades (5.19),(5.20) y (5.21), se deduce que

$$\begin{aligned} U(0) &= 0, \\ |U(z)| &\leq 1 \qquad \text{para cada } z \in B(0,1), \\ 0 < C_1^{-1} &\leq \sup_{w\in B\left(0,\frac{3}{4}\right)} U(w). \end{aligned}$$

En particular, U no es constante.

Definición 5.21. Sea $f = u + iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una transformación armónica no constante tal que $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ no contiene puntos antipodales y sean U, V definidas como en el método de reescalamiento. Llamamos *transformación armónica reescalada asociada a f* a la función $F = U + iV : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$. Además, siguiendo la notación habitual, $\mathcal{R}_F = F(B(0,1))$.

5.5.2. Transformaciones armónicas reescaladas

A continuación, se muestran una serie de resultados que muestran cómo se relaciona $\mathcal{R}_F$ con $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$.

Proposición 5.22. *Sea $F = U + iV : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ la transformación armónica reescalada asociada a $f = u + iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, donde f es una* *transformación armónica no constante tal que $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ no contiene puntos antipodales. Entonces*

$$\mathcal{R}_F \subseteq \{re^{i\theta} : r \geq 0,\ e^{i\theta} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)\}.$$

Demostración. Por definición de U y V, existen una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos del plano complejo, una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números estrictamente positivos y una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números positivos que cumple que $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$ y que, si fijamos $z \in B(0,1)$ y llamamos $w_n = u(z_n+r_nz)+iv(z_n+r_nz)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u(z_n+r_nz)+iv(z_n+r_nz)}{M_n} = U(z)+iV(z),$$

ya que la convergencia uniforme asegura la puntual. En particular, se deduce fácilmente que $\lim_{n\to\infty}|w_n|=\infty$. Probemos la contención del enunciado. Para ello, sea $z \in B(0,1)$, con $U(z)+iV(z) \in \mathcal{R}_F$. Si $U(z)+iV(z)=0$, entonces el resultado es evidente. En caso contrario, existirá $R>0$ y $\beta \in [0,2\pi]$ tal que $U(z)+iV(z)=Re^{i\beta}\neq 0$. Entonces, utilizando la misma notación que antes,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{|w_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{w_n/M_n}{|w_n|/M_n} = \frac{Re^{i\beta}}{|Re^{i\beta}|} = e^{i\beta}.$$

Como $w_n \in \mathcal{R}_f$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty}|w_n|=\infty$, entonces, la Proposición 5.5 asegura que $e^{i\beta} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$, como se quería demostrar. □

Observación 5.23. Si partimos de una transformación armónica $f=u+iv$ tal que $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ no contenga puntos antipodales y que verifique (5.18) para un cierto $a>1$ y $\rho>0$. Tomemos $\alpha=\arctan(1/a)\in(0,\pi/4)$, entonces, teniendo en cuenta tanto la definición de direcciones asintóticas (o equivalentemente la Proposición 5.5) y la contención dada por (5.18), es sencillo de comprobar que

$$\mathcal{D}(\mathcal{R}_f) \subseteq I_\alpha,$$

donde

$$I_\alpha = \left\{ e^{i\theta} : \theta \in \Big[-\frac{\pi}{2}+\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha\Big] \cup \Big[\frac{\pi}{2}+\alpha, \pi-\alpha\Big] \cup \Big[\pi+\alpha, \frac{3\pi}{2}-\alpha\Big] \right\}.$$

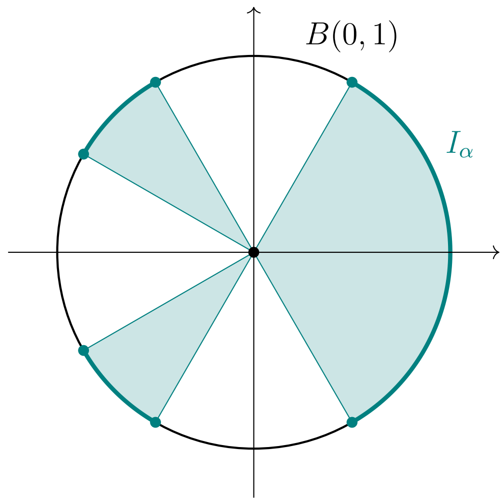


Figura 5.4: Representación gráfica de I_α en la frontera de la bola $B(0,1)$.

Corolario 5.24. *Sea $F = U + iV : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ la transformación armónica reescalada asociada a la transformación armónica $f = u + iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donde f es no constante, $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ no contiene puntos antipodales y donde f además verifica (5.18), para un cierto $a > 1$ y $\rho > 0$. Entonces*

$$\mathcal{R}_F \subseteq \{re^{i\beta} : r \geq 0,\ e^{i\theta} \in I_\alpha\}, \tag{5.22}$$

donde $\alpha = \arctan(1/a)$. En particular, se cumple

$$\begin{aligned} \{z \in B(0,1) : U(z) = 0\} &\subseteq \{z \in B(0,1) : V(z) = 0\} \\ &\subseteq \{z \in B(0,1) : U(z) \geq 0\}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Demostración. La prueba de (5.22) es inmediata debido a la Proposición 5.22 y la observación 5.23. Para probar (5.23), sea $z \in B(0,1)$ tal que $U(z) = 0$. Entonces, por (5.22), existe $r > 0$ tal que $iV(z) = re^{i\theta}$ con $e^{i\theta} \in I_\alpha$. Si $V(z) \neq 0$, necesariamente $\theta \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, sin embargo, en este caso, el punto $e^{i\theta} \notin I_\alpha$, por lo que $V(z)$ tiene que ser nulo. La segunda contención de (5.23) es análoga. $\square$

Lema 5.25. *Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un entorno abierto simplemente conexo del origen y $U : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica no constante tal que $U(0) = 0$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, $r > 0$, $\delta > 0$, y $\phi : B(0,r) \longrightarrow B(0,\delta)$ una función conforme y biyectiva tal que $U(z) = \mathrm{Re}(\phi(z)^n)$ para cada $z \in B(0,r) \subseteq W$.*

Demostración. Como U es armónica y W es simplemente conexo, consideremos la función holomorfa $F : W \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisface $\mathrm{Re}(F(z)) = U(z)$ y $F(0) = 0$ (véase el Lema 4.4). Sea $n \in \mathbb{N}$ el orden de 0 para F. Entonces, se tiene que $F(0) = F'(0) = \cdots = F^{(n-1)}(0) = 0$ y $F^{(n)}(0) \neq 0$. Resultados clásicos del análisis complejo nos aseguran que existe una bola $B(z, r_1) \subseteq W$ y una función holomorfa g en dicha bola con $g(0) \neq 0$ y tal que $F(z) = z^n g(z)$ para cada $z \in B(0, r_1)$. Por continuidad, existe $r_2 > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ para cada $z \in B(0, r_2)$. Así, el Teorema Homotópico de Cauchy asegura que, como $B(0, r_2)$ es simplemente conexo, existirá h una función holomorfa en $B(0, r_2)$ tal que $g(z) = h^n(z)$ para cada $z \in B(0, r_2)$. Por lo tanto, en esta misma bola, $F(z) = (zh(z))^n$. Llamemos $\phi : B(0, r_2) \longrightarrow \mathbb{C}$ a la función definida por $\phi(z) = zh(z)$. Esta función será holomorfa en $B(0, r_2)$ por serlo h y además cumple que $\phi'(0) = h(0) \neq 0$, pues $g(0) \neq 0$. Luego, el Teorema de la función inversa asegura que existen $r > 0$ y $\delta > 0$ tales que ϕ aplica biyectivamente $B(0, r)$ en $B(0, \delta)$ y que $\phi'(z) \neq 0$ para cada $z \in B(0, r)$, lo cual implica que es conforme. También $U(z) = \mathrm{Re(F(z))} = \mathrm{Re}(\phi(z)^n)$ con $z \in B(0, r)$ como queríamos comprobar. □

Lema 5.26. *Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un entorno abierto del origen y $U : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica no constante tal que 0 sea un cero de U. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ y $r > 0$ tal que*

$$\{z \in W : U(z) = 0\} \cap B(0, r) = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k^*,$$

donde cada γ_k es una curva analítica que verifica que el ángulo de curvas consecutivas en el origen es de π/n, es decir, $\widehat{\gamma_k, \gamma_{k+1}}(0) = \pi/n$

Demostración. Por el Lema 5.25, existen $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, $r, \delta > 0$ y un isomorfismo conforme $\phi : B(0, r) \longrightarrow B(0, \delta)$ tal que para cada $z \in B(0, r)$, se tiene que $U(z) = \mathrm{Re}(\phi(z)^n)$. Entonces

$$\begin{aligned} \{z \in W : U(z) = 0\} \cap B(0, r) &= \{z \in B(0, r) : U(z) = 0\} \\ &= \{z \in B(0, r) : \mathrm{Re}(\phi(z)^n) = 0\} \\ &= \{z = \phi^{-1}(w) \in B(0, r) : \mathrm{Re}(w^n) = 0\} \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que ϕ es isomorfismo. Veamos que

$$\{\phi^{-1}(z) \in B(0,r) : \mathrm{Re}(z^n) = 0\} = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k^*,$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_k \colon (-\delta, \delta) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \phi^{-1}(te^{i\theta_k}), \end{aligned}$$

y $\theta_k = \dfrac{(k-1)\pi + \pi/2}{n}$ con $k = 1, \ldots, n$. Para ello, razonemos por doble contención. Para la contención hacia la derecha:
Sea $\phi^{-1}(z) \in B(0,r)$ tal que $\mathrm{Re}(z^n) = 0$. Pongamos que $z = r_0 e^{i\theta}$ con $0 < r_0 \leq \delta$. Como $\mathrm{Re}(z^n) = 0$, por la fórmula de Moivre, $\cos(n\theta) = 0$, lo que equivale a que exista $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \dfrac{k_0\pi + \pi/2}{n}$. Es importante notar que para cada $k = 1, \ldots, n$, se tiene que $\gamma_k^* = \gamma_{k+n}^*$. Comprobemos que $\phi^{-1}(z) = \phi^{-1}(r_0 e^{i\theta}) \in \bigcup_{k=1}^n \gamma_k^*$. Para ello, consideramos $k_1 = k_0 \mod 2n$ y llamamos $\beta = \dfrac{k_1\pi + \pi/2}{n}$, entonces, por construcción, $e^{i\theta} = e^{i\beta}$ ya que $\theta - \beta$ es un múltiplo de 2π. Ahora, distinguimos dos casos:

- **Caso 1**: Si $0 \leq k_1 < n$, se tiene que

$$\phi^{-1}(r_0 e^{\theta i}) = \phi^{-1}(r_0 e^{\beta i}) \in \gamma_{k_1+1}^*$$

- **Caso 2**: Si $n \leq k_1 < 2n$, entonces

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(r_0 e^{\theta i}) =& \phi^{-1}(r_0 e^{\beta i}) = \phi^{-1}\left(-r_0 e^{(\beta-\pi)i}\right) \\ =& \phi^{-1}\left(-r_0 e^{i\frac{(k_1-n)\pi+\pi/2}{n}}\right) \in \gamma_{k_1+1-n}^*. \end{aligned}$$

Para la contención hacia la izquierda, sea $w \in \bigcup_{k=1}^n \gamma_k^*$, entonces, existe un natural k_0 tal que $w \in \gamma_{k_0}^*$ y por tanto, $\exists t_w \in (-\delta, \delta)$ y $\theta_{k_0} = \frac{(k_0-1)\pi+\pi/2}{n}$, tal que $w = \phi^{-1}(t_w e^{i\theta_{k_0}})$. Entonces, por la definición de θ_k, se tiene que $\mathrm{Re}(t_w e^{in\theta_{k_0}}) = 0$, como se quería probar.

Falta por probar que $\widehat{\gamma_k, \gamma_{k+1}}(0) = \pi/n$ para cada $k = 1, \ldots, n-1$. Para ello, vamos a considerar los segmentos $\Gamma_k(t) = (\phi \circ \gamma_k)(t) = te^{i\theta_k}$ con $t \in (-\delta, \delta)$

y $\theta_k = \frac{(k-1)\pi+\pi/2}{n}$ y llamemos $\beta = \widehat{\Gamma_k, \Gamma_{k+1}}(0)$. Operando, se obtiene que

$$\cos(\beta) = \frac{\mathrm{Re}\left(\Gamma_k'(t)\overline{\Gamma_{k+1}'(t)}\right)}{|\Gamma_k'(t)||\Gamma_{k+1}'(t)|} = \mathrm{Re}\left(e^{-\frac{i\pi}{n}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

lo cual implica que $\beta = \pi/n$. Además, como ϕ es un isomorfismo conforme, ϕ^{-1} también lo será y por lo tanto conservará ángulos, es decir:

$$\beta = \widehat{\Gamma_k, \Gamma_{k+1}}(0) = \widehat{\phi^{-1}\circ\gamma_k, \phi^{-1}\circ\gamma_{k+1}}(0) = \widehat{\gamma_k, \gamma_{k+1}}(0).$$

□

Observación 5.27. Si llamamos

$$N_m = \left\{\phi^{-1}(te^{i\theta}) : 0 < t < \delta,\ \frac{(m-1)\pi + \pi/2}{n} < \theta < \frac{m\pi + \pi/2}{n}\right\},$$

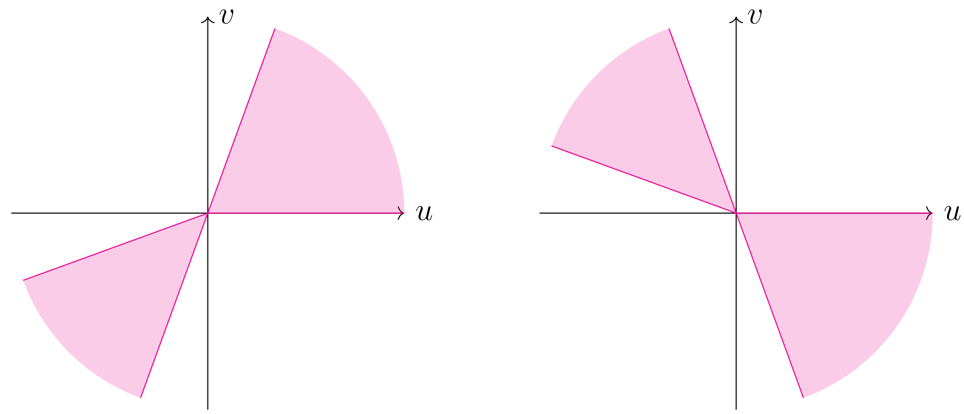
con $m = 1, \ldots, 2n$, entonces $B(0,r) \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k^* = \bigcup_{m=1}^{2n} N_m$. Además, los conjuntos N_m son disjuntos y simplemente conexos. Para comprobar esta afirmación, si definimos

$$S_m = \left\{te^{i\theta} : 0 < t < \delta,\ \frac{(m-1)\pi + \pi/2}{n} < \theta < \frac{m\pi + \pi/2}{n}\right\},$$

está claro que estos conjuntos son disjuntos y simplemente conexos, pues son arcos de circunferencia. Como $\phi^{-1}(S_m) = N_m$, y además ϕ^{-1} es continua y biyectiva, entonces los conjuntos N_m son también disjuntos y simplemente conexos. Además, se tiene que $U|_{N_{2k-1}} < 0$ y $U|_{N_{2k}} > 0$ para $k = 1, \ldots, n$. Comprobemos únicamente cuando $z \in N_{2k-1}$, ya que el otro caso es análogo. Si esto, ocurriese, pongamos $z = \phi^{-1}(te^{i\theta})$ con $0 < t < \delta$ y $\frac{(2k-2)\pi + \pi/2}{n} < \theta < \frac{(2k-1)\pi + \pi/2}{n}$, entonces $U(z) = \mathrm{Re}(\phi(z)^n) = \mathrm{Re}(t^n e^{i\theta n}) = t^n \cos(\theta n) < 0$.

Lema 5.28. *Sea $F = U + iV : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ la transformación armónica reescalada asociada a la transformación armónica $f = u + iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donde f es no constante, $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ no contiene puntos antipodales y además satisface* (5.22) *y* (5.23). *Entonces, existe $r > 0$ tal que*

$$\{z \in B(0,1) : U(z) = 0\} \cap B(0,r) = \{z \in B(0,1) : V(z) = 0\} \cap B(0,r). \tag{5.24}$$



A **B**

Figura 5.5: Regiones en las que está contenido $F(B(0,r))$ según el signo de UV. (**A**) Conjunto de la derecha de (5.25). (**B**) Conjunto de la derecha de (5.26).

Además, UV tiene signo constante en $B(0,r)$, es decir, o bien $U(z)V(z) \geq 0$, o bien $U(z)V(z) \leq 0$ para $z \in B(0,r)$. En particular, o bien se cumple

$$F(B(0,r)) \subseteq \left\{ re^{i\theta} : r \geq 0, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \alpha\right] \cup \left[\pi + \alpha, \frac{3\pi}{2} - \alpha\right] \right\}, \quad (5.25)$$

o bien

$$F(B(0,r)) \subseteq \left\{ re^{i\theta} : r \geq 0, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2} + \alpha, 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + \alpha, \pi - \alpha\right] \right\}, \quad (5.26)$$

para algún $0 < \alpha < \pi/4$.

Demostración. Como consecuencia del reescalado, la función U no es constante; y como $U(0) = 0$, gracias a (5.23), deducimos que $V(0) = 0$. Además, la función V no puede ser constante. Si no fuera así, la función V sería idénticamente nula y de nuevo, gracias a (5.23), $U(z) \geq 0$, para cada $z \in B(0,1)$. Finalmente, el principio del módulo máximo asegura que U sería idénticamente nula, lo que es absurdo. Por ello, U, V cumplen las hipótesis del Lema

5.26, luego se puede tomar $r > 0$ tal que

$$\{z \in B(0,1) : U(z) = 0\} \cap B(0,r) = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k^*,$$
$$\{z \in B(0,1) : V(z) = 0\} \cap B(0,r) = \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j^*,$$

donde cada γ_k y Γ_j son curvas analíticas que se intersecan en el origen con ángulos π/n y π/m respectivamente. Debido a la ecuación (5.23) y a la naturaleza de estas curvas, necesariamente $n \leq m$ y cada γ_k es igual a alguna curva Γ_j. De hecho, $n = m$, ya que, si $n < m$, debido a la observación 5.27, existiría j tal que la curva $\Gamma_j \setminus \{0\}$ estaría contenida en uno de los sectores N_{2n-1} para algún n, es decir, $U < 0$ lo que contradice la ecuación (5.23). De esta manera, $n = m$ y por tanto, la familia de curvas debe ser la misma.

Finalmente, es preciso notar que $B(0,r) = (\bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k^*) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{2n} N_k\right)$ y que

1. UV es constante en $\bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k^*$ ya que, en este conjunto, se acaba de demostrar que $UV = 0$.

2. U tiene signo constante en cada N_k, con $k = 1, \ldots, 2n$, como se probó en la observación 5.27. V también ha de tener signo constante en estos conjuntos, ya que, en caso contrario, existiría N_{k_0} tal que V tomaría un valor estrictamente positivo y uno estrictamente negativo. Por continuidad, debería existir un 0 de V en N_{k_0}, lo cual es absurdo por construcción de estos conjuntos.

Finalmente, (5.25) y (5.26) es consecuencia directa del carácter de signo constante de UV en $B(0,r)$ y de la ecuación (5.22). □

Observación 5.29. Para obtener (5.24) y justificar que UV tiene signo constante en $B(0,r)$ solo se ha utilizado la condición (5.23). Sin embargo, para obtener (5.25) y (5.26) se ha necesitado también la hipótesis (5.22).

5.6. Teorema Pequeño de Picard

La parte fundamental de este capítulo es el siguiente teorema que, como se ha ido adelantando hasta ahora, es una generalización del Teorema de

Lewis. Esta sección cierra el quinto capítulo demostrando de forma sencilla el Teorema de Lewis y consecuentemente el Pequeño de Picard.

Teorema 5.30. *Sea $f = u + iv : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una transformación armónica tal que $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ no contiene puntos antipodales. Entonces f es constante.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que f no es constante. Debido al Corolario 5.15, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que f verifica (5.18). En caso contrario, giraríamos y trabajaríamos con la nueva función. Consideremos $F = U + iV$ la transformación armónica reescalada asociada a f, que cumplirá las condiciones (5.22) y (5.23). Por el Lema 5.28, existe $r_1 > 0$ tal que

$$\{z \in B(0,1) : U(z) = 0\} \cap B(0,r_1) = \{z \in B(0,1) : V(z) = 0\} \cap B(0,r_1), \tag{5.27}$$

donde, además, UV tiene signo constante en $B(0,r_1)$. Supongamos que, de hecho, $UV \geq 0$ en tal bola (si $UV \leq 0$ el razonamiento es análogo) y, por tanto, se cumple que

$$F(B(0,r_1)) \subseteq \left\{ re^{i\theta} : r \geq 0, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \alpha\right] \cup \left[\pi + \alpha, \frac{3\pi}{2} - \alpha\right] \right\}, \tag{5.28}$$

para algún $0 < \alpha < \pi/4$. A continuación, se divide la demostración en distintos pasos para facilitar su lectura.

Paso 1:. Se definen

$$\beta_1^- = \operatorname{ínf} \left\{ \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) : \exists R > 0, \text{ tal que } Re^{i\theta} \in F(B(0,r_1)) \right\},$$
$$\beta_1^+ = \sup \left\{ \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) : \exists R > 0, \text{ tal que } Re^{i\theta} \in F(B(0,r_1)) \right\}.$$

Primero, nótese que β_1^-, β_1^+ están bien definidas pues el conjunto de definición es no vacío, ya que existe algún punto de $F(B(0,r_1))$ en el tercer cuadrante. Si no ocurriese, como $UV \geq 0$ en $B(0,r_1)$, se tendría que para cada $z \in B(0,r_1)$, $U(z) \geq 0$ y $V(z) \geq 0$. Por el Principio del módulo mínimo para funciones armónicas, U sería constante en $B(0,r_1)$ y, como $U(0) = 0$, $U(z) = 0$ para cada $z \in B(0,r_1)$. Ahora, por Principio de identidad para funciones armónicas, U sería idénticamente nula en $B(0,1)$, lo cual es absurdo.

Por ello, debe de existir al menos un punto $w_0 \in B(0, r_1)$ tal que $U(w_0) < 0$. Análogamente, también debe de existir un punto en el primer cuadrante utilizando el Principio del módulo máximo para funciones armónicas.

Veamos que $e^{i\beta_1^-} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$. Por definición de extremo inferior, existe una sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\theta_n \downarrow \beta_1^-$ y que verifica que existe $R_n > 0$ con $R_n e^{i\theta_n} \in F(B(0, r_1))$. Es decir, $R_n e^{i\theta_n} \in \mathcal{R}_F$, por lo que, la Proposición 5.22 asegura que, necesariamente, $e^{i\theta_n} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por continuidad, $e^{i\theta_n} \longrightarrow e^{i\beta_1^-}$, y teniendo en cuenta la Proposición 5.7, $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ es cerrado y por tanto $e^{i\beta_1^-} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$. La demostración de que $e^{i\beta_1^+} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ es completamente análoga. Además

$$\pi < \beta_1^- < \beta_1^+ < \frac{3\pi}{2}, \tag{5.29}$$

ya que, por la definición de β_1^- y β_1^+ y teniendo en cuenta la ecuación (5.28), necesariamente se verifica que $\pi < \pi + \alpha \leq \beta_1^- \leq \beta_1^+ \leq 3\pi/2 - \alpha < 3\pi/2$. Falta por probar que $\beta_1^- < \beta_1^+$. Si ocurriera que $\beta_1^- = \beta_1^+ = \beta$, entonces, al coincidir el extremo inferior y superior del mismo conjunto, implica que debe ser unipuntal y por tanto existe $R > 0$ tal que $Re^{i\beta} \in F(B(0, r_1))$. Luego, si llamamos $a = \tan(\beta) > 0$, entonces

$$F(B(0, r_1)) \cap \{re^{i\theta} : \theta \in (\pi, 3\pi/2)\} \subseteq \{U + iV : V = aU\},$$

pues, si tomamos un elemento en el conjunto de la izquierda, necesariamente ha de ser $Re^{i\beta} = R(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$, y por tanto $\sin(\beta)/\cos(\beta) = \tan(\beta) = a$. Ahora, si $z \in B(0, r_1)$ tal que $U(z) < 0$, entonces, por (5.28), $F(z)$ pertenecerá al tercer cuadrante, y por la contención anterior, necesariamente $V(z) = aU(z)$, lo que prueba que

$$\{z \in B(0, r_1) : U(z) < 0\} \subseteq \{z \in B(0, r_1) : V(z) - aU(z) = 0\}. \tag{5.30}$$

Por el comentario realizado al principio del Paso 1, debe existir $w_0 \in B(0, r_1)$ tal que $U(w_0) < 0$. Por continuidad, debe existir $r_1' < r_1$ tal que, si $z \in B(w_0, r_1')$, entonces $U(z) < 0$. Como $B(w_0, r_1') \subseteq B(0, r_1)$, entonces, debido a (5.30), si $z \in B(w_0, r_1')$, $U(z) < 0$ y por tanto $V(z) - aU(z) = 0$. Debido al Principio de identidad para funciones armónicas, se tendría que, $V - aU = 0$ en $B(0, 1)$, implicando así que $\mathcal{R}_F$ sería un segmento que pasa por el origen. Así, se puede escoger $w_1 \in \mathcal{R}_F$ tal que $-w_1 \in \mathcal{R}_F$. De nuevo, la Proposición 5.22 aseguraría que $w_1/|w_1|, -w_1/|w_1| \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ y por tanto $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ tendría puntos antipodales, llegando así a un absurdo, lo que termina por probar (5.29).

Paso 2: Sea $a_1^- = \tan(\beta_1^-) > 0$ y $a_1^+ = \tan(\beta_1^+) > 0$. Probemos que

$$\begin{aligned} \{z \in B(0,r_1) : U(z) = 0\} &\subseteq \{z \in B(0,r_1) : V(z) - a_1^{\pm} U(z) = 0\} \\ &\subseteq \{z \in B(0,r_1) : U(z) \geq 0\}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

En cuanto a la primera contención, si $z \in B(0,r_1)$ es tal que $U(z) = 0$, la ecuación (5.27) implica que $V(z) = 0$ y por tanto $V(z) - a_1^{\pm} U(z) = 0$. Para probar la segunda contención, razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existe $z_0 \in B(0,r_1)$ que cumple que $(V - a_1^- U)(z_0) = 0$ (resp. $(V - a_1^+ U)(z_0) = 0$) y $U(z_0) < 0$, entonces por la continuidad de $U(z)$, existe un entorno de z_0 de forma que:

$$U(z) < 0 \qquad z \in B(z_0, \rho) \subset B(0, r_1).$$

De acuerdo a la definición de β_1^- y β_1^+, y del hecho de que U es no nula en $B(z_0, \rho)$ se tiene que:

$$\beta_1^- \leq \arctan\left(\frac{V(z)}{U(z)}\right) \leq \beta_1^+, \qquad z \in B(z_0, \rho).$$

Nótese que $\arctan\left(\frac{V(z)}{U(z)}\right) = \arg(U(z) + iV(z))$. Al ser la tangente una función creciente, deducimos que:

$$a_1^- \leq \frac{V(z)}{U(z)} \leq a_1^+, \qquad z \in B(z_0, \rho).$$

Por ser U estrictamente negativa en $B(z_0, \rho)$, al multiplicar la desigualdad anterior por $U(z)$, se tiene que:

$$a_1^+ U(z) \leq V(z) \leq a_1^- U(z), \qquad z \in B(z_0, \rho).$$

De lo anterior, se sigue que $V - a_1^- U \leq 0$ (resp. $V - a_1^+ U \geq 0$) en $B(z_0, \rho)$. De nuevo, por el Principio del módulo máximo para funciones armónicas (resp. Principio del módulo mínimo para funciones armónicas), deducimos que $V - a_1^- U = 0$ (resp. $V - a_1^+ U = 0$) en $B(z_0, \rho)$. Por último, el Principio de identidad para funciones armónicas permite extender la igualdad anterior a todo el disco $B(0,1)$. Al igual que en el paso anterior, esto implicaría que $V(z) = a_1^- U(z)$ (resp. $V(z) = a_1^+ U(z)$) para $z \in B(0,1)$, y por tanto, $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ tendría puntos antipodales, llegando así una contradicción.

Paso 3: Como se verifica (5.31), teniendo en cuenta la Observación 5.29, estamos en condiciones de aplicar el Lema 5.28 a U y $V - a_1^- U$. Así, existe $\rho_1 > 0$ tal que $r_1 > \rho_1 > 0$ y

$$\{z \in B(0,\rho_1) : U(z) = 0\} = \{z \in B(0,\rho_1) : V(z) - a_1^- U(z) = 0\}.$$

Aplicando este mismo Lema a las funciones U y $V - a_1^+ U$, se tiene que existe $\rho_2 > 0$ tal que $r_1 > \rho_2 > 0$ y

$$\{z \in B(0,\rho_2) : U(z) = 0\} = \{z \in B(0,\rho_2) : V(z) - a_1^+ U(z) = 0\}.$$

Escogiendo $r_2 = \min\{\rho_1, \rho_2\} < r_1$, es evidente que se va a verificar

$$\begin{aligned} \{z \in B(0,r_2) : U(z) = 0\} &= \{z \in B(0,r_2) : V(z) = 0\} \\ &= \{z \in B(0,r_2) : V(z) - a_1^- U(z) = 0\} \\ &= \{z \in B(0,r_2) : V(z) - a_1^+ U(z) = 0\}, \end{aligned}$$

donde se ha tenido también en cuenta (5.27). Se deduce también, que necesariamente $U(z)(V(z) - a_1^- U(z))$ y $U(z)(V(z) - a_1^+ U(z))$ han de tener signo constante en $B(0,r_2)$. De hecho, necesariamente $U(z)(V(z) - a_1^- U(z)) \geq 0$ y $U(z)(V(z) - a_1^+ U(z)) \leq 0$ si $z \in B(0,r_2)$. Para comprobar esta afirmación, veamos que el resto de casos no pueden darse. Si ocurriera que $U(z)(V(z) - a_1^- U(z)) < 0$ en $B(0,r_2)$, entonces, nos encontramos con dos posibles escenarios:

Caso 1: Supongamos que $U(z) < 0$ y $V(z) - a_1^- U(z) > 0$ en $B(0,r_2)$. Sea $z \in B(0,r_2)$ tal que $U(z) + iV(z)$ pertenezca al tercer cuadrante. En este caso, entonces $V(z) > a_1^- U(z)$, lo cual implica que

$$\frac{V(z)}{U(z)} < a_1^- \Longrightarrow \arctan\left(\frac{V(z)}{U(z)}\right) < \beta_1^-.$$

De aquí se deduce que $\arg(U(z) + iV(z)) < \beta_1^-$, lo cual es imposible por la definición de β_1^-

Caso 2: Supongamos que $U(z) > 0$ y $V(z) - a_1^- U(z) < 0$ en $B(0, r_2)$. Sea $z \in B(0, r_2)$ tal que el elemento $U(z) + iV(z)$ pertenezca al tercer cuadrante. En este caso, entonces $V(z) < a_1^- U(z)$, lo cual implica que

$$\frac{V(z)}{U(z)} < a_1^- \Longrightarrow \arctan\left(\frac{V(z)}{U(z)}\right) < \beta_1^-.$$

De aquí se deduce que $\arg(U(z) + iV(z)) < \beta_1^-$, lo cual es imposible por la definición de β_1^-.

La demostración de que $U(z)(V(z) - a_1^- U(z)) > 0$ en $B(0, r_2)$ no puede darse, es completamente análoga pero llegando a una contradicción con β_1^+.

Por lo tanto, se da la siguiente contención

$$F(B(0, r_2)) \subseteq \{U + iV : (V - a_1^- U)(V - a_1^+ U) \leq 0\}, \tag{5.32}$$

ya que, si consideramos el elemento $U(z) + iV(z)$ con $z \in B(0, r_2)$, entonces, acabamos de demostrar que $U(z)(V(z) - a_1^- U(z)) \leq 0$ y $U(z)(V(z) - a_1^+ U(z)) \geq 0$. De aquí se deduce que, $U(z)^2(V(z) - a_1^- U(z))(V(z) - a_1^+ U(z)) \leq 0$ y por tanto, $(V(z) - a_1^- U(z))(V(z) - a_1^+ U(z)) < 0$ ya que $U(z)^2 \geq 0$, lo que demuestra la contención.

Finalmente, en el paso 1 se demostró que $e^{i\beta_1^-}, e^{i\beta_1^+} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$, por lo tanto, $e^{i(\beta_1^- - \pi)}, e^{i(\beta_1^+ - \pi)} \notin \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$, ya que $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ no contiene puntos antipodales.

Paso 4: Ahora, se procede a realizar la siguiente etapa en el proceso iterativo. Así, se definen

$$\begin{aligned} \beta_2^- &= \sup\left\{\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \exists R > 0, \text{ tal que } Re^{i\theta} \in F(B(0, r_2))\right\}, \\ \beta_2^+ &= \text{ínf}\left\{\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \exists R > 0, \text{ tal que } Re^{i\theta} \in F(B(0, r_2))\right\}. \end{aligned}$$

De forma completamente análoga, se puede demostrar que $e^{i\beta_2^-}, e^{i\beta_2^+}$. Además, como $e^{i(\beta_1^- - \pi)}$ y $e^{i(\beta_1^+ - \pi)}$ no pertenecen al conjunto cerrado $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$, entonces, se obtienen la segunda y cuarta desigualdad de

$$0 < \beta_1^- - \pi < \beta_2^- < \beta_2^+ < \beta_1^+ - \pi < \frac{\pi}{2}.$$

La primera y quinta desigualdad son consecuencia directa de (5.29) y la tercera se demuestra de igual manera que en el paso 1. Siguiendo el mismo procedimiento que en el paso 3, se puede escoger $0 < r_3 < r_2$ tal que

$$\begin{aligned}\{z \in B(0,r_3) : U(z) = 0\} &= \{z \in B(0,r_3) : V(z) = 0\}\\ &= \{z \in B(0,r_3) : V(z) - a_1^- U(z) = 0\}\\ &= \{z \in B(0,r_3) : V(z) - a_1^+ U(z) = 0\}\\ &= \{z \in B(0,r_3) : V(z) - a_2^- U(z) = 0\}\\ &= \{z \in B(0,r_3) : V(z) - a_2^+ U(z) = 0\},\end{aligned}$$

con $a_2^- = \tan(\beta_2^-)$ y $a_2^+ = \tan(\beta_2^+)$. De aquí se deduce que

$$F(B(0,r_3)) \subseteq \{U + iV : (V - a_2^- U)(V - a_2^+ U) \leq 0\}.$$

En el siguiente paso iterativo, se obtienen β_3^- y β_3^+ tales que

$$\pi + \beta_2^- < \beta_3^- < \beta_3^+ < \pi + \beta_2^+,$$

y $e^{i\beta_3^-}, e^{\beta_3^+} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$. Continuando este proceso, se obtienen dos sucesiones $\{\beta_n^-\}_{n=1}^\infty$ y $\{\beta_n^+\}_{n=1}^\infty$ tales que, $\{\beta_{2n-1}^-\}_{n=1}^\infty$ y $\{\beta_{2n}^-\}_{n=1}^\infty$ son dos sucesiones creciente, sin embargo, $\{\beta_{2n-1}^+\}_{n=1}^\infty$ y $\{\beta_{2n}^+\}_{n=1}^\infty$ son dos sucesiones decrecientes. Además, para cada n natural, $e^{i\beta_n^-}, e^{\beta_n^+} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ y se cumple que

$$0 < \beta_{2n-1}^- - \pi < \beta_{2n}^- < \beta_{2n}^+ < \beta_{2n-1}^+ - \pi < \frac{\pi}{2},$$

$$\pi < \pi + \beta_{2n}^- < \beta_{2n+1}^- < \beta_{2n+1}^+ < \pi + \beta_{2n}^+ < \frac{3\pi}{2}.$$

Como $\{\beta_{2n}^-\}_{n=1}^\infty$ y $\{\beta_{2n-1}^-\}_{n=1}^\infty$ son dos sucesiones crecientes y acotadas, tendrán límite. En particular, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \beta_{2n}^- = \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_{2n}^- = \beta^-$. Además, si se toman límites en la desigualdad $0 < \beta_{2_n-1}^- < \beta_{2n}^- + \pi$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \beta_{2n-1}^- \leq \beta^- + \pi$. Si se hace tender n a infinito en la desigualdad $0 < \beta_{2n}^- + \pi < \beta_{2n+1}^-$, entonces se obtiene que, $\beta^- + \pi \leq \lim_{n\to\infty} \beta_{2n+1}^-$. Evidentemente, las sucesiones $\{\beta_{2n-1}^-\}_{n=1}^\infty$, $\{\beta_{2n+1}^-\}_{n=1}^\infty$ son la misma (salvo quizás algún término), luego el Criterio del Sandwich asegura que $\lim_{n\to\infty} \beta_{2n-1} = \beta^- + \pi$. Análogamente, se puede demostrar que $\lim_{n\to\infty} \beta_{2n}^+ = \inf_{n\in\mathbb{N}} \beta_{2n}^+ = \beta^+$ y $\lim_{n\to\infty} \beta_{2n-1}^+ = \beta^+ + \pi$

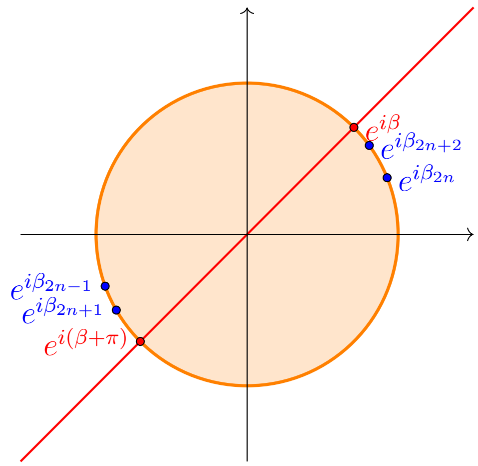


Figura 5.6: Esquema gráfico de la demostración.

Para concluir la demostración de este teorema, basta notar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $e^{\beta_{2n-1}^-}, e^{\beta_{2n}^-} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ y, por continuidad, $\lim_{n\to\infty} e^{\beta_{2n-1}^-} = e^{\beta^- + \pi}$ y $\lim_{n\to\infty} e^{\beta_{2n}^-} = e^{\beta^-}$. Como $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ es cerrado, entonces $e^{\beta^-+\pi}$, $e^{\beta^-} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$, luego contiene un par de puntos antipodales, llegando así a una contradicción con la suposición inicial. $\square$

Teorema 5.31 (Teorema de Lewis)**.** *Sean $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dos funciones armónicas tales que*

$$|u^+ - v^+| \leq C,$$
$$\max\{u, v\} \geq -C,$$

para alguna constante $C > 0$. Entonces u y v son constantes. Nótese que u^+ es la parte positiva de u, es decir, $u^+ : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $u^+(z) = \max\{u(z), 0\}$.

Demostración. Consideramos la transformación armónica $f = u + iv$. Si denotamos a

$$\mathcal{R}_{Le} = \{u + iv : |u^+ - v^+| \leq C,\ \max\{u, v\} \geq -C\}$$

entonces, por hipótesis, $\mathcal{R}_f \subseteq \mathcal{R}_{Le}$. El corolario 5.6 asegura que $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{R}_{Le})$. Si probamos que $\mathcal{D}(\mathcal{R}_{Le})$ no contiene puntos antipodales, entonces $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ tampoco, y por tanto, el Teorema 5.30 nos permitiría concluir que f sería constante, y consecuentemente u y v también. Para comprobar esto (véase la figura 5.7), sea $e^{i\theta} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_{Le})$. Por la Proposición 5.5, existe $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}_{Le}$ tal que $\lim_{n\to\infty}|w_n| = \infty$ y $\lim_{n\to\infty}|w_n|^{-1}w_n = e^{i\theta}$. Si llamamos $w_n = R_n(\cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n))$, entonces se deduce que $\cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n) \longrightarrow \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ y $R_n \longrightarrow \infty$ cuando $n \to \infty$ y además

$$|R_n \cos^+(\theta_n) - R_n \sin^+(\theta_n)| \leq C,$$
$$\max\{R_n \cos(\theta_n), R_n \sin(\theta_n)\} \geq -C.$$

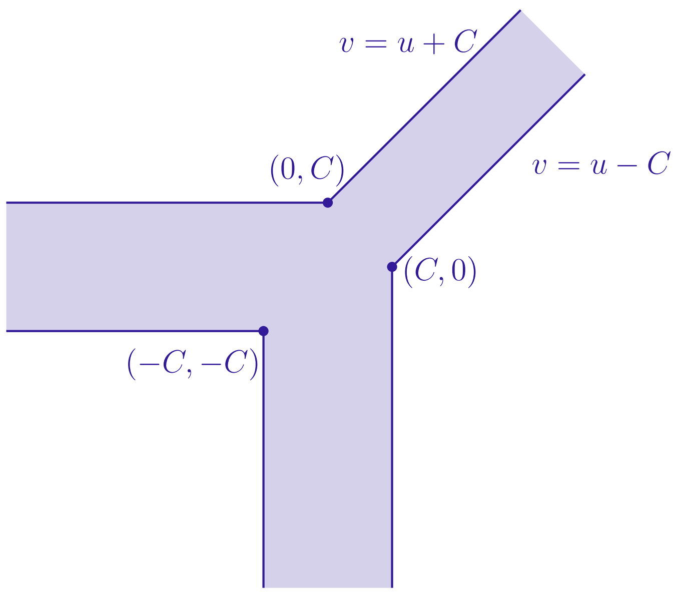


Figura 5.7: Región $\mathcal{R}_{Le}$.

Desarrollando estas expresiones, se obtiene que

$$\left|\frac{\cos(\theta_n) + |\cos(\theta_n)| - \sin(\theta_n) - |\sin(\theta_n)|}{2}\right| \leq \frac{C}{R_n},$$
$$\frac{\cos(\theta_n) + \sin(\theta_n) + |\cos(\theta_n) - \sin(\theta_n)|}{2} \geq \frac{-C}{R_n}.$$

Haciendo tender $n \to \infty$,

$$\cos(\theta) + |\cos(\theta)| - \sin(\theta) - |\sin(\theta)| = 0,$$
$$\cos(\theta) + \sin(\theta) + |\cos(\theta) - \sin(\theta)| \geq 0.$$

La primera expresión se verifica si y sólo si $\theta \in \{\pi/4\} \cup [\pi, 3\pi/2]$ y la segunda, si, y solo si, $\theta \in [0, \pi] \cup [3\pi/2, 2\pi]$. Si se hace la intersección de estos dos conjuntos, necesariamente $\theta \in \{\pi/4, \pi, 3\pi/2\}$. Por consiguiente, $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ no contienes puntos antipodales. $\square$

Proposición 5.32. *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función entera, tal que f no toma los valores 0 y 1. Entonces, las funciones $u = \log|f|$ y $v = \log|f - 1|$ son armónicas y además*

$$\begin{gathered}\big|\log^+|z| - \log^+|z-1|\big| \leq \log(2), \\ \text{máx}\big\{\log|z|, \log|z-1|\big\} \geq -\log(2),\end{gathered}$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Demostración. Como f no se anula, el Teorema Homotópico de Cauchy asegura que f admite logaritmo analítico, es decir, existe $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función entera tal que $f(z) = e^{\phi(z)}$. Por tanto, $u(z) = \log|f(z)| = \operatorname{Re}(\phi(z))$. Al tratarse u de la parte real de una función entera, la Proposición 4.3 asegura que u es armónica. Análogamente para v.

Para demostrar la primera desigualdad, teniendo en cuenta que

$$\log^+|z| = \text{máx}\{0, \log|z|\} = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in B^*(0,1), \\ \log|z| & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus B(0,1), \end{cases}$$

y que

$$\log^+|z-1| = \text{máx}\{0, \log|z-1|\} = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in B^*(1,1), \\ \log|z-1| & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus B(1,1), \end{cases}$$

distinguimos varios casos:

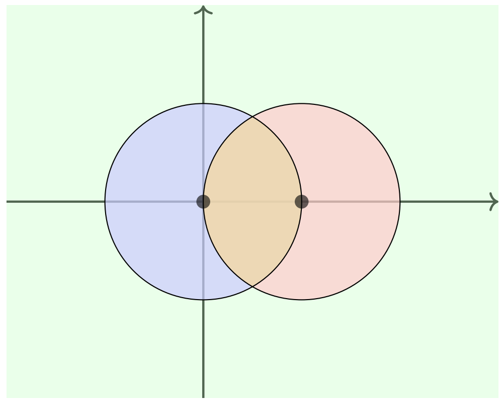


Figura 5.8: Geometría del conjunto en función de la distinción de casos.

Caso 1: Si $z \in B^*(0,1) \cap B^*(1,1)$, entonces se tiene.

Caso 2: Si $z \in B^*(0,1) \cap (\mathbb{C} \setminus B(1,1))$, entonces

$$\big|\log^+|z| - \log^+|z-1|\big| = \big|0 - \log|z-1|\big| = \log|z-1|.$$

Como $|z-1| \leq |z| + 1 < 2$, ya que $|z| < 1$, se tiene que $\log|z-1| < \log(2)$.

Caso 3: Si $z \in B^*(1,1) \cap (\mathbb{C} \setminus B(0,1))$, entonces

$$\big|\log^+|z| - \log^+|z-1|\big| = \big|\log|z|\big| = \log|z|.$$

Como $|z| \leq |z-1| + 1 < 2$, ya que $|z-1| < 1$, se tiene que $\log|z| < \log(2)$.

Caso 4: Si $z \in \mathbb{C} \setminus \big(B(0,1) \cup B(1,1)\big)$, se tiene que

$$\big|\log^+|z| - \log^+|z-1|\big| = \big|\log|z| - \log|z-1|\big|.$$

Se distinguen tres casos:

Caso 4.1: Si $|z| > |z-1|$, entonces $\log|z| > \log|z-1|$, y por tanto

$$\big|\log^+|z| - \log^+|z-1|\big| = \log\left(\frac{|z|}{|z-1|}\right).$$

Ahora, como

$$\frac{|z|}{|z-1|} \leq \frac{|z-1|}{|z-1|} + \frac{1}{|z-1|} = 1 + \frac{1}{|z-1|} \leq 2,$$

ya que $1/|z-1|\leq 1$, pues $z \in \mathbb{C} \setminus B(1,1)$. Se deduce entonces que $\log\left(\frac{|z|}{|z-1|}\right) \leq \log(2)$.

Caso 4.2: Si $|z|=|z-1|$, es trivial pues $0 < \log(2)$.

Caso 4.3: Si $|z-1|<|z|$, entonces

$$\big|\log^+|z|-\log^+|z-1|\big| = \log\left(\frac{|z-1|}{|z|}\right).$$

Teniendo presente que

$$\frac{|z-1|}{|z|} \leq \frac{|z|+1}{|z|} = 1 + \frac{1}{|z|} \leq 2,$$

se deduce lo deseado. La última desigualdad viene de que $z \in \mathbb{C} \setminus B(0,1)$.

En suma, $\big|\log^+|z|-\log^+|z-1|\big| \leq \log(2)$.

Para demostrar la segunda desigualdad, pongamos

$$\max\{\log|z|, \log|z-1|\} = \frac{\log|z| + \log|z-1| + |\log|z| - \log|z-1||}{2}.$$

A continuación, se distinguen varios casos:

Caso 1: Si $z \in \mathbb{C} \setminus \big(B(0,1) \cup B(1,1)\big)$, entonces $\log|z| > 0$ y $\log|z-1| > 0$, por tanto, se obtiene la desigualdad.

Caso 2: Si $z \in B^*(0,1) \cap (\mathbb{C} \setminus B(1,1))$, entonces $\log|z| < 0$ y $\log|z-1| > 0$, luego

$$\max\{\log|z|, \log|z-1|\} = \log|z-1|,$$

y se tendría.

Caso 3: Si $z \in B^*(1,1) \cap (\mathbb{C} \setminus B(0,1))$, entonces $\log|z| > 0$ y $\log|z-1| < 0$, luego

$$\max\{\log|z|, \log|z-1|\} = \log|z|,$$

y se tendría.

Caso 4: Si $z \in B^*(0,1) \cap B^*(1,1)$, se distinguen tres casos más:

Caso 4.1: Si $|z| < |z-1|$, entonces $\max\{\log|z|, \log|z-1|\} = \log|z-1|$.

En esta zona, se cumple que $\mathrm{dist}(z, 1) > \mathrm{dist}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, es decir,

$$|z-1| > \left|1-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, $\log|z-1| > -\log(2)$.

Caso 4.2: Si $|z| = |z-1|$, entonces $\max\{\log|z|, \log|z-1|\} = \log|z|$.

Análogo al caso anterior, $|z| \geq \frac{1}{2}$, por tanto $\log|z| > -\log(2)$.

Caso 4.3 Si $|z| > |z-1|$, entonces $\max\{\log|z|, \log|z-1|\} = \log|z|$.

Análogo al caso anterior, $|z| \geq \frac{1}{2}$, luego $\log|z| > -\log(2)$. $\square$

Teorema 5.33 (Pequeño Teorema de Picard). *Si f es una función entera que omite dos valores, entonces es constante.*

Demostración. Como en la demostración dada de este mismo resultado en el Teorema 2.3, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que f omite los valores 0 y 1. Entonces, las funciones logarítmicas obtenidas de la Proposición 5.32 cumplen las hipótesis del Teorema de Lewis, lo que nos permite concluir que $\log|f|$ va a ser constante. De esta manera, $|f|$ es constante en $\mathbb{C}$, en particular, está acotada, por lo que el Teorema de Liouville nos permite concluir que f es constante. $\square$

Bibliografía

[1] Ash, R. B., and Novinger, W. P. *Complex Variables*, 2 ed. Dover Books on Mathematics. Dover Publications Inc., December 2007.

[2] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable I*, 2 ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY, 1978.

[3] Galindo Soto, F., Gómez Pérez, J., Sanz Gil, J., and Tristán Vega, L. A. *Guía Práctica De Variable Compleja y Aplicaciones.* Ediciones Universidad de Valladolid, September 2019.

[4] González Llorente, J. On the range of harmonic maps in the plane. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica 45*, 2 (2020).

[5] González Llorente, J. Cuatro variaciones sobre el teorema de Picard. *LA GACETA DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA 26*, 2 (2023), 279–297.

[6] Lewis, J. L. Picard's Theorem and Rickman's Theorem by Way of Harnack's Inequality. *Proceedings of the American Mathematical Society 122*, 1 (1994), 199–206.

[7] Montel, P. Sur les suites infinies de fonctions. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 24* (1907), 233–334.

[8] Montel, P. Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionelles dans un domaine. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 29* (1912), 487–535.

[9] Picard, E. Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 89* (1879), 745–747.

[10] Picard, E. Sur une proprieté des fonctions entières. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 88* (1879), 1024–1027.

[11] Ransford, T. *Potential Theory in the Complex Plane*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.

[12] Wen, Z., Wu, L., and Zhang, Y. Set of zeros of harmonic functions of two variables. In *Harmonic Analysis* (1991), Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 196–203.