



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Matemáticas**

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS  
DE LA TEORÍA DE LA SEÑAL**

**Autor: Miguel Franco Hernando**

**Tutor: Félix Galindo Soto**

**Año 2024**



## Resumen

La teoría de la señal estudia las señales y los sistemas que las transmiten. Desde el punto de vista matemático, una señal continua se corresponde con el concepto de función. Por otro lado, una señal discreta está asociada a una sucesión. El objetivo de este trabajo es presentar la teoría de filtros. Estos objetos se corresponden con aplicaciones lineales, continuas e invariantes bajo traslaciones. Se presentarán los filtros analógicos gobernados por ecuaciones diferenciales, tanto para funciones como para distribuciones. El empleo de este último tipo de objetos permitirá obtener resultados más generales. Además, se introducirán los filtros discretos. Finalmente, se desarrollará brevemente la transformada  $z$ , herramienta que permite caracterizar los filtros discretos regidos por ecuaciones en diferencias. Al final de cada sección se incluye un ejemplo práctico para ilustrar la teoría desarrollada.

## Abstract

Signal theory studies signals and the systems that transmit them. From a mathematical point of view, a continuous signal corresponds to the concept of a function, while a discrete signal is associated with a sequence. The aim of this work is to present the theory of filters. These objects correspond to linear, continuous, and translation-invariant mappings. Analog filters governed by differential equations will be presented, both for functions and distributions. The use of the latter type of objects will allow for more general results. Additionally, discrete filters will be introduced. Finally, the  $z$  transform, a tool that characterizes discrete filters governed by difference equations, will be briefly developed. At the end of each section, a practical example is included to illustrate the developed theory.

*A mi familia, por ser mi pilar estos cinco años. Gracias por todo.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Conceptos Fundamentales de la Teoría de la Señal</b>	<b>9</b>
1.1. Definiciones y terminología . . . . .	10
1.2. Operaciones con señales . . . . .	11
1.2.1. Desplazamiento temporal . . . . .	11
1.2.2. Inversión temporal . . . . .	11
1.3. Sistemas . . . . .	12
1.3.1. Filtros . . . . .	14
<b>2. Filtros Analógicos gobernados por una ecuación diferencial</b>	<b>19</b>
2.1. Filtros analógicos gobernados por una ecuación diferencial . .	20
2.2. Filtro RC revisitado . . . . .	30
<b>3. Filtros y Distribuciones</b>	<b>33</b>
3.1. Preliminares . . . . .	34
3.2. Filtros analógicos revisitados . . . . .	36
3.2.1. Soluciones temperadas de ecuaciones diferenciales li- neales . . . . .	38
3.2.2. Filtro RC pasa alta . . . . .	44
<b>4. Filtros Discretos y Transformada <math>z</math></b>	<b>49</b>
4.1. Señales discretas . . . . .	50
4.1.1. Filtros discretos . . . . .	55
4.2. Transformada $z$ . . . . .	61
4.2.1. Propiedades . . . . .	63
4.3. Aplicación a filtros discretos . . . . .	67
4.3.1. Filtro RC discreto . . . . .	68
<b>A.</b>	<b>71</b>
A.1. Transformada de Fourier . . . . .	71

A.2. Convolución y transformada de Fourier . . . . .	72
A.3. Distribuciones . . . . .	74
A.4. Convolución de distribuciones . . . . .	75
A.5. Transformada de Fourier y distribuciones . . . . .	77
A.6. Resultados adicionales . . . . .	78

# Introducción

Las señales son fuentes de información de diversos fenómenos que aparecen en una gran multitud de áreas y campos: comunicaciones, aeronáutica, circuitos eléctricos... Gracias a la proliferación de los semiconductores y la electrónica, desde el siglo XX el uso y procesamiento de señales ha crecido de manera extraordinaria, siendo una de las bases sobre las que se asienta la civilización moderna.

Las señales, funciones de una o más variables independientes, son modificadas por sistemas. Estos últimos reciben una entrada para, tras procesarla, devolver una señal de salida con un comportamiento deseado. Para el presente lector, si se encuentra leyendo este documento en formato digital, sin darse cuenta está empleando multitud de señales digitales que son procesadas por varios sistemas incluidos en su ordenador.

En la práctica, los expertos en teoría de la señal emplean conceptos y recursos matemáticos con considerable intuición basados en la experiencia. Sin embargo, no hacen uso del desarrollo formal que esperaría un matemático en cualquier ámbito. Con esto en mente, este trabajo trata de justificar y desarrollar parte de la teoría empleada en esta rama del conocimiento de una manera rigurosa.

Debido a la gran cantidad de herramientas y conceptos incluidos dentro de la teoría de la señal, ha sido necesario hacer una selección de contenidos para incluir en este trabajo. Se ha optado por desarrollar la teoría de filtros. Estos elementos, desde el punto de vista matemático, son aplicaciones lineales, continuas e invariantes bajo traslaciones entre espacios vectoriales de señales. En la práctica, son sistemas que permiten eliminar ciertas componentes o características de la señal de entrada. Para este tipo de sistemas es posible expresar la salida a través del producto de convolución

$$y = h * x,$$

donde  $x$  es la señal de entrada e  $y$  la de salida. Por otro lado, la señal  $h$  es característica de cada filtro. La convolución anterior tendrá sentidos diferen-

tes en función del tipo de señales que se manejen, como quedará patente a lo largo del trabajo.

Atendiendo a un punto de vista teórico, una señal continua se corresponde con el concepto de función, mientras que una señal discreta se asocia con una sucesión. En el capítulo primero se introducen estos conceptos, al igual que varios términos básicos de la teoría de la señal.

Los filtros analógicos regidos por ecuaciones diferenciales, capaces de procesar señales continuas, se analizan en los capítulos segundo y tercero. En este desarrollo quedarán patentes varias limitaciones causadas por el uso de funciones, lo que motivará el empleo de las denominadas distribuciones o funciones generalizadas. Finalmente, el capítulo cuarto trata los filtros discretos. Además, se incluye una introducción a la transformada  $z$ , herramienta que permite el estudio de filtros gobernados por ecuaciones en diferencias.

Con relación a las fuentes, la referencia más empleada ha sido el libro de C. Gasquet y P. Witomski [GW99], sobre todo para las secciones 2 y 3. A diferencia de libros de carácter más técnico, la fuente anterior analiza los filtros desde un punto de vista formal. Para obtener una visión más práctica de las ideas tratadas, el libro de Alan V. Oppenheim [Oea97] ha sido fundamental. Esta referencia ha permitido comprobar como se tratan las señales y los sistemas de una manera esencialmente práctica.

En cuanto a la organización del trabajo, es importante destacar que se ha incluido un índice alfabético al final del documento. Tiene la intención de facilitar la lectura, recogiendo la mayoría de conceptos tratados para así poderlos localizar de una manera rápida y sencilla. Por otro lado, a lo largo del trabajo se hará uso frecuentemente de resultados referentes a la transformada de Fourier y la convolución, tanto de funciones como de distribuciones. Por esta razón, se ha decidido incluir un apéndice donde recogerlos.

Junio 2024.  
Miguel Franco Hernando.

# Capítulo 1

## Conceptos Fundamentales de la Teoría de la Señal

El principal objetivo de este capítulo es introducir de manera formal todos los conceptos básicos de la teoría de la señal, para posteriormente realizar su desarrollo completo en los capítulos venideros.

Dentro de las señales es posible diferenciar entre dos tipos: señales deterministas y aleatorias. Las primeras se refieren a señales cuya evolución temporal es completamente conocida por el observador, como la onda emitida por un generador. En cambio, en las señales aleatorias, solo se conoce su evolución en términos estadísticos. Un ejemplo puede ser la cotización de un índice bursátil. El estudio de las señales deterministas es realizado con las herramientas del análisis matemático mientras que en las señales aleatorias se usan conceptos de la teoría de la probabilidad. En este texto solo se tratarán señales del primer tipo.

En cuanto a las fuentes, se han seleccionado y completado resultados de diferentes referencias, fundamentalmente los capítulos uno y dos de [GW99], capítulo dos de [Sun15] y las dos primeras secciones de [Car11].

De esta forma, en este capítulo se presentan las definiciones de señales continuas y discretas, así como varias de sus propiedades esenciales. Además, se exponen las operaciones básicas para señales. Finalmente, se introduce el concepto de sistema como aplicación entre espacios de señales, tratando el caso específico de los filtros y presentando la resolución de un ejemplo práctico.

## 1.1. Definiciones y terminología

**Definición 1.1.** Una *señal continua* es una función compleja de variable real  $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Habitualmente una señal de este tipo se escribe como  $s(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , o simplemente  $s(t)$ . En general, la variable independiente  $t$  se interpreta como tiempo, aunque esta no lo sea en realidad.

**Definición 1.2.** Una *señal discreta* es una función compleja de variable real  $s: I \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $I$  denota a los conjuntos  $\mathbb{N}$  o  $\mathbb{Z}$ . En este texto será siempre  $I = \mathbb{Z}$ . Se suelen denotar por  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  o simplemente  $s(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Observación 1.3.** Es posible obtener señales discretas a través de señales continuas en un proceso llamado *muestreo*. Es necesario fijar un periodo de muestreo  $T$ , de tal manera que si  $s$  es una señal continua, se toma  $s_n = s(nT)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Dentro de las señales existen algunas subclases de mayor importancia debido a su extenso uso en la práctica.

**Definición 1.4.** Una señal es *periódica* si existe  $T > 0$  tal que

$$s(t + T) = s(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En este caso, el menor  $T$  que satisface la condición anterior recibe el nombre de *periodo* de la señal.

Este tipo de señales repiten su valor sobre un periodo de manera indefinida. Las señales que no satisfacen esta condición reciben el nombre de *no periódicas*.

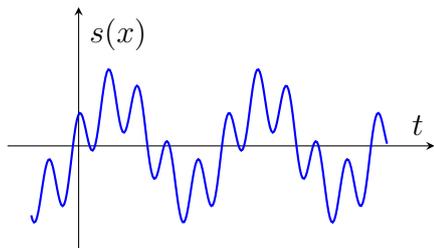


Figura 1.1: Señal periódica

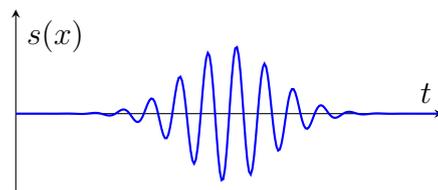


Figura 1.2: Señal no periódica

**Definición 1.5.** Se dice que una señal es *causal* si

$$s(t) = 0 \text{ para } t \leq 0.$$

Este tipo de señales son fundamentales en contextos aplicados, ya que en esencia son las empleadas en la práctica. Esto es debido a que cuentan con un “inicio” definido relacionado con el momento de generación de la señal.

## 1.2. Operaciones con señales

Antes de avanzar en conceptos más profundos dentro de la teoría de la señal es importante destacar varias operaciones comunes realizadas con señales. En los siguientes apartados se introducen este tipo de operaciones. Si no se explicita lo contrario la definición será válida tanto para señales continuas como discretas.

### 1.2.1. Desplazamiento temporal

Dada una señal  $s(t)$  y un valor temporal fijo  $t_0$ , la señal  $s(t-t_0)$  representa un desplazamiento de la señal original. Si  $t_0 > 0$  la señal desplazada recibe el nombre de retraso. Por el contrario, si  $t_0 < 0$  estamos ante un avance. Para señales discretas es condición necesaria que  $t_0$  sea un número entero.

**Definición 1.6.** Se define el *operador traslación* como:

$$\tau_a s(t) = s(t - a).$$

Es evidente que para señales continuas  $a$  puede tomar cualquier valor real, mientras que para señales discretas debe ser múltiplo del intervalo de muestreo.

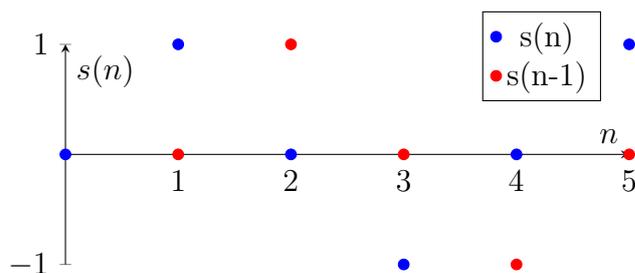


Figura 1.3: Señal original y señal retrasada

### 1.2.2. Inversión temporal

Si la variable independiente  $t$  se reemplaza por  $-t$ , respectivamente, se obtiene una imagen reflejada de la señal respecto al eje vertical. De esta forma se obtiene  $s(-t)$  a través de lo que se llama *inversión temporal*.

### 1.3. Sistemas

En la teoría de la señal se denomina *sistema* a cualquier aparato o dispositivo en el que es posible distinguir una señal de entrada o de salida. Es importante destacar que la señal de salida y la de entrada no tienen por qué ser del mismo tipo. Un diagrama de la situación se refleja en la figura 1.4.

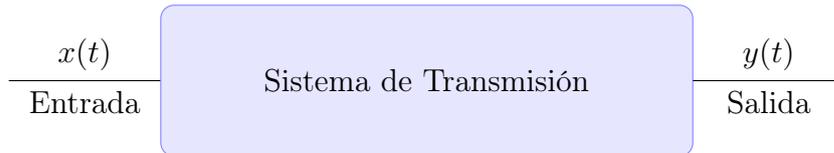


Figura 1.4: Esquema de un sistema

Este concepto es fundamental, ya que constantemente se trabaja con aparatos que modifican una señal de entrada con unos propósitos concretos: atenuar la señal, eliminar ciertas componentes, modificar su frecuencia... Generalmente, no es necesario comprender como funciona físicamente dicho sistema, sino realizar el estudio de cómo se transforma la señal de entrada en la de salida. De esta manera es posible escribir la siguiente definición:

**Definición 1.7.** Sean  $X$  e  $Y$  los conjuntos de señales de entrada y salida respectivamente. Se define un *sistema* como una aplicación:

$$A: X \rightarrow Y.$$

Además, si ambos conjuntos están dotados de estructura de espacio vectorial (real o complejo) es posible hablar de linealidad. Se dice que el sistema  $A$  es *lineal* si

$$A(x + u) = A(x) + A(u) \quad \text{y} \quad A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Los sistemas lineales son de suma importancia en la práctica, ya que representan los sistemas más básicos con los que trabajar, no solo desde el punto de vista formal, sino desde el punto de vista físico. Por ejemplo, los filtros pasa-alta o pasa-baja son sistemas lineales esenciales en el procesamiento de señales, permitiendo seleccionar o eliminar ciertas frecuencias según sea necesario. Además, estos sistemas obedecen al *principio de superposición*, que establece que la respuesta de un sistema lineal a la suma de dos señales de entrada es la suma de las respuestas individuales a cada señal por separado. Este principio facilita el análisis de señales que pueden expresarse como suma de componentes más simples, lo que resulta de suma utilidad en aplicaciones prácticas.

Dentro de los sistemas es posible realizar varias distinciones en función de sus propiedades.

**Definición 1.8.** Se dice que un sistema es *causal* o *realizable* si la igualdad de dos señales de entrada hasta un tiempo  $t_0$  implica la igualdad de sus señales de salida hasta el tiempo  $t_0$ . Esto es:

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \text{para } t < t_0 \quad \Rightarrow \quad Ax_1(t) = Ax_2(t) \quad \text{para } t < t_0.$$

Esta propiedad surge de manera natural para un sistema físico, ya que la causalidad dice que la respuesta en un instante de tiempo  $t$  depende solo de lo que ha ocurrido hasta ese instante. En particular, que el sistema no responde antes de recibir una entrada.

**Definición 1.9.** Se dice que un sistema es *invariante* o *estacionario* si una traslación temporal en la señal de entrada implica también una traslación temporal igual en la señal de salida:

$$x(t) \mapsto y(t) \quad \Longrightarrow \quad x(t - a) \mapsto y(t - a).$$

Ahora, recordando la definición del operador traslación (def. 1.6), se tiene que  $\tau_a A = A \tau_a$ . Por tanto, dado un sistema invariante  $A$ , este conmuta con todas las traslaciones. Se recuerda que para señales discretas  $a$  solo puede ser un número entero.

Otra propiedad asociada a los sistemas es la continuidad.

**Definición 1.10.** Se dice que un sistema  $A: X \rightarrow Y$  es *continuo* si la sucesión  $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiende a  $Ax$  en  $Y$  cuando  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiende a  $x$  en  $X$ . Por tanto, se hará uso de la continuidad secuencial.

En la definición anterior es importante notar que los espacios  $X$  e  $Y$  deben estar dotados de una noción de convergencia. A lo largo del trabajo se hará uso de varios espacios de señales, por lo que la continuidad vendrá dada de formas diversas. En cada espacio particular se detallará este concepto.

Finalmente, otra característica de los sistemas es la estabilidad.

**Definición 1.11.**

- (I) Un sistema analógico (entre espacios de señales continuas)  $A: X \rightarrow Y$  es *estable* si existe  $M > 0$  tal que  $\|Af\|_{\infty} \leq M\|f\|_{\infty}$  para cualquier  $f \in X \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ .

- (II) Un sistema discreto (entre espacios de señales discretas)  $D: X \rightarrow Y$  se dice que es *estable* si existe  $M > 0$  tal que dada cualquier señal  $x \in X \cap l^\infty$  se tiene que  $\|Dx\|_\infty \leq M\|x\|_\infty$ .

Estos sistemas, también conocidos como BIBO (bounded input - bounded output), transforman señales acotadas en señales acotadas. En la práctica son sistemas deseables, ya que son más predecibles y seguros. Esto se debe a que al introducir una señal “controlada” al sistema, se espera que la salida también lo sea.

### 1.3.1. Filtros

Con todos los conceptos anteriores es posible trabajar con uno de los sistemas esenciales en la teoría de la señal: los filtros.

**Definición 1.12.** Un *filtro* es un sistema continuo, invariante y lineal.

#### Filtro RC

El concepto de filtro está muy ligado al producto de convolución como se verá más adelante. Para ilustrar este hecho, presentamos un filtro RC. Este tipo de filtros dejan pasar señales con frecuencias por debajo de un umbral y atenúan aquellas que están por encima. Suelen recibir el nombre de filtros pasa baja. Un esquema de este circuito se representa en la figura 1.5.

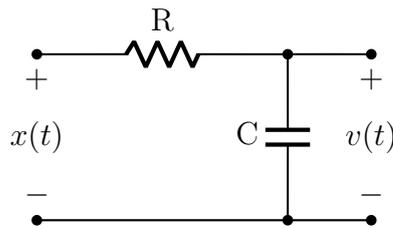


Figura 1.5: Circuito RC, filtro pasa baja

A nivel físico el filtro está formado por una resistencia y condensador en serie. Además, en este caso, la señal de entrada es  $x(t)$ , dada por el potencial de entrada del circuito. La de salida, dada por  $v(t)$ , se corresponde con la caída de potencial en el condensador. Estas señales están ligadas por la siguiente ecuación diferencial:

$$RCv'(t) + v(t) = x(t).$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden. En la asignatura *Ecuaciones Diferenciales* se prueba que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

tiene solución en  $\mathbb{R}$  y es única si  $a(t)$  y  $b(t)$  son continuas en  $\mathbb{R}$  (ver [FP92, págs 44-46]). Por tanto, se realiza la suposición de que  $x(t)$ , la señal de entrada, es continua. Si se escribe la señal de salida como  $v(t) = w(t)e^{-\frac{t}{RC}}$  y se introduce en la ecuación anterior es posible expresar  $w'(t)$  en función de  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= RC \left( w'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{1}{RC}w(t)e^{-\frac{t}{RC}} \right) + w(t)e^{-\frac{t}{RC}} \\ &= RCw'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - w(t)e^{-\frac{t}{RC}} + w(t)e^{-\frac{t}{RC}} \\ &= RCw'(t)e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned}$$

Lo que permite obtener una expresión para  $w'(t)$ :

$$w'(t) = \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}x(t).$$

Ahora, si asumimos que la señal  $x(t)$  es tal que el segundo miembro es integrable en  $(-\infty, t)$  para cualquier  $t$ , se obtiene que:

$$w(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{\frac{s}{RC}} x(s) ds + K_x.$$

donde el subíndice en la constante  $K$  denota que esta depende de la señal de entrada  $x$ . Recordando la relación entre  $v(t)$  y  $w(t)$ :

$$v(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds + K_x e^{-\frac{t}{RC}}.$$

De esta manera se obtiene una solución para cada  $x(t)$ . Falta resolver el inconveniente de la constante  $K_x$ , ya que nos gustaría obtener una expresión genérica para  $v(t)$ . La manera de solventar este problema viene dada por la necesidad de que el filtro sea realizable. Esta imposición viene desde el punto de vista práctico, y es que el circuito eléctrico es intrínsecamente realizable. Si se impone que la señal de entrada sea causal, situación habitual en la práctica, se requiere que la salida  $v(t)$  se anule para tiempos negativos. Para que esto pase,  $K_x$  debe ser cero:

$$Ax(0) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{s}{RC}} x(s) ds + K_x e^{-\frac{0}{RC}} = K_x,$$

ya que la señal  $x$  es causal.

Para el lector con conocimientos de circuitos eléctricos este hecho no le debería suponer ninguna sorpresa, ya que en el circuito de partida se encuentra un condensador. Este elemento, para el instante en el que la señal de entrada toma un valor distinto de cero por primera vez, tendrá una diferencia de potencial nula entre sus extremos, actuando como un circuito abierto e impidiendo la circulación de corriente en un primer instante.

Finalmente, es posible expresar la respuesta del filtro como

$$v(t) = Ax(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds.$$

Gracias a todas las consideraciones anteriores, el espacio de las señales de entrada  $X$  para nuestro ejemplo será el de las señales causales acotadas continuas. Se impone la acotación para simplificar los cálculos posteriores. El espacio de llegada  $Y$  será el espacio de las señales acotadas. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} A: (X, \|\cdot\|_{\infty}) &\rightarrow (Y, \|\cdot\|_{\infty}) \\ x &\mapsto A(x) \end{aligned}$$

es el sistema de estudio. En todo lo anterior hemos hecho referencia a que es un filtro sin comprobar su definición. La linealidad es consecuencia de la linealidad de la integral. Para la invarianza basta escribir

$$\begin{aligned} A(\tau_a x)(t) &= \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s-a) ds \\ &= \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{t-a} e^{-\frac{(t-a)-u}{RC}} x(u) du = \tau_a(Ax)(t). \end{aligned}$$

Finalmente, resta analizar la continuidad. De esta forma, es necesario estudiar la norma de  $\|Ax\|_{\infty}$ :

$$\begin{aligned} |Ax(t)| &= \left| \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} x(s) ds \right| \leq \|x\|_{\infty} \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} ds \\ &\leq \|x\|_{\infty} \frac{1}{RC} \left( RC e^{-\frac{t-s}{RC}} \Big|_{s=-\infty}^{s=t} \right) = \|x\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el operador  $A$  es continuo como aplicación entre  $(X, \|\cdot\|_{\infty})$  e  $(Y, \|\cdot\|_{\infty})$ . Con todo lo anterior el sistema  $A$  es, en efecto, un filtro.

Es interesante considerar la siguiente función:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t),$$

donde  $u(t)$  es la función de Heaviside, que viene dada por

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Esta última función es acotada. De esta forma, la respuesta del filtro se puede escribir como:

$$Ax(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)ds = (h * x)(t),$$

siempre y cuando la integral tenga sentido (de manera general se abordará en los capítulos siguientes). Las expresiones de este tipo reciben el nombre de *producto de convolución*. Cuando es posible escribir la salida de un sistema de esta manera, estamos frente a un *sistema convolucional*. La función  $h$  recibe el nombre de *respuesta impulso* y caracteriza al filtro, ya que conociendo esta función y dada cualquier señal de entrada, dentro de espacios bastantes generales, es posible calcular la salida del sistema, como se verá más adelante.



## Capítulo 2

# Filtros Analógicos gobernados por una ecuación diferencial

El capítulo actual versa sobre los filtros analógicos gobernados por una ecuación diferencial. Esta situación se da en una gran variedad de escenarios en las aplicaciones técnicas: filtros pasa baja, pasa alta, pasa banda... Estos elementos son capaces de seleccionar ciertas frecuencias y rechazar otras según se desee. En este contexto, el punto de vista formal suele quedar en un segundo plano, olvidando las justificaciones necesarias en los procesos de cálculo. Este apartado del trabajo trata de formalizar este proceso.

Por tanto, en este capítulo se introduce el *espacio de Schwartz*, objeto fundamental en el desarrollo de la teoría de la transformada de Fourier, el cual nos permite trabajar de manera adecuada. De igual manera se define la *función de transferencia*, que se representa por  $H$ , la cual permite caracterizar cada filtro y obtener la señal de respuesta en una gran variedad de casos. Quedarán patentes las limitaciones de las funciones en el estudio de los filtros, limitando el estudio a los casos en los que  $H \in L^1(\mathbb{R})$  o  $H \in L^2(\mathbb{R})$ . Finalmente, se analiza el caso del filtro *RC* haciendo uso de las herramientas desarrolladas a lo largo del capítulo.

La principal referencia bibliográfica ha sido el capítulo 24 de [GW99], aunque han sido de utilidad resultados específicos de [Rud99].

## 2.1. Filtros analógicos gobernados por una ecuación diferencial

Para este tipo de filtros la relación entre la señal de entrada y de salida viene dada por una ecuación diferencial de la siguiente manera,

$$\sum_{k=0}^q b_k g^{(k)} = \sum_{j=0}^p a_j f^{(j)}, \quad a_p \cdot b_q \neq 0, \quad (2.1)$$

donde  $f$  será nuestra señal de entrada y  $g = A(f)$  la señal de salida. Se recuerda, de la asignatura *Ecuaciones Diferenciales*, que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} b_q g^{(q)}(t) + b_{q-1} g^{(q-1)}(t) + \dots + b_1 g'(t) + b_0 g(t) = b(t), \\ g(t_0) = g_1, g'(t_0) = g_2, \dots, g^{(q-1)}(t_0) = g_q, \end{cases}$$

tiene solución en  $\mathbb{R}$  y es única siempre que  $b(t)$  sea continua en  $\mathbb{R}$  (ver [FP92, págs 70 y 93]).

Antes de realizar el correspondiente análisis para este tipo de filtros conviene fijar los espacios de señales de entrada y salida con los que se va a trabajar. En este contexto es necesario dar las definiciones que aparecen a continuación.

**Definición 2.1.** Una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice que es de *decrecimiento rápido* si verifica que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p f(x)| = 0,$$

para cualquier  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Definición 2.2.** Se representa por  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , o simplemente  $\mathcal{S}$ , al espacio vectorial de funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que cumplen las siguientes propiedades:

- (I)  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .
- (II)  $f$  y todas sus derivadas son de decrecimiento rápido.

Este espacio recibe el nombre de *espacio de Schwartz*.

En el contexto de este trabajo es necesario detallar la noción de convergencia en este espacio, lo que precisaría definir una topología (de espacio vectorial topológico). Esto sería posible a través de una familia de seminormas en un proceso complejo (se puede consultar en [Mit13, págs 552-553]). Por esta razón es más operativo en la práctica describir la continuidad en términos secuenciales.

**Definición 2.3.** Una sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  tiende a  $f$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p (f_n^{(q)}(x) - f^{(q)}(x))| = 0$$

para todo  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ . En esta situación, escribimos  $f_n \rightarrow f$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Este espacio goza de gran importancia en el contexto de la transformada de Fourier, siendo invariante bajo esta transformación. En el apéndice A se pueden encontrar varios resultados básicos sobre la transformada de Fourier y este espacio.

Con lo anterior, para el estudio de la ecuación (2.1) se va a suponer que la señal de entrada cumple que  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . El objetivo es encontrar una solución  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Además, con los coeficientes de (2.1), es posible definir los siguientes polinomios,

$$P(z) = \sum_{j=0}^p a_j z^j \quad \text{y} \quad Q(z) = \sum_{k=0}^q b_k z^k.$$

**Proposición 2.4.** Si  $P/Q$  no tiene polos en el eje imaginario y  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , entonces la ecuación diferencial (2.1) tiene una única solución  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . En este caso, el sistema

$$\begin{aligned} A: \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto g \end{aligned}$$

es un filtro.

*Demostración.*

A lo largo de la demostración se usarán varias propiedades de la transformada de Fourier. Estas se encuentran enunciadas en las proposiciones A.3 y A.4.

Se analiza, primeramente, la unicidad. Si dicha solución existe, es posible realizar la transformada de Fourier a los dos miembros de la ecuación y al aplicar las propiedades de esta transformada se obtiene la siguiente relación:

$$\sum_{k=0}^q b_k (2i\pi\lambda)^k \hat{g}(\lambda) = \sum_{j=0}^p a_j (2i\pi\lambda)^j \hat{f}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La ecuación obtenida se puede ahora despejar algebraicamente. Como  $P/Q$  no tiene polos en el eje imaginario, entonces  $P(2i\pi\lambda)/Q(2i\pi\lambda)$  no tiene polos para  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Por tanto, es posible obtener la siguiente expresión para  $\hat{g}(\lambda)$ :

$$\hat{g}(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} \hat{f}(\lambda).$$

Esta última igualdad determina completamente  $\hat{g}$ , por lo que  $g$  queda unívocamente determinada, si existe.

Para el estudio de la existencia, se considera la función siguiente,

$$G(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} \hat{f}(\lambda). \quad (2.2)$$

La función  $G$  pertenece a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Con más detalle, si  $\deg P < \deg Q$ , como  $\frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} = H(\lambda)$  no tiene polos reales, es una función acotada, al igual que todas sus derivadas. Para comprobar que la función  $H(\lambda)\hat{f}(\lambda)$  pertenece a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  es claro que es de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , luego solo resta ver que ella y todas sus derivadas son de decrecimiento rápido. Dados  $p, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , usando la fórmula de Leibniz se obtiene que

$$\begin{aligned} \left| \lambda^p (H\hat{f})^{(n)}(\lambda) \right| &= \left| \lambda^p \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H^{(k)}(\lambda) \hat{f}^{(n-k)}(\lambda) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|H^{(k)}\|_\infty \left| \lambda^p \hat{f}^{(n-k)}(\lambda) \right|. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cada sumando de la expresión anterior tiende a cero cuando  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , ya que  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Por otro lado, si  $p = \deg P \geq \deg Q = q$ , descomponiendo  $H(\lambda)$  en fracciones simples es posible ver que

$$H(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} = C(2i\pi\lambda) + \frac{R(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)},$$

donde  $C$  y  $R$  son polinomios y se cumple que  $\deg R < \deg Q$ . Ahora bien, como  $P(2i\pi\lambda)/Q(2i\pi\lambda)$  no tiene polos para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tampoco los tendrá  $R(2i\pi\lambda)/Q(2i\pi\lambda)$ . Por tanto, haciendo uso del caso  $\deg P < \deg Q$  anterior y de que el espacio  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  es invariante por la multiplicación de polinomios, se concluye que  $H\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . De esta manera, es legítimo aplicar la transformada inversa de Fourier a  $G = H\hat{f}$ . Por tanto, si se escribe

$$Q(2i\pi\lambda)G = P(2i\pi\lambda)\hat{f},$$

tomando la transformada inversa y aplicando sus propiedades, se llega a que  $g = \mathcal{F}^{-1}G = \mathcal{F}^{-1}(H\hat{f})$  es solución de la ecuación (2.1).

Para ver que el sistema  $A$  es un filtro, debemos comprobar que es lineal, invariante y continuo. La linealidad es inmediata gracias a la linealidad de la transformada de Fourier y la expresión siguiente:

$$g = \mathcal{F}^{-1}(H\hat{f}).$$

Para la invarianza, dada  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , basta considerar

$$\begin{aligned} A(\tau_a f) &= \mathcal{F}^{-1}(H\widehat{\tau_a f}) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(H(\lambda)e^{-2\pi i a \lambda} \hat{f}(\lambda)) = \tau_a \mathcal{F}^{-1}(H\hat{f}) = \tau_a A(f), \end{aligned}$$

Queda, por tanto, analizar la continuidad. Sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de elementos de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  que tiende a cero. Entonces,  $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiende a cero por la continuidad de la transformada de Fourier en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Para ver que  $\{H\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiende a 0 en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , hay que estudiar para cada  $p$  y  $m$  en  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  el término:

$$\|\lambda^p (H\hat{f}_n)^{(m)}(\lambda)\|_{\infty} \leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \|\lambda^p H^{(k)}(\lambda) \hat{f}_n^{(m-k)}(\lambda)\|_{\infty}.$$

La cota anterior viene dada por el estudio realizado previamente a este mismo término (2.3). Ahora, es posible distinguir dos casos. En primer lugar, si  $\deg P < \deg Q$ , como se ha visto previamente,  $H(\lambda)$  y todas sus derivadas están acotadas. Por tanto, cada sumando tenderá a cero si  $\|\lambda^p \hat{f}_n^{(m-k)}(\lambda)\|_{\infty}$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esta última condición se cumple ya que  $\hat{f}_n \rightarrow 0$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Por otro lado, si  $\deg P \geq \deg Q$ , utilizando la descomposición en fracciones simples previa se obtiene que

$$H^{(k)}(\lambda) = C^{(k)}(2i\pi\lambda) + \left( \frac{R(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} \right)^{(k)}.$$

De esta manera,  $H^{(k)}$  está formado por la suma de un polinomio más un cociente de polinomios que no tiene polos para  $\lambda \in \mathbb{R}$  con  $\deg R < \deg Q$ , por lo que este último término es una función acotada. Esto permite escribir

$$\begin{aligned} \|\lambda^p H^{(k)}(\lambda) \hat{f}_n^{(m-k)}(\lambda)\|_{\infty} &\leq \|\lambda^p C^{(k)}(2i\pi\lambda) \hat{f}_n^{(m-k)}(\lambda)\|_{\infty} \\ &\quad + \left\| \lambda^p \left( \frac{R(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} \right)^{(k)} \hat{f}_n^{(m-k)}(\lambda) \right\|_{\infty} \\ &\leq \|\lambda^p C^{(k)}(2i\pi\lambda) \hat{f}_n^{(m-k)}(\lambda)\|_{\infty} \\ &\quad + \left\| \left( \frac{R(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} \right)^{(k)} \right\|_{\infty} \|\lambda^p \hat{f}_n^{(m-k)}(\lambda)\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Ambos términos tienden a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , ya que  $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a 0 en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Por tanto,  $\{\hat{g}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{H\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiende a 0 en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Finalmente, por la continuidad de la transformada de Fourier en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiende a cero, por lo que  $A$  es un sistema continuo.  $\square$

**Observación 2.5.** En la proposición previa se ha obtenido que la ecuación diferencial (2.1) tiene solución única sin especificar condiciones iniciales. Esto es debido a que al imponer que  $g$  pertenezca a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , de manera indirecta se impone que  $g$  y todas sus derivadas se anulen en el infinito.

**Definición 2.6.** En el contexto de la teoría de la señal, la función definida como

$$H(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)}$$

recibe el nombre de *función de transferencia*.

En nuestro estudio, si asumimos que  $P/Q$  no tiene polos en el eje imaginario y  $\deg P < \deg Q$ , entonces  $H(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Debido a la extensión de la transformada de Fourier a  $L^2(\mathbb{R})$  (ver teorema A.5), es posible obtener  $h = \mathcal{F}^{-1}H$ , denominada *respuesta impulso*. Además, se pueden obtener expresiones generales para  $h = \mathcal{F}^{-1}(H)$ , las cuales son de interés.

**Observación 2.7.** Nótese la importancia de que  $\deg P < \deg Q$ , ya que es lo que permite, junto a la ausencia de polos en el eje imaginario, justificar el uso de la transformada de Fourier. Esto muestra las limitaciones del uso de funciones en el estudio de los filtros, ya que el estudio del resto de casos requiere del uso de herramientas más avanzadas, como se verá en el capítulo siguiente.

Con las aclaraciones previas, se pasa al cálculo de las expresiones generales para  $h = \mathcal{F}^{-1}(H)$ .

**Lema 2.8.** Si  $P/Q$  tiene polos simples,  $z_1, \dots, z_q$ , que no están en el eje imaginario y  $\deg P < \deg Q$ , es posible escribir

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} \right) = \left( \sum_{k \in K_-} \beta_k e^{z_k t} \right) u(t) - \left( \sum_{k \in K_+} \beta_k e^{z_k t} \right) u(-t), \quad (2.4)$$

donde  $u(t)$  denota la función de Heaviside y se han definido los siguientes conjuntos,

$$K_- = \{k \in \{1, 2, \dots, q\} | \operatorname{Re}(z_k) < 0\},$$

$$K_+ = \{k \in \{1, 2, \dots, q\} | \operatorname{Re}(z_k) > 0\}.$$

*Demostración.*

En primer lugar, sea  $f_1(x) = e^{-ax}u(x)$ ,  $\operatorname{Re}(a) > 0$ . Es claro que  $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$  y es posible calcular su transformada de Fourier,

$$\hat{f}_1(\xi) = \int_0^\infty e^{-2i\pi x\xi} e^{-ax} dx = \frac{1}{a + 2i\pi\xi}.$$

Nótese que  $\hat{f}_1 \notin L^1(\mathbb{R})$ , pero  $\hat{f}_1 \in L^2(\mathbb{R})$ .

De igual forma, definiendo  $f_2(x) = e^{ax}u(-x)$ ,  $\operatorname{Re}(a) > 0$  resulta que  $f_2 \in L^1(\mathbb{R})$  y se obtiene que

$$\hat{f}_2(\xi) = \int_{-\infty}^0 e^{-2i\pi x\xi} e^{ax} dx = \frac{-1}{-a + 2i\pi\xi}.$$

De nuevo,  $\hat{f}_2 \notin L^1(\mathbb{R})$  pero  $\hat{f}_2 \in L^2(\mathbb{R})$ . Gracias a la extensión de la transformada de Fourier en  $L^2(\mathbb{R})$  (ver A.5), está justificado el cálculo de la transformada inversa.

Una vez obtenidas las expresiones anteriores es hora de calcular  $h$ . Debido a que  $P/Q$  solo tiene polos simples, es posible descomponer  $H$  en fracciones simples, obteniendo que

$$H(\lambda) = \sum_{k=0}^q \frac{\beta_k}{2i\pi\lambda - z_k}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

donde  $z_1, \dots, z_q$  son los polos. Con esto, es posible calcular  $\mathcal{F}^{-1}(H)$  en el sentido de  $L^2(\mathbb{R})$  y, distinguiendo si  $\operatorname{Re}(z_k) > 0$  o  $\operatorname{Re}(z_k) < 0$ , llegar a la expresión

$$h(t) = \left( \sum_{k \in K_-} \beta_k e^{z_k t} \right) u(t) - \left( \sum_{k \in K_+} \beta_k e^{z_k t} \right) u(-t).$$

□

Si los polos no son simples, también es posible obtener una expresión para  $h$ .

**Lema 2.9.** Si  $P(x)/Q(x)$  tiene polos  $z_1, \dots, z_l$  que no están en el eje imaginario con multiplicidades  $m_1, \dots, m_l$ , respectivamente, y  $\deg P < \deg Q$ , es posible escribir

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} \right) = \left( \sum_{k \in K_-} P_k(t) e^{z_k t} \right) u(t) - \left( \sum_{k \in K_+} P_k(t) e^{z_k t} \right) u(-t), \quad (2.5)$$

donde

$$P_k(t) = \sum_{j=1}^{m_k} \beta_{k,j} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!},$$

y los conjuntos  $K_-$  y  $K_+$  se corresponden con los del lema anterior.

*Demostración.*

Se considera  $f_3(x) = \frac{x^k}{k!} e^{-ax} u(x)$ ,  $\operatorname{Re}(a) > 0$ , para  $k \in \mathbb{N}$ . En este caso,  $f_3 \in L^1(\mathbb{R})$  y es posible escribir, recordando  $f_1$  de la demostración del lema anterior,

$$f_3(x) = \frac{1}{(-2i\pi)^k} \frac{1}{k!} (-2i\pi x)^k f_1(x).$$

Aplicando A.4 se obtiene

$$\hat{f}_3(\xi) = \frac{1}{k!} \frac{1}{(-2i\pi)^k} \hat{f}_1^{(k)}(\xi),$$

lo que permite obtener, sustituyendo  $\hat{f}_1^{(k)}$ ,

$$\hat{f}_3(\xi) = \frac{1}{(a + 2i\pi\xi)^{k+1}}.$$

Razonando con  $f_2(x) = e^{ax} u(-x)$ ,  $\operatorname{Re}(a) > 0$ , es posible obtener la transformada de Fourier de  $f_4(x) = \frac{x^k}{k!} e^{ax} u(-x)$ ,  $\operatorname{Re}(a) > 0$ , que viene dada por la siguiente expresión

$$\hat{f}_4(\xi) = \frac{-1}{(-a + 2i\pi\xi)^{k+1}}.$$

Una vez obtenidas las expresiones anteriores es hora de calcular  $h$ . Como ahora los polos tienen multiplicidad, descomponiendo  $H$  en fracciones simples es posible escribir

$$H(\lambda) = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\beta_{k,j}}{(2i\pi\lambda - z_k)^j},$$

donde  $m_k$  denota la multiplicidad del polo  $z_k$ .

Por tanto,  $H$  está formado por la suma de términos que se encuentran o bien en  $L^1(\mathbb{R})$  o bien en  $L^2(\mathbb{R})$ . En ambos casos es legítimo aplicar la transformada inversa de Fourier, lo que permite, usando las expresiones anteriores, junto con las desarrolladas en el lema previo, obtener que  $h = \mathcal{F}^{-1}(H)$  viene dada por

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} \right) = \left( \sum_{k \in K_-} P_k(t) e^{z_k t} \right) u(t) - \left( \sum_{k \in K_+} P_k(t) e^{z_k t} \right) u(-t),$$

donde

$$P_k(t) = \sum_{j=1}^{m_k} \beta_{k,j} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$$

□

A la vista de los dos lemas anteriores, en nuestro caso de estudio,  $h$  está acotada, es de decrecimiento rápido y es continua en todo  $\mathbb{R}$  salvo, quizás, en el origen. En particular,  $h \in L^p(\mathbb{R})$  para cualquier  $p \in [1, \infty]$ .

**Proposición 2.10.** El filtro de la proposición 2.4 es un sistema convolucional cuando  $\deg P < \deg Q$ . Por tanto, dada una señal de entrada  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , la señal de salida,  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  se puede escribir como  $g = h * f$ , donde  $h$  viene dada por los dos lemas previos.

*Demostración.*

En el contexto de la proposición 2.4 y gracias a los lemas 2.4 y 2.5, es posible escribir, dada una señal de entrada  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\hat{g}(\lambda) = \hat{h}(\lambda) \cdot \hat{f}(\lambda),$$

donde  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  representa la señal de salida del filtro. Ahora, gracias a la proposición A.10 se obtiene que

$$g(t) = (h * f)(t).$$

Por tanto, estamos frente a un sistema convolucional. □

Hasta ahora hemos obtenido una solución a nuestro problema cuando  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Sin embargo, la expresión  $g = h * f$  está bien definida en otros casos más generales a los que se puede extender si  $f$  se encuentra en espacios adecuados. Por tanto, teniendo en cuenta los dos lemas previos sobre la posible forma de  $h$  y las proposiciones A.7 y A.8, surgen los siguientes resultados.

**Corolario 2.11.** Sea  $h$  la respuesta impulso del filtro de la proposición anterior. Se tiene entonces que:

- (1) Si  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , entonces  $g = h * f \in L^p(\mathbb{R})$  y se tiene que

$$\|g\|_p \leq \|h\|_1 \|f\|_p$$

- (2) Si  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , entonces  $g = h * f \in L^\infty(\mathbb{R})$  y  $g$  es una función continua y acotada. Además, se tiene que

$$\|g\|_\infty \leq \|h\|_q \|f\|_p,$$

donde  $p$  y  $q$  son conjugados (es decir,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ).

- (3) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces  $g = h * f \in L^p(\mathbb{R})$  para cualquier  $p \in [1, \infty]$  y se cumple que

$$\|g\|_p \leq \|h\|_p \|f\|_1.$$

Por tanto, el sistema  $A$  definido por la convolución  $g = Af = h * f$  es un operador continuo de  $L^p(\mathbb{R})$  en  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty]$ . De hecho, es un filtro. De igual manera,  $A$  es continuo de  $L^p(\mathbb{R})$  en  $L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty]$  y de  $L^1(\mathbb{R})$  en  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty]$  que, de nuevo, resultan ser filtros.

Gracias al resultado anterior, bajo la condición de que  $f \in L^p(\mathbb{R})$  para  $p$  arbitrario,  $Af = h * f = g$  está bien definido. Este nuevo sistema recibe el nombre de *filtro generalizado*.

**Observación 2.12.** Dentro de todas las generalizaciones dadas en el corolario previo hay algunas de mayor interés práctico. En particular el caso del filtro  $A: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  es bastante representativo. Esto es porque el espacio  $L^2(\mathbb{R})$  está asociado a las señales con energía finita. El resultado anterior asegura que el filtro generalizado respeta la conservación de la energía, en el sentido de que a una señal con energía finita le asigna otra con energía también finita.

**Observación 2.13.** Es importante destacar que, para este nuevo filtro generalizado, puede no tener sentido considerar la ecuación diferencial (2.1) ya que las señales de entrada y salida no tienen asegurada ni siquiera su derivabilidad. Esto se debe a que se está generalizando la solución a espacios  $L^p(\mathbb{R})$  de entrada y salida adecuados que cumplen el corolario anterior. Sin embargo, la respuesta del filtro en la práctica se calcularía con el producto de convolución sin mayores comentarios.

**Definición 2.14.** La respuesta de un filtro a la función escalón,  $h_1 = Au$ , recibe el nombre de *respuesta escalón*. Esta respuesta  $h_1$  está bien definida como respuesta al filtro generalizado y es acotada, por el corolario 2.11, y viene dada de la siguiente forma

$$h_1(t) = (h * u)(t) = \int_{-\infty}^t h(s) ds. \quad (2.6)$$

Esta respuesta da una noción del comportamiento del filtro frente a un cambio abrupto en la entrada. En la práctica ayuda a caracterizar el comportamiento del filtro, como se verá en un ejemplo posterior.

Recordando la definición de sistema causal, es posible enunciar el siguiente resultado.

**Proposición 2.15.** El filtro generalizado  $A$  es causal si, y solo si,  $\text{sop}(h) \subset [0, +\infty)$ .

*Demostración.*

Como un filtro es un sistema lineal e invariante, la condición de causalidad se puede expresar como sigue

$$f(t) = 0 \text{ para } t < t_0 \implies Af(t) = 0 \text{ para } t < t_0 \text{ para todo } t_0 \in \mathbb{R}.$$

En primer lugar, si  $\text{sop}(h) \subset [0, +\infty)$ , la salida es

$$g(t) = \int_0^{\infty} h(s)f(t-s)ds.$$

Ahora, fijado  $t_0 \in \mathbb{R}$ , si  $f(t) = 0$  para  $t < t_0$ , entonces  $g(t) = 0$  para  $t < t_0$  puesto que el integrando se anula.

La otra implicación se razona por reducción al absurdo. Si existe  $t_1 < 0$  tal que  $h(t_1) > 0$ , recordando que  $h$  es continua en todo  $\mathbb{R}$  salvo, quizás, el origen, existe un intervalo  $(a, b)$ , con  $b < 0$  y  $a < t_1 < b$ , donde  $h(t) > 0$  si  $t \in (a, b)$ . De esta forma, para la señal de entrada  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty]$ , dada por

$$f(t) = \chi_{[0, b-a]}(t),$$

la señal de salida es

$$g(t) = \int_{t-b+a}^t h(s)ds.$$

De esta forma,  $g(b) > 0$ , puesto que  $h$  es una función positiva en el intervalo  $(a, b)$ . Recordando la condición de que  $A$  sea causal se llega a contradicción, ya que  $f(t) = 0$  para todo  $t < 0$ , por lo que debería ser  $g(b) = 0$ .  $\square$

**Corolario 2.16.** El filtro generalizado  $A$  es causal si, y solo si, los polos de  $P/Q$  (cuando  $\deg P < \deg Q$ ) tienen parte real estrictamente negativa.

*Demostración.*

Se deduce de los lemas 2.4 y 2.5 y aplicando la proposición anterior, 2.15.  $\square$

Con los resultados anteriores quedan caracterizados los filtros generalizados causales, que son de gran interés desde el punto de vista físico. Otra característica relevante es la estabilidad.

**Proposición 2.17.** El filtro generalizado  $A$  es estable.

*Demostración.*

Gracias al corolario 2.11, la aplicación  $A: L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  es continua, lo que prueba la estabilidad.  $\square$

## 2.2. Filtro RC revisitado

El filtro  $RC$  fue estudiado en el capítulo anterior (ver apartado 1.3.1). Se presenta ahora una nueva discusión a través de los resultados desarrollados en este capítulo. La ecuación diferencial que regía este filtro pasa baja es

$$RCg' + g = f.$$

En este caso el cociente de polinomios de la proposición 2.4 viene dado por la siguiente expresión

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1 + RCz}, \quad z_1 = -\frac{1}{RC},$$

donde  $z_1$  es un polo simple. Es evidente que  $\deg P < \deg Q$ . Además, como  $P/Q$  presenta solo un polo y se encuentra fuera del eje imaginario, es posible aplicar el lema 2.4, el cual proporciona la siguiente expresión para  $h(t)$ ,

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t).$$

Esta expresión permite escribir la señal de salida en el contexto del corolario 2.11 como

$$g(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} f(s) ds.$$

donde  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , con  $p \in [1, \infty]$  arbitrario, para que la expresión tenga sentido en el contexto del filtro generalizado. Es posible, por tanto, calcular la respuesta escalón tomando  $f(t) = u(t)$ , y sustituyendo en la expresión anterior,

$$h_1(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} u(s) ds = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) u(t).$$

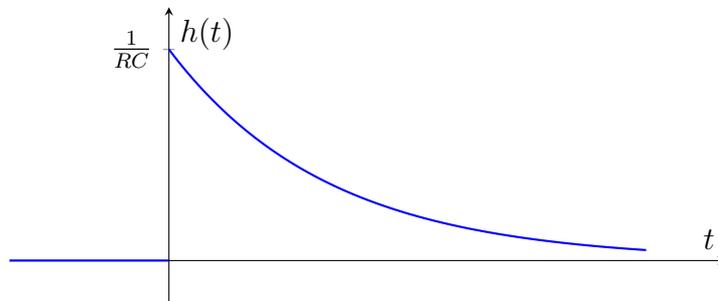


Figura 2.1: Respuesta impulso del filtro RC.

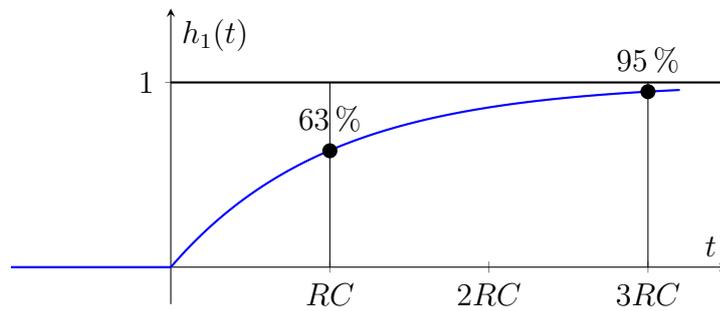


Figura 2.2: Respuesta escalón del filtro RC.

En el contexto del filtro  $RC$  es posible dar una interpretación a la función  $h_1(t)$  analizando la figura 2.2. Esta función describe como el filtro pasa de un estado inicial a un nuevo estado producido por un cambio repentino en la entrada. La constante  $RC$  aparece en los filtros que tienen una resistencia en serie con un condensador, y generalmente se conoce como la constante de tiempo, denotada por  $\tau$ . Esta constante determina la rapidez con la que se produce esta transición entre un estado inicial y final. Para el filtro  $RC$  cuanto mayor es  $\tau$ , más lenta es la adaptación del filtro a la señal de entrada.



# Capítulo 3

## Filtros y Distribuciones

En el capítulo anterior se han percibido las limitaciones que presenta el uso de funciones en el estudio de filtros cuando  $\deg P \geq \deg Q$ . El objetivo de este capítulo es desarrollar un mejor marco de trabajo para el estudio de estos dispositivos a través del uso de distribuciones, objetos matemáticos más ricos para los propósitos de este trabajo.

El estudio de las distribuciones se entronca dentro de la asignatura optativa *Funciones Generalizadas y sus Aplicaciones* del Grado en Matemáticas. Al ser una asignatura optativa, se ha decidido introducir las definiciones y espacios básicos empleados en esta teoría en una sección preliminar. Sin embargo, todos los resultados usados durante el trabajo acerca de estos objetos y algunas definiciones adicionales se incluyen en el anexo final.

Para el desarrollo de este capítulo se ha seguido principalmente el capítulo 34 de [GW99], completando varios conceptos con la ayuda de [Mit13]. De esta forma, se comienza definiendo el espacio de las *funciones test* para continuar con una breve introducción acerca de las distribuciones. Posteriormente se introduce la definición de filtros para espacios de distribuciones, generalizando este concepto a espacios más generales de los vistos hasta el momento. Se caracterizarán los filtros gobernados por una ecuación diferencial, obteniendo una expresión genérica para la *función de transferencia* y la *respuesta impulso* cuando la señal de entrada sea una *distribución temperada*. Finalmente, para reflejar todo lo desarrollado en el capítulo, se trata el caso del filtro *RC* pasa alta, elemento capaz de atenuar señales con una frecuencia por debajo de un umbral específico. Ejemplifica la capacidad de esta teoría de abordar casos irresolubles con la teoría desarrollada en el capítulo previo.

### 3.1. Preliminares

**Definición 3.1.** Se define el espacio de las *funciones test* como el espacio de las funciones de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  y de soporte compacto. Este espacio se denotará por  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  o simplemente  $\mathcal{D}$ . En otras palabras,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{ sop}(\varphi) \text{ es compacto}\}. \quad (3.1)$$

Un ejemplo de este tipo de funciones viene dado por

$$\theta(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

**Observación 3.2.** El espacio de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  contiene al espacio de las funciones test  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

Es preciso dar una noción de convergencia en el espacio de las funciones test.

**Definición 3.3.** Se dice que una sucesión  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  de elementos de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  converge hacia  $\varphi$  en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  si verifica que:

1. Existe  $K \subset \mathbb{R}$  compacto tal que  $\text{sop}(\varphi_n) \subset K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Para cualquier  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  se tiene que  $\{\varphi_n^{(p)}\}_{n=1}^\infty$  converge uniformemente hacia  $\varphi^{(p)}$  en  $\mathbb{R}$ .

Con las nociones previas es posible enunciar la definición de distribución.

**Definición 3.4.** Sea  $T$  un funcional definido en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , esto es,  $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ .

1. Se dice que  $T$  es *continuo* en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  si para cualquier sucesión  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  de elementos de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  que converge a  $\varphi$  en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  se tiene que  $\{T(\varphi_n)\}_{n=1}^\infty$  converge a  $T(\varphi)$ .
2. Se dice que  $T$  es una *distribución* si es un funcional lineal y continuo en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

Es claro que el conjunto de las distribuciones tiene estructura de espacio vectorial. Este espacio recibe el nombre de *dual topológico* de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  y se representa por  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . En el apéndice A se encuentran resultados importantes acerca de las distribuciones, también llamadas funciones generalizadas (ver proposición A.11).

Es importante dar una noción de convergencia en el espacio de las distribuciones.

**Definición 3.5.** Una sucesión  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  de distribuciones se dice que *converge* a la distribución  $T$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\varphi) = T(\varphi)$$

para cualquier  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

Una vez definidas las distribuciones, es de interés introducir las distribuciones temperadas.

**Definición 3.6.** Sea  $T$  un funcional definido en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , esto es,  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ .

1. Se dice que  $T$  es *continuo* en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  si dada cualquier sucesión  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  que converge a  $\varphi$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  se tiene que  $\{T(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $T(\varphi)$ .
2. Se dice que  $T$  es una *distribución temperada* si es un funcional lineal y continuo en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
3. Dada una sucesión  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  de distribuciones temperadas, se dice que *converge* a  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\varphi) = T(\varphi)$$

para cualquier  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Al igual que antes, el conjunto de las distribuciones temperadas tiene estructura de espacio vectorial y recibe el nombre de dual topológico de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Este espacio se representa por  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

**Definición 3.7.** Se dice que una distribución  $T$  es *nula* en un abierto  $\Omega$  si  $T(\varphi) = 0$  para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  con  $\text{sop}(\varphi) \subset \Omega$ .

**Definición 3.8.** Se define el *soporte de una distribución*, que se representará  $\text{sop}(T)$ , como el complementario en  $\mathbb{R}$  del mayor abierto donde  $T$  es nula.

Con lo anterior es posible definir un nuevo espacio, las distribuciones de soporte compacto.

**Definición 3.9.** Se representa por  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ , o simplemente  $\mathcal{E}'$ , al subespacio de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  de las distribuciones de soporte compacto.

**Observación 3.10.** Es posible demostrar que  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$  se puede identificar con el dual topológico de  $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  cuando se le dota de la siguiente topología: una sucesión  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  tiende a  $\varphi$  en  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$  si, y solo si, para cada  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\{\varphi_n^{(p)}\}_{n=1}^\infty$  tiende a  $\varphi^{(p)}$  uniformemente en cualquier compacto  $K \subset \mathbb{R}$ . Para más información se puede consultar [Mit13, pág 41-44].

**Observación 3.11.** Se puede establecer una relación entre los espacios  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  y  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  y sus duales topológicos gracias a las proposiciones A.13 y A.14. De esta manera,  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  es un subespacio de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  y este a su vez de  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ . Además,  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$  se puede identificar como un subespacio de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  y este de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

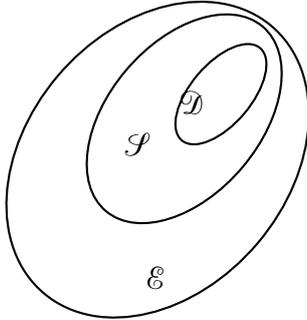


Figura 3.1

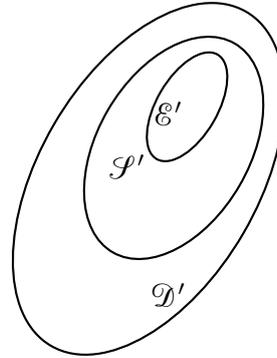


Figura 3.2

## 3.2. Filtros analógicos revisitados

Con todas las definiciones anteriores es posible dar una definición de filtro más general, involucrando el concepto de distribuciones.

**Definición 3.12.** Sea  $X$  un subespacio lineal, invariante bajo traslaciones de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Un *filtro analógico* es una aplicación  $A: X \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  lineal, invariante y continua.

Lo habitual es que el espacio  $X$  sea uno de los tratados en la sección anterior, es decir,  $X = \mathcal{E}'(\mathbb{R}), \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , con las topologías correspondientes a cada espacio. Otra opción común es que  $X$  sea un espacio de funciones, en concreto,  $X = L^p(\mathbb{R}), p \geq 1$ . Esto queda justificado por la proposición A.22, ya que los elementos de estos espacios se pueden ver como distribuciones temperadas, por lo que es posible tratar el espacio  $L^p(\mathbb{R})$  como un subespacio de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

En el contexto de las distribuciones también es posible definir un producto de convolución bajo ciertas hipótesis. En el apéndice A se encuentran varios resultados referentes a este tema. Este producto de convolución vuelve a permitir caracterizar los sistemas convolucionales.

**Proposición 3.13.** Sea  $h$  una distribución con soporte compacto. El sistema convolucional

$$A: X \rightarrow \mathcal{D}',$$

donde  $Af = h * f$ , es un filtro analógico.

*Demostración.*

Por la proposición A.25, como  $h$  tiene soporte compacto, el sistema  $A$  está bien definido para cualquier subespacio  $X \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Además, es claro que es lineal. La invariancia viene de la secuencia de igualdades siguiente:

$$\tau_a(h * f) = \delta_a * (h * f) = h * (\delta_a * f) = h * (\tau_a f),$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la proposición A.26 y la segunda de A.27. Además, como es habitual,  $\delta_a$  denota la delta de Dirac (ver A.12). Por lo que en términos de  $A$  se tiene que

$$\tau_a(Af) = A(\tau_a f)$$

para cualquier  $f \in X$  y cualquier  $a \in \mathbb{R}$ . Esto prueba la invariancia.

Para la continuidad basta aplicar el primer resultado de la proposición A.25, aprovechando la continuidad de la segunda componente. □

Para el tipo de sistemas anterior, es posible definir la salida del sistema para varias entradas de interés.

**Definición 3.14.** Dado un filtro analógico  $A$ , se define como *respuesta impulso* a la respuesta del filtro  $A$  a la señal de entrada  $\delta$ , es decir,  $h = A\delta$ , siempre y cuando  $\delta \in X$ . De igual forma, la *respuesta escalón* se corresponde a  $h_1 = Au$ , donde  $u$  representa la función de Heaviside, cuando  $u \in X$ . Finalmente, la *función de transferencia* se define como  $H = \hat{h}$ , cuando  $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

**Observación 3.15.** En la definición de función de transferencia aparece la transformada de Fourier de una distribución temperada. La definición de esta transformada se recoge en A.31, junto con algunas de sus principales propiedades.

Se pasa ahora a caracterizar los filtros causales.

**Definición 3.16.** Sea  $A$  un filtro analógico. Se dice que  $A$  es *causal* o *realizable* si

$$\text{sop}(f) \subset [t_0, \infty) \implies \text{sop}(Af) \subset [t_0, \infty)$$

para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Esta definición generaliza la definición dada en 1.8 incluyendo a las distribuciones.

**Proposición 3.17.** Sea  $X$  un subespacio lineal e invariante por traslaciones de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  tal que  $\delta \in X$ . Entonces el sistema convolucional

$$\begin{aligned} A: X &\rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \\ f &\mapsto h * f \end{aligned}$$

es causal si, y solo si,  $\text{sop}(h) \subset [0, \infty)$ .

*Demostración.*

En primer lugar, si  $A$  es causal, como  $\text{sop}(\delta) \subset [0, \infty)$  y  $h = A\delta$ , entonces  $\text{sop}(h) \subset [0, \infty)$ .

Por otro lado, supongamos que  $\text{sop}(h) \subset [0, \infty)$  y sea  $f$  cumpliendo que  $\text{sop}(f) \subset [t_0, \infty)$  para un  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Por la proposición A.30 se tiene que  $\text{sop}(h * f) \subset [t_0, \infty)$ , lo que prueba que el sistema  $A$  es causal. □

### 3.2.1. Soluciones temperadas de ecuaciones diferenciales lineales

En este apartado se va a generalizar, en el contexto de las distribuciones temperadas, los filtros gobernados por una ecuación diferencial análoga a la ecuación (2.1). Es importante precisar el significado de derivada para una distribución. Este tema se aborda en el apéndice A.

Por tanto, sea  $A$  un sistema dado por la definición 3.12, cuya señal de entrada  $f$  y de salida  $g$  están ligadas por la ecuación diferencial

$$\sum_{k=0}^q b_k g^{(k)} = \sum_{j=0}^p a_j f^{(j)}, \quad a_p \cdot b_q \neq 0, \quad (3.3)$$

donde las derivadas se entienden en el contexto de las distribuciones. Se trabajará solo con distribuciones temperadas. Al igual que en el capítulo anterior, se definen los siguientes polinomios

$$P(z) = \sum_{j=0}^p a_j z^j \quad \text{y} \quad Q(z) = \sum_{k=0}^q b_k z^k.$$

**Proposición 3.18.** Si  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  y  $P/Q$  no tiene polos en el eje imaginario, entonces la ecuación diferencial (3.3) admite solución única,  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . En este caso, el sistema

$$\begin{aligned} A: \mathcal{S}'(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto g \end{aligned}$$

es un filtro.

*Demostración.*

En la prueba se van a usar algunas propiedades de la transformada de Fourier para distribuciones. Estas se encuentran en las proposiciones A.34 y A.35 incluidas en el apéndice.

En primer lugar se estudia la unicidad. Si  $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  cumplen la ecuación diferencial (3.3), es posible aplicar la transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones a ambos miembros de la ecuación. Aplicando las propiedades de esta transformada, se llega a la expresión

$$\sum_{k=0}^q b_k (2i\pi\lambda)^k \hat{g} = \sum_{j=0}^p a_j (2i\pi\lambda)^j \hat{f}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ahora es posible despejar  $\hat{g}$  de manera algebraica. Como  $P/Q$  no tiene polos en el eje imaginario,  $P(2\pi i\lambda)/Q(2\pi i\lambda)$  no tiene polos para  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Por tanto, se puede escribir

$$\hat{g} = \frac{P(2\pi i\lambda)}{Q(2\pi i\lambda)} \hat{f}.$$

Esta expresión determina  $\hat{g}$  de manera unívoca, por lo que  $g$  queda completamente determinada.

Para el estudio de la existencia se considera la distribución

$$G = \frac{P(2\pi i\lambda)}{Q(2\pi i\lambda)} \hat{f} = H(\lambda) \hat{f}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como  $H(\lambda) = P(2\pi i\lambda)/Q(2\pi i\lambda)$  no tiene polos en  $\mathbb{R}$ , tanto  $H$  como sus derivadas son de crecimiento lento. Además,  $\hat{f}$  es una distribución temperada, por lo que es posible aplicar la proposición A.21, que asegura que  $H\hat{f}$  es una distribución temperada. En consecuencia,  $g = \mathcal{F}^{-1}(H\hat{f})$  determina una solución en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Falta ver que el sistema de estudio es un filtro. Para comprobar las condiciones vamos a hacer uso de que

$$g = \mathcal{F}^{-1}(H\hat{f}).$$

La linealidad es clara. Se analiza ahora la continuidad. Sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de elementos de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  que converge a 0 en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Debido a la continuidad de la transformada de Fourier en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , la sucesión  $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a cero en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Se considera ahora la sucesión  $\{H\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Gracias a la proposición A.21 es una sucesión de elementos de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Considerando el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H\hat{f}_n(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(H\varphi) = 0,$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , ya que, gracias al lema A.20, como  $H \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$  y  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , entonces  $H\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  y  $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a cero en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Esto permite asegurar que  $\{H\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\hat{g}_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a cero en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Finalmente, gracias a la continuidad de la transformada inversa de Fourier,  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a cero en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , lo que demuestra la continuidad del filtro.

Finalmente se aborda el concepto de la invarianza. Hay que comprobar si se da la igualdad  $A(\tau_a f) = \tau_a A(f)$  para cualquier  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , donde  $\tau_a f$  denota la traslación de una distribución. Se desarrolla cada expresión actuando sobre  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  por separado:

$$\begin{aligned} A(\tau_a f)(\varphi) &= \mathcal{F}^{-1}(H\widehat{\tau_a f})(\varphi) = (H\widehat{\tau_a f})(\mathcal{F}^{-1}\varphi) \\ &= \widehat{\tau_a f}(H\mathcal{F}^{-1}\varphi) = \tau_a f(\mathcal{F}(H\mathcal{F}^{-1}\varphi)) \\ &= f(\tau_{-a}\mathcal{F}(H\mathcal{F}^{-1}\varphi)), \end{aligned}$$

Operando el segundo término se tiene que

$$\begin{aligned} \tau_a A(f)(\varphi) &= A(f)(\tau_{-a}\varphi) = \mathcal{F}^{-1}(H\hat{f})(\tau_{-a}\varphi) \\ &= (H\hat{f})(\mathcal{F}^{-1}(\tau_{-a}\varphi)) = \hat{f}(H\mathcal{F}^{-1}(\tau_{-a}\varphi)) \\ &= f(\mathcal{F}(H\mathcal{F}^{-1}(\tau_{-a}\varphi))) \\ &= f(\mathcal{F}(H(\lambda)e^{-2\pi i a \lambda}\mathcal{F}^{-1}\varphi)) \\ &= f(\tau_{-a}\mathcal{F}(H\mathcal{F}^{-1}\varphi)), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado la propiedad A.4 iii. Por tanto, el sistema es invariante, lo que prueba que  $A$  es un filtro.  $\square$

Como se ha visto,  $H$  es una función de crecimiento lento, por lo que es posible verla como una distribución temperada (ver prop. A.19). Por tanto, gracias a la proposición A.34, está justificado el cálculo de su transformada inversa de Fourier,  $h = \mathcal{F}^{-1}(H)$ . Los siguientes resultados se orientan a este cálculo.

**Lema 3.19.** En el contexto de la proposición 3.18, si  $P/Q$  tiene polos simples,  $z_1, \dots, z_q$ , que no se encuentran en el eje imaginario, entonces es posible escribir

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H) = \sum_{j=0}^{p-q} \alpha_j \delta^{(j)} + \left( \sum_{k \in K_-} \beta_k e^{z_k t} \right) u(t) - \left( \sum_{k \in K_+} \beta_k e^{z_k t} \right) u(-t), \quad (3.4)$$

donde  $p = \deg P$  y  $q = \deg Q$ . Además, se define  $\alpha_j = 0$  si  $j < 0$ . Al igual que en el capítulo anterior los conjuntos  $K_-$  y  $K_+$  vienen dados por

$$K_- = \{k \in \{1, 2, \dots, q\} \mid \operatorname{Re}(z_k) < 0\},$$

$$K_+ = \{k \in \{1, 2, \dots, q\} \mid \operatorname{Re}(z_k) > 0\}.$$

*Demostración.*

Dado el cociente  $P(2i\pi\lambda)/Q(2i\pi\lambda)$  es posible realizar la siguiente descomposición

$$H(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} = C(2i\pi\lambda) + \frac{R(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)},$$

donde  $C(2i\pi\lambda)$  y  $R(2i\pi\lambda)$  son polinomios y  $\deg R < \deg Q$ . Como la expresión anterior no tiene polos para  $\lambda \in \mathbb{R}$  es posible descomponer el cociente  $R(2i\pi\lambda)/Q(2i\pi\lambda)$  en suma de elementos pertenecientes a  $L^2(\mathbb{R})$ . Gracias a la proposición A.33, las expresiones para la transformada inversa de este cociente coinciden con las calculadas en (2.4) en el sentido de las distribuciones.

Resta, por tanto, analizar el primer sumando de la expresión original. Se calcula así la transformada de Fourier de la delta de Dirac,  $\delta_a$ . Dicha transformada está justificada debido a que  $\delta_a \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Por tanto, sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\hat{\delta}_a(\varphi) = \delta_a(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi a \xi} \varphi(\xi) d\xi \implies \hat{\delta}_a = e^{-2i\pi a \xi}.$$

De esta forma, en el sentido de las distribuciones,  $\hat{\delta}_a = e^{-2i\pi a \xi}$ . En particular,  $\hat{\delta} = 1$ . Ahora, aplicando las propiedades de A.35, se tiene que

$$\widehat{\delta^{(k)}} = (2i\pi\xi)^k \hat{\delta} = (2i\pi\xi)^k.$$

Con todo lo anterior,  $H$ , considerada como distribución, está formada por la suma de elementos de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  de los cuales sabemos calcular sus transformadas

de Fourier correspondientes. Finalmente, usando los resultados previos se obtiene que

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H) = \sum_{j=0}^{p-q} \alpha_j \delta^{(j)} + \left( \sum_{k \in K_-} \beta_k e^{z_k t} \right) u(t) - \left( \sum_{k \in K_+} \beta_k e^{z_k t} \right) u(-t).$$

□

**Lema 3.20.** En el contexto de la proposición 3.18, si  $P(x)/Q(x)$  tiene polos  $z_1, \dots, z_l$  que no están en el eje imaginario, con multiplicidades  $m_1, \dots, m_l$  respectivamente, es posible escribir

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H) = \sum_{j=0}^{p-q} \alpha_j \delta^{(j)} + \left( \sum_{k \in K_-} P_k(t) e^{z_k t} \right) u(t) - \left( \sum_{k \in K_+} P_k(t) e^{z_k t} \right) u(-t), \quad (3.5)$$

donde

$$P_k(t) = \sum_{j=1}^{m_k} \beta_{k,j} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!},$$

y los conjuntos  $K_-$  y  $K_+$  se corresponden con los del lema anterior.

*Demostración.*

Para este caso, es posible realizar la misma descomposición de  $H$  del lema anterior. En las condiciones del enunciado, el cociente  $R(2i\pi\lambda)/Q(2i\pi\lambda)$  esta vez se puede descomponer como suma de elementos de  $L^1(\mathbb{R})$  y  $L^2(\mathbb{R})$ . Es posible, por tanto, hacer uso de nuevo de la proposición A.33 y de la transformada de Fourier de la delta de Dirac para obtener las expresiones del enunciado. □

**Observación 3.21.** Es importante destacar, que, a diferencia del capítulo anterior, en este caso no se impone ninguna restricción acerca de los grados de los polinomios  $P$  y  $Q$  para el cálculo de la transformada inversa de  $H$ , lo que evidencia la ventaja de las distribuciones temperadas frente a las funciones usuales.

Con todos los resultados previos nos encontramos en la situación de que el filtro definido en la proposición 3.18,  $g = Af$  cumple la relación siguiente

$$\hat{g} = \hat{h}\hat{f},$$

donde  $h$  viene dada por los lemas anteriores. Al igual que en el capítulo previo, se busca expresar la señal de salida como producto de convolución de  $h$  y  $f$  siempre que sea posible. En este contexto surge la siguiente proposición.

**Proposición 3.22.** El sistema descrito en la proposición 3.18 es un sistema convolucional.

*Demostración.*

Debido a los resultados previos, si  $f$  es la señal de entrada del filtro de la proposición 3.18 y  $g = Af$  la salida, tenemos que

$$\hat{g} = \hat{h}\hat{f}.$$

Nos gustaría usar las proposiciones A.36 y A.37, luego se necesita representar  $h$  como suma de un elemento de  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$  y otro de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Esto es posible a través de una función  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  que cumpla que

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |t| \geq 2. \end{cases}$$

Por tanto, se busca  $\theta(t)$  con una forma parecida a la gráfica de la figura 3.3. Ahora, es posible escribir

$$h = \theta h + (1 - \theta)h = h_1 + h_2$$

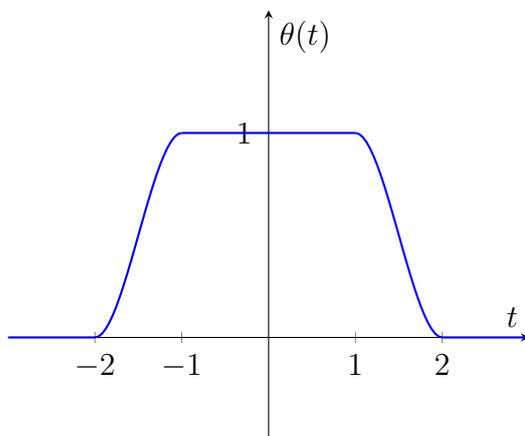


Figura 3.3

Como  $\theta$  pertenece a  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , por A.15  $\theta h$  es una distribución. Además, por la forma de  $\theta$ , esta distribución es de soporte compacto, luego  $\theta h \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ . De igual manera, recordando las posibles expresiones de  $h$ , (3.4) y (3.5) se tiene que  $(1 - \theta)h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . En ambos casos es legítimo utilizar la transformada de Fourier gracias a las proposiciones A.34 y A.3.

Con las justificaciones anteriores se escribe

$$\hat{g} = \hat{h} \cdot \hat{f} = \hat{h}_1 \cdot \hat{f} + \hat{h}_2 \cdot \hat{f}.$$

Ahora, como  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , gracias a las proposiciones A.37 y A.36, se tiene que

$$\hat{g} = \widehat{h_1 * f} + \widehat{h_2 * f} = \widehat{h * f}.$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Fourier se obtiene que

$$g = h * f,$$

lo que muestra finalmente que  $A$ , el filtro dado por la proposición 3.18, es un sistema convolucional. □

Una vez más, los filtros de mayor interés son los causales, ya que son los que se manejan en la práctica. Se pasa ahora a caracterizar cuándo el filtro dado en la proposición 3.18 es de este tipo.

**Proposición 3.23.** El filtro dado en la proposición 3.18 es causal si, y solo si, la parte real de los polos de  $P/Q$  es estrictamente negativa.

*Demostración.*

Debido a la proposición 3.17,  $A$  es causal si, y solo si,  $\text{sop}(h) \subset [0, \infty)$ . Si se considera la expresión más general, (3.5), dada por

$$h(t) = \sum_{j=0}^{p-q} \alpha_j \delta^{(j)} + \left( \sum_{k \in K_-} P_k(t) e^{z_k t} \right) u(t) - \left( \sum_{k \in K_+} P_k(t) e^{z_k t} \right) u(-t),$$

es claro que  $\text{sop}(h) \subset [0, \infty)$  si, y solo si, el último sumatorio se anula, ya que  $\text{sop}(\delta) = \{0\}$ . Esto se da si y solo si  $K_+ = \emptyset$ . □

### 3.2.2. Filtro RC pasa alta

Para ejemplificar las herramientas desarrolladas en este capítulo se propone el estudio del filtro  $RC$  pasa alta. Este filtro viene dado a través del circuito de la figura 3.4. En este circuito se han permutado el condensador y la resistencia con respecto al filtro  $RC$  estudiado hasta ahora. En este caso  $f$  representa la diferencia de potencial que entra en el sistema y  $g$  viene dada por la caída de potencial en la resistencia.

Para este circuito la ecuación diferencial que liga la entrada y la salida viene dada por

$$RCg' + g = RCf'.$$

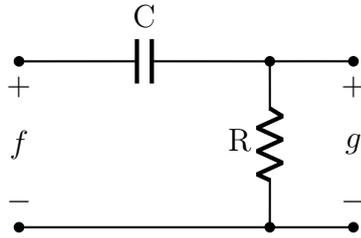


Figura 3.4: Circuito RC, filtro pasa alta

Se va a realizar el estudio en el contexto de la proposición 3.18. El cociente de polinomios en este caso es

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{RCz}{1 + RCz}, \quad z_1 = -\frac{1}{RC},$$

donde  $z_1$  es un polo simple. Por tanto,  $P/Q$  presenta solo un polo fuera del eje imaginario, por lo que es posible usar el lema 3.4. Para calcular la expresión de  $h$  es preciso realizar unas manipulaciones a la expresión de  $P/Q$ :

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{RCz}{1 + RCz} = 1 - \frac{1}{RCz + 1} = 1 + \frac{-1/RC}{z + 1/RC}.$$

Esta última expresión permite extraer los coeficientes  $\alpha_j$  y  $\beta_k$  del lema, por lo que es posible escribir

$$h(t) = \delta - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t).$$

Es importante notar que en este caso se tiene que  $\deg P \geq \deg Q$ , por lo que este tipo de filtros no se podían haber estudiado con las herramientas del capítulo segundo.

Finalmente, nos gustaría obtener la expresión para la respuesta escalón,  $h_1 = Au$ . Como  $u$  es de crecimiento lento es una distribución temperada (ver proposición A.19), por lo que es una entrada válida para el filtro dado en la proposición 3.18. Usando la proposición 3.22 se tiene

$$\begin{aligned} h_1(t) &= (h * u)(t) = (\delta * u)(t) + \left( \frac{-1}{RC} e^{-x/RC} u(x) * u \right) (t) \\ &= (\delta * u)(t) + (\psi * u)(t) = u(t) + (\psi * u)(t), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la proposición A.26. Resta de-

sarrollar el último término:

$$\begin{aligned} (\psi * u)(t) &= \left( -\frac{1}{RC} e^{-x/RC} u * u \right) (t) \\ &= -\frac{1}{RC} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t-x)/RC} u(t-x)u(x)dx. \end{aligned}$$

Si  $t < 0$ , la expresión anterior es cero, luego asumimos que  $t \geq 0$ :

$$(\psi * u)(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t e^{-(t-x)/RC} dx = -e^{-(t-x)/RC} \Big|_{x=0}^{x=t} = e^{-t/RC} - 1.$$

Con todo lo anterior finalmente se obtiene que

$$h_1(t) = u(t) + (e^{-t/RC} - 1)u(t) = e^{-t/RC} u(t).$$

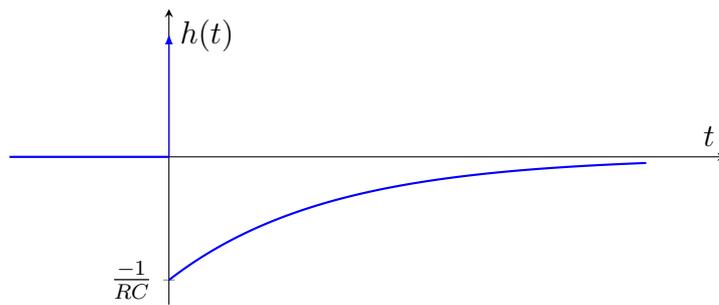


Figura 3.5: Respuesta impulso del filtro RC pasa alta.

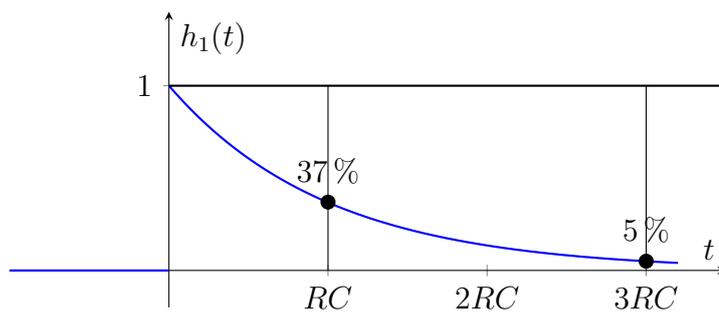


Figura 3.6: Respuesta escalón del filtro RC pasa alta.

Para este filtro también es posible dar una interpretación a la respuesta escalón. Esta función da una noción de como cambia el estado del filtro ante un cambio abrupto en la señal de entrada. Al igual que en el filtro  $RC$  del

capítulo anterior se denomina a la cantidad  $\tau = RC$  *constante de tiempo*. En este caso, se observa que el filtro devuelve en unos primeros instantes una señal de igual magnitud que la entrada, para después ir atenuándola. Esta atenuación es más lenta cuanto mayor es  $\tau$ .

**Observación 3.24.** En la figura 3.5 aparece una línea vertical flechada centrada en el 0. Esta representación hace referencia a la delta de Dirac. Aunque desde un punto de vista formal no tiene ningún sentido representar gráficamente esta distribución, es un convenio muy aceptado en la física y las ciencias técnicas. Esta figura surge de la “idea” de que la delta de Dirac se corresponde con una función que se anula en todo punto menos uno, donde vale  $\infty$ , y cuya integral en todo el espacio es 1. Para ilustrar este ejemplo se toma esta representación debido a su extenso uso.



# Capítulo 4

## Filtros Discretos y Transformada $z$

Hasta ahora se han considerado únicamente señales continuas. El objetivo que se propone este capítulo es desarrollar una teoría similar a los capítulos previos para las señales discretas. Este tipo de señales vendrán dadas por una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Por otra parte, se introduce la transformada  $z$ , herramienta indispensable en el tratamiento de señales discretas. Esta transformada fue desarrollada a mitad del siglo XX, debido al creciente uso de sistemas digitales. Es de gran utilidad en el estudio de filtros discretos gobernados por ecuaciones en diferencias.

De esta manera, se comienza el capítulo introduciendo varios espacios de señales discretas. Posteriormente, se define la convolución para este tipo de señales, analizando los casos en los que este concepto cobra sentido, idea que no se suele tratar en los textos generales de teoría de la señal. Finalmente, se estudian los filtros discretos analizando la causalidad. Posteriormente, se presenta la transformada  $z$ , ligada al concepto de serie de Laurent. Se analizan sus propiedades más relevantes y se refleja su importancia a través del análisis de filtros gobernados por ecuaciones en diferencias, presentando un ejemplo final sobre el filtro  $RC$  discreto.

En cuando a las fuentes, para la parte referente a las señales discretas, se ha seguido el capítulo 39 de [GW99] como guía de contenidos. Sin embargo, se ha modificado la metodología seguida en esta referencia, que trata las señales discretas con la teoría de distribuciones. Para la segunda parte del capítulo acerca de la transformada  $z$  las fuentes han sido más variadas, pero las más importantes han sido el capítulo 40 de [GW99], capítulo 10 de [Oea97] y capítulos 18 y 19 de [Bee03].

## 4.1. Señales discretas

Como se presentó en el capítulo primero, el concepto de señal discreta está ligado a la noción de sucesión. En este sentido, denotaremos por  $X$  al conjunto de todas las sucesiones dotado de la convergencia componente a componente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N = x \text{ en } X \iff \lim_{N \rightarrow \infty} x_{N,n} = x_n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Esta noción de convergencia permite definir los filtros discretos con analogía a lo presentado en los capítulos previos.

**Definición 4.1.** Sean  $A$  y  $B$  subespacios de  $X$  lineales e invariantes por traslaciones  $\tau_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Se dice que la aplicación  $D: A \rightarrow B$  es un *filtro discreto* si es lineal, continua y conmuta con todas las traslaciones  $\tau_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . En el resto del texto será siempre  $B = X$  considerado con la convergencia componente a componente, salvo que se explicita lo contrario. Además, la noción de convergencia en  $A$  se explicitará en cada caso estudiado.

Dentro de la teoría de la señal hay diversos tipos de señales discretas que se usan con frecuencia. Introducimos ahora las más usadas.

**Definición 4.2.** Se dice que una señal discreta es *finita* si existen  $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}$  tales que  $x_n = 0$  si  $n < n_0$  o  $n > n_1$ . El espacio vectorial de las señales discretas se denotará por  $E$ .

**Definición 4.3.** Se dice que una señal discreta tiene un *inicio definido* si existe  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $x_n = 0$  si  $n < n_0$ . El espacio vectorial de este tipo de señales se denotará por  $D_+$ .

Al igual que se hace con funciones es posible definir la convolución de señales discretas.

**Definición 4.4.** Sean  $h$  y  $x$  señales discretas. Se define la *convolución* de  $h$  y  $x$ , si existe, como la señal  $y = h * x$  cuyas componentes vienen dadas por

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

**Proposición 4.5.** Sean  $h$  y  $x$  señales discretas cuya convolución está bien definida. Entonces,  $h * x = x * h$  y, por tanto, la convolución es conmutativa.

*Demostración.*

Se considera la señal  $y = h * x$ . Sea  $m \in \mathbb{Z}$  fijo. Es posible escribir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{m-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{m-k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} h_k x_{m-k} = \lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^N h_k x_{m-k}.$$

Ahora, asumiendo que  $-M \leq m \leq N$ , se tiene que

$$\sum_{k=0}^N h_k x_{m-k} = \sum_{j=m-N}^m h_{m-j} x_j \quad \text{y} \quad \sum_{k=-M}^{-1} h_k x_{m-k} = \sum_{j=m+1}^{m+M} h_{m-j} x_j.$$

Las igualdades anteriores permiten reescribir el término del límite anterior como sigue

$$\sum_{k=-M}^N h_k x_{m-k} = \sum_{j=m-N}^m h_{m-j} x_j + \sum_{j=m+1}^{m+M} h_{m-j} x_j = \sum_{j=m-N}^{-1} h_{m-j} x_j + \sum_{j=0}^{m+M} h_{m-j} x_j.$$

La expresión anterior permite concluir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^N h_k x_{m-k} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=m-N}^{-1} h_{m-j} x_j + \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{m+M} h_{m-j} x_j \\ &= \sum_{j=-\infty}^{-1} h_{m-j} x_j + \sum_{j=0}^{\infty} h_{m-j} x_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{m-j} x_j. \end{aligned}$$

El desarrollo anterior es válido para cada  $m \in \mathbb{Z}$ , por lo que  $y = h * x = x * h$  y la convolución es conmutativa.  $\square$

**Proposición 4.6.** Sean  $h, x$  e  $y$  señales discretas tales que las convoluciones  $h * x$  y  $h * y$  están bien definidas. Entonces,  $h * (x + y) = h * x + h * y$ .

*Demostración.*

Por la linealidad de la suma de series se tiene que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k (x_{n-k} + y_{n-k}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k y_{n-k} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

**Observación 4.7.** En varios libros de teoría de la señal se define directamente la convolución para todo tipo de señales, sin prestar atención a la convergencia, como por ejemplo en [Oea97, pág 78] o [Bee03, pág 404]. Nuestro objetivo aquí es precisar cuándo la expresión anterior tiene sentido.

**Proposición 4.8.** Si  $h$  o  $x$  son finitas, entonces  $y = h * x$  está bien definida.

*Demostración.*

Si  $h$  es finita basta escribir

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} = \sum_{k=n_0}^{n_1} h_k x_{n-k}.$$

Como es una suma finita,  $y_n$  existe para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Por otra parte, si  $x$  es finita, en ese caso es posible escribir

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} = \sum_{k=n-n_1}^{n-n_0} h_k x_{n-k},$$

que de nuevo es una suma finita.  $\square$

**Proposición 4.9.** Si  $h$  y  $x$  son señales discretas con un inicio definido, entonces la convolución  $y = h * x$  está bien definida. Además,  $y$  tiene un inicio definido.

*Demostración.*

En las condiciones del enunciado se tiene que existen  $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$  tales que  $h_n = 0$  si  $n < n_0$  y  $x_n = 0$  si  $n < m_0$ .

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} = \begin{cases} \sum_{k=n_0}^{n-m_0} h_k x_{n-k} & \text{si } n \geq n_0 + m_0, \\ 0 & \text{si } n < n_0 + m_0. \end{cases}$$

Una vez más, esta suma es finita para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , por lo que  $y$  está bien definida.  $\square$

Para extender la convolución a más casos es interesante introducir las siguientes definiciones.

**Definición 4.10.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  una sucesión.

1. Se dice que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es de *decrecimiento rápido* si para cada  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , se cumple que

$$|n^k x_n| \rightarrow 0 \text{ si } |n| \rightarrow \infty.$$

2. Se dice que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es de *crecimiento lento* si existen  $A > 0$  y  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tales que

$$|x_n| \leq A(1 + |n|^k)$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Proposición 4.11.** Sean  $h, x$  señales discretas tales que  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es de decrecimiento rápido y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de crecimiento lento. Entonces la convolución  $y = h * x$  está bien definida.

*Demostración.*

Como  $x$  es de crecimiento lento, existen  $A > 0$  y  $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tales que  $|x_n| \leq A(1 + |n|^M)$ . De igual manera, como  $h$  es de decrecimiento rápido, existe  $B > 0$  tal que  $|h_n| < B \frac{1}{1 + |n|^{M+2}}$ . Lo anterior permite acotar cada término como sigue

$$|h_k x_{n-k}| \leq AB \frac{1 + |n-k|^M}{1 + |k|^{M+2}}.$$

Ahora bien, es posible comparar la serie definida por el segundo término de la desigualdad con  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + |k|^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{(1 + |k|^2)(1 + |n-k|^M)}{1 + |k|^{M+2}} &= \frac{1 + |n-k|^M + |k|^2 + |k|^2|n-k|^M}{1 + |k|^{M+2}} = \\ &= \frac{1 + |n-k|^M + |k|^2}{1 + |k|^{M+2}} + \frac{|k|^{M+2}|n/k - 1|^M}{1 + |k|^{M+2}}, \end{aligned}$$

donde ambos cocientes tienden hacia un término finito cuando  $|k| \rightarrow \infty$ . Por tanto, ambas series tienen el mismo carácter lo que permite concluir que la serie  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k}$  es convergente para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , y por tanto la convolución está bien definida.  $\square$

Los espacios  $l^p$  permiten encontrar más situaciones en las que la convolución está definida. Se recuerda ahora su definición.

**Definición 4.12.** Sea  $p \geq 1$ . Se define el espacio  $l^p$  como

$$l^p = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Además, para cada  $x \in l^p$  se define la norma

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

De igual manera, se define el espacio  $l^\infty$  como

$$l^\infty = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \mid \sup_n |x_n| < \infty \right\}.$$

Finalmente, para cada  $x \in l^\infty$  se define la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{Z}\}.$$

**Proposición 4.13.** Sean  $p, q \in [1, \infty]$  exponentes conjugados. Si  $h \in l^p$  y  $x \in l^q$ , entonces la convolución  $y = h * x$  está bien definida. Además,  $y \in l^\infty$  y  $\|h * x\|_\infty \leq \|h\|_p \cdot \|x\|_q$ .

*Demostración.*

Si  $p, q \in (1, \infty)$  basta considerar la desigualdad de Hölder y escribir

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| |x_{n-k}| &\leq \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{n-k}|^q \right)^{1/q} \\ &= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^q \right)^{1/q} = \|h\|_p \|x\|_q. \end{aligned}$$

Como la cota anterior es válida para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces  $y \in l^\infty$  y  $\|y\|_\infty \leq \|h\|_p \cdot \|x\|_q$ .

Si  $p = \infty$  y  $q = 1$  (el caso  $p = 1, q = \infty$  se razona igual) simplemente se tiene que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| |x_{n-k}| \leq \|h\|_\infty \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{n-k}| = \|h\|_\infty \|x\|_1.$$

□

**Proposición 4.14.** Sea  $p \geq 1$ . Si  $h \in l^p$  y  $x \in l^1$  entonces la convolución  $y = h * x$  está bien definida y pertenece a  $l^p$ . Además,  $\|h * x\|_p \leq \|h\|_p \cdot \|x\|_1$ .

*Demostración.*

Sea  $q$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Ahora, es posible escribir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| |x_{n-k}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| |x_{n-k}|^{1/p} |x_{n-k}|^{1/q}.$$

Ahora, sabiendo que  $l^p \subset l^\infty$ , es posible ver que  $\{|h_k| |x_{n-k}|^{1/p}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^p$ . Basta aplicar la desigualdad de Hölder a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^p |x_{n-k}| \leq \|h\|_\infty^p \|x\|_1.$$

Con lo anterior, y sabiendo que  $\{|x_k|^{1/q}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^q$ , es posible aplicar, de nuevo, la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| |x_{n-k}|^{1/p} |x_{n-k}|^{1/q} &\leq \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^p |x_{n-k}| \right)^{1/p} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{n-k}| \right)^{1/q} \\ &= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^p |x_{n-k}| \right)^{1/p} \|x\|_1^{1/q} < \infty. \end{aligned} \quad (4.2)$$

De esta manera, la convolución  $y = h * x$  está bien definida. Para probar que  $y \in l^p$  se debe considerar

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n|^p \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| |x_{n-k}| \right)^p \leq \|x\|_1^{p/q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^p |x_{n-k}| \right),$$

donde en la desigualdad se ha usado la desigualdad (4.2) elevada a la  $p$ . Si fuese posible realizar el intercambio de sumatorios, bastaría escribir

$$\begin{aligned} \|x\|_1^{p/q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^p |x_{n-k}| \right) &= \|x\|_1^{p/q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^p \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_{n-k}| \right) \\ &= \|x\|_1^{p/q} \|h\|_p^p \|x\|_1 = \|x\|_1^{p/q+1} \|h\|_p^p. \end{aligned}$$

Por tanto, es posible escribir finalmente

$$\|h * x\|_p = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p} \leq \|x\|_1^{(p/q+1)/p} \|h\|_p = \|h\|_p \|x\|_1,$$

lo que prueba que  $y \in l^p$ . Falta finalmente justificar el intercambio de entre sumatorios mencionado. Como las series solo involucran términos positivos, es posible aplicar el teorema A.39, que permite asegurar que la suma no cambia al modificar el orden de los suma sumatorios.  $\square$

#### 4.1.1. Filtros discretos

**Proposición 4.15.** La aplicación

$$\begin{aligned} D: A &\rightarrow X \\ x &\mapsto D(x) = h * x \end{aligned} \tag{4.3}$$

es un filtro discreto en los siguientes casos:

- (I)  $h$  es finita y  $A = X$ , donde se considera en  $A$  la convergencia componente a componente.
- (II)  $h \in l^p$  y  $x \in l^q = A$ , donde  $p, q \in [1, \infty]$  son exponentes conjugados. Además, se considera en  $A$  la convergencia inducida por la norma  $q$ .
- (III)  $h \in l^p$  y  $x \in l^1 = A$ . En  $A$  se considera la convergencia dada por la norma 1.
- (IV)  $h \in l^1$  y  $x \in l^p = A$ , donde se considera la convergencia inducida por la norma  $p$ .

*Demostración.*

Hay que comprobar en cada caso que el filtro discreto  $D$  es lineal, invariante bajo traslaciones  $\tau_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , y continuo. La linealidad viene dada por la linealidad de la convolución en ambos casos.

En cuanto a la invarianza, teniendo en cuenta que el término  $n$ -ésimo de  $\tau_m x$  es  $x_{n-m}$ , es posible escribir

$$h * (\tau_m x) = \tilde{y} \implies \tilde{y}_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k-m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{(n-m)-k} = y_{n-m}.$$

Por tanto,  $\tilde{y} = \tau_m y$  y el sistema es invariante. Este razonamiento es válido para todos los casos en los que la convolución está bien definida. Resta analizar la continuidad en cada caso.

En primer lugar, supongamos que  $h$  es finita. Sea  $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$  una sucesión que converge a  $x$  en  $X$ . Hay que ver que  $y_N = h * x_N$  tiende a  $y = h * x$  en  $X$ . Es decir, que  $|y_{N,n} - y_n|$  tiende a 0 cuando  $N$  tiende a infinito. Por tanto, con la notación de la proposición 4.8 se tiene que

$$\begin{aligned} |y_{N,n} - y_n| &= \left| \sum_{k=n_0}^{n_1} h_k x_{N,n-k} - \sum_{k=n_0}^{n_1} h_k x_{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=n_0}^{n_1} |h_k| |x_{N,n-k} - x_{n-k}|. \end{aligned}$$

Ahora, como la suma es finita, la última expresión tiende a cero cuando  $N \rightarrow \infty$ .

Para el segundo caso, sean  $p, q \in [1, \infty]$  exponentes conjugados. Se considera  $h \in l^p$  y  $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$  una sucesión de elementos de  $l^q$  que converge a  $x$  en  $l^q$ . En estas condiciones es posible escribir

$$|y_{N,n} - y_n| \leq \|h * (x_N - x)\|_{\infty} \leq \|h\|_p \|x_N - x\|_q.$$

Ahora, el segundo término tiende a cero cuando  $N$  tiende a infinito.

Finalmente, sea  $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$  una sucesión de elementos de  $l^1$  que converge a  $x$  en  $l^1$ . Teniendo en cuenta que  $l^p \subset l^{\infty}$ , es posible aplicar la desigualdad de Hölder como sigue

$$|y_{N,n} - y_n| \leq \|h * (x_N - x)\|_p \leq \|h\|_p \|x_N - x\|_1.$$

El último término tiende a cero cuando  $N \rightarrow \infty$ . El razonamiento para el cuarto caso es análogo. Por tanto, la aplicación (4.3) es un filtro en los cuatro casos del enunciado.  $\square$

**Observación 4.16.** En [GW99, pág 372] se afirma sin demostración que la aplicación dada en la proposición anterior es un filtro en los siguientes casos adicionales:

- (I)  $h$  tiene un inicio definido y  $x \in D_+ = A$  el conjunto de las señales con inicio definido dotado de la convergencia componente a componente.
- (II)  $h \in X$  y  $A = E$  el espacio de las señales finitas, considerado con la convergencia componente a componente.
- (III)  $h$  es de decrecimiento rápido y  $A = S$ , donde  $S$  denota el espacio de las señales discretas de crecimiento lento. Se considera la convergencia componente a componente.

Sin embargo, sin imponer condiciones adicionales, ninguno define un filtro. Se presentan ahora diversos contraejemplos donde falla la continuidad en cada uno de los casos anteriores.

**Ejemplos 4.17.**

- (I) Sea  $h$  una señal discreta con un inicio definido y  $\{x_N\}_{N=1}^\infty$  una sucesión de elementos de  $D_+$  dadas de la siguiente manera

$$h_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0, \end{cases} \quad x_{N,n} = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } n \geq -N, \\ 0 & \text{si } n < -N. \end{cases}$$

La sucesión  $\{x_N\}_{N=1}^\infty$  converge a cero. Sea  $y_N = h * x_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Analizamos el límite de  $\{y_{N,n}\}_{N=1}^\infty$ :

$$y_{N,n} = \sum_{k=0}^{n+N} \frac{1}{N} = \frac{n+N+1}{N} = 1 + \frac{n+1}{N} \quad \text{si } N \geq -n.$$

La expresión anterior tiende a 1 cuando  $N \rightarrow \infty$ , que es distinto de 0. Por tanto, la aplicación (4.3) no es continua considerando  $h$  señal con inicio definido y  $A = D_+$  y, en consecuencia, no es un filtro.

- (II) Sea  $h$  una señal discreta y  $\{x_N\}_{N=1}^\infty$  una sucesión de elementos de  $E$ , ambas dadas por

$$h_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad x_{N,n} = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } -N \leq n \leq N, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La sucesión  $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$  converge a cero cuando  $N \rightarrow \infty$ . Ahora, si  $y_N = h * x_N$ , se tiene que

$$y_{N,n} = \sum_{k=n-N}^{n+N} \frac{1}{N} = \frac{2N+1}{N}.$$

La expresión anterior tiende a 2 cuando  $N$  tiende a infinito, por lo que de nuevo la aplicación (4.3) con  $h \in X$  y  $A = E$  no es continua.

(III) Se considera ahora  $h$  una señal de decrecimiento rápido y  $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$  una sucesión de elementos de  $S$ , el espacio de las señales de crecimiento lento, dados por

$$h_n = e^{-n^2} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad x_{N,n} = \begin{cases} \frac{1}{N}e^{n^2} & \text{si } -N \leq n \leq N, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Una vez más, la sucesión  $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$  converge a cero cuando  $N$  tiende a infinito. De nuevo, sea  $y_N = h * x_N$ . Se analiza ahora la sucesión  $\{y_{N,0}\}_{N=1}^{\infty}$ :

$$y_{N,0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{-k} = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{N} e^{-k^2} e^{(-k)^2} = \frac{2N+1}{N}.$$

El término anterior tiende a 2 cuando  $N$  tiende a infinito, por lo que la aplicación (4.3) no es un filtro si  $h$  es de decrecimiento rápido y  $A = S$ .

Al igual que se hizo para el caso continuo, es de interés analizar la causalidad del filtro  $D: A \rightarrow X$  previo. Para esto, es necesario introducir los siguientes conceptos.

**Definición 4.18.** Se define la señal discreta *impulso unitario*  $\delta$  como la sucesión dada por

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Además, dado un filtro  $D: A \rightarrow X$ , se define la *respuesta impulso* como  $h = D\delta$ .

**Proposición 4.19.** El filtro  $D: A \rightarrow X$  de las proposiciones previas es causal si, y solo si  $h$  es una señal causal.

*Demostración.*

Como el sistema es lineal e invariante, dadas  $x$  e  $y = h * x$  señales discretas, se puede enunciar la causalidad como

$$D \text{ es causal} \iff [x_n = 0 \text{ para todo } n < 0 \implies y_n = 0 \text{ para todo } n < 0].$$

En primer lugar, supongamos que  $D$  es causal. Se considera la señal  $x = \delta$ . Como  $x_n = 0$  para cualquier  $n < 0$ , por la causalidad del filtro se tiene que  $h_n = 0$  para cualquier  $n < 0$  y por tanto  $h$  es causal.

Por otro lado, si  $h$  es causal, dada  $x$  una señal discreta causal, se considera  $y = h * x$ . Los coeficientes vienen dados por

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k}.$$

Debido a la causalidad de la señal  $x$ , se tiene que  $y_n = 0$  si  $n < 0$ . □

**Proposición 4.20.** El filtro definido en las proposiciones previas es estable si, y solo si  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty$ .

*Demostración.*

En primer lugar, supongamos que  $D$  es estable. Entonces existe una constante  $M > 0$  tal que  $\|Dx\|_{\infty} \leq M\|x\|_{\infty}$  para toda  $x \in A \cap l^{\infty}$ . Para la sucesión  $h$  es posible escribir cada término en su forma polar,  $h_k = |h_k|e^{i\theta_k}$ , donde  $\theta_k$  denota un argumento de  $h_k$ . Se considera la sucesión de señales  $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$  dadas por

$$x_{N,n} = \begin{cases} e^{-i\theta_n} & \text{si } -N \leq n \leq N, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto,  $x_N$  pertenece al espacio de señales de entrada para todos los posibles filtros estudiados para todo  $N \in \mathbb{N}$ . Si se considera la señal  $y = h * x_N$ , el término  $y_0$  viene dado de la siguiente manera

$$y_0 = \sum_{k=-N}^N |h_k| e^{i\theta_k} e^{-i\theta_k} = \sum_{k=-N}^N |h_k| < M,$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la estabilidad del filtro. Como lo anterior es válido para todo  $N \in \mathbb{N}$ , es posible concluir que  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty$ .

Por otro lado, supongamos que  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty$  y sea  $x$  una señal acotada. En estas condiciones  $h \in l^1$  y  $x \in l^{\infty}$ , luego la convolución  $y = h * x$  está bien definida gracias a la proposición 4.13. Además, sabemos que

$$\|y\|_{\infty} \leq \|h\|_1 \|x\|_{\infty},$$

por lo que el filtro es estable. □

Hasta ahora, únicamente hemos tratado con filtros cuya salida venía dada por una convolución. Sin embargo, en las referencias básicas de teoría de la señal, se enuncia que cualquier sistema lineal, invariante bajo traslaciones y continuo, es decir, un filtro, es un sistema convolucional (ver, por ejemplo, [Oea97, pág 77-78]), sin realizar ninguna prueba rigurosa. Se presenta aquí la demostración de este resultado.

**Proposición 4.21.** Sea  $D: X \rightarrow X$  un filtro con  $X$  el espacio de todas las señales discretas dotado de la convergencia componente a componente. Entonces  $D$  es un sistema convolucional y  $D(x) = h * x$ , donde  $h$  es la respuesta impulso.

*Demostración.*

Sea  $x \in X$  una señal discreta. Gracias a la señal impulso unitario es posible escribir  $x$  como sigue

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \tau_k \delta = \lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^N x_k \tau_k \delta.$$

Ahora, como  $D$  es lineal y continuo por ser un filtro, se sigue que

$$\begin{aligned} y = D(x) &= D\left(\lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^N x_k \tau_k \delta\right) = \lim_{N, M \rightarrow \infty} D\left(\sum_{k=-M}^N x_k \tau_k \delta\right) \\ &= \lim_{N, M \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-M}^N x_k D(\tau_k \delta)\right) = \lim_{N, M \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-M}^N x_k \tau_k D(\delta)\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \tau_k D(\delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \tau_k h, \end{aligned}$$

donde se ha usado que  $D$  es invariante bajo traslaciones y  $h = D\delta$ . Además, de lo anterior se obtiene que, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $y_n$  viene dado por

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k}.$$

Por tanto,  $y = D(x) = x * h = h * x$ . □

El resultado anterior demuestra que, si se conoce la respuesta impulso de un filtro, entonces es posible construir la señal de respuesta para cualquier entrada. Por tanto, conocer dicha función caracteriza de manera completa el filtro.

## 4.2. Transformada $z$

La representación de las señales discretas estudiada hasta ahora no es la única empleada en la teoría de la señal. Muy íntimamente relacionada con la transformada de Fourier discreta, transformada que no trataremos en este texto, surge la transformada  $z$ , definida en el plano complejo. Antes de introducir la definición de la transformada  $z$  se recuerda de la asignatura *Variable Compleja* la siguiente proposición acerca del radio de convergencia de series de potencias (ver [Ash71, pág 25]):

**Proposición 4.22.** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  una serie de potencias. Se considera el radio de convergencia de la serie,  $r = (\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^{1/n}))^{-1}$ . La serie converge absolutamente en  $B(z_0, r)$  y uniformemente en sus subconjuntos compactos. La serie no converge si  $|z - z_0| > r$ .

**Definición 4.23.** Dada una señal discreta  $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  se define la *transformada  $z$*  de  $x$  como la función compleja

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n},$$

si el abierto de convergencia de la serie es no vacío.

La expresión anterior se puede ver como una serie de Laurent centrada en  $z_0 = 0$ . Por el resultado previo, esta serie converge en el interior de una corona circular centrada en el origen  $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ , posiblemente vacía, con  $0 \leq r \leq R \leq \infty$ . La serie no converge en  $\overline{A}^c$ , es decir, fuera de la corona, y del comportamiento en los bordes no se puede asegurar nada. Esta situación se representa en la figura 4.1.

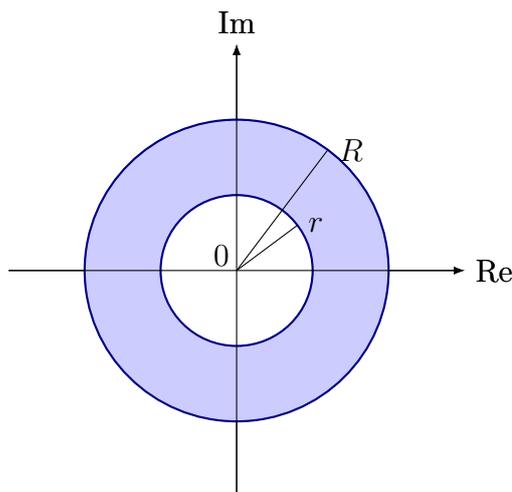


Figura 4.1: Corona circular donde converge la transformada  $z$ .

La transformada  $z$  se puede dividir en sus partes causal y anticausal, que vienen dadas como

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} x_n z^{-n}$$

respectivamente. En la práctica es usual trabajar con señales causales, las cuales cuentan únicamente con la parte de su mismo nombre de la transformada  $z$ . En este caso, contiene solamente términos  $1/z$ , por lo que para estas señales  $R = \infty$ , y la transformada  $z$  converge en el complementario de  $\overline{B}(0, r)$ . Análogamente, la parte anticausal consiste en una serie de potencias cuyo abierto de convergencia es el disco  $B(0, R)$ .

**Observación 4.24.** Con la definición previa de corona de convergencia, esta no puede contener nunca al cero, ya que en el mejor de los casos estaría en la frontera. Sin embargo, por lo comentado anteriormente, si la señal es anticausal, esto es,  $x_n = 0$  si  $n > 0$ , sí se podría incluir. Sin embargo, se trabajará de manera general siempre en el primer caso.

**Ejemplos 4.25.**

- (I) Sea  $b \in \mathbb{C}$ . Se considera la señal discreta dada por  $x_n = b^n$  si  $n \geq 0$  y  $x_n = 0$  si  $n < 0$ . Se trata de una señal causal. La transformada  $z$  viene dada por la serie geométrica

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^n.$$

Esta serie converge si  $|z| > |b|$ . Además, su suma es

$$X(z) = \frac{1}{1 - b/z} = \frac{z}{z - b} \quad \text{si } |z| > |b|.$$

- (II) Por otro lado, dado  $b \in \mathbb{C}$ , sea la señal discreta  $y_n = -b^n$  si  $n < 0$  y  $y_n = 0$  si  $n \geq 0$ . Su transformada  $z$ , que de nuevo es una serie geométrica, es

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n.$$

La serie anterior converge si  $|b| > |z|$ . Su suma viene dada por

$$Y(z) = \frac{-z/b}{1 - z/b} = \frac{z}{z - b} \quad \text{si } |z| < |b|.$$

Los ejemplos anteriores muestran el cálculo de dos transformadas  $z$  sencillas. Además, ilustran el hecho de que dos señales discretas diferentes pueden tener la misma expresión para su transformada. Esto reivindica la importancia de especificar la corona de convergencia.

### 4.2.1. Propiedades

Se presentan ahora las principales propiedades de la transformada  $z$ .

**Proposición 4.26.** (*Linealidad*) Sean  $x, y \in X$  señales discretas. Dados  $a, b \in \mathbb{C}$ , se considera  $w = ax + by$ . Además, sean  $X(z)$  e  $Y(z)$  las transformadas  $z$  de  $x$  e  $y$  con coronas de convergencia  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente. Entonces se tiene que

$$W(z) = aX(z) + bY(z) \quad \text{si } z \in A = A_1 \cap A_2,$$

donde  $W(z)$  es la transformada  $z$  de  $w$ .

*Demostración.*

Basta escribir, por la linealidad de la suma de series,

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (ax_n + by_n)z^{-n} \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n} = aX(z) + bY(z), \quad z \in A_1 \cap A_2. \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.27.** (*Desplazamiento temporal*) Sean  $x$  una señal discreta y  $X$  su transformada  $z$ . Se considera la traslación  $\tau_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . La transformada  $z$  de  $\tau_k x$  viene dada por  $z^{-k}X(z)$ .

*Demostración.*

Sea  $k \in \mathbb{Z}$  y  $x \in X$  una señal discreta. Se considera  $\tau_k x = \{x_{n-k}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Por tanto, se tiene que

$$\tilde{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-k} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-(n+k)} = z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = z^{-k} X(z),$$

donde  $\tilde{X}(z)$  y  $X(z)$  denotan la transformadas  $z$  de  $\tau_k x$  y  $x$  respectivamente.

□

**Proposición 4.28.** (*Convolución*) Sean señales discretas  $h$  y  $x$  tales que su convolución  $y = h * x$  está bien definida. Además, sean  $H(z)$  y  $X(z)$  las transformadas  $z$  de  $h$  y  $x$ , que convergen en las coronas  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente. Entonces,

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \quad \text{si } z \in A = A_1 \cap A_2,$$

donde  $Y(z)$  denota la transformada  $z$  de  $y$ .

*Demostración.*

Sean  $h, x$  señales discretas tales que  $y = h * x$  está bien definida y viene dada por (4.1). En este caso, se puede escribir

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} \right) z^{-n}.$$

Supongamos que el orden de los sumatorios se puede intercambiar. Entonces se tiene que

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( h_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-k} z^{-n} \right).$$

Observemos que  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-k} z^{-n} = z^{-k} X(z)$ , luego

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (h_k z^{-k} X(z)) \\ &= X(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = H(z) \cdot X(z), \quad z \in A_1 \cap A_2. \end{aligned}$$

Por tanto, basta con justificar que el orden de las sumas se puede intercambiar. Para esto se va a hacer uso del teorema de Fubini (ver A.38) aplicado a los espacios  $(\mathbb{Z}, \mathcal{G}, \mu)$ , donde  $\mathcal{G}$  denota el conjunto partes de  $\mathbb{Z}$  y  $\mu$  es la medida de conteo. Para  $z \in A_1 \cap A_2$  se considera ahora el sumatorio

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| |x_{n-k}| |z^{-n}| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| |z^{-k}| |x_{n-k}| |z^{-(n-k)}| \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| |z^{-k}| \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_{n-k}| |z^{-(n-k)}| \right) \\ &= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| |z^{-k}| \right) \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| |z^{-n}| \right) < \infty, \end{aligned}$$

donde la última expresión es finita ya que la serie de potencias converge absolutamente dentro de su corona de convergencia gracias a la proposición 4.22. Además, como es una suma de términos positivos el intercambio de sumatorios está justificado por la proposición A.39. Por tanto, la función  $(n, k) \mapsto h_k x_{n-k} z^{-n}$  es integrable en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  con la medida producto por serlo su valor absoluto si  $z \in A_1 \cap A_2$ . En estas condiciones, es posible aplicar el teorema de Fubini, lo que justifica el intercambio de orden en los sumatorios y, por tanto, permite concluir la prueba.  $\square$

**Observación 4.29.** En varios textos de teoría de la señal esta demostración se realiza sin justificar la permuta de sumatorios, simplemente desarrollando la primera parte de la prueba anterior, como en [Oea97, pág 812].

En el contexto anterior se puede dar la siguiente definición.

**Definición 4.30.** Dado  $D: A \rightarrow X$  un filtro discreto tal que  $Dx = h * x$ , la transformada  $z$  de la señal  $h$  recibe el nombre de *función de transferencia* y se denota por  $H(z)$ .

Para los filtros discretos es posible caracterizar la causalidad con respecto a su función de transferencia. Se recuerda de la asignatura *Variable Compleja* el siguiente resultado de singularidades evitables en el infinito (ver [Ash71, pág 66]).

**Proposición 4.31.** Sea  $U$  un conjunto abierto de  $\mathbb{C}$  tal que existe  $R > 0$  con  $\{z \in \mathbb{C}: |z| > R\} \subset U$ , y  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Son equivalentes:

- (I)  $\infty$  es una singularidad evitable de  $f$ .
- (II) Existe  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$ .
- (III) El desarrollo de Laurent de  $f$  en  $\{z \in \mathbb{C}: |z| > R\} \subset U$  es de la forma  $f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ .

**Proposición 4.32.** Un filtro discreto es causal si, y solo si la región de convergencia de  $H(z)$  es el exterior de un círculo y  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} H(z)$  existe y es finito.

*Demostración.*

En primer lugar, gracias a la proposición 4.19, el filtro es causal si, y solo si  $h$  es causal. Esta condición es equivalente a que el desarrollo de Laurent de  $H$  no contenga términos con potencias positivas de  $z$ . Por tanto, gracias a la proposición previa se concluye el resultado, ya que  $H$  converge fuera de un círculo.  $\square$

Como se ha constatado en el ejemplo presentado anteriormente, conocida la transformada  $z$  de una señal, se debe ser cuidadoso al calcular la señal original ya que la región de convergencia juega un papel fundamental. En este contexto, se recuerda el siguiente resultado de la asignatura *Variable Compleja*, extraído de [Ash71, pág 63].

**Teorema 4.33. (Desarrollos de Laurent)** Si  $f$  es una función holomorfa en la corona  $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ , entonces existe una única sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tal que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n (z - z_0)^n, \quad z \in A.$$

Además, si  $\rho$  es tal que  $r < \rho < R$ , entonces los coeficientes  $x_n$  vienen dados por

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0, \rho)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Asimismo, la serie converge absolutamente en  $A$  y uniformemente en los subconjuntos compactos de  $A$ .

El teorema previo justifica el siguiente resultado.

**Corolario 4.34.** Sea  $X(z)$  la transformada  $z$  de una señal  $x$  y la corona  $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$  donde está definida. Los términos de la señal discreta original vienen dados por

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, \rho)} \frac{X(z)}{z^{-n+1}} dz,$$

donde  $r < \rho < R$ .

Esta integral puede ser evaluada mediante el teorema de los residuos [Ash71, pág 69].

**Observación 4.35.** Es importante notar, gracias al corolario anterior, que dada la corona de convergencia y  $X(z)$  una transformada  $z$ , es posible determinar de manera única la señal original  $x$ .

Finalmente, es posible dar una condición suficiente para analizar la estabilidad de un filtro gracias a la función de transferencia. Teniendo en cuenta la proposición 4.20 se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 4.36.** Sea  $D$  un filtro discreto con función de transferencia  $H(z)$ . Si la circunferencia unidad está contenida en la corona de convergencia de  $H(z)$ , entonces  $D$  es estable.

*Demostración.*

Si la circunferencia unidad pertenece a la corona de convergencia, entonces  $H(z)$  converge absolutamente para todo  $z$  con módulo igual a uno, en particular para  $z = 1$ . Por tanto,  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty$  y resulta que el filtro es estable.  $\square$

**Observación 4.37.** En algunas referencias, como [GW99, pág 378] y [Oea97, pág 778] se afirma que la proposición anterior es una doble implicación. Es decir, que también se cumple que si  $D$  es estable, entonces su corona de convergencia incluye la circunferencia unidad. Sin embargo, solo se puede asegurar que la serie  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k}$  converge absolutamente para  $|z| = 1$ , pero podría ocurrir que la circunferencia unidad estuviese en la frontera de la corona. Para ilustrar este ejemplo consideramos la señal  $h$  dada por

$$h_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{si } n < 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Su transformada  $z$  solo tendrá parte anticausal, y su radio de convergencia  $R$  será:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2/n}} = 1.$$

Además,  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 < \infty$ . Por tanto, el filtro cuya respuesta impulso coincida con  $h$  es estable, pero la corona de convergencia de  $H(z)$  no contiene a la circunferencia unidad.

### 4.3. Aplicación a filtros discretos

En capítulos previos se han estudiado filtros analógicos gobernados por ecuaciones diferenciales lineales. Para el caso de filtros discretos es habitual que su comportamiento se rija a través de una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^q b_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^p a_j x_{n-j}, \quad b_0 = 1. \quad (4.4)$$

Para determinar completamente  $y$  de manera general es necesario imponer  $q$  condiciones iniciales, ya que para determinar  $y_q$  se deben conocer  $y_0, \dots, y_{q-1}$ . La transformada  $z$  es de gran utilidad en el estudio de este tipo de filtros, como muestra el siguiente resultado.

**Proposición 4.38.** Sea  $D$  un filtro regido por la ecuación en diferencias (4.4). Entonces, la forma funcional de su función de transferencia viene dada por

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^p a_j z^{-j}}{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}.$$

*Demostración.*

Sean  $x$  e  $y = D(x)$  señales discretas tales que sus transformadas  $z$  tienen regiones de convergencia  $A_1$  y  $A_2$  no vacías y  $X(z)$  no se anula en su corona de convergencia. Se supone, además, que  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ . Como  $D$  es un filtro, gracias a la relación (4.4) la señal de entrada y salida están relacionadas de la siguiente manera

$$\sum_{k=0}^q b_k \tau_k y = \sum_{j=0}^p a_j \tau_j x.$$

Ahora, usando la propiedad de desplazamiento temporal de la transformada  $z$  se obtiene que

$$\left( \sum_{k=0}^q b_k z^{-k} \right) Y(z) = \left( \sum_{j=0}^p a_j z^{-j} \right) X(z).$$

Debido a que  $H(z) = Y(z)/X(z)$ , como  $X(z) \neq 0$  si  $z \in A_1$ , se obtiene que la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^p a_j z^{-j}}{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}} \quad \text{si } z \in A_1 \cap A_2.$$

□

En la prueba anterior la corona de convergencia para  $H(z)$  depende de la señal de entrada elegida. Por tanto, no es posible determinar con precisión la función de transferencia. Esto es consistente con el hecho de que, al no haber fijado condiciones iniciales para la ecuación en diferencias, no es posible determinar una solución única.

La función  $H$  puede tener varias regiones de convergencia en función de sus polos y cada una dar una respuesta impulso diferente. Sin embargo, este problema se puede solucionar estableciendo requisitos adicionales para el filtro. Por ejemplo, si se asume la causalidad del sistema la región de convergencia debe ser el exterior de un círculo, lo que determina la salida del sistema de manera de única. Por otro lado, si se desea que el filtro sea estable, entonces la región de convergencia escogida debe contener la circunferencia unidad. Estas dos condiciones no tienen porque cumplirse a la vez, por lo que es posible encontrar filtros regidos por ecuaciones en diferencias que no sean estables y causales simultáneamente.

### 4.3.1. Filtro RC discreto

Con el objetivo de ejemplificar el uso de la transformada  $z$  se va a estudiar el filtro *RC* discreto. El comportamiento de este filtro viene dado por la

ecuación en diferencias

$$RC(y_n - y_{n-1}) + y_n = x_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Es posible reescribir la ecuación como

$$\begin{aligned} y_n(RC + 1) - RCy_{n-1} = x_n &\implies y_n - \frac{RC}{RC + 1}y_{n-1} = \frac{1}{RC + 1}x_n \\ &\implies y_n - by_{n-1} = cx_n, \end{aligned}$$

con  $b = RC/(RC + 1)$  y  $c = 1/(RC + 1)$ . Ahora, es posible aplicar la última proposición vista. Por tanto, es posible escribir la función de transferencia como

$$H(z) = \frac{c}{1 - bz^{-1}}.$$

La función tiene un polo en  $z = b$ , luego existen dos posibles coronas donde la transformada  $z$  puede converger,  $|z| < b$  o  $|z| > b$ . Como el filtro es causal, sabemos que  $H(z)$  debe converger en el exterior de un círculo, luego debe ser el segundo caso. Por otra parte, como  $b < 1$ , la circunferencia unidad está contenida en la corona de convergencia, por lo que el filtro también es estable. En esta situación, estamos frente a una serie geométrica y se puede escribir

$$H(z) = c \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^n = c \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{-n} \implies h_n = \begin{cases} cb^n & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Con lo anterior queda determinada la respuesta impulso y la función de transferencia y por tanto, queda caracterizado el filtro.



# Apéndice A

## A.1. Transformada de Fourier

Los resultados que se presentan a continuación se pueden encontrar en su mayoría en [GW99] y [Rud99].

**Definición A.1.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . La *transformada de Fourier de  $f$*  es la función dada por

$$\mathcal{F} f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x) dx,$$

si  $\xi \in \mathbb{R}$ . De igual forma, se escribe

$$\overline{\mathcal{F} f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x} f(x) dx,$$

que denota la *transformada de Fourier conjugada*.

Esta última expresión representa la transformada inversa de Fourier en el sentido que ahora se precisa.

**Proposición A.2.** Si  $f$  y  $\hat{f}$  pertenecen a  $L^1(\mathbb{R})$ , entonces  $\overline{\mathcal{F} \hat{f}}(t) = f(t)$  c.s. en  $\mathbb{R}$ . En particular, se da la igualdad en todos los puntos donde  $f$  es continua.

Esta transformada inversa funciona de manera adecuada en el espacio  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Proposición A.3.** La transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  es una aplicación biyectiva de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  que es continua en el sentido de convergencia del espacio  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . La aplicación inversa corresponde a  $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ . Es decir, las relaciones

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R},$$

son válidas para toda  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Se presentan ahora varias propiedades de uso frecuente de la transformada de Fourier.

**Proposición A.4.**

- (I) Si  $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  y todas sus derivadas  $f^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , están en  $L^1(\mathbb{R})$ , entonces

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^k \hat{f}(\xi).$$

- (II) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tiene soporte acotado, entonces  $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .
- (III) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(\xi), \quad \tau_a \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(e^{2\pi i a x} f(x))(\xi).$$

Hasta ahora, solo se ha definido la transformada de Fourier para funciones en  $L^1(\mathbb{R})$ , pero es posible extender esta transformada a funciones de  $L^2(\mathbb{R})$  en el sentido que ahora se precisa.

**Teorema A.5. (de Plancherel).** Existe una aplicación lineal  $\psi: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  que verifica que:

- (I)  $\psi(f) = \hat{f}$  si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .
- (II)  $\psi$  es una isometría lineal sobreyectiva y para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se cumple que:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2 dx.$$

En la práctica, la imagen de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  por la isometría  $\psi$  también se denota por  $\hat{f}$  o  $\mathcal{F}(f)$  e igualmente recibe el nombre de transformada de Fourier (o transformada de Fourier-Plancherel).

## A.2. Convolución y transformada de Fourier

De nuevo, la mayor parte de resultados han sido obtenidos de [GW99].

**Definición A.6.** Sean  $f, g$  funciones medibles en  $\mathbb{R}$ . El *producto de convolución*, o simplemente *convolución*, de  $f$  y  $g$  es la función, si existe, dada por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)du.$$

Es posible caracterizar la existencia de la convolución en varios casos generales.

**Proposición A.7.** Sean  $p, q \in [1, \infty]$  exponentes conjugados (es decir,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ). Sean  $f \in L^p(\mathbb{R})$  y  $g \in L^q(\mathbb{R})$ . Entonces:

- (I)  $f * g$  es continua y acotada en  $\mathbb{R}$ .
- (II)  $\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

El siguiente resultado puede encontrarse en [Hea99, pág 172].

**Proposición A.8. (Desigualdad de Young)** Sean  $p, q, r \in [1, \infty]$  cumpliendo que  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + 1$ . Si  $f \in L^p(\mathbb{R})$  y  $g \in L^q(\mathbb{R})$ , entonces la convolución  $f * g$  está bien definida c.s. en  $\mathbb{R}$  y pertenece a  $L^r(\mathbb{R})$ . Además, se cumple que

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

La transformada de Fourier tiene una propiedad especial en este contexto, y es que intercambia la convolución por la multiplicación puntual.

**Proposición A.9.** Dadas  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , se tiene que:

- (I)  $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ .
- (II) Si, además,  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$  están en  $L^1(\mathbb{R})$ , entonces

$$\widehat{\hat{f} \cdot \hat{g}}(\xi) = (\hat{f} * \hat{g})(\xi) \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Debido a la extensión de la transformada de Fourier a funciones pertenecientes a  $L^2(\mathbb{R})$  es posible enunciar un resultado parecido al anterior.

**Proposición A.10.** Dadas  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , se tiene que:

- (I)  $f * g = \mathcal{F}(\hat{f} \cdot \hat{g})$ .
- (II) Además  $\widehat{\hat{f} \cdot \hat{g}} = \hat{f} * \hat{g}$ .

### A.3. Distribuciones

Los resultados siguientes han sido extraídos de [GW99] y [Mit13].

**Proposición A.11.** Si  $f$  es una función localmente integrable en  $\mathbb{R}$ , entonces el funcional  $T_f: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

es una distribución. Además, la aplicación de  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  en  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  dada por  $f \rightarrow T_f$  está bien definida, es lineal e inyectiva.

La proposición anterior justifica el nombre de funciones generalizadas para las distribuciones.

**Ejemplo A.12** (*Delta de Dirac*). Sea  $a$  un número real y  $\delta_a$  la aplicación definida en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  por

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a).$$

Como la convergencia uniforme implica la puntual,  $\delta_a$  es una distribución. Para  $a = 0$  se escribe simplemente  $\delta$ .

**Proposición A.13.** Se tiene que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ , donde todas las inmersiones son continuas.

**Proposición A.14.** Se tiene que  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , donde todas las inmersiones son continuas.

Se introduce ahora el concepto del producto de una función y una distribución.

**Definición A.15.** Sea  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  y  $g \in \mathcal{C}^\infty$ . Se define el producto  $gT$  como

$$gT(\varphi) = T(g\varphi)$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

La definición tiene sentido, ya que en el caso anterior  $g\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Además,  $gT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Definición A.16.** Sea  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se define la derivada de orden  $n$  de una distribución como la distribución  $T^{(n)}$  definida por

$$T^{(n)}(\varphi) = (-1)^n T(\varphi^{(n)}).$$

Esta expresión tiene sentido debido a la definición del espacio  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , ya que si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , entonces  $\varphi^{(n)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Además, para la continuidad, si  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  converge a  $\varphi$  en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , entonces  $\{\varphi_n^{(p)}\}_{n=1}^\infty$  converge a  $\varphi^{(p)}$  en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  para cada  $p \in \mathbb{N}$ .

**Definición A.17.** Dado  $a \in \mathbb{R}$  y  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  se define la *traslación*  $\tau_a T$  como la distribución definida por

$$\tau_a T(\varphi) = T(\tau_{-a}\varphi)$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

**Definición A.18.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  medible. Se dice que  $f$  es de *crecimiento lento* si existen  $C > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  tales que

$$|f(x)| \leq C(1 + x^2)^N.$$

Este tipo de funciones tienen una gran presencia en las distribuciones temperadas, como muestran los siguientes resultados.

**Proposición A.19.** Toda función de crecimiento lento  $f$  es una distribución temperada.

**Lema A.20.** Sea  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Si  $f$  y todas sus derivadas son de crecimiento lento y dada  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , entonces  $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Proposición A.21.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Si  $f$  y todas sus derivadas son de crecimiento lento y  $T$  es una distribución temperada, entonces  $fT$  es una distribución temperada.

**Proposición A.22.** Las funciones de  $L^p(\mathbb{R})$ , con  $p \geq 1$ , son distribuciones temperadas.

## A.4. Convolución de distribuciones

Los resultados que ahora se exponen se pueden consultar en [GW99].

**Proposición A.23.** Sean  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  y  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  verificando una de las tres condiciones siguientes:

- (1)  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  y  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .
- (2)  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  y  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .
- (3)  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  y  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ .

Entonces la función  $\psi$  definida por

$$\psi(x) = \tau_x T(\varphi),$$

es de clase  $\mathcal{C}^\infty$  en  $\mathbb{R}$  y se tiene que

$$\psi^{(k)}(x) = \tau_x T(\varphi^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

**Definición A.24.** Sea  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  y  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  verificando una de las condiciones de la proposición A.23. Se llama *convolución* de  $\varphi$  y  $T$  a la función  $\varphi * T$  definida por

$$(\varphi * T)(x) = T_y(\varphi(x - y)) = T(\tau_x \tilde{\varphi}) = \tau_{-x} T(\tilde{\varphi}),$$

donde  $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(-y)$ . El subíndice  $y$  denota la “variable de integración”, es decir, la variable de la que depende la función.

**Proposición A.25** ( $\mathcal{E}' * \mathcal{D}'$ ). Sean  $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  y  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

- (I) Entonces existe una distribución, llamada *convolución* de  $S$  y  $T$  y denotada por  $S * T$ , tal que, dada  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$(S * T)(\varphi) = S_t(T_x(\varphi(x + t))) = T_u(S_x(\varphi(x + u))).$$

Los subíndices representan la variable de “integración”.

- (II) La aplicación  $(S, T) \mapsto S * T$ , de  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  a  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  es continua respecto a cada variable.
- (III) Si  $\text{sop}(S) = A$  y  $\text{sop}(T) = B$ , entonces  $\text{sop}(S * T) \subset A + B$ .

**Proposición A.26.** Sea  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

- (I) Entonces

$$\delta_a * T = T * \delta_a = \tau_a T,$$

- (II) Para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\delta^{(k)} * T = T * \delta^{(k)} = T^{(k)}.$$

**Proposición A.27.** La convolución de  $n$  distribuciones, de las cuales  $n - 1$  tienen soporte compacto, es asociativa y conmutativa.

Se introduce ahora un nuevo espacio de distribuciones que es útil para caracterizar los sistemas causales.

**Definición A.28.** Se representa por  $\mathcal{D}'_+$  al espacio de las distribuciones cuyo soporte se encuentra a la derecha de un punto. Es decir,

$$T \in \mathcal{D}'_+ \iff \text{sop}(T) \subset [t_0, \infty) \text{ para algún } t_0 \in \mathbb{R}.$$

Este espacio se suele asociar con las señales causales.

**Proposición A.29.** Sean  $S, T \in \mathcal{D}'_+$ . Existe entonces una distribución, llamada *convolución* de  $S$  y  $T$  y denotada por  $S * T$ , tal que, dada  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$(S * T)(\varphi) = S_t(T_x(\varphi(x + t))) = T_u(S_x(\varphi(x + u))).$$

Al igual que en casos anteriores, los subíndices representan la variable de “integración”.

**Proposición A.30.** Si  $S, T \in \mathcal{D}'_+$  con  $\text{sop}(S) \subset [a_1, \infty)$  y  $\text{sop}(T) \subset [a_2, \infty)$ , entonces

$$\text{sop}(S * T) \subset [a_1 + a_2, \infty),$$

y por tanto  $S * T$  está en  $\mathcal{D}'_+$ .

## A.5. Transformada de Fourier y distribuciones

Los resultados siguientes se pueden encontrar [GW99] y [Mit13].

**Definición A.31.** Sea  $T$  una distribución temperada. Se define la transformada de Fourier de  $T$ , denotada por  $\hat{T}$  o  $\mathcal{F}(T)$ , como

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}) \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

La aplicación  $\hat{T}$  es una distribución temperada debido a que la transformada de Fourier es un operador continuo en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (ver proposición A.3).

**Observación A.32.** La definición anterior extiende la transformada de Fourier de  $L^1(\mathbb{R})$  o  $L^2(\mathbb{R})$  al espacio de las distribuciones temperadas.

**Proposición A.33.** Si  $f$  pertenece a  $L^1(\mathbb{R})$  o a  $L^2(\mathbb{R})$ , entonces  $\hat{\hat{f}} = T_{\hat{f}}$ .

**Teorema A.34.** La transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  es una aplicación lineal, biyectiva y bicontinua de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Dada  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , la aplicación inversa  $\mathcal{F}^{-1}$  viene dada por

$$\mathcal{F}^{-1}T(\varphi) = T(\mathcal{F}^{-1}\varphi).$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Se presenta ahora una de las propiedades de uso más frecuente de la transformada de Fourier para distribuciones.

**Proposición A.35.** Sea  $T$  una distribución temperada.

Para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\hat{T}^{(k)} = \mathcal{F}((-2i\pi x)^k T), \quad \widehat{T^{(k)}} = (2i\pi\xi)^k \hat{T}.$$

**Proposición A.36.** Si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  y  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , entonces  $\varphi * T$  es una función de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Además,  $\varphi * T$  y todas sus derivadas son de crecimiento lento. Por otro lado, se cumplen las siguientes relaciones:

- (I)  $\widehat{\varphi * T} = \hat{\varphi} \cdot \hat{T}$ ,
- (II)  $\widehat{\varphi \cdot T} = \hat{\varphi} * \hat{T}$ .

**Proposición A.37.** Sea  $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  y  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , entonces

$$\widehat{S * T} = \hat{S} \cdot \hat{T}.$$

El segundo miembro de la igualdad tiene sentido, ya que es posible demostrar que  $\hat{S}$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  (ver [Mit13, págs 135-136]). Por tanto, este término consiste en multiplicar una función por una distribución, por lo que está bien definido.

## A.6. Resultados adicionales

En esta sección se incluyen resultados que no tienen cabida en las secciones previas.

El siguiente teorema ha sido extraído de [Rud21, pág 164].

**Teorema A.38. (de Fubini)** Sea  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  y  $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$  espacios de medida  $\sigma$ -finitos, y  $f$  una función  $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ -medible en  $X \times Y$ .

(I) Si  $0 \leq f \leq \infty$ , y si

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\lambda, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (x \in X, y \in Y), \quad (\text{A.1})$$

entonces  $\varphi$  es  $\mathcal{S}$ -medible,  $\psi$  es  $\mathcal{T}$ -medible y

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi d\lambda. \quad (\text{A.2})$$

(II) Si  $f$  es compleja y si

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f|_x d\lambda \quad y \quad \int_X \varphi^* d\mu < \infty,$$

entonces  $f \in L^1(\mu \times \lambda)$ .

(III) Si  $f \in L^1(\mu \times \lambda)$ , entonces  $f_x \in L^1(\lambda)$  para casi todo  $x \in X$ ,  $f^y \in L^1(\mu)$  para casi todo  $y \in Y$ , las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  definidas en (A.1) pertenecen a  $L^1(\mu)$  y  $L^1(\lambda)$ , respectivamente, y se cumple (A.2).

El siguiente teorema se puede consultar en [Str15, pág 61].

**Teorema A.39.** Sea  $a_{n,m}$  una sucesión de términos no negativos para todo  $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Se considera  $\varphi$  una aplicación biyectiva de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Entonces se tiene que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \right).$$



# Bibliografía

- [Ash71] Robert B. Ash. *Complex variables*. Academic Press, New York, 1971.
- [Bee03] R. J. Beerends. *Fourier and Laplace transforms*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [Car11] G. Cariolaro. *Unified Signal Theory*. Springer, London, 2011.
- [FP92] Carlos Fernández Pérez. *Ecuaciones diferenciales. I, Ecuaciones lineales*. Ciencia y técnica. Pirámide, Madrid, 1992.
- [GW99] C. Gasquet and P. Witomski. *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets*. Springer, New York, 1999.
- [Hea99] Francis Hirsch et al. *Elements of Functional Analysis*. Graduate texts in mathematics; 192. Springer, New York, 1999.
- [Mit13] Dorina Mitrea. *Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis*. Universitext. Springer, New York, 1st edition, 2013.
- [Oea97] Alan V. Oppenheim et al. *Signals and systems*. Prentice-Hall, London, 2nd edition, 1997.
- [Rud99] Walter Rudin. *Functional analysis*. MacGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1999.
- [Rud21] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. MacGraw-Hill, New York, 3th edition, 2021.
- [Str15] Karl Robert Stromberg. *An introduction to classical real analysis*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Islans, reprinted with corrections edition, 2015.

[Sun15] D. Sundararajan. *Discrete wavelet Transform: A Signal Processing Approach*. Wiley Online Books, 2015.

# Índice alfabético

- Convergencia
  - de distribuciones, 35
  - de distribuciones temperadas, 35
  - de señales discretas, 50
  - en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , 34
  - en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 21
- Convolución de distribuciones
  - $\mathcal{E}' * \mathcal{D}'$ , 76
  - definición, 76
  - y transformada de Fourier, 78
- Convolución de funciones
  - definición, 73
  - desigualdad de Young, 73
  - y transformada de Fourier, 73
- Convolución de señales discretas
  - definición, 50
- Distribuciones
  - convolución, 76
  - definición, 34
  - delta de Dirac, 74
  - derivada, 74
  - producto función por distribución, 74
  - soporte, 35
  - temperada, 35
  - traslación, 75
- Espacios
  - de las funciones test,  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , 34
  - de Schwartz,  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 20
  - de distribuciones cuyo soporte está a la derecha de un punto,  $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ , 77
  - de distribuciones de soporte compacto,  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ , 35
  - de distribuciones temperadas,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , 35
  - de distribuciones,  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , 34
- Filtros
  - causal, 29, 37, 44
  - convolucional, 27, 43
  - definición, 14
  - estable, 29
  - filtro  $RC$ , 14, 30
  - filtro  $RC$  pasa alta, 44
  - generalizado, 28
  - gobernados por una ecuación diferencial, 21
- Filtros discretos
  - causal, 58
  - definición, 50
  - estable, 59, 66
  - filtro  $RC$ , 68
  - gobernados por una ecuación en diferencias, 67
- Funciones
  - de crecimiento lento, 75
  - de decrecimiento rápido, 20
- Función de transferencia, 24, 37, 65

Principio de superposición, 12

Respuesta escalón, 28, 37

Respuesta impulso, 17, 24, 37

Señales

causal, 10

continua, 10

discreta, 10

con inicio definido, 50

finita, 50

impulso unitario, 58

energía finita, 28

operaciones

desplazamiento temporal, 11

inversión temporal, 11

traslación, 11

periódica, 10

Sistemas, 12

causal o realizable, 13

continuo, 13

convolucional, 17, 37

estable, 13

invariante, 13

lineal, 12

Sucesiones

de crecimiento lento, 52

de decrecimiento rápido, 52

Teorema de Fubini, 78

Transformada  $z$

definición, 61

ecuación en diferencias, 67

ejemplos, 62

propiedades

convolución, 63

desplazamiento temporal, 63

linealidad, 63

Transformada de Fourier de

distribuciones

definición, 77

propiedades, 78

y convolución, 78

Transformada de Fourier de

funciones

definición, 71

en  $L^2(\mathbb{R})$ , 72

inversa, 71

propiedades, 72

y convolución, 73