Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

El problema de la secretaria

Autor:
Daniel Galán Vázquez

Tutor:
Carlos Matrán Bea

Año 2024

Agradecimientos

A mis padres, Jesús y Angélica, por su apoyo inquebrantable y su confianza en mí. Gracias por enseñarme tanto y tan bien, por haberme inculcado una educación basada en los valores del sacrificio, el esfuerzo y la constancia.

A mi tutor, Carlos Matrán, cuya atención y labor de tutorización han sido fundamentales para finalizar este trabajo con satisfacción.

A mis compañeros del Doble Grado y del Colegio Mayor de Santa Cruz, quienes han sido mi familia lejos de casa durante estos años. Gracias por todo el tiempo compartido, por vuestro apoyo incondicional y por ser mi fuente de inspiración para superar todos los obstáculos.

A todos mis profesores, quienes con su pasión por la enseñanza han despertado en mí una gran curiosidad y un deseo por seguir aprendiendo. Gracias por compartir vuestro conocimiento y por haber sido parte fundamental de mi formación académica.

Valladolid, 8 de junio de 2024

Índice general

Resumen

Uno de los problemas más clásicos en la teoría de decisión es conocido por una de sus versiones como el Problema de la Secretaria. En este trabajo se desarrollan los conceptos matemáticos relacionados con los tiempos de parada y la optimización de estrategias subyacentes en el problema, incluyendo una visión crítica de las distintas variaciones y algunas de sus aplicaciones. En pocas palabras, la versión más clásica del Problema de la Secretaria plantea una situación en la que un empleador necesita cubrir un puesto de trabajo vacante, pero solo puede entrevistar a un número limitado de candidatos. El objetivo es seleccionar al mejor candidato posible, sabiendo que después de cada entrevista, se debe tomar una decisión inmediata sobre si contratar o rechazar al candidato, y una vez rechazado, no se puede reconsiderar. El desafío radica en decidir cuántos candidatos se deben entrevistar y en qué punto se debe tomar la decisión de contratar a un candidato para maximizar la probabilidad de contratar al mejor posible.

Abstract: One of the most classic problems in decision theory is known by one of its versions as the Secretary Problem. This work develops the mathematical concepts related to stopping times and underlying optimization in the problem, including a critical view of the various problem variations and some of its applications. In short, the Secretary Problem poses a situation in which an employer needs to fill a vacant position, but can only interview a limited number of candidates. The objective is to select the best possible candidate, knowing that after each interview, an immediate decision must be made on whether to hire or reject the candidate, and once rejected, it cannot be reconsidered. The challenge lies in deciding how many candidates should be interviewed and at what point the decision to hire a candidate should be made to maximize the probability of hiring the best possible candidate.

Introducción

A finales de la década de los 50, surge el Problema de la Secretaria (SP, por sus siglas en inglés, *Secretary Problem*) como un dilema crucial que pone a prueba la capacidad de los empleadores para tomar decisiones óptimas bajo condiciones de incertidumbre. Este enigma ha cautivado a la comunidad matemática no solo por su aparente simplicidad, sino también por su profundidad conceptual y sus múltiples aplicaciones prácticas. Es por esta razón que la bibliografía sobre estas variantes es muy extensa y sigue siendo objeto de estudio en la actualidad, tal como se evidencia en trabajos recientes como [1] o [17].

El escenario de la versión tradicional del problema es el siguiente: un empleador busca cubrir un puesto vacante con el candidato más competente entre una serie de individuos. El número de postulantes es conocido de antemano y se asume que pueden ser ordenados de manera estricta en términos de competencia: uno es el mejor de todos, otro es el segundo mejor, y así sucesivamente. Sin embargo, este orden es desconocido para el empleador. Las entrevistas se realizan en un orden aleatorio, y el empleador debe tomar una decisión irrevocable inmediatamente después de cada entrevista. Una vez rechazado un candidato, no se le puede reconsiderar, y una vez contratado, no se pueden entrevistar más candidatos. La decisión debe basarse únicamente en los rangos relativos de los candidatos entrevistados hasta el momento. El objetivo del empleador es maximizar la probabilidad de seleccionar al candidato más idóneo, es decir, encontrar la estrategia óptima de parada.

Este trabajo se estructura en cinco capítulos. En el primero de ellos, siguiendo principalmente el libro de Thomas S. Ferguson [14], se ofrece una introducción a los conceptos más fundamentales de la teoría de la decisión, un marco en el que se inscribe de forma natural este problema.

El segundo capítulo presenta el SP en su formulación más clásica, incluyendo la definición de una estrategia óptima utilizando una regla de corte. Asimismo, unos primeros resultados muestran la lógica detrás de la reconocida "regla del 37 %", que proporciona una solución elegante y sorprendentemente efectiva a este problema. Por último, se presenta una sección con una notación general para abordar el SP con diversos tipos de recompensa, junto con un lema que asegura que la regla óptima de parada en estos problemas es una regla de corte.

El tercer capítulo examina ocho variantes del SP, cada una con su enunciado específico y su correspondiente estrategia óptima con la probabilidad asintótica de éxito asociada. Las variantes analizadas incluyen el empleo incierto, el juego de Googol, ganar, perder o empatar, seleccionar uno de los dos mejores, número aleatorio de candidatos, SP con recompensa asociada a la duración, al valor del rango del candidato y el juego contra un oponente. Cada variante presenta desafíos únicos y requiere técnicas analíticas específicas para derivar las soluciones óptimas. La mayor dificultad al abordar estas versiones ha sido unificar la notación y los argumentos, procurando que las técnicas empleadas para obtener las reglas óptimas y las probabilidades asintóticas sigan un mismo patrón.

En el cuarto capítulo, se aborda detalladamente una variante del Problema de la Secretaria Clásico en la que se busca seleccionar al segundo mejor candidato, bajo la premisa de que el mejor candidato aceptará una oferta más llamativa y rechazará la nuestra. Se demuestra que la probabilidad óptima de éxito en este escenario es del 25 %, lo cual subraya la mayor dificultad de esta tarea en comparación con la selección del mejor candidato. Además, se analiza el caso en el que el objetivo es seleccionar al m-ésimo mejor candidato. Para desarrollar estos resultados, se ha consultado principalmente el trabajo de L. Bayón et al. [1] y el de R. J. Vanderbei [26].

El quinto capítulo trata el Problema de la Secretaria con información completa. Se presenta una familia de estrategias basadas en números de decisión, la estrategia óptima y la probabilidad de éxito asociada. Además, se incluyen resultados numéricos obtenidos mediante el uso de código en MATLAB, que aparece en el Apéndice A, y ejemplos de estrategias más simples que ofrecen una probabilidad de éxito cercana a la óptima.

En definitiva, a lo largo de este trabajo, se destaca que, más allá de su interés histórico y académico, el Problema de la Secretaria tiene aplicaciones prácticas significativas en aquellos campos en los que la toma de decisiones a partir de la observación secuencial esté presente, reflejando así su relevancia y versatilidad en la teoría de la decisión.

0.1. Historia y motivación

El célebre Problema de la Secretaria emergió en el ámbito matemático en una columna de la revista *Scientific American* escrita por Martin Gardner [18] en el año 1960, atribuido inicialmente a los nombres de J.H. Fox y L.G. Marnie, quienes enunciaron un problema matemáticamente equivalente con el nombre de *Game of Googol*. Sin embargo, la historia de su origen tiene sus matices, ya que algunas fuentes sugieren que el matemático Mosteller ya había oído hablar de este problema en círculos académicos en 1955 [19]. Sea como fuere, fue en febrero de 1960 cuando este dilema se presentó de manera formal, suscitando un interés inmediato en la comunidad matemática.

La primera solución formal fue ofrecida por L. Moser y J. R. Pounder en marzo del mismo año en la misma revista, lo que marcó el inicio de una serie de estudios y análisis por parte de estadísticos y matemáticos. Entre estos pioneros se destacan Bissenger y Siegel [4], a quienes se atribuye una formulación del problema en 1963 con un caso particular de $n = 1000$ candidatos, seguida por la propuesta de solución de Bosch un año después.

Sin embargo, como recopila T. Ferguson [12] en sus trabajos, el problema atrajo una atención aún mayor cuando el matemático D. V. Lindley lo abordó en una revista científica en 1961 [20], proponiendo una solución que consideraba el rango del candidato seleccionado, buscando minimizar dicho rango, siendo 1 el mejor. No obstante, la resolución de estrategias asintóticas óptimas para un número elevado de candidatos fue lograda posteriormente por Chow, Moriguti, Robbins y Samuels en 1964 [8].

La diversidad de enfoques para abordar el problema es notable. Lindley y Beckmann [3] lo estudiaron desde la perspectiva de la programación dinámica, mientras que Dynkin lo consideró como una aplicación de la teoría de los tiempos de parada de la teoría de Markov, demostrando que el problema es monótono y que la estrategia de mirar un paso adelante es óptima. Asimismo, las variantes del problema que analizaron Gilbert y Mosteller [19] en 1966, ampliaron aún más su relevancia y complejidad.

Con el tiempo, el dilema de la secretaria se ha convertido en un tema de investigación y aplicación en diversos campos. En particular, cuando se consideran variantes de este problema, algunas tienen parentesco con problemas prácticos de la vida real, como los procedimientos de selección de personal, optimización de algoritmos, inversión bursátil o los programas de inspección de bombas atómicas. No obstante, las variantes que tratamos están suficientemente simplificadas como para abordar rigurosamente tales aplicaciones.

0.2. Variaciones del Problema de la Secretaria

El Problema de la Secretaria, con su enunciado intrigante y su solución sorprendente, ha cautivado la atención de matemáticos y teóricos de la decisión a lo largo de los años. Conocido por diversos nombres, como el problema del matrimonio (donde se busca la mejor esposa); el problema de la dote del sultán o el juego de Googol (donde se busca elegir el mayor de un conjunto desconocido de números), este problema presenta una diversidad de variantes que lo convierten en un área de estudio fascinante y en constante evolución.

En la literatura, aparecen distintas variaciones del Problema de la Secretaria clásico, extendiéndose este en varias direcciones. Por ejemplo, a partir de una secuencia de candidatos aleatoria de longitud fija, se pueden elegir uno o varios, conocer la distribución de candidatos o no tener información sobre ellos, puede existir un oponente que altera las propiedades de la secuencia... También, la función de recompensa puede ser 0 o 1 o puede ser el valor numérico asociado a la elección, como por ejemplo en problemas de inversión. De este modo, podemos definir algunas de las variantes más relevantes que han surgido a lo largo del tiempo:

1. *Problema de la Secretaria con Información Completa* (FISP):

   El Problema de la Secretaria con información completa tiene las mismas hipótesis que el SP y, además, se conoce la distribución de probabilidad que siguen los enteros positivos asociados a los candidatos y los parámetros de dicha distribución. Gilbert y Mosteller [19] resolvieron este caso y encontraron un resultado del juego que tiende a un valor cercano a $0,5802$ para n suficientemente grande.

2. *Problema de la Secretaria con Información Parcial* (PISP):

   Se trata de una variante intermedia entre el SP y el FISP. Se consideran las mismas hipótesis que el SP y, además, se conoce la distribución de probabilidad que siguen los enteros aleatorios, pero no se conocen todos los parámetros de la distribución. Esta variación ha sido estudiada por Petruccelli [23].

3. *Problema de la Secretaria con Memoria Finita* (FMSP):

   A las hipótesis del SP se añade que el empleador no puede acordarse de todos los candidatos que ya entrevistó, sino que solo recuerda un número finito. Tras entrevistar a un candidato el empleador debe elegir entre contratar al candidato, rechazarlo olvidándolo o rechazarlo guardándolo en su memoria. Smith y Deely [9] abordaron esta variante.

4. *Problema de la Secretaria con Múltiple elección* (MCSP):

   En lugar de escoger un único candidato, el empleador puede elegir un conjunto de varios candidatos. En las últimas décadas el MCSP ha sido objeto de estudio, en el artículo de Dinitz [10] se proporciona una amplia visión de los últimos avances en este problema.

Las variantes expuestas tienen todas la misma función objetivo: maximizar la probabilidad de encontrar al mejor candidato. Sin embargo, también es posible plantear el problema cambiando la función objetivo:

1. *Variante del investigador posdoctoral*:

   Se busca maximizar la probabilidad de elegir al segundo mejor candidato [26].

2. *Problema de la Secretaria con costos de entrevista* (SPIC):

   Con las hipótesis del problema clásico SP, se supone que cada candidato tiene un valor (positivo) y que cada entrevista tiene un costo (negativo) fijo. La función objetivo es entonces minimizar el costo total de la serie de entrevistas, es decir, se busca minimizar el valor del candidato contratado quitando los costos de las entrevistas realizadas. Bartoszynski y Govindarajulu [5] estudiaron esta variante.

3. *Optimización multiobjetivo*:

   Se plantea el SP de manera que existan varias funciones objetivo. Por ejemplo, si consideramos el SPIC teniendo en cuenta el potencial del candidato y los costes de entrevista, la función objetivo sería minimizar orden del candidato y también los costes de entrevista.

4. *Otros ejemplos*:

   Maximizar la probabilidad de elegir uno de los k mejores candidatos [7] o minimizar el rango global esperado del candidato son otras opciones.

Capítulo 1

Elementos de la teoría de decisión

Una rama de la teoría de decisión la constituyen los problemas de parada óptima. Estos problemas buscan elegir el momento adecuado para tomar una acción basada en variables aleatorias observadas secuencialmente, con el objetivo de maximizar una recompensa esperada o minimizar un costo esperado, y se encuentran en áreas como la estadística, la economía y las finanzas matemáticas.

En particular, el Problema de la Secretaria y sus variantes constituyen un ejemplo clave de problemas de parada con horizonte finito. Por esta razón, dedicamos este primer capítulo a la construcción de los conceptos fundamentales de esta teoría de las matemáticas con la que trabajaremos a lo largo de esta memoria.

1.1. Elementos básicos de los problemas de decisión

Los elementos de la teoría de decisión son similares a los de la teoría de juegos. En concreto, los problemas de la teoría de decisión se pueden considerar como juegos de dos personas, en los que la naturaleza actúa como uno de los jugadores. La naturaleza representa todo aquello que no está bajo el control de la persona encargada de tomar la decisión, introduciendo así incertidumbre y aleatoriedad en el proceso de toma de decisiones.

Los problemas de este tipo se componen de tres elementos:

1. Un conjunto no vacío, Θ, de posibles *estados de la naturaleza* que se denomina espacio de parámetros.
2. Un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$, de *acciones* disponibles para el decisor.
3. Una función de *ganancia*, $L(\theta, a)$, que es una función real definida en $\Theta \times \mathcal{A}$.

En matemáticas, un *juego* consiste en un triplete $(\Theta, \mathcal{A}, L)$. Cualquier triplete de ese tipo define el juego y la manera de interpretarlo es la siguiente. La naturaleza elige un punto $\theta \in \Theta$, el decisor, sin saber la elección que la naturaleza ha hecho, elige una acción $a \in \mathcal{A}$. Como consecuencia de estas dos elecciones, el jugador gana una cantidad $L(\theta, a)$. Esta función podría tomar valores negativos, en cuyo caso se interpretaría como una pérdida.

Ejemplo 1.1. *(Pares o nones).* En el juego de *pares o nones*, dos jugadores enseñan uno o dos dedos. El jugador I gana si la suma de los dígitos es par, y el otro jugador, el número II, gana si la suma es impar. El perdedor paga en euros la suma de los números sacados.

Para crear el triplete $(\Theta, \mathcal{A}, L)$ podemos denominar al jugador I como la "naturaleza" y al jugador II como el "decisor". Cada jugador tiene dos posibles elecciones, de manera que $\Theta = \{1, 2\} = \mathcal{A}$, en el que "1" y "2" corresponden a las decisiones de sacar uno o dos dedos, respectivamente. La función de ganancia está dada por la Tabla 1.1. Por lo tanto, $L(1, 1) = -2$, $L(1, 2) = 3$, $L(2, 1) = 3$ y $L(2, 2) = -4$.

Θ \ $\mathcal{A}$	1	2
1	-2	3
2	3	-4

Tabla 1.1: Función de ganancia $L(\theta, a)$ en el juego de pares o nones.

En un juego con dos jugadores ambos tratan de maximizar sus ganancias (o minimizar sus pérdidas), mientras que en un problema de la teoría de decisión, la naturaleza no tiene esto en cuenta. Esto tiene una consecuencia a la hora de interpretar qué es una buena decisión. La naturaleza es totalmente aleatoria, no es racional, y en el caso en el que lo sea, el jugador no dispone de esa información. Asimismo, se asume que una vez la naturaleza ha elegido el *estado verdadero* del sistema, $\theta \in \Theta$, el jugador tiene a su disposición la posibilidad de recopilar información sobre esta elección mediante muestreo o realizando un experimento.

Para dar un sentido matemático a este proceso de recopilación de información, supongamos que el jugador, antes de tomar una decisión, puede observar una variable aleatoria, X, cuya distribución depende del verdadero estado de la naturaleza, θ.

El espacio de muestras, $\mathcal{X}$, es un subconjunto de Borel de un espacio euclídeo finito y las distribuciones de probabilidad de X están definidas en los subconjuntos de Borel, $\mathcal{B}$ de $\mathcal{X}$. Por lo tanto, para cada $\theta \in \Theta$ existe una probabilidad P_θ definida en $\mathcal{B}$, y una función de distribución $F_X(x|\theta)$, que representa la distribución de X cuando θ es el verdadero valor del parámetro.

Un problema de decisión estadístico o un *juego estadístico* es un juego $(\Theta, \mathcal{A}, L)$ junto con un experimento que consiste en observar una variable aleatoria o un vector aleatorio cuya distribución P_θ depende del estado $\theta \in \Theta$ elegido por la naturaleza.

Una vez el jugador ha realizado la observación $X = x$, toma una *acción* $d(x) \in \mathcal{A}$. Esta función d que relaciona el conjunto $\mathcal{X}$ con $\mathcal{A}$ es una *estrategia* para el jugador. Por lo que la ganancia es ahora una variable aleatoria $L(\theta, d(X))$. El valor esperado de $L(\theta, d(X))$ cuando θ es el verdadero estado de la naturaleza se llama *función de riesgo*, $R(\theta, d) = \mathbb{E}_\theta(L(\theta, d(X)))$, y representa la ganancia media que se obtiene cuando el jugador usa la función d como estrategia. Esto se puede entender como una integral respecto de una probabilidad

$$R(\theta, d) = \mathbb{E}_\theta(L(\theta, d(X))) = \int L(\theta, d(x)) d\mathbb{P}_\theta(x).$$

1.2. Problemas con regla de parada

Los problemas de decisión secuencial difieren de los problemas de decisión comunes en que ahora el jugador observa una sucesión de variables aleatorias y en cada etapa decide, después de cada observación, si parar y llevar a cabo una acción inmediatamente después, o continuar observando y tomar la acción posteriormente. Una definición formal para este tipo de problemas es la siguiente.

Definición 1.2. Los *problemas con regla de parada* se definen a partir de dos elementos:

(I) Una sucesión de variables aleatorias $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots) = (X_n)_{n\geq 1}$, cuya distribución conjunta se supone conocida.

(II) Una sucesión de funciones *recompensa* o *pérdida*,

$$y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), \ldots, y_\infty(x_1, x_2, \ldots),$$

que dependen únicamente de los valores observados de las variables aleatorias.

Teniendo en cuenta estos elementos, el problema se plantea de la siguiente manera: se observa la sucesión de variables aleatorias, y en cada paso n, después de observar $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$, se puede optar por detener la observación o continuar observando X_{n+1}. Si se deja de observar en el instante n, se recibe una recompensa $y_n(x_1, \ldots, x_n)$ (que podría ser negativa). Si se decide no observar ninguna variable aleatoria, se recibe la recompensa constante y_0. Y si nunca se para de observar, se recibe $y_\infty(x_1, x_2, \ldots)$. Permitiremos que las recompensas tomen el valor $-\infty$; pero asumiremos que las recompensas están uniformemente acotadas superiormente por una variable aleatoria con esperanza finita para que todas las esperanzas mencionadas a continuación tengan sentido.

Observación 1. En algunos problemas, la sucesión de recompensas se puede describir de manera más realista como una sucesión de variables aleatorias $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_\infty)$ cuya distribución conjunta con las observaciones $X_1, X_2, \ldots$ es conocida. Es posible que el valor real de Y_n no se conozca exactamente en el instante n cuando la decisión de parar o continuar tenga que ser tomada. Sin embargo, dejar que las recompensas sean aleatorias no es una ventaja en general por lo que, como la decisión de parar en el paso n puede depender de $X_1, \ldots, X_n$, podemos reemplazar la sucesión de recompensas aleatorias $(Y_n)_{n\geq 0}$ por la sucesión de funciones recompensa $y_n(x_1, \ldots, x_n)$ para $n = 0, 1, \ldots, \infty$, donde

$$y_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{E}(Y_n | X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n).$$

Cualquier regla de parada donde las recompensas sean Y_n daría la misma recompensa que la sucesión y_n.

Reglas de parada. El objetivo es elegir una *regla de parada* que maximice la recompensa esperada (o equivalentemente, minimice la pérdida esperada). Las reglas de parada pueden ser *aleatorias*, es decir, una vez observadas las primeras n variables aleatorias, se busca una *probabilidad de parada* que puede depender de las observaciones y que denotaremos por $\phi_n(x_1, \ldots, x_n)$. Una regla de parada *aleatoria*, consiste en una sucesión de estas funciones $\boldsymbol{\phi} = (\phi_0, \phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2), \ldots)$, donde para todo n y $x_1, \ldots, x_n$, se cumple que $0 \leq \phi_n(x_1, \ldots, x_n) \leq 1$. Se dice que una regla de parada es *no aleatoria* si solo toma los valores 0 o 1.

Por lo tanto, ϕ_0 representa la probabilidad de no observar ninguna variable; una vez observada $X_1 = x_1$, $\phi_1(x_1)$ representa la probabilidad de parar después de hacer la primera observación, etc. La regla de parada $\boldsymbol{\phi}$ y la sucesión $\boldsymbol{X}$, determinan el tiempo aleatorio N para el cual se debe parar, $0 \leq N \leq \infty$, donde $N = \infty$ indica que nunca se deja de observar. Dado $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, la función de masa de probabilidad de N se denota por $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\infty)$, donde

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(N = n | \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots, \\
&\varphi_\infty(x_1, x_2, \ldots) = \mathbb{P}(N = \infty | \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}).
\end{aligned}
$$

Y se relaciona con la regla de parada $\boldsymbol{\phi}$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
\varphi_0 &= \phi_0 \\
\varphi_1(x_1) &= (1 - \phi_0)\phi_1(x_1) \\
&\vdots \\
\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \left[\prod_{j=1}^{n-1}(1 - \phi_j(x_1, \ldots, x_j))\right] \phi_n(x_1, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
\varphi_\infty(x_1, x_2, \ldots) &= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x_1, \ldots, x_j).
\end{aligned}
$$

El problema consiste en elegir una regla de parada $\boldsymbol{\phi}$ que maximice la recompensa esperada, $V(\boldsymbol{\phi})$, definida como

$$V(\boldsymbol{\phi}) = \mathbb{E}(y_N(X_1,\ldots,X_N)) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{=\infty} \varphi_j(X_1,\ldots,X_j) y_j(X_1,\ldots,X_j)\right).$$

Donde "$=\infty$" en el sumatorio significa que se suma sobre todos los valores de j desde 0 hasta ∞, incluyendo ∞. En términos del tiempo aleatorio de parada N, la regla de parada $\boldsymbol{\phi}$ se puede expresar como

$$\phi_n(X_1,\ldots,X_n) = \mathbb{P}(N=n|N\geq n, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) \quad \text{para } n=0,1,\ldots$$

Observación 2. A menudo, la estructura de un problema hace que sea más conveniente considerar la recompensa como una *pérdida* en lugar de una *ganancia*. Sin embargo, bastaría con considerar la estructura definida anteriormente denotando por y_n a la pérdida (negativa) si se para en n y considerar una regla de parada que minimice la pérdida esperada $V(\boldsymbol{\phi})$.

Observación 3. Es posible modelar una regla de parada como una sucesión creciente de σ-álgebras. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, el espacio probabilístico en el que se definen todas nuestras variables aleatorias, y sea $\mathcal{F}_n$ la sub-σ-álgebra de $\mathcal{B}$ generada por $X_1,\ldots,X_n$ (es decir, la σ-álgebra más pequeña que contenga a los conjuntos $\{X_1\leq x_1,\ldots,X_n\leq x_n\}$ para todo $x_1,\ldots,x_n$). Con $\mathcal{F}_0=(\Omega,\emptyset)$ y $\mathcal{F}_\infty$ es la σ-álgebra generada por $\cup\mathcal{F}_n$. Nótese que

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \subset \ldots \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{B} \tag{1.1}$$

representa una sucesión creciente de σ-álgebras. Para una variable aleatoria Z, la esperanza condicionada de Z dados $X_1,\ldots,X_n$ se denota por

$$\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z|X_1,\ldots,X_n).$$

Con esta notación, el problema de parada se puede enunciar en términos de la sucesión 1.1, sin necesidad de mencionar las variables $X_1, X_2, \ldots$, usando los dos siguientes elementos:

(I)' La sucesión creciente de σ-álgebras 1.1.

(II)' Una sucesión de variables recompensa $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n, \ldots, Y_\infty$.

Observación 4. La observación 1 implica que podemos asumir sin pérdida de generalidad que Y_n es $\mathcal{F}_n$-medible (ser función de $X_1, \ldots, X_n$ es esencialmente equivalente a ser $\mathcal{F}_n$-medible). En particular, se supone que Y_∞ es $\mathcal{F}_\infty$-medible. Una regla de parada se define como una variable aleatoria N que toma valores en $0, 1 \ldots, \infty$ de manera que el suceso $\{N = n\}$ está en $\mathcal{F}_n$. Esto es equivalente a decir que la decisión de parar en el instante n solamente puede depender de $X_1, \ldots, X_n$ y no de observaciones futuras $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ El objetivo es encontrar una regla de parada N que maximice la recompensa esperada, $\mathbb{E}(Y_N)$.

Esta manera de estudiar el problema es de alguna forma más general que usando (I) y (II) porque existen σ-álgebras que no están generadas por ninguna sucesión de variables aleatorias. Nos centraremos en el estudio de este tipo de reglas de parada no aleatorias definidas con este método sin perder generalidad. Nótese que siempre se podría asociar a cada X_j una variable aleatoria independiente con distribución uniforme $(0, 1)$, U_j, de modo que dada $\boldsymbol{\phi}$, una regla de parada, se puede definir una regla de parada no aleatoria que pare en el instante j cuando $U_j < \phi_j(X_1, \ldots, X_j)$.

1.3. Problemas de horizonte finito

Un problema con regla de parada se dice que tiene *horizonte finito* si existe un límite superior en el conjunto de etapas en las que se puede parar. Si se debe parar tras observar las variables $X_1, \ldots, X_n$, decimos que el problema tiene *horizonte n*.

Se pueden definir los problemas de horizonte finito como un caso particular del problema general presentado en la sección anterior estableciendo que las recompensas $y_{n+1} = \ldots = y_\infty = -\infty$. En general, este tipo de problemas se pueden resolver mediante inducción inversa: como hay que parar en el instante n, primero debemos encontrar la regla óptima en el instante $n-1$. Después, conociendo la regla óptima en el instante $n-1$, podemos definir la regla óptima de parada para $n-2$, y así sucesivamente hasta llegar al instante inicial 0. Definimos entonces $V_n^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = y_n(x_1, \ldots, x_n)$ e inductivamente, para $j = n-1$, hasta $j = 0$,

$$V_j^{(n)}(x_1, \ldots, x_j) = \\ \max\{y_j(x_1, \ldots, x_j), \mathbb{E}(V_{j+1}^{(n)}(x_1, \ldots, x_j, X_{j+1})|X_1 = x_1, \ldots, X_j = x_j)\}. \tag{1.2}$$

Por inducción, $V_j^{(n)}(x_1, \ldots, x_j)$ representa la máxima recompensa que se puede obtener empezando desde el instante j habiendo observado $X_1 = x_1, \ldots, X_j = x_j$. En la etapa j, se compara la recompensa si paramos, es decir, $y_j(x_1, \ldots, x_j)$, con la recompensa que se espera conseguir si se continúa y usando la regla óptima para las etapas $j+1, \ldots, n$, que en el instante j es

$$\mathbb{E}(V_{j+1}^{(n)}(x_1, \ldots, x_j, X_{j+1})|X_1 = x_1, \ldots, X_j = x_j)\,.$$

Por lo tanto, la recompensa óptima será el máximo entre esas dos cantidades, y será óptimo parar en j si $V_j^{(n)}(x_1, \ldots, x_j) = y_j(x_1, \ldots, x_j)$, y sino se continúa observando en $j+1$. La recompensa del problema con regla de parada es por lo tanto $V_0^{(n)}$.

Capítulo 2

El Problema de la Secretaria Clásico

En la versión clásica del Problema de la Secretaria (CSP), y en la mayoría de sus variantes, la sucesión de variables aleatorias es finita, es decir, se trata de un problema de decisión con horizonte finito. En este capítulo, se presenta la formulación del CSP, la regla de parada óptima que maximiza la probabilidad de seleccionar al mejor candidato y la probabilidad asintótica de ganar con esta estrategia. Asimismo, se incluye una sección destinada a establecer una notación más general que facilita el tratamiento del SP en situaciones con otros tipos de recompensa, y se presenta un lema para garantizar que la estrategia óptima en este tipo de problemas consiste en una regla de corte.

En la literatura, se encuentran diversas demostraciones para probar cuál es la estrategia óptima del CSP y calcular el número de candidatos iniciales que deben ser pasados por alto. Lindley [20], quien llama a esto el problema del matrimonio, fue el primero en introducir una demostración por programación dinámica en 1961. En particular, Lindley aborda un problema más general en el que se maximiza la utilidad esperada y esta utilidad no necesariamente debe ser cero/uno como en la formulación del CSP. Dos años después, Dynkin demostró el mismo resultado mediante una formulación por procesos de Markov que no abordaremos en este trabajo. Aquí, nos basamos en la simplificación de la demostración vía programación dinámica de Lindley que fue publicada por Beckmann [3] en 1990.

2.1. Enunciado del CSP

Las hipótesis clave de la formulación más clásica del Problema de la Secretaria se pueden enunciar de la siguiente manera:

1. Hay una única posición vacante disponible.
2. El número de candidatos, n, que van a acudir a la entrevista, es conocido.
3. Los candidatos pueden ser clasificados estrictamente de mejor a peor de manera unívoca.
4. Los candidatos son entrevistados secuencialmente en orden aleatorio, con cada orden de los $n!$ posibles siendo igualmente probable.
5. Inmediatamente después de una entrevista, el candidato entrevistado es aceptado y el problema de decisión finaliza, o es rechazado y se entrevista al siguiente candidato, si lo hay.
6. La decisión de aceptar o rechazar a un candidato solo puede basarse en los rangos relativos de los candidatos entrevistados anteriormente.
7. La decisión es irrevocable: un candidato rechazado no puede ser aceptado posteriormente.
8. El objetivo es maximizar la probabilidad de seleccionar al mejor de los n candidatos y evaluar la probabilidad. Esto es equivalente a maximizar la recompensa, siendo esta definida como 1 para el mejor solicitante y 0 en caso contrario.

Esta versión clásica del SP es un problema de observación y selección secuencial en el que la recompensa depende de las observaciones, pero solo a través de sus rangos relativos y no de sus valores reales. Además, el empleador no tiene información sobre la distribución de los candidatos y no tiene ningún problema para memorizar los rangos de los candidatos que ya ha entrevistado.

A partir del formalismo establecido en el Capítulo 1, podemos presentar las siguientes definiciones y notaciones que nos serán de utilidad para estudiar el SP. A la hora de definir un problema de parada con horizonte finito, debemos especificar las observaciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$, su distribución conjunta y la función recompensa (o pérdida) $y_j(x_1, \ldots, x_j)$ si se para en el instante j.

Definición 2.1. Las observaciones $X_1, \dots, X_n$ serán los rangos relativos o *rangos parciales* de los candidatos. Es decir, para cada $1 \leq j \leq n$, X_j es el rango del candidato j-ésimo dentro de las primeras j entrevistas realizadas, siendo 1 el mejor. Diremos que el candidato j-ésimo es el x_j*-ésimo mejor* de las primeras j entrevistas. En particular, si tiene el mayor rango de los n entrevistados, diremos que es *el mejor*.

Por la hipótesis 4 del CSP, estas variables aleatorias son independientes y cada X_j sigue una distribución uniforme en los enteros $\{1, \dots, j\}$. Por lo tanto, $X_1 \equiv 1$, $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = 1/2$ y, en general, $\mathbb{P}(X_j = k) = 1/j$ para $k = 1, 2, \dots, j$.

Definición 2.2. Se define a un *candidato viable* como un candidato que, cuando es entrevistado, es mejor que todos los candidatos entrevistados anteriormente, es decir, $X_j = 1$. También nos referiremos a un candidato viable diciendo que es *récord parcial* en $\{1, 2, \dots, j\}$. En particular, si el candidato es el mejor de los n postulantes, diremos que es el *récord global*.

Dado que el objetivo en el problema es seleccionar al único mejor individuo, solo se considerarán candidatos viables para su aceptación.

Definición 2.3. Nos referimos a *ganar* como el evento "contratar al mejor candidato de $\{1, 2, \dots, n\}$", es decir, contratar al candidato que sea récord global. Se define el *resultado del juego* como la probabilidad del evento *ganar*. Utilizamos la acción de *rechazar* para significar "rechazar inmediatamente después de la entrevista y continuar entrevistando". Y la acción *aceptar* para significar "parar el problema de decisión seleccionando a ese candidato".

Observación 5. Si se acepta un candidato viable en la entrevista j, la probabilidad de ganar es la misma que la probabilidad de que el récord parcial en $\{1, 2, \dots, j\}$ sea récord global. Esto es la probabilidad de que el récord global aparezca en las primeras j entrevistas, es decir, j/n. Por lo tanto, las funciones recompensa

$$y_j(x_1, \dots, x_j) = \begin{cases} j/n & \text{si el candidato } j \text{ es viable}\,, \\ 0 & \text{si no lo es}\,. \end{cases}$$

Obsérvese que $y_0 = 0$ y que para $j \geq 1$, y_j depende solo de x_j.

Nótese que la información que recibe el empleador después de cada entrevista (es decir, el rango relativo del individuo en relación con los ya entrevistados) no afecta a la probabilidad de que el siguiente individuo entrevistado sea el mejor. Esto se debe a que la información que posee el empleador sobre las j entrevistas solo depende de los rangos relativos de esos j individuos.

2.2. Estrategia óptima en el CSP

Si se denota por W_j a la probabilidad de ganar usando una regla óptima que rechaza los primeros j candidatos, entonces $W_j \geq W_{j+1}$. Esto es porque la mejor regla entre aquellas que rechazan los primeros $j+1$ candidatos está incluida en el conjunto de reglas que rechazan los primeros j. Por lo tanto, es óptimo aceptar un candidato viable en la entrevista j si $j/n \geq W_j$. Esto significa que si es óptimo aceptar un candidato viable en la entrevista j, entonces también es óptimo hacerlo en la entrevista $j+1$, puesto que se tiene $(j+1)/n > j/n \geq W_j \geq W_{j+1}$. En consecuencia, damos la siguiente definición.

Definición 2.4. Dado $r \geq 1$, decimos que una regla de parada N_r es una *regla de corte* con *corte* r, si se puede enunciar de la siguiente manera:

1. Rechazar los $r-1$ primeros candidatos entrevistados,
2. Contratar al primer candidato viable que aparezca, si lo hay, es decir, al primero que sea mejor que el mejor de los $r-1$ rechazados.

Ejemplo 2.5. Para fijar las ideas, analicemos el caso con $n = 4$ candidatos. Consideramos estrategias que entrevistan a los primeros $r-1$ candidatos y eligen el primer candidato viable posteriormente, si lo hay. El rango de los individuos está clasificado de menor a mayor, de modo que 1 sea el rango del mejor individuo.

Recordemos que todas las permutaciones de los rangos son igualmente probables; en la Tabla 2.1 se muestran los 24 órdenes de llegada posibles. Aquellos órdenes en la columna $r = 2$ conducen a una victoria mediante la estrategia que rechaza el primer candidato y luego elige el primer candidato viable, si lo hay. Aquellas marcadas con $r = 3$ llevan a una victoria mediante la estrategia que pasa los primeros dos individuos y luego elige el primer candidato más adelante, si lo hay. De ahora en adelante, omitiremos la expresión “si lo hay” al hablar de estrategias de este tipo; se entenderá implícitamente.

Problema de la Secretaria con $n = 4$			
r=1	r=2	r=3	r=4
1234	2**1**34	23**1**4	234**1**
1243	2**1**43	234**1**	243**1**
1324	23**1**4	24**1**3	324**1**
1342	234**1**	243**1**	342**1**
1423	24**1**3	32**1**4	423**1**
1432	243**1**	324**1**	432**1**
	3**1**24	34**1**2	
	3**1**42	42**1**3	
	34**1**2	423**1**	
	4**1**23	43**1**2	
	4**1**32		
$\mathbb{P}$(ganar)=6/24	$\mathbb{P}$(ganar)=11/24	$\mathbb{P}$(ganar)=10/24	$\mathbb{P}$(ganar)=6/24

Tabla 2.1: Probabilidad de ganar en el Problema de la Secretaria con $n = 4$ candidatos usando la estrategia que consiste en rechazar los primeros $r - 1$ candidatos y contratar al siguiente candidato viable.

En la Tabla 2.1 se observan las 11 formas distintas de ganar pasando el primer candidato ($r = 2$) y las 10 formas de ganar pasando los dos primeros números ($r = 3$). Por supuesto, dado que el primer individuo siempre es un candidato viable, encontramos 6 formas de ganar eligiendo el primer individuo ($r = 1$). Análogamente, encontramos otros 6 órdenes de llegada ganadores habiendo rechazado los tres primeros ($r = 4$).

Entre estas cuatro estrategias, la mejor consiste en pasar el primer individuo y elegir el primer candidato después de eso, y su probabilidad de ganar es $11/24 \approx 0,4583$. Esta estrategia mejora considerablemente la estrategia de una elección aleatoria, que da $1/4 = 0,25$ como probabilidad de ganar.

El problema clásico tiene una solución bastante simple y elegante que podemos encontrar utilizando técnicas de programación dinámica y razonando por inducción inversa usando la función 1.2.

Teorema 2.6. *Existe $r \in \{1, \ldots, n\}$ tal que la estrategia que utiliza la regla de corte N_r es óptima para resolver el CSP.*

Demostración. Para $r \in \{1, \ldots, n\}$ se define el evento $R_r :=$“los $r-1$ primeros candidatos han sido rechazados” y se definen las siguientes probabilidades para todo $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

$$\begin{aligned} v_r &:= \mathbb{P}(\text{ganar}|R_r, \text{ se rechaza el candidato } r), \\ u_r &:= \mathbb{P}(\text{ganar}|R_r, \text{ el candidato } r \text{ es un candidato viable}). \end{aligned}$$

De este modo, v_r es la probabilidad de ganar cuando se han observado r candidatos y el r-ésimo es rechazado; y u_r es la probabilidad de ganar cuando se han observado r candidatos y el r-ésimo es récord parcial. Cuando el último candidato observado no es viable, entonces una regla óptima requiere que la búsqueda se continúe así que se aplica v_r. Además, se necesita una regla de decisión para el caso en que el último candidato sea viable, y esta regla de decisión puede depender solo de la variable r y del número total n. Por tanto, se tienen las siguientes opciones:

1. Si el candidato r es rechazado, el candidato siguiente $r+1$ puede ser o no récord parcial:

   - La probabilidad de que $r+1$ sea récord parcial en $\{1, 2, \ldots, r+1\}$ es $\frac{1}{r+1}$, y la probabilidad de ganar dado este evento es por definición u_{r+1} (la probabilidad de ganar si se toma una decisión óptima en la entrevista $r+1$).

   - La probabilidad de que $r+1$ no sea récord parcial en $\{1, 2, \ldots, r+1\}$ se calcula como $1 - \frac{1}{r+1} = \frac{r}{r+1}$. Como no es récord parcial, ganamos con probabilidad 0 si lo aceptamos, por lo que se debe rechazar el candidato $r+1$ y la probabilidad de ganar después de haberlo rechazado es por definición v_{r+1}.

   A partir de aquí obtenemos la siguiente ecuación de recurrencia para todo $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$:

   $$v_r = \frac{r}{r+1} \cdot v_{r+1} + \frac{1}{r+1} \cdot u_{r+1} \,. \tag{2.1}$$

2. Si el candidato r es récord parcial en $\{1, 2, \ldots, r\}$, hay que decidir si aceptarlo o no:

- Si se acepta, solo se gana si r es el récord global en $\{1, 2, \ldots, n\}$. Es decir, el mejor de los n candidatos se encuentra entre los r primeros (de hecho, que sea el número r) que corresponde a una probabilidad de $\frac{r}{n}$.
- Si se rechaza, ganamos con probabilidad v_r por definición.

Por lo tanto, el valor de u_r para cada $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ es

$$u_r = \max\left\{\frac{r}{n},\, v_r\right\}. \tag{2.2}$$

Razonemos ahora por inducción inversa sobre r para obtener una expresión de v_r. A partir de la definición de u_r y v_r se deduce que $u_n = 1$ y $v_n = 0$. Ahora, utilizando las ecuaciones (2.1) y (2.2):

$$v_{n-1} = \frac{n-1}{n} v_n + \frac{1}{n} u_n = \frac{1}{n}$$

y

$$u_{n-1} = \max\left\{\frac{n-1}{n},\, v_{n-1}\right\} = \max\left\{\frac{n-1}{n},\, \frac{1}{n}\right\} = \frac{n-1}{n}.$$

Además,

$$\begin{aligned} v_{n-2} &= \left(\frac{n-2}{n-1}\right) v_{n-1} + \left(\frac{1}{n-1}\right) u_{n-1} = \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n-1}\right) \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{n-2}{n-2} + \frac{n-2}{n-1}\right) = \frac{n-2}{n}\left(\frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_{n-2} &= \max\left\{\frac{n-2}{n},\, \frac{n-2}{n}\left(\frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right)\right\} \\ &= \frac{n-2}{n} \max\left\{1,\, \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right\}. \end{aligned}$$

En vista del patrón anterior, deducimos la siguiente expresión para v_r:

$$v_r = \frac{r}{n}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{r}{n} \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i}. \tag{2.3}$$

Y para u_r:

$$u_r = \frac{r}{n} \text{máx} \left\{ 1, \, \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} \right\} = \frac{r}{n} \text{máx} \left\{ 1, \, \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i} \right\} .$$

En consecuencia, ningún candidato viable será seleccionado mientras que

$$\sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i} < 1 \, .$$

Definamos r^* como el valor crítico de r a partir del cual la anterior desigualdad no se verifica. Entonces, el valor crítico $r = r^*$ se obtiene como solución de las siguientes desigualdades:

$$\sum_{i=r^*}^{n-1} \frac{1}{i} \leq 1 < \sum_{i=r^*-1}^{n-1} \frac{1}{i} \, . \tag{2.4}$$

Por lo tanto, se seleccionará el primer candidato viable a partir de la entrevista $r^* - 1$. Por lo que para todo $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, podemos escribir

$$u_r = \begin{cases} v_r & \text{si } r \leq r^* - 1 \, , \\ \frac{r}{n} & \text{si } r \geq r^* \, . \end{cases}$$

De este modo, la regla óptima recomienda rechazar todos los candidatos hasta el $(r^* - 1)$-ésimo, y luego contratar el primer candidato viable que aparezca. □

Notación 2.7. Se denotará por $\phi(r, n)$ a la probabilidad de ganar con la estrategia que rechaza $r - 1$ candidatos y después escoge el primer candidato viable.

Veamos con el siguiente corolario que, efectivamente, esta probabilidad se puede expresar simplemente en términos de r y n.

Corolario 2.8. *En las condiciones del Teorema 2.6, se tiene que*

$$\phi(r^*, n) = \frac{r^* - 1}{n} \sum_{i=r^*-1}^{n-1} \frac{1}{i} \, . \tag{2.5}$$

Demostración. A partir de la demostración del teorema es inmediato que $u_0 = v_0 = v_{r^*-1}$ es la probabilidad de encontrar el mejor candidato entre los n candidatos usando la estrategia óptima.

Usando las ecuaciones (2.1) y (2.2) se tiene que

$$v_0 = v_{r^*-1} = \frac{r^*-1}{r^*} v_{r^*} + \frac{1}{r^*} \max\left\{ \frac{r^*}{n},\, v_{r^*} \right\},$$

y usando las expresiones (2.3) y (2.4), resulta que

$$v_0 = \frac{r^*-1}{r^*} \cdot \frac{r^*}{n} \left(\frac{1}{r^*} + \ldots + \frac{1}{n-1} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{r^*}{n} \,.$$

Teniendo en cuenta que el valor crítico $r^* = k+1$,

$$v_0 = \frac{r^*-1}{n} \left(\frac{1}{r^*-1} + \frac{1}{r^*} + \frac{1}{r^*+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{r^*-1}{n} \sum_{i=r^*-1}^{n-1} \frac{1}{i} \,. \tag{2.6}$$

□

Por último, un corolario que explica el porqué es común referirse a la solución del Problema de la Secretaria Clásico como la Regla del 37 %.

Corolario 2.9. *En las condiciones del Teorema 2.6, se tienen los siguientes resultados asintóticos:*

I. $r^*/n \xrightarrow{n\to\infty} 1/e$.

II. $\phi(r^*, n) \xrightarrow{n\to\infty} 1/e$.

Demostración. Para encontrar una aproximación asíntotica a r^* obsérvese que, con n suficientemente grande, se puede utilizar la *aproximación de Euler*,

$$\sum_{i=r^*-1}^{n-1} \frac{1}{i} \approx \int_{r^*}^{n} \frac{dx}{x} = \log n - \log r^* = \log\left(\frac{n}{r^*}\right),$$

e imponiendo que se cumpla la igualdad en 2.4

$$\log\left(\frac{n}{r^*}\right) \approx 1 \iff \frac{r^*}{n} = \frac{1}{e} \approx 0,368 \,.$$

Análogamente, se puede aproximar la probabilidad de ganar v_0 a partir de la ecuación (2.6)

$$v_0 = \frac{r^* - 1}{n} \sum_{i=r^*-1}^{n-1} \frac{1}{i} \approx \frac{r^*}{n} \int_{r^*}^{n} \frac{dx}{x} = \frac{r^*}{n} \cdot \log\left(\frac{n}{r^*}\right) .$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} v_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{r^*}{n} \cdot \log\left(\frac{n}{r}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \cdot \log(e) = \frac{1}{e} \approx 0,368 .$$

□

En resumen, para valores grandes de n, la estrategia óptima asintótica consiste en rechazar alrededor del 37 % de los candidatos y seleccionar al siguiente candidato viable que aparezca. Con esta estrategia, la probabilidad de éxito también es de aproximadamente el 37 %. Esto se refleja en la Figura 2.1:

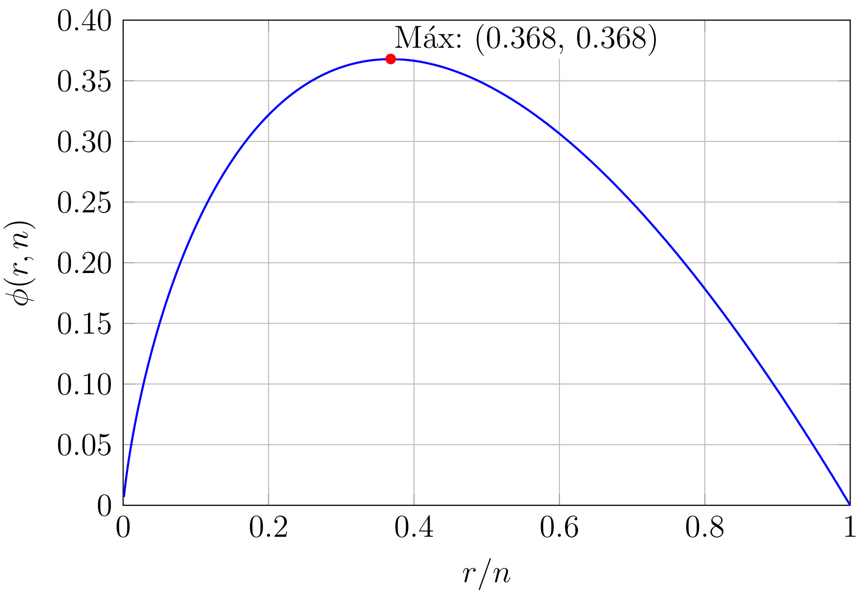

Figura 2.1: Probabilidad asintótica de ganar en el CSP con n candidatos para diferentes valores de r.

2.3. Generalización del CSP

Antes de concluir este capítulo, introduciremos una notación general del Problema de la Secretaria que será útil para abordar sus variantes en los próximos capítulos.

Los problemas en los que el objetivo es seleccionar el mejor de los candidatos, como indica la hipótesis 8 del CSP, se denominan *problemas de mejor elección*, es decir, solo estaremos satisfechos si elegimos el mejor. Sin embargo, los resultados que se enuncian en esta sección se extienden a unas funciones recompensa arbitrarias $U(j)$ que utilizamos con el objetivo de no restringirnos únicamente a problemas de mejor elección.

Definición 2.10. Definimos $U(j)$ como la recompensa obtenida si el candidato seleccionado tiene rango global j.

Se asume que $U(1) \geq U(2) \geq \ldots \geq U(n)$, es decir, cuanto peor sea el candidato, menor recompensa se obtendrá. Si no se contrata ningún candidato, la recompensa es un número fijo Z_∞ (que puede ser incluso mayor que $U(n)$). Por ejemplo, en el CSP, $U(1) = 1$, $U(2) = \ldots = U(n) = 0$ y $Z_\infty = 0$.

Observación 6. Sea X_j el rango relativo del candidato j entre los primeros j entrevistados. Entonces, las variables X_j son independientes y uniformemente distribuidas en los enteros $\{1, 2, \ldots, j\}$. La función recompensa $y_j(x_1, \ldots, x_j)$ es la recompensa esperada si se selecciona el candidato j-ésimo y tiene rango relativo x_j. La probabilidad de que un candidato con rango parcial x en las primeras j entrevistas tenga rango global m es la misma que la probabilidad de encontrar el candidato con rango global m en un conjunto de cardinal j y tenga rango parcial x, es decir,

$$f(m|j, x) = \frac{\binom{m-1}{x-1}\binom{n-m}{j-x}}{\binom{m}{j}} \qquad \text{con } m = x, \ldots, n - j + x,$$

(distribución hipergeométrica negativa). Entonces, para $1 \leq j \leq n$,

$$y_j(x_1, \ldots, x_j) = \sum_{m=x}^{n-j+x} U(m) f(m|j, x)$$

donde $x = x_j$. Con el objetivo de que al menos se realice una entrevista, tomaremos la recompensa $y_0 = -\infty$. Nótese como y_j solo depende de x_j, luego, se puede escribir $y_j(x_j)$.

Es posible dar una fórmula recursiva para f y es que, una vez realizadas j entrevistas, la probabilidad de que el candidato $(j+1)$-ésimo continúe siendo el x-ésimo mejor es $(j-x+1)/(j+1)$ y la probabilidad de que el nuevo candidato sea mejor y haga descender a la posición a nuestro candidato seleccionado es $x/(j+1)$. Por lo tanto, podemos escribir

$$f(m|j,x) = \frac{x}{j+1} f(m|j+1,x+1) + \frac{j-x+1}{j+1} f(m|j+1,x),$$

lo que implica que para las funciones recompensa se tiene que,

$$y_j(x) = \frac{x}{j} y_{j+1}(x+1) + \frac{j-x+1}{j+1} y_{j+1}(x) \tag{2.7}$$

para $j > 1$, con condiciones iniciales, $y_n(x) = U(x)$ para $1 \leq x \leq n$.

El horizonte en el Problema de la Secretaria es n. Si no contratamos a ningún candidato, se recibe Z_∞, así que la condición inicial para $V^{(n)}$ es $V_n^{(n)} = \text{máx}\{U(x_n), X_\infty\}$. Como los X_i son independientes, la esperanza condicionada 1.2 se reduce a una esperanza no condicionada. Puesto que y_j depende solo de $x_1, \ldots, x_j$ solamente a través de los valores de x_j, lo mismo ocurre para $V_j^{(n)}$. Por lo tanto, para $j = n-1, \ldots, 1$,

$$V_n^{(n)} = \text{máx}\left\{ y_j(x_j), \frac{1}{j+1} \sum_{x=1}^{j+1} V_{j+1}^{(n)}(x) \right\}.$$

Será óptimo parar en j si

$$y_j(x_j) \geq \frac{1}{j+1} \sum_{x=1}^{j+1} V_{j+1}^{(n)}(x)$$

y continuar en caso contrario. La generalización de que la regla óptima de parada es una regla de corte se ve reflejada en el siguiente lema.

Lema 2.11. *Si es óptimo seleccionar un candidato de rango parcial x en la entrevista j, entonces*

a) *Es óptimo seleccionar un candidato de rango parcial $x-1$ en la entrevista j.*

b) *Es óptimo seleccionar un candidato de rango parcial x en la entrevista $j+1$.*

Demostración. Sea $A(j) = (1/j)\sum_{i=1}^{j} V_j^{(n)}(i)$. La hipótesis del lema implica que $y_j(x) \geq A(j+1)$. Podemos reescribir a) y b) como

a') $y_j(x-1) \geq A(j+1)$,

b') $y_{j+1}(x) \geq A(j+2)$.

Puesto que $y_j(x-1) \geq y_j(x)$, se tiene que a) es cierto. Para comprobar b), nótese que $A(j+1) \geq A(j+2)$ porque $A(j+1)$ es un promedio de las funciones $V_{j+1}^{(n)}(i)$, y cada una de ellas es por lo menos igual de grande que $A(j+2)$. Por lo tanto, basta probar que $y_{j+1}(x) \geq y_j(x)$. Usando la fórmula recursiva 2.7,

$$\begin{aligned} y_j(x) &= \frac{x}{j+1} y_{j+1}(x+1) + \frac{j-x+1}{j+1} y_{j+1}(x) \\ &\leq \frac{x}{j+1} y_{j+1}(x) + \frac{j-x+1}{j+1} y_{j+1}(x) \\ &= y_{j+1}(x). \end{aligned}$$

$\square$

A partir de este lema, se deduce que la regla óptima tiene la siguiente forma. Sea r_x la primera entrevista en la que es óptimo seleccionar un candidato de rango parcial x. Entonces, $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n \leq n$ y si en la entrevista j observamos un candidato de rango relativo x, se para solamente si $j \geq r_x$.

Capítulo 3

Algunas variantes y aplicaciones del SP

En el capítulo anterior se analizó el Problema de la Secretaria Clásico, proporcionando una base sólida para entender la solución fundamental de este problema. Sin embargo, en la vida real, las situaciones rara vez se ajustan perfectamente a las hipótesis simplificadas del CSP. Este capítulo modifica las condiciones del problema tradicional para estudiar variantes más realistas y complejas, respondiendo a preguntas que pueden reflejar escenarios más cotidianos.

Por ejemplo, ¿qué sucede si, a pesar de querer seleccionar un candidato, existe la posibilidad de que este rechace la oferta? ¿Cómo cambia la estrategia si, además de la clasificación del candidato, también nos importa el verdadero valor de su rango? ¿Y qué ocurre si no somos tan exigentes y nos conformamos simplemente con seleccionar uno de los dos mejores candidatos? U otra situación bastante común, ¿cómo debemos actuar si existe la posibilidad de que, después de rechazar un número de candidatos, ya no queden más porque el número total de postulantes era desconocido?

Estas y otras variantes del SP se abordarán en detalle en este capítulo, definiendo las estrategias óptimas correspondientes y la probabilidad asintótica de éxito asociada a cada una de ellas. De esta manera, se pone de manifiesto cómo los problemas de este tipo tienen aplicaciones prácticas en todos los ámbitos donde la toma de decisiones está basada en la observación secuencial.

3.1. Empleo incierto

En una situación real, no sería raro enfrentarse a la dificultad de querer contratar a un candidato, pero que este rechace nuestra oferta. Este escenario es conocido como la variante de empleo incierto del Problema de la Secretaria, o UESP por sus siglas en inglés (*Uncertain Employment Secretary Problem*). M. H. Smith exploró esta fascinante variante en 1975 [25].

Enunciado del UESP. Considerando las hipótesis del Problema de la Secretaria Clásico, supongamos que existe una probabilidad p, $0 < p < 1$, de que un candidato acepte una oferta de trabajo, sin importar su posición en el ranking ni la colocación de los demás candidatos. Asumiremos que el empleador comprueba la disponibilidad del candidato en cada entrevista. De esta manera, añadimos la posibilidad de que, aun cuando identifiquemos a un candidato viable, este podría no estar disponible si decide rechazar nuestra oferta. En tal caso, no podríamos seleccionar a ese candidato y el proceso de entrevistas debe continuar.

Teorema 3.1. *Sea $0 < p < 1$, la estrategia óptima para resolver el UESP utiliza una regla de corte N_r y la probabilidad de ganar usando esta estrategia es*

$$P_r = \frac{p}{n} \sum_{j=r}^{n} \frac{\Gamma(r)\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)\Gamma(r-p)}.$$

Demostración. En primer lugar, por el Lema 2.11, se tiene que la estrategia óptima es aquella que utiliza una regla de corte N_r. Calculemos ahora la probabilidad de ganar usando esta regla.

Para calcular la recompensa y_j, definamos ϵ_j como el indicador del evento {el candidato j-ésimo está disponible}. Se supone que los ϵ_j son independientes entre ellos e independientes de las variables X_j siendo $\mathbb{P}(\epsilon_j = 1) = 1-q = p$ para todo $j = 1, \ldots, n$. La información sobre la disponibilidad del candidato se conoce a la hora de realizar la entrevista. Entonces, se tiene que

$$\mathbb{P}(X_j = k) = 1/r, \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

y

$$\mathbb{P}(\epsilon_j = i) = p^i(1-p)^{1-i}, \quad i = 0, 1.$$

Si el candidato j-ésimo es un candidato viable ($X_j = 1$) y está disponible ($\epsilon_j = 1$), la probabilidad de ganar es la misma que la del CSP, por lo tanto, la recompensa será

$$y_j = \frac{j}{n}\mathbb{I}(X_j = 1, \epsilon_j = 1).$$

Ahora, la probabilidad de ganar usando esta estrategia se puede expresar como

$$\begin{aligned} P_r &= \sum_{j=r}^{n} \mathbb{P}(\text{seleccionar } j \text{ y ganar}|N_r) \\ &= \sum_{j=r}^{n} \mathbb{P}(\text{llegar a } j|N_r)\mathbb{P}(X_j = 1, \epsilon_j = 1, \text{ y ganar}). \end{aligned}$$

Por un lado, teniendo en cuenta que la probabilidad de aceptación de un candidato es p, la probabilidad de llegar a la entrevista j habiendo rechazado $r-1$ candidatos es

$$P(\text{llegar a } j|N_r) = \prod_{i=r}^{j-1} \frac{i-p}{i} = \frac{r-p}{r}\,\frac{r+1-p}{r+1}\cdots\frac{j-1-p}{j-1} = \frac{\Gamma(r)\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)\Gamma(r-p)}, \tag{3.1}$$

donde $\Gamma(n) = (n-1)!$ es la función gamma habitual. Y, por otro lado,

$$\mathbb{P}(X_j = 1, \epsilon_j = 1, \text{ y ganar}) = \left(\frac{1}{j}\right) p \left(\frac{j}{n}\right) = \frac{p}{n}. \tag{3.2}$$

Por lo tanto, usando 3.1 y 3.2, se deduce que

$$P_r = \frac{p}{n} \sum_{j=r}^{n} \frac{\Gamma(r)\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)\Gamma(r-p)}.$$

$\square$

Corolario 3.2. *En las condiciones del Teorema 3.1, para el corte óptimo r^* se tienen los siguientes resultados asintóticos:*

I. $r^*/n \xrightarrow{n\to\infty} p^{1/(1-p)}$.

II. $P_{r^*} \xrightarrow{n\to\infty} p^{1/(1-p)}$.

Demostración. Para obtener el corte óptimo r^*, buscamos el máximo r que cumpla $P_{r+1} \geq P_r$. A partir del teorema anterior y usando la propiedad de la función gamma $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, resulta que

$$\begin{aligned}
P_{r+1} - P_r &= \frac{p}{n}\left[\sum_{j=r+1}^{n} \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)\Gamma(r+1-p)} - \sum_{j=r}^{n} \frac{\Gamma(r)\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)\Gamma(r-p)}\right] \\
&= \frac{p}{n}\left[\frac{r}{r-p}\sum_{j=r+1}^{n} \frac{\Gamma(r)\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)\Gamma(r-p)} - \sum_{j=r+1}^{n} \frac{\Gamma(r)\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)\Gamma(r-p)} - \frac{\Gamma(r)\Gamma(r-p)}{\Gamma(r)\Gamma(r-p)}\right] \\
&= \frac{p}{n}\left[\sum_{j=r+1}^{n} \frac{\Gamma(r)\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)\Gamma(r-p)}\left(\frac{r}{r-p} - 1\right) - 1\right] \\
&= \frac{p}{n}\left[\frac{p}{r-p}\sum_{j=r+1}^{n} \frac{\Gamma(r)\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)\Gamma(r-p)} - 1\right].
\end{aligned}$$

Imponiendo que $P_{r+1} - P_r \geq 0$, la regla óptima N_{r^*} es aquella en la que r^* satisface

$$r^* = \min\left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \frac{p\Gamma(r)}{\Gamma(r+1-p)} \sum_{j=r+1}^{n} \frac{\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)} \leq 1 \right\}. \tag{3.3}$$

Usando la aproximación $j^p\Gamma(j-p)/\Gamma(j) \xrightarrow{n\to\infty} 1$, se tiene que

$$\sum_{j=r+1}^{n} \frac{\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)} = \sum_{j=r+1}^{n} \frac{1}{(j-p)(j-p+1)\cdots(j-1)} \approx \int_r^n x^{-p}dx = \frac{n^q - r^q}{q}, \tag{3.4}$$

donde $q = 1 - p$. Asimismo,

$$\frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r+1-p)} = \frac{(r-1)!}{(r+q-1)!} = \frac{1}{r(r+1)\cdots(r+q-1)} \approx \frac{1}{r^q}.$$

Por lo tanto, como debe cumplirse la ecuación 3.3,

$$\begin{aligned}
\frac{p\Gamma(r)}{\Gamma(r+1-p)} \sum_{j=r+1}^{n} \frac{\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)} = 1 \iff& \frac{p}{r^q}\frac{n^q - r^q}{q} \approx 1 \\
\iff& r^q \approx \frac{n^q}{q/p+1} = pn^q.
\end{aligned}$$

Y, finalmente, teniendo en cuenta que $q = 1 - p$,

$$r^*/n \xrightarrow{n\to\infty} p^{1/(1-p)}.$$

También podemos evaluar la probabilidad óptima de elegir al mejor candidato siguiendo la regla N_{r^*} a partir de la fórmula del Teorema 3.1:

$$P_{r^*} = \frac{p}{n}\frac{\Gamma(r^*)}{\Gamma(r^*-p)}\sum_{j=r^*}^{n}\frac{\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)},$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r-p)} = (r-p+1)\cdots(r-1)r \approx r^p$$

y usando 3.4, se tiene que

$$P_{r^*} \approx \frac{p(r^*)^p}{n}\frac{n^q-(r^*)^q}{q} = \frac{pn^p p^{p/(1-p)}}{n}\frac{n^{(1-p)}(1-p)}{(1-p)} = p^{1/(1-p)}.$$

□

Observación 7. Una variante razonable sería permitir que la probabilidad de aceptación, p, sea una función que decrezca con el rango global del candidato, siendo más probable que rechace nuestra oferta cuanto mejor sea el candidato. Sin embargo, esto implicaría que (X_j, ϵ_j) es dependiente de las observaciones previas con la consecuente complicación en la forma de definir una regla de parada óptima.

También, otra clase de problema de la secretaria que tiene relación con esta es aquella en la que se permite aceptar un candidato que fue rechazado anteriormente, pero con una probabilidad de aceptación que decrece al ir realizando más entrevistas.

Ejemplo 3.3. En las condiciones del UESP, si se utiliza la regla de corte N_r y fijamos una probabilidad p de disponibilidad de los candidatos, podemos definir $x \in [0,1]$ como el límite de $r/n \xrightarrow{n\to\infty} x$. De esta manera, a partir del Teorema 3.1, la probabilidad asintótica de ganar para diferentes valores de r es

$$P_r(x) = \frac{p}{1-p}(x^p - x).$$

Con esta expresión de P_r, representamos en la Figura 3.1 las probabilidades asintóticas de ganar en el UESP en función de r para diferentes valores de p.

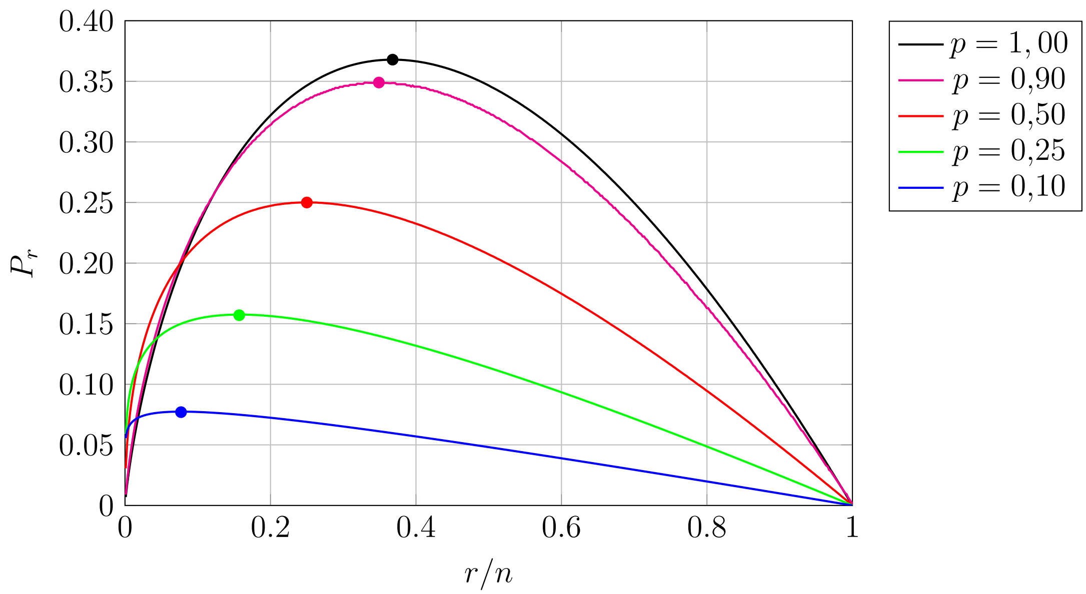

Figura 3.1: Probabilidades asintóticas de ganar, P_r, en el UESP con n candidatos en función de r/n para diferentes valores de la probabilidad de aceptación p.

p	r^*	P_r
0.10	0.077	0.077
0.25	0.157	0.157
0.50	0.250	0.250
0.90	0.349	0.349
1.00	0.368	0.368

Tabla 3.1: Valores de r^* y P_r en el UESP para diferentes probabilidades de aceptación p.

Por último, en la Tabla 3.1 se observa que cuanto menor es la probabilidad de aceptación, p, menor es la probabilidad de ganar y menor es el corte óptimo, r^*. Es decir, cuanto mayor sea la probabilidad de rechazo, más difícil será seleccionar al mejor candidato y además, el número de corte será menor. El caso más favorable es aquel en el que $p = 1$, es decir, estaríamos en las condiciones del CSP en el que los candidatos siempre están disponibles a la hora de contratarlos.

Cabe destacar el caso en el que la probabilidad de aceptación es del 50 %, $p = 0,50$. En estas condiciones, la regla óptima consiste en rechazar aproximadamente el 25 % de los candidatos y seleccionar al primer candidato viable que aparezca (si lo hay y si está disponible). De esta manera, la probabilidad óptima asintótica de seleccionar al mejor candidato es del 25 %.

3.2. Juego de Googol

En febrero de 1960, Martin Gardner enunció un nuevo problema en una columna de la revista *Scientific American* similar al CSP, una versión que recibe el nombre de *juego de Googol*. En este problema, el jugador I escoge n números distintos, $X_1, \ldots, X_n$, los escribe en pequeños trozos de papel y los mete en una urna. El jugador II, que no conoce los números que hay escritos, puede ir sacando estos papeles y parar cuando quiera, pero solo ganará si el número seleccionado es el mayor de los n números. Por supuesto, el jugador II estaría en las mismas condiciones que el empleador en el CSP y tendría la misma probabilidad de ganar si utiliza la estrategia óptima. Sin embargo, ¿puede hacerlo mejor conociendo la distribución de los valores reales de los X_j? Berezovsky y Gnedin [6] estudiaron en 1984 la variante que proponemos en esta sección.

Enunciado del juego de Googol. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con distribución uniforme en $(0, \theta)$ donde θ tiene una distribución de Pareto, $\mathcal{P}a(\alpha, 1)$, con $\alpha > 0$. La función de densidad de una distribución de Pareto, $\mathcal{P}a(\alpha, x)$, es

$$f(\theta|\alpha, x) = \alpha x^{\alpha} \theta^{-(1+\alpha)} \mathbb{I}(\theta > x)$$

donde x es un número real arbitrario. Sea $M_0 = X_0 = 1$, y para $j = 1, \ldots, n$ sea $M_j = \text{máx}\{X_0, X_1, \ldots, X_j\} = \text{máx}\{M_{j-1}, X_j\}$. Se van observando los X_j uno a uno y se puede parar cuando se prefiera. Si se decide parar en la observación de X_j y esa extracción es la más grande los n números existentes, incluyendo X_0, se gana.

Veamos un primer resultado que muestra la dependencia de la distribución de θ con las variables $X_1, \ldots, X_j$.

Proposición 3.4. *En las condiciones del enunciado del juego de Googol, la distribución de θ dados $X_1, \ldots, X_j$ es $\mathcal{P}a(\alpha + j, M_j)$.*

Demostración. En primer lugar, $\theta \sim \mathcal{P}a(\alpha, 1)$, con $\alpha > 0$, luego la función de densidad de θ es

$$f(\theta|\alpha, 1) = \frac{\alpha}{\theta^{(\alpha+1)}} \mathbb{I}(\theta > 1).$$

Puesto que cada $X_i \sim U(0, \theta)$, la distribución conjunta de $\theta, X_1, \ldots, X_j$ es

$$\begin{aligned} g(\theta, x_1, \ldots, x_j) &= \frac{\alpha}{\theta^{\alpha+1}} \mathbb{I}(\theta > 1) \prod_{i=1}^{j} \mathbb{I}(0 < x_i < \theta) \frac{1}{\theta} \\ &= \frac{\alpha}{\theta^{\alpha+j+1}} \mathbb{I}(\theta > \text{máx}\{1, x_1, \ldots, x_j\}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g(\theta|x_1, \ldots, x_j)$ es proporcional a $\theta^{-(\alpha+j+1)} \mathbb{I}(\theta > m_j)$ y, en consecuencia, sigue una distribución $\mathcal{P}a(\alpha + j, m_j)$. $\square$

Teorema 3.5. *La estrategia óptima para resolver el Juego de Googol utiliza una regla de corte N_r y la probabilidad de ganar usando esta estrategia es*

$$P_r = \frac{\alpha + r - 1}{\alpha + n} \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{\alpha + j - 1}.$$

Demostración. En primer lugar, el lema 2.11 garantiza que la estrategia óptima sigue una regla de corte N_r. Ahora, obtengamos una expresión para la recompensa

$$y_j = \mathbb{P}\{X_j = M_n | X_1, \ldots, X_j\}.$$

Una vez observados $x_1, \ldots, x_j$, se tiene que

$$y_j(x_1, \ldots, x_j) = \mathbb{P}(M_n = m_j | M_j = m_j) \mathbb{I}(X_j = M_j),$$

donde, independientemente de las variables $X_1, \ldots, X_j$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n = M_j | X_1, \ldots, X_j) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(M_n = M_j | \theta, X_1, \ldots, X_j) | X_1, \ldots, X_j\right] \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{M_j}{\theta}\right)^{n-j} f(\theta | \alpha + j, M_j) d\theta \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{M_j}{\theta}\right)^{n-j} (\alpha + j) \frac{M_j^{\alpha+j}}{\theta^{\alpha+j+1}} \mathbb{I}(\theta > M_j) d\theta \\
&= (\alpha + j) M_j^{n+\alpha} \int_{M_j}^\infty \frac{d\theta}{\theta^{\alpha+j+1}} \\
&= \frac{\alpha + j}{n + \alpha} \frac{M_j^{n+\alpha}}{M_j^{n+\alpha}} \\
&= \frac{\alpha + j}{\alpha + n}.
\end{aligned}$$

Además, si es óptimo parar en el instante j con $X_j = M_j$, entonces será óptimo parar en el instante $j+1$ si $X_{j+1} = M_{j+1}$. Si aparece un candidato viable en la entrevista j-ésima, significa que $X_j = M_j = 1$, luego la recompensa se puede expresar como

$$y_j(x_1, \ldots, x_j) = \frac{\alpha + j}{\alpha + n} \mathbb{I}(X_j = M_j)$$

y será óptimo parar si, y solo si,

$$\frac{\alpha + j}{\alpha + n} \geq \mathbb{P}(\text{ganar con mejor estrategia a partir de } j + 1).$$

La probabilidad de la derecha en la desigualdad anterior es una función no creciente con j, porque cualquier estrategia que se pueda aplicar en la etapa $j + 2$, también se podrá aplicar en la etapa $j + 1$. Sin embargo, la parte de la izquierda sí que es una función creciente con j, entonces una regla óptima será del estilo N_r para algún $r^* \geq 1$ que rechaza los primeros $r^* - 1$ candidatos y acepta el siguiente candidato tal que $X_j = m_j$, si lo hay.

Además, el r óptimo que maximiza la probabilidad de ganar, P_r, se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
P_r &= \mathbb{P}(\text{ganar} | N_r) \\
&= \sum_{j=r}^{n} \mathbb{P}(\text{seleccionar } j | N_r) \mathbb{P}(j \text{ es el mejor} | \text{seleccionar } j),
\end{aligned}$$

ahora,

$$\mathbb{P}(j \text{ es el mejor}|\text{seleccionar } j) = \frac{\alpha + j}{\alpha + n}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{seleccionar } j|N_r) &= \mathbb{P}(M_{j-1} = M_{r-1}, M_j > M_{j-1}) \\ &= \frac{\alpha + r - 1}{\alpha + j - 1}\left(1 - \frac{\alpha + j - 1}{\alpha + j}\right) \\ &= \frac{\alpha + r - 1}{(\alpha + j - 1)(\alpha + j)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P_r = \frac{\alpha + r - 1}{\alpha + n} \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{\alpha + j - 1}.$$

Para encontrar el valor de r que maximiza P_r, observemos que

$$\begin{aligned}P_{r+1} - P_r &= \frac{\alpha + r}{\alpha + n} \sum_{j=r+1}^{n} \frac{1}{\alpha + j - 1} - \frac{\alpha + r - 1}{\alpha + n} \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{\alpha + j - 1} \\ &= \frac{1}{\alpha + n}\left[\sum_{j=r+1}^{n} \frac{1}{\alpha + j - 1} - 1\right].\end{aligned}$$

Como se trata de una expresión que decrece al aumentar r, el r óptimo será el primero para el que el término entre corchetes sea menor o igual que 0. Es decir,

$$r^* = \text{mín}\left\{ r \middle| \sum_{j=r+1}^{n} \frac{1}{\alpha + j - 1} \leq 1 \right\}.$$

□

3.3. Ganar, perder o empatar

El Problema de la Secretaria se puede considerar desde el punto de vista del matrimonio, una situación en la cual es mejor quedarse soltero a casarse con una persona que no sea la adecuada.

Enunciado del problema del matrimonio. Bajo las mismas hipótesis que en el CSP, en esta variante la recompensa será 1 si se selecciona al mejor candidato, 0 si no se selecciona y -1 si se selecciona un candidato que no es el mejor. De esta manera, se obtiene una mejor recompensa si se llega al final sin haber elegido a un candidato que eligiendo un candidato que no sea el mejor, en cuyo caso la recompensa es negativa.

Teorema 3.6. *En las condiciones del problema del matrimonio, la estrategia óptima utiliza una regla de corte N_r y la recompensa esperada usando esta estrategia es*

$$E_r = \frac{2(r-1)}{n} \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{j-1} - \frac{n-r+1}{n}.$$

Demostración. Por el Lema 2.11, existe una regla de corte óptima, N_r. Podemos calcular E_r como la probabilidad de seleccionar al mejor usando N_r menos la probabilidad de que no se seleccione al mejor usando la misma estrategia. Sin embargo, la probabilidad de que no se seleccione al mejor coincide con la probabilidad de seleccionar uno cualquiera menos la probabilidad de seleccionar al mejor, por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_r &= \mathbb{P}(\text{seleccionar al mejor}|N_r) - \mathbb{P}(\text{no seleccionar al mejor}|N_r) \\ &= 2\mathbb{P}(\text{seleccionar al mejor}|N_r) - \mathbb{P}(\text{seleccionar cualquiera}|N_r). \end{aligned}$$

Ahora, una vez rechazados los $r-1$ primeros, la probabilidad de seleccionar uno cualquiera es la probabilidad de que el mejor aparezca después de los $r-1$ y la probabilidad de seleccionar al mejor es la misma que la del CSP, luego,

$$\begin{aligned} E_r &= 2\mathbb{P}(\text{seleccionar al mejor}|N_r) - \mathbb{P}(\text{seleccionar cualquiera}|N_r) \\ &= \frac{2(r-1)}{n} \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{j-1} - \frac{n-r+1}{n}. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.7. *En las condiciones del Teorema 3.6, para el corte óptimo r^*, se tienen los siguientes resultados asintóticos:*

I. $r^*/n \xrightarrow{n\to\infty} 1/\sqrt{e}$.

II. $E_{r^*} \xrightarrow{n\to\infty} (2-\sqrt{e})/\sqrt{e}$.

Demostración. El r óptimo será aquel para el cual $E_{r+1} \leq E_r$, es decir, el primer r que satisfaga

$$\sum_{j=r+1}^{n} \frac{1}{j-1} \leq \frac{1}{2}.$$

Usando la aproximación de Euler, $\sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{j-1} \approx \log(n/r)$, luego el r óptimo es tal que

$$\log(n/r^*) \approx 1/2 \iff \frac{r^*}{n} \approx \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,607.$$

Y la recompensa asintótica esperada será

$$E_{r^*} \approx \frac{2n/\sqrt{e}}{n} \log\left(\frac{n}{n/\sqrt{e}}\right) - \frac{n-n/\sqrt{e}}{n} = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{2-\sqrt{e}}{\sqrt{e}} \approx 0,214.$$

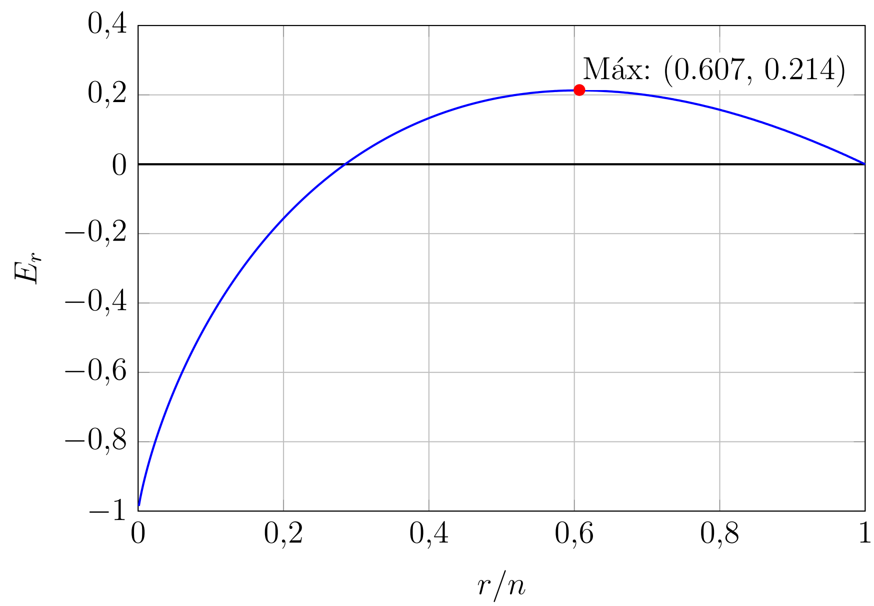

Figura 3.2: Recompensa asintótica esperada en el juego de ganar, perder o empatar en función del número de corte, r.

□

En resumen, rechazando aproximadamente el 60 % de los candidatos y aceptando al siguiente candidato viable que aparezca, la recompensa esperada es de $0,214$, que sorprendentemente es mayor que 0. Como era de esperar, el número de corte es mayor que en el CSP, esto se debe a que, en esta variante, nos conviene más llegar al final de las entrevistas sin elegir ningún candidato a elegir uno que no sea el mejor. Nótese que si llegamos al final de las entrevistas y no se ha seleccionado ningún candidato, la recompensa esperada tiende a 0. Y, por otro lado, si se observan pocos candidatos antes de empezar a contratar, será más probable que no seleccionemos al mejor candidato y la recompensa esperada será negativa.

3.4. Seleccionar uno de los dos mejores

Supongamos que no somos tan restrictivos y no solo nos conformamos con seleccionar al mejor candidato sino que también estaremos contentos si seleccionamos al segundo mejor. En este caso, enunciamos la siguiente variante del CSP.

Enunciado del problema de seleccionar uno de los dos mejores. Bajo las hipótesis del Problema de la Secretaria se definen $U(1) = a \geq 0$, $U(2) = b \geq 0$ y $U(3) = \ldots = U(n) = Z_\infty = 0$, donde $U(j)$ denota la recompensa obtenida si el candidato seleccionado tiene rango global j, como se definió en 2.10. Es decir, se obtendrá una recompensa positiva solamente si se elige al mejor o al segundo mejor candidato.

Observación 8. Si $r \leq s$, a partir del Lema 2.11 se deduce que una regla óptima para este problema es de la forma:

$N_{r,s}$: rechazar los primeros $r-1$ candidatos; entre las etapas r y $s-1$, seleccionar un candidato viable; desde la etapa s hasta la n, seleccionar un candidato de rango relativo 1 o 2.

Definición 3.8. Definimos por P_A y P_B a la probabilidad de seleccionar al mejor y al segundo mejor siguiendo la regla $N_{r,s}$, respectivamente, es decir:

$$P_A = \mathbb{P}(\text{selecionar al mejor}|N_{r,s}) \quad \text{y} \quad P_B = \mathbb{P}(\text{selecionar al } 2^{\text{o}} \text{ mejor}|N_{r,s}).$$

Y, también, denotamos por $V(r,s)$ a la recompensa esperada usando la regla de parada $N_{r,s}$.

Teorema 3.9. *En el problema de seleccionar al mejor o al segundo mejor, si $r \leq s$, se tiene que*

$$P_A = \frac{r-1}{n}\left[\sum_{j=r}^{s-1}\frac{1}{j-1} + (s-2)\sum_{j=s}^{n}\frac{1}{(j-1)(j-2)}\right].$$

y

$$P_B = \frac{r-1}{n}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{j=r}^{s-1}\frac{n-j}{j-1} + (s-2)\sum_{j=s}^{n}\frac{1}{(j-1)(j-2)}\right].$$

Demostración. Denotemos por P_j a la probabilidad del evento {el mejor de los $j-1$ primeros aparece antes de s} y por Q_j a la del evento {el 2º mejor de los $j-1$ primeros aparece antes de s}. Entonces, las probabilidades son

$$P_j = \frac{r-1}{j-1} \qquad \text{y} \qquad Q_j = \frac{s-2}{j-2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} P_A &= \sum_{j=r}^{n}\mathbb{P}(\text{el mejor en } j \text{ y es seleccionado}) \\ &= \sum_{j=r}^{n}\frac{1}{n}\mathbb{P}(\text{entrevistar } j) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=r}^{s-1}P_j + \sum_{j=s}^{n}P_jQ_j\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[\sum_{j=r}^{s-1}\frac{r-1}{j-1} + (s-2)\sum_{j=s}^{n}\frac{(r-1)(s-2)}{(j-1)(j-2)}\right] \\ &= \frac{r-1}{n}\left[\sum_{j=r}^{s-1}\frac{1}{j-1} + (s-2)\sum_{j=s}^{n}\frac{1}{(j-1)(j-2)}\right]. \end{aligned}$$

Para calcular P_B, definamos Z_j como la probabilidad del evento {el mejor aparece después de j| el 2º mejor aparece en k}. Entonces, esta probabilidad se puede calcular como

$$Z_j = \frac{n-j}{n-1}.$$

A partir de aquí,

$$
\begin{aligned}
P_B &= \sum_{j=r}^{n} \mathbb{P}(\text{el } 2^{\underline{\text{o}}} \text{ mejor en } j \text{ y es seleccionado}) \\
&= \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{n}\mathbb{P}(\text{entrevistar } j) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=r}^{s-1} P_j Z_j + \sum_{j=s}^{n} P_j Q_j\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{j=r}^{s-1} \frac{(r-1)(n-j)}{(j-1)(n-1)} + \sum_{j=s}^{n} \frac{(r-1)(s-2)}{(j-1)(j-2)}\right] \\
&= \frac{r-1}{n}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{j=r}^{s-1} \frac{n-j}{j-1} + (s-2)\sum_{j=s}^{n} \frac{1}{(j-1)(j-2)}\right].
\end{aligned}
$$

$\square$

Corolario 3.10. *En el SP con funciones de recompensa $U(1) = a \geq 0$, $U(2) = b \geq 0$ y $U(3) = \ldots = U(n) = Z_\infty = 0$, si $r \geq s$, y se definen x e y como los límites*

$$
r/n \xrightarrow{n\to\infty} x \qquad y \qquad s/n \xrightarrow{n\to\infty} y,
$$

entonces la recompensa asintótica esperada es

$$
V(r,s) \xrightarrow{n\to\infty} (a+b)x(\log(y/x) + 1 - y) + bx(x-y).
$$

Demostración. A partir de las fórmulas de P_A y P_B obtenidas en el teorema 3.9 y aproximando sumas por integrales, resulta que

$$
\begin{aligned}
P_A &= \frac{r-1}{n}\left[\sum_{j=r}^{s-1} \frac{1}{j-1} + (s-2)\sum_{j=s}^{n} \frac{1}{(j-1)(j-2)}\right] \\
&\approx \frac{r}{n}\left[\log\left(\frac{s}{r}\right) + s\int_s^n \frac{dz}{z^2}\right] \\
&= \frac{r}{n}\left[\log\left(\frac{s}{r}\right) + s\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{n}\right)\right] \xrightarrow{n\to\infty} x\left[\log\left(\frac{y}{x}\right) + 1 - y\right].
\end{aligned}
$$

Y, por otro lado,

$$
\begin{aligned}
P_B &= \frac{r-1}{n}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{j=r}^{s-1}\frac{n-j}{j-1} + (s-2)\sum_{j=s}^{n}\frac{1}{(j-1)(j-2)}\right] \\
&\approx \frac{r}{n}\left[\frac{n}{n}\log\left(\frac{s}{r}\right) - \frac{s-1-r}{n} + s\int_s^n \frac{dz}{z^2}\right] \\
&= \frac{r}{n}\left[\log\left(\frac{s}{r}\right) - \frac{s-1-r}{n} + s\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{n}\right)\right] \xrightarrow{n\to\infty} x\left[\log\left(\frac{y}{x}\right) - y + x + 1 - y\right].
\end{aligned}
$$

En consecuencia, puesto que la recompensa esperada se calcula como

$$V(r,s) = \mathbb{E}(\text{recompensa}|N_{r,s}),$$

se tiene que

$$V(r,s) = aP_A + bP_B,$$

luego,

$$
\begin{aligned}
V(r,s) &\xrightarrow{n\to\infty} ax\left[\log\left(\frac{y}{x}\right) + 1 - y\right] + bx\left[\log\left(\frac{y}{x}\right) - 2y + x + 1\right] \\
&= (a+b)x(\log(y/x) + 1 - y) + bx(x-y).
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 3.11. En el problema de seleccionar a uno de los dos mejores candidatos, para valores de n suficientemente grandes, podemos obtener la recompensa esperada asintótica calculando la derivada de la fórmula de $V(r,s)$ obtenida en el Corolario 3.10. Denotaremos por W a la función límite que cumple $V(r,s) \xrightarrow{n\to\infty} W(x,y)$. Diferenciando $W(x,y)$ con respecto de y,

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y} = \frac{(a+b)x}{y} - ax - 2bx = 0 \iff y = \frac{a+b}{a+2b},$$

y con respecto de x se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} &= (a+b)\left(\log\left(\frac{y}{x}\right) - y\right) + 2bx - by = 0 \\
&\iff \log(x) = \frac{2bx-by}{a+b} - y + \log(y).
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que $y = (a+b)/(a+2b)$, debe cumplirse

$$\log(x) = \frac{2bx}{a+b} - 1 + \log(y).$$

En el caso particular en el que nos sea indiferente seleccionar al mejor o al segundo mejor, se tiene que $a = 1$ y $b = 1$, y las soluciones óptimas son

$$y = 2/3 \quad \text{y} \quad \log(x) = \log(2/3) - 1 + x. \tag{3.5}$$

Resolviendo la ecuación en x numéricamente mediante el método de Newton como se muestra en el Apéndice A, se obtiene $x \approx 0,34698$. Por último, evaluando en estos puntos la probabilidad asintótica de seleccionar el mejor o el segundo mejor se obtiene aproximadamente $0,57367$.

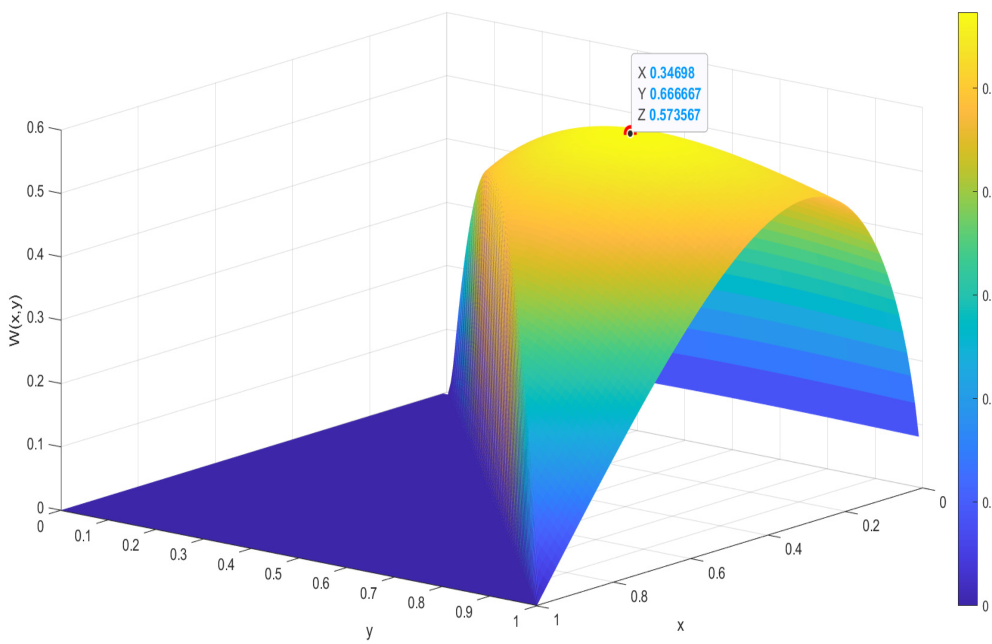

Figura 3.3: Recompensa asintótica esperada en función de x e y, $W(x,y)$, en el problema de seleccionar al mejor o al segundo mejor con $a = b = 1$.

En resumen, la estrategia óptima para $a = b = 1$ consiste en rechazar aproximadamente el 35 % de los candidatos y seleccionar un candidato viable (si lo hay) antes de entrevistar el 67 % de los candidatos. Si, una vez entrevistados aproximadamente el 67 % de postulantes no lo hemos encontrado, seleccionaremos el primer candidato de rango relativo 1 o 2 que aparezca. Siguiendo la estrategia que utiliza esta regla conseguiremos contratar uno de los dos mejores candidatos aproximadamente el 57 % de las veces.

3.5. Número aleatorio de candidatos

En muchas situaciones de la vida real, el número exacto de candidatos es desconocido, aunque se sabe que el total de candidatos a entrevistar es finito. Al introducir esta incertidumbre sobre la cantidad total de candidatos, la probabilidad asintótica de éxito siguiendo la estrategia óptima disminuye en comparación con el CSP. Esta variante fue estudiada en 1972 por Presman y Sonin [24].

Enunciado del SP con un número aleatorio de candidatos. Bajo las mismas hipótesis que en el CSP, supongamos que el número de candidatos N es desconocido y lo definimos como una variable aleatoria con distribución uniforme en $\{1, \ldots, n\}$, donde n es fijo. Si decidimos rechazar un candidato y resulta que no hay más, habremos perdido. El objetivo es seleccionar el mejor de los N candidatos que haya disponibles.

Teorema 3.12. *En el SP con un número aleatorio de candidatos existe una regla de corte N_r, $r \geq 1$, que es óptima. Y, además, la recompensa esperada siguiendo la regla de corte N_r es*

$$\mathbb{E}(Y_{N_r}) = \frac{1}{n} \sum_{k=r}^{n} \frac{r-1}{k} \sum_{i=r}^{k} \frac{1}{i-1}.$$

Demostración. Primero obtengamos un valor de y_j para $j = 1, \ldots, n$. Supongamos que al llegar a la entrevista j-ésima se encuentra un candidato viable y lo aceptamos. En este caso, se gana solo si ninguno de los candidatos restantes es viable. Dado que la distribución de N para $N \geq j$ es uniforme en el conjunto $\{j, \ldots, n\}$, para cada $k \in \{j, \ldots, n\}$, la probabilidad $\mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{n-j+1}$ y la probabilidad de que un candidato no sea viable es $\mathbb{P}(X_k > 1)$. Por tanto, la probabilidad P_j de que no exista ningún candidato viable a partir de la entrevista j-ésima es

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{1}{n-j+1}\sum_{i=j}^{n}\mathbb{P}(X_{j+1}>1, X_{j+2}>1,\dots,X_i>1) \\ &= \frac{1}{n-j+1}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{j+1}\frac{j+1}{j+2}\cdots\frac{i-1}{i} = \frac{j}{n-j+1}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Sin embargo, solo se ganará si el candidato j-ésimo es viable ($X_j = 1$), y si existen candidatos suficientes para entrevistar, es decir, $N \geq j$. Luego, la recompensa será

$$y_j = P_j\,\mathbb{I}(N \geq j, X_j = 1).$$

Para comprobar que existe una regla de corte que es óptima, consideremos que si es óptimo parar en j con un candidato viable, entonces también es óptimo parar en $j+1$ con otro candidato viable. Sea W_j la recompensa esperada si continuamos entrevistando al llegar a la entrevista j. Esta sucesión de constantes es no creciente porque continuar entrevistando a partir de la $j+1$ es una acción que está contenida en continuar entrevistando a partir de la etapa j. Además, es óptimo seleccionar en j a un candidato viable si $P_j \geq W_j$.

$$\begin{aligned} P_{j+1} - P_j &= \frac{j+1}{n-j}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{1}{i} - \frac{j}{n-j+1}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i} \\ &= \left(\frac{j+1}{n-j} - \frac{j}{n-j+1}\right)\sum_{i=j+1}^{n}\frac{1}{i} - \frac{1}{n-j+1} \\ &= \frac{n+1}{(n-j+1)(n-j)}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{1}{i} - \frac{1}{n-j+1}. \end{aligned}$$

Esta diferencia es positiva si, y solo si,

$$\frac{1}{n-j}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{1}{i} > \frac{1}{n+1}.$$

La desigualdad anterior siempre se cumple, pues el término de la derecha es una media de términos que son siempre mayores que $1/(n+1)$. Luego, existe una regla de corte que es óptima.

Sea N_r una regla de corte cualquiera, la probabilidad condicionada de ganar si $N = k$ es cero si $k < r$ porque llegaremos al final de las entrevistas sin haber seleccionado un candidato. Si $k \geq r$, la probabilidad es

$$\mathbb{P}(\text{ganar}|N = k, k \geq r) = \frac{r-1}{k} \sum_{i=r}^{k} \frac{1}{i-1}.$$

Finalmente, puesto que N es uniforme en $\{1, \ldots, n\}$, la recompensa esperada siguiendo la regla N_r será

$$\mathbb{E}(Y_{N_r}) = \frac{1}{n} \sum_{k=r}^{n} \frac{r-1}{k} \sum_{i=r}^{k} \frac{1}{i-1}.$$

$\square$

Corolario 3.13. *En las condiciones del Teorema 3.12, se tienen los siguientes resultados asintóticos:*

I. $r^*/n \xrightarrow{n\to\infty} 1/e^2$.

II. $\mathbb{E}(Y_{N_{r^*}}) \xrightarrow{n\to\infty} 2/e^2$.

Demostración. Definimos $x \in [0, 1]$ como el límite de $r/n \xrightarrow{n\to\infty} x$, que suponemos que existe. Entonces, aproximando sumas por integrales, la recompensa esperada asintótica es

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{N_r}) = \frac{r-1}{n} \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{k} \sum_{i=r}^{k} \frac{1}{i-1} &\approx x \int_x^1 \frac{1}{y} \int_x^y \frac{1}{z} dz dy \\ &= x \int_x^1 \frac{1}{y} \log\left(\frac{y}{x}\right) dy = \frac{x(\log x)^2}{2}.\end{aligned}$$

Calculando la derivada e igualando a cero,

$$\frac{\partial E(Y_{N_r})}{\partial x} = \frac{(\log x)^2}{2} + (\log x) = 0.$$

Cuya solución es $x = e^{-2} \approx 0{,}135$ y la esperanza asintótica de ganar es $\mathbb{E}(Y_{N_{r^*}}) \approx 2e^{-2} \approx 0,271$. $\square$

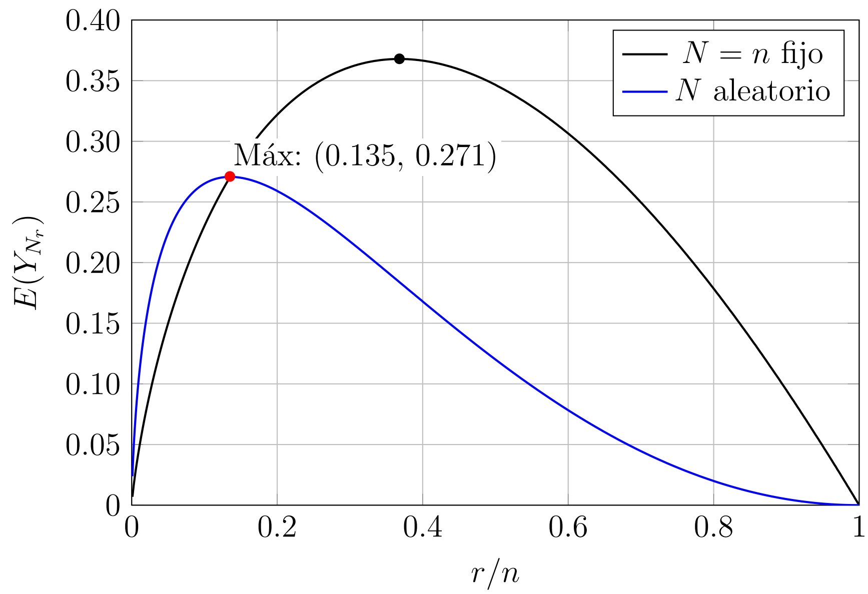

Figura 3.4: Probabilidad asintótica de ganar en el SP con un número aleatorio de candidatos para diferentes valores de corte r en comparación con el CSP.

En resumen, para resolver esta variante en la que el número total de candidatos disponibles para las entrevistas es desconocido, la regla óptima consiste en rechazar aproximadamente el 13,5 % de los candidatos y seleccionar el primer candidato viable que aparezca. Siguiendo esta estrategia la probabilidad asintótica de ganar es aproximadamente del $27,1\,\%$.

En comparación con el Problema de Secretaria, en el que el corte se hacía en el $36,8\,\%$ de los candidatos, el corte ahora es menor porque al no conocer el número exacto de candidatos, no es óptimo entrevistar muchos, ya que nos arriesgamos a que se terminen los candidatos. También, debido a esta aleatoriedad, la probabilidad de ganar es menor que en el CSP, donde era del $36,8\,\%$. Estos resultados se ven reflejados en la Figura 3.4.

3.6. SP con duración

En 1992, Ferguson, Hardwick y Tamaki [15] estudiaron una variante del CSP en la que la recompensa para el empleador está asociada al tiempo que permanece en posesión de un candidato viable. Nos referiremos a esta variante como el *SP con duración*. En esta variación del problema, el empleador seleccionará solo un candidato viable, recibiendo una recompensa inicial al hacerlo y una adicional por cada nueva observación que realice mientras el candidato seleccionado siga siendo el mejor relativamente.

Enunciado del SP con duración. En este problema se cumplen todas las hipótesis del CSP, excepto la última. Ahora, la recompensa será proporcional a la cantidad de entrevistas en las que se posee un récord parcial. Es decir, si el candidato j-ésimo es un candidato viable y lo seleccionamos, se recibe $(k-j)/n$ si el siguiente candidato viable es el k-ésimo y se recibe $(n+1-j)/n$ si el j-ésimo es el récord global.

Teorema 3.14. *En el SP con duración, existe una regla de corte N_r, con $r \geq 1$, que es óptima. Y, además, la recompensa esperada siguiendo esta regla de corte es*

$$\mathbb{E}(Y_{N_r}) = \frac{1}{n} \sum_{k=r}^{n} \frac{r-1}{k} \sum_{i=r}^{k} \frac{1}{i-1}.$$

Demostración. Denotemos por T_j al tiempo del primer candidato viable después de j, y escribamos $T_j = n+1$ si no hay ninguno más. Entonces, si el candidato j-ésimo es candidato viable y se selecciona, el tiempo esperado en el que este candidato sigue siendo candidato será

$$P_j = \mathbb{E}\left(\frac{T_j - j}{n}\right) = \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{n} \mathbb{P}(T_j > k) = \frac{1}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j}{k}.$$

En cuanto a la regla de parada óptima, supongamos que W_j representa la recompensa esperada óptima si continuamos entrevistando a partir de j, entonces la sucesión de constantes W_j no es creciente al igual que en el problema con un número de candidatos aleatorio. Sin embargo, la sucesión de P_j no es monótona:

$$P_{j+1} - P_j = \frac{j+1}{n} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{j}{n} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}.$$

Esta diferencia será positiva si, y solo si, $\sum_{j+1}^{n}(1/k) > 1$, que solo es válido para valores de j pequeños, pero no grandes, veámoslo. Para n suficientemente grande podemos escribir

$$\sum_{j+1}^{n}(1/k) \approx \int_{j}^{n} \frac{dx}{x} = \log\left(\frac{n}{j}\right) \gtrsim 1 \iff j \lesssim n/e.$$

Por lo tanto, existe $j_n = n/e$ tal que la sucesión P_j es monótona creciente para $j < j_n$ y monótona decreciente para $j \geq j_n$.

Luego, será óptimo seleccionar un candidato viable en la entrevista j-ésima si $j \geq j_n$ porque si continuamos entrevistando la recompensa esperada decrece. No obstante, si $j < j_n$, si es óptimo aceptar un candidato viable en la posición j-ésima (porque $y_j \geq W_j$), entones también será óptimo aceptar un candidato viable en la entrevista $j+1$, pues $y_{j+1} > y_j \geq W_j \geq W_{j+1}$. De esta manera, sabemos que existe una regla de parada óptima.

La recompensa esperada siguiendo una estrategia óptima cualquiera N_r es

$$\mathbb{E}(Y_{N_r}) = \sum_{j=r}^{n} \mathbb{P}(T_{r-1} = j)P_j = \sum_{j=r}^{n} \frac{r-1}{j(j-1)} \frac{1}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j}{k} = \frac{r-1}{n} \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{k} \sum_{i=r}^{k} \frac{1}{i-1},$$

que coincide con la recompensa esperada de la variante con un número aleatorio de candidatos de la sección anterior. □

Corolario 3.15. *En las condiciones del Teorema 3.14, se tienen los siguientes resultados asintóticos:*

I. $r^*/n \xrightarrow{n\to\infty} 1/e^2$.

II. $\mathbb{E}(Y_{N_{r^*}}) \xrightarrow{n\to\infty} 2/e^2$.

Demostración. Puesto que la recompensa esperada en el SP con duración coincide con la recompensa esperada en el SP con un número aleatorio de candidatos. Los resultados asintóticos coinciden con los del Corolario 3.13.

Por lo tanto, de la misma manera que en la sección anterior, se ganará con una probabilidad del $27,1\,\%$ si se sigue la regla óptima que consiste en rechazar aproximadamente el 13,5 % de los candidatos y seleccionar el primer candidato viable que aparezca. Esto se refleja en la Figura 3.4. □

3.7. SP con recompensa

Con el objetivo de enunciar un problema de toma de decisiones más realista, en esta sección se aborda una variación del Problema Clásico de la Secretaria en la que, a diferencia del CSP donde la recompensa es 1 si el candidato es el mejor y 0 en otro caso, el empleador recibe una recompensa proporcional al valor verdadero del rango del candidato seleccionado. Esta variación del problema se basa en el trabajo de J.N. Bearden [2] y nos referiremos a ella como el *SP con recompensa*.

En esta situación, la estrategia óptima utiliza una regla de corte que consiste en rechazar a los primeros $\sqrt{n}-1$ candidatos, y después seleccionar al siguiente candidato con mayor valor.

Enunciado del SP con recompensa. Supongamos que un empleador observa una secuencia de n candidatos cuyos valores son variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. de distribución uniforme en $[0,1]$. Como en el CSP, se puede aceptar o rechazar a cada uno de los candidatos, pero ahora se otorga una recompensa (*payoff*) por elegir un candidato con $X_j = x_j$, que es el valor x_j. Una vez que un candidato es contratado, el juego termina. Si se alcanza el n-ésimo candidato, debe ser contratado; y, una vez rechazado un candidato, la decisión es irrevocable.

Es importante destacar, que en cada entrevista j, el empleador solamente observa un indicador asociado a X_j, donde $I_j = 1$ si, y solo si, $x_j = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$; y $I_j = 0$ en caso contrario. En otras palabras, solo obtiene información sobre el rango relativo del candidato. El objetivo es maximizar la recompensa.

Por lo tanto, esta variante es muy parecida al problema clásico, pero la recompensa ahora es igual al valor del candidato seleccionado, es decir, un *valor verdadero*, mientras que en el problema clásico la recompensa es 1 si se escoge al mejor candidato y no se gana nada si se selecciona a otro.

Ejemplo 3.16. *(Inversión financiera).* La motivación detrás de este problema radica en la intuición de que, en algunas situaciones de búsqueda secuencial, la persona que toma la decisión puede prestar atención a la información basada en el rango. Sin embargo, en última instancia, obtiene utilidad del valor cardinal (verdadero) de la observación seleccionada, no de su posición en el rango. Aunque el empleador puede considerar el orden relativo de las opciones, su elección final se basa en el valor absoluto de la opción seleccionada.

Por ejemplo, consideremos un inversor (empleador) que quiere vender una acción cuando su precio (candidato) es máximo durante un periodo de tiempo $[t_{\min}, t_{\max}]$. Aunque los rangos de precios son relevantes para decidir cuándo vender, presumiblemente el inversor obtendrá una recompensa que aumenta estrictamente con el precio de venta cardinal. El esquema de pago "seleccionar nada más que al mejor" del CSP no considera esto.

Supongamos que nuestro inversor toma sus decisiones de venta en cada momento t únicamente en función del rango del precio actual de la acción con respecto a precios anteriores. ¿Cómo puede maximizar su precio de venta esperado? Y, ¿qué tan bien podría hacerlo considerando que sus ganancias se basarán en el precio al que se venda el activo, no en el rango del precio de la acción?

Teorema 3.17. *En el SP con recompensa, existe una regla de corte N_r, con $r \geq 1$, que es óptima y la recompensa esperada siguiendo esta regla de corte es*

$$E_n(r) = \frac{2rn - r^2 + r - n}{2rn}.$$

Además, el corte de la estrategia óptima satisface $r_n^* \in \{\lfloor\sqrt{n}\rfloor \lceil\sqrt{n}\rceil\}$.

Demostración. Puesto que las variables de los candidatos son i.i.d y siguen una distribución uniforme en $[0,1]$, el valor esperado del j-ésimo candidato suponiendo que sea récord parcial, es decir, $x_j = \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$, está dado por

$$\mathbb{E}(X_j | I_j = 1) = \frac{j}{j+1}\,.$$

Por el principio de optimalidad, como $dE_j/dj > 0$, si es óptimo seleccionar a un candidato con $I_j = 1$ (candidato viable), entonces también lo será seleccionar a un candidato con $I_{j+r} = 1$, para todo $r \geq 0$. Evidentemente, para $1 \leq j < n$, nunca es óptimo seleccionar a un candidato con $I_j = 0$. Definamos por $r^* = r^*(n)$ al número de corte de la regla óptima de parada, es decir, el número de entrevista a partir del cuál resulta óptimo seleccionar a un candidato viable.

La probabilidad de que el candidato de la entrevista j-ésima sea un candidato viable habiendo rechazado los r primeros es $\frac{1}{j+1}$. La probabilidad de no haber seleccionado a ninguno de los candidatos desde r hasta $j-1$ es $\prod_{i=r}^{j-1} \frac{i-1}{i}$.

Combinando estas probabilidades, la recompensa esperada al usar una regla de corte N_r se calcula como la suma de las recompensas esperadas por seleccionar un candidato viable desde r hasta $n-1$, más la recompensa esperada si se selecciona el último candidato, n. Tengamos en cuenta que el valor esperado de este último candidato será $1/2$ porque las variables aleatorias siguen una distribución uniforme en $[0,1]$. Entonces,

$$\begin{aligned}
E_n(r) &= \sum_{j=r}^{n-1} \left[\prod_{i=r}^{j-1} \left(\frac{i-1}{i} \right) \frac{1}{j+1} \right] + \frac{1}{2} \left[\prod_{i=r}^{n-1} \frac{i-1}{i} \right] \\
&= \sum_{j=r}^{n-1} \left(\frac{r-1}{j-1} \right) \left(\frac{1}{j+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r-1}{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{r+1} + (r-1) \left(\frac{1}{r(r+2)} + \ldots + \frac{1}{n(n-2)} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r-1}{n-1} \right) \\
&= \frac{2rn - r^2 + r - n}{2rn}.
\end{aligned}$$

Derivando la expresión de $E_n(r)$ obtenida con respecto de r obtenemos

$$\frac{\partial E_n(r)}{\partial r} = \frac{-r^2+n}{2r^2 n} \text{ y } \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} < 0$$

para todos los valores de $1 \leq r \leq n-1$, y encontramos que $E_n(r)$ alcanza su máximo en $r^* = \sqrt{n}$. □

En conclusión, la estrategia que proporciona la solución a esta variante del problema consiste en rechazar aproximadamente a los primeros $\sqrt{n}$ candidatos y después seleccionar aquel candidato con valor máximo. En comparación con el problema clásico, esta manera de enfrentar el problema resulta más natural puesto que el esquema de pago en el que solo se devuelve una recompensa positiva si se selecciona el mejor de los n solicitantes es bastante inusual. De esta manera, en el Ejemplo 3.16, nuestro inversor podría intentar vender su acción cuando su precio sea el máximo durante algún intervalo, pero es poco probable que decida no vender a algunos precios ligeramente inferiores al máximo.

Ejemplo 3.18. Para los valores de $n = 5, 10, 30, 50$ y 100, en la Figura 3.5 aparecen representadas las recompensas esperadas para diferentes valores del corte r así como los puntos óptimos de corte. Y en la Tabla 3.2 los valores óptimos de r y de $E_n(r)$, así como el porcentaje de candidatos a rechazar, r^*/n, para distintos valores de n.

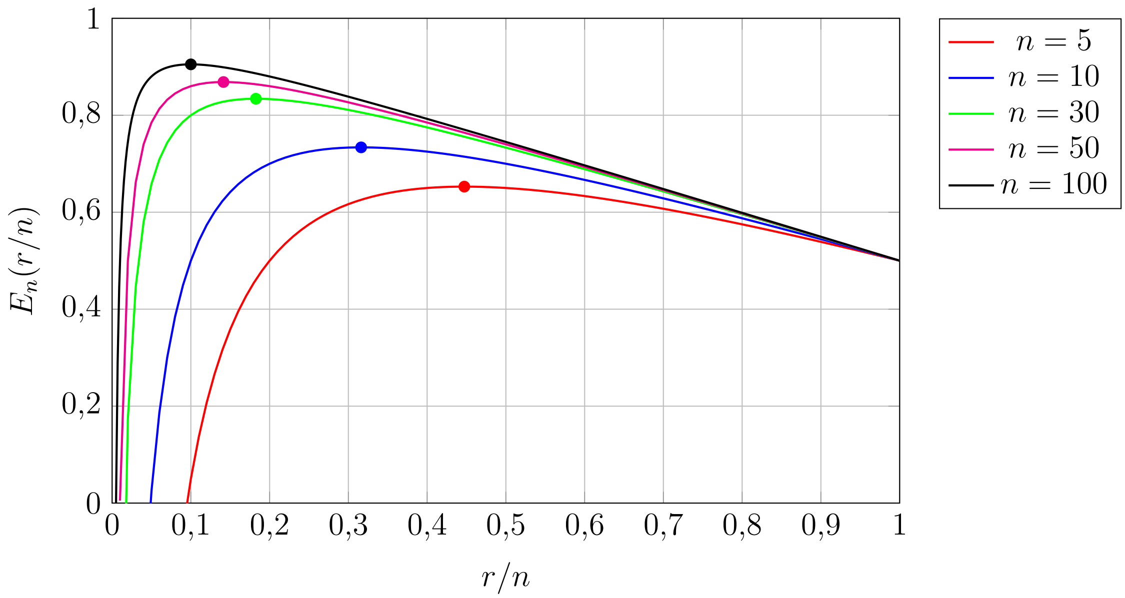

Figura 3.5: Gráfica de $E_n(r/n)$ para diferentes valores de n con puntos óptimos marcados para el SP con recompensa.

Por ejemplo, cuando $n = 100$, la regla óptima consistiría en rechazar aproximadamente el 10 % de los candidatos y luego seleccionar al siguiente candidato viable. La recompensa obtenida siguiendo esta estrategia sería de aproximadamente 0,905, lo que indica un valor considerablemente alto. Es importante destacar que a medida que aumenta el número de candidatos, n, también aumenta la recompensa esperada, tendiendo a 1 en el caso asintótico.

n	$r^* = \sqrt{n}$	$\frac{r^*}{n}$	$E_n(r^*)$
5	2.236	0.447	0.653
10	3.162	0.316	0.734
30	5.477	0.183	0.834
50	7.071	0.141	0.869
100	10.000	0.100	0.905

Tabla 3.2: Valores óptimos del corte r y $E_n(r^*)$ para diferentes n en el SP con recompensa.

3.8. Jugar contra un oponente

Recordemos el problema del juego de Googol de una sola elección en el que se van observando papeles que contienen números escritos. Supongamos que un oponente puede elegir el orden en que salen los números en la sucesión y que el jugador está limitado a la información sobre el rango relativo. Entonces, ¿cuál es la mayor probabilidad de elegir el número más grande que puede lograr el jugador? ¿De qué manera puede el oponente complicar el juego al jugador?

De ahora en adelante, llamaremos "*jugador*" a la persona que busca el número más grande y "*oponente*" a la persona, recién introducida en este capítulo, que altera la secuencia aleatoria. Para desarrollar esta sección, nos hemos basado en el trabajo de [19] como referencia.

Ejemplo 3.19. *(El oponente ordena la sucesión).* En este caso el oponente impone ciertas condiciones, de manera que el jugador solo puede tener una probabilidad de $1/n$ de elegir el número más grande del conjunto, n es el número total de papeles. En otras palabras, el oponente puede configurar el juego de tal manera que la mejor oportunidad que tiene el jugador de ganar es solo de $1/n$.

Se van presentando los números al jugador que busca el más grande en un orden que ha sido determinado por un oponente cuyo objetivo es minimizar la probabilidad del jugador de encontrar el mejor entre los n números. Al igual que en el juego de Googol, la única información de la que dispone el jugador es de los rangos relativos de los números observados. El oponente puede reducir la probabilidad de ganar del jugador a $1/n$ usando las filas de un cuadrado latino cíclico con probabilidades iguales.

Por ejemplo, para $n = 5$ escogerá con probabilidad $1/5$ una de las siguientes sucesiones de números:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

Evidentemente, el oponente no puede conseguir que las probabilidades de ganar del jugador estén por debajo de $1/n$ porque este siempre puede elegir una posición aleatoriamente para seleccionar al número más grande.

3.8.1. El oponente posiciona el mejor

Si el oponente tiene más restringidos sus movimientos, el jugador tiene una mayor probabilidad de ganar. Supongamos que el oponente solo puede elegir de antemano una posición del 1 al n y asignarle el rango más alto sin alterar la aleatoriedad de las extracciones. Entonces, ¿cómo debe actuar el jugador para intentar encontrar el rango más alto? ¿Y cómo debe el oponente elegir la posición para el número más grande?

Ejemplo 3.20. *(Programa de inspección de bombas atómicas).* Este juego particular se sugirió como un análogo no paramétrico para un *programa de inspección de bombas atómicas* con una sola inspección. Imaginemos que se tiene un sistema de inspección de bombas atómicas que funciona de la siguiente manera: cada cierto intervalo de tiempo, se realiza una inspección para detectar si alguna bomba ha sido detonada. Durante cada inspección, se observa un valor que podría indicar si una bomba ha sido detonada o no. El objetivo es encontrar el momento en el que una bomba, de haber sido detonada, habría producido la mayor señal detectable.

Aquí es donde entra en juego el SP con oponente: el "jugador" es el sistema de inspección, que intenta encontrar el momento óptimo para detectar una bomba. El "oponente" es aquel que decide cómo se distribuyen las señales en el tiempo, con el objetivo de dificultar al máximo la detección de la bomba por parte del sistema de inspección.

La idea es que el tiempo se cuantifica en n instantes discretos. En cada instante, se observa una variable que da un valor. Supongamos que cuando una gran bomba se detona en algún instante, produce para ese momento la mayor medición de las n. Y supongamos además que esta explosión no altera el curso aleatorio de las otras mediciones.

En este contexto, el sistema de inspección utiliza la información relativa de las señales observadas para intentar determinar el momento en el que se produciría la señal más alta, lo que indicaría la detonación de una bomba importante. Por otro lado, el oponente intenta distribuir las señales de manera que sea más difícil para el sistema de inspección identificar cuándo se produce la señal más alta, dificultando así la detección de la bomba, es decir, el oponente desea minimizar la probabilidad de que el jugador inspeccione durante este período de tiempo.

A pesar de todo, las irrealidades en la analogía serán obvias para el lector. Por ejemplo, si no sabemos nada sobre la distribución, ¿cómo podemos estar seguros de que la bomba produce la mayor medición? ¿Qué sucede con las bombas pequeñas? ¿Qué ocurre si se aumenta el número de inspecciones?

Enunciado del juego con oponente. Las mediciones se realizan al azar sin reemplazamiento entre n números, como en el juego de Googol. El jugador, que tiene una sola opción, debe elegir o rechazar cada número cuando aparece, y gana si y solo si elige el más grande. Antes de que comience el sorteo, el oponente, que no tiene conocimiento de la sucesión de números, debe elegir una posición y reemplazar el número que haya allí por un número más grande que cualquier otro de la sucesión. El jugador desea maximizar su probabilidad de elegir el más grande y el oponente minimizarla. Por lo tanto, el criterio *minimax* es apropiado.

Ejemplo 3.21. Como ejemplo, supongamos que el oponente eligió la posición 2 y que el sorteo aleatorio para $n = 4$ produjo los rangos $[1\,3\,2\,4]$ en ese orden; entonces los nuevos rangos de los cuatro números, ajustados por la elección del oponente, serían $[1\,4\,2\,3]$.

Al abordar este problema, hemos limitado las estrategias del oponente, encargado de seleccionar la ubicación del número más grande, a una combinación ponderada de las n estrategias básicas que asignan la posición i al número más grande con una probabilidad p_i. Del mismo modo, restringimos al jugador a una combinación ponderada de las estrategias que comienzan desde la posición i y seleccionan al primer candidato viable disponible.

Estudiemos primero lo que sucede con las sucesiones aleatorias cuando el oponente reemplaza el rango de la primera posición por n, porque el análisis es el mismo para todas las demás posiciones.

En un principio, había $n!$ posibles arreglos, con $(n-1)!$ comenzando con cada uno de los rangos $1, 2, \ldots, n$. Es decir, aquellos que comienzan con el rango 1 son seguidos por todas las permutaciones posibles de los números $2, 3, \ldots, n$. Cuando el rango 1 es reemplazado por el rango n, cada rango siguiente se reduce en 1 y nos quedamos con las $(n-1)!$ permutaciones de los números $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Ocurre de manera análoga para los otros rangos iniciales posibles, de modo que en total, después del ajuste, tenemos n conjuntos de $(n-1)!$ permutaciones siguiendo al primer número n. Un conjunto de $(n-1)!$ permutaciones es indistinguible de otro, y desde el punto de vista del jugador, solo hay un conjunto de $(n-1)!$ permutaciones.

Un argumento similar se aplica a las elecciones de cada una de las posiciones por parte del oponente. En consecuencia, el jugador puede considerar que cada permutación con el número más grande en la posición i tiene una probabilidad $p_i/(n-1)!$, donde, como antes, p_i es la probabilidad de que el oponente coloque el número más grande en la posición i. El jugador tiene estrategias S_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$, donde S_i significa elegir el elemento i si es un candidato viable, de lo contrario elegir el primer candidato viable después de eso.

El objetivo es encontrar una estrategia para el oponente y encontrar la probabilidad óptima de ganar para el jugador contra esta estrategia. Eso da una probabilidad que el oponente puede imponer. Después veremos que el jugador también puede imponer esta misma probabilidad, y así obtenemos una solución para el juego.

La Tabla 3.3 muestra, para cada estrategia S_i, la probabilidad de que el jugador elija el más grande, cuando el mayor está en la posición r. Una forma de ubicar una buena estrategia para el oponente es encontrar una que produzca la misma probabilidad de ganar contra cada estrategia del jugador. Así que podemos aprovechar el triángulo de ceros en la Tabla 3.3.

Inicialmente asignemos números proporcionales a p_i y normalicemos luego. Supongamos que W_i representa la recompensa esperada óptima si continuamos observando a partir del número j-ésimo. Sea $p_i \propto W_i$ y tomemos $W_n = 1$. Entonces, si se usa S_n, la probabilidad de que el jugador gane es

Estrategia del jugador	Posición del número más grande (r)									
	1	2	3	4	$\cdots$	i	$i+1$	$\cdots$	$n-1$	n
S_1	1	0	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0
S_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{i-1}$	$\frac{1}{i}$	$\cdots$	$\frac{1}{n-2}$	$\frac{1}{n-1}$
S_3	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{i-1}$	$\frac{2}{i}$	$\cdots$	$\frac{2}{n-2}$	$\frac{2}{n-1}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
S_i	0	0	0	0	$\cdots$	1	$\frac{i-1}{i}$	$\cdots$	$\frac{i-1}{n-2}$	$\frac{i-1}{n-1}$
S_{i+1}	0	0	0	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	$\frac{i}{n-2}$	$\frac{i}{n-1}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
S_{n-2}	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	$\frac{n-3}{n-2}$	$\frac{n-3}{n-1}$
S_{n-1}	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	1	$\frac{n-2}{n-1}$
S_n	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	1

Tabla 3.3: Probabilidad de que el jugador elija el número más grande, cuando el mayor está en la posición r si sigue la estrategia S_i.

proporcional a $1{\cdot}1 = 1$. Si se usa S_{n-1}, entonces queremos que la probabilidad de que el jugador gane sea proporcional a

$$\sum_{i=1}^{n-2} W_i(0) + W_{n-1}(1) + \binom{n-2}{n-1} = 1, \tag{3.6}$$

por lo que $W_{n-1} = 1/(n-1)$. En 3.6, el primer sumando corresponde a la suma de las recompensas esperadas $W_i(0)$ para las estrategias del jugador desde la posición 1 hasta la posición $n-2$, donde el jugador elige el primer número que ve. Aquí, $W_i(0)$ representa la probabilidad de que el jugador gane si elige la estrategia S_i y el número más grande está en la posición i, mientras que los números anteriores son rechazados. El sumando $W_{n-1}(1)$ representa la recompensa esperada para la estrategia del jugador desde la posición $n-1$, donde el jugador elige el número en la posición $n-1$ si es el más grande, y elige el primer número viable después de eso si no lo es. El término $\binom{n-2}{n-1}$ representa el número de combinaciones de estrategias en las que el jugador no gana hasta la posición $n-2$ pero gana en la posición $n-1$. En otras palabras, el jugador elige el primer número viable en todas las posiciones desde la 1 hasta la $n-2$, pero no gana hasta la $n-1$. Y la suma de todas estas probabilidades debe ser igual a 1, ya que una de las estrategias del jugador debe resultar en una victoria.

En esta misma línea, encontramos que $W_i = 1/i$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $W_n = 1$. Por lo que el oponente deberá usar la estrategia con

$$p_i = \frac{1}{i\left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} 1/j\right]}.$$

Esto significa que la probabilidad de que el jugador elija el número más grande cuando el oponente usa la estrategia anterior es

$$\frac{1}{\left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} 1/j\right]}.$$

Capítulo 4

En busca del segundo mejor candidato

En 1980, E.B. Dynkin introdujo una interesante variante del Problema de la Secretaria que consiste en seleccionar al segundo mejor candidato. Con las mismas hipótesis del CSP, en este capítulo presentamos esta variante con el siguiente enunciado: estamos intentando contratar a un investigador posdoctoral, pero tenemos la certeza de que el mejor solicitante recibirá y aceptará una oferta de Harvard más llamativa que la nuestra. Por lo tanto, nuestro objetivo es contratar al segundo mejor investigador porque el primero no estará disponible. Nos referiremos a esta variante por sus siglas en inglés PVSP (*Postdoc Variant of the Secretary Problem*).

En este contexto, es posible determinar una solución óptima para la estrategia y la probabilidad de éxito, la cual es $k_0(n-k_0)/(n(n-1))$, donde $k_0 = \lfloor n/2 \rfloor$. Es notable cómo, cuando $n \to \infty$, la probabilidad asintótica de éxito tiende hacia $\frac{1}{4} = 0{,}25$. Esto sugiere que, aparentemente, es más sencillo seleccionar al mejor candidato que al segundo mejor, cuya probabilidad óptima era del 37 %.

4.1. Estrategia óptima en el PVSP

Dentro del mismo marco y alineados con las directrices establecidas en la teoría presentada en el Capítulo 2, ahora incorporamos definiciones y notaciones adicionales que servirán como herramientas fundamentales en el estudio del PVSP.

Definición 4.1. Sea X_j la variable aleatoria asociada a un candidato que es entrevistado en el instante j. Se dice que el candidato j-ésimo es *sub-récord parcial* si $X_j = 2$. En particular, si es el segundo mejor de todos los candidatos, se le denominará *sub-récord global*.

En este capítulo nos referimos a *ganar* como el evento "contratar al segundo mejor candidato de X", es decir, contratar al candidato X_j que sea sub-récord global.

Notación 4.2. Para $k = 0, 1, \dots, n$, denotamos por v_k a la probabilidad de ganar usando la estrategia óptima en la que k candidatos han sido entrevistados y todos han sido rechazados.

Para analizar esta variante, supongamos que después de cada entrevista tomamos la decisión de contratar o rechazar, pero aunque hayamos aceptado, continuamos entrevistando los candidatos restantes para comprobar si realmente hemos tomado la decisión ganadora. Definamos previamente dos probabilidades que nos serán de utilidad.

Supongamos que después de realizar k entrevistas, uno de esos k candidatos ha sido seleccionado y además es sub-récord parcial en $\{1, 2, \dots, k\}$. Denotamos por g_k a la probabilidad de que este sub-récord parcial sea sub-récord global.

Por otro lado, supongamos que el candidato seleccionado dentro de las k primeras entrevistas es récord parcial en $\{1, 2, \dots, k\}$ y tenemos la esperanza de que haya un candidato mejor en los que no se han entrevistado. Denotamos por f_k a la probabilidad de que este récord parcial sea sub-récord global.

Proposición 4.3. *Para $k = 0, 1, \dots, n$, las probabilidades g_k y f_k se pueden expresar como*
$$g_k = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \quad y \quad f_k = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}.$$

Demostración. Consideremos que el candidato seleccionado en las primeras k entrevistas es sub-récord parcial. Cuando se entreviste al candidato $k+1$, existe la posibilidad de que sea un nuevo récord parcial, o un nuevo sub-récord parcial, o el tercer mejor hasta el momento, ..., o el peor. Existen

$k+1$ rangos relativos posibles. Como no disponemos de información sobre este candidato, todos estos rangos posibles son igualmente probables. Por lo tanto, con probabilidad $2/(k+1)$, este nuevo candidato será el nuevo récord parcial o el nuevo sub-récord parcial. Si esto ocurre, el candidato que había sido contratado y que era sub-récord parcial pasará a ser el tercer mejor candidato hasta el momento y habremos perdido.

Por otro lado, la probabilidad de que el candidato $(k+1)$-ésimo sea peor que el que ya hemos contratado es $(k-1)/(k+1)$ y, por lo tanto, nuestro candidato seleccionado seguirá siendo sub-récord parcial. Entonces,

$$g_k = \begin{cases} \dfrac{k-1}{k+1} g_{k+1}, & \text{si } 2 \leq k < n\,, \\ 1, & \text{si } k = n\,. \end{cases}$$

Y resolvemos esta ecuación:

$$g_k = \frac{k-1}{k+1}\frac{k}{k+2}\frac{k+1}{k+3}\cdots\frac{n-3}{n-1}\frac{n-2}{n} g_n = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\,.$$

Por otro lado, si consideramos que el candidato que hemos seleccionado en las primeras k entrevistas es récord parcial, el candidato $k+1$ podría ser un nuevo récord parcial, en cuyo caso el que ya habíamos seleccionado pasaría a ser sub-récord parcial y aplicaríamos g_{k+1}, o no serlo, en cuyo caso seguiría siendo récord parcial el primer candidato contratado y volveríamos a aplicar f_{k+1}. Entonces,

$$f_k = \begin{cases} \dfrac{k}{k+1} f_{k+1} + \dfrac{1}{k+1} g_{k+1}, & \text{si } 1 \leq k < n\,, \\ 0, & \text{si } k = n\,. \end{cases}$$

Definamos $h_k = f_k/k$. Usando la fórmula explícita obtenida para g_k, la ecuación para h_k es

$$h_k = h_{k+1} + \frac{1}{n(n-1)}\,.$$

Usando que $h_n = 0$, obtenemos que

$$h_k = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

y, por lo tanto,

$$f_k = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}\,, 1 \leq k \leq n\,.$$

□

Supongamos ahora que hemos entrevistado k candidatos y que los hemos rechazado a todos. La función objetivo que hay que maximizar es v_k, con $k = 0, 1, \ldots, n$, y se define como la probabilidad de contratar a un candidato que sea sub-récord global usando la mejor estrategia óptima. El objetivo es escribir y resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellmann (HJB) para v.

Proposición 4.4. *Para $k = 0, 1, \ldots, n$ la probabilidad v_k se puede expresar como*

$$v_k = \begin{cases} \text{máx}\{v_{k+1}, f_{k+1}\}, & si\ k = 0\,, \\ \dfrac{k-1}{k+1} v_{k+1} + \dfrac{\text{máx}\{v_{k+1}, f_{k+1}\}}{k+1} + \dfrac{\text{máx}\{v_{k+1}, g_{k+1}\}}{k+1}, & si\ 1 \leq k < n\,, \\ 0, & si\ k = n\,. \end{cases}$$

Demostración. El principio de la programación dinámica establece que, independientemente del estado inicial del sistema y de la decisión inicial, las decisiones restantes que tomemos deben ser siempre óptimas en cada etapa. Así que, supongamos que se han entrevistado k candidatos y todos han sido rechazados. Existen varias posibilidades para el candidato $k+1$-ésimo:

- Que sea peor que el récord parcial y el sub-récord parcial hasta el momento. Esto ocurre con probabilidad $(k-1)/(k+1)$, en este caso, no hay razón por la que contratar a este nuevo candidato y continuaríamos entrevistando.

- Que sea nuevo récord parcial, entonces tenemos dos opciones: contratar este candidato con la esperanza de que haya otro mejor más adelante o rechazarlo y continuar entrevistando. Si lo contratamos, la probabilidad de ganar es f_{k+1}, si lo rechazamos, la probabilidad de ganar es v_{k+1}. Hay que seleccionar aquella que sea máxima.

- Que sea sub-récord parcial, de nuevo, tenemos dos opciones: contratar el candidato con la esperanza de que sea el sub-récord global o rechazarlo. Si lo contratamos la probabilidad de ganar es g_{k+1} y si lo rechazamos será v_{k+1}.

Juntando todo lo anterior, obtenemos la ecuación de *Hamilton-Jacobi-Bellman* para v_k que aparece en el enunciado de la proposición. □

Notación 4.5. Denotamos por $k_0 = \text{mín}\{k \,|\, 2k > n-1\}$. Es fácil comprobar que

$$k_0 = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par}\,, \\ (n-1)/2, & \text{si } n \text{ es impar}\,. \end{cases}$$

O lo que es lo mismo, $k_0 = \lfloor n/2 \rfloor$.

Teorema 4.6. *La probabilidad v_k se puede escribir como*

$$v_k = \begin{cases} \dfrac{k(n-k)}{n(n-1)} & \textit{si } k_0 \leq k \leq n\,, \\ \dfrac{k_0(n-k_0)}{n(n-1)}, & 0 \leq k < k_0\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Demostración. Para $n = 0$, la ecuación 4.1 es correcta pues $v_n = 0$. Razonemos por inducción inversa, supongamos que la fórmula es correcta para $k > k_0$ y probemos que es correcta para $k-1$. En primer lugar, a partir de la hipótesis de inducción, se tiene que $v_k = f_k$ y también $v_k \leq g_k$ porque $k \geq k_0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} v_{k-1} &= \frac{k-2}{k} v_k + \frac{1}{k} \text{máx}\{v_k, f_k\} + \frac{1}{k} \text{máx}(v_k, g_k) \\ &= \frac{k-2}{k} v_k + \frac{1}{k} v_k + \frac{1}{k} g_k \\ &= \frac{(k-1)(n-k)}{n(n-1)} + \frac{k-1}{n(n-1)} \\ &= \frac{(k-1)(n-(k-1))}{n(n-1)}\,. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que se cumple 4.1 para $2 \leq k \leq k_0$. Por inducción, verifiquemos que se cumple para $k-1$.

Para ello, comprobemos que $v_k \geq f_k$ y que $v_k \geq g_k$. En primer lugar, $v_k \geq f_k$ es equivalente a

$$k_0(n-k_0) \geq k(n-k). \tag{4.2}$$

Denotemos por p al polinomio $p(x) = x(n-x)$. Este polinomio cuadrático alcanza su máximo en $x = n/2$. Ahora, como $k \leq k_0 \leq n/2$, se sigue que $p(k) \leq p(k_0)$ y se tiene 4.2.

Por otro lado, $v_k \geq g_k$, es equivalente a

$$k_0(n-k_0) \geq k(k-1).$$

Ya hemos probado que $k_0(n-k_0) \geq k(n-k)$. Por lo tanto, basta con probar que

$$k(n-k) \geq k(k-1).$$

Para $k \neq 0$, esta inecuación es equivalente a $k \leq (n+1)/2$, luego, es válida para todo $k \leq k_0$. Por último, falta por comprobar el caso $k = 0$, como $v_1 \geq f_1$, se tiene que $v_0 = v_1$.

A partir de estas dos inecuaciones,

$$\begin{aligned} v_{k-1} &= \frac{k-2}{k} v_k + \frac{1}{k} \max\{v_k, f_k\} + \frac{1}{k} \max(v_k, g_k) \\ &= \frac{k-2}{k} v_k + \frac{1}{k} v_k + \frac{1}{k} v_k = v_k = \frac{k_0(n-k_0)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

□

En consecuencia, la función v_k no solamente nos proporciona la probabilidad de ganar, v_0, sino que también nos indica la estrategia óptima con la que conseguir esta probabilidad. En particular, la estrategia está determinada por el número que alcance el máximo en los dos últimos términos de la ecuación de HJB.

Corolario 4.7. *La función objetivo v_k, $0 \leq k \leq n$, satisface las siguientes igualdades y desigualdades:*

$$\begin{aligned} v_k &> f_k, && \textit{si } k < k_0, \\ v_k &= f_k, && \textit{en otro caso.} \end{aligned}$$

y, para n par,

$$\begin{aligned} v_k &> g_k, && \textit{si } k \leq k_0, \\ v_k &= g_k, && \textit{en otro caso.} \end{aligned}$$

mientras que para n impar,

$$\begin{aligned} v_k &> g_k, && \text{si } k \leq k_0, \\ v_k &= g_k, && \text{si } k = k_0 + 1, \\ v_k &< g_k, && \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

Además, la probabilidad asintótica de ganar en el PVSP siguiendo la estrategia óptima es $v_0 \xrightarrow{n\to\infty} 1/4$.

Demostración. La demostración es inmediata a partir de las fórmulas obtenidas para v_k, f_k y g_k.

Este corolario determina la estrategia óptima y en vista de las igualdades que aparecen, existen muchas situaciones de indiferencia. Por ejemplo, para $k \geq k_0$, podemos aceptar o rechazar un récord parcial indistintamente.

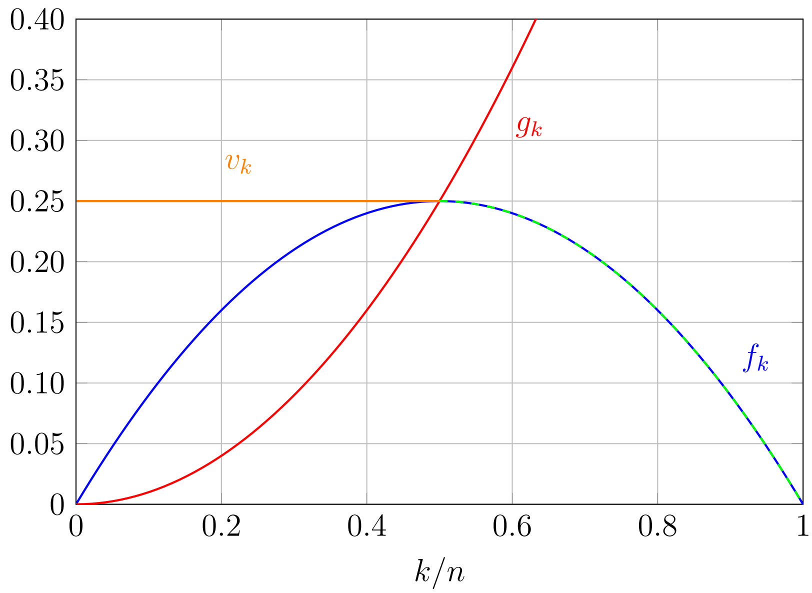

Figura 4.1: Representación de f_k, g_k y v_k. Probabilidad asintótica de seleccionar al segundo mejor candidato para diferentes valores de k.

Finalmente, podemos establecer una estrategia óptima que maximiza la probabilidad de contratar al segundo mejor candidato y que es fácil de recordar: *rechazar los primeros k_0 candidatos y contratar al primer sub-récord parcial que aparezca.*

Usando esta estrategia óptima, la probabilidad de ganar es

$$v_0 = \frac{k_0(n-k_0)}{n(n-1)} \approx 1/4.$$

□

4.2. Seleccionar al m-ésimo mejor

Supongamos que, en vez de el segundo mejor, queremos seleccionar el m-ésimo mejor de un total de n candidatos y solo nos conformamos con ese rango. Podemos resolver este problema de manera similar a la de la sección anterior. En efecto, sea $f_{j,k}$ la probabilidad de que el candidato seleccionado sea el m-ésimo mejor candidato sabiendo que hasta el momento es el j-ésimo mejor de un total de k entrevistas realizadas. Entonces, razonando como antes, hay un total de $k+1$ posibles rangos para el próximo candidato. La probabilidad de que el candidato seleccionado siga siendo el j-ésimo mejor será $(k-j+1)/(k+1)$ y la probabilidad de que el nuevo candidato sea mejor y haga descender a la posción $j+1$ a nuestro candidato seleccionado es $j/(k+1)$. Por lo tanto, podemos escribir

$$f_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{k-j+1}{k+1} f_{j,k+1} + \dfrac{j}{k+1} f_{j+1,k+1}, & \text{si } j \leq k < n\,, \\ 1, & \text{si } j = m, k = n\,, \\ 0, & \text{si } j \neq m, k = n\,. \end{cases}$$

Además, es evidente que $f_{m+1,k} = 0$ para todo k, porque si es el $(m+1)$-ésimo mejor candidato, no puede ser el m-ésimo mejor.

Teorema 4.8. *Para $j \leq m$,*

$$f_{j,k} = \frac{\binom{k}{j}\binom{n-k}{m-j}}{\binom{n}{m}} \frac{j}{m}\,.$$

Demostración. Razonando por inducción inversa en los índices j y k, se demuestra que $f_{j,k}$ es única. Por tanto, es suficiente comprobar que la fórmula dada para $f_{j,k}$ satisface la fórmula del teorema.

$$\begin{aligned}
\frac{k-j+1}{k+1}f_{j,k+1} + \frac{j}{k+1}f_{j+1,k+1} \\
&= \frac{k-j+1}{k+1}\frac{\binom{k+1}{j}\binom{n-k-1}{m-j}}{\binom{n}{m}}\frac{j}{m} + \frac{j}{k+1}\frac{\binom{k+1}{j+1}\binom{n-k-1}{m-j-1}}{\binom{n}{m}}\frac{j+1}{m} \\
&= \frac{\binom{k}{j}\binom{n-k-1}{m-j}}{\binom{n}{m}}\frac{j}{m} + \frac{\binom{k}{j}\binom{n-k-1}{m-j-1}}{\binom{n}{m}}\frac{j}{m} \\
&= \frac{\binom{k}{j}\binom{n-k}{m-j}}{\binom{n}{m}}\frac{j}{m} \\
&= f_{j,k}
\end{aligned}$$

□

Como se hizo anteriormente, denotemos por v_k a la probabilidad óptima de ganar habiendo rechazado las primeras k entrevistas. La ecuación de HJB para v_k es

$$v_k = \frac{k-m+1}{k+1}v_{k+1} + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{k+1}\,\text{máx}(v_{k+1}, f_{j,k+1})\,.$$

Sin embargo, salvo para los casos $m = 1$ (el Problema de la Secretaria Clásico), $m = 2$ (elegir al segundo mejor candidato) y, por simetría, $m = n$ y $m = n - 1$ (elegir al peor y al penúltimo mejor candidato), los demás casos no tienen solución explícita.

En resumidas cuentas, hemos dado una solución explícita al problema de encontrar al segundo mejor candidato. En particular, la estrategia óptima consiste en rechazar la primera mitad de los candidatos y después aceptar al segundo mejor candidato que aparezca primero. La probabilidad asintótica de ganar es de $1/4 \approx 0{,}25$ por lo que, aparentemente, es más complicado seleccionar el segundo mejor candidato que contratar al mejor.

Capítulo 5

SP con información completa

En el CSP o en el juego de Googol, el jugador no dispone de información sobre la distribución de los candidatos o de los números que hay en los papeles de la urna, ni antes de comenzar a observar ni durante el proceso. Únicamente conoce el rango relativo de los candidatos entrevistados o de los números extraídos hasta el momento.

En el otro extremo, el jugador podría conocer exactamente la distribución de la cual provienen los números asociados a cada papel. A veces se usa la expresión “conocer la distribución” de manera laxa para referirse a “conocer la familia de la distribución”. Aquí nos referimos a conocer todos los detalles de la distribución. Por ejemplo, saber que la distribución es normal no sería suficiente, también se necesitaría conocer su media y varianza. Nos referiremos a la variante del SP como FISP, por sus siglas en inglés (*Full Information Secretary Problem*).

Si el juego de Googol se jugara con estos candidatos según las reglas establecidas anteriormente, pero informando al jugador del número exacto asociado a cada papel en cada observación, y no solamente el rango relativo, el empleador debería ser capaz de desarrollar una estrategia que produzca una mayor probabilidad de éxito que la obtenida en el CSP. En este capítulo mostramos que la probabilidad óptima asintótica de éxito aumenta de $1/e \approx 0,368$ (cuando no se tiene información sobre la distribución) a aproximadamente $0,58$, cuando se tiene información completa de esta. Nos limitaremos principalmente a enunciar e interpretar los resultados, sin demostraciones, el lector interesado en las mismas, pueden encontrarlas en [19].

5.1. Estrategia óptima en el FISP

En muchos problemas estadísticos, se asume que se conoce alguna información sobre la distribución, pero no toda. Con dicha información parcial, pero pudiendo observar el número verdadero asociado a cada papel, el jugador generalmente va recopilando información adicional sobre la distribución a medida que se observan los números. Esta información, junto con la inferencia estadística, podría ayudarle a tomar una mejor decisión que la ofrecida por la estrategia de "rechazar r y elegir al primer candidato viable que aparezca". Además del propio interés de esta versión, cuando se conoce la distribución, el problema proporciona un límite superior a la probabilidad que podría obtenerse a partir de inferencia estadística.

Como hemos venido haciendo hasta ahora, las preguntas que cabe plantearse son: ¿qué estrategia maximiza la probabilidad de éxito? ¿Cuál es la probabilidad óptima de ganar? ¿Cuál es la probabilidad asintótica de ganar cuando n tiende a infinito? Para resolver estas cuestiones, comencemos enunciando el problema de manera más formal.

Enunciado del FISP. Uno a uno, se extrae una muestra de n observaciones de una población con una función de distribución continua F. La continuidad asegura que la probabilidad de que haya empates es cero. Después de cada extracción, el jugador, que conoce F y n, es informado del valor de la observación, tras lo cual debe decidir si selecciona o no esa extracción. Su objetivo es maximizar la probabilidad de elegir el número más grande de la muestra.

Observación 9. Dado que la distribución es conocida exactamente, y dado que la medición más grande en una muestra sigue siendo la más grande bajo todas las transformaciones monótonas de su variable, no perdemos generalidad al suponer que F es la distribución uniforme estándar: $F(x) = x$ y la densidad $f(x) = 1$ en $0 \leq x \leq 1$. Puesto que si hacemos esta transformación ganamos cierta simplicidad en el trabajo a desarrollar, de ahora en adelante, trataremos con la distribución uniforme estándar.

Ejemplo 5.1. Si n es relativamente pequeño, por ejemplo $n = 10$, y la primera observación es alta, digamos 0,9998, la seleccionaríamos porque la probabilidad de que las otras nueve observaciones sean menores es $(0{,}9998)^9 \approx 0{,}9982$. Así, en el FISP, a diferencia del problema clásico, no es necesario acumular experiencia para establecer un estándar de referencia, y a veces es posible tomar una decisión beneficiosa de inmediato en observaciones tempranas.

Una familia de estrategias. Antes de presentar la estrategia óptima, describimos una familia de estrategias dentro de la cual se incluye la óptima. Para cada observación, asignamos un *número de decisión*. A medida que se realiza cada extracción, elegimos como *el mayor valor* al primer candidato cuyo valor exceda su número de decisión. Veremos que los números de decisión óptimos dependen únicamente del número de observaciones restantes.

Para obtener la estrategia óptima, deducimos los números de decisión óptimos avanzando regresivamente desde la última observación. Si llegamos a la última extracción sin haber elegido, ganamos o perdemos automáticamente según si es el mayor valor o no. De esta forma, el número de decisión para la última observación es cero.

Ejemplo 5.2. Supongamos que nos queda una observación por realizar y tenemos un valor x en mano. Para este candidato, independientemente del valor de x, la probabilidad de que la última observación sea la mayor es $1-x$. Entonces, si $x > \frac{1}{2}$, deberíamos elegirlo; si $x < \frac{1}{2}$, rechazarlo; y estaremos indiferentes si $x = \frac{1}{2}$. Por conveniencia, digamos que elegimos la observación si $x \geq \frac{1}{2}$. Por lo tanto, el número de decisión óptimo para la penúltima observación es $\frac{1}{2}$. Exceptuando el número de decisión 0 asociado a la última observación, todos nuestros números de decisión óptimos son números de indiferencia, es decir, valores tales que no nos importa elegir un candidato con ese valor o seguir haciendo más extracciones.

Números de decisión óptimos. Sea b_n el número de decisión óptimo para la primera observación (la n-ésima desde el final), b_i el correspondiente a la $(n-i+1)$-ésima observación, y $b_1 = 0$ el de la n-ésima observación. Supongamos que aún no hemos elegido y que la $(n-i)$-ésima observación es un candidato viable. Quedan i observaciones. Queremos encontrar un número de decisión o número de indiferencia $x = b_{i+1}$ tal que si x fuera el valor de la $(n-i)$-ésima observación, la probabilidad de ganar con ella sea igual a la probabilidad de ganar después si se usa la mejor estrategia. Para ganar después, el número mayor debe ser extraído más tarde y además debemos elegirlo.

Entonces, si el valor medido excede el número de decisión x, tenemos una mayor probabilidad de ganar con él que si lo dejamos pasar. Los números de decisión obviamente disminuyen a medida que avanzamos en las observaciones, porque con menos extracciones restantes, tenemos menos probabilidades de obtener un número alto.

Supongamos que tenemos una observación con valor x, la probabilidad de que los siguientes i números sean todos menores que x es x^i. Aunque ahora seamos indiferentes a x, no lo seríamos en una observación posterior, porque el número de decisión sería menor que x. En consecuencia, en una observación posterior, elegiríamos al primer candidato cuyo valor sea al menos tan grande como x.

Supongamos que continuamos: si aparece un número mayor que x más adelante, lo elegimos; si aparecen dos números mayores que x, la probabilidad de que elijamos el mayor cuando seleccionamos el primero es $\frac{1}{2}$; si aparecen tres, la probabilidad de elegir el mayor es $\frac{1}{3}$; y así sucesivamente. Así, la probabilidad de ganar, si continuamos, es

$$\binom{i}{1}x^{i-1}(1-x)+\frac{1}{2}\binom{i}{2}x^{i-2}(1-x)^2+\ldots+\frac{1}{i}\binom{i}{i}(1-x)^i.$$

Por lo tanto, para encontrar el valor x del número de decisión en la observación $n-i$, debemos resolver

$$x^i=\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}\binom{i}{j}x^{i-j}(1-x)^j \tag{5.1}$$

o, tomando $z=(1-x)/x$, es equivalente a resolver

$$1=\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}\binom{i}{j}z^j.$$

Para $i=1$, se tiene $x=1-x$, es decir, $x=1/2$, como se había indicado antes; por lo tanto, $b_2=1/2$. Para $i=2$, se obtiene la ecuación de segundo grado $5x^2-2x-1=0$, luego,

$$x=b_3=\frac{1+\sqrt{6}}{5}\approx 0,6899.$$

Para valores no muy grandes de i es posible resolver la ecuación 5.1 y encontrar las aproximaciones numéricas de x presentadas en la Tabla 5.1 que han sido obtenidas mediante computación numérica en MATLAB (consultar el Apéndice A).

$i+1$	b_{i+1}
1	0
2	0,5000
3	0,6899
4	0,7758
5	0,8246
6	0,8559
7	0,8778
8	0,8939
9	0,9063
10	0,9160

$i+1$	b_{i+1}
11	0,9240
12	0,9305
13	0,9361
14	0,9408
15	0,9448
16	0,9484
17	0,9515
18	0,9542
19	0,9567
20	0,9589

$i+1$	b_{i+1}
21	0,9609
22	0,9627
23	0,9644
24	0,9659
25	0,9673
26	0,9686
27	0,9697
28	0,9708
29	0,9719
30	0,9728

$i+1$	b_{i+1}
31	0,9737
32	0,9745
33	0,9753
34	0,9760
35	0,9767
36	0,9774
37	0,9780
38	0,9786
39	0,9791
40	0,9797

$i+1$	b_{i+1}
41	0,9802
42	0,9807
43	0,9811
44	0,9815
45	0,9820
46	0,9824
47	0,9827
48	0,9831
49	0,9834
50	0,9838

Tabla 5.1: Números óptimos de decisión o de indiferencia b_{i+1} soluciones de la ecuación 5.1 para distintos valores de i.

No obstante, es posible dar una solución aproximada de segundo y de primer orden para los valores de b_i a partir de los desarrollos en series de potencias en 5.1

$$x = b_{i+1} \approx \frac{1}{1 + \frac{c}{i} + \frac{a_1}{i^2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{c}{i}}$$

donde

$$1 = c + \frac{c^2}{2!2} + \frac{c^3}{3!3} + \dots, \tag{5.2}$$

con los valores numéricos de $c \approx 0,80435$ y $a_1 \approx 0,18319$. Para un análisis más detallado de estas aproximaciones y su efectividad, consultar [19].

5.2. Probabilidad de ganar en el FISP

Ahora que ya estamos familiarizados con las estrategias para resolver el FISP, tratamos de calcular la probabilidad de seleccionar el número más alto usando estrategias con números de decisión monótonos decrecientes. Es decir, en el FISP estos números de decisión no se van haciendo mayores según se van realizando las observaciones.

Observación 10. En la sección anterior, se enumeraban los números óptimos de decisión b_{i+1} en relación al número de observación empezando desde el final, siendo el primer número de decisión b_n y el último b_1. En esta sección resulta más conveniente indexar los números de decisión con el número de la observación empezando desde el principio. Usaremos la notación $d_1, d_2, \dots, d_n$ para referirnos a estos números, sin que sean necesariamente los óptimos. Además,

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots d_n, \quad \text{donde } 0 \leq d_i \leq 1.$$

De esta manera, d_1 es el número de decisión para la primera observación. Como estamos trabajando con una distribución uniforme, d_i representa la probabilidad de que el número de la observación i-ésima sea menor que su número de decisión. Para una distribución F cualquiera, d_i tiene la misma interpretación probabilística, pero el número de decisión sería un k_i tal que $F(k_i) = d_i$.

Teorema 5.3. *Siguiendo cualquier estrategia con números de decisión monótonamente decrecientes d_i, $i = 1, 2 \dots, n$, la probabilidad $P(r+1)$ de ganar en la observación $r+1$ es*

$$P(1) = \frac{1 - d_1^n}{n}$$

$$P(r+1) = \frac{1}{n-r}\left[\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{d_i^r}{r} - \frac{d_i^n}{n}\right)\right] - \frac{d_{r+1}^n}{n}, \quad 1 \leq r \leq n-1. \tag{5.3}$$

Demostración. Primero calculemos la probabilidad de que la i-ésima observación sea el número más grande de los primeros r números y lleguemos a la observación $r+1$ sin haber elegido ningún número.

Consideremos el número de decisión d_i, $1 \leq i \leq r$. La probabilidad de que las primeras r observaciones sean menores que d_i es d_i^r. La probabilidad de que la i-ésima observación sea la mayor entre las primeras r observaciones y que estas sean menores de d_i es d_i^r/r. Posiblemente, nunca habrá una elección si la i-ésima observación es la mayor y ningún número anterior entre los n fue tan grande. La probabilidad de no elección es d_i^n/n.

La diferencia $d_i^r/r - d_i^n/n$ es la probabilidad de que la i-ésima extracción sea menor que su número de decisión, el mayor en las primeras r, pero no el mayor en la muestra de n números. Dado que los d_i son monótonamente decrecientes, esta condición asegura que ningún candidato antes del i-ésimo sorteo podría haber sido mayor que su número de decisión. Sumar la diferencia sobre los primeros r sorteos da la probabilidad de que no se haga ningún sorteo entre los primeros r y de que el mayor sorteo esté entre los últimos $n-r$.

Dada esta información, la probabilidad de que el $(r+1)$-ésimo sorteo sea el mayor es $1/(n-r)$. Por lo tanto, podemos escribir la probabilidad de que no se elija ningún sorteo entre los primeros r y de que el mayor esté en el sorteo $r+1$ como

$$\frac{1}{n-r}\left[\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{d_i^r}{r} - \frac{d_i^n}{n}\right)\right].$$

Si elegimos el número de la observación $r+1$ cuando sea el mayor, ganamos. La probabilidad de que no elijamos el $(r+1)$-ésimo y sea el mayor de todos es d_{r+1}^n/n. Por lo tanto, la probabilidad de ganar es

$$P(r+1) = \frac{1}{n-r}\left[\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{d_i^r}{r} - \frac{d_i^n}{n}\right)\right] - \frac{d_{r+1}^n}{n}, \quad 1 \leq r \leq n-1.$$

El caso de la primera extracción es especial pues la probabilidad de que el primero sea el mayor de los n números y que todos las demás observaciones sean menor que d_1 es d_1^n/n. La probabilidad de que el primero sea el más grande es $1/n$. La resta de ambas probabilidades $(1-d_1^n)/n$ es la probabilidad de ganar con la primera observación. $\square$

Corolario 5.4. *La probabilidad de ganar con una estrategia cuyos números de decisión son monótonos decrecientes es*

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = \frac{1-d_1^n}{n} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{n-r}\left[\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{d_i^r}{r} - \frac{d_i^n}{n}\right)\right] - \frac{d_{r+1}^n}{n}.$$

Demostración. La probabilidad de ganar se calcula como la suma de las probabilidades del Teorema 5.3 para los valores de r desde 0 hasta $n-1$. □

Ejemplo 5.5. Para $n = 3$, sean $d_1 = d_2 = d$, $d_3 = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{ganar}) &= \frac{1-d^3}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{d_1^1}{1} - \frac{d_1^3}{3}\right) - \frac{d_2^3}{3} + \frac{1}{1}\left(\frac{d_1^2}{2} - \frac{d_2^3}{3}\right) + \frac{d_2^2}{2} - \frac{d_2^3}{3} - \frac{d_3^3}{3} \\ &= \frac{1-d^3}{3} + \frac{d}{2} - \frac{d^3}{6} - \frac{d^3}{3} + \frac{d^2}{2} - \frac{d^3}{3} - \frac{d^2}{2} - \frac{d^3}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{d}{2} + \frac{d^2}{1} - \frac{3d^3}{2}.\end{aligned}$$

Derivando con respecto a d e igualando a cero, se obtiene que el valor de d que maximiza la probabilidad de ganar es $d^* = \frac{2+\sqrt{13}}{9} \approx 0{,}6228$, y para este número de decisión d^*, $\mathbb{P}(\text{ganar}) \approx 0{,}6703$. En otras palabras, para $n = 3$, la estrategia óptima consiste en observar el primer número y, si este es mayor que d^*, seleccionarlo. Si la observación es menor, se continúa con el segundo sorteo. Se procede de manera análoga con este nuevo número, ya que $d_1 = d_2 = d^*$. Finalmente, si el segundo número es menor que d^*, se escoge el tercer número. Siguiendo esta estrategia, la probabilidad de elegir el número más alto es aproximadamente del 67 % si $n = 3$.

5.3. Resultados numéricos del FISP

Para la estrategia óptima descrita en la primera sección de este capítulo, $d_i = b_{n-i+1}$. Estos valores de b se encuentran en la Tabla 5.1 y mediante computación numérica es posible calcular las probabilidad de ganar para diferentes valores de n, estos resultados se muestran en la Tabla 5.2 y han sido obtenidos del artículo de John P. Gilbert y Frederick Mosteller[19].

Cuando $n = 1$, estamos seguros de que vamos a ganar. Para $n = 2$, la probabilidad de ganar es 0.75. En efecto, la probabilidad de ganar decrece de

n	$\mathbb{P}$(ganar)
1	1,000
2	0,750
3	0,684
4	0,655
5	0,639
10	0,609

n	$\mathbb{P}$(ganar)
15	0,599
20	0,594
30	0,589
40	0,587
50	0,586
∞	0,580

Tabla 5.2: Probabilidades de ganar en el juego con información completa con n números usando la estrategia óptima.

manera monótona a medida que n aumenta. Para $n \to \infty$, la probabilidad asintótica de ganar se puede determinar tomando el límite de la ecuación 5.3 y reemplazando las sumas por integrales, obteniendo así una probabilidad de ganar del 58 %. Este valor ha sido obtenido por [19] realizando las aproximaciones numéricas anteriores.

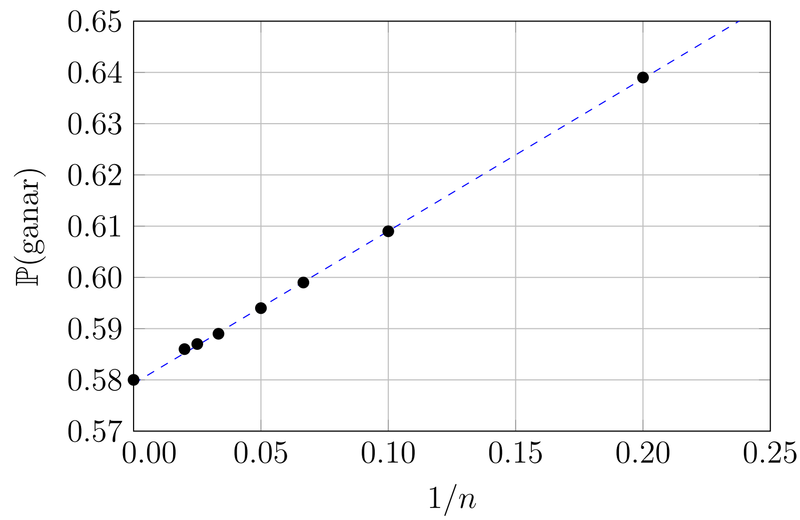

Figura 5.1: Regresión lineal de $\mathbb{P}$(ganar) en el juego con información completa en función de $1/n$.

Otra manera de obtener la probabilidad asintótica de ganar es a partir de las probabilidades óptimas para $n = 40$ y $n = 50$. En la Figura 5.1, se muestra un comportamiento lineal de $\mathbb{P}$(ganar) con $1/n$. Por lo tanto, podemos extrapolar al origen mediante una regresión lineal obteniendo un valor aproximado de la probabilidad para $n \to \infty$ de 0.580, que coincide con el valor de la Tabla 5.2.

5.4. Estrategias simples

Un único número de decisión, d. Un tipo de estrategias más simple que la óptima para resolver el FISP son aquellas que tienen el mismo número de decisión d para todas las observaciones y elige el primer candidato viable que supere d, como en el ejemplo 5.5.

Sin desarrollar la teoría en detalle, podemos esbozar las ideas asintóticas para la mejor en esta clase de estrategias [19]. A medida que el número de observaciones n crece, el valor óptimo de d tiende a 1, pero de tal manera que $n(1-d)$ tiende a una constante μ. Esto implica que el número esperado de valores que exceden d tiende a μ, independientemente de n.

Para entender la probabilidad asintótica de ganar usando esta estrategia, se aplica la distribución de Poisson con parámetro μ. Se trata de una distribución de probabilidad discreta que describe la probabilidad de que un número dado de eventos ocurra en un intervalo fijo de tiempo, siempre y cuando estos eventos ocurran con una tasa promedio constante, μ, y de manera independiente uno del otro. Esta probabilidad se define por

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

En este contexto, X es el número de observaciones que exceden d. Para $k = 1$, la probabilidad de que exactamente una observación exceda d es $\frac{e^{-\mu}\mu}{1!}$. Si hay una sola observación que excede d, es automáticamente la más grande. Por lo tanto, la probabilidad de ganar es $e^{-\mu}\mu$. Para $k = 2$, la probabilidad de que exactamente dos observaciones excedan d es $\frac{e^{-\mu}\mu^2}{2!}$. La probabilidad de seleccionar la más grande de dos es $1/2$. Por lo tanto, la contribución a la probabilidad de ganar es $\frac{e^{-\mu}\mu^2}{2!2}$. Y así sucesivamente para valores mayores de k.

A partir de lo anterior, se puede aplicar la distribución de Poisson para calcular la probabilidad asintótica de ganar como

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\text{ganar}) = e^{-\mu}\mu + e^{-\mu}\frac{\mu^2}{2!2} + e^{-\mu}\frac{\mu^3}{3!3} + \dots$$

Teniendo en cuenta los resultados de [19] el valor óptimo asintótico es $\mu \approx 1,503$, que proporciona una probabilidad asintótica aproximada de ganar de $0,517$.

Ejemplo 5.6. Cuando esta teoría asintótica se aplica al caso extremadamente desfavorable de $n = 2$, se obtiene $d \approx 0{,}25$. La probabilidad de ganar con $d = 1/4$ es aproximadamente 0,666, mientras que el d óptimo para esta estrategia es $d = 1/3$ con una probabilidad de ganar de $2/3 \approx 0{,}667$.

Números de decisión d y 0. También son útiles las estrategias que utilizan los números de decisión $d_1 = d_2 = \cdots = d_t = d$ y $d_{t+1} = d_{t+2} = \cdots = d_n = 0$. Para grandes valores de n, la elección de $t = n/2$ da una probabilidad de ganar de 0,551. Usando una teoría que omitimos, en [19] se maximiza la probabilidad de ganar optimizando tanto d como t, encontrando que el t óptimo es $t^* \approx 0{,}6489\, n$ y $d^* \approx \frac{1}{1+1{,}17/n}$, siendo la probabilidad asintótica de ganar con esto valores de aproximadamente 0,56386, un valor bastante cercano a $0,580$, que es el óptimo.

Lo más interesante de este resultado es que una estrategia tan simple puede producir resultados casi tan buenos como los de la estrategia óptima, con una pérdida en la probabilidad de solo alrededor de 0,015. Esto se debe en gran parte a que, para valores grandes de n, el tamaño de las observaciones tempranas generalmente establece el estándar para las extracciones posteriores.

Apéndice A

Código de MATLAB

A.1. Código para la Sección 3.4

En esta sección del apéndice se recompilan los códigos de MATLAB utilizados para hacer la representación en tres dimensiones de la Figura 3.3 y la obtención de la solución numérica de la ecuación 3.5.

```
a = 1; % Ajusta el valor de 'a' segun sea necesario
b = 1; % Ajusta el valor de 'b' segun sea necesario

% Crear una malla para x e y en el rango [0, 1]
[x, y] = meshgrid(linspace(0, 1, 100), linspace(0, 1,
   100));

% Asegurar que x < y
mask = (x < y);

% Evaluar la funcion W(x,y) solamente donde x > y
W = zeros(size(x));
W(mask) = (a + b) .* x(mask) .* (log(y(mask) ./ x(mask))
    + 1 - y(mask)) + b .* x(mask) .* (x(mask) - y(mask))
   ;

% Maximo
```

```
x_max = 0.34698;
y_max = 2/3;
W_max = (a + b) * x_max .* (log(y_max ./ x_max) + 1 - y_max) + b .* x_max .* (x_max - y_max);

% Graficar la funcion en 3D
figure;
surf(x, y, W, 'EdgeColor', 'none');
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('W(x,y)');
title('3D plot of W(x,y) = (a+b)x(log(y/x) + 1 - y) + bx(x - y)');
colorbar;
view(3);

% Marcar el maximo con un punto rojo
hold on;
plot3(x_max, y_max, W_max, 'ro', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'r');
hold off;
```

Código A.1: Representación de la Figura 3.3.

```
% Definir la funcion y su derivada
f = @(x) log(x) - log(2/3) + 1 - x;
fp = @(x) 1./x - 1;

% Parametros del metodo de Newton
x0 = 0.3; % valor inicial ajustado
tol = 1e-12; % tolerancia
max_iter = 100; % numero maximo de iteraciones

% Metodo de Newton
x = x0;
for k = 1:max_iter
    % Comprobar que x es positivo para evitar logaritmos de numeros no positivos
    if x <= 0
```

```
        error('Valor de x no valido (no positivo)
            durante las iteraciones.');
    end

    % Calcular el siguiente valor usando el metodo de
       Newton
    x_new = x - f(x)/fp(x);

    % Comprobar si la diferencia es menor que la
       tolerancia
    if abs(x_new - x) < tol
        break;
    end

    % Actualizar x
    x = x_new;
end

% Mostrar el resultado
fprintf('La raiz encontrada es x = %.6f\n', x);
fprintf('Numero de iteraciones: %d\n', k);

% Verificacion
fprintf('f(x) = %.6f\n', f(x));
```

Código A.2: Método de Newton para resolver la ecuación 3.5.

A.2. Código para la Sección 5.1

A continuación se presenta el código utilizado para obtener los valores numéricos de los números óptimos de decisión o de indiferencia b_{i+1} soluciones de la ecuación 5.1 para distintos valores de i en el Problema de la Secretaria con Información Completa.

```
function x_values = ecuacionbinomica()

    % Definir la funcion para la ecuacion
    function F = equation(x, i)
```

```
        z = (1 - x) / x;
        F = 0;
        for j = 1:i
            F = F + (1/j) * nchoosek(i, j) * z^j;
        end
        F = F - 1; % Queremos que la suma sea igual a 1
    end

    % Inicializar un vector para almacenar los valores de x
    x_values = zeros(50, 1);

    % Crear una tabla para diferentes valores de x en funcion de i
    fprintf('Tabla de valores de x en funcion de i:\n');
    fprintf('------------------------------------\n');
    fprintf('i\t x\n');
    fprintf('------------------------------------\n');
    for i = 1:50
        % Definir una funcion anonima que fija el valor de i
        eq = @(x) equation(x, i);

        % Usar fsolve para encontrar la solucion inicial x = 0.5
        x0 = 0.5; % Valor inicial para fsolve
        x_solution = fsolve(eq, x0);

        % Almacenar el valor de x en el vector
        x_values(i) = x_solution;

        % Imprimir el valor de i y x
        fprintf('%d\t %.6f\n', i, x_solution);
    end
    % Llama a la funcion para obtener los valores de x
end
```

Código A.3: Obtención de valores numéricos para los números óptimos de decisión b_{i+1} soluciones de la ecuación 5.1 para distintos valores de i.

Bibliografía

[1] Bayón, L., Fortuny Ayuso, P., Grau, J. M., Oller-Marcén, A. M., Ruiz, M. M. *The Best-or-Worst and the Postdoc problems*, Journal of Combinatorial Optimization, Vol. 35, No. 4, pp. 1263-1279 (2018).

[2] Bearden, J. N. *A new secretary problem with rank-based selection and cardinal payoffs*, Journal of Mathematical Psychology, 50, pp. 58-59 (2006).

[3] Beckmann, M. J. *Dynamic programming and the secretary problem*, Computers and Mathematics with Applications, pp. 25-28 (1990).

[4] Bissenger, B. H. y Siegel, C. *Advanced Problem 5086*, American Mathematical Monthly, (1963). (Solución por A. J. Bosch, pp. 111-127, 1964).

[5] Bartoszynski, R. y Govindarajulu, Z. *The secretary problem with interview cost*, Sankhya: The Indian Journal of Statistics, pp. 11-28 (1978).

[6] Berezovsky, B. A. y Gnedin, A. V. *Problems of Best Selection*, Academia Nauk USSR (1984).

[7] Chan, T.-H. H., Chen, F., y Jiang, S. H.-C. *Revealing optimal thresholds for generalized secretary problem via continuous LP: impacts on online K-item auction and bipartite K-matching with random arrival order*, Proceedings of the Twenty-Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2015, San Diego, CA, USA, January 4-6, pp. 1169-1188 (2015).

[8] Chow, Y. S., Moriguti, S., Robbins, H., y Samuels, S. M. *Optimal selection based on relative rank*, Israel Journal of Mathematics, pp. 81-90 (1964).

[9] Deely, J. y Smith, M. *A secretary problem with finite memory*, Journal of the American Statistical Association, pp. 357-361 (1975).

[10] Dinitz, M. *Recent advances on the matroid secretary problem*, ACM SIGACT News, pp. 121-142 (2013).

[11] Dynkin, E. *The optimum choice of the instant for stopping a Markov process*, Soviet Math. Dokl, 4, pp. 627-629 (1963).

[12] Ferguson, T. S. *Who solved the secretary problem?*, Statistical Science, Vol. 4, No. 3, pp. 282-296 (1989).

[13] Ferguson, T. S. *Optimal Stopping and Applications*, Curso de la Universidad de California (UCLA), 2008. Disponible en: `https://www.math.ucla.edu/~tom/Stopping/Contents.html`. Enlace consultado el 05/06/2024.

[14] Ferguson, T. S. *Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach*, Academic Press (1967).

[15] Ferguson, T. S., Hadwick, J. P., y Tamaki, M. *Maximizing the duration of owning a relatively best object*, American Mathematical Society (1991).

[16] Freeman, P. R. *The secretary problem and its extensions: a review*, International Statistical Review, Vol. 51, No. 2, pp. 189-206 (1983).

[17] Fujii, K., Yoshida, Y. *The Secretary Problem with Predictions*, Mathematics of Operations Research, Vol. 49, No. 2, pp. 1241-1262, Institute for Operations Research and the Management Sciences (2024).

[18] Gardner, M. *Mathematical Games*, Scientific American, Vol. 202, No. 2, pp. 150-156 (1960).

[19] Gilbert, J. y Mosteller, F. *Recognizing the maximum of a sequence*, Journal of the American Statistical Association, pp. 35-73 (1966).

[20] Lindley, D. *Dynamic programming and decision theory*, Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 10, No. 1, pp. 39-51 (1961).

[21] Lorenzen, T. J. *Generalizing the Secretary Problem*, Advances in Applied Probability, Vol. 11, No. 2, pp. 384-396 (1979).

[22] Lorenzen, T. J. *Optimal Stopping with Sampling Cost: The Secretary Problem*, The Annals of Probability, Vol. 9, No. 1, pp. 167-172 (1981).

[23] Petruccelli, J. *On a best choice problem with partial information*, The Annals of Statistics, pp. 1171-1174 (1980).

[24] Presman, E. L. y Sonin, I. M. *Best choice problems for a random number of objects*, Theory of Probability and Its Applications, 17, pp. 657-668 (1972).

[25] Smith, M. H. *A secretary problem with uncertain employment*, Journal of Applied Probability, 12, pp. 620-624 (1975).

[26] Vanderbei, R. J. *The postdoc variant of the secretary problem*, Technical Reviews, Princeton (1995).