Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

OPERADORES NO ACOTADOS

Autor: Nuño Lorenzana Castell
Tutor: Félix Galindo Soto
2024

Índice general

Introducción 3

1. Operadores no acotados 5
1.1. Operador adjunto. 9
1.2. Operadores simétricos y operadores autoadjuntos. 12
1.3. Operadores cerrados. Clausura de un operador. 18
1.4. La transformada de Cayley y los índices de defecto 28

2. Teoría espectral de operadores no acotados 38
2.1. Propiedades espectrales de operadores simétricos y autoadjuntos 40
2.2. Teorema espectral de operadores unitarios 49
2.3. Teorema espectral de operadores autoadjuntos 62
2.4. El operador multiplicación 70

3. Operadores no acotados en la mecánica cuántica 74
3.1. Conceptos básicos 74
3.2. El Principio de incertidumbre de Hesienberg 76

Apéndices 78

A. Espacios normados 78
A.1. Operadores en espacios normados 78
A.2. Teoremas en espacios normados 80

B. Espacios de Hilbert 82
B.1. Ortogonalidad 83
B.2. Operadores acotados en espacios de Hilbert 84

C. Análisis real 88
C.1. Teoría de la medida 88
C.2. Teoremas de representación 91
C.3. Integración de funciones absolutamente continuas 92
C.4. Funciones de clase $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 93

D. El teorema de Herglotz 94

Bibliografía 99

Introducción

La teoría de operadores no acotados aparece en los años 20 como parte del esfuerzo por erguir la mecánica cuántica, una disciplina joven, sobre unos fundamentos matemáticos rigurosos [11]. Muchos de los operadores básicos, como aquellos que describen la posición y el momento, no son acotados y tampoco están definidos en todo el espacio. Son de particular importancia los operadores sobre espacios de Hilbert, ya que proporcionan una teoría fisica satisfactoria. El desarollo sistemático de esta teoría se debe a John von Neumann y Marshall Stone [7]. Aparte de la importancia para la mecánica cuántica, los operadores no acotados también aparecen en el estudio de ecuaciones diferenciales [16].

Los operadores no acotados presentan dificultades y particularidades que surgen al eliminar la condición de acotación. Este trabajo busca ofrecer una introducción a la teoría de operadores no acotados en espacios de Hilbert, remarcando estas dificultades con diversos ejemplos, así como demostrar, en este contexto, el principio de incertidumbre de Heisenberg, un conocido y sorprendente resultado.

El primer capítulo proporciona definiciones y propiedades fundamentales para la teoría. Comenzando con el teorema de Hellinger-Toeplitz como motivación, se generalizan los conceptos de operador adjunto y operador autoadjunto para el caso no acotado. También se introducen los conceptos de simetría y clausura de operadores, y se estudia el comportamiento de operadores con estas propiedades. En la última sección se trata la transformada de Cayley, que relaciona operadores autoadjuntos no acotados con operadores unitarios.

El segundo capítulo está dedicado a teoría espectral. En el comienzo, se estudian las propiedades espectrales de operadores no acotados. Tras probar el teorema espectral de operadores unitarios, a partir de él se demuestra el teorema espectral de operadores autoadjuntos no acotados mediante la transformada de Cayley. También se incluye un ejemplo importante, el operador multiplicación, al que aplicamos el teorema espectral.

El tercer capítulo consiste en una breve introducción a los conceptos básicos de la formulación matemática de la mecánica cuántica, incluyendo una demostración del principio de incertidumbre.

Finalmente, los apéndices contienen material relevante empleado en el trabajo. En los apéndices A y B se encuentran resultados básicos de análisis funcional, incluyendo algunas demostraciones que no se han visto en el grado. En el apéndice C se exponen algunos resultados vistos en la asignatura de Análisis Real, y en el apéndice D aparece un desarrollo que desemboca en el teorema de Herglotz, que se utiliza en un paso fundamental en la demostración del teorema espectral de operadores unitarios.

Se han empleado como referencias principales los libros de análisis funcional de Kreyszig [7], Vera-Alegría [16] y Rudin [13]. Los libros de Conway [2], Limaye [8] y Moretti [9] aportan algunos ejemplos, resultados y demostraciones adicionales, así como el libro de Schmüdgen [14], dedicado plenamente a los operadores no acotados, y el de Reed-Simon [11], dedicado a los métodos matemáticos de la física. Para el tercer capítulo aparecen también las obras de Cohen-Tannoudji [1], un texto de mecánica cuántica, y Hall [5], que pretende plantear de forma consistente aquello que en algunos escritos de física se menciona sin mayor rigor. Por último, además de los libros ya mencionados, los anexos beben de textos específicos para cada uno, como Rudin [12] y Folland [3] para análisis real, y Schmüdgen [15] para el teorema de Herglotz.

A lo largo del trabajo se utilizan de forma intercambiable los términos *operador* y *operador lineal*.

Capítulo 1

Operadores no acotados

En este apartado, seguimos el planteamiento de [7], con resultados adicionales de [16, 13].

Sea T un operador lineal en un espacio de Hilbert complejo H. Denotamos el espacio de los operadores acotados $T : H \longrightarrow H$ por $L(H)$ (ver definición A.7). Para esta clase de operadores, tenemos una propiedad importante:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in H. \tag{1.1}$$

Esta propiedad caracteriza cuándo un operador acotado es autoadjunto (definición B.24). Este tipo de operadores son de gran interés por su buen comportamiento y son fundamentales en aplicaciones como la mecánica cuántica. Sin embargo, no podemos esperar que todos los operadores de interés sean acotados. El primer resultado que veremos establece una relación entre acotación y dominio para operadores que cumplen (1.1).

Teorema 1.1 (Hellinger-Toeplitz)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y sea $T\colon H \longrightarrow H$ un operador lineal definido en todo H tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ para todo $x, y \in H$. Entonces T es un operador acotado.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que T no está acotado. Entonces, por la proposición A.8, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifica que $\|y_n\| = 1$ y $\|Ty_n\| \longrightarrow \infty$. Consideramos la sucesión de funcionales lineales $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$f_n(x) = \langle Tx, y_n\rangle = \langle x, Ty_n\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cada f_n está acotado, pues por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$|f_n(x)| = |\langle x, Ty_n\rangle| \leqq \|Ty_n\|\,\|x\|.$$

Por otro lado, si fijamos un $x \in H$ cualquiera, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, pues de nuevo usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y teniendo en cuenta que $\|y_n\| = 1$ obtenemos que

$$|f_n(x)| = |\langle Tx, y_n\rangle| \leqq \|Tx\|.$$

Por el teorema de Banach-Steinhaus A.19, resulta que la sucesión $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, pongamos $\|f_n\| \leq k$ para cada n. Entonces, para todo $x \in H$,

$$|f_n(x)| \leqq \|f_n\|\,\|x\| \leqq k\|x\|.$$

En particular, tomando $x = Ty_n$ llegamos a que

$$\|Ty_n\|^2 = \langle Ty_n, Ty_n\rangle = |f_n\,(Ty_n)| \leqq k\,\|Ty_n\|\,.$$

Así, $\|Ty_n\| \leqq k$, lo cual es absurdo pues partíamos de que $\|Ty_n\| \longrightarrow \infty$. Concluimos que T está acotado. □

Este teorema muestra que un operador no acotado que satisfaga (1.1) no puede estar definido en todo H. Así, surge la necesidad de tratar operadores no definidos en todo H y obtener extensiones suyas.

De aquí en adelante, consideramos entonces operadores $T\colon D_T \longrightarrow H$ cuyo dominio D_T es un subespacio vectorial de H. Veamos un ejemplo de un operador no acotado, obtenido de [8].

Ejemplo 1.2. Consideramos el espacio de Hilbert $L^2([0,1])$ dado por las funciones complejas medibles en $[0,1]$ de cuadrado integrable. Un subespacio vectorial suyo es $C^1([0,1])$, el espacio de funciones definidas en $[0,1]$ derivables y con derivada continua. Sea $T : C^1([0,1]) \to L^2([0,1])$ el operador definido por $Tx = x'$. Entonces, este operador lineal no es acotado: si tomamos $x_n(t) = t^n,\ t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\|x_n\|_2^2 = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \quad y \quad \|Tx_n\|_2^2 = \int_0^1 n^2 t^{2n-2} dt = \frac{n^2}{2n-1}$$

Mientras que el conjunto de las funciones x_n está acotado, su imagen no lo está, luego T es un operador no acotado.

También es fundamental el concepto de extensión, pues un operador puede carecer de ciertas propiedades deseables pero una extensión suya puede sí presentarlas.

Definición 1.3. Diremos que el operador T es una *extensión* del operador S cuando

$$D_S \subset D_T \quad y \quad S = T|_{D_S}$$

y escribiremos $S \subset T$. Además, hablaremos de una *extensión propia* cuando D_S sea un subconjunto propio de D_T.

Observación 1.4. Si un operador lineal es acotado, es decir,

$$\|Tx\| \leq k\|x\|$$

para todo $x \in D_T$ y algún $k \in \mathbb{R}$, se puede extender a $\overline{D_T}$ por continuidad (teorema A.16). Si $\overline{D_T}$ fuera distinto de H, se puede extender T a todo H: definimos $Tx = 0$ si $x \in {D_T}^{\perp}$ y por linealidad se define en todo H. Esta extensión también será acotada con la misma norma que T. Por tanto, podemos suponer que los operadores lineales acotados están definidos en todo H.

Dado que cada operador puede tener un dominio distinto, es preciso detallar cómo tratar operaciones entre operadores. Dados $S\colon D_S \longrightarrow H$ y $T\colon D_T \longrightarrow H$, la *suma* $S+T$ es el operador con dominio

$$D_{S+T} = D_S \cap D_T \tag{1.2}$$

y definido por $(S+T)x = Sx + Tx$. Observamos que D_{S+T} es un subespacio vectorial de H y siempre es no vacío, pues $0 \in D_{S+T}$, y evidentemente $S+T$ es lineal.

El operador *producto* TS tiene como dominio

$$D_{TS} = \{x \in D_S : Sx \in D_T\} \tag{1.3}$$

y viene dado por $(TS)x = T(Sx)$. Este dominio es un subespacio vectorial: si $x, y \in D_{TS}$, entonces $(\alpha x + \beta y) \in D_S$. También, $Sx, Sy \in D_T$ y por tanto $S(\alpha x + \beta y) = \alpha Sx + \beta Sy \in D_T$. Así. $(\alpha x + \beta y) \in D_{TS}$. Es inmediato ver que TS es lineal: si $x, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$(TS)(\alpha x + \beta y) = T(S(\alpha x + \beta y)) = T(\alpha Sx + \beta Sy) = \alpha TSx + \beta TSy.$$

Por último, tenemos el *producto por un escalar* definido de la siguiente manera: sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $\alpha = 0$, entonces $D_{\alpha T} = H$ y αT es idénticamente nulo. Si $\alpha \neq 0$, tenemos $D_{\alpha T} = D_T$ y $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$ para todo $x \in D_T$.

Veamos qué propiedades tienen las operaciones así definidas.

Proposición 1.5. *Sean R, S, T operadores no acotados en un espacio de Hilbert. Se verifican:*

a) Propiedades asociativas:

$$(R+S)+T = R+(S+T) \quad y \quad (RS)T = R(ST).$$

b) Una versión restringida de la propiedad distributiva:

$$(R+S)T = RT+ST \quad y \quad R(S+T) \supset RS+RT.$$

c) Si $S \subset T$:

$$RS \subset RT \quad y \quad SR \subset TR.$$

Demostración. a) En el caso de la suma, por (1.2), basta notar que el dominio de los operadores a ambos lados de la igualdad es $D_R \cap D_S \cap D_T$ y la igualdad de los operadores se deduce de la propiedad asociativa de la suma en H.

Para el producto, veamos que los dominios son los mismos, utilizando (1.3):

$$\begin{aligned} x \in D_{(RS)T} &\iff x \in D_T \text{ y } Tx \in D_{RS} \\ &\iff x \in D_T,\ Tx \in D_S \text{ y } S(Tx) \in D_R \\ &\iff x \in D_{ST} \text{ y } STx \in D_R \iff x \in D_{R(ST)}. \end{aligned}$$

Por último, es inmediato que $(RS)Tx = R(S(Tx)) = R(ST)x$.

b) Veamos primero que los dominios coinciden en el primer caso.

$$\begin{aligned} D_{(R+S)T} &= \{x \in D_T : Tx \in D_{R+S}\} \\ &= \{x \in D_T : Tx \in D_R \cap D_S\} \\ &= \{x \in D_T : Tx \in D_R\} \cap \{x \in D_T : Tx \in D_S\} = D_{RT} \cap D_{ST} = D_{RT+ST}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que $(R+S)T = RT+ST$.

Veamos que en el otro caso, solo se tiene una contención:

$$\begin{aligned} D_{R(S+T)} &= \{x \in D_{S+T} : (S+T)x \in D_R\} = \{x \in D_S \cap D_T : (S+T)x \in D_R\}; \\ D_{RS+RT} &= D_{RS} \cap D_{RT} = \{x \in D_S : Sx \in D_R\} \cap \{x \in D_T : Tx \in D_R\} \\ &= \{x \in D_S \cap D_T : Sx, Tx \in D_R\}. \end{aligned}$$

Dado que $Sx, Tx \in D_R$ implica $(S+T)x \in D_R$ por ser D_R un espacio vectorial, tenemos que $D_{R(S+T)} \supset D_{RS+RT}$. Una simple comprobación demuestra que en el subespacio D_{RS+RT} ambos operadores coinciden, luego $R(S+T) \supset RS+RT$.

c) Si $x \in D_{RS}$, entonces $x \in D_S \subset D_T$ y $Tx = Sx \in D_R$, con lo que $x \in D_{RT}$. Además, $(RS)x = R(Sx) = R(Tx) = (RT)x$, y queda probada la primera propiedad. Por otro lado, si $x \in D_{SR}$, entonces $x \in D_R$ y $Rx \in D_S \subset D_T$, con lo que $x \in D_{TR}$. Además, $(SR)x = S(Rx) = T(Rx) = (RT)x$, con lo que se tiene la segunda propiedad.

□

Ejemplo 1.6. En la proposición anterior, la extensión en 1.5(b) puede ser estricta. Veamos un ejemplo que lo demuestra, obtenido de [2].

Consideramos el espacio de Hilbert ℓ^2, con base canónica $\{e_{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$. Si $x = (x_1, x_2, \ldots)$, consideramos los dominios y los operadores dados por

$$D_A = \Big\{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 < \infty\Big\}; \quad Ax = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ para cada } x \in D_A;$$

$$D_B = \Big\{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n x_n|^2 < \infty\Big\}; \quad Bx = (\beta_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ para cada } x \in D_B;$$

$$D_C = \Big\{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n x_n|^2 < \infty\Big\}; \quad Cx = (\gamma_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ para cada } x \in D_C.$$

Estos dominios son subespacios vectoriales de ℓ^2 no vacíos y los operadores definidos en ellos son lineales.

Ahora, tomamos

$$\alpha_n = n, \ \beta_n = -\sqrt{n}, \ \gamma_n = \sqrt{n} + 1/n \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Los operadores A, B y C así definidos no están acotados: si $\{e_{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es la base canónica, tenemos que $\|e_{(n)}\| = 1$ pero $\|Ae_{(n)}\| = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego A no está acotado. Ocurre lo mismo para B y C.

Veamos que la extensión $AB+AC \subset A(B+C)$ es propia. Sea $x \in \ell^2$ dado por $x = (1/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Afirmamos que $x \in D_{A(B+C)}$ pero $x \notin D_{AB+AC}$. Veámoslo.

En primer lugar, tenemos que x pertenece a los dominios de A, B y C:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \Big|\frac{-\sqrt{n}}{n^2}\Big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \Big|\frac{\sqrt{n} + 1/n}{n^2}\Big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + 2n^{-\frac{1}{2}} + n^{-2}}{n^4}\right) < \infty.$$

Veamos también que $(B+C)x \in D_A$. Tenemos que

$$(B+C)x = Bx + Cx = (\beta_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\gamma_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((\beta_n + \gamma_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

De esta manera,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n((\beta_n + \gamma_n)x_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \infty,$$

y comprobamos que $(B+C)x \in D_A$. Por tanto, $x \in D_{A(B+C)}$.

Veamos ahora que $Bx \notin D_A$. Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n(\beta_n x_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Esta serie no converge, por lo que $Bx \notin D_A$. Entonces, $x \notin D_{AB}$ y, en consecuencia, $x \notin D_{AB+AC}$.

A continuación definimos el inverso de un operador.

Definición 1.7. Sea T un operador lineal con dominio $D_T \subset H$. Decimos que T es *invertible* si T es inyectivo y se define su inverso como

$$\begin{aligned} T^{-1}\colon \operatorname{Im} T &\to D_T \\ y &\mapsto x, \end{aligned}$$

que envía cada $y \in \operatorname{Im} T$ al único $x \in D_T$ que verifica que $Tx = y$.

El operador inverso es lineal. Tomamos $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} T$. Por ser T inyectivo, existen únicos $x_1, x_2 \in D_T$ tales que $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$. Entonces, $x_1 = T^{-1}y_1$ y $x_2 = T^{-1}y_2$. Para todo par de escalares α, β tenemos que $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D_T$ y

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Por tanto,

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2.$$

1.1. Operador adjunto.

Veamos cómo se define el operador adjunto en el caso no acotado.

Definición 1.8. Sea $T : D_T \longrightarrow H$ un operador lineal. El *operador adjunto de* T, escrito T^*, se define como aquel con dominio

$$D_{T^*} = \{y \in H : \text{ existe } y^* \in H \text{ tal que } \langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle \text{ para cada } x \in D_T\} \tag{1.4}$$

y dado por $T^*y = y^*$.

Esta definición requiere que para cada y, su elemento imagen y^* sea único.

Proposición 1.9. *El operador adjunto T^* está bien definido si y solo si D_T es denso en H.*

Demostración. Supongamos que D_T no es denso en H. Entonces, $\overline{D_T} \neq H$. Dado que $\overline{D_T}$ es un subespacio vectorial cerrado y distinto de H, existe $z \in H$, $z \neq 0$ tal que $z \in \left(\overline{D_T}\right)^{\perp}$. Así, $\langle x, z\rangle = 0$ para todo $x \in D_T$, con lo que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle = \langle x, y^*\rangle + \langle x, z\rangle = \langle x, y^* + z\rangle.$$

Esto muestra que no se tiene unicidad, pues para y, tanto y^* como $y^* + z$ verifican la condición.

Por otro lado, si D_T es denso en H, tenemos que ${D_T}^{\perp} = \{0\}$. Si existen $y_1^*, y_2^* \in H$ tales que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, y_1^*\rangle = \langle x, y_2^*\rangle$ para todo $x \in D_T$, tenemos que $\langle x, y_1^* - y_2^*\rangle = 0$ para todo $x \in D_T$. Por tanto, $y_1^* - y_2^* \in {D_T}^{\perp}$ y ha de ser $y_1^* - y_2^* = 0$, con lo que se tiene la unicidad. □

Observación 1.10. El operador adjunto T^* es un operador lineal. Efectivamente, D_{T^*} es un subespacio vectorial: sean $y_1, y_2 \in D_{T^*}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Por definición, existe $y_k^* \in H$ tal que

$$\langle Tx, y_k\rangle = \langle x, y_k^*\rangle \text{ para cada } x \in D_T,\ k = 1, 2.$$

Si consideramos $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, tenemos que

$$\langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \bar{\alpha}\langle Tx, y_1\rangle + \bar{\beta}\langle Tx, y_2\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y_1^*\rangle + \bar{\beta}\langle x, y_2^*\rangle = \langle x, \alpha y_1^* + \beta y_2^*\rangle,$$

luego $y^* = \alpha y_1^* + \beta y_2^*$ y, por tanto, $y \in D_{T^*}$. Además, se deduce inmediatamente que T^* es lineal:

$$T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = T^* y = y^* = \alpha y_1^* + \beta y_2^* = \alpha T y_1 + \beta T y_2.$$

Si, además, T^* tiene dominio denso, podemos definir $T^{**} = (T^*)^*$.

Observación 1.11. Esta definición generaliza la definición B.24 para operadores acotados. Si T tiene dominio denso y T^* es como hemos definido, tenemos que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \text{ para cada } x \in D_T, y \in D_{T^*}.$$

De esta manera, se pueden deducir propiedades de operadores acotados. En concreto, si T es acotado, tenemos que (proposición B.26):

1) T^* es acotado.

2) $T^{**} = T$.

3) Si S está acotado, $T^*S^* = (ST)^*$ y $T^* + S^* = (T + S)^*$.

4) Si $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$.

En el caso no acotado, estas propiedades presentan algunas diferencias. Veamos cómo se comportan los adjuntos de operadores no acotados.

Proposición 1.12. *Sean S, T operadores lineales con dominio denso en H. Se tienen las siguientes propiedades:*

a) $S \subset T \implies T^* \subset S^*$.

b) $S^* + T^* \subset (S + T)^*$.

c) Si ST tiene dominio denso, entonces $T^*S^* \subset (ST)^*$. Además, si $S \in L(H)$, se tiene la igualdad.

d) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Se verifica que $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$.

e) Si T^* tiene dominio denso, entonces $T \subset T^{**}$.

Demostración. a) Sea $y \in D_{T^*}$. Entonces existe $y^* \in H$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ para cada $x \in D_T$. Como $S \subset T$, tenemos $\langle x, y^*\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle$ para cada $x \in D_S$. Por tanto, $y \in D_S$ y $S^*y = y^* = T^*y$, luego $T^* \subset S^*$.

b) Sea $y \in D_{T^*+S^*}$. Entonces $y \in D_{T^*}$ y $y \in D_{S^*}$ por (1.2). Entonces, existen $y_1^*, y_2^* \in H$ tales que

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, y_1^*\rangle \quad \forall x \in D_S; \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, y_2^*\rangle \quad \forall x \in D_T.$$

Tenemos que $\langle (S+T)x, y\rangle = \langle x, y_1^* + y_2^*\rangle$ para todo $x \in D_T \cap D_S = D_{T+S}$, lo cual implica que $y \in D_{(S+T)^*}$ y además,

$$(S + T)^*y = y_1^* + y_2^* = S^*y + T^*y = (S^* + T^*)\, y.$$

c) Sea $y \in D_{T^*S^*}$. Por (1.3), se tiene $y \in D_{S^*}$ y $S^*y \in D_{T^*}$. Entonces, existen $y_1^*, y_2^* \in H$ tales que

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, y_1^*\rangle \quad \forall x \in D_S; \qquad \langle Tz, S^*y\rangle = \langle z, y_2^*\rangle \quad \forall z \in D_T.$$

Si, además, $z \in D_{ST} \subset D_T$, entonces $Tz \in D_S$. Tomando $x = Tz$ y teniendo en cuenta que $y_1^* = S^*y$ e $y_2^* = T^*S^*y$, tenemos que

$$\langle STz, y\rangle = \langle Sx, y\rangle = \langle x, y_1^*\rangle = \langle Tz, S^*y\rangle = \langle z, y_2^*\rangle = \langle z, T^*S^*y\rangle \text{ para cada } z \in D_{ST}.$$

Entonces $y \in D_{(ST)^*}$ por definición y $(ST)^*y = y_2^* = T^*S^*y$, con lo que $T^*S^* \subset (ST)^*$.

Veamos ahora la extensión contraria si $S \in L(H)$. Sea $y \in D_{(ST)^*}$. Entonces existe $y^* \in H$ tal que $\langle (ST)x, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ para todo $x \in D_{ST}$. Como $D_T \subset D_{ST}$, la anterior igualdad se tiene para todo $x \in D_T$. Puesto que $S \in L(H)$, su adjunto S^* también lo está (proposición B.23), y podemos escribir

$$\langle (ST)x, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle \quad \forall x \in D_T.$$

Esto implica que $S^*y \in D_{T^*}$, y como $y \in H = D_{S^*}$, se tiene que $y \in D_{T^*S^*}$ por (1.3), luego tenemos la extensión contraria y por tanto, la igualdad.

d) Supongamos que $\alpha = 0$. Entonces, por definición, $D_{\alpha T} = H$ y $\alpha T \equiv 0$. Puesto que $0 = \langle 0, y\rangle = \langle \alpha Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ para todo $x \in H$ implica $y^* = 0$ para todo $y \in H$, resulta $D_{(\alpha T)^*} = H$ y $(\alpha T)^* \equiv 0$. Por otro lado, es evidente que $D_{\bar{\alpha}T^*} = H$ y $\bar{\alpha}T^* \equiv 0$. Luego se tiene $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$.

   Supongamos ahora que $\alpha \neq 0$. Recordando que $D_{\beta T} = D_T$ si $\beta \neq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} D_{\bar{\alpha}T^*} &= D_{T^*} = \{y \in H : \text{ existe } y^\dagger \in H \text{ tal que } \langle Tx, y\rangle = \langle x, y^\dagger\rangle \text{ para cada } x \in D_T\}; \\ D_{(\alpha T)^*} &= \{y \in H : \text{ existe } y^* \in H \text{ tal que } \langle (\alpha T)x, y\rangle = \langle x, y^*\rangle \ \forall x \in D_{\alpha T}\} \\ &= \{y \in H : \text{ existe } y^* \in H \text{ tal que } \langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*/\bar{\alpha}\rangle \text{ para cada } x \in D_T\}\,. \end{aligned}$$

   Tomando $y^\dagger = y^*/\bar{\alpha}$ o $y^* = \alpha y^\dagger$ según convenga, vemos que estos conjuntos son iguales y además, $(\alpha T)^*y = y^* = \bar{\alpha}y^\dagger = \bar{\alpha}T^*y$ para cada y en el dominio, como queríamos ver.

e) Por definición de T^*, tenemos que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \text{ para cada } x \in D_T, \text{ para cada } y \in D_{T^*}. \tag{1.5}$$

   Tomando los conjugados complejos, obtenemos que

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad \forall x \in D_T,\ \forall y \in D_{T^*}. \tag{1.6}$$

   Como D_{T^*} es denso, existe el operador $T^{**} = (T^*)^*$. Por definición,

$$\langle T^*y, z\rangle = \langle y, T^{**}z\rangle \quad \forall y \in D_{T^*},\ \forall z \in D_{T^{**}}. \tag{1.7}$$

   Ahora, si $x \in D_T$, también se tiene que $x \in D_{T^{**}}$: basta tomar $T^{**}x = Tx$ y observar que al tenerse (1.6), $z = x$ verifica (1.7) para todo $y \in D_{T^*}$. Así tenemos $D_T \subset D_{T^{**}}$ y $T \subset T^{**}$.

□

Ejemplo 1.13. Veamos un ejemplo que muestra que la contención puede estricta en 1.12(b).

Supongamos que tenemos operadores A, B de dominio denso tales que $A^* = B$ y $B^* = A$, siendo B una extensión propia de A (un ejemplo de tales operadores son los operadores T_3 y T_1 del ejemplo 1.24). Entonces $A^* + B^* = A + B = 2A$ y $(A + B)^* = (2A)^* = 2B$. Puesto que B extiende propiamente a A, se tiene que $2A$ no extiende a $2B$, luego

$$(A + B)^* = 2B \not\subset 2A = A^* + B^*,$$

como queríamos ver.

Ejemplo 1.14. Veamos ahora un ejemplo que muestra que la contención puede ser estricta en 1.12(c).

Sean ahora A, B operadores de dominio denso tales que A sea acotado, B no sea acotado, $A^* = A$, $B^* = B$ y $B = A^{-1}$ (un ejemplo son los operadores T y S del ejemplo 1.21). Entonces $(BA)^*$ es una extensión propia de A^*B^*: tenemos que $A^*B^* = AB = I_{D_B}$ y $(BA)^* = I_H^* = I_H$, y I_H es una extensión propia de I_{D_B}.

Observación 1.15. El operador T^* no tiene por qué tener dominio denso. De hecho, puede reducirse a $\{0\}$, como se describe en [8]. Consideramos $H = \ell^2$ y la base canónica (ortonormal) dada por $e_n = (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ donde δ_{nm} es la delta de Kronecker. Tomamos una aplicación biyectiva $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y definimos $u_{kj} = e_{\phi(k,j)}$ para cada $k, j \in \mathbb{N}$. Entonces $(u_{kj})_{k,j\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal. Definimos el operador T por

$$Tu_{kj} = e_k, \quad k, j \in \mathbb{N},$$

y lo extendemos por linealidad a ℓ^2. Teniendo en cuenta que el espacio generado por una base es denso (proposición B.18), el operador T tiene dominio denso y por tanto existe T^*. Sea $y \in D_{T^*}$. Si y_k es la coordenada k-ésima de y, tenemos que

$$y_k = \langle y, e_k\rangle = \langle y, Tu_{kj}\rangle = \langle T^*y, u_{kj}\rangle \text{ para cada } j \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Por la desigualdad de Bessel, dado que $(u_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal numerable, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle T^*y, u_{kj}\rangle|^2 \leq \|T^*y\|_2^2 < \infty.$$

Por tanto la serie anterior converge, con lo cual el término general $|\langle T^*y, u_{kj}\rangle|^2$ tiende a 0 cuando j tiende a infinito. Así, el término derecho de (1.8) tiende a 0 cuando $j \to \infty$ y ha de tenerse que $y_k = 0$ para todo k. Con esto, $y = 0$ y $D_{T^*} = \{0\}$.

1.2. Operadores simétricos y operadores autoadjuntos.

Vamos a ver cómo podemos generalizar el concepto de operador autoadjunto para el caso no acotado, tomando como referencia principal [16] y completando con [7].

Definición 1.16. Sea $T : D_T \longrightarrow H$ un operador lineal. Se dice que T es *simétrico* si

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in D_T.$$

Se dice que un operador simétrico T es *simétrico maximal* si no tiene extensiones simétricas propias.

Tenemos las siguientes caracterizaciones en el caso de un operador con dominio denso.

Proposición 1.17. *Sea $T : D_T \longrightarrow H$ un operador lineal de dominio denso en H. Son equivalentes:*

a) *T es simétrico.*

b) *$T \subset T^*$.*

c) *$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cada $x \in D_T$.*

Demostración. a) $\Longrightarrow$ b). Sea $y \in D_T$. Si T es simétrico, tenemos que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x \in D_T.$$

Entonces existe $y^* = Ty$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ para todo $x \in D_T$. Por tanto, $y \in D_{T^*}$ y $T^*y = y^* = Ty$.

b) $\Longrightarrow$ c). Sea $x \in D_T$. Entonces

$$\langle Tx, x\rangle = \langle T^*x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}.$$

Por tanto, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

c) $\Longrightarrow$ a). Sean $x, y \in D_T$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Tomamos $\langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle$ y observamos que

$$\langle x+\alpha y, T(x+\alpha y)\rangle = \overline{\langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle} = \langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle, \tag{1.9}$$

donde la segunda igualdad se tiene por hipótesis. Desarrollando el producto escalar, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle &= \langle Tx, x\rangle + \alpha\langle Ty, x\rangle + \bar{\alpha}\langle Tx, y\rangle + \alpha\bar{\alpha}\langle Ty, y\rangle; \\ \langle x+\alpha y, T(x+\alpha y)\rangle &= \langle x, Tx\rangle + \alpha\langle y, Tx\rangle + \bar{\alpha}\langle x, Ty\rangle + \alpha\bar{\alpha}\langle y, Ty\rangle. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Combinando (1.9) y (1.10), tomando $\alpha = 1$ y reordenando términos, obtenemos que

$$\langle x, Ty\rangle - \overline{\langle x, Ty\rangle} = \langle Tx, y\rangle - \overline{\langle Tx, y\rangle} \Longrightarrow \mathrm{Im}\langle Tx, y\rangle = \mathrm{Im}\langle x, Ty\rangle.$$

De forma similar, para $\alpha = i$ obtenemos que

$$\langle x, Ty\rangle + \overline{\langle x, Ty\rangle} = \langle Tx, y\rangle + \overline{\langle Tx, y\rangle} \Longrightarrow \mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, Ty\rangle.$$

De estas igualdades se deduce que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, luego T es simétrico.

□

Proposición 1.18. *Todo operador simétrico tiene alguna extensión simétrica maximal.*

Demostración. Sea T_0 un operador simétrico. Aplicamos el lema de Zorn al conjunto de los operadores simétricos que son extensión de T_0 con el orden parcial dado por la extensión. Este conjunto es no vacío, pues T_0 está en él. Sea $\mathcal{Y}$ un subconjunto totalmente ordenado de este conjunto. Veamos que tiene cota superior. Sea

$$D_S = \bigcup_{T\in\mathcal{Y}} D_T.$$

Este conjunto es un subespacio vectorial de H. Si $x, y \in D_S$, existen $T_1,\ T_2$ tales que $x \in D_{T_1}$ y $y \in D_{T_2}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $T_1 \subset T_2$ por ser $\mathcal{Y}$ totalmente ordenado. Entonces, si $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ se tiene $\alpha x + \beta y \in D_{T_2} \subset D_S$.

Definimos entonces el operador S como

$$Sx = Tx, \quad x \in D_T,\ T \in \mathcal{Y}.$$

Está bien definido: si T_1 y $T_2 \in \mathcal{Y}$ son tales que $x \in D_{T_1}$ y $x \in D_{T_2}$, entonces $T_1 x = T_2 x$ ya que se verifica o bien que $T_1 \subset T_2$ o bien que $T_2 \subset T_1$.

El operador S es simétrico: si $x, y \in D_S$, existen $T_1,\ T_2 \in \mathcal{Y}$ tales que $x \in D_{T_1}$ e $y \in D_{T_2}$ con $Sx = T_1 x,\ Sy = T_2 y$. Por el orden total en $\mathcal{Y}$, podemos suponer que $T_1 \subset T_2$, con lo que $x \in D_{T_2}$ y $T_2 x = T_1 x$. De esta manera,

$$\langle Sx, y\rangle = \langle T_2 x, y\rangle = \langle x, T_2 y\rangle = \langle x, Sy\rangle,$$

por ser T_2 simétrico. También, para todo $T \in \mathcal{Y}$ se tiene que $T \subset S$, y por tanto $T_0 \subset T \subset S$ y S es una extensión simétrica de T_0. Además, S es una cota superior de $\mathcal{Y}$. Por el lema de Zorn, los operadores simétricos que extienden a T_0 tienen un elemento maximal S_0 para la extensión. Por tanto, S_0 es una extensión simétrica maximal de T_0. □

Definición 1.19. Sea $T : D_T \longrightarrow H$ un operador lineal con dominio denso en H. Se dice que T es *autoadjunto* si

$$T = T^*.$$

Observación 1.20. Todo operador lineal autoadjunto es simétrico. El recíproco no es cierto, pues T^* puede ser una extensión propia de T. Veremos un caso en el ejemplo 1.24.

Por otro lado, si $D_T = H$, entonces sí se tiene el recíproco: ahora no se puede tratar de una extensión propia, con lo que se tiene la equivalencia. En este caso, el operador T está acotado, lo cual explica que no aparezca el concepto de simetría para operadores acotados.

También, si $D_T = D_{T^*}$ y T es simétrico, entonces es autoadjunto.

Ejemplo 1.21. Sea $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ definido por $Tx = y$ con $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $y = (\xi_j/j)_{j\in\mathbb{N}}$. Este operador está bien definido, es lineal, acotado y autoadjunto, y su inverso es un operador autoadjunto pero no acotado [7]. Veámoslo.

Si $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, tenemos que

$$\|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{\xi_j}{j}\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^2 = \|x\|^2 .$$

Luego T está acotado. Entonces, para comprobar que es autoadjunto basta con ver que es simétrico. Si $y = (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$,

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\xi_j}{j}\right) \bar{\eta}_j = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \left(\frac{\bar{\eta}_j}{j}\right) = \langle x, Ty\rangle. \tag{1.11}$$

Ahora, si $Tx = 0$, entonces $\xi_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, luego $x = 0$. Por tanto, $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ y T es inyectivo, luego T^{-1} existe. Sea $S : \operatorname{Im} T \longrightarrow \ell^2$ dado por $Sx = (j\xi)_{j\in\mathbb{N}}$. Entonces $S = T^{-1}$:

$$\begin{aligned} STx &= S\left(\frac{\xi_j}{j}\right)_{j\in\mathbb{N}} = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} = x \quad \forall x \in \ell^2; \\ TSx &= T(j\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} = (j\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} = x \quad \forall x \in \operatorname{Im} T. \end{aligned}$$

Consideramos $x_n = (\delta_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= 1 && \forall n \in \mathbb{N}; \\ \|Sx_n\| &= \left\|(j\delta_{nj})_{j\in\mathbb{N}}\right\| = n && \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Luego S no está acotado.

La simetría de S se demuestra de la misma manera que vimos la simetría de T en (1.11). Así, $S \subset S^*$ y para ver que es autoadjunto, basta probar que $D_{S^*} \subset D_S$ por la observación anterior. Sea $y \in D_{S^*}$. Por definición, existe $y^* \in \ell^2$ tal que

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle \quad \forall x \in \operatorname{Im} T.$$

Puesto que $x \in \operatorname{Im} T$, podemos escribir $x = Tz$ con $z \in \ell^2$ y

$$\langle z, y\rangle = \langle STz, y\rangle = \langle Tz, y^*\rangle \quad \forall z \in \ell^2.$$

Puesto que T es autoadjunto, $\langle Tz, y^*\rangle = \langle z, Ty^*\rangle$ y resulta que

$$\langle z, y\rangle = \langle z, Ty^*\rangle \quad \forall z \in \ell^2.$$

Por tanto $y = Ty^*$, luego $y \in \operatorname{Im} T = D_S$. Concluimos que $S = T^{-1}$ es autoadjunto. Por último, caracterizamos $\operatorname{Im} T = D_S$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T &= \{y \in \ell^2 : \exists x \in \ell^2 / y = Tx\} = \{y \in \ell^2 : \exists x \in \ell^2 / T^{-1}y = x\} \\ &= \{y \in \ell^2 : T^{-1}y \in \ell^2\} = \Big\{y = (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \left|\eta_j\right|^2 < \infty\Big\}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Proposición 1.22. *Los operadores autoadjuntos son simétricos maximales.*

Demostración. Sea T un operador autoadjunto. Sea ahora S un operador simétrico tal que $T \subset S$. Entonces $S \subset S^*$ y $S^* \subset T^*$. Se tiene que

$$S \subset S^* \subset T^* = T \subset S$$

Por tanto $S = T$ y T no tiene extensiones maximales propias. $\square$

Observación 1.23. No todo operador simétrico maximal es autoadjunto. Encontramos tales casos más adelante en los ejemplos 1.66 y 1.65.

Vamos a ver otro ejemplo ilustrativo de los conceptos vistos hasta el momento, encontrado en [13] y [8].

Ejemplo 1.24. Consideramos el espacio de Hilbert complejo $L^2([0,1])$ de las funciones medibles en $[0,1]$ de cuadrado integrable. Definimos los operadores $T_1,\ T_2,\ T_3$. Sus dominios son:

$$\begin{aligned}
D_{T_1} &= \left\{f \in C([0,1]) : f \text{ absolutamente continua con derivada } f' \in L^2([0,1])\right\};\\
D_{T_2} &= \left\{f \in D_{T_1} : f(0) = f(1)\right\};\\
D_{T_3} &= \left\{f \in D_{T_1} : f(0) = f(1) = 0\right\};
\end{aligned}$$

y vienen dados por $T_k f = if'$ para $f \in D_{T_k}$, $k = 1, 2, 3$. Vamos a ver qué relaciones podemos establecer entre estos operadores y qué propiedades tienen. Notamos que $T_3 \subset T_2 \subset T_1$.

Veamos que los dominios son densos en $L^2([0,1])$. Para ello, basta ver que D_{T_3} lo es. Sea $f \in L^2([0,1])$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $C([0,1])$ es denso, existe $g \in C([0,1])$ tal que $\|f - g\|_2 < \varepsilon/3$. Sea $M = \|g\|_\infty$ y sea $\delta > 0$ tal que $6M\sqrt{2\delta} < \varepsilon$, y de modo que tenga sentido hablar del intervalo $[\delta, 1-\delta]$. Entonces, podemos tomar una función $h \in C([0,1])$ de forma que

$$\begin{gathered}
h(x) = g(x) \quad \forall x \in [\delta, 1-\delta];\\
h(0) = h(1) = 0, \text{ y } \|h\|_\infty \leq \|g\|_\infty .
\end{gathered}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|h - g\|_2 &= \left(\int_0^\delta |h-g|^2 + \int_\delta^{1-\delta} |h-g|^2 + \int_{1-\delta}^1 |h-g|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\int_0^\delta \|h-g\|_\infty^2 + \int_{1-\delta}^1 \|h-g\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left((2M)^2\delta + (2M)^2\delta\right)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}M\delta^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, por el teorema de Bernstein A.24 existe un polinomio de Bernstein p definido en $[0,1]$ tal que $\|p - h\|_\infty < \varepsilon/3$. Además, $p(0) = h(0) = 0$ y $p(1) = h(1) = 0$, y también se tiene que

$$\|p - h\|_2 = \left(\int_0^1 |p-h|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \|p-h\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|p-h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Con todo esto, tenemos que

$$\|f - p\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-h\|_2 + \|h-p\|_2 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por tanto, los polinomios que se anulan en 0 y 1 son densos en $L^2([0,1])$. Como D_{T_3} contiene estos polinomios, tenemos que D_{T_3} es denso en $L^2([0,1])$. Entonces también lo es D_{T_2} y tenemos que los operadores T_1, T_2, T_3 tienen dominio denso. Así, existen los adjuntos de estos operadores.

Veamos ahora qué ocurre con los adjuntos de estos operadores. Sean $f \in D_{T_k}$ y $g \in D_{T_m}$, con $m, k \in \{1,2,3\}$. Tenemos que, integrando por partes (proposición C.37),

$$\begin{aligned}\langle T_k f, g\rangle = \langle if', g\rangle = i\int_0^1 f'\bar{g} = i\left(f(1)\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0) - \int_0^1 f\bar{g}'\right) = \\ = i\big(f(1)\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0)\big) + \int_0^1 f\overline{(ig')} = i\big(f(1)\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0)\big) + \langle f, T_m g\rangle.\end{aligned} \tag{1.14}$$

A partir de esta igualdad:

a) Tomando $k = m = 2$, tenemos que $f, g \in D_{T_2}$. Por tanto, $f(0) = f(1)$ y $g(0) = g(1)$, con lo que $f(1)\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0) = 0$ y resulta que

$$\langle T_2 f, g\rangle = \langle f, T_2 g\rangle.$$

Luego T_2 es simétrico y por tanto $T_2 \subset T_2^*$.

b) Tomamos $k = 1,\ m = 3,\ f \in D_{T_1}$ y $g \in D_{T_3}$. Entonces $g(0) = g(1) = 0$, con lo que de nuevo $f(1)\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0) = 0$ y resulta que

$$\langle T_1 f, g\rangle = \langle f, T_3 g\rangle.$$

Así, por definición de T_1^* se tiene que $T_1^* g = T_3 g$ luego $g \in D_{T_1^*}$. Tenemos entonces que $T_3 \subset T_1^*$.

c) Tomando $k = 1,\ m = 3$, con un razonamiento análogo al anterior obtenemos que $T_1 \subset T_3^*$.

Obtenemos entonces que

$$T_1 \subset T_3^*,\ T_2 \subset T_2^*,\ T_3 \subset T_1^*. \tag{1.15}$$

Ahora, sea $g \in D_{T_k^*}$ y definimos

$$\Phi_k(t) = \int_0^t T_k^* g, \quad t \in [0,1].$$

Observamos que $T_k^* g \in L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ y que Φ_k es una función absolutamente continua en $[0,1]$. Entonces, para $f \in D_{T_k}$, integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_0^1 if'\bar{g} = \langle T_k f, g\rangle = \langle f, T_k^* g\rangle = \int_0^1 f\,\overline{T_k^* g} = \\ = \int_0^1 f\bar{\Phi}_k' = f(1)\bar{\Phi}_k(1) - f(0)\bar{\Phi}_k(0) - \int_0^1 f'\bar{\Phi}_k = f(1)\bar{\Phi}_k(1) - \int_0^1 f'\bar{\Phi}_k,\end{aligned} \tag{1.16}$$

donde hemos usado que $\Phi_k(0) = 0$ por definición. Ahora, si $k = 1, 2$, D_{T_k} contiene funciones constantes no nulas. Tomando f constante no nula, tenemos que $f' \equiv 0$ y de (1.16) se deduce que $\Phi_k(1) = 0$. Si $k = 3$, se tiene que $f(1) = 0$. Entonces, en todos los casos tenemos que

$$\int_0^1 if'\bar{g} = -\int_0^1 f'\bar{\Phi}_k \implies \langle T_k f, (g + i\Phi_k)\rangle = \int_0^1 if'\left(\bar{g} - i\bar{\Phi}_k\right) = 0.$$

Así,

$$g + i\Phi_k \in (\operatorname{Im} T_k)^{\perp}. \tag{1.17}$$

A partir de esta relación:

a) Si $k=1$, tenemos que $\operatorname{Im} T_1 = L^2([0,1])$. En efecto, si $u \in L^2([0,1])$, podemos tomar

$$v = -i \int_0^t u, \quad t \in [0,1] \tag{1.18}$$

Vemos que $v \in D_{T_1}$ y $T_1 v = u$, y por tanto $u \in \operatorname{Im} T_1$. La contención contraria es inmediata.

Entonces, se deduce que $(\operatorname{Im} T_1)^\perp = \{0\}$ y a partir de (1.17), se tiene que $g = -i\Phi_k$, luego g es absolutamente continua (teorema C.36). Puesto que con $k=1$ hemos visto que $\Phi_k(1) = 0 = \Phi_k(0)$, ha de ser $g(1) = 0 = g(0)$, con lo que $g \in D_{T_3}$. Como partíamos de $g \in D_{T_1^*}$, tenemos que

$$T_1^* \subset T_3. \tag{1.19}$$

b) Si $k = 2,3$, entonces $\operatorname{Im} T_k = \{u \in L^2([0,1]) : \int_0^1 u = 0\}$. En efecto, si $u \in \operatorname{Im} T_k$, existe $v \in D_{T_k}$ tal que $iv' = T_k v = u$. Entonces,

$$\int_0^1 u = i \int_0^1 v' = i\big(v(1) - v(0)\big) = 0,$$

por ser $v \in D_{T_k}$. Por otro lado, si $u \in L^2([0,1])$ y $\int_0^1 u = 0$, basta tomar v como en (1.18) con lo que $v(1) = v(0) = 0$ y $T_k v = u$. Por tanto, $v \in D_{T_k}$ y $u \in \operatorname{Im} T_k$.

Ahora, si h es una función constante y $u \in \operatorname{Im} T_k$, tenemos que

$$\langle u, h \rangle = \int_0^1 u\bar{h} = \bar{h} \int_0^1 u = 0.$$

Así, si definimos Y como el subespacio unidimensional de las funciones constantes, tenemos que

$$\operatorname{Im} T_2 = \operatorname{Im} T_3 = Y^\perp. \tag{1.20}$$

De esta manera, tenemos que $(\operatorname{Im} T_k)^\perp = Y^{\perp\perp} = \overline{\langle Y \rangle} = Y$, por ser Y un subespacio de dimensión finita y, por tanto, cerrado. Entonces, por (1.17), tenemos que

$$g + i\Phi_k = \alpha, \quad k = 1,2, \tag{1.21}$$

siendo α una constante. Por tanto, podemos escribir $g = \alpha - i \int_0^t T_k^* g$, con lo que g es absolutamente continua (teorema C.36) y $g' = -iT_k^* g \in L^2([0,1])$, con lo que $g \in D_{T_1}$.

Dado que partíamos de $g \in D_{T_k^*}$, si $k=3$, tenemos que

$$T_3^* \subset T_1. \tag{1.22}$$

Además, si $k=2$, teníamos que $\Phi_k(0) = \Phi_k(1) = 0$, con lo que $g(0) = g(1)$ por (1.21), y $g \in D_{T_2}$. Por tanto,

$$T_2^* \subset T_2. \tag{1.23}$$

Hemos obtenido, según (1.15), (1.19), (1.22) y (1.23), lo siguiente:

$$T_1^* = T_3, \quad T_2^* = T_2, \quad T_3^* = T_1. \tag{1.24}$$

Además, habíamos visto que $T_3 \subset T_2 \subset T_1$. Esto nos permite concluir lo siguiente:

1. T_2 es una extensión autoadjunta del operador simétrico T_3. Sin embargo, T_3 no es autoadjunto, lo que pone de manifiesto la diferencia de los conceptos de operador simétrico y operador autoadjunto para operadores no acotados.

2. T_1 es una extensión no simétrica del operador simétrico y autoadjunto T_2. Además, T_1 no admite extensiones simétricas. Si las tuviera, también serían extensiones simétricas de T_2 pero T_2 es simétrico maximal al ser autoadjunto.

3. Observamos que el dominio donde se define el operador juega un papel fundamental. Los operadores $T_1,\ T_2,$ y T_3 tienen la misma definición formal, y sin embargo sus adjuntos son distintos, y sus propiedades de simetría y de ser autoadjuntos son todas distintas.

1.3. Operadores cerrados. Clausura de un operador.

A diferencia de los operadores acotados, los operadores no acotados no son continuos. Sin embargo, podemos recurrir a una propiedad relacionada [7, 16].

Definición 1.25. Sea $T : D_T \longrightarrow H$ un operador en un espacio de Hilbert. Decimos que T es *cerrado* si y solo si

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{y} \quad Tx_n \longrightarrow y$$

con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_T$ implica que $x \in D_T$ y $Tx = y$.

En las aplicaciones, muchos operadores son cerrados o al menos admiten una extensión cerrada. De esta manera, se hace evidente la importancia de este tipo de operadores. En esta sección exploramos sus propiedades. A continuación damos una caracterización muy útil que utilizaremos en desarrollos posteriores.

Antes, recordamos que si H es un espacio de Hilbert, podemos dar estructura de espacio de Hilbert a $H \times H$ definiendo el producto interno por

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{H\times H} = \langle x_1, x_2 \rangle_H + \langle y_1, y_2 \rangle_H , \tag{1.25}$$

y la norma viene dada por

$$\|(x, y)\|_{H\times H} = \left(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2\right)^{1/2} . \tag{1.26}$$

Es una comprobación rutinaria demostrar que la operación dada por (1.25) define un producto interno, así como ver que la norma que define este producto interno es (1.26). Resta comprobar que $H \times H$ es completo.

Si tenemos una sucesión de Cauchy $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en $H \times H$ para la norma (1.26), esta define en H las sucesiones de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ya que

$$\|x_n - x_m\|_H \leq \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_{H\times H} \quad \text{y} \quad \|y_n - y_m\|_H \leq \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_{H\times H} .$$

Por la completitud de H, estas sucesiones convergen, digamos a x e y respectivamente. Es inmediato comprobar que la sucesión $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (x, y) en $H \times H$ y por tanto, $H \times H$ es completo.

De aquí en adelante no haremos referencia mediante subíndices al espacio sobre el que está definida una norma; será aparente por el contexto.

Proposición 1.26. *Sea $T : D_T \longrightarrow H$ un operador lineal en un espacio de Hilbert. El operador T es cerrado si y solo si su grafo*

$$G(T) = \{(x, y) \in H \times H : x \in D_T,\ y = Tx\} \tag{1.27}$$

es cerrado en $H \times H$.

Demostración. Supongamos que T es cerrado. Sea $((x_n, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $G(T)$ tal que $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$. Entonces $x_n \in D_T$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y tenemos que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$. Como T es un operador cerrado, se verifica que $Tx = y$ y por tanto $(x, y) \in G(T)$, con lo que $G(T)$ es cerrado en $H \times H$.

Supongamos ahora que $G(T)$ es cerrado en $H \times H$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de D_T tal que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$. Como $G(T)$ es cerrado, el límite de la sucesión $((x_n, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}}$, que es de elementos de $G(T)$, está en $G(T)$. Entonces $(x, y) \in G(T)$ y, por tanto, $y = Tx$. Así, T es cerrado. □

Definición 1.27. Si un operador lineal T admite una extensión T_1 que sea un operador lineal cerrado, se dice que T es *clausurable* y T_1 se denomina *extensión lineal cerrada* de T.

Una extensión lineal cerrada $\overline{T}$ de un operador clausurable T es *minimal* si toda extensión lineal cerrada T_1 de T es una extensión lineal cerrada de $\overline{T}$. Si existe esta extensión minimal $\overline{T}$, se llama *clausura* de T.

Proposición 1.28. *Si T es clausurable, existe su clausura $\overline{T}$ y es única. Además, $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.*

Demostración. Sea T_1 una extensión cerrada de T. Entonces $G(T_1)$ es cerrado y tenemos que $G(T) \subset G(T_1)$ y por tanto $\overline{G(T)} \subset G(T_1)$. Así,

$$G(T) \subset \overline{G(T)} \subset G(T_1).$$

Con lo que $\overline{G(T)}$ no tiene elementos del tipo $(0, y)$ con $y \neq 0$. Como $\overline{G(T)}$ es un subespacio de H, esto implica que es el grafo de un operador. Si no lo fuera, ha de ser porque exista algún $x \in H$ no univaluado: existirían $(x, y), (x, z) \in \overline{G(T)}$ con $y - z \neq 0$, luego $(0, y - z) = (x, y) - (x, z) \in \overline{G(T)}$, en contradicción con lo anterior.

Sea entonces $\overline{T}$ el operador cuyo grafo es $\overline{G(T)}$. Al ser su grafo cerrado, $\overline{T}$ es cerrado. Su dominio es

$$D_{\overline{T}} = \{x \in H : \text{ existe } y \in H \text{ tal que } (x, y) \in \overline{G(T)}\},$$

con $\overline{T}x = y$.

Si tenemos cualquier extensión cerrada T_c de T, entonces $G(T) \subset G(T_c)$ y por tanto

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)} \subset G(T_c).$$

De este modo, T_c también es extensión de $\overline{T}$ y $\overline{T}$ es una extensión cerrada minimal, la clausura.

Veamos la unicidad. Sean $\overline{T}_1$ y $\overline{T}_2$ dos extensiones minimales de T. Entonces se tiene que $\overline{T}_1 \subset \overline{T}_2$ por ser $\overline{T}_1$ minimal, y también $\overline{T}_2 \subset \overline{T}_1$ por ser $\overline{T}_2$ minimal. Así, $\overline{T}_1 = \overline{T}_2$. □

Observación 1.29. Evidentemente, el grafo $G(T)$ de cualquier operador lineal $T : D_T \longrightarrow H$ tiene una clausura $\overline{G(T)}$. Sin embargo, esto no implica que todo operador sea clausurable: puede ocurrir que $\overline{G(T)}$ no constituya el grafo de ningún operador. Veamos un ejemplo de [11].

Sea $\{u_n\}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert separable H. Sea e_∞ un elemento de H que no sea combinación lineal finita de $\{u_n\}$. Sea D el conjunto de combinaciones lineales de e_∞ y $\{u_n\}$. Definimos

$$T\left(be_\infty + \sum_{j=1}^{N} c_j u_j\right) = be_\infty$$

para cualesquiera $b,\ c_j \in \mathbb{C}$. Entonces T es un operador lineal definido en D. Está bien definido: sea $x \in D$. Entonces existen $b,\ c_j \in \mathbb{C}$ de forma que podemos escribir

$$x = be_\infty + \sum_{j=1}^{N} c_j u_j.$$

Supongamos que existen otros coeficientes $\beta, \gamma_j \in \mathbb{C}$ de forma que

$$x = \beta e_\infty + \sum_{j=1}^{M} \gamma_j u_j.$$

Suponemos sin pérdida de generalidad que $N > M$ y definimos los coeficientes γ_j como nulos para $M < j \leq N$. Podemos entonces escribir

$$0 = x - x = (b - \beta) e_\infty + \sum_{i=1}^{N} (c_i - \gamma_i) u_i.$$

Como e_∞ no se puede expresar como una combinación lineal finita de $\{u_n\}$, ha de ser $b = \beta$, con lo que $Tx = b e_\infty = \beta e_\infty$ y el operador T está bien definido.

Afirmamos que este operador no es clausurable, veámoslo.

Dado que $e_\infty \in H$, existen $c_j \in \mathbb{C}$ tales que $e_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j$. Sea $x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$. Entonces $x_n \in D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j u_j = e_\infty.$$

También tenemos que $Tx_n = 0$ para todo n por definición de T. Entonces

$$(x_n, Tx_n) \longrightarrow (e_\infty, 0).$$

Por tanto, dado que $(x_n, Tx_n) \in G(T)$ para todo n, tenemos que $(e_\infty, 0) \in \overline{G(T)}$.

Por otro lado, puesto que $Te_\infty = e_\infty$, tenemos $(e_\infty, e_\infty) \in G(T) \subset \overline{G(T)}$. Hemos llegado a que tanto $(e_\infty, 0)$ como (e_∞, e_∞) están en $\overline{G(T)}$, luego $\overline{G(T)}$ no puede ser el grafo de un operador lineal univaluado. El resultado anterior demuestra que T no es clausurable.

Antes de seguir adelante, definimos el concepto de operador unitario y damos algunas propiedades.

Definición 1.30. Sea H un espacio de Hilbert. Un operador $V \in L(H)$ se dice que es *unitario* si $V^*V = VV^* = I$.

Lema 1.31. *Sea V un operador definido en todo H. Son equivalentes:*

a) *El operador V es unitario.*

b) $\operatorname{Im} V = H$ *y* $\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle$ *para todos* $x, y \in H$.

c) $\operatorname{Im} V = H$ *y* $\|Vx\| = \|x\|$ *para todo* $x \in H$.

Demostración. Si V es unitario, entonces $VV^* = I$ y por tanto $\operatorname{Im} V = H$. Como también $V^*V = I$, tenemos que

$$\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, V^*Vy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Así tenemos que (a) implica (b). La implicación $(b) \implies (c)$ es inmediata. Si se verifica (c), entonces

$$\langle V^*Vx, x \rangle = \langle Vx, Vx \rangle = \|Vx\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

para todo $x \in H$, con lo que $V^*V = I$ por el lema B.25. Además, tenemos que V es una isometría biyectiva de H en H, con lo que V es invertible. Entonces, como $V^*V = I$, ha de tenerse $V^{-1} = V^*$. Por tanto, V es unitario, verificándose (a). $\square$

Lema 1.32. *Si V es un operador unitario en H, entonces $V(M^\perp) = V(M)^\perp$ para cualquier subespacio lineal $M \subset H$.*

Demostración. Sea $x \in V\left(M^{\perp}\right)$. Entonces existe $u \in M^{\perp}$ tal que $x = Vu$, luego

$$V^* x = V^* V u = u \in M^{\perp}.$$

Así, para cada $y \in M$, se tiene que

$$\langle x, Vy \rangle = \langle V^* x, y \rangle = 0,$$

con lo que $x \in V(M)^{\perp}$.

Para la contención contraria, sea ahora $x \in V(M)^{\perp}$ y tomamos $z = V^* x$. Entonces, para cada $y \in M$,

$$\langle z, y \rangle = \langle V^* x, y \rangle = \langle x, Vy \rangle = 0,$$

luego $z \in M^{\perp}$ y $x = Vz \in V(M^{\perp})$. $\square$

Procedemos entonces a definir un operador (que resultará ser unitario) que será de gran utilidad.

Definición 1.33. Sea H un espacio de Hilbert complejo. La aplicación $U : H \times H \longrightarrow H \times H$ definida por

$$U(x, y) = i(y, -x)$$

se llama *operador de conjugación.*

Lema 1.34. *El operador de conjugación U es unitario y autoadjunto, y verifica que $U^2 = I$.*

Demostración. Veamos en primer lugar que U es simétrico: sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H \times H$. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle U(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle &= \langle i(y_1, -x_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle i y_1, x_2 \rangle + \langle -i x_1, y_2 \rangle = \langle y_1, -i x_2 \rangle + \langle x_1, i y_2 \rangle \\ &= \langle (x_1, y_1), i(y_2, -x_2) \rangle = \langle (x_1, y_1), U(x_2, y_2) \rangle. \end{aligned}$$

Como U es simétrico y está definido en todo $H \times H$, es autoadjunto. Tenemos entonces que $U^* = U$ y $U^* U = U^2 = U U^*$. Por tanto, para ver que es unitario basta comprobar que $U^2 = I$. Sea $(x, y) \in H \times H$. Entonces,

$$U^2(x, y) = U(i(y, -x)) = iU(y, -x) = i^2(-x, -y) = (x, y).$$

Con lo que $U^2 = I$. $\square$

Gracias a este operador podemos enunciar el siguiente resultado que relaciona el grafo de un operador con el de su adjunto.

Teorema 1.35. *Sea T un operador lineal en un espacio de Hilbert con dominio denso. Se verifica que*

$$G(T^*) = [U(G(T))]^{\perp}.$$

Demostración. Sea $(x, y) \in [U(G(T))]^{\perp}$. Sea $a \in D_T$, y definimos $(u, v) = U(a, Ta) \in U(G(T))$. Entonces,

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle = 0.$$

Podemos escribir $(u, v) = U(a, Ta) = (iTa, -ia)$, con lo que

$$0 = \langle (x, y), (u, v) \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle = \langle x, iTa \rangle + \langle y, -ia \rangle = -i\langle x, Ta \rangle + i\langle y, a \rangle.$$

Así, $\langle x, Ta \rangle = \langle y, a \rangle$ para $a \in D_T$ arbitrario. Por definición de T^* tenemos que $x \in D_{T^*}$ e $y = T^* x$, luego $(x, y) \in G(T^*)$.

Para probar el recíproco suponemos que $(x, y) \in G(T^*)$. Así, $x \in D_{T^*}$ e $y = T^* x$. Sea $(u, v) \in U(G(T))$. Entonces existe $a \in D_T$ tal que $(u, v) = U(a, Ta) = (iTa, -ia)$. Así,

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle = \langle (x, y), (iTa, -ia) \rangle = -i\langle x, Ta \rangle + i\langle y, a \rangle = -i\,\langle T^* x, a \rangle + i\langle y, a \rangle = 0.$$

Por tanto, $(x, y) \in [U(G(T))]^{\perp}$. $\square$

Observamos que una vez conocido $G(T^*)$, también se conocen D_{T^*} y T^*. Este teorema permite probar fácilmente gran cantidad de resultados, que de otra manera requerirían de demostraciones más técnicas (ver [7]). A continuación vemos varios de ellos.

Proposición 1.36. *Si T es un operador con dominio denso en H, entonces T^* es cerrado. En particular, los operadores autoadjuntos son cerrados.*

Demostración. Puesto que $G(T^*) = [U(G(T))]^\perp$ y $U(G(T))$ es un subespacio de H, se tiene que $G(T^*)$ es cerrado por ser el conjunto ortogonal de un subespacio de H.

Además, si T es autoadjunto, entonces $T = T^*$ y es un operador cerrado por lo anterior. □

Ejemplo 1.37. Si tenemos los operadores T_1, T_2, T_3 definidos en el ejemplo 1.24, notamos que estos operadores son cerrados, pues son adjuntos de algunos operadores. Además comprobamos que no todos los operadores cerrados son autoadjuntos, pues T_1 y T_3 no lo son.

Ejemplo 1.38. Veamos un ejemplo de un operador no acotado y no cerrado que admite una extensión cerrada, según [7].

Sea $T : D_T \subset \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ un operador lineal, donde D_T es el conjunto de sucesiones con un número finito de elementos no nulos, que es denso en ℓ^2. Si $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in D_T$, el operador se define por $Tx = (j\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

El operador T no está acotado al igual que el operador S en el ejemplo 1.21 (ver la ecuación (1.12)).

Consideramos $z_n = (\eta_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$ con

$$\eta_{nj} = \begin{cases} 1/j^2 & \text{si } \ j \leq n; \\ 0 & \text{si } \ j > n. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $z_n \longrightarrow z$ con $z = (j^{-2})_{j\in\mathbb{N}}$. Por otro lado, tenemos que $Tz_n = (\mu_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$ con

$$\mu_{nj} = \begin{cases} 1/j & \text{si } \ j \leq n; \\ 0 & \text{si } \ j > n; \end{cases}$$

y $Tz_n \longrightarrow y$ con $y = (j^{-1})_{j\in\mathbb{N}}$. Tenemos que $y \in \ell^2$ pero z no está en D_T, luego T no es cerrado.

Sea ahora S el operador con dominio

$$D_S = \left\{ x = (\xi_j) \in l^2 : \sum_{j=1}^{\infty} j^2 |\xi_j|^2 < \infty \right\}$$

definido por $Sx = (j\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Tenemos que $D_T \subset D_S$. Además, por (1.13) tenemos que S es el operador del ejemplo 1.21. Teníamos que S era autoadjunto, luego es cerrado. Constituye así una extensión cerrada de T.

Proposición 1.39. *Sea T un operador lineal con dominio denso en H. El operador T es clausurable si y solo si su adjunto T^* tiene dominio denso. En este caso, se verifican:*

a) $G(T^{**}) = [U(G(T^*))]^\perp$.

b) $\overline{T} = T^{**}$ *y en particular* $T \subset T^{**}$ *y si* T *es cerrado,* $T = T^{**}$.

c) $\left(\overline{T}\right)^* = T^*$.

Demostración. Supongamos que D_{T^*} no es denso y veamos que T no es clausurable. Entonces, existe un $y_0 \in H$, $y_0 \neq 0$, tal que $y_0 \perp D_{T^*}$, con lo que $\langle y_0, x\rangle = 0$ para todo $x \in D_{T^*}$. Por tanto,

$$\langle (y_0, 0), (x, T^*x)\rangle = 0 \quad \forall x \in D_{T^*}.$$

De esta manera, $(y_0,0)\in G(T^*)^{\perp}$. Por tanto, $(0,-iy_0)=U(y_0,0)\in U[G(T^*)^{\perp}]$, con lo que $U[G(T^*)^{\perp}]$ no puede ser el grafo de un operador. Por el lema 1.32 y por el teorema 1.35,

$$\overline{G(T)}=\left(G(T)^{\perp}\right)^{\perp}=\left(U^2[G(T)^{\perp}]\right)^{\perp}=(U\,[G(T^*)])^{\perp}=U[G(T^*)^{\perp}], \tag{1.28}$$

tenemos que $\overline{G(T)}$ no puede ser el grafo de un operador y por la proposición 1.28, T no es clausurable.

Supongamos ahora que D_{T^*} es denso y veamos que T es clausurable. Si D_{T^*} es denso, podemos aplicar el teorema 1.35 a T^* y obtener que

$$G(T^{**})=[U(G(T^*))]^{\perp}.$$

Por la ecuación (1.28), tenemos que $\overline{G(T)}=G(T^{**})$. Por tanto $\overline{G(T)}$ es el grafo de un operador y por la proposición 1.28, el operador T es clausurable.

El resto de las afirmaciones:

a) Ya hemos visto que $G(T^{**})=[U(G(T^*))]^{\perp}$.

b) Si T es clausurable, por (1.28) y el apartado anterior se tiene que

$$G(\overline{T})=\overline{G(T)}=(U\,[G(T^*)])^{\perp}=G(T^{**}),$$

y por tanto $\overline{T}=T^{**}$. Evidentemente, $T\subset\overline{T}=T^{**}$ y si T es cerrado, $T=\overline{T}=T^{**}$.

c) Tenemos que al ser U un operador continuo, $U(G(\overline{T}))=U(\overline{G(T)})=\overline{U(G(T))}$ y por tanto

$$G\left(T^*\right)=[U(G(T))]^{\perp}=\left[\overline{U(G(T))}\right]^{\perp}=\left[U(G(\overline{T}))\right]^{\perp}=G(\overline{T}^*),$$

pues $A^{\perp}=(\bar{A})^{\perp}$ para todo $A\subset H$. Tenemos entonces que $T^*=(\overline{T})^*$.

□

Proposición 1.40. *Si T es un operador lineal con dominio denso en H, se tiene*

$$H\times H=G(T^*)\oplus\overline{U(G(T))}$$

Demostración. Al ser $G(T^*)$ un subespacio vectorial cerrado de $H\times H$, se tiene que

$$H\times H=G(T^*)\oplus G(T^*)^{\perp}.$$

Por el teorema 1.35, $G(T^*)^{\perp}=\overline{U(G(T))}$. □

Corolario 1.41. *Si T es un operador lineal cerrado con dominio denso en H, el sistema*

$$\begin{aligned}-Tx+y&=a\\ x+T^*y&=b\end{aligned}$$

tiene una solución única $(x,y)\in D_T\times D_{T^*}$.

Demostración. Sea $(a,b)\in H\times H$. Entonces, por la proposición anterior, existen $f\in G(T^*)$, $g\in\overline{U(G(T))}=U(G(T))$ únicos (por ser suma directa) tales que

$$(a,b)=f+g.$$

Ahora, para f existe un único $y\in D_{T^*}$ tal que $f=(y,T^*y)$. De forma similar, para g existe un único $z\in D_T$ tal que $g=U(z,Tz)=i(Tz,-z)$. Tomando $x=-iz$, obtenemos que

$$(a,b)=(y,T^*y)+(-Tx,x)$$

con $y\in D_{T^*}$ y $x\in D_T$. □

Proposición 1.42. *Sea T un operador lineal con dominio denso en H. Entonces*

a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ *y, si T es cerrado,* $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$.

b) Si T es inyectivo y $\operatorname{Im} T$ es denso en H, entonces T^* es inyectivo y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Demostración. a) Tenemos que por el teorema 1.35,

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} T^* &\iff (x, 0) \in G(T^*) \\ &\iff \langle (x,0), (u,v) \rangle = 0 \qquad \forall (u,v) \in U(G(T)) \\ &\iff \langle (x,0), (iTa, -ia) \rangle = 0 \quad \forall a \in D_T \\ &\iff \langle x, Ta \rangle = 0 \qquad \forall a \in D_T \\ &\iff x \in (\operatorname{Im} T)^\perp. \end{aligned}$$

En el caso de que T sea cerrado, tenemos que $T = T^{**}$ por la proposición 1.39, y por lo anterior aplicado a T^* en lugar de T, obtenemos que $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^{**} = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$.

b) Por el apartado anterior, tenemos que $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp = (\overline{\operatorname{Im} T})^\perp = H^\perp = \{0\}$. Por tanto T^* es inyectivo. Además, D_T y $D_{T^{-1}} = \operatorname{Im} T$ son densos en H y también lo son $D_{TT^{-1}} = \operatorname{Im} T$ y $D_{T^{-1}T} = D_T$. Ahora, por 1.12(c), tenemos que

$$(T^{-1})^* T^* \subset (TT^{-1})^* = I; \quad T^*(T^{-1})^* \subset (T^{-1}T)^* = I,$$

ya que $(I|_D)^* = I$ si $D \subset H$ es un subespacio denso. Por tanto, $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

□

A continuación veamos qué relaciones hay entre operadores simétricos y cerrados.

Proposición 1.43. *Sea T un operador lineal con dominio denso en H. Si T es simétrico, entonces T es clausurable y $\overline{T}$ es simétrico.*

Demostración. Si T es simétrico, entonces $T \subset T^*$, siendo T^* cerrado por la proposición 1.36. Por tanto, T es clausurable.

Ahora, tomamos $x, y \in D_{\overline{T}}$. Por la proposición 1.28, existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de D_T tales que

$$\begin{aligned} x_n \longrightarrow x, \quad Tx_n = \overline{T}x_n \longrightarrow \overline{T}x; \\ y_n \longrightarrow y, \quad Ty_n = \overline{T}y_n \longrightarrow \overline{T}y. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\langle \overline{T}x, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, y_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Ty_n \rangle = \langle x, \overline{T}y \rangle,$$

lo que demuestra la simetría de $\overline{T}$. □

Observación 1.44. Toda extensión simétrica de un operador simétrico de dominio denso T es restricción de T^*. En efecto, si S es una extensión simétrica de T, entonces $T \subset S \subset S^* \subset T^*$.

Corolario 1.45. *Toda extensión simétrica maximal de un operador simétrico de dominio denso es cerrada.*

Demostración. Si T es simétrico, entonces existe alguna extensión simétrica maximal suya por la proposición 1.18. Si R es una extensión simétrica maximal de T, tenemos que R es clausurable y $\overline{R}$ es simétrico. Puesto que $\overline{R}$ es una extensión simétrica de R, ha de ser $R = \overline{R}$ por ser R maximal. Por tanto, R es cerrado.

□

El siguiente resultado indica algunas condiciones sobre cuándo un operador simétrico es autoadjunto.

Proposición 1.46. *Sea T un operador lineal simétrico con dominio denso en H. Se tiene que:*

a) Si $D_T = H$, entonces T es autoadjunto y T está acotado.

b) Si T es autoadjunto e inyectivo, entonces $\operatorname{Im} T$ es denso en H y T^{-1} es autoadjunto.

c) Si $\operatorname{Im} T$ es denso en H, entonces T es inyectivo.

d) Si $\operatorname{Im} T = H$, entonces T es autoadjunto y T^{-1} está acotado.

Demostración. a) Como T es simétrico, $T \subset T^*$. Si $D_T = H$, resulta evidente que $T = T^*$. Por la proposición 1.36, T es cerrado y por el teorema del grafo cerrado A.20, T es continuo. Por tanto, T es acotado al estar definido en todo H (proposición A.11).

b) Si $T = T^*$, por la proposición 1.42(a), tenemos que $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$. Entonces, si $\operatorname{Ker} T = 0$, resulta $\overline{\operatorname{Im} T} = H$. Ahora, por la proposición 1.42(b), se tiene que $T^{-1} = (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

c) Sea $v \in \operatorname{Ker} T$. Entonces $Tv = 0$ y $\langle Tv, x\rangle = 0$ para todo $x \in D_T$. Por ser T simétrico, esto implica que $\langle v, Tx\rangle = 0$ para todo $x \in D_T$. Por ser $\operatorname{Im} T$ denso en H, $v \in (\operatorname{Im} T)^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$. Luego $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ y T es inyectivo.

d) Si $\operatorname{Im} T = H$, por el apartado anterior T es inyectivo y existe T^{-1} con $D_{T^{-1}} = \operatorname{Im} T = H$. Tomando $u, v \in \operatorname{Im} T$ con $u = Tx$, $v = Ty$, $x, y \in D_T$ tenemos que

$$\langle T^{-1}u, v\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle u, y\rangle = \langle u, T^{-1}v\rangle,$$

con lo que T^{-1} es simétrico. Por el apartado (a), T^{-1} es autoadjunto y está acotado. Por el apartado (b) aplicado a T^{-1}, que es inyectivo, tenemos que $T = (T^{-1})^{-1}$ es autoadjunto. □

Observación 1.47. El apartado (a) se puede reformular como el teorema de Hellinger-Toeplitz 1.1 y hemos dado una demostración alternativa.

Teorema 1.48. *Sea T un operador simétrico y $\lambda = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:*

a) Se verifica la igualdad $\|(T - \lambda I)x\|^2 = b^2\|x\|^2 + \|(T - aI)x\|^2$ para todo $x \in D_T$.

b) Si $b \neq 0$, $\operatorname{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$ y $T - \lambda I$ es inyectivo.

c) Si $b \neq 0$ y T es cerrado, entonces $\operatorname{Im}(T - \lambda I)$ es cerrado.

d) Si $b \neq 0$ y $\operatorname{Im}(T - \lambda I) = H$, entonces T es simétrico maximal.

Demostración. a) Tenemos que

$$\|(T - \lambda I)x\|^2 = \|(T - aI)x - ibx\|^2 = \|(T - aI)x\|^2 + b^2\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\left(i\langle (T - aI)x, bx\rangle\right).$$

Puesto que $\langle (T - aI)x, bx\rangle = b\langle Tx, x\rangle - ab\|x\|^2$ y $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ por ser T simétrico, se tiene que $\operatorname{Re}\left(i\langle (T - aI)x, bx\rangle\right) = 0$ y queda probado este apartado.

b) Del apartado anterior se deduce que si $(T - \lambda I)x = 0$ entonces $b^2\,\|x\| = 0$. Por tanto $x = 0$ y $\operatorname{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$.

c) Sea $y \in \overline{\mathrm{Im}(T-\lambda I)}$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de D_T tal que $(T-\lambda I)x_n \to y$. Esta sucesión es de Cauchy:

$$b^2 \left\|x_n - x_m\right\|^2 \leq b^2 \left\|x_n - x_m\right\|^2 + \left\|(T-aI)\,(x_n - x_m)\right\|^2 = \left\|(T-\lambda I)\,(x_n - x_m)\right\|^2,$$

donde hemos usado el apartado (a). Como H es completo por ser espacio de Hilbert, existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Al ser $T-\lambda I$ cerrado por hipótesis, se tiene que $x \in D_{T-\lambda I}$ y $(T-\lambda I)x = y$. Por tanto $y \in \mathrm{Im}(T-\lambda I)$ y este conjunto es cerrado.

d) Supongamos que existe un operador simétrico S que extiende propiamente a T. Entonces

$$H = \mathrm{Im}(T-\lambda I) \subset \mathrm{Im}(S-\lambda I). \tag{1.29}$$

Sea $u \in D_S \setminus D_T$. Por (1.29), existe un $v \in D_T$ tal que $(S-\lambda I)u = (T-\lambda I)v$. Entonces $(S-\lambda I)u = (T-\lambda I)v = (S-\lambda I)v$ lo que implica $u = v$, ya que $(S-\lambda I)$ es inyectivo por el apartado (b) aplicado a S. Esto es absurdo, por lo que S no es una extensión propia y por tanto T es simétrico maximal.

□

Observación 1.49. Si en el apartado (c) del teorema anterior suponemos además que $a = 0$, $|b| = 1$, tenemos la equivalencia [13].

En efecto, por el apartado (a) tenemos que $\|Tx - ibx\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2$. Por tanto, la aplicación definida por $(T-ibI)x \mapsto (x, Tx)$ es una isometría biyectiva de $\mathrm{Im}(T-ibI)$ en $G(T)$. Entonces, si $\mathrm{Im}(T-ibI)$ es cerrado, también lo es $G(T)$ y por tanto T.

Lema 1.50. *Sea T un operador simétrico con dominio denso en H. Entonces, $(T-\lambda I)^* = (T^* - \bar{\lambda} I)$.*

Demostración. Ya sabemos que $(T^* - \bar{\lambda}I) \subset (T-\lambda I)^*$, veamos la otra contención. Sea $y \in D_{(T-\lambda I)^*}$. Por definición,

$$\langle (T-\lambda I)x, y\rangle = \langle x, (T-\lambda I)^* y\rangle \quad \text{para todo } x \in D_{T-\lambda I} = D_T.$$

Podemos manipular esta expresión y obtener que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, (T-\lambda I)^* y\rangle + \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, (T-\lambda I)^* y + \bar{\lambda} y\rangle \quad \text{para todo } x \in D_T.$$

Por tanto, $y \in D_{T^*} = D_{T^* - \bar{\lambda} I}$, con lo que tenemos que $(T-\lambda I)^* = (T^* - \bar{\lambda} I)$. □

A continuación veremos un criterio que podemos aplicar para determinar si un operador simétrico es autoadjunto, según [11].

Teorema 1.51. *Sea T un operador simétrico con dominio denso en H, y sea $\lambda = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$. Son equivalentes:*

a) T es autoadjunto.

b) T es cerrado y $\mathrm{Ker}(T^* - \lambda I) = \mathrm{Ker}(T^* - \bar{\lambda} I) = \{0\}$.

c) $\mathrm{Im}(T-\lambda I) = \mathrm{Im}(T - \bar{\lambda} I) = H$.

Demostración. a) $\Longrightarrow$ b). Si $T = T^*$, entonces T es simétrico y cerrado. Aplicando la proposición 1.48(b) a $\pm\lambda$ obtenemos el resultado.

b) $\Longrightarrow$ c). Si T es cerrado, entonces $\operatorname{Im}(T-\lambda I)$ es cerrado por la proposición 1.48(c). Además, al ser $\operatorname{Im}(T-\lambda I)$ un subespacio de H, tenemos que

$$(\operatorname{Im}(T-\lambda I))^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im}(T-\lambda I)} = \operatorname{Im}(T-\lambda I).$$

Aplicando la proposición 1.42(a) al operador $(T-iI)$ y usando que $(T-\lambda I)^* = (T^*-\bar{\lambda}I)$ por el lema anterior, resulta que

$$\operatorname{Ker}(T^*-\bar{\lambda}I)^{\perp} = (\operatorname{Ker}(T-\lambda I)^*)^{\perp} = (\operatorname{Im}(T-\lambda I))^{\perp\perp} = \operatorname{Im}(T-\lambda I).$$

Puesto que $\operatorname{Ker}(T^*-\bar{\lambda}I) = \{0\}$ por hipótesis, tenemos que $\operatorname{Im}(T-\lambda I) = \{0\}^{\perp} = H$.

El mismo razonamiento se puede aplicar al operador $(T-\bar{\lambda}I)$ y obtenemos el resultado.

c) $\Longrightarrow$ a). Sea $y \in D_{T^*}$. Como $\operatorname{Im}(T-\lambda I) = H$, existe $z \in D_T$ tal que $(T-\lambda I)z = (T^*-\lambda I)y$. Tenemos $D_T \subset D_{T^*}$ por ser T simétrico, luego $y - z \in D_{T^*}$ y

$$(T^*-\lambda I)(y-z) = 0.$$

Puesto que por la proposición 1.42(a) aplicada a $(T-\lambda I)$ tenemos que

$$\operatorname{Ker}(T^*-\lambda I) = \operatorname{Ker}(T-\lambda I)^* = \operatorname{Im}(T-\lambda I)^{\perp} = H^{\perp} = \{0\},$$

ha de ser $y = z \in D_T$ y por tanto $D_{T^*} = D_T$. Así, al ser T simétrico, es autoadjunto. □

Observación 1.52. A partir de este resultado, se deduce el siguiente resultado equivalente:
Sea T un operador simétrico con dominio denso en H. Son equivalentes:

a) T es autoadjunto.

b) T es cerrado y $\operatorname{Ker}(T^*-\lambda I) = \{0\}$ para todo $\lambda = a+ib$ con $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

c) $\operatorname{Im}(T-\lambda I) = H$ para todo $\lambda = a+ib$ con $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Puede resultar interesante la generalización, si partimos de un operador autoadjunto y queremos ver qué ocurre con esos núcleos e imágenes. Sin embargo, de cara a averiguar si un operador simétrico es autoadjunto es más útil el resultado anterior. Requiere solamente comprobar dos núcleos o imágenes, a diferencia de esta generalización que requeriría comprobarlos para todo λ. En particular, es de uso frecuente el teorema con $\lambda = i$.

Nos preguntamos si la suma de operadores autoadjuntos es un operador autoadjunto, y si no lo es, bajo qué condiciones sí se cumple. El siguiente resultado proporciona una respuesta [11, 6].

Teorema 1.53 (Kato-Rellich)**.** *Sean T un operador autoadjunto y S un operador simétrico con $D_T \subset D_S$. Supongamos además que para todo $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<1$ se tiene que*

$$\|Sx\| \leq a\,\|Tx\| + b\,\|x\| \qquad \textit{para todo } x \in D_T. \tag{1.30}$$

Entonces $T+S$ es un operador autoadjunto.

Demostración. Veremos que $\operatorname{Im}(T+S \pm i\mu_0 I) = H$ para algún $\mu_0 \in \mathbb{R}$, $\mu_0 > 0$. Por el teorema anterior, tendremos que $T+S$ será autoadjunto.

Sea $x \in D_T$, $\mu \in \mathbb{R}$ no nulo. Por el teorema 1.48(a) tenemos que

$$\|(T+i\mu I)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \mu^2\,\|x\|^2\,.$$

Por el teorema 1.48(b), $(T + i\mu I)$ es inyectivo, luego existe su inverso, y está definido en todo H pues $\operatorname{Im}(T + i\mu I) = H$ por el teorema 1.51. Sea $x = (T + i\mu I)^{-1} y$ con $y \in H$. Entonces,

$$\|y\|^2 = \left\|(T + i\mu I)(T + i\mu I)^{-1} y\right\|^2 = \left\|T(T + i\mu I)^{-1} y\right\|^2 + \mu^2 \left\|(T + i\mu I)^{-1} y\right\|^2 .$$

De esta ecuación se deduce que

$$\left\|T(T + i\mu I)^{-1} y\right\| \leq \|y\| , \quad \left\|(T + i\mu I)^{-1} y\right\| \leq \|y\| / \mu \quad \text{para cada } y \in H.$$

Luego $\left\|T(T + i\mu I)^{-1}\right\| \leq 1$ y $\left\|(T + i\mu I)^{-1}\right\| \leq \mu^{-1}$. Tomando de nuevo $x = (T + i\mu I)^{-1} y$ y aplicando (1.30), obtenemos que

$$\left\|S(T + i\mu I)^{-1} y\right\| \leq a \left\|T(T + i\mu I)^{-1} y\right\| + b \left\|(T + i\mu I)^{-1} y\right\| \leq \left(a + \frac{b}{\mu}\right) \|y\| \quad \forall y \in H.$$

Entonces, para $\mu = \mu_0$ suficientemente grande ($\mu_0 > b/(1-a)$), el operador $C = S(T + i\mu_0 I)^{-1}$ tiene norma menor que uno, pues $a < 1$. Por tanto, por la serie de Neumann A.15 aplicada a $-C$, tenemos que el operador

$$(I + C)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C^n$$

existe y además está en $L(H)$. Entonces $\operatorname{Im}(I + C) = H$. Como también $\operatorname{Im}(T + i\mu_0 I) = H$ por ser T autoadjunto, la ecuación

$$\begin{aligned} (I + C)(T + i\mu_0 I)x &= (I + S(T + i\mu_0 I)^{-1})(T + i\mu_0 I)x \\ &= (T + i\mu_0 I)x + Sx = (T + S + i\mu_0 I)x \quad \forall x \in D_T, \end{aligned}$$

implica que $\operatorname{Im}(T + S + i\mu_0 I) = H$. De la misma manera, se puede ver que $\operatorname{Im}(T + S - i\mu_0 I) = H$. Por el teorema 1.51, tenemos que $T + S$ es autoadjunto. □

Observación 1.54. En general, la suma de dos operadores autoadjuntos no tiene por qué ser autoadjunta. Si tomamos T autoadjunto, definimos $S = -T$, y S también es autoadjunto. Tenemos que $R = T + S$ es idénticamente nulo en su dominio $(D_R = D_T)$. Su operador adjunto R^* también es idénticamente nulo, pero su dominio es H y por tanto R^* es una extensión propia de R, con lo que R no es autoadjunto.

Este sencillo ejemplo también demuestra que la condición $a < 1$ en el teorema anterior no se puede suprimir.

1.4. La transformada de Cayley y los índices de defecto

La aplicación

$$t \mapsto \frac{t - i}{t + i}$$

establece una relación biunívoca entre la línea real y la circunferencia de radio unidad (salvo el punto 1). Desde este punto de vista, queremos generalizar esta relación para identificar operadores simétricos (resp. autoadjuntos) con isometrías (resp. operadores unitarios). Esto facilitará la prueba del teorema espectral para operadores autoadjuntos no acotados. Siguiendo el desarrollo de [13], definimos la transformada de Cayley.

Definición 1.55. Sea T un operador simétrico en H. La *transformada de Cayley* del operador T se define como el operador, que denotaremos por V_T, dado por

$$V_T = (T - iI)(T + iI)^{-1}$$

con dominio $D_{V_T} = \operatorname{Im}(T + iI)$.

Observación 1.56. El operador $T+iI$ es inyectivo por el teorema 1.48(b) y por tanto podemos hablar de $(T+iI)^{-1}$. Además, tenemos que

$$D_{V_T} = \operatorname{Im}(T+iI) \xrightarrow{(T+iI)^{-1}} D_T \xrightarrow{T-iI} \operatorname{Im}(T-iI),$$

con lo que $\operatorname{Im} V_T = \operatorname{Im}(T-iI)$.

Proposición 1.57. *La transformada de Cayley V_T de un operador simétrico T es una isometría, es decir, $\|V_T x\| = \|x\|$ para todo $x \in D_{V_T}$.*

Demostración. Sea T un operador simétrico. Por el teorema 1.48(a) tenemos que

$$\|Tx+ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \|Tx-ix\|^2$$

para todo $x \in D_T$. Entonces, existe una isometría V con

$$D_V = \operatorname{Im}(T+iI), \quad \operatorname{Im} V = \operatorname{Im}(T-iI)$$

definida por

$$V(Tx+ix) = Tx - ix \quad \forall x \in D_T.$$

Puesto que $(T+iI)^{-1} : D_V \longrightarrow D_T$, podemos escribir

$$V = (T-iI)(T+iI)^{-1}$$

y tenemos que $V_T = V$. □

Lema 1.58. *Sea V un operador con dominio en H que sea una isometría. Entonces,*

a) Se verifica que $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle$ para todos $x, y \in D_V$.

b) Si $\operatorname{Im}(I-V)$ es denso en H, entonces $I-V$ es un operador inyectivo.

c) Si cualquiera de los espacios D_V, $\operatorname{Im} V$ y $G(V)$ es cerrado, también lo son los demás.

Demostración. a) Sean $x, y \in D_V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Por ser V isometría, tenemos que $\|x+\lambda y\|^2 = \|Vx + \lambda Vy\|^2$. Podemos escribir

$$\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2 = \|Vx\|^2 + 2\operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle Vx, Vy\rangle + |\lambda|^2\|Vy\|^2.$$

Puesto que $\|Vx\| = \|x\|$ y $\|Vy\| = \|y\|$, resulta que

$$\operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle x, y\rangle = \operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle Vx, Vy\rangle$$

y esta ecuación es válida para cualquier número complejo λ. Considerando $\lambda = 1$ y $\lambda = i$ obtenemos que $\langle x, y\rangle$ y $\langle Vx, Vy\rangle$ tienen la mismas partes reales e imaginarias.

b) Sea $x \in D_V$ con $(I-V)x = 0$, o lo que es lo mismo, $x = Vx$. Entonces, por el apartado anterior,

$$\langle x, (I-V)y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, Vy\rangle = \langle Vx, Vy\rangle - \langle x, Vy\rangle = 0$$

para todo $y \in D_V$. Así, $x \in [\operatorname{Im}(I-V)]^{\perp}$. Por tanto, si $\operatorname{Im}(I-V)$ es denso en H, entonces $x = 0$ e $I-V$ es inyectivo.

c) Sean $x, y \in D_V$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|(x, Vx) - (y, Vy)\|^2 &= \|(x - y, V(x - y))\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|V(x - y)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x - y\|^2 .\end{aligned}$$

Tenemos así que

$$\|Vx - Vy\| = \|x - y\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|(x, Vx) - (y, Vy)\|.$$

Gracias a esta igualdad probamos la cadena de implicaciones D_V es cerrado $\implies$ $\operatorname{Im} V$ es cerrado $\implies$ $G(V)$ es cerrado $\implies$ D_V es cerrado. Así, tenemos el resultado.

Supongamos que D_V es cerrado y sea $y \in \overline{\operatorname{Im} V}$. Entonces existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\operatorname{Im} V$ que tiende a y. Tenemos que para cada y_n existe un $x_n \in D_V$ con $Vx_n = y_n$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge por ser sucesión de Cauchy:

$$\|x_n - x_m\| = \|Vx_n - Vx_m\| = \|y_n - y_m\| .$$

Sea x el límite de esta sucesión, que está en D_V por ser cerrado. Entonces,

$$\|Vx - y_n\| = \|Vx - Vx_n\| = \|x - x_n\| \to 0,$$

luego ha de ser $Vx = y$ y por tanto $y \in \operatorname{Im} V$.

Suponemos ahora que $\operatorname{Im} V$ es cerrado y sea $(x, y) \in \overline{G(V)}$. Entonces existe una sucesión $(x_n, Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $G(V)$ que tiende a (x, y). Tenemos que $x_n \to x$ y $Vx_n \to y$. Como $\operatorname{Im} V$ es cerrado, $y \in \operatorname{Im} V$, y por tanto existe $z \in D_V$ tal que $Vz = y$. Entonces,

$$\|x_n - z\| = \|Vx_n - Vz\| = \|Vx_n - y\| \to 0,$$

luego $x = z \in D_V$, $Vx = y$ y $(x, y) \in G(V)$.

Por último, suponemos que $G(V)$ es cerrado, y sea $x \in \overline{D_V}$. Entonces, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de D_V que tiende a x. Por tanto, $(x_n, Vx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G(V)$ y es una sucesión de Cauchy:

$$\|(x_n, Vx_n) - (x_m, Vx_m)\| = \sqrt{2}\,\|x_n - x_m\| .$$

Por tanto, existe el límite de esta sucesión (z, y) y está en $G(V)$ por ser cerrado. Entonces, $x = \lim_{n\to\infty} x_n = z \in D_V$.

□

En la demostración anterior, el primer apartado está demostrado según [2], donde aparece de forma más elegante.

Proposición 1.59. *Sea V_T la transformada de Cayley de un operador simétrico T definido en H. Se verifican:*

a) El operador T es cerrado si y solo si V_T es cerrado.

b) El operador $I - V_T$ es inyectivo, verifica que $\operatorname{Im}(I - V_T) = D_T$ y se puede escribir T como

$$T = i(I + V_T)(I - V_T)^{-1}. \qquad (1.31)$$

c) Si además T tiene dominio denso en H, el operador V_T es unitario si y solo si T es autoadjunto.

Recíprocamente, si V es una isometría en H e $I-V$ es inyectivo, entonces V es la transformada de Cayley de algún operador simétrico con dominio en H.

Demostración. a) Por la observación 1.49, tenemos que T es cerrado si y solo si $\mathrm{Im}(T+iI)$ es cerrado. Por el lema 1.58, V_T es cerrado si y solo si lo es D_{V_T}. Puesto que $D_{V_T} = \mathrm{Im}(T+iI)$, tenemos el resultado.

b) Por el teorema 1.48(b), el operador $T + iI$ es inyectivo. Por tanto, este operador es una biyección de D_T en $\mathrm{Im}(T + iI) = D_{V_T}$. Dado $z \in D_{V_T}$, existe un $x \in D_T$ que verifica que

$$z = Tx + ix \quad \text{y} \quad V_T z = Tx - ix.$$

Sumando y restando estas ecuaciones, podemos escribir

$$(I - V_T)z = 2ix, \quad (I + V_T)z = 2Tx$$

por lo que si $(I - V_T)z = 0$, ha de ser $x = 0$ y por tanto $I - V_T$ es inyectivo. También, vemos que $\mathrm{Im}(I - V_T) = D_T$. Así, $(I - V_T)^{-1}$ establece una biyección de D_T en D_{V_T} y tenemos que

$$2Tx = (I + V_T)z = (I + V_T)(I - V_T)^{-1}(2ix)$$

para todo $x \in D_T$, de donde se deduce (1.31).

c) Por el teorema 1.51, T es autoadjunto si y solo si $\mathrm{Im}(T - iI) = H$ y $\mathrm{Im}(T + iI) = H$. Puesto que $D_{V_T} = \mathrm{Im}(T + iI)$ y $\mathrm{Im}\, V_T = \mathrm{Im}(T - iI)$, la condición anterior se verifica si y solo si el operador isometría V_T es unitario (por el lema 1.31).

Por último, sea V una isometría en H e $I - V$ inyectivo. Entonces, $I - V$ establece una biyección entre D_V y $\mathrm{Im}(I - V)$ dada por

$$x = z - Vz,$$

donde $x \in \mathrm{Im}(I - V)$ y $z \in D_V$. Definimos el operador S en $D_S = \mathrm{Im}(I - V)$ como $S = i(I + V)(I - V)^{-1}$. Entonces, se tiene que

$$Sx = i(z + Vz) \quad \text{si } x = z - Vz. \tag{1.32}$$

Sean ahora $x, y \in D_S$. Podemos escribir $x = z - Vz$, $y = u - Vu$ para algunos $z, u \in D_V$. Puesto que V es una isometría, por el lema 1.58 tenemos que

$$\begin{aligned}\langle Sx, y\rangle &= i\langle z + Vz, u - Vu\rangle = i\langle z, u\rangle + i\langle Vz, u\rangle - i\langle z, Vu\rangle - i\langle Vz, Vu\rangle \\ &= i\langle Vz, u\rangle - i\langle z, Vu\rangle = \langle z - Vz, iu + iVu\rangle = \langle x, Sy\rangle.\end{aligned}$$

Por tanto, S es simétrico. Podemos reescribir (1.32) como

$$2iVz = Sx - ix, \quad 2iz = Sx + ix.$$

Así, tenemos que

$$V(Sx + ix) = Sx - ix$$

para todo $x \in D_S$ y $D_V = \mathrm{Im}(S + iI)$. Por tanto, V es la transformada de Cayley de S. □

Observación 1.60. El apartado (c) del resultado anterior, demostrado según [14], se puede generalizar para el caso de un operador simétrico con dominio no necesariamente denso, ver [13]. Para nuestros intereses, esta versión es suficiente.

Observación 1.61. De este resultado y de la definición de la transformada de Cayley, deducimos que si V_T y V_S son las transformadas de Cayley de operadores simétricos T y S, entonces $T \subset S$ si y solo si $V_T \subset V_S$. Así, la búsqueda de extensiones simétricas puede reducirse a buscar extensiones de isometrías.

Además, suponiendo que $D_T = \operatorname{Im}(I - V_T)$ es denso, toda extensión isométrica V de V_T verifica que $\operatorname{Im}(I - V)$ es denso. Por el lema 1.58, $I - V$ es inyectiva, y por la proposición anterior, V es la transformada de Cayley de un operador simétrico S. Además, S es una extensión simétrica de T por ser $V_T \subset V$, con lo que toda extensión isométrica de V_T da lugar a una extensión simétrica de T.

Definición 1.62. Sea T un operador simétrico cerrado con dominio denso en H. Se definen los *índices de defecto* n_- y n_+ como

$$n_- = \dim\big(\operatorname{Im}(T - iI)^\perp\big), \quad n_+ = \dim\big(\operatorname{Im}(T + iI)^\perp\big).$$

Pueden tomar valores naturales o infinito.

Observación 1.63. Por la proposición 1.42(a) y visto que para un operador simétrico con dominio denso se tiene que $(T \pm iI)^* = (T^* \mp iI)$ (lema 1.50), esta definición es equivalente a

$$n_- = \dim\big(\operatorname{Ker}(T^* + iI)\big), \quad n_+ = \dim\big(\operatorname{Ker}(T^* - iI)\big).$$

Teorema 1.64. *Sea T un operador simétrico cerrado con dominio denso en H con índices de defecto n_- y n_+. Se verifica que:*

a) El operador T es autoadjunto si y solo si $n_- = n_+ = 0$.

b) El operador T admite una extensión autoadjunta si y solo si $n_- = n_+$.

c) El operador T es simétrico maximal si y solo si al menos uno de sus índices de defecto es nulo.

Demostración. a) Supongamos que T es autoadjunto. Entonces, por el teorema 1.51, tenemos que $\operatorname{Im}(T \pm iI) = H$ y $H^\perp = \{0\}$, luego $n_- = n_+ = 0$.

Supongamos ahora que $n_- = n_+ = 0$. Entonces, $\operatorname{Im}(T + iI)$ y $\operatorname{Im}(T - iI)$ son densos. Por ser T cerrado, también lo son estos conjuntos (proposición 1.48(c)), luego $\operatorname{Im}(T \pm iI) = H$. Por el teorema 1.51, T es autoadjunto.

b) Seguimos la demostración de [9], con algunas modificaciones. Supongamos que T admite una extensión autoadjunta S. Entonces, $V_T \subset V_S$ con V_S unitario. Entonces, si $y \in H$, tenemos que

$$\begin{aligned} y \perp \operatorname{Im}(T + iI) &\iff \langle y, (T + iI)x\rangle = 0 \quad \forall x \in D_T \\ &\iff \langle V_S y, V_S(T + iI)x\rangle = 0 \quad \forall x \in D_T \\ &\iff \langle V_S y, (T - iI)x\rangle = 0 \quad \forall x \in D_T \\ &\iff V_S y \perp \operatorname{Im}(T - iI). \end{aligned}$$

Esto implica que $V_S(\operatorname{Im}(T+iI)^\perp) = \operatorname{Im}(T-iI)^\perp$. Puesto que V_S es una isometría biyectiva, tenemos que

$$\dim\big(\operatorname{Im}(T + iI)^\perp\big) = \dim\big(\operatorname{Im}(T - iI)^\perp\big)$$

y por tanto $n_+ = n_-$.

Recíprocamente, supongamos que $n_+ = n_-$. Buscamos construir un operador unitario V con $I - V$ inyectivo y que extienda a V_T. Entonces, existirá un operador S cuya transformada de Cayley sea V y $T \subset S$. Puesto que V será unitario, S será autoadjunto por la proposición 1.59 y tendremos el resultado. Veámoslo.

Dado que $n_+ = n_-$, existe una isometría sobreyectiva U de $\operatorname{Im}(T+iI)^\perp$ en $\operatorname{Im}(T-iI)^\perp$ (proposición B.21). Puesto que T es cerrado, también lo son $\operatorname{Im}(T \pm iI)$ (teorema 1.48(c)) y tenemos que

$$H = \operatorname{Im}(T+iI) \oplus \operatorname{Im}(T+iI)^\perp, \quad H = \operatorname{Im}(T-iI) \oplus \operatorname{Im}(T-iI)^\perp. \tag{1.33}$$

Definimos V en $\operatorname{Im}(T+iI)$ y $\operatorname{Im}(T+iI)^\perp$ como

$$V|_{\operatorname{Im}(T+iI)} = V_T, \quad V|_{\operatorname{Im}(T+iI)^\perp} = U.$$

y extendemos la definición a H por linealidad. Está bien definido: si tomamos $z \in H$, por (1.33) existen únicos $x \in \operatorname{Im}(T+iI)$, $y \in \operatorname{Im}(T+iI)^\perp$ tales que $z = x+y$. Entonces $Vz = V(x+y) = V_T x + Uy$. Además, por el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}\|Vz\|^2 &= \|Vx+Vy\|^2 = \|V_T x + Uy\|^2 \\ &= \|V_T x\|^2 + \|Uy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2 = \|z\|^2,\end{aligned}$$

ya que $V_T x \in \operatorname{Im}(T-iI)$ y $Uy \in \operatorname{Im}(T-iI)^\perp$. Por tanto, V es una isometría.

Veamos que su imagen es H. Sea $z \in H$. Por (1.33), existen únicos $x \in \operatorname{Im}(T-iI)$, $y \in \operatorname{Im}(T-iI)^\perp$ tales que $z = x+y$. Puesto que V_T es sobreyectiva, existe $u \in \operatorname{Im}(T+iI)$ tal que $x = V_T u$. Análogamente, existe $v \in \operatorname{Im}(T-iI)^\perp$ tal que $y = Uv$. Entonces,

$$V(u+v) = Vu + Vy = V_T u + Uy = x + y = z,$$

con lo que $z \in \operatorname{Im} V$ y por tanto $\operatorname{Im} V = H$. Por el lema 1.31, tenemos que la isometría V es un operador unitario. Evidentemente este operador es una extensión de V_T. Por último, $I - V$ es inyectivo por la observación 1.61, y tenemos el operador unitario que buscábamos.

c) Supongamos que $n_+ = 0$ (la prueba es análoga para $n_- = 0$). Entonces, $\operatorname{Im}(T+iI)^\perp = \{0\}$. Entonces, $\operatorname{Im}(T+iI)$ es denso en H, y como T es cerrado, tenemos que

$$\operatorname{Im}(T+iI) = \overline{\operatorname{Im}(T+iI)} = H.$$

Por el teorema 1.48(d), T es simétrico maximal.

Recíprocamente, supongamos que n_- y n_+ son no nulos. Entonces,

$$\dim\left(\operatorname{Im}(T \pm iI)^\perp\right) \geq 1.$$

Tomamos M, N subespacios unidimensionales de $\operatorname{Im}(T+iI)^\perp$ y $\operatorname{Im}(T-iI)^\perp$ respectivamente. Extendemos V_T por una isometría U definida como

$$U : \operatorname{Im}(T+iI) \oplus M \longrightarrow \operatorname{Im}(T-iI) \oplus N$$

y que verifique que U coincide con V_T en $D_{V_T} = \operatorname{Im}(T+iI)$. Así, por la observación 1.61, U es la transformada de Cayley de un operador simétrico S que extiende a T. El dominio de S es $D_S = \operatorname{Im}(I-U)$ y también tenemos $D_T = \operatorname{Im}(I - V_T)$ por la proposición 1.59. Si tomamos $x \in M$ no nulo, tenemos que $y = x - Ux \in D_S$. Si se tuviera también que $y \in D_T$, entonces habría un $z \in \operatorname{Im}(T+iI)$ tal que $y = z - V_T z = z - Uz$. Por ser $I - U$ inyectiva, tiene que ser $x = z$ pero $\operatorname{Im}(T+iI) \cap M = \{0\}$. Por tanto, $y \in D_S \setminus D_T$, luego S es una extensión propia de T y T no es simétrico maximal.

□

Ejemplo 1.65. Veamos un ejemplo de operador simétrico maximal no autoadjunto, que aparece en [13].

Sea V el operador traslación definido en ℓ^2 por $V(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$. Este operador es una isometría e $I - V$ es inyectivo:

$$(I - V)x = 0 \implies (x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \implies 0 = x_1 = x_2 = \dots \implies x = 0.$$

Entonces, existe un operador simétrico T cuya transformada de Cayley es V. Este operador tiene dominio $D_T = \operatorname{Im}(I - V) = \ell^2$: si $x \in \ell^2$, tomamos $y = (x_1, x_2 + x_1, x_3 + x_2, \dots)$ y tenemos $x = y - Vy$, con lo que $x \in \operatorname{Im}(I - V)$. Entonces, este operador es acotado y por tanto cerrado, y evidentemente su dominio es denso. Tenemos que $\operatorname{Im}(T - iI) = D_V = \ell^2$ y $\operatorname{Im}(T + iI) = \operatorname{Im} V$. Puesto que $(\operatorname{Im} V)^\perp = \{(\alpha, 0, 0, \dots) : \alpha \in \mathbb{C}\}$, tenemos que los índices de defecto de T son $n_- = 0$ y $n_+ = 1$. Por el teorema anterior, T es simétrico maximal pero no autoadjunto.

Veamos ahora otros dos ejemplos de [2], que además nos ayudarán a construir la prueba del siguiente resultado.

Ejemplo 1.66. Consideramos el dominio $D_A \subset L^2([0, \infty))$ formado por las funciones f absolutamente continuas en $[0, c]$ para todo $c > 0$ tales que $f(0) = 0$ y $f' \in L^2([0, \infty))$. Definimos en D_A el operador $Af = if'$. Este operador es de dominio denso, es cerrado, simétrico y tiene índices de defecto $n_+ = 0$ y $n_- = 1$. Por el teorema anterior, este operador es simétrico maximal pero no es autoadjunto. Veámoslo.

Sean $f \in L^2([0, \infty))$ y $\varepsilon > 0$. Como el conjunto de las funciones de soporte compacto infinitamente derivables $\mathcal{C}_c^\infty([0, \infty))$ es denso en $L^2([0, \infty))$ (proposición C.38), existe una función $g \in \mathcal{C}_c^\infty([0, \infty))$ tal que $\|f - g\|_2 < \varepsilon/2$.

Por ser g de soporte compacto, existe un intervalo $[0, M]$ con $0 < M$ que contiene al soporte. Sea $\delta > 0$ tal que $8\|g\|_\infty^2 \delta < \varepsilon$. Por el lema de Urysohn para funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ (proposición C.39), existe una función $\nu \in \mathcal{C}_c^\infty([0, \infty))$ tal que $0 \le \nu \le 1$, $\nu = 1$ en $[\delta, M]$ y cuyo soporte está contenido en $(0, M + 1)$. Tomando $h = \nu g$, tenemos que $h(0) = 0$, $h = g$ en $[\delta, M]$ y $\|h\|_\infty \le \|g\|_\infty$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|g - h\|_2^2 &= \int_0^\delta |g - h|^2 + \int_\delta^M |g - h|^2 + \int_M^\infty |g - h|^2 \\ &= \int_0^\delta |g - h|^2 \le \int_0^\delta \|g - h\|_\infty^2 \le \int_0^\delta (2\|g\|_\infty)^2 \le 4\|g\|_\infty^2 \delta < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|f - h\|_2 \le \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2 < \varepsilon,$$

luego el conjunto de las funciones de soporte compacto infinitamente derivables que se anulan en el 0 es denso en $L^2([0, \infty))$. Además, si h pertenece a este conjunto, es absolutamente continua en cualquier intervalo compacto por ser $\mathcal{C}^\infty$, y su derivada está en $\mathcal{C}_c^\infty([0, \infty)) \subset L^2([0, \infty))$. De esta manera, $h \in D_A$. Por tanto, este conjunto está contenido en D_A y D_A es denso.

Veamos ahora que A es cerrado. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de D_A tal que $f_n \to f$ y $Af_n \to g$. Sea

$$h(x) = -i \int_0^x g(t)dt, \quad x \in [0, \infty).$$

Entonces h es absolutamente continua en cualquier intervalo $[0, c]$. Además, si $x \in [0, c]$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - h(x)| &= \left| \int_0^x \left(f_n'(t) + ig(t) \right) dt \right| \le \int_0^x |f_n'(t) + ig(t)| dt \\ &\le \int_0^c |f_n'(t) + ig(t)| dt \le \|f_n' + ig\|_2 \|\chi_{[0,c]}\|_2 \\ &= \sqrt{c} \|f_n' + ig\|_2 = \sqrt{c} \|i(-if_n' + g)\|_2 = \sqrt{c} \|g - Af_n\|_2, \end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2([0,\infty))$. Por tanto f_n converge puntualmente a h en $[0,c]$ para todo $c>0$. Como $f_n \to f$ en $L^2([0,\infty))$, ha de ser $h=f$ casi siempre. Entonces, podemos suponer que

$$f(x) = -i\int_0^x g(t)dt$$

para todo $x \geq 0$. Por tanto, f es absolutamente continua en cualquier intervalo $[0,c]$. Además, $f(0)=0$ y $f' = -ig \in L^2([0,\infty))$, con lo que $f \in D_A$ y $Af = if' = g$, con lo que el operador A es cerrado.

Veamos que el dominio de A^* es $D \subset L^2([0,\infty))$ formado por las funciones f absolutamente continuas en $[0,c]$ para todo $c>0$ tales que $f' \in L^2([0,\infty))$. Sea $g \in D_{A^*}$ y definimos

$$\Phi(x) = \int_0^x A^*g, \quad x \in [0,\infty). \tag{1.34}$$

Esta función es absolutamente continua en $[0,c]$ para todo $c>0$ y se tiene que $\Phi'(x) = A^*g(x)$ casi siempre en $[0,\infty)$. Si tomamos $f \in D_A$, también la función $f\bar{\Phi}$ es absolutamente continua en $[0,c]$ para todo $c>0$, y se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\bar{\Phi}(x) = \lim_{x\to\infty}\int_0^x (f\bar{\Phi})' = \int_0^\infty (f\bar{\Phi})', \tag{1.35}$$

por el teorema de la convergencia dominada. Como $(f\bar{\Phi})'$ es integrable, $\lim_{x\to\infty} f(x)\bar{\Phi}(x)$ existe y es finito. Como $f\bar{\Phi}$ es integrable por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, ha de ser

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\bar{\Phi}(x) = 0.$$

Integrando por partes en un intervalo $[0,c]$, tenemos que

$$\int_0^c f\bar{\Phi}' = f(c)\bar{\Phi}(c) - f(0)\bar{\Phi}(0) - \int_0^c f'\bar{\Phi} = f(c)\bar{\Phi}(c) - \int_0^c f'\bar{\Phi}. \tag{1.36}$$

Sea $(c_n)_{n\in N}$ una sucesión tal que $c_n \to \infty$. Definimos

$$h_n = (f\bar{\Phi}')\big|_{[0,c_n]} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tenemos que $f\bar{\Phi}'$ es integrable, $|h_n(x)| \leq |f(x)\bar{\Phi}'(x)|$ y $h_n(x) \to f(x)\bar{\Phi}'(x)$ para todo $x \geq 0$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{c_n} f\bar{\Phi}' = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty h_n = \int_0^\infty f\bar{\Phi}'.$$

De la misma manera demostramos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{c_n} f'\bar{\Phi} = \int_0^\infty f'\bar{\Phi}.$$

Ahora, por el criterio secuencial para límites, de (1.36) obtenemos que

$$\int_0^\infty f\bar{\Phi}' = -\int_0^\infty f'\bar{\Phi}. \tag{1.37}$$

Entonces, resulta que

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, A^*g\rangle = \int_0^\infty f\overline{A^*g} = \int_0^\infty f\bar{\Phi}' = -\int_0^\infty f'\bar{\Phi} = i\langle Af, \Phi\rangle = \langle Af, -i\Phi\rangle.$$

Por tanto,

$$\langle Af, (g + i\Phi)\rangle = 0 \implies g + i\Phi \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}.$$

Dado que $\operatorname{Im} A = L^2([0,\infty))$, ha de ser $g = -i\Phi$. Por tanto, g es absolutamente continua en todo intervalo $[0,c]$ y $g' = -iA^*g \in L^2([0,\infty))$, por (1.34). Así, resulta que $g \in D$ y por tanto, $D_{A^*} \subset D$. Además, obtenemos que $A^*g = ig'$.

Ahora, sea $g \in D$. Con un razonamiento similar al anterior, podemos escribir, para todo $f \in D_A$,

$$\langle Af, g\rangle = \langle if', g\rangle = i\int_0^\infty f'\bar{g} = -i\int_0^\infty f\bar{g}' = \int_0^\infty f\overline{(ig')} = \langle f, ig'\rangle.$$

Por definición de D_{A^*}, resulta que $g \in D_{A^*}$. Así, tenemos la otra contención y concluimos que $D = D_{A^*}$.

Por otra parte, visto que $A^*g = ig'$ para todo $g \in D_{A^*}$ y que $D_A \subset D_{A^*}$, tenemos que el operador A es simétrico, pues $A \subset A^*$.

Con estas comprobaciones, llegamos a que, efectivamente, A es un operador simétrico cerrado con dominio denso. Estamos en posición de hablar de índices de defecto. Recordamos que se pueden expresar como

$$n_- = \dim\big(\operatorname{Ker}(A^* + iI)\big), \quad n_+ = \dim\big(\operatorname{Ker}(A^* - iI)\big).$$

Sea $f \in \operatorname{Ker}(A^* + iI)$. Esto equivale a que $A^*f + if = 0$, es decir, $f' = -f$. Resolviendo esta ecuación, ha de ser $f(x) = \alpha e^{-x}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. Estas funciones están en $L^2([0,\infty))$ y definen un subespacio unidimensional, con lo que $n_- = 1$.

Sea ahora $f \in \operatorname{Ker}(A^* - iI)$. Esto equivale a que $f' = f$. Resolviendo esta ecuación, ha de ser $f = \alpha e^x$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. Sin embargo, estas funciones no están en $L^2([0,\infty))$ si $\alpha \neq 0$ y por tanto no existen soluciones no nulas en este espacio. Ha de ser $f = 0$ y, con ello, $n_+ = 0$.

Ejemplo 1.67. Este ejemplo está relacionado con el anterior. Consideramos el dominio $D_B \subset L^2((-\infty,0])$ formado por las funciones f absolutamente continuas en $[c,0]$ para todo $c < 0$ tales que $f(0) = 0$ y $f' \in L^2((-\infty,0])$. Definimos en él el operador $Bf = if'$. Este operador es de dominio denso, es cerrado y simétrico. Esto se comprueba análogamente al ejemplo anterior, al igual que se verifica que su adjunto B^* tiene dominio $D_{B^*} \subset L^2((-\infty,0])$ formado por las funciones f absolutamente continuas en $[c,0]$ para todo $c < 0$ tales que $f' \in L^2((-\infty,0])$, y que está definido por $B^*f = if'$ para $f \in D_{B^*}$.

Razonando como en el ejemplo anterior, se obtiene que $n_- = 0$ y $n_- = 1$.

Proposición 1.68. *Si k, l son números naturales cualesquiera, existe un operador simétrico cerrado con dominio denso tal que sus índices de defecto son l y k.*

Demostración. Razonamos por inducción sobre $k + l$. Si $k = l = 0$, es el caso de un operador autoadjunto por el teorema 1.64, y ya hemos visto que existen operadores autoadjuntos. Supongamos que tenemos un operador T con índices de defecto k, l y veamos que existen operadores con índices $k+1$, l y también k, $l+1$. Visto esto, obtenemos el resultado por inducción.

Sea T un operador cerrado, simétrico, con dominio denso en un espacio de Hilbert H y tal que $n_+ = k$ y $n_- = l$. Primero, consideramos el operador S definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S\colon D_T \times D_A &\to H \times L^2([0,\infty)) \\ (f,g) &\mapsto (Tf, Ag) \end{aligned}$$

donde A es el operador del ejemplo 1.66 y $D_T \times D_A \subset H \times L^2([0,\infty))$. Por las propiedades del producto cartesiano, este operador es de dominio denso, es cerrado y es simétrico. Además, es sencillo comprobar que su operador adjunto es

$$\begin{aligned} S^*\colon D_{T^*} \times D_{A^*} &\to H \times L^2([0,\infty)) \\ (f,g) &\mapsto (T^*f, A^*g). \end{aligned}$$

Buscamos entonces los índices de defecto de S. Tenemos que $(f,g) \in \operatorname{Ker}(S^* - iI)$ si y solo si $S^*(f,g) - i(f,g) = 0$. Esto equivale a que $T^*f - if = 0$ y $A^*g - ig = 0$, es decir, $f \in \operatorname{Ker}(T^* - iI)$ y $g \in \operatorname{Ker}(A^* - iI)$. Por tanto, resulta que $\operatorname{Ker}(S^* - iI) = \operatorname{Ker}(T^* - iI) \times \operatorname{Ker}(A^* - iI)$. Lo mismo se deduce para $\operatorname{Ker}(S^* + iI)$. Entonces,

$$n_\pm^S = \dim\big(\operatorname{Ker}(S^* \mp iI)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(T^* \mp iI)\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(A^* \mp iI)\big) = n_\pm^T + n_\pm^A,$$

donde $n_\pm^S$, $n_\pm^T$, y $n_\pm^A$ denotan los índices de defecto de cada operador. Así,

$$\begin{aligned} n_+^S &= n_+^T + n_+^A = k + 0 = k, \\ n_-^S &= n_-^T + n_-^A = l + 1, \end{aligned}$$

y tenemos el operador que buscábamos.

Una construcción análoga usando el operador B del ejemplo 1.67 da lugar a un operador

$$\begin{aligned} R\colon D_T \times D_B &\to H \times L^2((-\infty, 0]) \\ (f,g) &\mapsto (Tf, Bg). \end{aligned}$$

De forma similar, se comprueba que este operador cumple las propiedades que queremos y que tiene índices de defecto $n_+ = k+1$ y $n_- = l$, con lo que concluimos el razonamiento. $\square$

Capítulo 2

Teoría espectral de operadores no acotados

Comenzamos dando algunas nociones de teoría espectral en espacios normados de dimensión no necesariamente finita [7, 16]. Suponemos que $E \neq \{0\}$ es un espacio normado complejo y $A : D_A \to E$ un operador lineal con dominio $D_A \subset E$.

Definición 2.1. Dado un operador A, definimos el *operador resolvente* $R_\lambda(A)$, o simplemente *resolvente*, como

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Escribiremos R_λ si no hay duda acerca del operador al que nos referimos.

La denominación de "resolvente" es apropiada, pues $R_\lambda(A)$ resuelve la ecuación $(A-\lambda I)x = y$ como $x = R_\lambda(A)y$, si existe. Las propiedades del operador resolvente, que evidentemente varían con λ, proporcionan información relevante en teoría espectral sobre el operador A. Observamos además que $D_{R_\lambda(A)} = \mathrm{Im}(A - \lambda I)$.

Definición 2.2. Decimos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *punto regular* de A si existe $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ y es un operador acotado y definido en un subconjunto denso de E.

El *conjunto resolvente* $\rho(A)$ de A es el conjunto de los puntos regulares de A. El complementario de este conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ se llama el *espectro* de A, y sus elementos $\lambda \in \sigma(A)$ se llaman *puntos espectrales* de A.

El conjunto $\sigma(A)$ se divide a su vez en tres componentes disjuntas:

- El *espectro puntual* $\sigma_p(A)$ es el conjunto de los $\lambda \in \sigma(A)$ tales que $R_\lambda(A)$ no existe. Si $\lambda \in \sigma_p(A)$, se dice que λ es un *autovalor* de A, y cada $x \in E$ no nulo tal que $(A-\lambda I)x = 0$ se llama *autovector* de A correspondiente a λ. Al subespacio de E que contiene al cero y a los autovectores correspondientes a un mismo λ, es decir, al núcleo de $A - \lambda I$, lo llamamos el *autoespacio* correspondiente a λ.
- El *espectro continuo* $\sigma_c(A)$ es el conjunto de los $\lambda \in \sigma(A)$ tales que $R_\lambda(A)$ existe y tiene dominio denso, pero no está acotado.
- El *espectro residual* $\sigma_r(A)$ es el conjunto de los $\lambda \in \sigma(A)$ tales que $R_\lambda(A)$ existe pero no tiene dominio denso (puede estar o no acotado).

Los conjuntos así definidos verifican que

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma(T) = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T). \tag{2.1}$$

Esta unión es disjunta, con lo que tenemos una partición de $\mathbb{C}$.

A diferencia del caso de dimensión finita, el espectro puede contener puntos espectrales que no son autovalores, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. Consideramos el operador V del ejemplo 1.65. Este operador está acotado: si tomamos $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$, tenemos que $Vx = (0, x_1, x_2, \dots)$ y

$$\|Vx\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = \|x\|^2.$$

El operador $R_0(V) = V^{-1} : \operatorname{Im} V \to \ell^2$ existe por ser V inyectivo y está dado por

$$V^{-1}(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Sin embargo, este operador no tiene dominio denso, pues $(\operatorname{Im} V)^{\perp} = \{(\alpha, 0, 0, \dots) : \alpha \in \mathbb{C}\}$. Por tanto, $\lambda = 0 \in \sigma(V)$. Sin embargo, no es un autovalor, pues $Vx = 0$ implica que $x = 0$ y el vector nulo no es un autovector.

Este hecho motiva la distinción entre espectro y conjunto de autovalores. Por otro lado, la distinción entre espectro continuo y espectro residual se debe a que el espectro residual de operadores autoadjuntos es vacío, como veremos en la proposición 2.19.

En el caso de dimensión arbitraria se sigue teniendo el siguiente resultado.

Proposición 2.4. *Sean $x_1, \dots, x_n$ autovectores de A correspondientes a autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Entonces, estos autovectores son linealmente independientes.*

Demostración. Si fueran linealmente dependientes, tomamos el primero que sea combinación lineal de los anteriores. Sea este $x_m = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{m-1} x_{m-1}$. Entonces

$$0 = (A - \lambda_m I)\, x_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \,(A - \lambda_m I)\, x_j = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \left(\lambda_j - \lambda_m\right) x_j,$$

lo cual implica que $\alpha_j \left(\lambda_j - \lambda_m\right) = 0$ con $1 \leq j \leq m-1$, por ser $\{x_1, \dots, x_{m-1}\}$ linealmente independientes. Como los autovalores son distintos, tenemos que $\alpha_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq m-1$ y así resulta $x_m = 0$. Esto es absurdo pues x_m es un autovector. □

Veamos un ejemplo de los conceptos que hemos visto.

Ejemplo 2.5. Sea H un espacio de Hilbert complejo separable de dimensión infinita, y tomamos una base ortonormal numerable $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H. Sea $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de escalares distintos de uno con $\lambda_n \to 1$.

Si $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n u_n$, definimos el operador $Ax = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \lambda_n u_n$. Vamos a hallar sus puntos regulares y su espectro.

En primer lugar, como $(A - \lambda_n I) u_n = 0$ y $u_n \neq 0$, tenemos que $A - \lambda_n I$ no es inyectivo y por tanto no existe $R_\lambda(A)$. Por tanto, $\lambda_n \in \sigma_p(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que $1 \in \sigma_c(A)$. Si $x \in H$ tal que $(A - I)x = 0$, entonces $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n (\lambda_n - 1) u_n = 0$ y por tanto $\alpha_n(\lambda_n - 1) = 0$ para todo $n \in N$. Como $\lambda_n \neq 1$, ha de ser $\alpha_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x = 0$. Por tanto $A - I$ es inyectivo y existe $R_1(A)$. Su dominio es denso pues es igual a H: si $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n u_n \in H$, tomamos $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\beta_n / (\lambda_n - 1)) u_n$ y tenemos que $(A - I)x = y$, con lo que $y \in \operatorname{Im} A$. Además, no está acotado, pues

$$\left\|(A - I)^{-1} u_n\right\| = \left\|\frac{1}{\lambda_n - 1} u_n\right\| = \left|\frac{1}{\lambda_n - 1}\right| \longrightarrow \infty,$$

mientras que $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $1 \in \sigma_c(A)$.

Supongamos ahora que $\lambda \neq \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \neq 1$, y veamos que $\lambda \in \rho(A)$. Al igual que antes, comprobamos que $A - \lambda I$ es inyectivo y por tanto existe $R_\lambda(A)$. Si $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n u_n \in H$, tomamos $x = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\beta_n/(\lambda_n - \lambda))u_n$ y tenemos que $(A - \lambda I)x = y$. Así, $y \in \operatorname{Im} A$ y por tanto el dominio del resolvente es H, y por ello, denso. Veamos que $R_\lambda(A)$ está acotado.

Tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Tomamos $0 < \varepsilon < |\lambda - 1|$ y tenemos que

$$|1-\lambda| = |1-\lambda_n+\lambda_n-\lambda| \leq |1-\lambda_n|+|\lambda_n-\lambda| \implies |\lambda_n-\lambda| \geq |1-\lambda|-|1-\lambda_n| > |1-\lambda|-\varepsilon > 0.$$

Si tomamos $M = \operatorname{ínf}\big(\{|\lambda_n - \lambda| : n \leq n_0\} \cup \{|1-\lambda| - \varepsilon\}\big)$, tenemos que $|\lambda_n - \lambda| \geq M > 0$. Por otro lado, si $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n u_n$, tenemos que $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2$ por ser $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal (identidad de Parseval, proposición B.18). Entonces,

$$\left\|(A-\lambda I)^{-1}x\right\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n - \lambda} u_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\alpha_n}{\lambda_n - \lambda}\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2}{M^2} = \frac{1}{M^2}\|x\|^2.$$

Por tanto, el operador resolvente existe, está acotado y tiene dominio denso, con lo que $\lambda \in \rho(A)$.

Por último, puesto que $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} \cup \{\lambda : \lambda \neq 1, \lambda \neq \lambda_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{C}$, tenemos que $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma_c(A) = \{1\}$ y $\rho(A) = \{\lambda : \lambda \neq 1, \lambda \neq \lambda_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$. Además, por (2.1), resulta que $\sigma_r(A) = \emptyset$.

2.1. Propiedades espectrales de operadores simétricos y autoadjuntos

Muchas de las propiedades del espectro de un operador acotado autoadjunto se conservan para el caso no acotado [7]. Vamos a ver sus generalizaciones.

Cabe destacar que el espectro deja de ser acotado. De hecho, puede ser todo $\mathbb{C}$, como veremos en el ejemplo 2.20.

De aquí en adelante consideramos operadores T en un espacio de Hilbert complejo H con dominio $D_T \subset H$.

Proposición 2.6. *Sea T un operador simétrico con dominio en H. Si tiene autovalores, entonces son reales. Además, los autovectores correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.*

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma_p(T)$ un autovalor y sea $x \in D_T$ un autovector correspondiente. Entonces $x \neq 0$ y $Tx = \lambda x$. Tenemos que $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ por la proposición 1.17, con lo que

$$\langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2 \in \mathbb{R}.$$

Puesto que $\|x\|^2 \neq 0$ y $\|x\|^2 \in \mathbb{R}$, tenemos que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sean ahora $\mu \neq \lambda$ otro autovalor de T y $y \in D_T$ un autovector correspondiente a μ. Entonces,

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Puesto que $\lambda \neq \mu$, ha de ser $\langle x, y\rangle = 0$, con lo que x e y son ortogonales. □

Ejemplo 2.7. El recíproco del resultado anterior no es cierto. Sea $T : H \times H \longrightarrow H \times H$ el operador dado por $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_2)$. Entonces sus autovalores son $\{1, 3\} \subset \mathbb{R}$. Si $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in H \times H$,

$$\begin{aligned}\langle T(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle &= \langle x_1,y_1\rangle + 2\langle x_2,y_1\rangle + 3\langle x_2,y_2\rangle,\\ \langle (x_1,x_2),T(y_1,y_2)\rangle &= \langle x_1,y_1\rangle + 2\langle x_1,y_2\rangle + 3\langle x_2,y_2\rangle.\end{aligned}$$

Basta tomar (x_1, x_2), (y_1, y_2) tales que $\langle x_1, y_2\rangle \neq \langle x_2, y_1\rangle$ para comprobar que T no es simétrico, a pesar de tener autovalores reales.

Proposición 2.8. *Sea T un operador cerrado con dominio denso en H. Entonces su espectro es cerrado.*

Demostración. Veamos que $\rho(T)$ es abierto y tendremos que $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ es cerrado. Si $\rho(T) = \emptyset$, entonces es abierto. Si $\rho(T) \neq \emptyset$, sea $\lambda_0 \in \rho(T)$.

Entonces, $T - \lambda_0 I$ es cerrado: sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $D_{T-\lambda_0 I} = D_T$ tal que $x_n \to x$ y $(T - \lambda_0 I)x_n \to y$. Tenemos que

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|(T - \lambda_0 I)x_n - (T - \lambda_0 I)x_m\| + |\lambda_0| \cdot \|x_n - x_m\|.$$

Por tanto, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, luego converge. Por ser T cerrado, se tiene que $x \in D_T = D_{T-\lambda_0 I}$ y $Tx_n \to Tx$. Entonces,

$$(T - \lambda_0 I)x_n = Tx_n - \lambda_0 x_n \longrightarrow Tx - \lambda_0 x = (T - \lambda_0 I)x,$$

por lo que $y = (T - \lambda_0 I)x$ y tenemos que $T - \lambda_0 I$ es cerrado.

Esto a su vez implica que $R_{\lambda_0} = (T - \lambda_0 I)^{-1}$ es cerrado: si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $D_{R_{\lambda_0}} = \mathrm{Im}(T - \lambda_0 I)$ tal que $y_n \to y$ y $R_{\lambda_0} y_n \to x$, entonces podemos escribir $y_n = (T - \lambda_0 I)x_n$ para algún $x_n \in D_{T-\lambda_0 I}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $(T - \lambda_0 I)x_n \to y$ y $x_n = R_{\lambda_0} y_n \to x$. Como $T - \lambda_0 I$ es cerrado, se deduce que $x \in D_{T-\lambda_0 I}$ y $(T - \lambda_0 I)x = y$, y obtenemos que $y \in \mathrm{Im}(T - \lambda_0 I) = D_{R_{\lambda_0}}$ e $y = (T - \lambda_0 I)^{-1}x = R_{\lambda_0} x$. Por tanto, R_{λ_0} es cerrado.

Además, como R_{λ_0} está acotado, su dominio es cerrado: si $x \in \overline{D_{R_{\lambda_0}}}$, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $D_{R_{\lambda_0}}$ tal que $x_n \to x$. Entonces

$$\|R_{\lambda_0} x_n - R_{\lambda_0} x_m\| \leq \|R_{\lambda_0}\| \cdot \|x_n - x_m\|$$

y $(R_{\lambda_0} x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $y \in H$. Como R_{λ_0} es cerrado, por definición se verifica que $x \in D_{R_{\lambda_0}}$.

De esta manera, como $D_{R_{\lambda_0}}$ es denso en H, obtenemos que $D_{R_{\lambda_0}} = \overline{D_{R_{\lambda_0}}} = H$. Por otro lado,

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I = (T - \lambda_0 I)\big(I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}\big) \tag{2.2}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea $S_\lambda = (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}$. Aplicando la serie de Neumann A.15, tenemos que $(I - S_\lambda)^{-1}$ existe cuando $\|S_\lambda\| < 1$, es decir, cuando se cumple que

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|}. \tag{2.3}$$

En esta situación, por (2.2), resulta que $T - \lambda I$ es invertible, su rango es H y

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} = [(T - \lambda_0 I)\,(I - S_\lambda)]^{-1} = (I - S_\lambda)^{-1}\,(T - \lambda_0 I)^{-1} = (I - S_\lambda)^{-1} R_{\lambda_0},$$

luego R_λ está definido en todo H y está acotado.

Tenemos entonces que (2.3) describe un entorno de λ_0 cuyos puntos pertenecen a $\rho(T)$, con lo que $\rho(T)$ es un conjunto abierto. □

Proposición 2.9. *Sea T un operador autoadjunto. Entonces, λ es autovalor de T si y solo si*

$$\overline{\mathrm{Im}(T - \lambda I)} \neq H.$$

Demostración. Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, existe $x \in D_T$ no nulo tal que $Tx = \lambda x$. Entonces,

$$\langle x, (T - \lambda I)y \rangle = \langle (T - \lambda I)x, y \rangle = 0 \ \forall y \in D(T).$$

Por tanto $x \in \mathrm{Im}(T - \lambda I)^\perp$, con lo que $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ no es denso en H.

Recíprocamente, si $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ no es denso en H, existe $x \in H$ no nulo tal que $x \in \mathrm{Im}(T-\lambda I)^{\perp}$. Entonces, $\langle x, (T-\lambda I)y\rangle = 0$ para todo $y \in D_T$ y

$$\langle x, Ty\rangle = \langle x, \lambda y\rangle = \langle \bar{\lambda} x, y\rangle, \text{ para todo } y \in D(T).$$

Tenemos pues que $x \in D_{T^*}$ y $T^*x = \bar{\lambda} x$. Como T es autoadjunto, $T = T^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ por la proposición anterior. Entonces, $\lambda = \bar{\lambda}$ y por tanto $Tx = \lambda x$, luego λ es un autovalor de T. $\square$

De esta demostración se deduce el siguiente resultado.

Proposición 2.10. *Si T es autoadjunto y λ un autovalor, el autoespacio correspondiente es $\mathrm{Im}(T-\lambda I)^{\perp}$.*

Vemos ahora una caracterización del conjunto resolvente de un operador.

Teorema 2.11. *Sea T un operador autoadjunto con dominio $D_T \subset H$. Entonces, $\lambda \in \rho(T)$ si y solo si existe $c > 0$ tal que para todo $x \in D_T$ se verifica que*

$$\|(T-\lambda I)x\| \geq c\|x\|. \tag{2.4}$$

Demostración. Supongamos que $\lambda \in \rho(T)$. Entonces, el resolvente $R_\lambda = (T-\lambda I)^{-1}$ existe, tiene dominio denso y está acotado. Pongamos $\|R_\lambda\| = k > 0$. Entonces,

$$\|x\| = \|R_\lambda(T-\lambda I)x\| \leq \|R_\lambda\|\,\|(T-\lambda I)x\| = k\,\|(T-\lambda I)x\|$$

para todo $x \in D_T$. Tomando $c = 1/k$, se deduce que $\|(T-\lambda I)x\| \geq c\|x\|$.

Recíprocamente, sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y supongamos que se verifica (2.4) para algún $c > 0$ y para todo $x \in D_T$. Vamos a comprobar que

a) $(T-\lambda I) : D_T \to \mathrm{Im}(T-\lambda I)$ es biyectivo;

b) $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ es denso en H;

c) $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ es cerrado.

Así, tendremos que el resolvente $R_\lambda = (T-\lambda I)^{-1}$ estará definido en todo H. Además, estará acotado: por (a), si $y \in H$, existe $x \in D_T$ con $x = R_\lambda y$. Entonces $y = (T-\lambda I)x$ y

$$\|R_\lambda y\| = \|x\| \leq \frac{1}{c}\,\|(T-\lambda I)x\| = \frac{1}{c}\|y\|,$$

y por tanto $\|R_\lambda\| \leq 1/c$. Así, tendremos que $\lambda \in \rho(T)$. Demostramos las afirmaciones anteriores:

a) Sea $x \in D_T$ tal que $(T-\lambda I)x = 0$. De (2.4) se deduce que

$$0 = \|(T-\lambda I)x\| \geq c\|x\|.$$

Puesto que $c > 0$, esto implica que $\|x\| = 0$. De esta manera, obtenemos que $x = 0$, luego el operador $(T-\lambda I) : D_T \to \mathrm{Im}(T-\lambda I)$ es inyectivo. Obviamente es sobreyectivo, luego es biyectivo.

b) Por el apartado anterior, tenemos que λ no es autovalor. Como T es autoadjunto, la proposición 2.9 implica que $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ es denso.

c) Sea $y \in \overline{\mathrm{Im}(T-\lambda I)}$. Existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ que tiende a y. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in D_T$ tal que $y_n = (T-\lambda I)x_n$. Por (2.4),

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c} \left\| (T-\lambda I)(x_n - x_m) \right\| = \frac{1}{c} \|y_n - y_m\| .$$

Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, esto implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sea x el límite de esta sucesión. Como T es autoadjunto, es cerrado por la proposición 1.36. Por tanto, $x \in D_T$ y $(T-\lambda I)x = y$, y tenemos que $y \in \mathrm{Im}(T-\lambda I)$. Concluimos que $\mathrm{Im}(T-\lambda I)$ es cerrado.

□

Vemos ahora una serie de lemas que servirán para demostrar el siguiente teorema importante.

Lema 2.12. *Sea T un operador simétrico cerrado de dominio denso y $\lambda = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Si $\mu \in \mathbb{C}$ es tal que $|\lambda - \mu| < |b|$, entonces*

$$\mathrm{Ker}(T^* - \mu I) \cap \mathrm{Ker}(T^* - \lambda I)^\perp = \{0\}.$$

Demostración. Supongamos que existe $y \in \mathrm{Ker}(T^* - \mu I) \cap \mathrm{Ker}(T^* - \lambda I)^\perp$ no nulo, que podemos suponer con norma unidad. Como $\mathrm{Im}(T - \bar{\lambda} I)$ es cerrado por la proposición 1.48(c), de la proposición 1.42(a) y del lema 1.50 se deduce que $\mathrm{Ker}(T^* - \lambda I)^\perp = \mathrm{Im}(T - \bar{\lambda} I)$. Entonces, existe $x \in H$ tal que $(T - \bar{\lambda} I)x = y$. Como $y \in \mathrm{Ker}(T^* - \mu I)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (T^* - \mu I)\, y, x \rangle = \langle y, (T - \bar{\mu} I)x \rangle = \langle y, (T - \big(\bar{\mu} + \bar{\lambda} - \bar{\lambda}\big) I)x \rangle \\ &= \langle y, (T - \bar{\lambda} I)x \rangle + (\lambda - \mu)\langle y, x \rangle = \|y\|^2 + (\lambda - \mu)\langle y, x \rangle. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$1 = \|y\|^2 = |\lambda - \mu| \cdot |\langle y, x \rangle| \leq |\lambda - \mu| \cdot \|x\|, \tag{2.5}$$

por la desigualdad de Schwarz. Por otro lado, al ser T simétrico, podemos aplicar la proposición 1.48(a) y obtener que

$$\|(T - \bar{\lambda} I)x\|^2 = b^2 \|x\|^2 + \|(T - aI)x\|^2 \geq b^2 \|x\|^2.$$

Entonces, $\|(T - \bar{\lambda} I)x\| \geq |b| \cdot \|x\|$ luego

$$1 = \|y\| = \|(T - \bar{\lambda} I)x\| \geq |b| \cdot \|x\|. \tag{2.6}$$

De (2.5) y (2.6) se deduce que

$$1 \leq |\lambda - \mu| \cdot |b|^{-1},$$

lo cual es absurdo pues $|\lambda - \mu| < |b|$ por hipótesis. Por tanto, $y = 0$ y tenemos el resultado. □

Lema 2.13. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H tales que $M \cap N^\perp = \{0\}$. Entonces* $\dim M \leq \dim N$.

Demostración. Sea $P : H \to H$ la proyección ortogonal sobre N y $T : M \to N$ su restricción a M. Si $x \in M$ y $Tx = 0$, entonces $x \in N^\perp$ y por tanto $x = 0$, con lo que T es inyectiva. Por tanto, $\dim M \leq \dim N$. □

Lema 2.14. *Sea T es un operador simétrico cerrado de dominio denso. Entonces la aplicación $\lambda \mapsto \dim \big(\mathrm{Ker}(T^* - \lambda I)\big)$ es constante en el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, \lambda > 0\}$.*

Demostración. Sea $\lambda = a + bi$ con $b > 0$ y $\mu \in \mathbb{C}$. De los lemas anteriores se deduce que

$$\dim \big(\operatorname{Ker} (T^* - \mu I) \big) \leq \dim \big(\operatorname{Ker} (T^* - \lambda I) \big) \tag{2.7}$$

si $|\lambda - \mu| < b$. Supongamos ahora que μ es tal que $|\lambda - \mu| < b/2$. Si $\operatorname{Im} \mu < b/2$, entonces

$$|\lambda - \mu| \geq |b - \operatorname{Im} \mu| = b - \operatorname{Im} \mu \geq b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2},$$

lo cual es absurdo. Ha de ser entonces $\operatorname{Im} \mu \geq b/2$ y por tanto $|\lambda - \mu| < b/2 \leq \operatorname{Im} \mu$. Entonces, también se tiene que

$$\dim \big(\operatorname{Ker} (T^* - \lambda I) \big) \leq \dim \big(\operatorname{Ker} (T^* - \mu I) \big)$$

y esta ecuación junto a (2.7) implica la igualdad.

Así, la función $\lambda \mapsto \dim \big(\operatorname{Ker}(T^* - \lambda I) \big)$ es localmente constante. Puesto que el semiplano superior es conexo, se tiene que esta función es constante en este conjunto. □

Teorema 2.15. *Sea T un operador simétrico cerrado de dominio denso en H. Entonces, se verfica una y solo una de las siguientes afirmaciones:*

a) $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

b) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$.

c) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda \leq 0\}$.

d) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\mathbb{C}_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} \lambda > 0\}$. Por el teorema 1.48, si $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$, entonces $T - \lambda I$ es inyectivo y su imagen es cerrada. Tenemos dos opciones:

- Si $\operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq H$, entonces R_λ no tiene dominio denso (si lo tuviera, sería todo H por ser $\operatorname{Im}(T - \lambda I)$ cerrado). Por tanto, $\lambda \in \sigma(T)$.

- Si $\operatorname{Im}(T - \lambda I) = H$, sean $y \in H$ y $x = R_\lambda y$. Por el teorema 1.48, si $\lambda = a + ib$, tenemos que $\|(T - \lambda I)x\| \geq |b| \cdot \|x\|$, luego

$$\frac{1}{|b|} \|y\| \geq \|R_\lambda y\|. \tag{2.8}$$

  Por tanto, R_λ está acotado y $\lambda \in \rho(T)$.

Puesto que $\operatorname{Ker} \big(T^* - \bar{\lambda} I\big) = \operatorname{Im}(T - \lambda I)^\perp$ por la proposición 1.42(a), tenemos que

$$\operatorname{Im}(T - \lambda I) = H \iff \operatorname{Im}(T - \lambda I)^\perp = \{0\} \iff \dim \big(\operatorname{Ker}(T^* - \lambda I) \big) = 0.$$

Por el lema anterior, si λ está en el conjunto resolvente (resp. espectro) de T y $\lambda \in \mathbb{C}_+$, entonces $\mathbb{C}_+$ está contenido en el conjunto resolvente (resp. espectro), y lo mismo ocurre para $\mathbb{C}_-$. Por tanto, cada semiplano abierto o bien está contenido en $\rho(T)$ o bien está contenido en $\sigma(T)$. Teniendo en cuenta que $\sigma(T)$ y $\rho(T)$ son disjuntos, y que $\sigma(T)$ es cerrado por la proposición 2.8, tenemos las siguientes opciones:

a) Si $\mathbb{C}_+ \subset \sigma(T)$ y $\mathbb{C}_- \subset \sigma(T)$, entonces $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

b) Si $\mathbb{C}_+ \subset \sigma(T)$ y $\mathbb{C}_- \subset \rho(T)$, entonces $\sigma(T) = \overline{\mathbb{C}_+} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$.

c) Si $\mathbb{C}_+ \subset \rho(T)$ y $\mathbb{C}_- \subset \sigma(T)$, entonces $\sigma(T) = \overline{\mathbb{C}_-} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda \leq 0\}$.

d) Si $\mathbb{C}_+ \subset \rho(T)$ y $\mathbb{C}_- \subset \rho(T)$, entonces $\sigma(T) \subset \mathbb{C} \setminus (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-) = \mathbb{R}$.

□

Proposición 2.16. *Si T es un operador simétrico cerrado con dominio denso, entonces T es autoadjunto si y solo si $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que T es autoadjunto y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Por el teorema 1.51 tenemos que $\mathrm{Im}(T - \lambda I) = H$. Por otro lado, $T - \lambda I$ es inyectivo y su imagen es cerrada por el teorema 1.48 y R_λ está acotado por el mismo razonamiento que lleva a (2.8). Por tanto, $\lambda \in \rho(T)$. Por el teorema anterior, ha de ser $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Como $\pm i \in \rho(T)$, tenemos que

$$\mathrm{Ker}\,(T^* \pm iI) = \mathrm{Im}(T \mp iI)^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

Por el teorema 1.51, T es autoadjunto. □

De esta proposición se deduce el siguiente resultado, según [11].

Corolario 2.17. *Sea T un operador simétrico cerrado. Si $\rho(T)$ contiene al menos un número real, entonces T es autoadjunto.*

Demostración. Puesto que $\rho(T)$ es un conjunto abierto, si λ es real y $\lambda \in \rho(T)$, entonces $\rho(T)$ contiene puntos en el semiplano superior y el semiplano inferior. Por el teorema 2.15 ha de tenerse que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, y por la proposición anterior, T es autoadjunto. □

Lema 2.18. *Sea T un operador con dominio denso en H. Si $\lambda \in \sigma_r(T)$, entonces $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.*

Demostración. Si $\lambda \in \sigma_r(T)$, entonces $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ no es denso. Por tanto,

$$\{0\} \neq \mathrm{Im}(T - \lambda I)^\perp = \mathrm{Ker}\left(T^* - \bar{\lambda} I\right).$$

Por tanto, $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. □

Proposición 2.19. *El espectro residual de un operador autoadjunto es vacío.*

Demostración. Sea T un operador autoadjunto y supongamos que $\sigma_r(T)$ es no vacío. Sea $\lambda \in \sigma_r(T)$. Por el lema anterior, tenemos que $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*) = \sigma_p(T)$. Puesto que el espectro de T es real por la proposición 2.16, tenemos que $\lambda = \bar{\lambda} \in \sigma_p(T)$. Esto es absurdo pues $\sigma_r(T)$ y $\sigma_p(T)$ son disjuntos. Entonces, $\sigma_r(T) = \emptyset$. □

Ejemplo 2.20. Vamos a hallar los espectros de los operadores T_1, T_2 y T_3 del ejemplo 1.24. Recordamos que sus dominios son

$$\begin{aligned}
D_{T_1} &= \left\{ f \in C([0,1]) : f \text{ absolutamente continua con derivada } f' \in L^2([0,1]) \right\};\\
D_{T_2} &= \left\{ f \in D_{T_1} : f(0) = f(1) \right\};\\
D_{T_3} &= \left\{ f \in D_{T_1} : f(0) = f(1) = 0 \right\};
\end{aligned}$$

y vienen dados por $T_k f = if'$ para $f \in D_{T_k}$, $k = 1, 2, 3$. Consideramos además el operador T_4 que actúa de la misma manera en el dominio $D_{T_4} = \left\{ f \in D_{T_1} : f(0) = 0 \right\}$, denso por estar D_{T_3} contenido en él.

En primer lugar, consideramos T_1 y veamos que $\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces es un autovalor si existe un $f \in D_{T_1}$ tal que

$$(T_1 - \lambda I) f = 0 \Longleftrightarrow if' = \lambda f.$$

Esta ecuación diferencial da lugar a la solución $f(x) = \alpha e^{-i\lambda x} \in D_{T_1}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, con lo que λ es un autovalor.

Antes de ver los demás casos, notamos que la resolvente $R_\lambda(T_k)$ está definida en $L^2([0,1])$ si para todo $g \in L^2([0,1])$ existe un único $f \in D_{T_k}$ tal que

$$(T_k - \lambda I)f = g, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Esto se traduce en la ecuación diferencial

$$if' - \lambda f = g, \tag{2.9}$$

sujeta a la condición de contorno que establece cada dominio D_{T_k}, distinta en cada caso. Primero resolvemos la ecuación general. Consideramos un factor integrante $e^{i\lambda x}$ y, haciendo algunas manipulaciones, obtenemos que

$$e^{i\lambda x} f'(x) + (i\lambda e^{i\lambda x}) f(x) = -ie^{i\lambda x} g(x),$$

que podemos escribir como

$$(e^{i\lambda x} f(x))' = -i\lambda e^{i\lambda x} g(x).$$

Integramos en el intervalo $[0, x]$ para obtener que

$$f(x) = e^{-i\lambda x} \int_0^x -ie^{i\lambda t} g(t)dt + f(0)e^{-i\lambda x}. \tag{2.10}$$

A partir de esta solución, donde $f(0)$ aún está por determinar, aplicamos las condiciones de contorno y obtenemos las soluciones en cada caso.

El operador T_2 exige aplicar la condición de contorno $f(0) = f(1)$. Llegamos a que

$$(1 - e^{-i\lambda}) f(0) = e^{-i\lambda} \int_0^1 -ie^{i\lambda t} g(t)dt.$$

Suponiendo de aquí en adelante que $(1 - e^{-i\lambda}) \neq 0$, es decir, $\lambda \notin \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$, y sustituyendo en (2.10), se tiene que

$$f(x) = e^{-i\lambda x} \left(\int_0^x -ie^{i\lambda t} g(t)dt + \frac{e^{-i\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}} \int_0^1 -ie^{i\lambda t} g(t)dt \right).$$

Entonces, tenemos que existe un único $f \in D_{T_2}$ tal que $R_\lambda(T_2)g = f$. Por tanto, $R_\lambda(T_2)$ está definido en $L^2([0,1])$. Este operador está acotado:

$$\begin{aligned}
\|R_\lambda(T_2)g\| &= \left\| e^{-i\lambda x} \left(\int_0^x -ie^{i\lambda t} g(t)dt + \frac{e^{-i\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}} \int_0^1 -ie^{i\lambda t} g(t)dt \right) \right\| \\
&\leq \|e^{-i\lambda x}\|_\infty \cdot \left\| \int_0^x |-ie^{i\lambda t} g(t)|dt + \left|\frac{e^{-i\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}}\right| \int_0^1 |-ie^{i\lambda t} g(t)|dt \right\| \\
&\leq \|e^{-i\lambda x}\|_\infty \cdot \left(\int_0^1 |-ie^{i\lambda t} g(t)|dt + \left|\frac{e^{-i\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}}\right| \int_0^1 |-ie^{i\lambda t} g(t)|dt \right) \\
&\leq \|e^{-i\lambda x}\|_\infty \cdot \left| 1 + \frac{e^{-i\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}} \right| \int_0^1 |-ie^{i\lambda t} g(t)|dt \\
&= \|e^{-i\lambda x}\|_\infty \cdot \left| 1 + \frac{e^{-i\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}} \right| \cdot \|-ie^{i\lambda x} g(x)\|_1 \\
&\leq \|e^{-i\lambda x}\|_\infty \cdot \left| 1 + \frac{e^{-i\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}} \right| \|e^{i\lambda x}\| \cdot \|g\|,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

donde en el último paso se aplica la desigualdad de Hölder. Por tanto, si $\lambda \notin \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$, entonces $\lambda \in \rho(T_2)$.

Por otro lado, la ecuación $if' = \lambda f$ tiene soluciones $f(x) = \alpha e^{-i\lambda x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $f \in D_{T_2}$, entonces $f(0) = f(1)$, lo cual ocurre si $1 = e^{-i\lambda}$, es decir, $\lambda \in \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. Así, tenemos que $\sigma_p(T_2) = \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. Determinamos entonces que $\rho(T_2) = \mathbb{C} \setminus \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$ y $\sigma(T_2) = \sigma_p(T_2) = \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.

En el caso del operador T_3, sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y tomamos $h(x) = \alpha e^{-i\bar{\lambda}x} \in L^2([0,1])$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrario. Entonces, si $f \in D_{T_3}$,

$$\begin{aligned}\langle (T_3 - \lambda I)f, h\rangle &= \int_0^1 (if' - \lambda f)\bar{h} = i\bar{\alpha}\int_0^1 f'(t)e^{i\lambda t}dt + i\bar{\alpha}\int_0^1 i\lambda e^{i\lambda t} f(t)dt \\ &= i\bar{\alpha}\int_0^1 f'(t)e^{i\lambda t}dt + i\Big(f(1)\bar{h}(1) - f(0)\bar{h}(0) - \bar{\alpha}\int_0^1 e^{i\lambda t} f'(t)dt\Big) = 0,\end{aligned}$$

pues $f(0) = f(1) = 0$. De esta manera, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ existe un subespacio unidimensional $\{\alpha e^{-i\bar{\lambda}t} : \alpha \in \mathbb{C}\}$ ortogonal a $\mathrm{Im}(T_3 - \lambda I)$. Entonces $R_\lambda(T_3)$ no puede tener dominio denso para ningún λ, luego $\sigma(T_3) = \mathbb{C}$. Además, la ecuación $if' = \lambda f$ con soluciones de la forma $f(x) = \alpha e^{-i\lambda x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, solamente admite la solución idénticamente nula tras aplicar las condiciones de contorno $f(0) = f(1) = 0$. Luego ningún $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor, es decir, $\sigma_p(T_3) = \emptyset$. Además, tenemos que $\sigma_r(T_3) = \sigma(T_3) = \mathbb{C}$.

Por último, consideramos T_4 y la ecuación (2.9). La solución (2.10) tras aplicar la condición de contorno $f(0) = 0$ se reduce a

$$f(x) = e^{-i\lambda x}\int_0^x -ie^{i\lambda t} g(t)dt.$$

Esta solución única indica que $R_\lambda(T_4)$ está definido en todo $L^2([0,1])$. De forma similar a (2.11), se comprueba que

$$\|R_\lambda(T_2)g\| \le \|e^{-i\lambda x}\|_\infty \cdot \|e^{i\lambda x}\| \cdot \|g\|.$$

Por tanto, $R_\lambda(T_4)$ está acotado para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y tenemos que $\rho(T_4) = \mathbb{C}$ y $\sigma(T_4) = \emptyset$.

Este ejemplo demuestra la dependencia del espectro con el dominio de un operador. Los operadores T_k solamente difieren en su dominio y sin embargo presentan espectros muy distintos. Además, observamos que una extensión de un operador no tiene por qué conservar el espectro: tenemos que $T_3 \subset T_4$, $\sigma(T_3) = \mathbb{C}$ y $\sigma(T_4) = \emptyset$. Veremos cómo se comportan los espectros bajo extensiones en la proposición 2.21.

Estos operadores ponen de manifiesto algunas diferencias con los operadores acotados en espacios de Hilbert complejos. En primer lugar, un operador autoadjunto no acotado puede tener espectro no acotado [7], como muestra T_2. Además, un operador acotado siempre tiene conjunto resolvente y espectro no vacíos [7], a diferencia del caso no acotado, como indican T_3 y T_4.

Por otro lado, el operador T_1 sirve para comprobar que el recíproco de la proposición 2.19 no es cierto: T_1 es un operador con espectro residual vacío (pues $\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}$) y sin embargo no es autoadjunto.

Proposición 2.21. *Sea $T : D_T \longrightarrow H$ un operador lineal y sea S una extensión de T. Entonces,*

a) $\sigma_p(T) \subset \sigma_p(S)$.

b) $\sigma_r(T) \supset \sigma_r(S)$.

c) $\sigma_c(T) \subset \sigma_c(S) \cup \sigma_p(S)$.

Demostración. a) Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, existe un $x \in D_T \subset D_S$ no nulo tal que $\lambda x = Tx = Sx$. Entonces, $\lambda \in \sigma_p(S)$.

b) Si $\lambda \in \sigma_r(S)$, entonces $R_\lambda(S)$ existe pero no tiene dominio denso. En primer lugar, $R_\lambda(T)$ existe pues como $S - \lambda I$ es inyectivo, también lo será $T - \lambda I$. En segundo lugar, puesto que $\mathrm{Im}(T - \lambda I) \subset \mathrm{Im}(S - \lambda I)$ y $\mathrm{Im}(S - \lambda I)$ no es denso, $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ tampoco es denso y $R_\lambda(T)$ no tiene dominio denso. Por tanto, $\lambda \in \sigma_r(T)$.

c) Sea $\lambda \in \sigma_c(T)$. Entonces $R_\lambda(T)$ existe, tiene dominio denso y no está acotado. Si no existe $R_\lambda(S)$, entonces $\lambda \in \sigma_p(S)$. Si existe $R_\lambda(S)$, entonces tiene dominio denso al serlo $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ y como $R_\lambda(T)$ no está acotado, tampoco lo está $R_\lambda(S)$, pues $(T - \lambda I)^{-1} \subset (S - \lambda I)^{-1}$. Por tanto, $\lambda \in \sigma_c(S)$.

$\square$

Ejemplo 2.22. El ejemplo anterior muestra que las contenciones pueden ser estrictas. En primer lugar, $T_2 \subset T_1$ y $\{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\} = \sigma_p(T_2) \subsetneq \sigma_p(T_1) = \mathbb{C}$. En segundo lugar, $T_3 \subset T_2$ y $\mathbb{C} = \sigma_r(T_3) \supsetneq \sigma_r(T_2) = \emptyset$. Por último, si tomamos T_1 y T_2 de nuevo, podemos observar que $\emptyset = \sigma_c(T_2) \subsetneq \sigma_p(T_1) = \mathbb{C}$, luego $\sigma_c(T_2) \subsetneq \sigma_c(T_1) \cup \sigma_p(T_1)$.

Definición 2.23. Sea $T : D_T \longrightarrow H$ un operador lineal. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *autovalor aproximado* de T si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de D_T tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(T - \lambda I)x_n \to 0$.

El conjunto de los autovalores aproximados es el *espectro puntual aproximado* y se denota por σ_{ap}.

Este concepto permite dar una definición equivalente a 2.2 que evita hablar del operador resolvente $R_\lambda(T)$.

Proposición 2.24. *Si T es un operador lineal con dominio en un espacio de Hilbert, se verifican las siguientes afirmaciones:*

a) $\lambda \in \rho(T)$ *si y solo si* $T - \lambda I$ *es inyectivo,* $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ *es denso y* $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$.

b) $\lambda \in \sigma_p(T)$ *si y solo si* $T - \lambda I$ *no es inyectivo. Además,* $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$.

c) $\lambda \in \sigma_c(T)$ *si y solo si* $T - \lambda I$ *es inyectivo,* $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ *es denso y* $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$.

d) $\lambda \in \sigma_r(T)$ *si y solo si* $T - \lambda I$ *es inyectivo y* $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ *no es denso (*λ *puede ser autovalor aproximado o no).*

Demostración. En primer lugar, observamos que la inyectividad de $T - \lambda I$ equivale a la existencia de R_λ. También, la densidad de $\mathrm{Im}(T - \lambda I) = D_{R_\lambda}$ equivale a que R_λ tenga dominio denso. Entonces, para probar las equivalencias necesitamos conocer qué ocurre con la acotación de R_λ en función de si λ es autovalor aproximado o no.

Observamos que las equivalencias en (b) y (d) son inmediatas tras la consideración anterior. Resta probar que $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$. Sea $\lambda \in \sigma_p(T)$ y sea x un autovector. Definimos

$$x_n = \frac{x}{\|x\|} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\|x_n\| = 1$ y $(T - \lambda I)x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$.

En lo que resta de demostración, supongamos que R_λ existe. Veamos que si $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, entonces R_λ no está acotado. Sea $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de D_T con $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(T - \lambda I)x_n \longrightarrow 0.$$

Sea $y_n = (T - \lambda I)x_n$. Entonces $\|y_n\| \to 0$ y cada y_n es no nulo por ser cada x_n no nulo y $T - \lambda I$ inyectivo. Definimos $z_n = y_n/\|y_n\|$. Entonces, $\|z_n\| = 1$ y

$$\|R_\lambda z_n\| = \frac{\|R_\lambda y_n\|}{\|y_n\|} = \frac{\|x_n\|}{\|y_n\|} = \frac{1}{\|y_n\|}.$$

Puesto que $\|y_n\| \to 0$, el conjunto $\{R_\lambda z_n : n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado, y por tanto R_λ no está acotado.

Por otro lado, supongamos que $\lambda \in \sigma_c(T)$. Entonces R_λ no está acotado y existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $D_{R_\lambda} = \mathrm{Im}(T - \lambda I)$ con $\|y_n\| = 1$ tal que

$$\|R_\lambda y_n\| \longrightarrow \infty.$$

Sea $x_n = R_\lambda y_n$ y $z_n = x_n/\|x_n\|$. Entonces, $\|z_n\| = 1$ y

$$\|(T - \lambda I)z_n\| = \frac{\|(T - \lambda I)x_n\|}{\|x_n\|} = \frac{\|y_n\|}{\|x_n\|} = \frac{1}{\|R_\lambda y_n\|} \longrightarrow 0.$$

Por tanto, $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$.

Hemos visto así que $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ implica R_λ no acotado y que $\sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Si R_λ existe y tiene dominio denso, y $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, tenemos que R_λ no está acotado y por tanto $\lambda \in \sigma_c(T)$. Teniendo en cuenta que $\sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$, esto demuestra (c).

Si $\lambda \in \rho(T)$, entonces R_λ está acotado, por lo que $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. Por otro lado, puesto que $\rho(T)$ y $\sigma_c(T)$ son disjuntos, si R_λ existe y tiene dominio denso, entonces o bien $\lambda \in \rho(T)$ o bien $\lambda \in \sigma_c(T)$. Si $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_c(T)$, y por tanto $\lambda \in \rho(T)$. Esto demuestra (a). □

De la primera afirmación se deduce el siguiente corolario.

Corolario 2.25. *El espectro aproximado $\sigma_{ap}(T)$ de un operador T está contenido en su espectro $\sigma(T)$.*

También se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.26. *El espectro de un operador autoadjunto T coincide con el conjunto de autovalores aproximados.*

Demostración. Por la proposición 2.19 tenemos que $\sigma_r(T) = \emptyset$. Entonces, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Por la proposición anterior, tenemos que $\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$. La contención contraria es consecuencia del corolario anterior. □

2.2. Teorema espectral de operadores unitarios

En esta sección probamos el teorema espectral de operadores unitarios que, mediante la transformada de Cayley, será fundamental a la hora de probar el teorema espectral de operadores autoadjuntos. Seguimos el enfoque de [16]. Denotamos la circunferencia unidad por $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Proposición 2.27. *Sea $U : H \longrightarrow H$ un operador unitario en un espacio de Hilbert complejo H. Entonces, $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$.*

Demostración. Tenemos que $U^{-1} = U^*$ y U es una isometría. Por tanto, $\|U\| = \|U^*\| = 1$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $|\lambda| < 1$, tenemos que $U - \lambda I = U(I - \lambda U^*)$ y $\|\lambda U^*\| < 1$. Por la serie de Neumann aplicada a λU^*, tenemos que $(I - \lambda U^*)^{-1}$ existe y está en $L(H)$, luego también existe $(U - \lambda I)^{-1} \in L(H)$. Por tanto, $\lambda \in \rho(T)$.

Si $|\lambda| > 1$, tenemos que $U - \lambda I = -\lambda(I - U/\lambda)$, y $\|U/\lambda\| < 1$. Por la serie de Neumann aplicada a U/λ, tenemos que $(I - U/\lambda)^{-1}$ existe y está en $L(H)$, luego también existe $(U - \lambda I)^{-1} \in L(H)$. Entonces, $\lambda \in \rho(T)$.

De esta manera, ha de tenerse $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$. □

Definición 2.28. Sea X un conjunto no vacío, Ω una σ-álgebra de subconjuntos de X y sea H un espacio de Hilbert. Una *medida espectral* en (X, Ω, H) es una aplicación $E : \Omega \longrightarrow L(H)$ que verifica que

a) $E(A)$ es una proyección ortogonal (definición B.27) para todo $A \in \Omega$.

b) $E(X) = I$ y $E(\emptyset) = 0$.

c) (Aditividad numerable) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ son disjuntos dos a dos, entonces

$$E\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} E\left(A_n\right)x \quad \text{para todo } x \in H.$$

d) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ para todos $A, B \in \Omega$.

Observación 2.29. Si $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, entonces $0 = E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta_2)E(\Delta_1)$. Por tanto, si $y_1 \in \operatorname{Im} E(\Delta_1),\ y_2 \in \operatorname{Im} E(\Delta_2)$ y $E(\Delta_1)x_1 = y_1,\ E(\Delta_2)x_2 = y_2$, se tiene que

$$\langle y_1, y_2\rangle = \langle E(\Delta_1)x_1, E(\Delta_2)x_2\rangle = \langle E(\Delta_2)E(\Delta_1)x_1, x_2\rangle = 0,$$

por ser autoadjuntas las proyecciones ortogonales (proposición B.28). Por tanto, las imágenes de $E(\Delta_1)$ y $E(\Delta_2)$ son ortogonales.

De la definición se deduce el siguiente resultado, cuya demostración encontramos en [2].

Proposición 2.30. *Sea E una medida espectral en (X, Ω, H) y sean $x, y \in H$. Entonces la aplicación $E_{x,y} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$E_{x,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, y\rangle$$

es una medida compleja en Ω. Además, la variación total de $E_{x,y}$ es $\|E_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Demostración. Si $x, y \in H$, $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ disjuntos dos a dos, tenemos que

$$E_{x,y}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n\Big) = \langle E\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n\Big)x, y\rangle = \langle \sum_{n\in\mathbb{N}} E\left(\Delta_n\right)x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} E_{x,y}\left(\Delta_n\right),$$

por continuidad del producto interno, luego $E_{x,y}$ es numerablemente aditiva. Por tanto, $E_{x,y}$ es una medida compleja.

Por otro lado, sea $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ una partición medible de X y sean $\alpha_j \in \mathbb{C}$ con $|\alpha_j| = 1$ tal que $|\langle E\left(\Delta_j\right)x, y\rangle| = \alpha_j \langle E\left(\Delta_j\right)x, y\rangle$ para $1 \leq j \leq n$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} |E_{x,y}(\Delta_j)| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle E(\Delta_j)x, y\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} E(\Delta_j)(\alpha_j x), y\rangle \leq \|\sum_{j=1}^{n} E\left(\Delta_j\right)(\alpha_j x)\| \cdot \|y\|,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Ahora, $\{E\left(\Delta_j\right)(\alpha_j x) : 1 \leq j \leq n\}$ es un conjunto de elementos de H ortogonales dos a dos, por la observación anterior. Entonces,

$$\|\sum_{j=1}^{n} E(\Delta_j)(\alpha_j x)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \|E\left(\Delta_j\right)x\|^2 = \|\sum_{j=1}^{n} E(\Delta_j)x\|^2 = \|E(\bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j)x\|^2 \leq \|x\|^2,$$

luego $\sum_{j=1}^{n} |E_{x,y}(\Delta_j)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Por definición de variación total (C.23), tenemos que

$$\|E_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

completando la demostración. $\square$

Observación 2.31. La medida $E_{x,x}$ es una medida positiva: si $\Delta \in \Omega$, por ser $E(\Delta)$ proyección ortogonal (autoadjunto e idempotente), tenemos que

$$E_{x,x}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, x\rangle = \langle E(\Delta)^2 x, x\rangle = \langle E(\Delta)x, E(\Delta)x\rangle = \|E(\Delta)x\|^2 \geq 0.$$

El próximo resultado, demostrado según [2], da sentido a la integral con respecto a una medida espectral.

Proposición 2.32. *Sea E una medida espectral en (X, Ω, H) y sea $\phi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función Ω-medible acotada. Entonces, existe un único operador $A \in L(H)$ tal que para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ partición de X con $\Delta_j \in \Omega$ tal que*

$$\sup\left\{\left|\phi(x) - \phi\left(x'\right)\right| : x, x' \in \Delta_k\right\} < \varepsilon, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{2.12}$$

se tiene que

$$\left\|A - \sum_{k=1}^{n} \phi\left(x_k\right) E\left(\Delta_k\right)\right\| < \varepsilon, \tag{2.13}$$

para todo $x_k \in \Delta_k$. Este operador se denomina integral de ϕ respecto de E *y se denota por $A = \int_X \phi dE$. Además, para $g, h \in H$,*

$$\langle Ag, h\rangle = \int_X \phi dE_{g,h}. \tag{2.14}$$

Demostración. Si ϕ es una función acotada, entonces es integrable con respecto de cualquier medida compleja. Entonces, definimos

$$B(g, h) = \int_X \phi dE_{g,h} \text{ para cada } g, h \in H.$$

Por la proposición precedente, B es una forma sesquilineal (definición B.29):

a) Es lineal en el primer argumento: si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $g_1, g_2, h \in H$, $\Delta \in \Omega$ entonces

$$\begin{aligned} E_{\alpha g_1 + \beta g_2, h}(\Delta) &= \langle E(\Delta)(\alpha g_1 + \beta g_2), h\rangle \\ &= \alpha\langle E(\Delta)g_1, h\rangle + \beta\langle E(\Delta)g_2, h\rangle = \alpha E_{g_1,h}(\Delta) + \beta E_{g_2,h}(\Delta), \end{aligned}$$

luego $E_{\alpha g_1+\beta g_2,h} = \alpha E_{g_1,h} + \beta E_{g_2,h}$ y

$$\begin{aligned} B(\alpha g_1 + \beta g_2, h) &= \int_X \phi dE_{\alpha g_1+\beta g_2,h} \\ &= \alpha \int_X \phi dE_{g_1,h} + \beta \int_X \phi dE_{g_2,h} = \alpha B(g_1, h) + \beta B(g_2, h), \end{aligned}$$

donde hemos usado la proposición C.21, por la cual la integral es lineal con respecto de la medida.

b) Es antilineal en el segundo argumento: si $\alpha, \beta \in C$, $g, h_1, h_2 \in H$, $\Delta \in \Omega$ entonces

$$\begin{aligned} E_{g,\alpha h_1+\beta h_2}(\Delta) &= \langle E(\Delta)g, \alpha h_1 + \beta h_2\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle E(\Delta)g, h_1\rangle + \bar{\beta}\langle E(\Delta)g, h_2\rangle = \bar{\alpha} E_{g,h_1}(\Delta) + \bar{\beta} E_{g,h_2}(\Delta), \end{aligned}$$

luego $E_{\alpha g_1+\beta g_2,h} = \bar{\alpha} E_{g,h_1} + \bar{\beta} E_{g,h_2}$ y

$$\begin{aligned} B(g, \alpha h_1 + \beta h_2) &= \int_X \phi dE_{g,\alpha h_1+\beta h_2} \\ &= \bar{\alpha} \int_X \phi dE_{g,h_1} + \bar{\beta} \int_X \phi dE_{g,h_2} = \bar{\alpha} B(g_1, h) + \bar{\beta} B(g_2, h). \end{aligned}$$

Además,

$$
\begin{aligned}
|B(g,h)| &= \left| \int_X \phi dE_{g,h} \right| \le \int_X |\phi| d|E_{g,h}| \le \|\phi\|_\infty \int_X d|E_{g,h}| \\
&= \|\phi\|_\infty |E_{g,h}|(X) \le \|\phi\|_\infty \cdot \|g\| \cdot \|h\| .
\end{aligned}
$$

Por el teorema de representación de Riesz para formas sesquilineales B.30, existe un único operador A tal que $B(g,h) = \langle Ag, h\rangle$ para todos $g, h \in H$. Así, queda probado (2.14).

Sea $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ una partición de Ω que verifique (2.12). Si $g, h \in H$ y $x_k \in \Delta_k$ para $1 \le k \le n$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\left| \langle Ag,h\rangle - \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) \langle E(\Delta_k) g, h\rangle \right| = \left| \int_X \phi dE_{g,h} - \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) E_{g,h}(\Delta_k) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k} \phi dE_{g,h} - \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) \int_{\Delta_k} dE_{g,h} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k} \big(\phi(x) - \phi(x_k)\big) dE_{g,h}(x) \right| \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k} |\phi(x) - \phi(x_k)| \, d|E_{g,h}|(x) \le \varepsilon \int_X d|E_{g,h}| = \varepsilon \|E_{g,h}\| \le \varepsilon \|g\| \|h\|.
\end{aligned}
$$

Por la proposición B.22, tenemos (2.13). Veamos que A es el único operador que satisface (2.13): si $B \in L(H)$ verifica (2.13), para cada $\varepsilon > 0$ consideramos una partición $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ de X que verifica (2.12). Si $x_k \in \Delta_k$, se tiene que

$$
\left\| B - \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) E(\Delta_k) \right\| < \varepsilon.
$$

Entonces,

$$
\|A - B\| \le \left\| A - \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) E(\Delta_k) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) E(\Delta_k) - B \right\| \le 2\varepsilon,
$$

luego $A = B$. □

Observación 2.33. Si ϕ es una aplicación medible y acotada, la existencia de particiones verificando (2.12) para cualquier $\varepsilon > 0$ se deduce de la aproximación de funciones medibles por funciones simples (consultar por ejemplo el teorema 2.10 de [3]).

La integral con respecto a una medida espectral así definida tiene las siguientes propiedades [2].

Proposición 2.34. *Sea E una medida espectral en (X, Ω, H) y sean $\phi, \psi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones Ω-medibles acotadas. Entonces, se verifican:*

a) La integral es lineal: dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$
\int_X (\alpha\phi + \beta\psi) dE = \alpha \int_X \phi dE + \beta \int_X \psi dE. \tag{2.15}
$$

b) La integral es multiplicativa:

$$
\int_X \phi\psi dE = \Big(\int_X \phi dE \Big) \cdot \Big(\int_X \psi dE \Big). \tag{2.16}
$$

c) Se tiene que

$$
\int_X \bar{\phi} dE = \Big(\int_X \phi dE \Big)^*. \tag{2.17}
$$

d) Para todo $g \in H$ se tiene que

$$\left\| \Big(\int_X \phi dE \Big) g \right\|^2 = \int_X |\phi|^2 dE_{g,g}. \tag{2.18}$$

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ una partición de X con $\Delta_j \in \Omega$ tal que

$$\sup\{|\omega(x) - \omega(x')| : x, x' \in \Delta_k\} < \varepsilon$$

para $\omega \in \{\phi, \psi, \phi\psi, \alpha\phi + \beta\psi, \bar{\phi}\}$ y $1 \leq k \leq n$. Puesto que ω es medible y acotada en todos los casos, tenemos que si $x_k \in \Delta_k$, $1 \leq k \leq n$,

$$\left\| \int_X \omega dE - \sum_{k=1}^{n} \omega\left(x_k\right) E\left(\Delta_k\right) \right\| < \varepsilon.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_X (\alpha\phi + \beta\psi) dE - \Big(\alpha \int_X \phi dE + \beta \int_X \psi dE \Big) \right\| \\
&\qquad \leq \left\| \int_X (\alpha\phi + \beta\psi) dE - \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha\phi(x_k) + \beta\psi(x_k) \big) E(\Delta_k) \right\| \\
&\qquad\quad + \left\| \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha\phi(x_k) + \beta\psi(x_k) \big) E(\Delta_k) - \Big(\alpha \int_X \phi dE + \beta \int_X \psi dE \Big) \right\| \\
&\qquad \leq \varepsilon + |\alpha| \left\| \sum_{k=1}^{n} (\phi(x_k) E(\Delta_k) - \int_X \phi dE \right\| + |\beta| \left\| \sum_{k=1}^{n} \psi(x_k) E(\Delta_k) - \int_X \psi dE \right\| \\
&\qquad \leq \varepsilon(1 + |\alpha| + |\beta|).
\end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, tenemos (2.15).

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_X \phi\psi dE - \Big(\int_X \phi dE \Big) \Big(\int_X \psi dE \Big) \right\| \\
&\qquad \leq \left\| \int_X \phi\psi dE - \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k)\psi(x_k) E(\Delta_k) \right\| \\
&\qquad\quad + \left\| \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k)\psi(x_k) E(\Delta_k) - \Big(\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) E(\Delta_i) \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j) E(\Delta_j) \Big) \right\| \\
&\qquad\quad + \left\| \Big(\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) E\left(\Delta_i\right) \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j) E(\Delta_j) \Big) - \Big(\int_X \phi dE \Big) \Big(\int_X \psi dE \Big) \right\|.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

El primer sumando es menor que ε por la proposición 2.32. Como $E(\Delta_i)E(\Delta_j) = E(\Delta_i \cap \Delta_j)$ y $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ es una partición, tenemos que

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) E(\Delta_i) \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j) E(\Delta_j) \Big) = \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k)\psi(x_k) E(\Delta_k),$$

y el segundo sumando de (2.19) se anula. Para el tercer sumando, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)E\left(\Delta_i\right)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\psi(x_j)E(\Delta_j)\Big)-\Big(\int_X\phi dE\Big)\Big(\int_X\psi dE\Big)\right\|\\
&\qquad\le\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)E\left(\Delta_i\right)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\psi(x_j)E(\Delta_j)\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)E(\Delta_i)\Big)\Big(\int_X\psi dE\Big)\right\|\\
&\qquad\quad+\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)E(\Delta_i)\Big)\Big(\int_X\psi dE\Big)-\Big(\int_X\phi dE\Big)\Big(\int_X\psi dE\Big)\right\|\\
&\qquad=\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)E(\Delta_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\psi(x_j)E(\Delta_j)-\int_X\psi dE\Big)\right\|\\
&\qquad\quad+\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)E(\Delta_i)-\int_X\phi dE\Big)\Big(\int_X\psi dE\Big)\right\|
\end{aligned}$$

Veamos qué ocurre con estos términos. Puesto que

$$\|\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)E(\Delta_i)g\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|\phi(x_i)E(\Delta_i)g\|^2\le\|\phi\|_\infty^2\sum_{i=1}^{n}\|E(\Delta_i)g\|^2\le\|\phi\|_\infty^2\|g\|^2,$$

para todo $g\in H$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)E(\Delta_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\psi(x_j)E(\Delta_j)-\int_X\psi dE\Big)\right\|\\
&\qquad\le\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)E(\Delta_i)\Big)\right\|\cdot\left\|\Big(\sum_{j=1}^{n}\psi(x_j)E(\Delta_j)-\int_X\psi dE\Big)\right\|\le\|\phi\|_\infty\varepsilon.
\end{aligned}$$

Además, como

$$|\langle\Big(\int_X\psi dE\Big)g,h\rangle|=\left|\int_X\psi dE_{g,h}\right|\le\|\psi\|_\infty\int_X d|E_{g,h}|\le\|\psi\|_\infty\cdot\|g\|\cdot\|h\|,$$

para todo $g,h\in H$, tras usar la proposición B.22, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)E(\Delta_i)-\int_X\phi dE\Big)\Big(\int_X\psi dE\Big)\right\|\\
&\qquad\le\left\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)E(\Delta_i)-\int_X\phi dE\Big)\right\|\cdot\left\|\Big(\int_X\psi dE\Big)\right\|\le\varepsilon\|\psi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Con estas consideraciones, (2.19) se reduce a que

$$\left\|\int_X\phi\psi dE-\Big(\int_X\phi dE\Big)\Big(\int_X\psi dE\Big)\right\|\le\varepsilon(1+\|\phi\|_\infty+\|\psi\|_\infty).$$

Como ε era arbitrario, se tiene (2.16).

Para el tercer apartado, puesto que

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\phi(x_k)E(\Delta_k)\Big)^*=\sum_{k=1}^{n}\bar{\phi}(x_k)E(\Delta_k)^*=\sum_{k=1}^{n}\bar{\phi}(x_k)E(\Delta_k)$$

por ser cada $E(\Delta_k)$ autoadjunto, tenemos que

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\int_X \phi dE\Big)^* - \int_X \bar{\phi} dE\Big\| &\le \Big\|\Big(\int_X \phi dE\Big)^* - \Big(\sum_{k=1}^n \phi(x_k)E(\Delta_k)\Big)^*\Big\| + \Big\|\sum_{k=1}^n \bar{\phi}(x_k)E(\Delta_k) - \int_X \bar{\phi} dE\Big\| \\ &= \Big\|\Big(\int_X \phi dE - \sum_{k=1}^n \phi(x_k)E(\Delta_k)\Big)^*\Big\| + \Big\|\sum_{k=1}^n \bar{\phi}(x_k)E(\Delta_k) - \int_X \bar{\phi} dE\Big\| \\ &= \Big\|\int_X \phi dE - \sum_{k=1}^n \phi(x_k)E(\Delta_k)\Big\| + \Big\|\sum_{k=1}^n \bar{\phi}(x_k)E(\Delta_k) - \int_X \bar{\phi} dE\Big\| \\ &\le 2\varepsilon,\end{aligned}$$

y se tiene (2.17).

Por último, por los apartados anteriores se tiene que

$$\Big(\int_X \phi dE\Big)^*\Big(\int_X \phi dE\Big) = \Big(\int_X \bar{\phi} dE\Big)\Big(\int_X \phi dE\Big) = \Big(\int_X \bar{\phi}\phi dE\Big) = \int_X |\phi|^2 dE.$$

Entonces, si $g \in H$,

$$\Big\|\Big(\int_X \phi dE\Big)g\Big\|^2 = \langle\Big(\int_X \phi dE\Big)^*\Big(\int_X \phi dE\Big)g, g\rangle = \langle\Big(\int_X |\phi|^2 dE\Big)g, g\rangle = \int_X |\phi|^2 dE_{g,g},$$

y queda probado (2.18). □

El siguiente resultado permite asociar a cada función continua un operador, con el objetivo de dar sentido a la expresión $g(T)$, si g es continua en $\mathbb{T}$ y $T \in L(H)$.

Proposición 2.35 (Cálculo funcional)**.** *Sea U un operador unitario en H. Entonces, existe un homomorfismo de álgebras $F : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to L(H)$ que verifica que $F(z) = U$ y $F(\overline{g}) = F(g)^*$ para cada $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Además, $\|F\| = 1$.*

Demostración. Sea U un operador unitario en H, y sea

$$\mathcal{P} = \{p : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : p(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n z^n,\ N_1 \in \mathbb{Z},\ N_2 \in \mathbb{Z}, N_1 \le N_2\}$$

el espacio de los polinomios trigonométricos con la norma del supremo. Se define en primer lugar $F : \mathcal{P} \to L(H)$ por

$$F(p) = p(U) = \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n U^n \quad \text{si } p(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n z^n.$$

Esta aplicación así definida tiene las siguientes propiedades:

a) F es lineal: si $p_1(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n z^n$, $p_2(z) = \sum_{n=M_1}^{M_2} b_n z^n$, y suponemos que $M_1 = N_1$ y $M_2 = N_2$, tenemos que

$$\begin{aligned}F(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)(U) &= \sum_{n=N_1}^{N_2} (\alpha_1 a_n + \alpha_2 b_n)U^n \\ &= \sum_{n=N_1}^{N_2} (\alpha_1 a_n U^n + \alpha_2 b_n U^n) = \alpha_1 p_1(U) + \alpha_2 p_2(U) = \alpha_1 F(p_1) + \alpha_2 F(p_2).\end{aligned}$$

Si $M_1 \neq N_1$ y $M_2 \neq N_2$, podemos tomar $K_1 = \min\{M_1, N_1\}$ y $K_2 = \max\{M_2, N_2\}$ y escribir $p_1(z) = \sum_{n=K_1}^{K_2} a_n z^n$, $p_1(z) = \sum_{n=K_1}^{K_2} b_n z^n$, donde los nuevos coeficientes que no estaban en los conjuntos de índices originales se toman como nulos.

b) F es multiplicativa, es decir, $F(p_1p_2) = F(p_1)F(p_2)$: al igual que antes, podemos suponer $p_1(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n z^n$, $p_2(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} b_n z^n$. Entonces,

$$F(p_1p_2) = F\Big(\sum_{n,k=N_1}^{N_2} a_n b_k z^{n+k} \Big) = \sum_{n,k=N_1}^{N_2} a_n b_k U^{n+k}$$
$$= \Big(\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n U^n \Big) \Big(\sum_{n=N_1}^{N_2} b_k U^k \Big) = F(p_1)F(p_2).$$

c) Se cumple que $\bar{p}(U) = p(U)^*$: en primer lugar, tenemos que $1 = |z|^2 = z\bar{z}$, por lo que $\bar{z} = z^{-1} \in \mathcal{P}$ y

$$I = F(1) = F(|z|^2) = F(z\bar{z}) = F(z)F(\bar{z}) = F(\bar{z})F(z).$$

Entonces $I = UF(\bar{z}) = F(\bar{z})U$, luego $F(\bar{z}) = U^{-1} = U^*$. Por tanto, si $p(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n z^n$, por linealidad y multiplicatividad de F,

$$\bar{p}(U) = F(\bar{p}) = F(\sum_{n=N_1}^{N_2} \bar{a}_n \bar{z}^n) = \sum_{n=N_1}^{N_2} \bar{a}_n F(\bar{z})^n = \sum_{n=N_1}^{N_2} \bar{a}_n (U^*)^n = \sum_{n=N_1}^{N_2} \bar{a}_n (U^n)^*.$$

Usando la proposición B.26, tenemos que

$$p(U)^* = \Big(\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n U^n \Big)^* = \sum_{n=N_1}^{N_2} \bar{a}_n (U^n)^*.$$

Entonces, $\bar{p}(U) = p(U)^*$.

d) Si $p(z) \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{T}$, entonces $\langle p(U)x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$:
Si $p \in \mathcal{P}$ es tal que $p(z) \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{T}$, por el teorema de Fejér-Riesz D.1, existe un polinomio $q \in \mathcal{P}$ tal que $p = |q|^2$. Por tanto,

$$\langle p(U)x, x \rangle = \langle (\bar{q}q)(U)x, x \rangle = \langle \bar{q}(U)q(U)x, x \rangle$$
$$= \langle q(U)^* q(U)x, x \rangle = \langle q(U)x, q(U)x \rangle = \|q(U)x\|^2 \geq 0.$$

e) La norma de F es 1: sea $p \in \mathcal{P}$ y tomamos $q(z) = \|p\|_\infty^2 - |p(z)|^2 \geq 0$. Entonces,

$$q(U) = \|p\|_\infty^2 I - p(U)^* p(U),$$

y por el punto anterior,

$$\|p\|_\infty^2 \cdot \|x\|^2 - \langle (p(U)^* p(U))\, x, x \rangle = \langle \big(\|p\|_\infty^2 I - p(U)^* p(U) \big)\, x, x \rangle \geq 0.$$

Entonces,

$$\|p(U)x\|^2 = \langle p(U)x, p(U)x \rangle = \langle p(U)^* p(U)x, x \rangle \leq \|p\|_\infty^2 \cdot \|x\|^2,$$

por lo que $\|p(U)x\| \leq \|p\|_\infty \cdot \|x\|$, luego $\|F(p)\| = \|p(U)\| \leq \|p\|_\infty$. Tenemos así que $\|F\| \leq 1$. Por otro lado, si tomamos $p(z) = 1$ para cada $z \in \mathbb{T}$, entonces $p(U) = I$ y se tiene que $\|F\| \geq \|p(U)\| / \|p\|_\infty = 1$.

Ahora, como F es acotada y $L(H)$ es un espacio de Banach, por el teorema A.16, F se extiende a $\overline{\mathcal{P}}$, es decir, al espacio $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ de las funciones continuas con la norma del supremo, y lo hace de forma lineal, continua y con la misma norma. Por continuidad, se mantienen las propiedades anteriores para F en $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. $\square$

Con esto, podemos enunciar y demostrar el resultado principal de esta sección. Consideramos la σ-álgebra $\mathcal{B}$ de Borel en $\mathbb{T}$.

Teorema 2.36 (espectral de operadores unitarios)**.** *Si U es un operador unitario en un espacio de Hilbert complejo H, entonces existe una única medida espectral E en $(\mathbb{T}, \mathcal{B}, H)$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que*

$$U^n = \int_{\mathbb{T}} z^n dE(z). \tag{2.20}$$

Demostración. Daremos la demostración en varios pasos.

1) Buscamos una familia de medidas $\{\mu_x : x \in H\}$ tal que

$$\langle U^n x, x\rangle = \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_x(z),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Sea $x \in H$ fijo. Definimos la sucesión

$$c_n(x) = \langle U^n x, x\rangle, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La medida espectral E que buscamos debe verificar que

$$U^n = \int_{\mathbb{T}} z^n dE(z)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, y en particular,

$$\langle U^n x, x\rangle = \int_{\mathbb{T}} z^n dE_{x,x}(z)$$

para todo $x \in H$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, la medida μ_x debe ser tal que

$$c_n(x) = \langle U^n x, x\rangle = \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_x(z). \tag{2.21}$$

Si $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=0}^{N} c_{j-k}(x)\lambda_j\overline{\lambda_k} &= \sum_{j,k=0}^{N} \langle U^{j-k}x, x\rangle\lambda_j\overline{\lambda_k} = \sum_{j,k=0}^{N} \langle \lambda_j U^j x, \lambda_k U^k x\rangle \\ &= \langle \sum_{j=0}^{N} \lambda_j U^j x, \sum_{k=0}^{N} \lambda_k U^k x\rangle = \Big\| \sum_{j=0}^{N} \lambda_j U^j x\Big\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Por el teorema de Herglotz D.15, la medida μ_x que verifica (2.21) existe y es única. Además, es una medida de Radon positiva. Tenemos entonces la familia de medidas que buscamos.

2) Buscamos una familia de medidas $\{\mu_{x,y} : x, y \in H\}$ tal que

$$\langle U^n x, y\rangle = \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_{x,y}(z),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned}\langle U^n x, y\rangle = &\frac{1}{4}\big(\langle U^n(x+y), x+y\rangle - \langle U^n(x-y), x-y\rangle\big) \\ &+ \frac{i}{4}\big(\langle U^n(x+iy), x+iy\rangle - \langle U^n(x-iy), x-iy\rangle\big),\end{aligned}$$

por lo que al definir

$$\mu_{x,y}(\Delta) = \frac{1}{4}\mu_{x+y}(\Delta) - \frac{1}{4}\mu_{x-y}(\Delta) + \frac{i}{4}\mu_{x+iy}(\Delta) - \frac{i}{4}\mu_{x-iy}(\Delta).$$

tenemos las medidas que buscamos, que además también son de Radon.

3) Fijado Δ de Borel en $\mathbb{T}$, $\mu_{x,y}(\Delta)$ es una forma sesquilineal con respecto de x, y.

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_{\alpha x_1+\beta x_2,y}(z) &= \langle U^n (\alpha x_1 + \beta x_2), y\rangle = \alpha\langle U^n x_1, y\rangle + \beta\langle U^n x_2, y\rangle \\ &= \alpha \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_{x_1,y}(z) + \beta \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_{x_2,y}(z) = \int_{\mathbb{T}} z^n d\left(\alpha\mu_{x_1,y}(z) + \beta\mu_{x_2,y}(z)\right),\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por linealidad, si f es un polinomio trigonométrico, tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu_{\alpha x_1+\beta x_2,y}(z) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\left(\alpha\mu_{x_1,y}(z) + \beta\mu_{x_2,y}(z)\right),$$

Por el teorema de aproximación de Weierstrass y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, la igualdad también es cierta para funciones continuas. Entonces, por el teorema de representación de Riesz para funcionales acotados C.33, se tiene que $\mu_{\alpha x_1+x_2,y} = \alpha\mu_{x_1,y} + \beta\mu_{x_2,y}$, luego $\mu_{\alpha x_1+x_2,y}(\Delta) = \alpha\mu_{x_1,y}(\Delta) + \beta\mu_{x_2,y}(\Delta)$.

Por otro lado, tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-n} d\mu_{x,y}(z) = \langle U^{-n}x, y\rangle = \langle x, U^n y\rangle = \overline{\langle U^n y, x\rangle} = \overline{\int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_{y,x}(z)} = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} d\overline{\mu_{y,x}(z)},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde hemos usado la proposición C.22 y que como $z \in \mathbb{T}$, se tiene $1 = |z|^n = \overline{z^n} z^n$ luego $\overline{z^n} = z^{-n}$. Entonces, se puede razonar análogamente a lo anterior y deducir que $\mu_{x,y}(\Delta) = \overline{\mu_{y,x}(\Delta)}$. De esta forma, tenemos que $\mu_{x,y}(\Delta)$ es una forma sesquilineal simétrica con respecto de x, y.

4) Por linealidad de la integral y del producto interno, se tiene que

$$\langle p(U)x, y\rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z) d\mu_{x,y}(z) \text{ para todo } x, y \in H.$$

Entonces, si F es la aplicación de la proposición 2.35,

$$\langle F(g)x, y\rangle = \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{x,y}(z), \tag{2.22}$$

para todo $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $x, y \in H$. En efecto, si $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, por el teorema de Stone-Weierstrass existe una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$ que converge uniformemente a g. Entonces, puesto que las integrales con respecto de medidas complejas son funcionales continuos (teorema C.33) y aplicando la continuidad del producto escalar, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle F(g)x, y\rangle &= \langle \lim_{n\to\infty} p_n(U)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle p_n(U)x, y\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} p_n(z) d\mu_{x,y}(z) = \int_{\mathbb{T}} \lim_{n\to\infty} p_n(z) d\mu_{x,y}(z) = \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{x,y}(z).\end{aligned}$$

5) Por el teorema de representación de Riesz para funcionales acotados C.33, tenemos que si $\ell_{\mu_{x,y}}(g) = \int_{\mathbb{T}} g d\mu_{x,y}$ para cada $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, entonces

$$\begin{aligned}\|\mu_{x,y}\| = \|\ell_{\mu_{x,y}}\| &= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}} g d\mu_{x,y}\right| : g \in C(\mathbb{T}), \|g\|_\infty \leq 1\right\} \\ &= \sup\{|\langle F(g)x, y\rangle| : g \in C(\mathbb{T}), \|g\|_\infty \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|F(g)\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| : g \in C(\mathbb{T}), \|g\|_\infty \leq 1\} \leq \|x\| \cdot \|y\|,\end{aligned} \tag{2.23}$$

ya que $\|F\| = 1$, por lo que $\|F(g)\| \leq 1$ cuando $\|g\|_\infty \leq 1$. Por tanto, $\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

6) Buscamos extender F al espacio $B(\mathbb{T})$ de las funciones complejas medibles Borel y acotadas en $\mathbb{T}$.

Fijamos $g \in B(\mathbb{T})$. Definimos

$$\beta_g(x, y) = \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{x,y}(z)$$

para cada $x, y \in H$. Al igual que en la demostración de la proposición 2.32, tenemos que β_g es una forma sesquilineal acotada con $\|\beta_g\| \leq \|g\|_\infty$. Por el teorema de representación de Riesz para formas sesquilineales B.30, existe un único operador $A_g \in L(H)$ tal que $\beta_g(x, y) = \langle A_g x, y\rangle$ y $\|A_g\| \leq \|g\|_\infty$.

Definimos ahora $\tilde{F} : B(\mathbb{T}) \to L(H)$ por $\tilde{F}(g) = A_g$ para cada $g \in B(\mathbb{T})$. Esta aplicación está bien definida, $\|\tilde{F}(g)\| \leq \|g\|_\infty$ y

$$\langle \tilde{F}(g)x, y\rangle = \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{x,y}(z) \text{ para todo } x, y \in H. \tag{2.24}$$

Comprobamos que $\tilde{F}$ es una extensión de F:

a) Por (2.22) y (2.24), se trata de una extensión.

b) Es sencillo comprobar que $\tilde{F}$ es lineal, y si $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}|\langle \tilde{F}(g)x, y\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{x,y}(z)\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} |g(z)| d|\mu_{x,y}(z)| \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{T}} d|\mu_{x,y}(z)| \leq \|g\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|,\end{aligned}$$

luego $\|\tilde{F}\| \leq 1$ por la proposición B.22, y al igual que en la proposición 2.35, tomando $g(z) = 1$ se comprueba que $\|\tilde{F}\| = 1$.

c) Se tiene que $\tilde{F}(\bar{g}) = \tilde{F}(g)^*$: para todo $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{F}(g)^* x, y\rangle = \langle A_g^* x, y\rangle = \overline{\langle A_g y, x\rangle} &= \overline{\int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{y,x}(z)} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \overline{g(z)} d\mu_{x,y}(z) = \langle A_{\bar{g}} x, y\rangle = \langle \tilde{F}(\bar{g})x, y\rangle\end{aligned}$$

d) $\tilde{F}$ es multiplicativa: partimos de la multiplicidad de F en $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Sean $x, y \in H$. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, para cada $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi f d\mu_{x,y} = \langle \tilde{F}(\varphi f)x, y\rangle = \langle \tilde{F}(f)\tilde{F}(\varphi)x, y\rangle = \langle \tilde{F}(\varphi)x, \tilde{F}(f)^* y\rangle = \int_{\mathbb{T}} \varphi d\mu_{x,\tilde{F}(f)^* y}.$$

Por el teorema de representación de Riesz para funcionales acotados C.33, esto implica que $f d\mu_{x,y} = d\mu_{x,\tilde{F}(f)^* y}$. Entonces, si $g \in B(\mathbb{T})$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} (fg)(z) d\mu_{x,y}(z) = \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{x,\tilde{F}(f)^* y}(z),$$

luego

$$\langle \tilde{F}(fg)x, y\rangle = \langle \tilde{F}(g)x, \tilde{F}(f)^* y\rangle = \langle \tilde{F}(f)\tilde{F}(g)x, y\rangle.$$

Tenemos así que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ y $g \in B(\mathbb{T})$, entonces $\tilde{F}(fg) = \tilde{F}(f)\tilde{F}(g)$. Como $\tilde{F}(f)\tilde{F}(g) = \tilde{F}(fg) = \tilde{F}(g)\tilde{F}(f)$, se tiene que

$$\langle \tilde{F}(fg)x, y\rangle = \langle \tilde{F}(f)\tilde{F}(g)x, y\rangle = \langle \tilde{F}(g)\tilde{F}(f)x, y\rangle = \langle \tilde{F}(f)x, \tilde{F}(g)^* y\rangle.$$

Esto implica que

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)g(z) d\mu_{x,y}(z) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu_{x,\tilde{F}(g)^* y}(z)$$

para todo $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ y $g \in B(\mathbb{T})$, por lo que $g d\mu_{x,y} = d\mu_{x,\tilde{F}(g)^* y}$ por el teorema C.33 ($g d\mu_{x,y}$ es una medida de Radon por serlo $\mu_{x,y}$ y ser g medible y acotada). Entonces, si $g, h \in B(\mathbb{T})$, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \tilde{F}\left(gh\right) x, y\rangle &= \int_{\mathbb{T}} \left(gh\right)(z) d\mu_{x,y}(z) = \int_{\mathbb{T}} h(z) d\mu_{x,\tilde{F}(g)^* y}(z) \\ &= \langle \tilde{F}(h)x, \tilde{F}(g)^* y\rangle = \langle \tilde{F}(g)\tilde{F}\left(h\right) x, y\rangle\end{aligned}$$

para todo $x, y \in H$, luego $\tilde{F}\left(gh\right) = \tilde{F}(g)\tilde{F}\left(h\right)$ y $\tilde{F}$ es multiplicativa.

7) Definimos para cada Δ de Borel en $\mathbb{T}$ el operador

$$E(\Delta) = \tilde{F}(\chi_\Delta) \in L(H),$$

donde χ_Δ es la función característica del conjunto Δ. De la definición tenemos que

$$\langle E(\Delta)x, y\rangle = \langle \tilde{F}(\chi_\Delta)x, y\rangle = \int_{\mathbb{T}} \chi_\Delta(z) d\mu_{x,y}(z) = \mu_{x,y}(\Delta).$$

Además, es una medida espectral en $\mathbb{T}$:

a) $E(\Delta)$ es una proyección ortogonal:

$$E(\Delta)^2 = \tilde{F}\left(\chi_\Delta\right)\tilde{F}\left(\chi_\Delta\right) = \tilde{F}\left(\chi_\Delta\chi_\Delta\right) = \tilde{F}\left(\chi_\Delta\right) = E(\Delta),$$

luego es idempotente. Por otro lado,

$$E(\Delta)^* = \tilde{F}\left(\chi_\Delta\right)^* = \tilde{F}\left(\overline{\chi_\Delta}\right) = \tilde{F}\left(\chi_\Delta\right) = E(\Delta)$$

luego es autoadjunto y por la proposición B.28, es una proyección ortogonal.

b) Se tiene que $E(\mathbb{T}) = \tilde{F}(\chi_{\mathbb{T}}) = \tilde{F}(1) = I$ y $E(\emptyset) = \tilde{F}(\chi_\emptyset) = \tilde{F}(0) = 0$.

c) Si $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}$,

$$E\left(\Delta_1 \cap \Delta_2\right) = \tilde{F}\left(\chi_{\Delta_1\cap\Delta_2}\right) = \tilde{F}\left(\chi_{\Delta_1}\chi_{\Delta_2}\right) = \tilde{F}\left(\chi_{\Delta_1}\right)\tilde{F}\left(\chi_{\Delta_2}\right) = E\left(\Delta_1\right)E\left(\Delta_2\right).$$

d) Sean $(\Delta_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ conjuntos disjuntos dos a dos. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{l} E(\Delta_j) = \sum_{j=1}^{l} \tilde{F}(\chi_{\Delta_j}) = \tilde{F}\Big(\sum_{j=1}^{l} \chi_{\Delta_j}\Big) = \tilde{F}\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^{l}\Delta_j}\right).$$

Definimos $H_n = \bigcup_{k>n} \Delta_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $x \in H$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Big\| E\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Delta_j\Big)x - \sum_{j=1}^{m} E(\Delta_j)x\Big\|^2 &= \Big\| \tilde{F}\Big(\chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Delta_j}\Big)x - \tilde{F}\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^{l}\Delta_j}\right)x\Big\|^2 \\ &= \|\tilde{F}(\chi_{H_m})x\|^2 = \|E(H_m)x\|^2 = \langle E(H_m)x, E(H_m)x\rangle = \langle E(H_m)x, x\rangle \\ &= \langle \tilde{F}(\chi_{H_m})x, x\rangle = \int_{\mathbb{T}} \chi_{H_m}(z) d\mu_{x,x}(z) = \mu_{x,x}(H_m) = \sum_{j>m} \mu_{x,x}(\Delta_j).\end{aligned}$$

Por la aditividad numerable de $\mu_{x,x}$, esta expresión tiende a cero cuando $m \to \infty$ y tenemos la aditividad numerable de E.

8) Por último, vemos que $\tilde{F}(g) = \int_{\mathbb{T}} g(z)dE(z)$ para todo $g \in B(\mathbb{T})$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ una partición de $\mathbb{T}$ de elementos de Ω tal que

$$\sup\left\{\left|g(x) - g(x')\right| : x, x' \in \Delta_k\right\} < \varepsilon, \quad 1 \le k \le n.$$

Entonces, para cualesquiera $x_k \in \Delta_k$, $1 \le k \le n$, tenemos que

$$\Big\| g - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\chi_{\Delta_k}\Big\|_\infty < \varepsilon.$$

Puesto que $\|\tilde{F}\| = 1$, se verifica que

$$\begin{aligned}\Big\|\tilde{F}(g) - \sum_{k=1}^{n} g(x_k) E(\Delta_k)\Big\| &= \Big\|\tilde{F}(g) - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\tilde{F}(\chi_{\Delta_k})\Big\| \\ &= \Big\|\tilde{F}\Big(g - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\chi_{\Delta_k}\Big)\Big\| \le \|\tilde{F}\| \cdot \Big\| g - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\chi_{\Delta_k}\Big\|_\infty < \varepsilon,\end{aligned}$$

luego, por la proposición 2.32, se tiene que

$$\tilde{F}(g) = \int_{\mathbb{T}} g(z)dE(z) \quad \text{para todo } g \in B(\mathbb{T}).$$

En particular, si $g(z) = z^n$, entonces $\tilde{F}(g) = U^n$, y concluimos que

$$U^n = \int_{\mathbb{T}} z^n dE(z).$$

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que existe otra medida espectral G en $(\mathbb{T}, \mathcal{B}, H)$ tal que $U^n = \int_{\mathbb{T}} z^n dG(z)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, si p es un polinomio, tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} p(z)dE(z) = \int_{\mathbb{T}} p(z)dG(z).$$

Por ser densos los polinomios en $\mathbb{T}$ por el teorema de Stone-Weierstrass y por ser la integral respecto de una medida compleja un funcional acotado (teorema C.33), se verifica que

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)dE_{x,y}(z) = \int_{\mathbb{T}} f(z)dG_{x,y}(z)$$

para cada f continua y cada $x, y \in H$. Aplicando de nuevo el mismo teorema, tenemos que $E_{x,y} = G_{x,y}$, luego la igualdad anterior también se verifica para cualquier f medible y acotada. Entonces, si $\Delta \in \mathcal{B}$, tomando $f = \chi_\Delta$ resulta que

$$\langle E(\Delta)x, y\rangle = E_{x,y}(\Delta) = \int_{\mathbb{T}} \chi_\Delta dE_{x,y} = \int_{\mathbb{T}} \chi_\Delta dG_{x,y} = G_{x,y}(\Delta) = \langle G(\Delta)x, y\rangle,$$

luego $E(\Delta) = G(\Delta)$ y se tiene la unicidad.

□

En la demostración anterior, el argumento que proporciona la unicidad se debe a [9], donde aparece de forma explícita.

Esta medida espectral encontrada verifica una propiedad adicional.

Proposición 2.37. *Si $U \in L(H)$ es un operador unitario y $A \in L(H)$ conmuta con U, es decir, $AU = UA$, entonces A conmuta con $E(\Delta)$ para todo Δ de Borel en $\mathbb{T}$. Además, $E_{Ax,y} = E_{x,A^*y}$.*

Demostración. Sean $x, y \in H$, y sea $\mu_{x,y}$ como en la demostración del teorema. Para cada $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{x,A^*y}(z) = \langle F(g)x, A^*y\rangle = \langle AF(g)x, y\rangle = \langle F(g)Ax, y\rangle = \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{Ax,y}(z).$$

Por ser μ_{x,A^*y} y $\mu_{Ax,y}$ medidas de Radon, por el teorema C.33 se tiene que $\mu_{x,A^*y} = \mu_{Ax,y}$. Entonces, si $\Delta \in \mathcal{B}$,

$$\langle AE(\Delta)x, y\rangle = \langle E(\Delta)x, A^*y\rangle = \mu_{x,A^*y}(\Delta) = \mu_{Ax,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)Ax, y\rangle.$$

Por tanto, $AE(\Delta) = E(\Delta)A$. Además,

$$E_{Ax,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)Ax, y\rangle = \langle AE(\Delta)x, y\rangle = \langle E(\Delta)x, A^*y\rangle = E_{x,A^*y}(\Delta),$$

luego $E_{Ax,y} = E_{x,A^*y}$. □

2.3. Teorema espectral de operadores autoadjuntos

Recordamos que la transformada de Cayley relaciona operadores simétricos con isometrías y operadores autoadjuntos con operadores unitarios (proposiciones 1.57 y 1.59). La inspiración para esta transformada fue la aplicación

$$t \mapsto \frac{t-i}{t+i},$$

una biyección entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T} \setminus \{1\}$. En vista de las propiedades espectrales, esta relación es más aparente pues el espectro de un operador unitario está contenido en $\mathbb{T}$ (proposición 2.27) y el de un operador autoadjunto está contenido en $\mathbb{R}$ (proposición 2.16).

Dado que esta aplicación no está acotada, parece conveniente extender la integral con respecto a una medida espectral al conjunto de las funciones medibles (no necesariamente acotadas). Seguimos el planteamiento de [13]. Para simplificar la lectura, dada una función medible acotada denotamos por $\psi(f)$ el operador dado por

$$\psi(f) = \int_X f dE$$

definido en la proposición 2.32.

Lema 2.38. *Sean X un conjunto no vacío, Ω una σ-álgebra de subconjuntos de X, H un espacio de Hilbert, E una medida espectral en (X, Ω, H) y $f : X \to \mathbb{C}$ una aplicación medible. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

a) El conjunto $D(f)$ definido como

$$D(f) = \left\{ x \in H : \int_X |f|^2 dE_{x,x} < \infty \right\}$$

es un subespacio denso de H.

b) Si $x, y \in H$, se tiene que

$$\int_X |f| d \left| E_{x,y} \right| \leq \|y\| \Big(\int_X |f|^2 dE_{x,x} \Big)^{1/2}. \tag{2.25}$$

c) Si f está acotada y $v = (\int_X f dE)z$, entonces

$$dE_{x,v} = \bar{f} dE_{x,z} \tag{2.26}$$

para cada $x, z \in H$.

Demostración. a) Sean $x, y \in D(f)$ y $\Delta \in \Omega$. Si $z = x + y$, entonces

$$\|E(\Delta)z\|^2 \leq \big(\|E(\Delta)x\| + \|E(\Delta)y\|\big)^2 \leq 2\|E(\Delta)x\|^2 + 2\|E(\Delta)y\|^2,$$

pues para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. Por tanto, teniendo en cuenta que $\|E(\Delta)x\|^2 = \langle E(\Delta)x, E(\Delta)x \rangle = \langle E(\Delta)x, x \rangle = E_{x,x}(\Delta)$ por ser $E(\Delta)$ autoadjunto e idempotente,

$$E_{z,z}(\Delta) \leq 2E_{x,x}(\Delta) + 2E_{y,y}(\Delta),$$

de donde se deduce que

$$\int_X |f|^2 dE_{z,z} \leq \int_X |f|^2 d(2E_{x,x} + 2E_{y,y}) = 2 \int_X |f|^2 dE_{x,x} + 2 \int_X |f|^2 dE_{y,y} < \infty,$$

luego $z \in D(f)$ y $D(f)$ es cerrado para la suma. Por otro lado, si $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$E_{\alpha x, \alpha x}(\Delta) = \langle E(\Delta)(\alpha x), \alpha x \rangle = |\alpha|^2 \langle E(\Delta)x, x \rangle = |\alpha|^2 E_{x,x}(\Delta),$$

por lo que

$$\int_X |f|^2 dE_{\alpha x, \alpha x} = \int_X |f|^2 d(|\alpha|^2 E_{x,x}) = |\alpha|^2 \int_X |f|^2 dE_{x,x} < \infty,$$

luego $\alpha x \in D(f)$ y $D(f)$ es cerrado para el producto por un escalar. Con esto, $D(f)$ es un subespacio de H.

Veamos que es denso. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea Δ_n el subconjunto de X donde $|f| < n$, que está en Ω. Si $x \in \operatorname{Im} E(\Delta_n)$, como $E(\Delta_n)$ es proyección, se tiene que

$$E(\Delta)x = E(\Delta)E(\Delta_n)x = E(\Delta \cap \Delta_n)x.$$

Por tanto, $E_{x,x}(\Delta) = E_{x,x}(\Delta \cap \Delta_n)$, con lo que

$$\int_X |f|^2 dE_{x,x} = \int_{\Delta_n} |f|^2 dE_{x,x} \leq n^2 \|x\|^2 < \infty.$$

Tenemos así que $\operatorname{Im} E(\Delta_n) \subset D(f)$. Sea $y \in H$. Puesto que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ y $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$, tomando $\Delta_0 = \emptyset$ tenemos que

$$\begin{aligned} y = E(X)y = E\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\Big)y &= \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n \setminus \Delta_{n-1})y \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} E(\Delta_j \setminus \Delta_{j-1})y = \lim_{n\to\infty} E(\Delta_n)y, \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$E(\Delta_n)y = E\Big(\bigcup_{j=1}^{n} (\Delta_j \setminus \Delta_{j-1})\Big)y = \sum_{j=1}^{n} E(\Delta_j \setminus \Delta_{j-1})y$$

por la aditividad numerable de la medida espectral. De esta forma, como $E(\Delta_n)y \in D(f)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $y = \lim_{n\to\infty} E(\Delta_n)y$, tenemos que $y \in \overline{D(f)}$, luego $H = \overline{D(f)}$ y $D(f)$ es denso.

b) Sean $x, y \in H$ y f una función medible acotada. Por la proposición C.4, existe una función medible α con $|\alpha| = 1$ tal que $f = \alpha|f|$, y por la proposición C.25, existe una función medible h con $|h| = 1$ tal que $dE_{x,y} = hd|dE_{x,y}|$. Así,

$$f dE_{x,y} = fhd|E_{x,y}| = \alpha|f|hd|E_{x,y}|.$$

Entonces, si $u = (\alpha h)^{-1}$, tenemos que $|u| = 1$ y

$$uf dE_{x,y} = |f| d\left|E_{x,y}\right|.$$

Entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\int_X |f| d|E_{x,y}| = \int_X uf dE_{x,y} = \langle \psi(uf)x, y\rangle \leq \|\psi(uf)x\|\|y\|. \tag{2.27}$$

Por la proposición 2.34, tenemos que

$$\|\psi(uf)x\|^2 = \int_X |uf|^2 dE_{x,x} = \int_X |f|^2 dE_{x,x}. \tag{2.28}$$

De (2.27) y (2.28) se deduce (2.25) para funciones medibles acotadas. Entonces, la desigualdad es válida para funciones simples y el argumento usual en teoría de la medida brinda la desigualdad para funciones medibles arbitrarias.

c) Sean $x, z \in H$, f una aplicación medible y acotada y tomamos $v = \Psi(f)z$. Por la proposición 2.34, dada una función g medible y acotada, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_X g dE_{x,v} &= \langle \psi(g)x, v\rangle = \langle \psi(g)x, \psi(f)z\rangle \\ &= \langle \psi(\bar{f})\psi(g)x, z\rangle = \langle \psi(\bar{f}g)x, z\rangle = \int_X g\bar{f} dE_{x,z}. \end{aligned}$$

En particular, esta igualdad es válida si g es una función característica y tenemos (2.26).

□

Observación 2.39. Si f es acotada,

$$\int_X |f|^2 dE_{x,x} \leq \|f\|_\infty^2 \int_X dE_{x,x} \leq \|f\|_\infty^2 \cdot \|x\|^2 < \infty \tag{2.29}$$

para todo $x \in H$. Entonces, $D(f) = H$.

Con esto, podemos proceder a definir la integral de una función medible no necesariamente acotada con respecto de una medida espectral.

Teorema 2.40. *Sea E una medida espectral en (X, Ω, H) y sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función Ω-medible. Entonces, existe un único operador cerrado $\Psi(f)$ con dominio $D_{\Psi(f)} = D(f)$ denso en H tal que*

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_X f dE_{x,y} \tag{2.30}$$

para todo $x \in D(f)$ e $y \in H$. Este operador se denomina integral de f respecto de E *y se denota por $\Psi(f) = \int_x f dE$.*

Este operador tiene las siguientes propiedades:

a) *Para todo $x \in D(f)$, se tiene que*

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \int_X |f|^2 dE_{x,x}. \tag{2.31}$$

b) *Si f, g son funciones medibles, entonces*

$$\Psi(f)\Psi(g) \subset \Psi(fg) \quad \text{y} \quad D_{\Psi(f)\Psi(g)} = D(g) \cap D(fg). \tag{2.32}$$

Así, $\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg)$ si y solo si $D(fg) \subset D(g)$.

c) *Para cada f medible, se tiene que $\Psi(f)^* = \Psi(\bar{f})$.*

Demostración. En primer lugar, observamos que si f es una función medible acotada, entonces

$$\langle \psi(f)x, y\rangle = \int_X f dE_{x,y} = \langle \Psi(f)x, y\rangle$$

para todos $x, y \in H$, luego $\psi(f) = \Psi(f)$. Por tanto, esta definición extiende la anterior, dada en la proposición 2.32.

Sean $x \in D(f)$ e $y \in H$. La aplicación definida por $B_x(y) = \int_X f dE_{x,y}$ es antilineal (se comprueba al igual que en la demostración de la proposición 2.32) y acotado por el lema anterior. Entonces $\bar{B}_x$ es un funcional lineal acotado y por el teorema de representación de Riesz, para cada $x \in D(f)$ existe un único $z \in H$ tal que $\langle y, z\rangle = \bar{B}_x(y)$ para todo $y \in H$, es decir, $\langle z, y\rangle = B_x(y)$.

Definimos entonces el operador $\Psi(f)$ como $\Psi(f)x = z$ para cada $x \in D(f)$, que efectivamente es lineal: si $x_1, x_2 \in D(f)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}\langle \Psi(f)(\alpha x_1 + \beta x_2), y\rangle &= \int_X f dE_{\alpha x_1 + \beta x_2, y} = \alpha \int_X f dE_{x_1,y} + \beta \int_X f dE_{x_2,y} \\ &= \alpha\langle \Psi(f)x_1, y\rangle + \beta\langle \Psi(f)x_2, y\rangle = \langle \alpha\Psi(f)x_1 + \beta\Psi(f)x_2, y\rangle,\end{aligned}$$

para todo $y \in H$, luego $\Psi(f)(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\Psi(f)x_1 + \beta\Psi(f)x_2$. Además, el operador $\Psi(f)$ verifica (2.30), su dominio es denso (lema anterior) y es único por la unicidad en el teorema de representación de Riesz.

Falta demostrar que es un operador cerrado, lo cual se deduce de (c) (que demostraremos a continuación), pues $\Psi(\bar{f})^* = \Psi(f)$ y los operadores adjuntos son cerrados (proposición 1.36).

Continuamos con las demás afirmaciones.

a) Por el lema anterior,

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \langle \Psi(f)x, \Psi(f)x\rangle = \int_X f dE_{x,\Psi(f)x} \le \|\Psi(f)x\| \Big(\int_X |f|^2 dE_{x,x}\Big)^{1/2},$$

luego

$$\|\Psi(f)x\|^2 \le \int_X |f|^2 dE_{x,x}. \tag{2.33}$$

Si tomamos $\phi_n = \chi_{\{t\in X:|f(t)|\le n\}}$ y definimos $f_n = f\phi_n$, tenemos que cada f_n está acotada, luego $D(f-f_n) = D(f)$: si $\int_X |f|^2 dE_{x,x} < \infty$, como $|f-f_n| < |f|$, también tenemos que $\int_X |f-f_n|^2 dE_{x,x} < \infty$. Recíprocamente, si $\int_X |f-f_n|^2 dE_{x,x} < \infty$, entonces

$$\int_X |f|^2 dE_{x,x} = \int_{\{t\in X:|f(t)|\le n\}} |f|^2 dE_{x,x} + \int_{\{t\in X:|f(t)|>n\}} |f-f_n|^2 dE_{x,x}.$$

El primer término es menor que infinito pues $|f|^2$ está acotada en $\{t \in X : |f(t)| \le n\}$, luego es integrable, y el segundo término es menor que infinito por hipótesis. Entonces, $\int_X |f|^2 dE_{x,x} < \infty$, por la proposición C.24.

Entonces, para cada $x \in D(f)$, $y \in H$, tenemos que

$$\langle \Psi(f-f_n)x, y\rangle = \int_X (f-f_n) dE_{x,y} = \int_X f dE_{x,y} - \int_X f_n dE_{x,y} \tag{2.34}$$

$$= \langle \Psi(f)x, y\rangle - \langle \Psi(f_n)x, y\rangle = \langle \Psi(f)x - \Psi(f_n)x, y\rangle, \tag{2.35}$$

luego $\Psi(f-f_n)x = \Psi(f)x - \Psi(f_n)x$ y por (2.33),

$$\|\Psi(f)x - \Psi(f_n)x\|^2 = \|\Psi(f-f_n)x\|^2 \le \int_X |f-f_n|^2 dE_{x,x}. \tag{2.36}$$

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que esta integral tiende a 0. Puesto que (2.31) se verifica para cada f_n (proposición 2.34), una nueva aplicación del teorema de la convergencia dominada demuestra que

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\Psi(f_n)x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n|^2 dE_{x,x} = \int_X |f|^2 dE_{x,x},$$

con lo que tenemos (a).

b) Supongamos primero que f es medible y acotada y g es medible. Entonces, $D(g) \subset D(fg)$. Sea $x \in D(g)$. Si $z \in H$ y $v = \Psi(\bar{f})z$, por el lema anterior y por la proposición 2.34,

$$\langle \Psi(f)\Psi(g)x, z\rangle = \langle \Psi(g)x, \Psi(f)^* z\rangle = \langle \Psi(g)x, \Psi(\bar{f})z\rangle$$

$$= \langle \Psi(g)x, v\rangle = \int_X g dE_{x,v} = \int_X fg E_{x,z} = \langle \Psi(fg)x, z\rangle.$$

Por tanto,

$$\Psi(f)\Psi(g)x = \Psi(fg)x. \tag{2.37}$$

Tomando $y = \Psi(g)x$, de (2.31) se deduce que

$$\int_X |f|^2 dE_{y,y} = \|\Psi(f)y\|^2 = \|\Psi(f)\Psi(g)x\|^2 = \|\Psi(fg)x\|^2 = \int_X |fg|^2 dE_{x,x}. \tag{2.38}$$

Como esta ecuación se verifica para toda función medible acotada f, también se tiene para cualquier función medible arbitraria f siguiendo el argumento usual. Puesto que $D_{\Psi(f)\Psi(g)}$ está formado por aquellos $x \in D(g)$ tales que $y \in D(f)$, y dado que por (2.38) tenemos que $y \in D(f)$ si y solo si $x \in D(fg)$, tenemos que

$$D_{\Psi(f)\Psi(g)} = D(g) \cap D(fg).$$

Sean $x \in D(g) \cap D(fg)$, $y = \Psi(g)x$, y definimos f_n como antes. Como $f_n \to f$ en $L^2(E_{y,y})$, por (2.36) tenemos que $\Psi(f)y = \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n)\, y$. De forma análoga, como $f_n g \to fg$ en $L^2(E_{x,x})$, el apartado anterior implica que $\Psi(fg)x = \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n g)\, x$. Entonces,

$$\Psi(f)\Psi(g)x = \Psi(f)y = \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n)y = \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n)\Psi(g)x = \lim_{n\to\infty} \Psi(f_n g)x = \Psi(fg)x,$$

donde hemos usado (2.37) con f_n en lugar de f. Así, queda probado (2.32). Entonces, es claro que la igualdad en (2.32) se cumple cuando $D(fg) \subset D(g)$, pues

$$D_{\Psi(fg)} = D(fg) = D(g) \cap D(fg) = D_{\Psi(f)\Psi(g)}.$$

c) Sean ahora $x \in D(f)$ e $y \in D(\bar{f}) = D(f)$. Por la proposición 2.34, $\Psi(f_n)^* = \Psi(\bar{f}_n)$ por ser cada f_n acotada. Entonces, por (2.36),

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)\, x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, \Psi(f_n)^*\, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, \Psi\left(\bar{f}_n\right) y\rangle = \langle x, \Psi(\bar{f})y\rangle.$$

Por tanto, $y \in D_{\Psi(f)^*}$ y

$$\Psi(\bar{f}) \subset \Psi(f)^*.$$

Para probar la extensión contraria, basta demostrar que todo $z \in D_{\Psi(f)^*}$ está en $D(f)$. Fijamos $z \in D_{\Psi(f)^*}$ y sea $v = \Psi(f)^* z$. Como $D(f\phi_n) \subset H = D(\phi_n)$, por el apartado anterior tenemos que

$$\Psi(f_n) = \Psi(f\phi_n) = \Psi(f)\Psi(\phi_n).$$

Por la proposición 2.34, $\Psi(\phi_n)^* = \Psi(\bar{\phi}_n) = \Psi(\phi_n)$, luego $\Psi(\phi_n)$ es autoadjunto. Por la proposición 1.12 y de nuevo utilizando que $\Psi(f_n)^* = \Psi(\bar{f}_n)$ por la proposición 2.34,

$$\Psi(\phi_n)\Psi(f)^* \subset \left(\Psi(f)\Psi(\phi_n)\right)^* = \Psi(f_n)^* = \Psi(\bar{f}_n),$$

luego $\Psi(\phi_n)v = \Psi(\bar{f}_n)z$. Por ser $|\phi_n| \le 1$, usando (2.31) resulta que

$$\begin{aligned}\int_X |f_n|^2\, dE_{z,z} = \int_X \left|\bar{f}_n\right|^2 dE_{z,z} &= \|\Psi(\bar{f}_n)z\|^2 \\ &= \|\Psi(\phi_n)v\|^2 = \int_X |\phi_n|^2\, dE_{v,v} \le E_{v,v}(X) < \infty\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de la convergencia monótona, se tiene que $|f|^2$ es integrable con respecto de $E_{z,z}$, luego $z \in D(f)$, completando la demostración.

□

Observación 2.41. Si f, g son funciones medibles, de forma similar a (2.34), se deduce que

$$\Psi(f) + \Psi(g) \subset \Psi(f+g),$$

y se da la igualdad cuando $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$. En particular, esto sucede cuando al menos una función está acotada.

El siguiente resultado es análogo al teorema del cambio de variable.

Proposición 2.42. *Sean X, X' conjuntos no vacíos, sean Ω, Ω' σ-álgebras de X y X' respectivamente, y sea E una medida espectral en (X, Ω, H). Sea también $\phi : X \to X'$ una aplicación biyectiva tal que $\phi^{-1}(\Delta') \in \Omega$ para cada $\Delta' \in \Omega'$.*

Entonces, la aplicación $E' : \Omega' \to L(H)$ dada por $E'(\Delta') = E(\phi^{-1}(\Delta'))$ para cada $\Delta' \in \Omega'$ es una medida espectral en (X', Ω', H) y

$$\int_{X'} f dE'_{x,y} = \int_X (f \circ \phi) dE_{x,y} \tag{2.39}$$

para cualquier $f : X' \to \mathbb{C}$ Ω'-medible tal que alguna de las integrales exista.

Demostración. En primer lugar, comprobamos que E' es una medida espectral:

a) Para cada $\Delta' \in \Omega'$, se tiene que $E'(\Delta') = E'(\phi^{-1}(\Delta'))$ es una proyección ortogonal.

b) Se tiene que $E'(X') = E(\phi^{-1}(X')) = E(X) = I$ y $E'(\emptyset) = E(\phi^{-1}(\emptyset)) = E(\emptyset) = 0$.

c) Si $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son conjuntos de Ω' en X' disjuntos dos a dos, entonces $(\phi^{-1}(A'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ son conjuntos de Ω disjuntos dos a dos, y tenemos que

$$\begin{aligned} E'\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\Big)x &= E\Big(\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\Big)\Big)x \\ &= E\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}(A'_n)\Big)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(\varphi^{-1}(A'_n))x = \sum_{n\in\mathbb{N}} E'(A'_n)x \end{aligned}$$

para todo $x \in H$, con lo que E' es numerablemente aditiva.

d) Si A', B' son conjuntos de Ω',

$$\begin{aligned} E'(A' \cap B') &= E(\varphi^{-1}(A' \cap B')) \\ &= E(\varphi^{-1}(A') \cap \varphi^{-1}(B')) = E(\varphi^{-1}(A'))E(\varphi^{-1}(B')) = E'(A')E'(B'). \end{aligned}$$

Por tanto, E' es una medida espectral.

Para demostrar (2.39), si $\Delta' \in \Omega'$, tenemos que

$$\int_{X'} \chi_{\Delta'} dE'_{x,y} = E'_{x,y}(\Delta') = E_{x,y}(\phi^{-1}(\Delta')) = \int_X \chi_{\phi^{-1}(\Delta')} dE_{x,y} = \int_X (\chi_{\Delta'} \circ \phi) dE_{x,y}.$$

Por la linealidad de la integral, (2.39) es válido para funciones simples. Con el argumento usual, se deduce la igualdad para funciones medibles. $\square$

Con este desarrollo, estamos en posición de demostrar el teorema que es objeto de esta sección.

Teorema 2.43 (espectral de operadores autoadjuntos)**.** *Sea $T : D_T \longrightarrow H$ un operador autoadjunto en H. Entonces existe una única medida espectral P en $\mathbb{R}$ tal que*

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP(\lambda).$$

Demostración. Sea $U = V_T = (T - iI)(T + iI)^{-1}$ la transformada de Cayley de T. Por la proposición 1.59, U es unitario, $I - U$ es inyectivo y

$$T = i(I + U)(I - U)^{-1}$$

con $D_T = \operatorname{Im}(I - U)$. Por el teorema espectral de operadores unitarios 2.36, existe una medida espectral E en $\mathbb{T}$ tal que

$$U = \int_{\mathbb{T}} z dE(z).$$

Puesto que $I - U$ es inyectivo, $1 \notin \sigma_p(U)$ y $E(\{1\}) = 0$. Si suponemos que $\operatorname{Im}\big(E(\{1\})\big) \neq \{0\}$, existe $x \neq 0$ tal que $x = E(\{1\})x$, por ser $E(\{1\})$ una proyección, luego $Ux = UE(\{1\})x$. Si $\tilde{F}$ es como en la demostración del teorema 2.36 y $g(z) = z\chi_{\{1\}}(z)$, entonces

$$\tilde{F}(g) = \tilde{F}(z)\tilde{F}(\chi_{\{1\}}(z)) = UE(\{1\}),$$

luego

$$Ux = UE(\{1\})x = \tilde{F}(g)x = \int_{\mathbb{T}} z\chi_{\{1\}}(z)dE(z)x = 1 \cdot E(\{1\})x = x,$$

ya que $z\chi_{\{1\}}(z) = \chi_{\{1\}}(z)$. Esto contradice la inyectividad de $I - U$. Llegado al absurdo, tenemos que $E(\{1\}) = 0$. Entonces, si denotamos $X = \mathbb{T} \setminus \{1\}$, se tiene que

$$U = \int_{\mathbb{T}} zdE(z) = \int_X zdE(z), \tag{2.40}$$

y para cada $x, y \in H$ se verifica que

$$\langle Ux, y\rangle = \int_X zdE_{x,y}(z). \tag{2.41}$$

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por $f(z) = i \cdot \frac{1+z}{1-z}$ para cada $z \in X$, y sea $\Psi(f) = \int_X fdE$. Por ser f real, el operador $\Psi(f)$ es autoadjunto (teorema 2.40(c)), y como $f(z)(1-z) = i(1+z)$, el mismo teorema implica que

$$\Psi(f)(I - U) = \Psi(f)\Psi(1 - z) = \Psi(f(z)(1 - z)) = \Psi(i(1 + z)) = i(I + U). \tag{2.42}$$

Además, (2.42) implica que $\mathrm{Im}(I - U) \subset D_{\Psi(f)}$. Por la proposición 1.59,

$$T(I - U) = i(I + U), \tag{2.43}$$

y $D_T = \mathrm{Im}(I - U) \subset D_{\Psi(f)}$. Entonces, de (2.42) y (2.43) se deduce que $\Psi(f)$ es una extensión autoadjunta del operador autoadjunto T, y por la proposición 1.22, se tiene que $T = \Psi(f)$. De esta manera,

$$\langle Tx, y\rangle = \int_X fdE_{x,y}$$

para cada $x \in D_T$, $y \in H$.

Ahora, definimos P como $P(\Delta) = E(f^{-1}(\Delta))$ para cada conjunto Δ de Borel en $\mathbb{R}$. Por ser f biyectiva, continua y con inversa continua, podemos aplicar la proposición 2.42 para obtener que P es una medida espectral y que

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle = \langle \Psi(f)x, y\rangle &= \int_X f(z)dE_{x,y}(z) \\ &= \int_X \big(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f\big)(z)dE_{x,y}(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\lambda)dP_{x,y}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP_{x,y}(\lambda)\end{aligned}$$

para cada $x \in D_T,\ y \in H$, donde $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la identidad. Por el teorema 2.40, podemos entonces escribir que

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP(\lambda).$$

Procedemos de forma inversa, desde el operador T al operador U, y usaremos la unicidad de la medida espectral para U dada por el teorema 2.36.

Sea P' una medida espectral que verifique que

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP'(\lambda).$$

Si $g = f^{-1}$, definimos $\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}} gdP'$. Entonces $g(\lambda)(\lambda + i) = (\lambda - i)$, y por el teorema 2.40, tenemos que

$$\Phi(g)(T + iI) = (T - iI)$$

y $\operatorname{Im}(T+iI) \subset D_{\Phi(g)}$. Por la definición de U, tenemos que

$$U(T+iI) = (T-iI),$$

luego $D_U = \operatorname{Im}(T+iI) \subset D_{\Phi(g)}$. Entonces, $U \subset \Phi(g)$ pero U es unitario por ser T autoadjunto (proposición 1.59), luego $D_U = H$ y $U = \Phi(g)$. Por tanto,

$$U = \Phi(g) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) dP'(\lambda).$$

Por la proposición 2.42, si $Q(\Delta) = P'(g^{-1}(\Delta))$ para cada Δ de Borel en $\mathbb{R}$, entonces

$$U = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) dP'(\lambda) = \int_X z dQ(z) = \int_{\mathbb{T}} z dQ_0(z),$$

extendiendo Q a $\mathbb{T}$ mediante $Q_0(A) = Q(A \setminus \{1\})$ para cada A de Borel en $\mathbb{T}$. Por la unicidad en el teorema 2.36, ha de ser $Q_0 = E$, luego $Q(A) = E(A)$ para cada A de Borel en X (recordamos que $E(\{1\}) = 0$). Entonces, si Δ es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$,

$$P'(\Delta) = Q(g(\Delta)) = E(g(\Delta)) = E(f^{-1}(\Delta)) = P(\Delta).$$

Tenemos así la unicidad de la medida espectral requerida. $\square$

El argumento de unicidad en la demostración se ha seguido según [9], donde los detalles se tratan cuidadosamente.

2.4. El operador multiplicación

Esta breve sección está dedicada a un operador importante en mecánica cuántica: el operador multiplicación por la variable independiente [7]. Vemos algunas propiedades y también la medida espectral asociada al operador por el teorema espectral.

Definición 2.44. El *operador multiplicación* M es el operador con dominio

$$D_M = \{x \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} t^2 |x(t)|^2 dt < \infty\}$$

dado por $Mx(t) = tx(t)$.

El dominio D_M es denso por contener a las funciones $\mathcal{C}_c^\infty$, conjunto denso en $L^2(\mathbb{R})$. Además, este operador no está acotado: tomando

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \leq t < n+1 \\ 0 & \text{resto,} \end{cases}$$

entonces $\|x_n\| = 1$ y

$$\|Mx_n\|^2 = \int_n^{n+1} t^2 dt > n^2,$$

luego $\|Mx_n\|/\|x_n\| > n$ y M no está acotado.

Proposición 2.45. *El operador posición M es autoadjunto.*

Demostración. El operador M es simétrico: por ser $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\langle Mx, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} tx(t)\overline{y(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{ty(t)}dt = \langle x, My\rangle.$$

Entonces, $M \subset M^*$ por la proposición 1.17. Resta probar que $D_{M^*} \subset D_M$.

Sea $y \in D_{M^*}$. Entonces, si $y^* = M^*y$, para cada $x \in D_M$ tenemos que $\langle Mx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$, luego

$$\int_{\mathbb{R}} tx(t)\overline{y(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y^*(t)}dt,$$

por lo que

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)\big(\overline{ty(t)} - \overline{y^*(t)}\big)dt = 0.$$

En particular, si $x(t) = \big(ty(t) - y^*(t)\big)\chi_{(a,b)}$ para cualquier intervalo (a, b), entonces $x \in D_M$ y

$$\int_a^b |ty(t) - y^*(t)|^2 dt = 0.$$

Entonces, $ty(t) - y^*(t) = 0$ casi siempre en (a, b). Como (a, b) era arbitrario, tenemos que $ty = y^* \in L^2(\mathbb{R})$, luego $y \in D_M$. Además, $M^*y = y^* = ty = My$. □

Proposición 2.46. *El operador M no tiene autovalores, y $\sigma(M) = \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, y sea $x \in D_T$ tal que $(M - \lambda I)x = 0$. Entonces,

$$0 = \|(M - \lambda I)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |t - \lambda|^2 |x(t)|^2 dt.$$

Como $|t - \lambda| > 0$ para todo $t \neq \lambda$, tenemos que $x(t) = 0$ para casi todo $t \in \mathbb{R}$, luego $x = 0$. Entonces, x no es autovector y λ no es autovalor.

Veamos que el espectro de M es $\mathbb{R}$. Como M es autoadjunto, tenemos que $\sigma(M) \subset \mathbb{R}$ por la proposición 2.16. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideramos $v_n(t) = \chi_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)}(t)$, y sea $x_n = v_n/\|v_n\|$. Tenemos que $\|x_n\| = 1$ y

$$\begin{aligned}
\|(M - \lambda I)x_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} (t - \lambda)^2 |x_n(t)|^2 dt \\
&= \int_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)} (t - \lambda)^2 |x_n(t)|^2 dt \leq \frac{1}{n^2} \int_{(\lambda-1/n, \lambda+1/n)} |x_n(t)|^2\, dt = \frac{1}{n^2},
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $(t - \lambda)^2 \leq 1/n^2$ en $(\lambda - 1/n, \lambda + 1/n)$. Entonces,

$$\|(M - \lambda I)x_n\| \leq \frac{1}{n}. \tag{2.44}$$

Puesto que T no tiene autovalores, el resolvente R_λ existe, y $(T - \lambda I)x_n \neq 0$ por ser $x_n \neq 0$ y $(T - \lambda I)$ inyectiva. Si definimos

$$y_n = \frac{(M - \lambda I)x_n}{\|(M - \lambda I)x_n\|},$$

entonces $y_n \in \operatorname{Im}(M - \lambda I) = D_{R_\lambda}$ y $\|y_n\| = 1$. Por (2.44),

$$\|R_\lambda y_n\| = \frac{\|x_n\|}{\|(M - \lambda I)x_n\|} \geq n.$$

Por tanto, el resolvente no está acotado, luego $\lambda \in \sigma(M)$ y tenemos $\mathbb{R} = \sigma(M)$. □

Nos interesa ahora hallar la medida espectral asociada a M por el teorema espectral. Seguimos el planteamiento de [9].

Proposición 2.47. *La medida espectral P que verifica*

$$M = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP(\lambda)$$

es aquella definida como

$$P(\Delta)x = \chi_\Delta x$$

para cada conjunto Δ de Borel en $\mathbb{R}$ y $x \in L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Veamos en primer lugar que P es una medida espectral.

a) Cada $P(\Delta)$ es una proyección ortogonal:

$$\langle P(\Delta)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \chi_\Delta x \bar{y} = \int_{\mathbb{R}} x \overline{\chi_\Delta y} = \langle x, P(\Delta)y\rangle;$$
$$P(\Delta)^2 x = P(\Delta)(\chi_\Delta x) = \chi_\Delta^2 x = \chi_\Delta x = P(\Delta)x$$

para todo Δ de Borel, $x, y \in L^2(\mathbb{R})$, luego $P(\Delta)$ es autoadjunto e idempotente, es decir, proyección ortogonal.

b) Si $x \in L^2(\mathbb{R})$, $P(\emptyset)x = \chi_\emptyset x = 0$ y $P(\mathbb{R}) = \chi_{\mathbb{R}} x = x$.

c) Si $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son conjuntos de Borel disjuntos dos a dos, entonces

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n)x = \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n} x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\Delta_n} x = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\Delta_n)x.$$

d) Si Δ_1, Δ_2 son conjuntos de Borel, entonces

$$P(\Delta_1 \cap \Delta_2)x = \chi_{\Delta_1\cap\Delta_2} x = \chi_{\Delta_1}\chi_{\Delta_2} x = P(\Delta_1)P(\Delta_2)x.$$

Buscamos ahora probar que $M = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP(\lambda)$. Veamos cómo actúa el operador $\Psi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)dP(\lambda)$ para cualquier f medible.

Si Δ es de Borel en $\mathbb{R}$, tenemos que

$$\langle \Psi(\chi_\Delta)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \chi_\Delta dP_{x,y} = P_{x,y}(\Delta) = \langle P(\Delta)x, y\rangle$$

para cada $x, y \in H$, luego $\Psi(\chi_\Delta)x = P(\Delta)x = \chi_\Delta x$. Si s es una función simple, por ser acotada, tenemos la linealidad en la integral y por tanto

$$\Psi(s)x = \Psi\big(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\Delta_k}\big)x = \sum_{k=1}^{n} c_k \Psi(\chi_{\Delta_k})x = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\Delta_k} x = sx. \tag{2.45}$$

Sea ahora f una función medible, y sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples que la aproxima. Entonces, por la observación 2.41 y por el teorema 2.40 tenemos que

$$\|\Psi(f)x - \Psi(s_n)x\|^2 = \|\Psi(f - s_n)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f - s_n|^2 dP_{x,x},$$

para cada $x \in D_{\Psi(f)}$. Por el teorema de la convergencia dominada, la integral tiende a 0 y por tanto

$$\Psi(f)x = \lim_{n\to\infty} \Psi(s_n)x = \lim_{n\to\infty} s_n x = fx, \tag{2.46}$$

usando (2.45). Tomando $f(t) = t$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 dE_{x,x}(\lambda) = \langle \Psi(t^2)x(t), x(t) \rangle = \langle t^2 x(t), x(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} t^2 |x(t)|^2 dt.$$

Entonces, $D_{\Phi(f)} = D(f) = D_M$ y por (2.46) concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda dP(\lambda)x = Mx$$

para todo $x \in D_{\Psi(f)} = D_M$, luego los operadores son iguales. Por la unicidad de la medida espectral en el teorema 2.43, tenemos que P es la medida espectral que buscábamos. $\square$

Capítulo 3

Operadores no acotados en la mecánica cuántica

La mecánica cuántica es una rama de la física que surgió a principios del siglo XX debido a la incapacidad de la física clásica de explicar ciertos fenómenos, como la radiación de cuerpo negro y el efecto fotoeléctrico. Esta disciplina incipiente impulsó el desarrollo de varios campos de las matemáticas [5], en particular, gran parte de la teoría sobre espacios de Hilbert y operadores autoadjuntos no acotados [7].

En este capítulo vemos una breve descripción de algunos conceptos básicos de mecánica cuántica, su relación con los operadores autoadjuntos y el teorema espectral, y finalizamos con una demostración del principio de incertidumbre de Heisenberg.

3.1. Conceptos básicos

Por simplicidad, nos restringimos al caso de una partícula en un espacio unidimensional. En física clásica, el estado de este sistema se describe especificando la posición y la velocidad de la partícula. En mecánica cuántica, el estado del sistema viene dado por una función compleja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ con argumento q, la coordenada espacial. Esta función ψ, llamada *función de onda*, proporciona información acerca del sistema. En concreto, si $E \subset \mathbb{R}$, la probabilidad de que la partícula se encuentre en E es

$$P_\psi(E) = \int_E |\psi(q)|^2 dq. \tag{3.1}$$

Puesto que la probabilidad de encontrar la partícula en $\mathbb{R}$ es 1, se exige que ψ sea unitario. Además, si $\varphi = \alpha\psi$ con $|\alpha| = 1$, la probabilidad que describe φ es idéntica, luego corresponde al mismo estado. Así, podemos entender que el espacio de los estados es el conjunto de los elementos unitarios de $L^2(\mathbb{R})/\sim$ donde $\psi_1 \sim \psi_2$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ tal que $\psi_1 = \alpha\psi_2$.

Tenemos por (3.1) que $|\psi|^2$ es una función de densidad de probabilidad. Podemos hablar de esperanza y varianza:

$$\mu_\psi = \int_{\mathbb{R}} q|\psi(q)|^2 dq, \quad \mathrm{var}_\psi = \int_{\mathbb{R}} \left(q - \mu_\psi\right)^2 |\psi(q)|^2 dq.$$

Entendemos así que el valor medio de la posición de la partícula será μ_ψ. Si denotamos por Q el operador multiplicación de la sección 2.4, podemos escribir

$$\mu_\psi = \int_{\mathbb{R}} q|\psi(q)|^2 dq = \int_{\mathbb{R}} Q\psi(q)\overline{\psi(q)} dq = \langle Q\psi, \psi\rangle. \tag{3.2}$$

Por este motivo, el operador Q recibe el nombre de *operador posición*.

En mecánica cuántica, a cada magnitud física $\mathcal{A}$ corresponde un operador A que actúa en el espacio de estados. Además, este operador es autoadjunto. Estos operadores reciben el nombre de *observables*. Por tanto, el operador posición (que es autoadjunto) es un observable. Si A es un observable cualquiera, análogamente a (3.2) se definen el valor medio y la varianza del observable A en el estado ψ como

$$\mu_\psi(A) = \langle A\psi, \psi\rangle, \quad \mathrm{var}_\psi(A) = \langle (A - \mu_\psi(A)I)^2\psi, \psi\rangle.$$

Definimos también la desviación estándar como $\Delta_\psi A = \left(\mathrm{var}_\psi(A)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Por otro lado, los únicos resultados posibles de la medida de una magnitud $\mathcal{A}$ son los autovalores del observable A [1]. Supongamos por simplicidad que el espectro de A es puntual y no degenerado. Entonces, la probabilidad de obtener el autovalor α_n es

$$|\langle \phi_n, \psi\rangle|^2 \tag{3.3}$$

donde ϕ_n es el autovector de A asociado al autovalor α_n. Por último, tras medir la magnitud y obtener α_n, el sistema queda en el estado dado por la proyección de ψ sobre el autoespacio de α_n.

En el caso de que A no tenga autovectores, para conservar esta formulación es necesario ampliar el modelo de espacios de Hilbert a espacios de Hilbert equipados, que permiten trabajar con autovectores generalizados [4, 5, 11]. Por ejemplo, para el caso del operador posición, si $q_0 \in \mathbb{R}$, un autovector ψ_0 verificaría que

$$\left(Q\psi_{q_0}\right)(q) = q_0\psi_{q_0}(q),$$

con lo que $(q - q_0)\psi_{q_0}(q) = 0$. Hemos visto (proposición 2.46) que esta ecuación no admite soluciones en $L^2(\mathbb{R})$, pero sí la admite en el sentido de funciones generalizadas. La solución es la delta de Dirac $\delta(q - q_0)$, que se anula en todo punto salvo en q_0 y cuya integral en $\mathbb{R}$ es igual a 1. En este caso, diríamos que $\delta(q - q_0)$ es un *autovector generalizado* de Q asociado al valor espectral q_0. Tratar estos casos rigurosamente se escapa de los objetivos de este trabajo y solamente se menciona por completitud.

Con estos conceptos en mente, resulta aparente la importancia de los operadores no acotados: uno de los operadores básicos, el operador posición, no está acotado. También, los operadores autoadjuntos juegan un papel fundamental, pues los observables son autoadjuntos. El motivo es que son necesarios para que la teoría resultante funcione de forma satisfactoria [5]. Por ejemplo, el espectro de un operador autoadjunto es real, lo cual garantiza que la medida de una magnitud sea un número real. Aunque esto también sea cierto para operadores simétricos, para operadores autoadjuntos tenemos el teorema espectral, que permite:

a) Definir funciones de observables: Si A es un observable, $P^{(A)}$ es la medida espectral asociada y f es una función medible, podemos definir

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}} f dP^{(A)}.$$

b) Asignar una única probabilidad a la medida de cada observable: si $E \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de Borel, se define el *subespacio espectral*

$$V_E = \mathrm{Im}\, P^{(A)}(E)$$

y la probabilidad de en el estado ψ obtener el resultado en E por

$$P_A(E) = \langle P^{(A)}(E)\psi, \psi\rangle = P^{(A)}_{\psi,\psi}(E).$$

De esta manera, podemos entender los subespacios espectrales como autoespacios y sorteamos la dificultad de necesitar autovectores generalizados para el cálculo de probabilidades.

Por ejemplo, para el operador posición, tenemos que

$$P_Q(E) = \langle P^{(Q)}(E)\psi, \psi\rangle = \langle \chi_E \psi, \psi\rangle = \int_E |\psi(q)|^2 dq,$$

lo cual coincide con nuestro planteamiento inicial.

3.2. El Principio de incertidumbre de Hesienberg

El principio de incertidumbre afirma que ciertos pares de magnitudes no se pueden conocer simuláneamente con precisión arbitraria. Es decir, en cuanto mayor es la precisión en una magnitud, menor es en la otra. En esta sección demostramos este resultado clásico de la mecánica cuántica, según [7].

Sean S, T operadores con dominio en un espacio de Hilbert. El *conmutador* de S y T es el operador dado por

$$[S, T] = ST - TS$$

con dominio $D_{[S,T]} = D_{ST} \cap D_{TS}$. Este dominio es denso por contener las funciones $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Proposición 3.1. *Sean S, T operadores autoadjuntos con dominio en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$|\mu_\psi([S, T])| \leq 2(\Delta_\psi S)(\Delta_\psi T)$$

para cada $\psi \in D_{[S,T]}$.

Demostración. Sean $A = S - \mu_\psi(S)I$ y $B = S - \mu_\psi(T)I$. Es inmediato comprobar que

$$[S, T] = [A, B].$$

Además, como $\mu_\psi(S)$, $\mu_\psi(T)$ son reales (proposición 1.17), por el lema 1.50 tenemos que A y B son autoadjuntos. También,

$$\begin{aligned} \|A\psi\|^2 &= \langle A\psi, A\psi\rangle = \langle A^2\psi, \psi\rangle \\ &= \langle \left(S - \mu_\psi(S)I\right)^2 \psi, \psi\rangle = \mathrm{var}_\psi(S) = (\Delta_\psi S)^2. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mu_\psi([S, T]) = \langle (AB - BA)\psi, \psi\rangle = \langle AB\psi, \psi\rangle - \langle BA\psi, \psi\rangle = \langle B\psi, A\psi\rangle - \langle A\psi, B\psi\rangle.$$

Entonces, por las desigualdades triangulares y de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$|\mu_\psi([S, T])| \leq |\langle B\psi, A\psi\rangle| + |\langle A\psi, B\psi\rangle| \leq 2\|A\psi\|\|B\psi\| = 2(\Delta_\psi S)(\Delta_\psi T),$$

como queríamos demostrar. □

Consideramos ahora el mismo sistema que antes, con una partícula en un espacio unidimensional. Otro operador fundamental es el *operador momento* P dado por

$$P\psi = \frac{h}{2\pi i}\frac{d\psi}{dq},$$

donde h es la constante de Planck. Este operador está definido en el dominio D_P formado por las funciones ψ absolutamente continuas en todo intervalo compacto de $\mathbb{R}$ y tales que $P\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Una justificación física de esta definición puede encontrarse en [5, 7]. Se puede comprobar que este operador es autoadjunto [2]. Además,

$$PQ\psi(q) = P\left(q\psi(q)\right) = \frac{h}{2\pi i}\left(\psi(q) + q\psi'(q)\right) = \frac{h}{2\pi i}\psi(q) + QP\psi(q).$$

Entonces,

$$[P, Q] = \frac{h}{2\pi i} I_{D_{[P,Q]}},$$

luego

$$\mu_\psi([P, Q]) = \frac{h}{2\pi}\langle\psi, \psi\rangle = \frac{h}{2\pi}\|\psi\|^2 = \frac{h}{2\pi},$$

por ser ψ unitario. Aplicando la proposición anterior a los operadores P y Q obtenemos el principio de incertidumbre:

Teorema 3.2 (Principio de incertidumbre)**.** *Si Q y P son los operadores posición y momento, se tiene que*

$$(\Delta_\psi Q)(\Delta_\psi P) \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Esto significa que no se puede tomar una medida simultánea de posición y momento con precisión arbitraria. En general, esto es cierto para cualquier pareja de operadores cuyo conmutador es no nulo.

El principio de incertidumbre no trata del error en la medida. Es cierto que el hecho de tomar una medición perturba el sistema, y a pequeñas escalas podemos esperar que la perturbación no sea despreciable, introduciendo un error en la medida. Uno podría pensar que con un experimento mejor, más refinado y menos invasivo, la imprecisión se pueda hacer tan pequeña como se desee. Sin embargo, el principio de incertidumbre afirma que esta imprecisión es inherente al sistema, independientemente de la imperfección del método de medida.

Apéndice A

Espacios normados

En este anexo se exponen definiciones y resultados relativos a espacios normados empleados a lo largo del documento, obtenidos de [7, 16]. El símbolo $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ indistintamente.

Definición A.1. Un *espacio normado* es un par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$ y una aplicación $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada *norma*, con las siguientes propiedades:

a) $\|x\| \geq 0$ para cada $x \in X$.

b) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.

c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ para cada $x \in X,\ \alpha \in \mathbb{K}$.

d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cada $x, y \in X$.

Proposición A.2. *Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado.*

Proposición A.3. *La clausura de un subespacio es un subespacio cerrado.*

Definición A.4. Un *espacio de Banach* es un espacio normado completo para la métrica de la norma.

Teorema A.5. *Sea X un espacio normado. Entonces X es un espacio de Banach si y solo si toda serie de elementos de X absolutamente convergente es convergente.*

A.1. Operadores en espacios normados

Definición A.6. Dados dos espacios vectoriales X, Y sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, un *operador lineal*, o simplemente *operador*, es una aplicación $T : X \longrightarrow Y$ que verifica que

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

para cada $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Denotamos los conjuntos imagen y núcleo por $\operatorname{Im} T$ y $\operatorname{Ker} T$.

Definición A.7. Sean E, F espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Se dice que T es *acotado* si existe una constante $k > 0$ tal que $\|Tx\| \leq k\|x\|$ para todo $x \in X$.

El ínfimo de estas constantes k recibe el nombre de *norma* del operador T y se denota por $\|T\|$.

Denotamos al espacio de los operadores lineales acotados de X en Y por $L(X, Y)$, y si $X = Y$, por $L(X)$.

Proposición A.8. *Si T es un operador acotado entre espacios normados, se verifica que*

$$\|T\| = \sup\Big\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\Big\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Proposición A.9. *Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador acotado entre espacios normados, se verifica que*

$$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$$

para todo $x \in X$.

Proposición A.10. *Si $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$ siendo X, Y, Z espacios normados, se verifica que $ST \in L(X,Z)$ y*

$$\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|.$$

Además, si $T \in L(X)$, entonces $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si $x \in X$, se tiene que

$$\|STx\| \leq \|S\| \cdot \|Tx\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|.$$

Por tanto, $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$. Ahora, es evidente que $\|T^1\| \leq \|T\|^1$. Supongamos que $\|T^{n-1}\| \leq \|T\|^{n-1}$. Entonces, por lo anterior,

$$\|T^n\| = \|T(T^{n-1})\| \leq \|T\| \cdot \|T^{n-1}\| \leq \|T\| \cdot \|T\|^{n-1} = \|T\|^n.$$

Por el principio de inducción, se tiene el resultado. □

Proposición A.11. *Sean X, Y dos espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Son equivalentes:*

a) *T es continuo en X.*

b) *T está acotado en la bola unidad cerrada $\overline{B}(0,1) \subset X$.*

c) *Si $A \subset X$ es acotado, entonces $T(A) \subset Y$ es acotado.*

d) *T es acotado.*

Definición A.12. Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre espacios normados. Se dice que T es una *isometría* (lineal) si para todo $x \in X$ se tiene que $\|Tx\| = \|x\|$.

Proposición A.13. *Las isometrías lineales entre espacios normados son continuas e inyectivas y tienen norma 1.*

Proposición A.14. *Si Y es de Banach, entonces $L(X,Y)$ es de Banach.*

Proposición A.15 (serie de Neumann)**.** *Sea $T \in L(X)$, donde X es un espacio de Banach. Si $\|T\| < 1$, entonces $(I - T)^{-1} \in L(H)$ y*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j,$$

donde la serie converge para la norma de $L(X)$.

Demostración. Puesto que $\left\|T^j\right\| \leq \|T\|^j$ y la serie geométrica $\sum_{j=0}^{\infty} \|T\|^j$ converge si $\|T\| < 1$, entonces $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ es absolutamente convergente. Al ser X de Banach, también lo es $L(X)$, luego la serie $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ es convergente.

Sea $S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(I - T)(I + T + \cdots + T^n) = (I + T + \cdots + T^n)(I - T) = I - T^{n+1}.$$

Entonces, $T^{n+1} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ por ser $\|T\| < 1$. Así,

$$(I - T)S = S(I - T) = I.$$

Por tanto, $I - T$ es invertible y $S = (I - T)^{-1}$. □

Teorema A.16. *Sean X, Y espacios normados donde Y es de Banach, y sea $A : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado. Entonces existe un operador $\tilde{A} : \overline{X} \longrightarrow Y$ tal que $\tilde{A}$ es lineal, acotado, $\tilde{A}|_X = A$ y $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.*

Demostración. Sea $x \in \overline{X}$, la adherencia del espacio X en la topología inducida por la norma. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X que tiende a x. Como

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\| \to 0,$$

tenemos que $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y, y por ser completo, existe $y \in Y$ tal que $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y.

Definimos $\tilde{A}x = y$ para cada $x \in \overline{X}$. Entonces,

- Está bien definido: si $x_n \to x$ y $z_n \to x$, entonces $(x_1, z_1, x_2, z_2, \ldots)$ también converge a x. Por ser A acotado, la sucesión de sus imágenes también converge, luego las subsucesiones $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Az_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo límite, y.

- $\tilde{A}$ es lineal: si $x, y \in \overline{X}$, sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de elementos de X con límites x e y, respectivamente. Entonces $x_n + y_n \to x + y$ y

$$\tilde{A}(x + y) = \lim_{n\to\infty} A(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} \big(A(x_n) + A(y_n)\big) = Ax + Ay$$

- Para cada $x \in X$, considerando la sucesión constante $x_n = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\tilde{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax$.

- Como $\|Ax_n\| \leq \|A\| \cdot \|x_n\|$ y $Ax_n \to y = \tilde{A}x$, si $x_n \to x$, entonces $\|\tilde{A}x\| \leq \|\tilde{A}\| \cdot \|x\|$. Por tanto, $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$. Puesto que $X \subset \overline{X}$ y $\tilde{A}|_X = A$, también se tiene $\|\tilde{A}\| \geq \|A\|$, luego $\|A\| = \|\tilde{A}\|$.

□

A.2. Teoremas en espacios normados

Definición A.17. Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. El espacio $L(X, \mathbb{K})$ recibe el nombre *espacio dual* de X. Sus elementos se llaman *funcionales lineales acotados*. Este espacio dotado con la norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}$$

para cada funcional lineal acotado f es un espacio de Banach.

Teorema A.18 (Hahn-Banach real). *Sea X un espacio vectorial real y $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación tal que* *a)* $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *para cada* $x, y \in X$.

b) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *para cada* $x \in E$ *y* $\lambda > 0$.

Sea $M \subset X$ *un subespacio vectorial y* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *un funcional lineal tal que* $f(x) \leq p(x)$ *para todo* $x \in M$. *Entonces, existe un funcional lineal* $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $F(x) = f(x)$ *para todo* $x \in M$ *y* $F(x) \leq p(x)$ *para todo* $x \in X$.

Teorema A.19 (Banach-Steinhaus)**.** *Sea* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de operadores acotados de un espacio de Banach* X *en un espacio normado* Y. *Supongamos que para cada* $x \in X$ *la sucesión* $(\|T_n x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada, es decir, existe un* $c_x \geq 0$ *tal que*

$$\|T_n x\| \leq c_x \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces la sucesión de las normas $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada, es decir, existe* $c > 0$ *tal que* $\|T_n\| \leq c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema A.20 (del grafo cerrado)**.** *Sean* X, Y *espacios de Banach y* $T : X \to Y$ *un operador lineal. Entonces* T *es continuo si y solo si su grafo*

$$G(T) = \{(x, T(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

es un conjunto cerrado en $X \times Y$.

Definición A.21. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ un conjunto de funciones de X en $\mathbb{K}$. Se dice que $\mathcal{A}$ es un *álgebra* de funciones si $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial y $fg \in \mathcal{A}$ para cada $f, g \in \mathcal{A}$.

Se dice que $\mathcal{A}$ separa puntos de X si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Teorema A.22 (Stone-Weierstrass)**.** *Sea* X *un espacio topológico compacto y* $\mathcal{A}$ *una subálgebra del espacio de las funciones continuas de* X *en* $\mathbb{K}$, $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$, *tal que:*

a) $1 \in \mathcal{A}$.

b) $\mathcal{A}$ *separa puntos de* X.

c) Si $f \in \mathcal{A}$, *entonces* $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

Entonces $\mathcal{A}$ *es densa en* $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ *con la topología de la convergencia uniforme.*

Teorema A.23 (de aproximación de Weierstrass)**.** *Sea* $X \subset \mathbb{R}^n$ *compacto. Si* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *es una función continua, existe una sucesión* $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de polinomios de* n *variables con coeficientes en* $\mathbb{K}$ *que converge uniformemente a* f *en* X.

Teorema A.24 (Bernstein)**.** *Si* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función continua, la sucesión de polinomios de Bernstein* $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *dados por*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

converge uniformemente a f *en* $[0,1]$.

Apéndice B

Espacios de Hilbert

En este anexo se exponen definiciones y resultados en espacios de Hilbert empleados a lo largo del documento, obtenidos de [7, 16, 2].

Definición B.1. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un *producto interno* sobre E es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ que verifica las siguientes propiedades:

a) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para todos $x, y, z \in E$.

b) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in E, \alpha \in \mathbb{K}$..

c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todos $x, y \in E$.

d) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in E$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.

Proposición B.2. *Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre E. Entonces,*

a) $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$ *para todos* $x, y \in E, \alpha \in \mathbb{K}$.

b) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ *para todos* $x, y, z \in E$.

c) $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$ *para todos* $x, y \in E$.

d) *Si* $\langle x, y \rangle = 0$ *para todo* $y \in E$, *entonces* $x = 0$.

e) *Si* $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ *para todo* $z \in E$, *entonces* $x = y$.

Teorema B.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre E. Entonces, para todo $x, y \in E$ se verifica que*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Corolario B.4. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre E. Se define*

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \tag{B.1}$$

para cada $x \in E$. Entonces la aplicación $\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ define una norma sobre E. Además,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle).$$

Definición B.5. Sean H un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre H. Un *espacio de Hilbert* es un par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde H es completo para la norma definida en (B.1).

Proposición B.6. *Sea H un espacio de Hilbert. La aplicación $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ de $E \times E$ en $\mathbb{K}$ es continua. Además, si $y_0 \in H$, el funcional $\langle \cdot, y_0\rangle : H \longrightarrow \mathbb{K}$ es lineal, continuo y tiene norma $\|y_0\|$.*

Teorema B.7 (de representación de Riesz)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y sea $f : H \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal. Entonces f es continuo si y solo si existe $z \in H$ tal que $f(x) = \langle x, z\rangle$ para todo $x \in H$. Además, en estas condiciones, z es único y $\|f\| = \|z\|$.*

B.1. Ortogonalidad

Proposición B.8. *Sean H un espacio de Hilbert y $A, B \subset H$. Entonces,*

a) $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

b) $A \cap A^{\perp} \subseteq \{0\}$.

c) $H^{\perp} = \{0\}$ *y* $\{0\}^{\perp} = H$.

d) $A^{\perp}$ *es un subespacio vectorial cerrado de* H.

Proposición B.9. *Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H. Entonces, $H = M \oplus M^{\perp}$.*

Proposición B.10. *Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial de H propio y cerrado . Entonces $M^{\perp} \neq \{0\}$.*

Proposición B.11. *Sean H un espacio de Hilbert y $A \subset H$ un subconjunto. Entonces $A^{\perp\perp} = \overline{\langle A\rangle}$, donde $\langle A\rangle$ es el subespacio vectorial generado por A.*

Proposición B.12. *Sean H un espacio de Hilbert y $A \subset H$ un subconjunto no vacío. Entonces $\langle A\rangle$ es denso si y solo si $A^{\perp} = \{0\}$.*

Proposición B.13 (Desigualdad de Bessel)**.** *Sean H un espacio de Hilbert y $A \subset H$ ortonormal. Entonces, para todo $x \in H$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in A$ se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Proposición B.14. *Sean H un espacio de Hilbert, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto ortonormal numerable y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{K}$. Entonces, son equivalentes:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$ *converge en* H.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$.

Definición B.15. Sea H un espacio de Hilbert. Se dice que un conjunto ortonormal $B \subset H$ es una *base ortonormal* de H si no existe ningún conjunto ortonormal que contenga estrictamente a B.

Proposición B.16. *Sea H un espacio de Hilbert, y sea $A \subset H$ un conjunto ortonormal. Entonces existe una base ortonormal B tal que $A \subset B$.*

Proposición B.17. *Si H es un espacio de Hilbert separable, entonces todo conjunto ortonormal es finito o numerable.*

Proposición B.18. *Sean H un espacio de Hilbert separable y $B = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto ortonormal de H. Son equivalentes:*

a) B *es una base ortonormal de* H*.*

b) $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, u_n\rangle\, u_n$ *para cada* $x \in H$*.*

c) $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, u_n\rangle\langle u_n, y\rangle$ *para todos* $x, y \in H$*.*

d) Identidad de Parseval: $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, u_n\rangle|^2$ *para cada* $x \in H$*.*

e) $\langle B\rangle$ *es denso en* H*.*

Proposición B.19. *Todas las bases ortonormales de* H *tienen el mismo cardinal.*

Definición B.20. La *dimensión (ortogonal)* de un espacio de Hilbert $\dim(H)$ es el cardinal de una de sus bases ortonormales.

Proposición B.21. *Si* H_1*,* H_2 *son espacios de Hilbert de la misma dimensión, entonces existe una isometría sobreyectiva* $U : H_1 \longrightarrow H_2$*.*

B.2. Operadores acotados en espacios de Hilbert

Proposición B.22. *Sea* $T : H \longrightarrow H$ *un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert. Entonces,*

$$\|T\| = \sup_{x,y\neq 0} \frac{|\langle Tx, y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|}.$$

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que $|\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\|\cdot\|y\|$ para cualesquiera $x, y \in H$. Entonces,

$$\sup_{x,y\neq 0} \frac{|\langle Tx, y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|} \leq \sup_{x,y\neq 0} \frac{\|Tx\|\cdot\|y\|}{\|x\|\cdot\|y\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|\,.$$

Por otro lado, si $T \neq 0$, tenemos que

$$\sup_{x,y\neq 0} \frac{|\langle Tx, y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|} \geq \sup_{x\neq 0, \|y\|=1} \frac{|\langle Tx, y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|} \geq \sup_{x\neq 0, Tx\neq 0} \frac{|\langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\rangle|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0, Tx\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|\,.$$

Si $T = 0$, el resultado es inmediato. $\square$

Teorema B.23. *Sea* H *un espacio de Hilbert y sea* $T \in L(H)$*. Entonces existe un único operador* $T^* \in L(H)$ *tal que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\,,$$

para todos $x, y \in H$*. Además,* $\|T^*\| = \|T\|$*.*

Definición B.24. El operador T^* del teorema anterior recibe el nombre de *operador adjunto* de T. Si $T^* = T$, entonces se dice que T es *autoadjunto*.

Lema B.25. *Sea* H *un espacio de Hilbert y sea* $T \in L(H)$*. Entonces* $T = 0$ *si y solo si* $\langle Tx, y\rangle = 0$ *para todo* $x, y \in H$*. Además si* H *es un espacio de Hilbert complejo y* $\langle Tx, x\rangle = 0$ *para todo* $x \in H$*, entonces* $T = 0$*.*

Demostración. Si $T = 0$, entonces $\langle Tx, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$ para todo $x, y \in H$. Recíprocamente, si $\langle Tx, y\rangle = 0$ para todo $x, y \in H$, entonces por la proposición B.2(d) se tiene que $Tx = 0$ para todo $x \in H$, es decir, $T = 0$.

Supongamos ahora que H es complejo y $\langle Tz, z\rangle = 0$ para cada $z \in H$. Si tomamos $\alpha \in \mathbb{C}$ y $z = \alpha x + y$, entonces

$$0 = \langle T(\alpha x + y), \alpha x + y\rangle = |\alpha|^2\langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle + \alpha\langle Tx, y\rangle + \bar{\alpha}\langle Ty, x\rangle$$

Los dos primeros términos de la derecha son nulos por hipótesis. Si tomamos $\alpha = 1$, tenemos que $\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = 0$. Tomando $\alpha = i$, se obtiene que $\langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle = 0$. Sumando ambas ecuaciones, se obtiene que $\langle Tx, y\rangle = 0$, luego $T = 0$ por lo probado anteriormente. $\square$

Proposición B.26. *Dados $S, T \in L(H)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se verifican las siguientes propiedades:*

a) $(S + T)^* = S^* + T^*$.

b) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$.

c) $(ST)^* = T^* S^*$.

d) $T^{**} = T$.

Demostración. a) Si $x, y \in H$,

$$\langle x, (S + T)^* y\rangle = \langle (S + T)x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle x, S^* y\rangle + \langle x, T^* y\rangle = \langle x, (S^* + T^*)\rangle.$$

Por el lema anterior, tenemos el resultado.

b) Si $x, y \in H$, $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\langle x, (\alpha T)^* y\rangle = \langle (\alpha T)x, y\rangle = \langle \alpha(Tx), y\rangle = \alpha\langle Tx, y\rangle = \alpha\langle x, T^* y\rangle = \langle x, (\bar{\alpha} T^*)y\rangle.$$

Concluimos aplicando el lema anterior.

c) Si $x, y \in H$,

$$\langle x, (ST)^* y\rangle = \langle (ST)x, y\rangle = \langle Tx, S^* y\rangle = \langle x, T^* S^* y\rangle,$$

luego $(ST)^* = T^* S^*$.

d) Por definición, $T^{**} = (T^*)^*$, luego

$$\langle (T^*)^* x, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle.$$

para cada $x, y \in H$. Por el lema anterior, se tiene que $T^{**} = T$.

$\square$

Definición B.27. Un operador lineal y acotado $P : H \longrightarrow H$ en un espacio de Hilbert H es una *proyección ortogonal* si existe un subespacio cerrado $Y \subset H$ tal que $\operatorname{Im} P = Y$, $\operatorname{Ker} P = Y^{\perp}$, y $P|_Y = I_Y$.

Proposición B.28. *Sea $P : H \longrightarrow H$ un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert. Entonces P es una proyección ortogonal si y solo si P es autoadjunto e idempotente. En este caso, se tiene que*

$$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 \quad y \quad \|P\| = 1 \ si \ P(H) \neq \{0\}$$

.

Demostración. Supongamos que P es una proyección ortogonal, y sea $Y = \operatorname{Im} P$. Entonces, para todo $x \in H$, $Px = y \in Y$, tenemos que $P^2x = Py = y = Px$, luego $P^2 = P$. Sean ahora $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$, donde $y_1, y_2 \in Y$ y $z_1, z_2 \in Y^\perp$. Entonces $\langle y_1, z_2\rangle = \langle y_2, z_1\rangle = 0$, y

$$\langle Px_1, x_2\rangle = \langle y_1, y_2 + z_2\rangle = \langle y_1, y_2\rangle = \langle y_1 + z_1, y_2\rangle = \langle x_1, Px_2\rangle,$$

luego P es autoadjunto.

Supongamos ahora que $P^* = P$ y $P^2 = P$. Sea $Y = P(H)$. Entonces, para todo $x \in H$ se verifica que

$$x = Px + (I - P)x.$$

Puesto que

$$\langle Px, (I - P)v\rangle = \langle x, P(I - P)v\rangle = \langle x, Pv - P^2v\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

para cada $x, v \in H$, se tiene que $Y \perp (I - P)(H)$. Además, $Y = \operatorname{Ker}(I - P)$, pues se tiene que

$$(I - P)Px = Px - P^2x = 0,$$

luego $Y \subset \operatorname{Ker}(I - P)$ y $(I - P)x = 0$ implica $x = Px$, y por tanto $Y \supset \operatorname{Ker}(I - P)$. Tenemos entonces que Y es cerrado por ser el núcleo de un operador lineal acotado. Por último, $P|_Y = I_Y$ ya que si $y = Px$, entonces $Py = P^2x = Px = y$.

Por otra parte, si $x \in H$,

$$\langle Px, x\rangle = \langle P^2x, x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2 \geq 0,$$

por ser autoadjunto e idempotente. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \leqq \|Px\|\|x\|$, luego $\|P\| \leq 1$. Si $x \in P(H)$ no nulo, entonces $\|Px\| = \|x\|$ y por tanto $\|P\| = 1$. □

Definición B.29. Sea H un espacio de Hilbert. Una *forma sesquilineal* es una aplicación $u : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ si para cada $x, y, z \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene que

a) $u(\alpha x + \beta y, z) = \alpha u(x, z) + \beta u(y, z)$,

b) $u(z, \alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} u(z, x) + \bar{\beta} u(z, y)$.

Se dice que una forma sesquilineal está *acotada* si existe una constante M tal que

$$|u(x, y)| \leq M \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{para todos } x, y \in H.$$

Se define la *norma* de u como

$$\|u\| = \sup_{x,y\neq 0} \frac{|u(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Teorema B.30 (de representación de Riesz para formas sesquilineales)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. Si $u : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ es una forma sesquilineal acotada, entonces existe un único operador lineal $S : H \longrightarrow H$ acotado tal que $u(x, y) = \langle Sx, y\rangle$ y $\|u\| = \|S\|$.*

Demostración. Fijamos $x \in H$. Entonces el operador $\overline{u(x, \cdot)} : H \longrightarrow \mathbb{K}$ es un funcional lineal y acotado. Por el teorema de representación de Riesz B.7, existe un único $z \in H$ tal que $\overline{u(x, y)} = \langle y, z\rangle$. Por tanto, $u(x, y) = \langle z, y\rangle$. Como z depende de x y es único, esto define un operador $S : H \longrightarrow H$ dado por $Sx = z$.

Este operador es lineal: para todo $x_1, x_2, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y\rangle &= u(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha u(x_1, y) + \beta u(x_2, y) \\ &= \alpha\langle Sx_1, y\rangle + \beta\langle Sx_2, y\rangle = \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y\rangle.\end{aligned}$$

Como esto es válido para todo y, tenemos que $S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha S x_1 + \beta S x_2$. También es acotado: por la proposición B.22,

$$\|u\| = \sup_{x,y\neq 0} \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} = \|S\|.$$

El operador S es único: si existe T tal que $u(x,y) = \langle Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle$, entonces $Sx = Tx$ y por tanto $S = T$. $\square$

Apéndice C

Análisis real

Se exponen definiciones y resultados relevantes a teoría de la media y análisis real, empleados en el segundo capítulo del documento. Esta sección se ha obtenido de [3, 12].

C.1. Teoría de la medida

Definición C.1. Sea X un conjunto y $\mathcal{M}$ una σ-álgebra de X. Una *medida (positiva)* en $(X, \mathcal{M})$ es una aplicación $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

a) $\mu(\emptyset) = 0$,

b) (Aditividad numerable) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right).$$

Los conjuntos de $\mathcal{M}$ se llaman *conjuntos medibles*. Se dice que $(X, \mathcal{M})$ es un *espacio medible* y se dice que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un *espacio de medida*.

Definición C.2. Si $(X, \mathcal{M})$ es un espacio medible, (Y, τ) es un espacio topológico y f es una aplicación de X en Y, se dice que f es una *función medible* si $f^{-1}(U)$ es medible para todo U abierto de Y.

Proposición C.3. *Sea X un espacio medible y sea Y un espacio topológico. Si u, v son funciones medibles de X en $\mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces la aplicación $h : X \longrightarrow Y$ definida por*

$$h(x) = \Phi(u(x), v(x)), \quad x \in X,$$

es medible.

Proposición C.4. *Si f es una función medible de X en $\mathbb{C}$, existe otra función medible α de X en $\mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y*

$$f = \alpha|f|.$$

Proposición C.5. *Sea f una función medible de X en $[-\infty, \infty]$. La parte positiva f^+ y la parte negativa f^- definidas por*

$$f^+ = \text{máx}\{f, 0\}, \quad f^- = \text{máx}\{-f, 0\},$$

son funciones medibles. Además, $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Definición C.6. Una función simple en un conjunto X no vacío es una función compleja que alcanza un número finito de valores. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son estos valores y $A_j = \{x : s(x) = \alpha_j\}$, entonces

$$s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}, \tag{C.1}$$

donde χ_{A_j} es la función característica de A_j. Esta expresión se denomina *forma canónica* de s.

Proposición C.7. *Una función simple es medible si y solo si los conjuntos A_j en la expresión anterior son medibles.*

Teorema C.8. *Sea X un espacio medible y sea $f : X \to [0, \infty]$ medible. Entonces existe una sucesión $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones simples y medibles en X tales que*

a) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k \leq \dots \leq f$*,*

b) $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)$ *para todo* $x \in X$*.*

En este caso, escribimos $s_n \uparrow f$.

Definición C.9. Sea E un conjunto medible, $s : X \to [0, \infty)$ una función simple y medible cuya forma canónica es (C.1). Se define la *integral* de s en E por

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j \mu\left(A_j \cap E\right).$$

Si $f : X \to [0, \infty]$ es una función medible, se define la *integral* de f en E con respecto de μ por

$$\int_E f d\mu = \sup\left\{\int_E s d\mu : s \text{ es simple, medible y } 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Si $f : X \to \mathbb{C}$ es una función medible, se dice que es *integrable* respecto de μ si

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Si $f = u + iv$ con u, v funciones reales y medibles en X es integrable respecto de μ, se define la *integral* de f en E con respecto de μ como el número complejo dado por

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i \int_E v^+ d\mu - i \int_E v^- d\mu.$$

Proposición C.10. *Sean f, g funciones integrables respecto de μ, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable respecto de μ y*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

Proposición C.11. *Si f es integrable respecto de μ, entonces*

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Teorema C.12 (de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas y medibles en X, y sea μ una medida positiva. Supongamos que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Si existe una función g integrable tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{para todo } x \in X, n \in \mathbb{N},$$

entonces

a) f_n *es integrable para todo* $n \in \mathbb{N}$*; y también lo es* f*,*

b) $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$*,*

c) $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$*.*

Definición C.13. Una *medida real* en $(X, \mathcal{M})$ es una aplicación $\lambda : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ tal que

a) $\lambda(\emptyset) = 0$,

b) λ toma a lo sumo uno de los valores $\pm\infty$,

c) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ son disjuntos dos a dos, entonces

$$\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\left(A_n\right).$$

Definición C.14. Sea λ una medida real en $(X, \mathcal{M})$. Un conjunto $E \in \mathcal{M}$ se dice que es λ-*nulo* si $\lambda(F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{M}$ con $F \subset E$.

Definición C.15. Se dice que dos medidas reales λ y ν en $(X, \mathcal{M})$ son *mutuamente singulares*, denotado $\lambda \perp \nu$, si existen conjuntos E y F en $\mathcal{M}$ tales que $E \cup F = X$, $E \cap F = \emptyset$, E es λ-nulo y F es ν-nulo.

Teorema C.16 (Descomposición de Jordan)**.** *Sea* λ *una medida real en* $(X, \mathcal{M})$*. Entonces, existen dos únicas medidas positivas* λ^+ *y* λ^- *en* $(X, \mathcal{M})$ *tales que*

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^- \quad y \quad \lambda^+ \perp \lambda^-.$$

Definición C.17. Si λ es una medida real, se dice que f es *integrable* con respecto de λ si es integrable para λ^+ y λ^-. En este caso, se define la *integral* de f respecto de λ como

$$\int_X f d\lambda = \int_X f d\lambda^+ - \int_X f d\lambda^-.$$

Definición C.18. Una *medida compleja* en $(X, \mathcal{M})$ es una aplicación $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ que verifica que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ son disjuntos dos a dos, entonces

$$\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\left(A_n\right).$$

En particular, no se permite que λ alcance valores infinitos.

Definición C.19. Si λ es una medida compleja, denotamos por λ_r y λ_i las partes real e imaginaria de λ, respectivamente. Se dice que f es *integrable* con respecto de λ si es integrable para λ_r y λ_i. En este caso, se define la *integral* de f respecto de λ como

$$\int_X f d\lambda = \int_X f d\lambda_r + i \int_X f d\lambda_i.$$

Proposición C.20. *Sea* λ *una medida compleja. Si* f *es una función medible y acotada, entonces* f *es integrable.*

Proposición C.21. *Sean* η*,* ξ *medidas complejas en* $(X, \mathcal{M})$*, sea* f *una función compleja integrable con respecto de* η *y* ξ*, y sean* $a, b \in \mathbb{C}$ *Definimos* $\mu = a\eta + b\xi$*. Entonces* μ *es una medida compleja,* f *es integrable con respecto de* μ *y*

$$\int_X f d\mu = a \int_X f d\eta + b \int_X f d\xi.$$

Proposición C.22. *Sea λ una medida compleja en $(X, \mathcal{M})$ y sea f una función compleja integrable respecto de λ. Entonces*

$$\overline{\int_X f d\lambda} = \int_X \overline{f} d\overline{\lambda}.$$

Demostración. Sea $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ una medida compleja, y sea f una función compleja con partes real e imaginaria f_r y f_i.

Si μ es una medida real, entonces

$$\overline{\int_X f d\mu} = \overline{\Big(\int_X f_r d\mu + i \int_X f_i d\mu \Big)} = \int_X f_r d\mu - i \int_X f_i d\mu = \int_X \overline{f} d\mu.$$

Puesto que λ_ry λ_i son medidas reales y $\overline{\lambda} = \lambda_r - i\lambda_i$ es una medida compleja, tenemos que

$$\overline{\int_X f d\lambda} = \overline{\int_X f d\lambda_r + i \int_X f d\lambda_i} = \int_X \overline{f} d\lambda_r - i \int_X \overline{f} d\lambda_i = \int_X \overline{f} d\overline{\lambda}.$$

□

Definición C.23. Sea λ una medida compleja en $(X, \mathcal{M})$. Se define la *medida variación total* $|\lambda|$ de λ como

$$|\lambda|(E) = \sup \Big\{ \sum_{j=1}^{m} |\lambda(\Delta_j)| : \{\Delta_j\}_{j=1}^{m} \text{ es una partición medible de } E \Big\}.$$

y la *variación total* de λ como $|\lambda|(X)$, que denotamos por $\|\lambda\|$.

Proposición C.24. *Si λ es una medida compleja en $(X, \mathcal{M})$, su variación total es una medida positiva y $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$. Además, una función f es integrable con respecto de λ si y solo si es integrable con respecto de $|\lambda|$ y*

$$\Big| \int_X f d\lambda \Big| \leq \int_X |f| d|\lambda|.$$

El siguiente resultado es consecuencia del teorema de Radon-Nikodym [3, 13].

Proposición C.25. *Sea λ una medida compleja en $(X, \mathcal{M})$. Entonces existe una función medible $h : X \to \mathbb{C}$ tal que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in X$ y*

$$d\lambda = h d|\lambda|.$$

C.2. Teoremas de representación

Definición C.26. Si X es un espacio topológico, la *σ-álgebra de Borel* $\mathcal{B}(X)$ es la σ-álgebra generada por los abiertos de la topología, y sus elementos reciben el nombre de *conjuntos de Borel*.

Una medida positiva μ es una *medida de Borel* si está definida en todos los conjuntos de Borel.

Si X es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto, una *medida de Radon (positiva)* en X es una medida de Borel (positiva) tal que

a) $\mu(K) < \infty$ para todo conjunto compacto K de X,

b) $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ abierto}\}$ para todo E de Borel,

c) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}$ para todo E abierto.

Definición C.27. Sea X un espacio topológico y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Se define el *soporte* de f, $\operatorname{sop}(f)$, como la adherencia del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Se dice que una función se *anula en el infinito* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \notin K$.

Definición C.28. Sea X un espacio topológico. Se define el conjunto $\mathcal{C}(X)$ como el conjunto de las aplicaciones continuas de X en $\mathbb{C}$. El conjunto de las funciones continuas de soporte compacto se denota por $\mathcal{C}_c(X)$. El conjunto las funciones continuas que se anulan en el infinito se denota por $\mathcal{C}_0(X)$.

Observación C.29. Si X es compacto, entonces $\mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}_c(X) = \mathcal{C}(X)$.

Teorema C.30 (de representación de Riesz para funcionales positivos)**.** *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Para todo funcional lineal $\ell : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\ell(f) \geq 0$ para todo $f \geq 0$, existe una única medida de Radon μ en X tal que*

$$\ell(f) = \int_X f d\mu \quad \textit{para todo } f \in \mathcal{C}_c(X).$$

Definición C.31. Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Una medida real de Borel μ es una *medida de Radon (real)* si μ^+ y μ^- son medidas de Radon positivas. Una medida compleja de Borel es una *medida de Radon (compleja)* si sus partes real e imaginaria son medidas de Radon reales. Denotamos el espacio de las medidas de Radon complejas por $M(X)$.

Proposición C.32. *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. El espacio $M(X)$ es un espacio normado con la norma definida por*

$$\|\mu\| = |\mu|(X) \quad \textit{para cada } \mu \in M(X).$$

Teorema C.33 (de representación de Riesz para funcionales acotados)**.** *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Para cada $\mu \in M(X)$, $f \in \mathcal{C}_0(X)$ sea*

$$\ell_\mu(f) = \int_X f d\mu. \tag{C.2}$$

Entonces la aplicación $\mu \mapsto \ell_\mu$ es un isomorfismo isométrico entre $M(X)$ y $\mathcal{C}_0(X)'$, el espacio de los funcionales acotados sobre $\mathcal{C}_0(X)$.

Corolario C.34. *Si X es un espacio Hausdorff compacto, entonces $\mathcal{C}(X)^*$ es isométricamente isomorfo a $M(X)$.*

C.3. Integración de funciones absolutamente continuas

Definición C.35. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Se dice que F es *absolutamente continua* en $[a, b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ subintervalos de $[a, b]$ disjuntos dos a dos que verifiquen la condición

$$\sum_{j=1}^{n} \left(b_j - a_j\right) < \delta,$$

se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon.$$

Teorema C.36 (Fundamental del cálculo). *Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, son equivalentes:*

a) La aplicación F es absolutamente continua en $[a, b]$.

b) Existe una función f integrable Lebesgue en $[a, b]$ tal que

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

c) F es derivable casi siempre en $[a, b]$, F' es integrable Lebesgue en $[a, b]$ y

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Proposición C.37 (Integración por partes). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si F, G son funciones complejas absolutamente continuas en $[a, b]$, también lo es FG y se verifica que*

$$\int_a^b \left(FG'\right)(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b \left(GF'\right)(x)dx.$$

C.4. Funciones de clase $C_c^\infty(\mathbb{R})$

Proposición C.38. *El conjunto $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ de las funciones infinitamente derivables con soporte compacto es denso en L^p, con $1 \leq p < \infty$.*

Proposición C.39 (Lema de Urysohn para funciones C^∞). *Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $U \supset K$ un conjunto abierto. Entonces, existe una función $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ en K y $\operatorname{sop}(f) \subset U$.*

Apéndice D

El teorema de Herglotz

En este anexo se exponen varios resultados para llegar a demostrar el teorema de Herglotz D.15, utilizado en la demostración del teorema espectral para operadores unitarios 2.36. Se ha seguido [15] para desarrollar esta sección. El símbolo $\mathbb{K}$ denota el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Teorema D.1 (Fejér-Riesz)**.** *Sea $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}\left[z, z^{-1}\right]$ un polinomio de Laurent no nulo tal que $p(z)$ es real y no negativo para todo $z \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Entonces existe un polinomio $q(z) = \sum_{j=0}^{n} b_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ del mismo grado tal que

$$p(z) = |q(z)|^2 \quad \textit{para todo} \quad z \in \mathbb{T}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \neq 0$. Puesto que $p(z)$ es real en $\mathbb{T}$, tenemos que $a_{-k} = \bar{a}_k$. Sea $f(z) = z^n p(z)$. Entonces $f \in \mathbb{C}[z]$, su grado es $2n$, verifica que $f(0) = \bar{a}_n \neq 0$ y los puntos donde se anulan f y p coinciden (salvo el 0). Además,

$$f(z) = a_n z^{2n} + \cdots + a_0 z^n + \cdots + \bar{a}_n = z^{2n}\overline{f\left(\bar{z}^{-1}\right)}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ no nulo. Por tanto, si w es un cero de f, entonces $w \neq 0$ y $\bar{w}^{-1}$ es también un cero de f de la misma multiplicidad. Definimos $g(x) = p(e^{ix})$ para $x \in \mathbb{R}$. Entonces cada cero x de g tiene la misma multiplicidad que cada cero e^{ix} de p, y puesto que $p(e^{ix}) \geq 0$ por hipótesis, estas multiplicidades ha de ser números pares. Si denotamos por $\beta_1, \ldots, \beta_l$ los ceros de f en $\mathbb{T}$ y por $\alpha_1, (\bar{\alpha_1})^{-1}, \ldots, \alpha_m, (\bar{\alpha_m})^{-1}$, los ceros fuera de $\mathbb{T}$, tenemos que $2m + 2l = 2n$ y podemos escribir

$$\begin{aligned} p(z) = z^{-n} f(z) = z^{-n} a_n \prod_{k=1}^{m} (z - \alpha_k)\left(z - \bar{\alpha}_k^{-1}\right) \prod_{j=1}^{l} \left(z - \beta_j\right)^2 \\ = \prod_{k=1}^{m} (z - \alpha_k)\left(z^{-1} - \bar{\alpha}_k\right) \prod_{j=1}^{l} \left(z - \beta_j\right)\left(z^{-1} - \bar{\beta}_j\right) \left[z^{-n} a_n \prod_{k=1}^{m} (-z)\bar{\alpha}_k^{-1} \prod_{j=1}^{l} (-z)\beta_j\right]. \end{aligned} \tag{D.1}$$

El último factor es igual a cz^{-n+l+m} para algún $c \in \mathbb{C}$. Puesto que $m + l = n$, tenemos que $cz^{-n+l+m} = c$. Como $p \geq 0$ en $\mathbb{T}$, $p = |p|$ en $\mathbb{T}$ y tomando

$$q(z) = \sqrt{|c|} \prod_{k=1}^{m} (z - \alpha_k) \prod_{j=1}^{l} \left(z - \beta_j\right)$$

tenemos por (D.1) que $p(z) = |q(z)|^2$ para $z \in \mathbb{T}$. Si se tuviera que alguno de los conjuntos de ceros fuera vacío, tomamos el producto correspondiente igual a uno. □

Definición D.2. Sea F un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un *cono* C de F es un subconjunto de F tal que $C + C \subset C$ y $\lambda \cdot C \subset C$ para todo $\lambda \geq 0$.

Definición D.3. Sea X un espacio topológico localmente compacto, y sea $E \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ un subespacio lineal. Si $C \subset E$, un funcional ℓ se dice que es *C-positivo* si $\ell(f) \geq 0$ para $f \in C$.

Denotamos por E_+ al subconjunto de E dado por

$$E_+ = \{f \in E : f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in X\}.$$

Proposición D.4. *Sea E un subespacio lineal de un espacio vectorial F sobre $\mathbb{R}$, y sea C un cono de F tal que $F = E + C$. Entonces cada funcional ℓ definido en E y $(C \cap E)$-positivo admite una extensión a un funcional lineal C-positivo definido en F.*

Demostración. Sea $f \in F$. Definimos

$$q(f) = \text{ínf}\{\ell(g) : g \in E, f - g \in C\}. \tag{D.2}$$

Como $F = E + C$, existe un $g \in E$ tal que $f - g \in C$, por lo que el conjunto de (D.2) no es vacío. Es sencillo verificar que $q(h_1 + h_2) \leq q(h_1) + q(h_2)$ para todo $h_1, h_2 \in F$ y $q(\lambda h) = \lambda q(h)$, $\ell(h) = q(h)$ para cada $h \in E$, $\lambda > 0$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe un funcional lineal L definido en F que extiende a ℓ y que verifica que $L(f) \leq q(f)$ para todo $f \in F$.

Sea $h \in C$. Tomando $g = 0$, $f = -h$ tenemos que $f - g \in C$, luego $q(-h) \leq \ell(0) = 0$ por (D.2). Por tanto, $L(-h) \leq q(-h) \leq 0$, por lo que $L(h) \geq 0$. Por tanto, L es C-positivo. □

Proposición D.5. *Sea X un espacio topológico Hausdorff compacto, y sea E un subespacio lineal de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ que contiene una función e tal que $e(x) > 0$ para todo $x \in X$.*

Entonces para cada funcional ℓ definido en E que sea E_+-positivo existe una medida de Radon positiva μ tal que $\ell(f) = \int f d\mu$ para cada $f \in E$.

Demostración. Sea $F = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ y sea $C = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})_+$. Sea $f \in F$. Como X es compacto, $-f$ es acotada y e alcanza un mínimo positivo. Por tanto, existe un $\lambda > 0$ tal que $-f(x) \leq \lambda e(x)$ para todo $x \in X$. Como $\lambda e + f \in C$ y $-\lambda e \in E$, tenemos que $f = -\lambda e + (\lambda e + f) \in E + C$. Por tanto, $F = E + C$. Por la proposición D.4, ℓ admite una extensión a un funcional lineal L C-positivo definido en F. Por el teorema de representación de Riesz C.30, existe una medida μ como se pide. □

Definición D.6. Un *$*$-semigrupo* S es un conjunto con una operación producto $\circ$ que verifica la propiedad asociativa y una aplicación $* : S \longrightarrow S$, llamada involución, tal que

$$(a \circ b)^* = a^* \circ b^*, \quad (a^*)^* = a,$$

para todo $a, b \in S$.

Un *carácter* de S es un funcional lineal $\chi : S \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\chi(0) = 1, \quad \chi(a \circ b) = \chi(a)\chi(b), \quad \chi(a^*) = \overline{\chi(a)}, \text{ para todo } a, b \in S.$$

Denotamos por S^* el conjunto de los carácteres de S.

Una aplicación $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es *semidefinida positiva* si para cualesquiera $s_1, \ldots, s_n \in S$ y $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{K}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{i,j=0}^{n} \varphi(s_i^* \circ s_j)\bar{\xi}_i \xi_j \geq 0$$

Definición D.7. Una *$*$-álgebra* sobre $\mathbb{K}$ es un álgebra A sobre $\mathbb{K}$ equipado con una involución $* : A \longrightarrow A$, tal que para todo $a, b \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad (a^*)^* = a.$$

Un *carácter* de A es un funcional lineal $\chi : A \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\chi(1) = 1, \quad \chi(ab) = \chi(a)\chi(b), \quad \chi(a^*) = \overline{\chi(a)}, \text{ para todo } a, b \in A.$$

Denotamos por $\hat{A}$ el conjunto de los carácteres de A.

Un funcional lineal $\ell : A \times A \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es *positivo* si $\ell(a^* a) \geq 0$ para todo $a \in A$.

Si S es un semigrupo, se define el $*$-álgebra $\mathbb{K}[S]$ cuya base está dada por los elementos de S y el producto y la involución están dados a partir de las operaciones respectivas de S. Esto es, $\mathbb{K}[S]$ es el espacio vectorial de las sumas $\sum_{s \in S} \alpha_s s$ donde $\alpha_s \in \mathbb{K}$ con finitos α_s no nulos, y con las aplicaciones producto e involución dadas por

$$\Big(\sum_{s \in S} \alpha_s s\Big)\Big(\sum_{t \in S} \beta_t t\Big) = \sum_{s,t \in S} \alpha_s \beta_t (s \circ t),$$
$$\Big(\sum_{s \in S} \alpha_s s\Big)^* = \sum_{s \in S} \bar{\alpha}_s s^*,$$

$\mathbb{K}[S]$ es un $*$-álgebra. Como S forma una base de $\mathbb{K}[S]$, existe una biyección entre las funciones $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{K}$ y los funcionales lineales $\ell_\varphi : \mathbb{K}[S] \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $\ell_\varphi(s) = \varphi(s)$ con $s \in S$.

Proposición D.8. *Si $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{K}$, entonces φ es semidefinida positiva si y solo si ℓ_φ es un funcional lineal positivo en la $*$-álgebra $\mathbb{K}[S]$.*

Demostración. Si $a = \sum_{s \in S} \alpha_s s \in \mathbb{K}[S]$, tenemos que

$$\ell_\varphi(a^* a) = \sum_{s,t \in S} \varphi(s^* t)\, \bar{\alpha}_s \alpha_t.$$

Por las definiciones respectivas, se tiene la equivalencia. □

De aquí en adelante supondremos que A es una $*$-álgebra unitaria conmutativa, y S un $*$-semigrupo abeliano. Supondremos también que $\hat{A}$ es un espacio Hausdorff localmente compacto para la topología producto en $\mathbb{K}^A$ (topología de la convergencia puntual [10] pág. 281), lo cual se verifica si A está finitamente generada.

Definición D.9. Un funcional lineal $\ell : A \longrightarrow \mathbb{K}$ es un *funcional momento* si existe una medida de Radon positiva μ en $\hat{A}$ tal que la aplicación $\chi \mapsto \chi(a)$ es μ-integrable en $\hat{A}$ y verifica

$$\ell(a) = \int_{\hat{A}} \chi(a) d\mu(\chi)$$

para todo $a \in A$.

Lema D.10. *Todo funcional momento es un funcional lineal positivo en A.*

Demostración. Sea $a \in A$. Para $\chi \in \hat{A}$ tenemos $\chi(a^* a) = \chi(a^*)\chi(a) = |\chi(a)|^2$ y por tanto

$$\ell(a^* a) = \int_{\hat{A}} \chi(a^* a) d\mu(\chi) = \int_{\hat{A}} |\chi(a)|^2 d\mu(\chi) \geq 0.$$

□

Definición D.11. Una función $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{K}$ es una *función momento* si existe una medida de Radon positiva μ en S^* tal que la aplicación $\chi \mapsto \chi(a)$ es μ-integrable en S^* y verifica que

$$\varphi(s) = \int_{S^*} \chi(s) d\mu(\chi)$$

para todo $s \in S$.

Observación D.12. Comparando las definiciones anteriores, vemos que tenemos una correspondencia biunívoca entre conceptos en S y su $*$-álgebra $\mathbb{K}[S]$. Una función $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{K}$ es un carácter del $*$-semigrupo S si y solo si ℓ_φ es un carácter de $\mathbb{K}[S]$. De la misma manera, φ es una función momento si y solo si ℓ_φ es un funcional momento. Utilizaremos cada concepto de manera intercambiable.

Corolario D.13. *Toda función momento $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{K}$ es semidefinida positiva.*

Demostración. Se deduce de la proposición D.8 y del lema D.10. □

Observación D.14. Consideramos $\mathbb{Z}$ como un $*$-semigrupo con la involución dada por $n^* = -n$. Existe un $*$-isomorfismo $n \mapsto z^n$ del $*$-álgebra $\mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ en el $*$-álgebra de los polinomios trigonométricos $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ definidos en $\mathbb{T}$, con la involución $p(z) = \sum_{j=-n}^{n} c_j z^j \mapsto p^*(z) = \sum_{j=-n}^{n} \overline{c_j} z^{-j}$. El conjunto de caracteres de $\mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}^* = \{\chi_z : z \in \mathbb{T}\}$, donde $\chi_z(p) = p(z)$. Veámoslo.

Si $t \in \mathbb{T}$, definimos $\chi_t(p) = p(t)$. Veamos que es carácter : tenemos que $\chi_t(1) = 1$, $\chi_t(pq) = p(t)q(t) = \chi_t(p)\chi_t(q)$ y $\chi_t(p^*) = \sum_{j=-n}^{n} \overline{c_j} t^{-j} = \sum_{j=-n}^{n} \overline{c_j} \overline{t^j} = \overline{\chi_t(p)}$, y evidentemente es lineal, luego es carácter.

Recíprocamente, veamos que todos los caracteres se pueden escribir como $\chi_t(p) = p(t)$. Si χ es un caracter , definimos $t = \chi(z)$. Entonces $|t|^2 = \chi(z)\overline{\chi(z)} = \chi(z)\chi(z^*) = \chi(z)\chi(z^{-1}) = \chi(1) = 1$, luego $|t| = |\chi(z)| = 1$. Por tanto, $t \in \mathbb{T}$. Además,

$$\chi(p(z)) = \chi(\sum_{j=-n}^{n} c_j z^j) = \sum_{j=-n}^{n} c_j \chi(z)^j = p(\chi(z)) = p(t) = \chi_t(p)$$

como queríamos demostrar. Tenemos entonces los isomorfismos $\mathbb{T} \cong \mathbb{Z}^* \cong \widehat{\mathbb{C}[\mathbb{Z}]} \cong \widehat{\mathbb{C}[z, z^{-1}]}$.

Teorema D.15 (Herglotz)**.** *Sea $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números complejos. Son equivalentes:*

a) Existe una medida de Radon μ en $\mathbb{T}$ tal que

$$s_n = \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu(z) \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

b) Para cualquier sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de números complejos de finitos términos no nulos, se tiene que

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j-k} c_k \overline{c_j} \geq 0.$$

Además, la medida μ es única.

Demostración. Podemos definir la aplicación $s : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $s(n) = s_n$, con funcional lineal asociado ℓ_s. Sea $q(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Entonces $q^*(z) = \sum_{j=0}^{n} \overline{c_j} z^{-j}$ y

$$\ell_s(q^* q) = \sum_{j,k=0}^{n} \ell_s\left(z^{k-j}\right) c_k \overline{c_j} = \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j-k} c_k \overline{c_j}. \tag{D.3}$$

Supongamos que existe una medida de Radon como se pide. Por la discusión precedente (observaciones D.12 y D.14), tenemos que la aplicación $s : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $s(n) = s_n = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} d\mu(z)$ es una función momento en el semigrupo $\mathbb{Z}^*$. Por el corolario D.13, s es semidefinida positiva, y por la proposición D.8, el funcional lineal ℓ_s es positivo. Por tanto, tenemos $\ell_s\,(q^*q) \geq 0$ y por (D.3), la primera implicación.

Veamos el recíproco. Sea $p \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ tal que $p(z) \geq 0$ para $z \in \mathbb{T}$. Por el teorema de Fejér-Riesz D.1, existe un polinomio $q(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ tal que $p = q^*q$. Por (D.3), tenemos que $\ell_s(p) = \ell_s(q^*q) \geq 0$. Por tanto, la restricción de ℓ_s al subespacio real $E = \left\{p \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] : p = p^*\right\}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ es E_+-positiva. Por la proposición D.5, la restricción de ℓ_s a E está dada por una medida de Radon μ en el espacio $\mathbb{T}$. Por tanto, también lo está ℓ_s en $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$, y se tiene la otra implicación.

La unicidad se debe a que los polinomios $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ son densos en $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ por el teorema de Stone-Weierstrass. $\square$

Bibliografía

[1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum mechanics*, volume 1. WILEY-WCH Verlag, 2nd edition, 2019.

[2] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer, 1985.

[3] G. B. Folland. *Real analysis*. John Wiley & Sons, 2nd edition, 1999.

[4] F. Gieres. Mathematical surprises and Dirac's formalism in quantum mechanics. *Reports on Progress in Physics*, 63(12):1893–1931, Nov. 2000.

[5] B. C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer, 2013.

[6] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer, 2 edition, 1976.

[7] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, 1978.

[8] B. V. Limaye. *Functional Analysis*. New Age International, 2nd edition, 1996.

[9] V. Moretti. *Spectral theory and quantum mechanics: With an introduction to the algebraic formulation*. Springer, 2013.

[10] J. R. Munkres. *Topology*. Pearson Prentice Hall, 2nd edition, 2014.

[11] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, 1980.

[12] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1987.

[13] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Education (ISE Editions), 2 edition, 1991.

[14] K. Schmüdgen. *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*. Springer, 2012.

[15] K. Schmüdgen. *The moment problem*. Springer, 2017.

[16] A. Vera López and P. Alegría Ezquerra. *Un curso de análisis funcional. Teoría y problemas.* AVL, 1997.