Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

FACTORIZACIÓN PARA FUNCIONES ENTERAS

Autor: Álvaro Gutiérrez Sánchez
Tutores: Félix Galindo Soto e Ignacio Miguel Cantero
Año 2024

Resumen

Dada una cantidad finita de números complejos $z_1, z_2, ..., z_n$, es fácil encontrar una función entera cuyos ceros coincidan con los puntos prefijados anteriormente. Para ello, basta considerar el polinomio de grado n dado por

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n).$$

Si quisiéramos que una función tuviera un cero de orden m_k en el punto z_k, la solución estaría en repetir el factor $(z - z_k)$ exactamente m_k veces en el producto que define el polinomio $p(z)$. El problema que se pretende ilustrar en este trabajo de fin de grado consiste en dar respuesta a la pregunta de qué ocurriría en el caso de disponer de una cantidad infinita de puntos dados. Como ejemplo, si considerásemos la sucesión de los números enteros, la función $f(z) = \sin(\pi z)$ es entera y se anula en dichos puntos. Para desarrollar este trabajo será necesario abordar la teoría de productos infinitos y orden de una función entera con el fin de dar una prueba de los teoremas de factorización de funciones enteras clásicos en variable compleja: el teorema de factorización de Weierstrass y el teorema de factorización de Hadamard.

Abstract

Given a finite amount of complex numbers $z_1, z_2, ..., z_n$,it is easy to find an entire function whose zeros coincide with the previously fixed points. To do this, it is enough to consider the degree n polynomial given by

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n).$$

If we want a function to have a zero of order m_k at the point z_k the solution would be to repeat the factor $(z - z_k)$ exactly m_k times in the product that defines the polynomial $p(z)$. The problem intended to be illustrated in this undergraduate thesis is to answer the question of what would happen in the case of having an infinite number of given points. As an example, if we consider the sequence of integers, the function $f(z) = \sin(\pi z)$ s entire and vanishes at these points. To develop this work, it will be necessary to address the theory of infinite products and the order of an entire function in order to provide a proof of the classical factorization theorems of entire functions in complex variables: the Weierstrass factorization theorem and the Hadamard factorization theorem.

Índice general

Introducción

En la asignatura obligatoria "Variable Compleja" que se imparte en el tercer curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de Valladolid, se estudian los resultados esenciales de la teoría elemental de funciones de variable compleja, que constituyen una introducción al campo del análisis complejo. Sin embargo, quedan fuera del programa de la asignatura resultados fundamentales de esta área de las matemáticas, cuyo estudio resulta accesible al estudiante tras esta formación inicial. En particular, en esta asignatura se estudian las series de números complejos y funciones, las que, como es bien conocido, consisten en una suma infinita de números o funciones complejas, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. La pregunta inicial a la que se da respuesta en este trabajo, es qué sucede si en vez de tener una suma infinita de números o funciones complejas, tenemos un producto infinito de números o funciones complejas $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ o $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$.

Los productos infinitos están muy relacionados con el estudio de los ceros de funciones enteras, en concreto con la factorización de estas funciones que permite el conocimiento de dichos ceros. En este sentido, utilizaremos la teoría sobre productos infinitos de números y funciones complejas para probar los teoremas de factorización clásicos en variable compleja: el teorema de factorización de Weierstrass y el teorema de factorización de Hadamard.

Estos teoremas nos permitirán dar respuesta a una pregunta que perseguiremos a lo largo de todo el trabajo, la cual pasamos a explicar. En caso de que tengamos un abierto del plano complejo U y un conjunto finito de puntos de U, $z_1, z_2, ..., z_n$, es fácil encontrar una función holomorfa en U cuyos ceros coincidan con los puntos prefijados anteriormente. Efectivamente, basta con considerar el polinomio de grado n dado por

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Si quisiéramos que la función tuviese un cero de orden m_k en el punto z_k, bastaría con repetir el factor $(z - z_k)$ exactamente m_k veces en el producto que define el polinomio $p(z)$, obteniendo así la expresión

$$p(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_n)^{m_n}.$$

La pregunta que nos plantearemos será entonces: ¿qué sucede en el caso en el que buscamos una función f holomorfa y no idénticamente nula en U que se anule infinitas veces en U?

Puesto que el conjunto de ceros de una función holomorfa no idénticamente nula es a lo sumo numerable, a menudo, supondremos que estos ceros son los puntos de una sucesión de números complejos, que habitualmente denotaremos por $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

En consecuencia, es suficiente con dar respuesta a la siguiente cuestión: sea U un abierto del plano complejo y sean $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de U sin puntos de acumulación en U y $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números naturales; ¿existe una función f holomorfa en U tal que sus únicos ceros se encuentran en los puntos z_n y la multiplicidad de cada z_n como cero de f venga dada por el término m_n?

En el primer capítulo se presenta la teoría sobre los productos infinitos de números complejos. Conceptos clásicos en el estudio de las series númericas, como la convergencia y la convergencia absoluta, se sustituyen en el caso de los productos infinitos por definiciones alternativas de estos conceptos, más adecuadas a la naturaleza de la nueva teoría que estamos desarrollando, justificando siempre el porqué de estos cambios. Se concluye el capítulo con la estrecha relación entre la teoría sobre series y productos infinitos: el problema del estudio la convergencia y la convergencia absoluta de un producto infinito se puede transformar en el estudio de la convergencia y la convergencia absoluta de una serie y viceversa.

El segundo capítulo está dedicado a la teoría sobre productos infinitos de funciones. Por un lado, se formaliza la teoría sobre estos productos, y por otro se obtiene una condición suficiente para asegurar la convergencia de uno de estos productos en un abierto hacia una función con una característica reseñable en dicho abierto: que sea holomorfa. Para ello, en primer lugar, partiendo de los resultados obtenidos en el primer capítulo sobre los productos infinitos de números complejos, se desarrolla la teoría sobre los productos infinitos de funciones complejas. De nuevo, se introducen definiciones alternativas de los conceptos clásicos en el estudio de la teoría sobre series, en este caso, de funciones complejas. En segundo lugar, se introduce una topología especifica sobre el conjunto de las funciones holomorfas en un abierto $\mathcal{H}(U)$: la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos o topología compacta-abierta. Después, se prueba una condición suficiente para asegurar la convergencia de un producto de funciones en $\mathcal{H}(U)$. De nuevo, esta condición necesaria estará relacionada con las series.

El tercer capítulo está dedicado al primero de los dos teoremas de factorización clásicos que se abordan en este trabajo: el teorema de factorización de Weierstrass. Para ello, inicialmente se introducen los factores elementales de Weierstrass, funciones auxiliares que jugarán un papel fundamental en la factorización de funciones enteras a partir del conocimiento de sus ceros. Seguidamente se estudian las propiedades de estos factores elementales y se obtienen los resultados necesarios para concluir con la prueba del teorema de factorización de Weierstrass. Este teorema nos da una forma de factorizar una función entera f a partir de sus ceros, apareciendo en dicha factorización un producto infinito de factores elementales de Weierstrass. Con el fin de ilustrar este importante resultado, a partir de la sucesión de los números enteros, se desarrolla la factorización de la función $\sin(\pi z)$, cuyos ceros se encuentrán precisamente en los puntos de dicha sucesión. Seguidamente, como consecuencia de la factorización de la función anterior se obtendrá la famosa fórmula de Wallis. Para cerrar el capítulo, se prueba el resultado que resuelve de forma completa el problema de la construcción de una función holomorfa en un abierto con ceros y multiplicidades de estos predeterminados, respetando las condiciones naturales impuestas por el principio de los ceros aislados. Por último, como corolario del resultado anterior se deduce la estructura de cuerpo de cocientes que tiene el conjunto de las funciones meromorfas en un abierto U, $\mathcal{M}(U)$, con respecto al dominio de integridad

$\mathcal{H}(U)$.

El cuarto y último capítulo concluye el trabajo con la prueba del teorema de factorización de Hadamard. Este teorema es una mejora del teorema de factorización de Weierstrass, pues gracias a él se pueden obtener varias simplificaciones en la factorización de f que se obtiene a partir de este último, añadiendo una condición clave a la función f: que sea de orden finito. Empezaremos introduciendo la fórmula de Poisson-Jensen y, como corolario de esta, la de Jensen, las cuales serán necesarias para desarrollar algunas de las pruebas de este capítulo. Después, presentaremos los conceptos de orden de una función entera y exponente de convergencia de la sucesión de ceros no nulos de una función entera f. Cuando ambos son finitos, se obtienen las simplificaciones mencionadas en la factorización de Weierstrass. Más adelante probaremos que si el primero es finito, el segundo también lo es, lo que nos llevará al enunciado definitivo del teorema de factorización de Hadamard, en el que solamente aparece la condición de que el orden de f sea finito. Por último, volveremos a factorizar la función $\sin(\pi z)$, utilizando en esta ocasión los nuevos resultados desarrollados en este capítulo, y obtendremos una fórmula de factorización general para funciones definidas por una combinación lineal de exponenciales.

Capítulo 1

Productos infinitos de números complejos

En este capítulo abordaremos una recopilación de definiciones, notaciones y resultados básicos sobre la teoría de los productos infinitos de números complejos. En todo el trabajo y en particular en este capítulo, trabajaremos sobre el cuerpo de los números complejos, que denotaremos por $\mathbb{C}$, el cual suponemos dotado de su topología usual, la generada por la norma euclídea. En la redacción de este capítulo, seguiremos fundamentalmente [5, p.164-166], aunque para profundizar en detalles más técnicos sobre la convergencia de los productos infinitos utilizaremos [9, p. 4-6]. Suponemos conocidos los conceptos y resultados del análisis complejo vistos en el Grado en Matemáticas.

1.1. Productos infinitos. Convergencia de un producto infinito

Definición 1.1.1. Dada una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, se le puede asociar una sucesión de productos parciales $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por:

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A esta sucesión de productos parciales, se le denomina *producto infinito* de factores $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y se le representa por $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

Observación 1.1.2. Dependiendo de la naturaleza del problema estudiado, a veces nos interesará comenzar el producto infinito a partir del término m-ésimo de la sucesión, denotándolo entonces como $\prod_{n=m}^{\infty} z_n$.

Ahora, en analogía con las series de números complejos, nuestro objetivo será ver cuando podemos decir que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente o no. Si, en analogía con el estudio de series numéricas, consideramos que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si su sucesión de productos parciales $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, nos encontraríamos con comportamientos patológicos que deseamos evitar, como los siguientes:

I. Un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ sería convergente hacia cero con que uno de los términos z_n fuese nulo, sin importar los valores de los términos restantes de la sucesión.

II. El producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ podría ser convergente hacia cero sin que ninguno de los factores z_n lo fuese (situación contradictoria con el caso de un producto finito). Como ejemplo, tomemos un número complejo b con $|b| < 1$ y definamos la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $z_n = b$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que el término n-ésimo de la sucesión de productos parciales está dado por $p_n = b^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ y con ello $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 0$.

Para prevenir estas situaciones debemos dar una definición alternativa de convergencia de un producto infinito. Para ello, introduciremos los *productos parciales de doble índice* $p_{m,n}$:

$$p_{m,n} = \prod_{k=m}^{n} z_k, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad m \le n.$$

Además, denotaremos por $\widetilde{Z_m}$ al límite de la sucesión de productos parciales $\{p_{m,n}\}_{n\ge m}$, esto es,

$$\widetilde{Z_m} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=m}^{n} z_k.$$

Utilizando estos productos parciales damos la siguiente definición de convergencia de un producto infinito.

Definición 1.1.3. Decimos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es *convergente* si existe un valor $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión de productos parciales de doble índice $\{p_{m_0,n}\}_{n\ge m_0}$ tiene un límite $\widetilde{Z_{m_0}} \neq 0$. Es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=m_0}^{n} z_k = \widetilde{Z_{m_0}} \neq 0.$$

En estas condiciones, llamamos *valor del producto* a $Z = z_1 z_2 \cdots z_{m_0-1}\widetilde{Z_{m_0}}$ y, abusando de la nootación, lo denotamos por $Z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

Observación 1.1.4. I. Para que un producto infinito converja debe existir $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \neq 0$ para cada $n \ge m_0$, es decir, no debe haber infinitos términos nulos en la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

II. Si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de términos no nulos entonces la sucesión de productos parciales $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ también lo es, pues por definición $p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$ es producto de n términos no nulos, y por tanto es no nulo.

Lo mismo es válido cuando la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de términos no nulos de un término ℓ_0 en adelante, en este caso $\{p_{\ell_0,n}\}_{n\ge\ell_0}$ es de términos no nulos.

Ejemplo 1.1.5. Sea $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión dada por $z_0 = 0$ y $z_n = 1$ para cada $n \ge 1$. El producto es convergente, pues la sucesión de productos parciales $\{p_{1,n}\}_{n\ge1}$ es $p_{1,n} = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego $\widetilde{Z_1} = 1 \neq 0$ y el producto $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente. Además, el valor del producto es $Z = \prod_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 \cdot \widetilde{Z_1} = 0 \cdot 1 = 0$.

Observación 1.1.6. El valor del producto, Z, es independiente del índice m_0. Si el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente significa que existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $\{z_n\}_{n=m_0}^{\infty}$ es de términos no nulos y la sucesión de productos parciales de doble índice $\{p_{m_0,n}\}_{n\geq m_0}$ converge hacia un $\widetilde{Z_{m_0}} \neq 0$. Sea $\ell_0 \in \mathbb{N}$ el mínimo de los $m_0 \in \mathbb{N}$ que satisface esto. Entonces, $z_n \neq 0$ para cada $n \geq \ell_0$, por lo tanto tomando un índice $\ell > \ell_0$ la sucesión de productos parciales $\{p_{\ell,n}\}_{n\geq \ell}$ es una sucesión de términos no nulos con límite $\widetilde{Z_\ell} \neq 0$. Además,

$$\widetilde{Z_{\ell_0}} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=\ell_0}^{n} z_k = z_{\ell_0} \cdots z_{\ell-1} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=\ell}^{n} z_k = z_{\ell_0} \cdots z_{\ell-1}\widetilde{Z_\ell},$$

por lo que

$$Z = z_1 \cdots z_{\ell_0-1}\widetilde{Z_{\ell_0}} = z_1 \cdots z_{\ell_0-1} z_{\ell_0} \cdots z_{\ell-1}\widetilde{Z_\ell},$$

como queríamos demostrar.

Ejemplo 1.1.7. Como ejemplo de lo expuesto en la observación precedente vamos a considerar el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ donde $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$es la sucesión definida como sigue:

$$z_1 = a \in \mathbb{C}, \qquad z_n = \frac{n^2}{n^2-1}, \quad n \geq 2.$$

Este producto infinito es convergente, pues tomando la sucesión de productos parciales de doble índice $\{p_{2,n}\}_{n\geq 2}$ dada por

$$p_{2,n} = \prod_{k=2}^{n} z_k = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}, \quad n \geq 2,$$

tenemos que es una sucesión de términos no nulos que converge hacia un límite $\widetilde{Z_2} \neq 0$. Explícitamente:

$$p_{2,n} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{4^2}{4^2-1} \cdots \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{2n}{n+1}, \quad n \geq 2, \tag{1.1.1}$$

siendo esta última igualdad sencilla de demostrar a través del principio de inducción matemática.

Efectivamente, razonando por inducción sobre n vemos que para $n = 2$, $p_{2,n} = \frac{2^2}{2^2-1} = \frac{4}{3}$ por lo que la igualdad es válida para $n = 2$. Suponiendo ahora que la igualdad es cierta para n, veamos que también es cierta para $n + 1$:

$$\begin{aligned} p_{2,n+1} &= \prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^2}{k^2-1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1} = \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1} \\ &= \frac{2n(n+1)}{n^2+2n} = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2(n+1)}{(n+1)+1}, \end{aligned}$$

lo cual demuestra la veracidad de la igualdad anterior para el caso $n + 1$. Por lo tanto, por el principio de inducción matemática, la igualdad (1.1.1) es cierta para cada $n \geq 2$.

Teniendo en cuenta esto, tenemos que:

$$\widetilde{Z_2} = \lim_{n\to\infty} p_{2,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2,$$

luego el producto es convergente, y su valor por definición es $Z = z_1\widetilde{Z_2} = 2a$.

Tomando ahora $\ell = 4 > 2$, y aprovechando la igualdad obtenida por inducción previamente, tenemos que la sucesión de productos parciales $\{p_{4,n}\}_{n\geq 4}$ resulta:

$$p_{4,n} = \prod_{k=4}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_3} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4n}{3(n+1)}, \quad n \geq 4,$$

y por lo tanto, $\widetilde{Z_4} = \lim_{n\to\infty} p_{4,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3(n+1)} = \frac{4}{3}$.

Finalmente vemos que

$$Z = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \widetilde{Z_4} = a \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{3} = 2a,$$

el mismo valor del producto que el obtenido trabajando con la sucesión de productos parciales de doble índice $\{p_{2,n}\}_{n\geq 2}$.

Definición 1.1.8. Se dice que un producto es *divergente* si no es convergente.

Proposición 1.1.9. Supongamos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente. Entonces $\widetilde{Z_m} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=m}^{n} z_k$ existe para cada $m \in \mathbb{N}$. Además $\lim_{m\to\infty} \widetilde{Z_m} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

Demostración. Supongamos que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente. Por definición, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=n_0}^{n} z_k = \widetilde{Z_{n_0}} \neq 0$ y la sucesión $\{z_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ es de términos no nulos de donde se deduce que la sucesión de productos parciales de doble índice $\{p_{n_0,n}\}_{n\geq n_0}$ es también de términos no nulos. Por tanto si $m > n_0$ se tiene que $p_{n_0,m-1} \neq 0$ y

$$\widetilde{Z_m} = \frac{\widetilde{Z_{n_0}}}{p_{n_0,m-1}}.$$

Además, $\lim_{m\to\infty} p_{n_0,m-1} = \widetilde{Z_{n_0}}$ por lo que $\lim_{m\to\infty} \widetilde{Z_m} = 1$. Si $m < n_0$, entonces

$$\widetilde{Z_m} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=m}^{n} z_k = z_m \cdots z_{n_0-1} \cdot \widetilde{Z_{n_0}},$$

por lo que $\widetilde{Z_m}$ existe para cada $m \in \mathbb{N}$.

Para la última parte, basta observar que $\widetilde{Z_n} \neq 0$ para cada $n \geq n_0$ y $z_n = \widetilde{Z_n}/\widetilde{Z_{n+1}}$ por lo que $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$. □

Observación 1.1.10. De la segunda parte de la proposición anterior se deriva una *condición necesaria de convergencia* de un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ y por lo tanto un criterio negativo de convergencia, puesto que para asegurar que un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ no es convergente, bastará con verificar que $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 1$. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el recíproco en general no es cierto, es decir, la condición de que $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$ no implica la convergencia del producto.

Ejemplo 1.1.11. I. Volviendo a la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ del ejemplo 1.1.7, habíamos visto que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$, es convergente, y efectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-1} = 1.$$

II. El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ no converge, pues $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

III. Sea $\{z_n\}_{n=2}^{\infty}$ dada por $z_n = 1 - \frac{1}{n}$, para cada $n \geq 2$. Vemos que en este caso se satisface la condición necesaria de convergencia para productos infinitos, pues $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$. Sin embargo, el producto no es convergente, pues analizando la sucesión de productos parciales $\{p_{2,n}\}_{n\geq 2}$ vemos que

$$p_{2,n} = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}, \quad n \geq 2, \tag{1.1.2}$$

igualdad que se prueba razonando por inducción.

Efectivamente, el caso $n = 2$ es trivial pues

$$p_{2,2} = \prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2},$$

y suponiendo que la igualdad es cierta para n, tenemos que

$$p_{2,n+1} = \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1},$$

con lo que queda probada la veracidad de la igualdad para el caso $n + 1$, y por lo tanto por el principio de inducción la igualdad (1.1.2) es válida para cada $n \geq 2$.

Recapitulando, tenemos que el término n-ésimo de la sucesión de productos parciales esta dado por $p_{2,n} = \frac{1}{n}$ para cada $n \geq 2$; como $\{p_{2,n}\}_{n\geq 2} = \{1/n\}_{n\geq 2}$ es una sucesión convergente hacia 0 no podremos encontrar ningún $m \geq 2$, cuya sucesión de productos parciales de doble índice asociada $\{p_{m,n}\}_{n\geq m}$ sea convergente hacia un límite no nulo. Concluimos que el producto $\prod_{n=2}^{\infty} z_n$ es divergente, como queríamos demostrar.

1.2. Condiciones suficientes de convergencia

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar el carácter de un producto infinito, es decir, averiguar si este es convergente o no. Para abordar este problema, nos será de ayuda el estudio de las series de números complejos con las cuales ya estamos familiarizados. En particular, en esta sección daremos condiciones suficientes que nos permitirán asegurar la convergencia de un producto infinito en función de la convergencia de una serie determinada. Para este fin nos será de utilidad un recordatorio breve de la teoría vista en el Grado en Matemáticas sobre los logaritmos de números complejos (la función $\log(z)$ en una rama determinada). Consultar [6, p. 42].

1.2.1. Logaritmos complejos. La función logaritmo

Recordemos que la función exponencial compleja $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es periódica y por lo tanto no es inyectiva por lo que no podemos definir una inversa global como en el caso real. Sin embargo, su restricción a ciertos dominios sí es inyectiva, lo que permite la construcción de funciones inversas a las que denominamos *ramas del logaritmo*. Efectivamente, dado $c \in \mathbb{R}$ la función exponencial compleja es inyectiva en la banda

$$B_c = \{z \in \mathbb{C} : c \leq \mathrm{Im}(z) < c + 2\pi\}$$

y una biyección si restringimos la llegada a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, por lo que podemos definir la aplicación inversa de $\exp\big|_{B_c}$ es decir, de la exponencial restringida a esa banda, que denotaremos como $\log_c : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to B_c$.

La función $\log_c : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to B_c$ nos da los valores inversos de la exponencial compleja dentro de la banda B_c por lo que la denominamos *rama o determinación del logaritmo con rango B_c*.

Notación. Cuando $c = -\pi$, es decir, si tomamos la rama del logaritmo con rango $B_{-\pi} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi \leq \mathrm{Im}(z) < \pi\}$ la inversa recibe el nombre particular de *rama principal del logaritmo.*

Observación 1.2.1. Si $c \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la determinación del logaritmo con rango B_c viene dada por la expresión

$$\log_c(z) = \ln(|z|) + i \arg_c(z), \tag{1.2.1}$$

donde $\arg_c(z)$ representa el único argumento de z que pertenece al intervalo $[c, c + 2\pi)$ y ln representa al logaritmo natural o neperiano.

De lo anterior, deducimos que en el caso particular de tomar la determinación principal del logaritmo, se tiene que

$$\log_{-\pi}(x) = \ln(x),$$

para cada $x \in (0, \infty)$.

En este trabajo, y salvo que se diga lo contrario utilizaremos la rama principal del logaritmo, por lo que por comodidad la denotaremos simplemente por log.

1.2.2. Condición suficiente de convergencia

Hemos visto ya que para que un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converja, es necesario que exista un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \neq 0$ para cada $n \geq m_0$ y que además la sucesión de productos parciales $\{p_{n,m_0}\}_{n \geq m_0}$ converja hacia un límite no nulo $\widetilde{Z_{m_0}}$. Como estamos interesados en hablar de productos convergentes, por lo anterior, supondremos que todos los términos de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ son no nulos y que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge hacia un límite no nulo. Esto se puede suponer sin pérdida de generalidad, pues para los productos convergentes que tengan un número finito de términos nulos, bastará con comenzar el producto en el término m_0-ésimo de la sucesión, de modo que no se altere el carácter convergente o no del producto infinito.

Aprovechando que la exponencial de una suma es el producto de las exponenciales de los sumandos y que por lo anterior podemos suponer que no hay ningún factor nulo en el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$, podemos estudiar la convergencia del producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ estudiando la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$, donde log denota la rama principal del logaritmo complejo.

Con esto, hemos conseguido transformar el problema de estudiar la convergencia de un producto infinito, en un problema ya conocido, estudiar la convergencia de una serie de números complejos.

Notemos ahora que de la convergencia del producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ se sigue que $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$, como consecuencia de la condición necesaria de convergencia para productos infinitos. Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Re}(z_n) > 0$ para cada $n \geq m$. De hecho, podemos suponer que $\mathrm{Re}(z_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En caso de no ser así bastaría con estudiar el producto desde el término m-ésimo en adelante para asegurarnos de que tenemos una sucesión de términos con parte real estrictamente positiva.

Teniendo esto en cuenta, veamos ahora una proposición que formaliza la idea anterior.

Proposición 1.2.2. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos con $\mathrm{Re}(z_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a $Z \neq 0$ si, y solo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ converge.

Demostración. En primer lugar, tiene sentido considerar $\log(z_n)$, ya que, por hipótesis $\mathrm{Re}(z_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probemos la condición suficiente. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ converge. Tomando la sucesión de sumas parciales de la serie anterior dadas por $s_n = \sum_{k=1}^{n} \log(z_k)$, sabemos que si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, entonces $\lim_{n\to\infty} \exp(s_n) = \exp(s)$ pero por las propiedades de la exponencial y el logaritmo se tiene que $\exp(s_n) = \prod_{k=1}^{n} z_k$, luego $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge hacia $\exp(s) \neq 0$.

Veamos ahora la condición necesaria. Supongamos que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge. Escribimos este límite en forma polar con el argumento perteneciente a la rama principal, es decir, $Z = re^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta < \pi$. Consideremos la determinación del logaritmo con rango $B_{\theta-\pi} = \{z \in \mathbb{C} : \theta - \pi \leq \mathrm{Im}(z) < \theta + \pi\}$ del producto parcial $p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$, esto es,

$$\log_{\theta-\pi}(p_n) = \ln(|p_n|) + i\theta_n,$$

con $\theta - \pi \leq \theta_n < \theta + \pi$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Esta elección de la determinación del logaritmo permite asegurar la continuidad del logaritmo en Z y en consecuencia de esto que $\log_{\theta-\pi}(p_n) \to \log_{\theta-\pi}(Z)$ si $n \to \infty$. Tomando ahora la suma parcial $s_n = \sum_{k=1}^{n} \log(z_k)$, con $n \in \mathbb{N}$, deducimos como antes que $\exp(s_n) = p_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, luego $s_n = \log_{\theta-\pi}(p_n) + 2\pi i k_n$ para algún entero k_n, con $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, si restamos dos términos consecutivos de la sucesión de sumas parciales tenemos que $s_n - s_{n-1} = \log(z_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, pues $z_n \to 1$ si $n \to \infty$ ya que hemos supuesto que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, y por tanto la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe cumplir la condición necesaria de convergencia. Como habíamos visto, $s_n = \log_{\theta-\pi}(p_n) + 2\pi i k_n$ para algún entero k_n, con $n \in \mathbb{N}$, y al tenerse que $s_n - s_{n-1} \to 0$ cuando $n \to \infty$, separando en partes reales e imaginarias se sigue que $\log_{\theta-\pi}(p_n) - \log_{\theta-\pi}(p_{n-1}) \to 0$, cuando $n \to \infty$, y también $k_n - k_{n-1} \to 0$, si $n \to \infty$. Dado que $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números enteros, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k_n = k$ para cada $n \geq n_0$, por lo que $s_n \to \log_{\theta-\pi}(Z) + 2\pi i k$, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ converge. $\square$

1.2.3. Convergencia absoluta de productos infinitos

Nuestro objetivo ahora es dar una definición adecuada de convergencia absoluta para los productos infinitos de números complejos. Recordemos que una serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se denomina absolutamente convergente cuando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

Como ocurre con el estudio de la convergencia, no es apropiado introducir el concepto de convergencia absoluta de un producto infinito por analogía con las series, puesto que la convergencia del producto $\prod_{n=1}^{\infty} |z_n|$ no implica la convergencia del producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$, situación patológica a todas luces. Para ilustrar esto, basta tomar como ejemplo la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $z_n = -1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ pues $|z_n| = 1$, con $n \in \mathbb{N}$, y se tiene que $\prod_{n=1}^{\infty} |z_n| = 1$. Sin embargo, vemos que la sucesión de productos parciales $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ esta dada por $p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^n$, $n \geq 1$, por lo que la sucesión de productos parciales no converge, y por tanto el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es divergente.

Además, de nuevo en contraposición con el concepto de convergencia absoluta para series, con esta definición se cumpliría que si $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ convergiese también convergería absolutamente. En efecto, si $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, significa que existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ cumpliendo que la sucesión de productos parciales $\{p_{m_0,n}\}_{n \geq m_0}$ converge a un límite $\widetilde{Z_{m_0}} \neq 0$ lo que implica que $\{q_{m_0,n}\}_{n \geq m_0}$ la sucesión de productos parciales del producto de los módulos $\prod_{n=m}^{\infty} |z_n|$ converge también hacia un límite no nulo. Fijémonos que al ser el producto de los módulos igual al módulo del producto, se cumple que $\{q_{m_0,n}\}_{n \geq m_0} = \{|p_{m_0,n}|\}_{n \geq m_0}$, y por lo tanto el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

Para establecer una definición adecuada de convergencia absoluta de un producto infinito nos serviremos de la condición suficiente de convergencia de un producto infinito obtenida en la proposición 1.2.2. Además, utilizaremos también otro resultado sobre la convergencia absoluta de las series cuyo enunciado y demostración ofrecemos inmediatamente después de unos preliminares necesarios.

Para la demostración de la siguiente proposición necesitamos dar una acotación para $|\log(1+z)|$ en función del módulo de z.

Lema 1.2.3. Sea $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < \frac{1}{2}$. Entonces,

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|.$$

Demostración. La función $f(z) = \log(1+z)$ es analítica en el punto $z = 0$, luego la podemos desarrollar en serie de potencias en torno a dicho punto. Efectivamente:

$$f(z) = \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - ...$$

serie de potencias centrada en $z = 0$ cuyo radio de convergencia es 1. Esto quiere decir que podemos representar la función f a través de su desarrollo en serie de potencias en el abierto $B(0,1)$. Por su parte, la función identidad, $id_{\mathbb{C}}(z) = z$, es entera, luego el cociente entre ambas funciones

$$\psi(z) = \frac{\log(1+z)}{z}$$

es una función analítica en los puntos en los que lo es la función f salvo en $z = 0$, pues dicho punto es un cero del denominador y la función ψ presenta una singularidad evitable en dicho punto.

Por tanto, si $0 < |z| < 1$ tenemos que

$$\left| 1 - \frac{\log(1+z)}{z} \right| = \left| \frac{1}{2}z - \frac{1}{3}z^2 + ... \right| \leq \frac{1}{2}(|z| + |z^2| + ...) = \frac{1}{2} \frac{|z|}{1-|z|}, \tag{1.2.2}$$

donde se ha utilizado la desigualdad triangular y la fórmula de la suma de una progresión geométrica de razón $|z|$.

Tomando ahora $z \in B^*(0, \frac{1}{2}) \subset B^*(0,1)$ se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{|z|}{1-|z|} \leq \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

y por lo tanto de la desigualdad (1.2.2) se sigue que

$$\left| 1 - \frac{\log(1+z)}{z} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{|z|}{1-|z|} \leq \frac{1}{2}.$$

Aplicando la segunda desigualdad triangular a lo anterior y despejando $|\log(1+z)|$ llegamos a que

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|, \quad z \in B^*(0, 1/2).$$

Como la desigualdad es válida si $z = 0$, establecemos la desigualdad en toda la bola. □

Proposición 1.2.4. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos con $\mathrm{Re}(z_n) > -1$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+z_n)$ converge absolutamente si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

Demostración. Veamos primero la condición suficiente. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, lo que por definición significa que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge. Aplicando la condición necesaria de convergencia para series se deduce que $|z_n| \to 0$

cuando $n \to \infty$, por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| < \frac{1}{2}$ para cada $n \geq n_0$, por lo que estamos en condiciones de utilizar el lema 1.2.3, deduciendo así que

$$|\log(1 + z_n)| \leq \frac{3}{2}|z_n|, \quad n \geq n_0,$$

por lo que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} |\log(1 + z_n)|$ está mayorada por la serie $\frac{3}{2}\sum_{n=n_0}^{\infty} |z_n|$, que es convergente. Concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + z_n)$ converge absolutamente, como deseábamos probar.

Probemos ahora la condición necesaria. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+z_n)$ converge absolutamente, esto es, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1+z_n)|$ converge. De nuevo, por la condición necesaria de convergencia para series sabemos que $\lim_{n\to\infty} |\log(1+z_n)| = 0$, lo que implica que $\lim_{n\to\infty} \log(1 + z_n) = 0$ luego $\lim_{n\to\infty}(1 + z_n) = 1$ y finalmente $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. Por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| < \frac{1}{2}$ para cada $n \geq n_0$ lo que nos sitúa en las condiciones necesarias para aplicar la cota inferior obtenida en el lema 1.2.3 y deducir que

$$\frac{1}{2}|z_n| \leq |\log(1 + z_n)|, \quad n \geq n_0,$$

por lo que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} |z_n|$ converge al estar mayorada por una serie convergente, y por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente. $\square$

Utilizando este resultado podemos dar una definición adecuada de convergencia absoluta para productos infinitos.

Definición 1.2.5. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos con $\mathrm{Re}(z_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ converge absolutamente.

Observación 1.2.6. Esta definición de convergencia absoluta de un producto infinito garantiza que si el producto converge absolutamente entonces converge. En efecto, si $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ converge absolutamente, luego converge, y aplicando la proposición 1.2.2 se sigue que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge.

Además, si un producto es absolutamente convergente, cualquier reordenamiento de los factores del producto (es decir, de los términos de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$) nos da un nuevo producto, también absolutamente convergente, pues sabemos que los reordenamientos de los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ nos dan una serie absolutamente convergente si la original lo era.

Combinando esta definición de convergencia absoluta con las proposiciones 1.2.2 y 1.2.4 obtenemos el siguiente corolario, que proporciona un criterio fundamental para la convergencia de los productos infinitos, y que frente a los anteriores, tiene la ventaja de que no aparece el logaritmo complejo, lo que simplifica el trabajo.

Corolario 1.2.7. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos con $\mathrm{Re}(z_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n - 1)$ converge absolutamente.

Demostración. Sea $w_n = z_n - 1$ para cada $n \geq 1$. Probemos primero la condición suficiente. Por hipótesis, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge absolutamente de donde aplicando la proposición 1.2.4, se sigue que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n)$ converge absolutamente. Por definición, concluimos que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

Recíprocamente, si $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(w_n+1)$ converge absolutamente y de la proposición 1.2.4 se sigue que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty}(z_n - 1)$ converge absolutamente. $\square$

Ejemplo 1.2.8. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión dada por $z_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El producto $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolutamente, pues como es bien conocido, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente (pues es una serie de Riemann con exponente $\beta = 2 > 1$) y absolutamente convergente, pues al ser una serie de términos positivos la serie de los módulos coincide con la serie original. Aplicando el corolario anterior concluimos la convergencia absoluta del producto.

Observación 1.2.9. Algunos autores como Robert B. Ash y W.P. Novinger en [3, p. 138] toman el corolario anterior como definición de convergencia absoluta de un producto infinito y utilizando los mismos resultados que hemos utilizado nosotros obtienen como corolario la definición de convergencia absoluta de un producto que hemos dado nosotros. Estas dos definiciones son por lo tanto equivalentes.

Capítulo 2

Productos infinitos de funciones complejas

Nuestro objetivo en este capítulo es formalizar la teoría sobre los productos infinitos, en este caso de funciones complejas. Esta teoría, aparte de tener interés por sí misma, será necesaria para la demostración de los teoremas de factorización. Como es de esperar, los siguientes conceptos y resultados guardan una estrecha relación con los productos infinitos de números complejos. Además, como en el caso de estos últimos, el estudio de los productos infinitos de funciones complejas está relacionado con las series, en este caso de funciones complejas. En este aspecto, se supondrán conocidos los resultados sobre sucesiones y series de funciones complejas vistos durante el Grado en Mtemáticas. Durante todo el capítulo, X denotará un conjunto no vacío. Para la redacción de este capítulo, hemos seguido fundamentalmente [5, p. 166-168].

2.1. Productos infinitos de funciones. Modos de convergencia

Definición 2.1.1. Dada una sucesión de funciones complejas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un conjunto no vacío X, se denomina *producto infinito de factores* f_n a la sucesión de productos parciales $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$P_n = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n = \prod_{k=1}^{n} f_k, \quad n \geq 1,$$

y se le representa por $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$.

El término P_n recibe el nombre de *producto parcial n-ésimo* y a f_n se le denomina *factor n-ésimo* del producto.

Como en el caso de las series de funciones, en los productos infinitos de funciones se presentan varios *modos de convergencia.*

Definición 2.1.2. Sean X un conjunto no vacío y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{C}$. Se dice que el producto infinito de funciones $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ es *puntualmente* *convergente* en X si el producto infinito de números complejos $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para cada $x \in X$. En este caso la función f definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x), \quad x \in X,$$

se denomina *función producto* y se suele denotar también por $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$, esto es,

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in X.$$

Definición 2.1.3. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas en el conjunto X. Se dice que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ es *uniformemente convergente* si es puntualmente convergente en X y la convergencia de la sucesión de productos parciales $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniforme hacia la función producto f en X.

Observación 2.1.4. La convergencia uniforme de un producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ implica la convergencia puntual del mismo.

Definición 2.1.5. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas en un conjunto X no vacío. Se dice que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ es *absolutamente convergente* en X si el producto de números complejos $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente para cada $x \in X$.

Observación 2.1.6. La convergencia absoluta de un producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ implica la convergencia puntual del mismo.

2.2. Condiciones suficientes de convergencia

El siguiente resultado establece condiciones suficientes para afirmar que un producto infinito de funciones converge, según veremos, en los tres modos de convergencia definidos anteriormente. Este resultado se restringe al caso de espacios métricos (X, d) compactos. Esto no es un problema, pues más adelante, mediante la introducción de una topología determinada, veremos que podemos generalizar este resultado a conjuntos abiertos $U \subseteq \mathbb{C}$, lo que será suficiente para nuestras pretensiones.

Para su demostración será necesario previamente probar un lema, que da respuesta a la siguiente cuestión: sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas en un conjunto X que converge uniformemente hacia una función en X. ¿En qué condiciones podemos asegurar que $\exp(f_n)$ converge uniformemente hacia $\exp(f)$ en X?

Lema 2.2.1. Sean X un conjunto no vacío y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas, $f_n : X \to \mathbb{C}$, que converge uniformemente en X hacia una función f tal que $\mathrm{Re}(f)$ es acotada en X. Entonces la sucesión de funciones $\{\exp f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia $\exp f$ en X.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis, $\mathrm{Re}(f)$ es acotada en X luego existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $|\mathrm{Re}(f(x))| \leq a$ para cada $x \in X$.

Por otra parte, la función exponencial es continua en $\mathbb{C}$, y en particular, lo es en el punto $z = 0$, y $\exp(0) = 1$. Por tanto, existe un $\delta > 0$ tal que $|e^z - 1| < \epsilon e^{-a}$ para cada $z \in B(0, \delta)$.

Por último, dado que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f en X, podemos tomar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ para cada $n \geq n_0$ y para cada $x \in X$.

Llegamos entonces a que

$$|\exp(f_n(x) - f(x)) - 1| < \epsilon e^{-a}, \quad n \geq n_0, \quad x \in X. \tag{2.2.1}$$

Desarrollando esta expresión,

$$|\exp(f_n(x) - f(x)) - 1| = \left| \frac{\exp f_n(x)}{\exp f(x)} - 1 \right|, \quad n \geq n_0, \quad x \in X.$$

Multiplicando ahora la expresión anterior por $|\exp f(x)|$ y teniendo en cuenta la desigualdad (2.2.1) tenemos que

$$|\exp f_n(x) - \exp f(x)| < \epsilon e^{-a} |\exp f(x)| = \epsilon e^{-a} \exp \operatorname{Re}(f(x)) \leq \epsilon e^{-a} e^{a} \leq \epsilon,$$

para cada $n \geq n_0$ y $x \in X$. Concluimos la convergencia uniforme de $\{\exp f_n\}_{n=1}^{\infty}$ hacia $\exp f$ en X. □

Teorema 2.2.2. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{C}$. Si la serie funcional

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x), \quad x \in X,$$

converge de forma absoluta y uniforme en X, entonces el producto infinito de funciones

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n(x)), \quad x \in X,$$

converge de forma absoluta y uniforme en X. Además, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = 0$ si, y sólo si, $g_n(x) + 1 = 0$ para algún $n \in \{1, \ldots, n_0\}$.

Demostración. De la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ en X, deducimos la existencia de un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|g_n(x)| < 1/2$ para cada $n > n_0$ y $x \in X$.

Por un lado, esto implica que $\operatorname{Re}(1 + g_n(x)) > 0$ para cada $n > n_0$ y $x \in X$. Como por hipótesis la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ converge absolutamente para cada $x \in X$, del corolario 1.2.7 se sigue que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + g_n(x))$ converge absolutamente para cada $x \in X$, es decir, converge absolutamente en X. Además, también por ser $\operatorname{Re}(1 + g_n(x)) > 0$ para cada $n > n_0$ y $x \in X$, deducimos que la función $h_n(x) = \log(1 + g_n(x))$ está bien definida y es continua en X para cada $n > n_0$. Consideremos ahora la serie funcional $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} h_n$, y su sucesión de sumas parciales $\{S_k\}_{k=n_0+1}^{\infty}$, dada por

$$S_k(x) = \sum_{n=n_0+1}^{k} h_n(x) = \sum_{n=n_0+1}^{k} \log(1 + g_n(x)), \quad x \in X.$$

Por otro lado, estamos en condiciones de aplicar el lema 1.2.3 y deducir que

$$|h_n(x)| = |\log(1 + g_n(x))| \leq \frac{3}{2}|g_n(x)|$$

para cada $n > n_0$ y $x \in X$. De esto se sigue que la serie de funciones

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} h_n(x) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \log(1 + g_n(x))$$

converge uniformemente en X hacia su función suma, a la que llamaremos S. En otras palabras, la sucesión $\{S_k\}_{k=n_0+1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia S en X. Además, al ser cada función S_k suma de $k - n_0 - 1$ funciones continuas, S_k resulta continua para cada $k > n_0$, y al ser la convergencia hacia S uniforme en X, se sigue que S debe ser continua en X.

De la compacidad de X y la continuidad de S en X se deduce la acotación de S en dicho conjunto. En particular, $\mathrm{Re}(S)$ es una función acotada en X. Entonces, $\{S_k\}_{k=n_0+1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones complejas en X que converge uniformemente en X hacia una función S, cuya parte real es acotada en X, por tanto, podemos utilizar el lema 2.2.1 para concluir que la sucesión $\{\exp(S_k)\}_{k=n_0+1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia $\exp(S)$ en X.

Por otro lado, la sucesión $\{\exp(S_k)\}_{k=n_0+1}^{\infty}$ coincide con la sucesión $\{P_k\}_{k=n_0+1}^{\infty}$ de productos parciales del producto $\prod_{n=n_0+1}^{\infty}(1 + g_n(x))$. Efectivamente, utilizando las propiedades de la exponencial y el logaritmo,

$$\begin{aligned}
\exp(S_k(x)) &= \exp\left(\sum_{n=n_0+1}^{k} h_n(x)\right) = \exp\left(\sum_{n=n_0+1}^{k} \log(1 + g_n(x))\right) \\
&= \prod_{n=n_0+1}^{k} \exp(\log(1 + g_n(x))) = \prod_{n=n_0+1}^{k} (1 + g_n(x)) = P_k(x), \quad x \in X.
\end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión de productos parciales $\{P_k\}_{k=n_0+1}^{\infty}$ converge uniformemente en X hacia $\exp(S)$, que es un función no nula en X. Por tanto, el producto $\prod_{n=n_0+1}^{\infty}(1 + g_n(x))$ converge uniformemente hacia $\exp(S)$ en X.

Finalmente tenemos que

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + g_n(x)) = (1 + g_1(x)) \cdots (1 + g_{n_0}(x)) \exp(S(x))$$

y la convergencia es uniforme en X. Al ser $\exp(S)$ no nula en X deducimos que $f(x) = 0$ si, y sólo si, $1 + g_n(x) = 0$ para algún $n \in \{1, \ldots, n_0\}$. □

2.3. Convergencia sobre el espacio $\mathcal{H}(U)$

Para finalizar este capítulo, estudiaremos un resultado clave, que establece en qué condiciones podemos garantizar que el producto infinito de una sucesión de funciones holomorfas en un abierto converge hacia una función holomorfa en dicho abierto. Esta cuestión realmente atañe a la completitud del espacio de funciones holomorfas en un abierto. Previamente, debemos establecer algunas nociones elementales sobre estos espacios.

2.3.1. Topología de la convergencia uniforme sobre los compactos

Como venimos haciendo durante todo el trabajo, en esta sección trabajamos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, dotado de su topología usual generada por la norma euclídea.

Sea U un abierto de $\mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{C}(U)$ el conjunto de las funciones continuas de U en $\mathbb{C}$. Es bien conocido que $\mathcal{C}(U)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Además, de manera natural, podemos dotar a este conjunto de una topología para la cual las sucesiones convergentes son aquellas que convergen uniformemente sobre cada compacto $K \subseteq U$. Esta topología recibe el nombre de *la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos* o *topología compacta-abierta*.

Consideramos ahora el conjunto

$$\mathcal{H}(U) = \{f \in \mathcal{C}(U) : f \text{ es holomorfa en } U\}$$

De nuevo, las propiedades de la suma y el producto por escalares de las funciones holomorfas permiten deducir que $\mathcal{H}(U)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(U)$.

Recordemos ahora el teorema de Weierstrass, estudiado durante el grado. Ver [3, p. 30]

Teorema 2.3.1. (Teorema de Weierstrass). Sean U un abierto del plano complejo y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en U que converge uniformemente en los compactos de U hacia una función f. Entonces f es holomorfa en U. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de U hacia $f^{(k)}$.

El teorema de Weierstrass establece la completitud del espacio métrico $\mathcal{H}(U)$ con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos.

2.3.2. Convergencia de un producto infinito en $\mathcal{H}(U)$

Teorema 2.3.2. Sea U un subconjunto abierto del plano complejo. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(U)$ con f_n no idénticamente nula para cada $n \in \mathbb{N}$. Si la serie funcional

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z) - 1)$$

converge de manera uniforme y absoluta en los subconjuntos compactos de U entonces el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge en $\mathcal{H}(U)$ hacia una función f holomorfa en U. Además, si $a \in U$ es un cero de la función f, entonces a es un cero de un número finito de funciones f_n y la multiplicidad de a como cero de f es la suma de las multiplicidades de a como cero de las f_n.

Demostración. Sea $g_n = f_n - 1$ para $n \geq 1$. Por hipótesis, la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge uniformemente y absolutamente en los subconjuntos compactos de U. Aplicando el teorema 2.2.2, se sigue que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z))$ converge absoluta y uniformemente en los subconjuntos compactos de U. De la completitud de $\mathcal{H}(U)$ con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos, concluimos que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z))$ converge en $\mathcal{H}(U)$ hacia una función f holomorfa en U.

Probemos ahora la segunda parte. Supongamos que a es un cero de f. Existe $r>0$ tal que $\overline{B}(a,r)\subseteq U$. Esta bola cerrada es un subconjunto compacto de U y en particular es un espacio métrico compacto. Aplicando el teorema 2.2.2 deducimos que existe $n_0\in\mathbb{N}$ con

$$f(z)=f_1(z)\cdots f_{n_0}(z)\phi(z),$$

donde $\phi(z)$ es una función holomorfa y no nula en $\overline{B}(a,r)$. Por lo tanto $f(a)=0$ si y solo si existe $n\in\{1,...,n_0\}$ con $f_n(a)=0$ y si a tiene multiplicidad $m(f,a)$ como cero de f entonces

$$m(f,a)=\sum_{n=1}^{n_0}m(f_n,a)$$

donde $m(f_n,a)$ denota la multiplicidad de a como cero de f_n. $\square$

Definición 2.3.3. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U y no idénticamente nula. Si $U_0=U\setminus\{z\in U: f(z)=0\}$ la función definida en U_0 por f'/f se denomina *derivada logarítmica* de f.

Para el caso de los productos finitos de funciones holomorfas en U, $f=f_1\cdot f_2\cdots f_n$, donde $f_i\in\mathcal{H}(U)$ para cada $i=1,2,...,n$, se tiene la siguiente regla para calcular su derivada logarítmica

$$\frac{f'}{f}=\frac{f_1'}{f_1}+\frac{f_2'}{f_2}+...+\frac{f_n'}{f_n}, \tag{2.3.1}$$

pues utilizando la fórmula de la derivada del producto,

$$\frac{f'}{f}=\frac{\left(\prod_{k=1}^{n}f_k\right)'}{\left(\prod_{k=1}^{n}f_k\right)}=\frac{(f_1'\cdot f_2\cdots f_n)+...+(f_1\cdot f_2\cdots f_n')}{f_1\cdots f_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k'}{f_k}=\frac{f_1'}{f_1}+\frac{f_2'}{f_2}+...+\frac{f_n'}{f_n}.$$

El siguiente lema se introducirá una regla análoga a la anterior para el caso de un producto infinito de funciones holomorfas en U. Para la prueba de este teorema es de utilidad recordar algunas propiedades de la convergencia uniforme de sucesiones de funciones estudiadas durante el Grado. Consultar [8, p. 299] y [1, p. 302]

Proposición 2.3.4. Sean X un conjunto no vacío y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas en X. Si la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de funciones acotadas en X y es uniformemente convergente, entonces el límite puntual f es una función acotada y la sucesión está uniformemente acotada.

Proposición 2.3.5. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones en un mismo conjunto X, que convergen uniformemente en X hacia las funciones f y g, respectivamente.

I. La sucesión $\{f_n+g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia $f+g$ en X.

II. Si, además, ambas sucesiones están uniformemente acotadas en X, entonces la sucesión $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia fg en X.

Teorema 2.3.6. Sean U un abierto del plano complejo y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones no idénticamente nulas del espacio $\mathcal{H}(U)$. Supongamos que $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en $\mathcal{H}(U)$ hacia una función f. Entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}, \quad \text{si} \quad f(z) \neq 0,$$

y la convergencia es uniforme en los subconjuntos compactos de U que no contienen ceros de f.

Demostración. Consideremos la sucesión de productos parciales $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ del producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ dada por

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} f_k(z), \quad z \in U.$$

Sea K un subconjunto compacto de U que no contiene ceros de f. Por hipótesis, la sucesión de productos parciales $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f en K. De la segunda parte del teorema de Weierstrass (teorema 2.3.1) se sigue que la sucesión $\{P_n'\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f' en K. Consideramos ahora la sucesión $\{1/P_n\}_{n=1}^{\infty}$. Esta es una sucesión de funciones bien definidas y holomorfas en K, pues $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ lo es y por hipótesis este conjunto no contiene ceros de f. Veamos ahora que esta sucesión converge uniformemente hacia $1/f$ en K. Por hipótesis, $f(z) \neq 0$ en K. Por la continuidad de f en K, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > \delta$ para cada $z \in K$. Por la convergencia uniforme de $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ hacia f en K, se deduce que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|P_n(z) - f(z)| < \delta/2$ para cada $n \geq n_0$. Aplicando la desigualdad triangular inversa,

$$|P_n(z)| = \big|f(z) - (f(z) - P_n(z))\big| \leq \big||f(z)| - |f(z) - P_n(z)|\big|,$$

y

$$\frac{\delta}{2} > |P_n(z) - f(z)| \geq \big||P_n(z)| - |f(z)|\big|, \quad n \geq n_0,$$

luego $|P_n(z)| > \delta/2$ para cada $n \geq n_0$. En consecuencia, el cociente $1/P_n$ esta bien definido para cada $n \geq n_0$ en K y

$$\left|\frac{1}{P_n(z)} - \frac{1}{f(z)}\right| = \frac{|P_n(z) - f(z)|}{|P_n(z)f(z)|} = \frac{|P_n(z) - f(z)|}{|P_n(z)||f(z)|} < \frac{2}{\delta^2}|P_n(z) - f(z)|, \quad n \geq n_0, \quad z \in K.$$

De la convergencia uniforme de $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ hacia f en K se sigue la de $\{1/P_n\}_{n=1}^{\infty}$ hacia $1/f$ en K.

Por otro lado, al ser las sucesiones $\{1/P_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{P_n'\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones holomorfas, luego continuas en el abierto U, y ser el conjunto $K \subseteq U$ compacto, ambas sucesiones son de funciones acotadas en K. Además, ambas sucesiones convergen uniformemente hacia $1/f$ y f' respectivamente en dicho conjunto. En virtud de la proposición 2.3.4 las funciones límite, $1/f$ y f' son acotadas y ambas sucesiones están uniformemente acotadas en K.

Por tanto, tenemos que $\{P_n'\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{1/P_n\}_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones que convergen uniformemente en K hacia f' y $1/f$ respectivamente y están uniformemente acotadas en K. Aplicando la proposición 2.3.5 apartado II, se deduce que el producto de ambas, $\{P_n'/P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en K hacia P'/P.

Utilizando ahora la regla (2.3.1) para el calculo de la regla de la derivada logarítmica de P_n, se tiene que

$$\frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}, \quad z \in K,$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Capítulo 3

El teorema de factorización de Weierstrass.

Este capítulo esta dedicado al primero de los dos teoremas de factorización que estudiaremos en este trabajo: el teorema de factorización de Weierstrass. Este teorema nos proporciona una factorización de una función entera a partir del conocimiento de sus ceros. Además, en parte final del capítulo daremos respuesta completa a la pregunta de la introducción del trabajo sobre la construcción de funciones holomorfas en un abierto con ceros predeterminados. Para la redacción de este capítulo, hemos seguido fundamentalmente [5, p. 168-175].

3.1. Factores elementales

Definición 3.1.1. Llamaremos *factor elemental* a cada una de las siguientes funciones complejas $E_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas para $p = 0, 1, 2...$ por

$$E_0(z) = 1 - z;$$
$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right), \quad p = 1, 2...$$

Estas funciones fueron introducidas por Weierstrass y jugarán un papel fundamental en el teorema de factorización que deseamos demostrar.

Notación. Llamaremos factor elemental p-ésimo a la función E_p.

A continuación destacaremos las principales propiedades de estos factores elementales.

Observación 3.1.2. (Propiedades de los factores elementales).

I. Cada factor elemental E_p es una función entera.

II. Fijado $a \in \mathbb{C}$, para cada $p = 0, 1, 2...$ la función $E_p(z/a)$ presenta un cero simple en el punto $z_0 = a$ y no tiene ningún otro cero.

Efectivamente,

$$E_0\Big(\frac{z}{a}\Big) = 1 - \frac{z}{a},$$

tiene un cero simple en $z_0 = a$. Por otro lado, como

$$E_p\Big(\frac{z}{a}\Big) = E_0\Big(\frac{z}{a}\Big) \exp\left(\frac{z}{a} + \frac{(\frac{z}{a})^2}{2} + ... + \frac{(\frac{z}{a})^p}{p}\right), p = 1, 2, ...$$

deducimos, gracias a que la exponencial es no nula en $\mathbb{C}$, que el factor E_p presenta un cero simple en $z_0 = a$.

En particular, la función $E_p(z)$ presenta un cero simple en $z_0 = 1$ para cada $p = 0, 1, 2...$

De las dos observaciones anteriores seguimos que si U es un abierto del plano complejo con $z_0 = a \in U$ y tomamos $b \in \mathbb{C} \setminus U$ entonces la función $E_p((z-a)/(z-b))$ es holomorfa en U y presenta un cero simple en $z_0 = a$.

3.2. Resultados previos al teorema de factorización

Lema 3.2.1. Sean $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq 1$ y $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$. En particular, si $|z| < 1$ se tiene que $E_p(z) \to 1$ cuando $p \to \infty$.

Demostración. Supongamos primero que $p = 0$. Tenemos entonces que $E_0(z) = 1 - z$ por lo que $|1 - E_0(z)| = |1 - (1 - z)| = |z|$, lo que resulta válido para $z \in \mathbb{C}$ y en particular para $|z| \leq 1$.

Fijado ahora $p \geq 1$, el factor elemental E_p es una función entera, es decir, es analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ y en particular lo es en el punto $z_0 = 0$. Por lo tanto podemos representar la función E_p por su desarrollo en serie de potencias centrado en $z_0 = 0$, cuyo radio de convergencia será infinito por ser E_p una función entera.

Sea entonces $E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, el desarrollo en serie de potencias de la función E_p.

Derivando ahora la función E_p y su desarrollo en serie de potencias llegamos a dos expresiones para la derivada de E_p, una en forma de serie de potencias y otra en forma de función compleja analítica. Por supuesto, estas dos expresiones tienen que ser iguales puesto que E_p coincide con su desarrollo en serie de potencias en todo $\mathbb{C}$ y es entera.

Efectivamente, por un lado tenemos que

$$E_p'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, \quad z \in \mathbb{C},$$

y por otro que

$$\begin{aligned}
E_p'(z) &= -\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^p}{p}\right)+(1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^p}{p}\right)(1+z+...+z^{p-1}) \\
&= -\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^p}{p}\right)+\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^p}{p}\right)(1-z^p) \\
&= -z^p\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^p}{p}\right), \quad z\in\mathbb{C},
\end{aligned}$$

e igualando las dos expresiones anteriores llegamos a que

$$E_p'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kz^{k-1}=-z^p\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^p}{p}\right), \quad z\in\mathbb{C}, \tag{3.2.1}$$

de donde se deducen las siguientes propiedades sobre los coeficientes del desarrollo a_k:

En primer lugar, $a_1=...=a_p=0$ pues $E_p'(z)$ es el producto de la función

$$\phi_p(z)=\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^p}{p}\right)$$

y el término $(-z^p)$ por lo que el desarrollo en serie de potencias de $E_p'(z)$ es el producto de los desarrollos de ambas funciones, luego todos sus términos serán de grado mayor o igual que p. Puesto que esta serie también se puede obtener derivando el desarrollo en serie de potencias de E_p, se sigue que en el desarrollo de E_p no aparecen términos de grado menor que $p+1$, salvo el término independiente, $E_p(0)=1$.

En segundo lugar, notemos que en el desarrollo en serie de potencias de la función

$$\phi_p(z)=\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^p}{p}\right)$$

todos los coeficientes son positivos. En efecto, este se obtiene componiendo el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial

$$\exp(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k, \quad z\in\mathbb{C},$$

que tiene coeficientes positivos, con el polinomio de grado p

$$P(z)=z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^p}{p}, \quad z\in\mathbb{C}.$$

De la igualdad (3.2.1) se deduce que $a_k\le 0$ para cada $k\ge p+1$.

De las dos propiedades de los coeficientes de la serie de potencias de E_p obtenidas anteriormente, se deduce que

$$|a_k|=-a_k,$$

para cada $k = 1, 2...$ y

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Evaluando ahora la función y su desarrollo en serie de potencias en el punto $z = 1$ e igualando ambas expresiones, tenemos que

$$0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k,$$

de donde se sigue que

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=p+1}^{\infty} (-a_k) = -\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = 1.$$

Por tanto, si imponemos que $|z| \leq 1$ podemos establecer la acotación buscada de la siguiente forma:

$$|E_p(z) - 1| = \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \right| = |z|^{p+1} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1} \right| \leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = |z|^{p+1},$$

para cada $z \in \overline{B}(0, 1)$.

Por último, si suponemos que $|z| < 1$ utilizando la acotación anterior llegamos a que $0 \leq |E_p(z) - 1| \leq |z|^{p+1}$, y al ser $|z| < 1$ se verifica que $|z|^{p+1} \to 0$ si $p \to \infty$, por lo que podemos utilizar el criterio del sandwich para deducir que $\lim_{p\to\infty} E_p(z) = 1$. $\square$

Observación 3.2.2. También se puede probar la última parte del lema anterior de la siguiente forma: si $|z| < 1$, utilizando el desarrollo en serie de potencias de la función

$$\log(1 - z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-1}{p} z^p, \quad z \in B(0, 1),$$

donde se ha tomado la determinación principal del logaritmo complejo, tenemos que

$$E_p(z) \to (1 - z) \exp(-\log(1 - z)) = 1, \quad z \in B(0, 1),$$

cuando $p \to \infty$.

Nuestro objetivo ahora será, utilizando los factores elementales que han sido introducidos en este capítulo, dar respuesta a la pregunta de la introducción del trabajo sobre la construcción de una función de una función holomorfa en un abierto U con sus ceros y las multiplicidades de estos preestablecidos, en el caso particular en el que $U = \mathbb{C}$.

Observación 3.2.3. Antes de abordar este problema, debemos aclarar que tanto en el caso $U = \mathbb{C}$ como en el caso en el que U sea un abierto arbitrario de $\mathbb{C}$, es suficiente con considerar el caso en el que el conjunto de los ceros de f, $Z(f)$, es a lo sumo numerable. Efectivamente, si $Z(f)$ fuese no numerable, escribiendo

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B}(0,n),$$

se deduce que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f tendrá infinitos ceros en el conjunto compacto $\overline{B}(0,n_0)$. Por tanto, $Z(f)$ tiene un punto de acumulación finito, lo que contradice el principio de los ceros aislados. En consecuencia, es suficiente con dar respuesta a la siguiente cuestión: sea U un abierto del plano complejo y sean $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de U sin puntos de acumulación en U y $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números naturales; ¿existe una función f holomorfa en U tal que sus únicos ceros se encuentran en los puntos z_n y la multiplicidad de cada z_n como cero de f venga dada por el término m_n?

Teorema 3.2.4. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos no nulos de $\mathbb{C}$ verificando que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Si $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de enteros no negativos tales que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{p_n+1} \tag{3.2.2}$$

es convergente para cada $r > 0$, entonces el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right),$$

converge hacia una función entera f. Esta función satisface que $f(z) = 0$ si, y sólo si, $z = z_n$ para algún $n \geq 1$. Aún más, si el punto z_0 aparece exactamente m veces en la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ entonces f tiene un cero en z_0 de multiplicidad m.

Demostración. Sea $r > 0$. Por hipótesis $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| \geq r$ para cada $n \geq n_0$. Por tanto, si $z \in \overline{B}(0,r)$ se tiene que $|z|/|z_n| \leq 1$ para cada $n \geq n_0$ lo que nos sitúa en condiciones de aplicar el lema 3.2.1 y deducir que

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1}, \quad n \geq n_0.$$

Por tanto, los términos de la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$$

están mayorados por los términos de la serie convergente (3.2.2) en la bola compacta $\overline{B}(0,r)$, por lo que converge normalmente en dicha bola. De la arbitrariedad de r se sigue que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right)$$

converge normalmente en los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, por lo que converge de forma absoluta y uniforme en los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Aplicando el teorema 2.3.2 se deduce que el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

converge en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ hacia una función entera f, y que si z_0 es un cero de f, entonces su multiplicidad coincide con la suma de las multiplicidades de z_0 como cero de las funciones $E_{p_n}(z/z_0)$. Sabemos que esta multiplicidad es 1 para cada $n \in \mathbb{N}$, luego el orden de z_0 como cero de f es el número de veces que aparece z_0 en la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por tanto, para que z_0 sea un cero de f es condición necesaria y suficiente que z_0 pertenezca al rango de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Observación 3.2.5. I. La condición sobre la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ impuesta en las hipótesis del teorema anterior implica que no hay ningún término de la sucesión que se repita infinitas veces y que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$.

II. Siempre se pueden encontrar sucesiones de enteros no negativos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que cumplan la hipótesis (3.2.2) del enunciado del teorema anterior. Basta tomar como ejemplo la sucesión de enteros no negativos dada por $p_n = n - 1$ para $n \geq 1$. Efectivamente, fijado $r > 0$ al darse que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ se deduce que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| > 2r$ para cada $n \geq n_0$, por tanto,

$$\frac{r}{|z_n|} < \frac{1}{2}, \quad n \geq n_0,$$

por lo que la serie de términos positivos

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{n},$$

está mayorada por la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} 1/2^n$, la cual sabemos que converge Por tanto, por el criterio de comparación para series, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^n$ converge.

Pese a que se puedan construir otras sucesiones de enteros no negativos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumpliendo la hipótesis (3.2.2) del teorema 3.2.4, elegir la sucesión de enteros no negativos más simple posible resulta ventajoso, como veremos, a la hora de representar una función como producto de factores elementales, pues cuanto menor sea el término p_n más simple será el factor elemental E_{p_n}. En este aspecto, en algunas ocasiones se puede simplificar aún más la sucesión de enteros no negativos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumpliendo la hipótesis (3.2.2), como veremos en la siguiente observación.

III. **(Productos canónicos).** Consultar [10, p. 294-295] y [2, p. 143]. Si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ verifica que $|z_n|$ crece lo suficientemente rápido (condición un poco abstracta así enunciada pero que más adelante aclararemos completamente), podemos elegir una sucesión de enteros no negativos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ verificando la propiedad (3.2.2) y constante. Esto es de gran interés, pues si además elegimos $p_n = p$, siendo p el entero más pequeño posible verificando que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|z_n|}\right)^{p+1}$$

converge, en este caso el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

se escribirá como

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

con el factor elemental $E_p(z/z_n)$ lo más simple posible. A este producto infinito resultante se le denomina *producto canónico* asociado a $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Como ejemplo de lo anterior, veamos que si la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ verifica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|}$ converge, (como, por ejemplo, si $|z_n| = n^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$) entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{|z_n|}$ converge para cada $r > 0$ y es suficiente con tomar como sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión constante igual a 0, y el producto canónico asociado a $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ será entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_0\left(\frac{z}{z_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Si ahora la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|}$ diverge, pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^2}$ converge (como por ejemplo si $|z_n| = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$), podemos tomar como $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión constante igual a 1 y el producto canónico asociado a $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{z_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Sin embargo, no siempre es posible hallar el producto canónico de una sucesión de números complejos. Por ejemplo, si $\{z_n\}_{n=2}^{\infty}$ es tal que $|z_n| = \ln(n)$ para cada $n \geq 2$ entonces la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{|z_n|}\right)^{p+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^{p+1}$$

diverge para cada $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pues se trata de una serie de Bertrand (esto es, una serie de la forma $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^{\alpha} \ln(n)^{\beta}$) de exponente $\alpha = 0$. Por lo tanto, no es posible tomar una sucesión constante cumpliendo la propiedad (3.2.2). Concluimos que no existe el producto canónico de la sucesión $\{z_n\}_{n=2}^{\infty}$.

En el cuarto capítulo de este trabajo estableceremos exactamente en que condiciones existe el producto canónico de una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, para lo que nos hará falta introducir un nuevo concepto: el exponente de convergencia de una sucesión.

IV. Aunque en el enunciado del teorema 3.2.4 se haya supuesto que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea de términos no nulos, este teorema resuelve igualmente el problema de la construcción de una función entera con ceros y multiplicidades de estos ceros predeterminados, incluso en el caso de que uno de estos ceros sea el origen. Efectivamente, si la función f ha de tener como cero al origen con multiplicidad m, la función $\varphi(z) = z^m f(z)$, donde f es la función obtenida aplicando el teorema 3.2.4 a la sucesión de ceros no nulos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, es entera y cumple con las condiciones requeridas sobre sus ceros.

3.3. El teorema de factorización de Weierstrass

Llegamos ahora a uno de los objetivos clave de este trabajo. El teorema de factorización de Weierstrass.

Notación. Denotamos por $\{z_n\}_n$ a un conjunto a lo sumo numerable de números complejos. Este conjunto puede ser finito, en cuyo caso tendrá n elementos y $\{z_n\}_n = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$, o puede tratarse de un conjunto con una infinidad numerable de elementos, en cuyo caso $\{z_n\}_n$ será una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. En ambos casos, podemos definir el *producto de los elementos del conjunto.* En el primer caso, será un producto de una cantidad finita de términos, $\prod_{k=1}^{n} z_k$ y en el segundo caso, se tratará de un producto infinito de números complejos $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

Cuando no se especifique si $\{z_n\}_n$ es finito o infinito denotaremos el producto de los elementos del conjunto por $\prod_n z_n$.

Teorema 3.3.1. (Teorema de factorización de Weierstrass). Sea f una función entera no idénticamente nula y sean $\{z_n\}_n$ los ceros no nulos de f repetidos de acuerdo con sus multiplicidades. Supongamos que f tiene un cero en el origen de orden $m \geq 0$. En estas condiciones, existen una función entera g y un conjunto de enteros no negativos $\{p_n\}_n$ tales que

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_n E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Demostración. Supongamos primero que $\{z_n\}_n$ es un conjunto finito. Como hemos supuesto que los ceros no nulos de f aparecen repetidos en el conjunto $\{z_n\}_n$ de acuerdo a su multiplicidades como ceros de f, la función f puede ser escrita como

$$f(z) = z^m(z - z_1) \cdots (z - z_n)h(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

donde h es una función entera que no se anula en ningún punto de $\mathbb{C}$.

Por un lado, $z - z_i = \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)(-z_i) = E_0\left(\frac{z}{z_i}\right)(-z_i)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Por otro lado, al ser h una función entera, que no se anula en ningún punto de $\mathbb{C}$, admite logaritmo analítico en $\mathbb{C}$, lo que significa que existe una función entera g_0 tal que $h(z) = e^{g_0(z)}$, para cada $z \in \mathbb{C}$.

Por tanto, f se puede escribir como

$$f(z) = z^m(z - z_1) \cdots (z - z_n)h(z) = z^m e^{g_0(z)} \prod_{i=1}^{n} E_0\left(\frac{z}{z_i}\right)(-z_i). \tag{3.3.1}$$

Como hemos supuesto que z_i aparece repetido en la secuencia $\{z_n\}_n$ de acuerdo con su multiplicidad como cero de f, cada factor $E_0(z/z_i)$ se repetirá en el producto tantas veces como z_i se repita en $\{z_n\}_n$, es decir, su multiplicidad. Al ser $-z_i \neq 0$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se sigue que el producto de todos estos factores, $(-1)^n \prod_{i=1}^{n} z_i = w$, será un número complejo no nulo, por lo que tiene sentido considerar $\log(w)$. Si ahora escribimos

$g(z) = \log(w) + g_0(z)$, la expresión (3.3.1) se escribirá como

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{i=1}^{n} E_0\left(\frac{z}{z_i}\right),$$

lo que concluye la prueba del teorema en el caso finito.

Supongamos ahora que $\{z_n\}_n = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión, es decir, los ceros no nulos de f son infinitos. Al ser f no idénticamente nula, del teorema de los ceros aislados se sigue que la sucesión de sus ceros distintos del origen $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$, por tanto, de acuerdo con el teorema 3.2.4 y la observación 3.2.5 apartados II y IV, podemos elegir una sucesión de enteros no negativos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de forma que la función entera

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

tenga los mismos ceros que f y con las mismas multiplicidades. De esto se sigue que el cociente entre ambas funciones f/h es una nueva función compleja que presenta singularidades evitables en los puntos $z = 0, z_1, z_2, \ldots$ Por tanto, f/h es (o puede ser extendida a) una función entera sin ceros en todo el plano complejo, al ser $\mathbb{C}$ simplemente conexo, se sigue que esta nueva función admite logaritmo analítico en todo $\mathbb{C}$, es decir, existe una función entera g tal que

$$\frac{f(z)}{h(z)} = e^{g(z)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

y despejando de la igualdad anterior,

$$f(z) = h(z)e^{g(z)} = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

□

3.3.1. Factorización de la función $\sin(\pi z)$

Veamos ahora un ejemplo clásico del uso del teorema de factorización de Weierstrass, utilizandolo para factorizar la función $f(z) = \sin(\pi z)$.

Notación. Denotamos por $\{z_n\}_n$ a un conjunto a lo sumo numerable de números complejos. Indicamos por

$$\prod_{n\neq 0} z_n$$

el producto de todos los elementos del conjunto salvo el elemento correspondiente al índice $n = 0$.

De la misma forma, indicamos por

$$\sum_{n\neq 0} z_n$$

la suma de todos los elementos del conjunto salvo el elemento correspondiente al índice $n = 0$.

El siguiente teorema, estudiado en el Grado, proporciona una fórmula para el cálculo de series, basada en el teorema de los residuos. Para su demostración, se puede consultar [7, p. 330-334].

Teorema 3.3.2. (Fórmula de sumación). Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en un conjunto finito de singularidades aisladas, $S = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Supongamos que existen $R, M > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \quad \text{si} \quad |z| \geq R.$$

Entonces se tiene la siguiente *fórmula de sumación*:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S, |n|\leq N} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(\cot(\pi z) f(z), a_j).$$

Lema 3.3.3. Se verifica la igualdad

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Demostración. Para probar la igualdad del enunciado vamos a utilizar la fórmula de sumación 3.3.2, introducida previamente. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Consideremos la función

$$f(w) = \frac{z}{(z-w)w}, \qquad w \in \mathbb{C} \setminus \{0, z\}.$$

Esta función es holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en sus dos singularidades aisladas, z y 0. Si $|z| = M$, entonces, tomando $R = M + 1$ se tiene que

$$|f(w)| = \left| \frac{z}{(z-w)w} \right| = \frac{1}{|w|} \frac{|z|}{|z-w|} \leq \frac{1}{|w|} \frac{|z|}{||z| - |w||} = \frac{1}{|w|} \frac{M}{|M - |w||} \leq \frac{M}{|w|}, \text{ si } |w| \geq R.$$

Por tanto, estamos en condiciones de aplicar la fórmula de sumación 3.3.2 y establecer que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} f(n) = -\pi(\operatorname{Res}(\cot(\pi w) f(w), z) + \operatorname{Res}(\cot(\pi w) f(w), 0). \tag{3.3.2}$$

Veamos que a partir de esta igualdad podemos deducir la del enunciado. Por un lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f(n) = \frac{z}{(z-n)n} = \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad f(-n) = \frac{-z}{(z+n)n} = \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n},$$

por tanto,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Por otro lado, calculemos los residuos que aparecen en la igualdad (3.3.2). La función

$$\psi(w) = \cot(\pi w) f(w) = \frac{z \cot(\pi w)}{w(z-w)}$$

presenta un polo simple en el punto z, luego,

$$\operatorname{Res}(\psi, z) = -\frac{z \cot(\pi w)}{w}\bigg|_{w=z} = -\cot(\pi z).$$

Sin embargo, la singularidad de ψ en el origen se trata de un polo de orden 2. Para calcular $\operatorname{Res}(\psi, 0)$, obtendremos la parte singular del desarrollo de Laurent de ψ en torno al origen, el cual hallaremos calculando el producto de Cauchy de los desarrollos de Laurent de la función cotangente y la función $f(w) = (z/(z-w)w)$ en el punto 0.

En primer lugar, el desarrollo de Laurent de $f(w) = (z/(z-w)w)$ en torno al origen se obtiene descomponiendo la función anterior en fracciones simples y utilizando la fórmula de la suma de la serie geométrica de razón w/z.

$$f(w) = \frac{z}{(z-w)w} = \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} = \frac{1}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}}, \quad 0 < |w| < |z|,$$

luego la parte residual del desarrollo es $1/w$.

Para calcular el desarrollo de Laurent de $\cot(\pi w)$ en torno al origen debemos tener en cuenta que dicha función presenta un polo simple en cada entero, en particular, la parte residual de su desarrollo de Laurent en torno al origen constará de un único término, por lo que el desarrollo será de la forma

$$\cot(\pi w) = a_{-1}\frac{1}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad w \in B^*(0,1).$$

Recordemos además que esta función se define mediante el cociente

$$\cot(\pi w) = \frac{\cos(\pi w)}{\sin(\pi w)}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

por lo que

$$\cot(\pi w)\sin(\pi w) = \cos(\pi w), \quad w \in \mathbb{C},$$

e igualando sus desarrollos de Laurent (que en el caso del seno y el coseno coinciden con sus desarrollos de Taylor), se tiene que

$$\left(a_{-1}\frac{1}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n}, \quad w \in B^*(0,1).$$

Desarrollando ambas expresiones,

$$\left(a_{-1}\frac{1}{w} + a_0 + a_1 w + ...\right)\left(\pi w - \frac{1}{6}\pi^3 w^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 w^5 - ...\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\pi^2 w^2 + \frac{1}{4!}\pi^4 w^4 - ...\right),$$

si $0 < |w| < 1$. Haciendo el producto de los tres primeros términos del desarrollo de la cotangente y el desarrollo del seno e igualandoles a los tres primeros términos del desarrollo del coseno se sigue que $a_{-1} = 1/\pi$, $a_0 = 0$, $a_1 = -\pi/3$. En consecuencia, el desarrollo Laurent de $\cot(\pi w)$ tiene la forma

$$\cot(\pi w) = \frac{1}{\pi w} - \frac{\pi w}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n, \quad w \in B^*(0,1).$$

Finalmente, tomando $r = \min\{1, |z|\}$ y calculando el producto de Cauchy de los desarrollos de Laurent de f y $\cot(\pi w)$, se tiene que

$$\psi(w) = \left(\frac{1}{\pi w} - \frac{\pi w}{3} + ...\right)\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{z} + \frac{w}{z^2} + ...\right) = \frac{1}{\pi w^2} + \frac{1}{\pi z w} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n, \quad 0 < |w| < r.$$

En consecuencia, la parte residual del producto de Cauchy de ambos desarrollos resulta

$$\frac{1}{\pi w^2} + \frac{1}{\pi z w},$$

y $\mathrm{Res}(\psi, 0) = 1/\pi z$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z},$$

como queríamos demostrar. □

Empecemos con la factorización de la función seno. Los ceros de la función $\sin(\pi z)$ se encuentran en los números enteros y cada entero es un cero simple de $\sin(\pi z)$.

La función $f(z) = \sin(\pi z)$ es una función entera no idénticamente nula y $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ es el conjunto de ceros no nulos de f. Además, f presenta un cero simple en el origen. Por el teorema de factorización de Weierstrass, existen una función entera g y una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de enteros no negativos tales que

$$f(z) = \sin(\pi z) = z e^{g(z)} \prod_{n \neq 0} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right), \tag{3.3.3}$$

donde $z_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Puesto que

$$\sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2,$$

es convergente, por serlo $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2$, la serie

$$\sum_{n \neq 0} \left(\frac{r}{n}\right)^2$$

es convergente para cada $r > 0$. Por tanto, podemos tomar la sucesión de enteros no negativos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ constante igual a 1, satisfaciendo así la hipótesis (3.2.2) del teorema 3.2.4 y escribir

$$\sin(\pi z) = z e^{g(z)} \prod_{n \neq 0} E_1\left(\frac{z}{z_n}\right) = z e^{g(z)} \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}.$$

De acuerdo con la observación 3.2.5 hemos tomado el producto canónico de la sucesión de los números enteros.

Reordenando los términos del producto anterior se sigue que

$$\sin(\pi z) = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{3.3.4}$$

para alguna función entera g.

Nuestro objetivo ahora será encontrar la expresión analítica de la función g.

En primer lugar, sea

$$P(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Calculando $f'(z) = \pi \cos(\pi z)$ y utilizando la fórmula

$$\cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

se tiene que

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{e^{g(z)} g'(z) P(z) + e^{g(z)} P'(z)}{e^{g(z)} P(z)} = g'(z) + \frac{P'(z)}{P(z)}. \tag{3.3.5}$$

Calculemos ahora la expresión de $P'(z)/P(z)$: consideramos la sucesión de funciones enteras $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$P_0(z) = z, \quad P_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

La serie funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P_n(z) - 1) = (z - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2}$$

converge normalmente sobre los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, luego converge uniformemente y absolutamente sobre dichos subconjuntos. Por tanto, aplicando el teorema 2.3.2 se sigue que el producto

$$\prod_{n=0}^{\infty} P_n(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

converge uniformemente sobre los compactos de $\mathbb{C}$ hacia su función límite $P(z)$, y que esta función P es entera. Esto nos sitúa en condiciones de utilizar el teorema 2.3.6 y deducir que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

siendo la convergencia uniforme en los subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Sustituyendo ahora el término $P'(z)/P(z)$ en la igualdad (3.3.5) por la expresión que acabamos de obtener se tiene que

$$\pi \cot(\pi z) = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Sin embargo, por el lema 3.3.3 se tiene que

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

por lo que necesariamente $g'(z) = 0$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ y al ser $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ denso en $\mathbb{C}$ se sigue que la función $g'(z) = 0$ en $\mathbb{C}$. Concluimos que g es constante en $\mathbb{C}$.

Sea entonces $g(z) = a$, con $a \in \mathbb{C}$ constante. Sustituyendo en la igualdad (3.3.4) llegamos a que la factorización tiene la forma:

$$\sin(\pi z) = z e^a \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto, para $0 < |z| < 1$, se tiene que

$$\frac{\sin(\pi z)}{z} = e^a \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

y tomando el límite cuando $z \to 0$ se sigue que $\pi = e^a$, luego

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

llegando así a la factorización de la función $\sin(\pi z)$.

La representación de una función como un producto infinito es interesante puesto que resulta ventajosa en algunas ocasiones. Como ejemplo, veamos la utilidad de la representación de la función $\sin(\pi z)$ como producto infinito para demostrar la famosa fórmula de Wallis.

Proposición 3.3.4. (Fórmula de Wallis). Se verifica la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdots (2n-1)^2(2n+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots\cdots\cdots = \frac{\pi}{2}. \tag{3.3.6}$$

Demostración. Notemos que se cumple la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdots (2n-1)^2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}\right).$$

En primer lugar, tomando el desarrollo de la función $\sin(\pi z)$ como producto infinito y sustituyendo en $z = 1/2$ se tiene que

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right),$$

despejando de la desigualdad anterior, se sigue que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ converge hacia $2/\pi$. Es fácil ver que si un producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente hacia un valor $Z \neq 0$, entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty} 1/z_n$ converge hacia $1/Z$. En consecuencia, el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2}{4n^2 - 1}\right). \tag{3.3.7}$$

converge hacia $\pi/2$. Analizando ahora el límite del enunciado, notemos que se cumple la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdots (2n-1)^2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{4k^2}{4k^2-1} \right),$$

pero la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{4k^2}{4k^2-1} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

no es otra que la sucesión de productos parciales del producto infinito (3.3.7), por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{4k^2}{4k^2-1} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2}{4n^2-1} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

□

3.4. Construcción de una función holomorfa en un abierto con ceros predeterminados.

El siguiente teorema, utilizando la noción de convergencia en $\mathcal{H}(U)$, resuelve de forma definitiva el problema de la construcción de una función holomorfa en un abierto del plano complejo U con ceros y multiplicidades de dichos ceros predeterminados. Como en el resto del capítulo, el texto de referencia para esta prueba será [5, p. 170-173].

Teorema 3.4.1. Sean U un abierto del plano complejo y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de U distintos entre sí y sin puntos de acumulación en U, y sea $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números naturales. Existe una función f holomorfa en U tal que sus únicos ceros se encuentran en los puntos a_n y la multiplicidad de cada a_n como cero de f viene dada por el término m_n.

Demostración. En primer lugar, veamos que es suficiente demostrar el resultado para el caso particular en el que U es un abierto no acotado de $\mathbb{C}$ satisfaciendo que existe un $R > 0$ tal que

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subseteq U \quad \text{y} \quad |a_n| \leq R, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4.1}$$

Supongamos que bajo estas hipótesis existe una función f de $\mathcal{H}(U)$ cuyos únicos ceros se encuentran en los puntos a_n y la multiplicidad de cada a_n como cero de f viene dada por el término m_n. Supongamos además que la función f satisface la propiedad añadida de que

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 1.$$

Sea U_1 un abierto de $\mathbb{C}$ y sean $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de U_1, sin puntos de acumulación en U_1 y $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números naturales. Sea $a \in U_1$ y sea $r > 0$ tales que $\overline{B}(a, r) \subseteq U_1$ con $\alpha_n \notin B(a, r)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideramos ahora la transformación de Möbius u homografía $T : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$Tz = \frac{1}{z-a}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}.$$

Sea $U = T(U_1 \setminus \{a\})$. Veamos que U es un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene el exterior de una bola de radio R. La transformación T se trata de una traslación compuesta con una inversión y

$$T(B^*(a,r)) = \mathbb{C} \setminus B(0,1/r). \tag{3.4.2}$$

Efectivamente, si $z \in B^*(a,r)$, $0 < |z-a| < r$, por lo que

$$|Tz| = \left|\frac{1}{z-a}\right| > \frac{1}{r}.$$

Por tanto, $T(B^*(a,r)) \subseteq \mathbb{C} \setminus B(0,1/r)$. Por otro lado, por ser T una biyección de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tiene inversa en $T^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$, dada por $T^{-1}w = \dfrac{1}{w} + a$. Si ahora, $w \in \mathbb{C} \setminus B(0,1/r)$, se tiene que $0 < |T^{-1}w - a| = \dfrac{1}{|w|} < r$. En consecuencia, $T^{-1}(\mathbb{C} \setminus B(0,1/r)) \subseteq B^*(a,r)$ y por ser T biyectiva se sigue que, $\mathbb{C} \setminus B(0,1/r) \subseteq T(B^*(a,r))$, lo que prueba la igualdad (3.4.2). Puesto que $B^*(a,r) \subseteq U_1$, basta tomar $R \geq \frac{1}{r}$ para concluir que

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subseteq U. \tag{3.4.3}$$

Considerando ahora la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que se obtiene de la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ como

$$a_n = T\alpha_n, \quad n \geq 1,$$

se tiene que

$$|a_n| = |T\alpha_n| = \left|\frac{1}{\alpha_n - a}\right| \leq \frac{1}{r} \leq R,$$

pues $\alpha_n \notin B(a,r)$ para cada $n \geq 1$, luego $|\alpha_n - a| \geq r$ para cada $n \geq 1$. Por tanto, el abierto U y la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumplen las hipótesis (3.4.1), por lo que existe una función f holomorfa en U cuyos únicos ceros son los puntos de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y las multiplicidades de estos ceros vienen dadas por la sucesión de naturales $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces, la función $g(z) = f(Tz)$ es una función holomorfa en $U_1 \setminus \{a\}$ que presenta una singularidad evitable en el punto a, pues por hipótesis, $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$, y $Tz \to \infty$ cuando $z \to a$, por lo que

$$\lim_{z\to a} g(z) = \lim_{z\to a} f(Tz) = 1.$$

Por tanto, g es (o puede ser extendida a) una función holomorfa en U_1. Además, esta función presenta un cero en cada punto α_n de multiplicidad m_n y no presenta más ceros, por lo que satisface las condiciones requeridas.

Ahora debemos probar el enunciado en el caso particular en el que el conjunto U y la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumplan las hipótesis (3.4.1). Supongamos entonces que U y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfacen dichas hipótesis.

Definamos ahora la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ cuyo rango es el de la sucesión $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ pero con la propiedad de que para cada $j \geq 1$, $z_n = a_j$ para exactamente m_j valores de n. (Nótese que la sucesión $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ es la sucesión original de puntos del enunciado, simplemente hemos cambiado el nombre del índice por comodidad). Por hipótesis, $|a_j| \leq R$ para cada $j \in \mathbb{N}$ por lo que la sucesión $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ es acotada. Además, la sucesión $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ no tiene puntos de acumulación en U. Estas dos últimas propiedades de la sucesión $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ se traducen inmediatamente en las mismas propiedades para la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, por lo que esta última resulta una sucesión acotada y sin puntos de acumulación en U. En primer lugar, notemos que el caso $U = \mathbb{C}$ queda excluido, pues por ser $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada, por el teorema de Bolzano-Weierstrass (ver [4, p. 14]) podemos extraer de dicha sucesión una subsucesión convergente, por lo que el límite de esta subsucesión sería un punto de acumulación. Como $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene puntos de acumulación en U, dicho límite tendría que pertenecer al conjunto $\mathbb{C} \setminus U$, por lo que dicho conjunto no puede ser el vacío y en consecuencia $U \subsetneq \mathbb{C}$. Por ser U un subconjunto propio y abierto de $\mathbb{C}$ con $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subseteq U$, su complementario, $\mathbb{C} \setminus U$ resulta un subconjunto no vacío, cerrado y acotado. Por tanto, $\mathbb{C} \setminus U$ es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$, por lo que para cada $n \geq 1$ existe $w_n \in \mathbb{C} \setminus U$ tal que

$$|w_n - z_n| = \operatorname{dist}(z_n, \mathbb{C} \setminus U) = \inf\{|z_n - y| : y \in \mathbb{C} \setminus U\}.$$

Veamos ahora que $|w_n - z_n| = \operatorname{dist}(\mathbb{C} \setminus U, z_n) \to 0$, si $n \to \infty$. Para ello, razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\operatorname{dist}(\mathbb{C} \setminus U, z_n) \not\to 0$ cuando $n \to \infty$. En consecuencia, existen $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\operatorname{dist}(\mathbb{C} \setminus U, z_{n_k}) \geq \epsilon$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por ser la subsucesión anterior acotada, en virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass podemos extraer de ella una subsucesión convergente $\{z_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$. Sea z el límite de dicha subsucesión. Por ser $\operatorname{dist}(\mathbb{C} \setminus U, z_{n_{k_j}}) \geq \epsilon$ para cada $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $\operatorname{dist}(\mathbb{C} \setminus U, z) \geq \epsilon$. En consecuencia, $z \in U$, en contra de que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene puntos de acumulación en U. Concluimos que $|w_n - z_n| = \operatorname{dist}(\mathbb{C} \setminus U, z_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Consideremos ahora la sucesión de funciones en U, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, definida como

$$f_n(z) = E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right), \quad z \in U.$$

Cada una de estas funciones tiene un cero simple en el punto $z = z_n$ y no presenta más ceros. Veamos que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)$$

converge en $\mathcal{H}(U)$.

Sea K un subconjunto compacto de U, con $\operatorname{dist}(\mathbb{C} \setminus U, K) > 0$. Para cada punto $z \in K$ se tiene que

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| \leq \frac{|z_n - w_n|}{\operatorname{dist}(w_n, K)} \leq \frac{|z_n - w_n|}{\operatorname{dist}(\mathbb{C} \setminus U, K)}.$$

Como habíamos visto, $|w_n - z_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego para cada $\delta \in \mathbb{R}$ con $0 < \delta < 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| < \delta, \quad z \in K, \quad n \geq n_0.$$

Del lema 3.2.1 se sigue que

$$\left|E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right| \leq \delta^{n+1}, \quad z \in K, \quad n \geq n_0,$$

por tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right)$$

converge en K de manera uniforme y absoluta. Por la arbitrariedad del compacto K podemos utilizar el teorema 2.3.2 para concluir que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)$$

converge en $\mathcal{H}(U)$ hacia una función f holomorfa en U. Además el mismo teorema nos garantiza que los puntos de la sucesión $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ son los únicos ceros de f y la multiplicidad de a_j como cero de f es m_j, pues el punto a_j aparece m_j veces en la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Para concluir, únicamente falta probar que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$. Para ello, sea $\epsilon > 0$ y $R_1 > R$. Si $|z| \geq R_1$, como $|z_n| \leq R$ y $w_n \in \mathbb{C} \setminus U \subseteq \overline{B}(0,R)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| \leq \frac{2R}{R_1 - R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, si tomamos $R_1 > R$ satisfaciendo que $2R < \delta(R_1 - R)$ para algún δ, $0 < \delta < 1/2$, podemos aplicar de nuevo el lema 3.2.1 y establecer la igualdad

$$\left|E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right| \leq \delta^{n+1}, \quad |z| \geq R_1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4.4}$$

En particular,

$$\mathrm{Re} f_n(z) = \mathrm{Re} E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) > 0$$

si $|z| \geq R_1$ y $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la función $z \to \log(f_n(z))$ está bien definida si $|z| \geq R_1$ y $n \in \mathbb{N}$, y podemos establecer la igualdad

$$|f(z) - 1| = \left|\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right) - 1\right|, \quad |z| \geq R_1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4.5}$$

Por otro lado, podemos acotar el argumento de la exponencial anterior. Efectivamente

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \log E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\log E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right|.$$

Además, la desigualdad (3.4.4) nos sitúa en condiciones de aplicar el lema 1.2.3 y establecer que el término general de la serie anterior cumple la acotación

$$\left|\log E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right| \leq \frac{3}{2}\left|E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right|, \quad |z| \geq R_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, de nuevo la desigualdad (3.4.4) nos permite acotar el miembro derecho de la desigualdad anterior y concluir que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \log E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right| \leq \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right| \leq \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+1} = \frac{3}{2}\frac{\delta^2}{1-\delta}, \quad |z| \geq R_1,$$

donde para concluir se ha usado la fórmula de la suma de una serie geométrica de razón $0 < \delta < 1/2$. Si ahora restringimos el valor de $\delta \in (0, 1/2)$ de forma que $|e^w - 1| < \epsilon$ si

$$|w| < \frac{3}{2}\frac{\delta^2}{1-\delta},$$

de la ecuación (3.4.5) se concluye que $|f(z) - 1| < \epsilon$ siempre que $|z| \geq R_1$. Concluimos que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$.

$\square$

Recordamos que una función *meromorfa* en un abierto U es una función holomorfa en U salvo en un conjunto de puntos aislados de U, en los que f presenta polos. Denotamos por $\mathcal{M}(U)$ al conjunto de las funciones meromorfas en U.

Uno de los resultados más interesantes que se derivan del teorema precedente es el siguiente corolario que, en términos algebraicos, establece que el conjunto de las funciones meromorfas en U, $\mathcal{M}(U)$, es el cuerpo de cocientes del dominio de integridad que constituyen las funciones holomorfas en U, es decir, $\mathcal{H}(U)$.

Corolario 3.4.2. Sea U un abierto del plano complejo y sea f una función meromorfa en U. Existen funciones g y h holomorfas en U tales que $f = g/h$.

Demostración. Sean $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ los polos de f y $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ el orden de dichos polos. Por el teorema anterior, sabemos que existe una función h holomorfa en U cuyos únicos ceros son los puntos de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y la multiplicidad de z_n como cero de h es m_n. Entonces, la función $g = hf$ presenta singularidades evitables en cada punto z_n, y al ser f y g holomorfas en $U \setminus \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ se sigue que g es (o puede ser extendida a) una función holomorfa en U. $\square$

Capítulo 4

El teorema de factorización de Hadamard

En el caso en el que f sea una función entera con un cero en el origen de orden m y el resto sus ceros sean exactamente los puntos de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $|z_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, el teorema de factorización de Weierstrass, estudiado en el capítulo anterior nos permite factorizar f en la forma

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right),$$

donde g es una función entera, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de enteros no negativos y E_{p_n} es el p_n-ésimo factor elemental de Weierstrass. En este capítulo veremos que si además f tiene orden finito λ, obtenemos información más precisa acerca de la factorización. En particular, el producto que aparece en la factorización de f es un producto canónico y g es una función polinómica de grado a lo sumo la parte entera de λ. De esto trata el teorema de factorización de Hadamard, cuya demostración es el objetivo final de este capítulo. Para el desarrollo de este capítulo seguiremos fundamentalmente el esquema de trabajo propuesto en [2, p. 142-155].

4.1. La fórmula de Poisson-Jensen

En el Grado en Matemáticas, estudiamos la solución al problema de Dirichlet en una bola $B(z_0, R)$. Este problema de ecuaciones en derivadas parciales consiste en construir una solución de la ecuación de Laplace en una bola, sujeta a condiciones frontera predeterminadas. Para ello, la herramienta fundamental que utilizamos es *la fórmula integral de Poisson*. Esta fórmula, en forma compleja, establece que si f es una función holomorfa en una bola $B(0, R)$ y continua en su adherencia $\overline{B}(0, R)$, entonces, escribiendo $z \in B(z_0, R)$ en forma polar, $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq r < R$, podemos representar f en $B(z_0, R)$ según la fórmula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\right] f(z_0 + Re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta. \tag{4.1.1}$$

Tomando $u = \text{Re}f$ en la ecuación (4.1.1), obtenemos una solución al problema de Dirichlet en la bola $B((x_0, y_0), R)$, donde $z_0 = x_0 + iy_0$. Efectivamente, poniendo

$$u(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Re}\left[\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\right] u(z_0 + Re^{i\theta})\text{d}\theta,$$

podemos representar cualquier solución al problema de Dirichlet en dicha bola, pues al ser f holomorfa en $B(z_0, R)$, su parte real u (y también su parte imaginaria $v = \text{Im}f$) resulta una función armónica en $B((x_0, y_0), R)$, por lo que verifica la ecuación de Laplace en dicha bola. Además, el factor $u(z_0 + Re^{i\theta})$ en la integral asegura la satisfacción de la condición frontera.

Si ahora U es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, cumpliendo que $\overline{B}(0, R) \subseteq U$ para $R > 0$, y f es una función holomorfa y no nula en U, que admite logaritmo analítico en U, la fórmula integral de Poisson aplicada a la parte real de $\log f(z)$ resulta:

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Re}\left[\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\right] \ln|f(Re^{i\theta})|\text{d}\theta, \tag{4.1.2}$$

donde $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < R$. Consultar [2, p. 105-110].

Consideremos ahora el caso en el que f presenta ceros en $B(0, R)$. En estas condiciones, f no admite logaritmo analítico en U y la fórmula (4.1.2) no resulta válida. Sin embargo, dicha fórmula puede ser modificada de forma que se tengan en cuenta los ceros de f en $B(0, R)$, obteniendo así la conocida fórmula de Poisson-Jensen. En la demostración de dicha fórmula haremos uso de un pequeño lema que probaremos previamente. Podemos encontrar este lema en [2, p. 98-99].

Lema 4.1.1. Sean a un número complejo, con $|a| < 1$. Entonces, la función

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z},$$

es holomorfa en $\overline{B}(0, 1)$ y una biyección de $\overline{B}(0, 1)$ en sí mismo. Además, transforma la circunferencia unidad en sí misma, es decir, $f(\partial B(0, 1)) = \partial B(0, 1)$.

Demostración. En primer lugar, si $a = 0$, la función f es la identidad, $f(z) = z$, por lo que cumple todas las propiedades citadas en el enunciado del lema. Supongamos entonces que $a \neq 0$. La función f es una transformación de Möbius, por lo que es una biyección de $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$ en $\mathbb{C} \setminus \{-1/\overline{a}\}$. Al ser cociente de funciones enteras, f es holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en el punto en el que se anula el denominador, $1/\overline{a}$. Por hipótesis, $|a| < 1$ luego $|1/\overline{a}| > 1$, por lo que f es holomorfa en $\overline{B}(0, 1)$.

Por otro lado, si $|z| = 1$, se tiene que $|z - a| = |z||1 - a\overline{z}|$, ya que $\overline{z} = 1/z$, por tanto, $|f(z)| = 1$. Considerando ahora la función inversa de f,

$$g(w) = f^{-1}(w) = \frac{w + a}{1 + \overline{a}w}, \quad w \neq -1/\overline{a},$$

g es una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{-1/\overline{a}\}$, por lo que lo es en $\overline{B}(0, 1)$. Por un razonamiento análogo al hecho anteriormente con f se sigue que $|g(w)| = 1$ si $|w| = 1$. Por tanto, f es una biyección de la frontera $\partial B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ en sí misma.

Al ser f holomorfa y no constante en el abierto $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$, en virtud del principio módulo máximo, se sigue que $|f(z)| < 1$ para cada $z \in B(0,1)$ y de igual modo, se obtiene que $|g(w)| < 1$ para cada $w \in B(0,1)$. Por tanto, f transforma la bola abierta $B(0,1)$ en sí misma. □

Lema 4.1.2. Sean $R > 0$ y z_0 un complejo con $|z_0| < R$. Entonces la función

$$f(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z_0} z}, \quad |z_0| < R,$$

es holomorfa en $\overline{B}(0,R)$ y una biyección de $\overline{B}(0,R)$ en $\overline{B}(0,1)$. Además, esta función transforma la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ en la circunferencia unidad, esto es, $f(\partial B(0,R)) = \partial B(0,1)$.

Demostración. Por hipótesis, $|z_0| < R$, y por tanto, $|z_0|/R < 1$. En virtud del lema 4.1.1, la función

$$g(z) = \frac{z - (z_0/R)}{1 - (\overline{z_0} z/R)},$$

es holomorfa en $\overline{B}(0,1)$ y una biyección de dicha bola en sí misma. Además, transforma la frontera de la bola $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, en sí misma. Por tanto, la función

$$f(z) = g\left(\frac{z}{R}\right) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z_0} z},$$

transforma biyectivamente la bola $\overline{B}(0,R)$ en la $\overline{B}(0,1)$, y en particular, satisface que $f(\partial B(0,R)) = g(\partial B(0,1)) = \partial B(0,1)$. □

Proposición 4.1.3. (Fórmula de Poisson-Jensen). Sean $R > 0$ y f una función holomorfa en $\overline{B}(0,R)$. Supongamos que f no se anula en la frontera de $\overline{B}(0,R)$, es decir, que $f(z) \neq 0$ si $|z| = R$. Si los puntos $z_1, ..., z_n$ son los ceros de f contenidos en la bola abierta $B(0,R)$, repetidos de acuerdo con su multiplicidad y $z \in B(0,R)$ es tal que $f(z) \neq 0$ y se expresa en coordenadas polares como $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < R$, $-\pi \leq \theta < \pi$, se tiene que

$$\ln|f(z)| = \sum_{k=1}^{n} \ln\left|\frac{R(z - z_k)}{R^2 - \overline{z_k} z}\right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left[\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\right] \ln|f(Re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta. \tag{4.1.3}$$

Demostración. Consideremos la función

$$F(z) = f(z) \prod_{k=1}^{n} \frac{R^2 - \overline{z_k} z}{R(z - z_k)}.$$

Por hipótesis, $|z_k| < R$ para cada $k = 1, 2, ..., n$. Entonces, fijado $k \in \mathbb{N}$, con $1 \leq k \leq n$, y aplicando el lema 4.1.2, se tiene que la función

$$\eta_k(z) = \frac{R(z - z_k)}{R^2 - \overline{z_k} z}$$

es analítica en $B(0, R)$ y transforma biyectivamente la bola $B(0, R)$ en la bola unidad $B(0, 1)$ y su frontera $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ en la esfera unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Por construcción, la función F presenta singularidades evitables en los puntos z_k, por lo que es analítica (o puede ser extendida a una función analítica) y no nula en un conjunto abierto que contiene a $\overline{B}(0, R)$, digamos $B(0, S)$, con $S > R$. Por tanto, la función $\log(F)$ está bien definida en $B(0, S)$. Además, $|F(z)| = |f(z)|$ si $|z| = R$. Aplicando ahora (4.1.1) a $\log(F(z))$, se sigue que

$$\log(F(z)) = \log\left(f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{R^2 - \overline{z_k}z}{R(z - z_k)}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\right]\log\left(|F(Re^{i\theta})|\right)\mathrm{d}\theta.$$

Tomando partes reales en la expresión anterior y aplicando las propiedades del logaritmo llegamos a que

$$\ln|f(z)| = \sum_{k=1}^{n}\ln\left|\frac{R(z - z_k)}{R^2 - \overline{z_k}z}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left[\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\right]\ln|F(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta. \tag{4.1.4}$$

Como $|F(Re^{i\theta})| = |f(Re^{i\theta})|$, para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, podemos sutituir este último término en la igualdad (4.1.4), de donde se concluye el resultado. $\square$

Bajo las condiciones del enunciado anterior, la fórmula de Poisson-Jensen nos proporciona una herramienta para representar el valor de una función analítica en un disco abierto en cualquier punto z de dicho disco cuya imagen no sea nula. Tomando ahora como punto z el centro de dicho disco, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1.4. (Fórmula de Jensen). Sea f una función holomorfa en $\overline{B}(0, R)$. Supongamos que $f(0) \neq 0$ y que $f(z) \neq 0$ si $|z| = R$. Si los puntos $z_1, ..., z_n$ son los ceros de f contenidos en la bola abierta $B(0, R)$, repetidos de acuerdo con su multiplicidad, se tiene la igualdad

$$\ln|f(0)| = \sum_{k=1}^{n}\ln\left|\frac{z_k}{R}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta. \tag{4.1.5}$$

Demostración. Basta evaluar la fórmula de Poisson-Jensen (4.1.3) en el punto $z = 0$. $\square$

4.2. Exponente de convergencia y orden de una función entera

4.2.1. Exponente de convergencia de una función entera

En la observación 3.2.5 apartado III, dimos la definición de producto canónico de una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y a continuación vimos algunos ejemplos de sucesiones para las cuales este producto canónico existía y otras para las que no. Retomando este concepto, nuestro objetivo es establecer en qué condiciones podemos asegurar la existencia del producto canónico. Ver [2, p. 138].

Definición 4.2.1. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos no nulos, con $|z_n| \to \infty$. Se define el *exponente de convergencia* de la sucesión como

$$\mu = \text{ínf}\left\{k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^k} < +\infty\right\}.$$

Se dice que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene *exponente de convergencia finito* si $\mu < +\infty$. Nótese que $\mu = 0$ si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^k} < +\infty$ para cada $k > 0$ y $\mu = +\infty$ si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^k} = +\infty$ para cada $k > 0$.

Ejemplo 4.2.2.

I. La sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de término general $z_n = e^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tiene exponente de convergencia $\mu = 0$, pues la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|e^n|^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nk}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^k}\right)^n$$

es una serie geométrica de razón $1/e^k < 1$ para cada $k > 0$, por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|z_n|^k$ converge para cada $k > 0$.

II. La sucesión $\{n^{1/\mu}\}_{n=1}^{\infty}$ tiene exponente de convergencia μ. Efectivamente,

$$\mu = \text{ínf}\{k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} 1/|n^{1/\mu}|^k < +\infty\},$$

pues para cada $k > 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^{1/\mu}|^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k/\mu}} \tag{4.2.1}$$

resulta una serie de Riemann de exponente k/μ. Por tanto, si $0 < k \leq \mu$ la serie (4.2.1) tiene exponente $k/\mu \leq 1$ y no resulta convergente, mientras que si $k > \mu$ la serie (4.2.1) tiene exponente $k/\mu > 1$ por lo que converge.

III. La sucesión $\{z_n\}_{n=2}^{\infty}$ dada por $z_n = \log(n)$, para cada $n \geq 2$, tiene exponente de convergencia $\mu = +\infty$. Como vimos en la observación 3.2.5, apartado III, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(n)}\right)^{p+1},$$

no resulta convergente para ningún $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por tratarse de una serie de Bertrand con exponente $\alpha = 0$ y por la misma razón la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(n)}\right)^{k},$$

no resulta convergente para ningún $k > 0$.

Observación 4.2.3. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión números complejos no nulos con exponente de convergencia finito μ, y consideramos h, un entero no negativo mayor que $\mu - 1$. En virtud del teorema 3.2.4 el producto $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_h\left(\frac{z}{z_n}\right)$ será una función entera con ceros precisamente en los puntos de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y multiplicidades prescritas. En estas condiciones vemos que si f es una función con exponente de convergencia finito y cuyos ceros están en los puntos de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, repetidos de acuerdo a sus multiplicidades, entonces f admite varias factorizaciones, pues lo anterior es válido para cada entero no negativo $h \geq p$, donde $p = \min\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : p \geq \mu - 1\}$. Si en cambio, cuando $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene exponente de convergencia finito establecemos que, en su factorización obtenida mediante el teorema de factorización de Weierstrass tomaremos siempre el producto canónico de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, que por definición, es el producto que se obtiene tomando la sucesión de enteros no negativos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ constante igual a p, con p el entero no negativo definido anteriormente, entonces, la factorización obtenida en el teorema de factorización de Weierstrass es única salvo sustituir la función g por $g + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.2.2. Orden de una función entera

Si f es una función entera y no constante, por el teorema de Liouville, f debe ser no acotada. Por tanto, estudiando el crecimiento de f en circunferencias de la forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$, se sigue que si $M_f(R) = \max\{|f(z)| : |z| = R\}$, necesariamente $M_f(R) \to \infty$ si $R \to \infty$. A esta función $M_f(R)$, que mide el máximo de una función en una circunferencia de radio R, se la denomina *función módulo máximo*. Cuando no haya ambigüedad omitiremos el subíndice f que identifica la función entera a la que está referida dicho máximo.

El estudio de la velocidad con la que estos términos, $M(R)$, tienden hacia infinito, y de la estimación sobre el número de ceros de f que quedan recogidos en una bola centrada en el origen $B(0, R)$ aporta información muy valiosa para el estudio de las funciones enteras. En este sentido, la comparación del término $M(R)$ con $e^{R^{\lambda}}$ para distintos valores de λ inspira la siguiente definición. Ver [2, p. 142-146].

Definición 4.2.4. Sea f una función entera no constante. Se dice que f tiene *orden finito* si existen $\lambda \in [0, +\infty)$ y $R \geq 0$ tales que

$$|f(z)| \leq e^{|z|^{\lambda}}, \quad \text{si} \quad |z| > R.$$

Al inferior de los $\lambda \in [0, \infty)$ verificando la propiedad anterior se le denomina *orden* de f.

Definición 4.2.5. Sea f una función entera no constante. Se dice que f tiene *orden infinito* si no tiene orden finito.

Veamos ahora una forma de calcular el orden de una función entera. Para ello será necesario en primer lugar presentar un nuevo concepto: el límite superior de una función en el infinito.

Definición 4.2.6. Sea E un abierto no acotado superiormente de $\mathbb{R}$ y f una función real de variable real definida en E. El *límite superior de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$*, que se denota por $\limsup_{x\to+\infty} f(x)$, se define como

$$\limsup_{x\to+\infty} f(x) = \inf_{r>0} \sup\{f(x) : \ x \in E, \ x > r\}.$$

Proposición 4.2.7. Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ un abierto no acotado superiormente y $f : E \to \mathbb{R}$. Si $\ell = \limsup_{x \to +\infty} f(x)$ entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que $f(x) < \ell + \epsilon$ para cada $x > r$.

Demostración. Definimos la función $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$g(r) = \sup_{x \in E,\, x > r} f(x).$$

La función g es decreciente y $\lim_{r \to \infty} g(r) = \inf_{r>0} g(r) = \limsup_{x \to \infty} f(x) = \ell$. Por tanto,

$$\ell = \inf_{r>0} g(r).$$

En consecuencia, dado $\epsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $g(r) < \ell + \epsilon$, es decir,

$$\sup\{f(x) : \ x \in E, \ x > r\} < \ell + \epsilon.$$

Por consiguiente, $f(x) < \ell + \epsilon$ para cada $x > r$. $\square$

Proposición 4.2.8. Sea f una función entera y no constante. Si λ es el orden de f, entonces

$$\lambda = \limsup_{R \to \infty} \frac{\ln \ln M(R)}{\ln R}.$$

Demostración. Sea

$$\lambda_0 = \limsup_{R \to \infty} \frac{\ln \ln M(R)}{\ln R}.$$

Veamos que $\lambda_0 = \lambda$. Para ello, supongamos que $\lambda_0 < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$. Como λ_0 es finito, en virtud de la proposición 4.2.7 existe $R_0 > 0$ tal que

$$\ln \ln M(R) < (\lambda_0 + \epsilon) \ln R, \quad R \geq R_0.$$

Por tanto,

$$M(R) < \exp\left(R^{\lambda_0 + \epsilon}\right), \quad R \geq R_0.$$

De esto se sigue que si $|z| = R$,

$$|f(z)| \leq M(R) \leq \exp |z|^{\lambda_0 + \epsilon}.$$

De donde se deduce que λ es finito, y $\lambda \leq \lambda_0 + \epsilon$. Por la arbitrariedad de ϵ, concluimos que $\lambda \leq \lambda_0$.

Si ahora suponemos que f es de orden finito, es decir, que λ es finito, y tomamos $\epsilon > 0$, por definición, existe $R_0 > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq \exp R^{\lambda + \epsilon}, \quad R \geq R_0.$$

Por tanto,

$$\ln \ln M(R) \leq \ln \ln \exp(R^{\lambda + \epsilon}) = (\lambda + \epsilon) \ln R, \quad R \geq R_0.$$

En consecuencia,

$$\lambda_0 = \limsup_{R\to\infty} \frac{\ln \ln M(R)}{\ln R} \leq \lambda + \epsilon.$$

Por la arbitrariedad de ϵ se deduce que $\lambda_0 \leq \lambda$.

Concluimos que si uno de ambos términos es finito entonces el otro también lo es y ambos coinciden. $\square$

Ejemplo 4.2.9. Veamos algunos ejemplos sobre el cálculo del orden de una función entera.

I. Calculemos el orden de la función $f(z) = \exp(az^n)$, donde $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y $n \geq 1$. Si $|z| = R$, escribiendo z y a en forma polar escogiendo sus argumentos en el rango $[-\pi, \pi)$, tenemos que

$$z = Re^{i\theta}, \ -\pi \leq \theta < \pi, \quad \text{y} \quad a = |a|e^{i\alpha}, \ -\pi \leq \alpha < \pi.$$

Utilizando la fórmula de Moivre, $z^n = R^n e^{i\theta n}$, $-\pi \leq \theta < \pi$, por lo que

$$az^n = |a|e^{i\alpha}R^n e^{i\theta n}, \quad \alpha, \theta \in [-\pi, \pi).$$

Por tanto,

$$|f(z)| = \exp(\mathrm{Re}(az^n)) = \exp(\mathrm{Re}(|a|e^{i\alpha}R^n e^{i\theta n})) = \exp(|a|R^n \cos(\alpha + n\theta)) \leq \exp(|a|R^n).$$

En consecuencia, $M(R) = \exp(|a|R^n)$ y

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{\ln \ln M(R)}{\ln R} = \limsup_{R\to\infty} \frac{\ln |a| + n \ln R}{\ln R} = n,$$

por lo que el orden de f es n. En particular, el orden de $\exp(az)$ es 1.

II. Hallemos ahora el orden de la función entera $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$. En primer lugar,

$$|\sin(z)| = \left|\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right| \leq \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{\mathrm{Re}(iz)} + e^{\mathrm{Re}(-iz)}}{2} = \frac{e^{-\mathrm{Im}(z)} + e^{\mathrm{Im}(z)}}{2}, \ z \in \mathbb{C}. \tag{4.2.2}$$

Distingamos dos casos: $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ o $\mathrm{Im}(z) < 0$. En el primer caso, sabemos que $e^{\mathrm{Im}(z)} > e^{-\mathrm{Im}(z)}$ por lo que podemos acotar el último término de la expresión (4.2.2) de la forma

$$\frac{e^{-\mathrm{Im}(z)} + e^{\mathrm{Im}(z)}}{2} \leq \frac{e^{\mathrm{Im}(z)} + e^{\mathrm{Im}(z)}}{2} = e^{\mathrm{Im}(z)} \leq e^{|z|}.$$

En el caso $\mathrm{Im}(z) < 0$, se tiene que $e^{-\mathrm{Im}(z)} > e^{\mathrm{Im}(z)}$ y la acotación en este caso es

$$\frac{e^{-\mathrm{Im}(z)} + e^{\mathrm{Im}(z)}}{2} \leq \frac{e^{-\mathrm{Im}(z)} + e^{-\mathrm{Im}(z)}}{2} = e^{-\mathrm{Im}(z)} \leq e^{|z|}.$$

Por tanto, podemos acotar el último término de la desigualdad (4.2.2) por $e^{|z|}$, por lo que

$$|\sin(z)| \leq e^{|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

En consecuencia, si λ es el orden de $\sin(z)$, $\lambda \leq 1$. Veamos ahora que $\lambda = 1$. Para ello, razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\lambda < 1$, entonces, existe $R_0 > 0$ tal que

$$|\sin(z)| \leq e^{|z|^\lambda}, \quad R > R_0. \tag{4.2.3}$$

Consideramos ahora los puntos de la forma $z = -iR$, $R > 0$.

$$|\sin(-iR)| = \left| \frac{e^R - e^{-R}}{2i} \right| = \frac{e^R - e^{-R}}{2}, \quad R > 0,$$

por lo que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{|\sin(-iR)|}{e^{R^\lambda}} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\frac{e^R - e^{-R}}{e^{R^\lambda}} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} e^{R-R^\lambda} + \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{2}\frac{1}{e^{R+R^\lambda}} = +\infty,$$

puesto que $\lambda < 1$. En consecuencia, $|\sin(-iR)| > e^{R^\lambda}$ para R suficientemente grande, en contra de (4.2.3). Concluimos que $\lambda = 1$.

III. Hay funciones enteras que crecen tan rápido que no son de orden finito. Como ejemplo de esto, calculemos el orden de la función $g(z) = \exp(\exp(z))$. Para ello, calculemos la función módulo máximo de g,

$$M(R) = \{|g(z)| : |z| = R\}.$$

En primer lugar, sabemos que $|g(z)| = \exp(\mathrm{Re}(e^z))$. Si $|z| = R$, escribamos z en forma polar con el argumento en la rama principal, esto es,

$$z = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\sin\theta), \quad -\pi \leq \theta < \pi.$$

Con esta notación,

$$\mathrm{Re}(e^z) = e^{\mathrm{Re}(z)} \cos(\mathrm{Im}(z)) = e^{R\cos(\theta)} \cos(R\sin(\theta)) \leq e^R, \quad -\pi \leq \theta < \pi.$$

Puesto que la cota anterior se alcanza para $\theta = 0$, se sigue que, $M(R) = \exp(e^R)$ y en consecuencia,

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{\ln\ln M(R)}{\ln R} = \limsup_{R\to\infty} \frac{R}{\ln R} = +\infty,$$

por lo que el orden de g es infinito.

Proposición 4.2.10. Sea f y g dos funciones enteras, de orden λ_f y λ_g respectivamente. La función $h = f + g$ es de orden finito λ. Además, $\lambda \leq \text{máx}\{\lambda_f, \lambda_g\}$.

Demostración. En primer lugar, considerando las funciones módulo máximo de f y g, $M_f(R)$ y $M_g(R)$,

$$M_h(R) = \max_{|z|=R} |h(z)| = \max_{|z|=R} |f(z) + g(z)| \leq \max_{|z|=R} |f(z)| + \max_{|z|=R} |g(z)| = M_f(R) + M_g(R).$$

Además, puesto que f y g tienen orden λ_f y λ_g respectivamente, dado $\epsilon > 0$ existen R_{λ_f}, $R_{\lambda_g} > 0$ tales que

$$M_f(R) \leq \exp(R^{\lambda_f+\epsilon}) \text{ si } R \geq R_{\lambda_f}, \text{ y } M_g(R) \leq \exp(R^{\lambda_g+\epsilon}) \textbf{ si } R \geq R_{\lambda_g}.$$

Tomando $R_0 = \max\{R_{\lambda_f}, R_{\lambda_g}\}$ se sigue que

$$M_f(R) \leq \exp(R^{\lambda_f+\epsilon}) \text{ si } R \geq R_0, \text{ y } M_g(R) \leq \exp(R^{\lambda_g+\epsilon}) \textbf{ si } R \geq R_0.$$

Por tanto,

$$M_h(R) \leq \exp(R^{\lambda_f+\epsilon}) + \exp(R^{\lambda_g+\epsilon}) \leq 2\exp(R^{\max\{\lambda_f,\lambda_g\}+\epsilon}), \quad R \geq R_0.$$

En consecuencia,

$$\frac{\ln\ln M_h(R)}{\ln R} \leq \frac{\ln\ln(2\exp(R^{\max\{\lambda_f,\lambda_g\}+\epsilon})}{\ln R} = \frac{\ln(2 + R^{\max\{\lambda_f,\lambda_g\}+\epsilon})}{\ln R}.$$

Puesto que $\ln(2 + R^{\max\{\lambda_f,\lambda_g\}+\epsilon}) \sim_\infty \ln R^{\max\{\lambda_f,\lambda_g\}+\epsilon}$, se tiene que

$$\frac{\ln(2 + R^{\max\{\lambda_f,\lambda_g\}+\epsilon})}{\ln R} \to \max\{\lambda_f, \lambda_g\} + \epsilon, \quad R \to \infty.$$

Por tanto,

$$\lambda = \limsup_{R\to\infty} \frac{\ln\ln M_h(R)}{\ln R} \leq \max\{\lambda_f, \lambda_g\} + \epsilon,$$

y por la arbitrariedad de ϵ, se concluye que $\lambda \leq \max\{\lambda_f, \lambda_g\}$. □

Ejemplo 4.2.11. Calculemos el orden de la función entera $f(z) = \exp(az) + \exp(bz)$, con $a, b \in \mathbb{C}$, y $a \neq b$. Sea λ el orden de f. En primer lugar, notemos que f una suma de dos exponenciales, ambas de orden 1, según vimos en el ejemplo 4.2.9. En virtud de la proposición 4.2.10, $\lambda \leq 1$. Veamos ahora que $\lambda = 1$. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\lambda < 1$, entonces,

$$|f(z)| \leq e^{|z|^\lambda}, \tag{4.2.4}$$

si $|z|$ es lo suficientemente grande.

En primer lugar, expresemos a y b en forma polar eligiendo su argumento en la rama principal, es decir, $a = \rho e^{i\alpha}$, $-\pi \leq \alpha < \pi$ y $b = \delta e^{i\beta}$, $-\pi \leq \beta < \pi$. Consideramos ahora los puntos del plano complejo de la forma $z = Re^{-i\alpha}$, $R > 0$. Evaluando f en estos puntos,

$$f(Re^{-i\alpha}) = e^{\rho R} + e^{\delta Re^{i(\beta-\alpha)}}.$$

Calculemos

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\left|f(Re^{-i\alpha})\right|}{e^{R^\lambda}} = \lim_{R\to\infty} \frac{\left|e^{\rho R} + e^{\delta Re^{i(\beta-\alpha)}}\right|}{e^{R^\lambda}} = \lim_{R\to\infty} \left|e^{\rho R - R^\lambda}\left(1 + e^{-R(\rho-\delta e^{i(\beta-\alpha)})}\right)\right|,$$

donde hemos considerado la determinación principal del logaritmo. Para el cálculo del límite, hemos de distinguir entre dos casos. En el primer caso, supongamos que $|a| \neq |b|$ y en el segundo que $|a| = |b|$. En primer lugar, si $|a| \neq |b|$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|a| > |b|$, es decir, $\rho > \delta$. Por tanto,

$$\left|e^{\delta e^{i(\beta-\alpha)}}\right| = e^{\delta\cos(\beta-\alpha)} \leq e^{\delta} < e^{\rho}.$$

En consecuencia,
$$\lim_{R\to\infty} e^{-R(\rho-\delta e^{i(\beta-\alpha)})}=0,$$
de donde se sigue que
$$\lim_{R\to\infty}\frac{|f(Re^{-i\alpha})|}{e^{R^\lambda}}=+\infty,$$
pues
$$e^{\rho R-R^\lambda}\to 0, \quad \text{si} \quad R\to\infty,$$
ya que $\lambda<1$.

En el segundo caso, $|a|=|b|$, o sea, $\rho=\delta$. Volviendo a la acotación anterior,
$$\left|e^{\delta e^{i(\beta-\alpha)}}\right|=e^{\delta\cos(\beta-\alpha)}\le e^\delta,$$
dandose la igualdad si y solo si $\cos(\beta-\alpha)=0$, o sea si $\beta=\alpha$, lo que no puede ocurrir, pues hemos supuesto que $\rho=\delta$ y por hipótesis $a\neq b$. Finalmente, concluimos que
$$\lim_{R\to\infty}\frac{|f(Re^{-i\alpha})|}{e^{R^\lambda}}=+\infty.$$
En consecuencia de lo anterior, $|f(Re^{-i\alpha})|>e^{R^\lambda}$ para R suficientemente grande, en contra de (4.2.4). Por tanto, $\lambda=1$.

Hemos visto que si f es una función entera, su crecimiento se puede estudiar en circunferencias que se van alejando del origen, a través de la función $M(R)$. Resulta entonces interesante conocer el número de ceros de f que quedan encerrados dentro de una bola cerrada de radio R centrada en el origen, $\overline{B}(0,R)$, que denotaremos por $N(0,R)$. En este sentido, podemos acotar el número de ceros de f, situados en $\overline{B}(0,R)$ a partir de la función módulo máximo, $M(R)$.

Teorema 4.2.12. Sea f una función entera no constante de orden finito λ. Supongamos que $f(0)\neq 0$ y que los ceros de f no nulos vienen dados por la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Supongamos también que los ceros de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ están ordenados de forma que $|z_n|\le|z_m|$ si $n<m$, y que $|z_n|\to\infty$ si $n\to\infty$. Entonces, dado $\epsilon>0$ existen constantes A,B, con $A>0$ que depende de ϵ, (sin embargo, B no depende de ϵ) tales que
$$N(R)\le AR^{\lambda+\epsilon}+B,$$
para R suficientemente grande.

Demostración. Si f no se anula en el conjunto $\{z\in\mathbb{C}:|z|=R\}$, en virtud de la fórmula de Jensen,
$$\ln|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta+\sum_{k=1}^{N(R)}\ln\left|\frac{z_k}{R}\right|$$
Como f es de orden finito λ, dado $\epsilon>0$ existe $R_0>0$ tal que
$$|f(Re^{i\theta})|\le M(R)\le e^{R^{\lambda+\epsilon}}, \quad R\ge R_0.$$

Por tanto,

$$\ln |f(0)| \leq R^{\lambda+\epsilon} + \sum_{k=1}^{N(R)} \ln \left| \frac{z_k}{R} \right|, \quad R \geq R_0. \tag{4.2.5}$$

Sea $S = R/2$, dado que $|z_k| < R$ para $k = 1, 2, ..., N(R)$ se tiene que $\ln |z_k/R| \leq 0$ para $k = 1, 2, ..., N(R)$. Además, si $k \leq N(S)$, entonces $|z_k| \leq |z_{N(S)}|$, pues hemos supuesto que la sucesión de ceros $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ está ordenada de forma que $|z_n| \leq |z_m|$ si $n < m$. Por tanto, también se verifica que $|z_{N(S)}| \leq S$, por lo que si $N(S) = \ell$, los ℓ primeros términos de la sucesión, $z_1, z_2, ..., z_\ell$, pertenecen a la bola cerrada $\overline{B}(0, S)$. Por tanto, $|z_k| \leq S = R/2$ para cada $k = 1, 2, ..., N(S)$. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{N(R)} \ln \left| \frac{z_k}{R} \right| \leq \sum_{k=1}^{N(S)} \ln \left| \frac{z_k}{R} \right| \leq \sum_{k=1}^{N(S)} \ln \frac{1}{2} = -N(S) \ln 2. \tag{4.2.6}$$

Combinando ahora las desigualdades (4.2.5) y (4.2.6), se sigue que

$$N(S) \leq \frac{(2S)^{\lambda+\epsilon}}{\ln 2} - \frac{\ln |f(0)|}{\ln 2}, \tag{4.2.7}$$

para cada $S \geq R_0/2$ cumpliendo que f no se anule en la circunferencia $|z| = 2S$. Efectivamente, supongamos que $S \geq R_0/2$. Sea $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión con $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ y $s_n \geq S$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f(z) \neq 0$ si $|z| = 2s_n$. Como la desigualdad (4.2.7) es cierta para cada s_n, haciendo $n \to \infty$, se sigue el resultado para S. Para justificar este último paso, basta observar que $N(S)$ es una función continua por la derecha, puesto que si $N(S) = \ell$, entonces $N(S) = \ell$ en un intervalo $[\ell, t]$, para cierto $t > 0$. En caso contrario, la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ presentaría un punto de acumulación, lo que es contradictorio. Basta tomar $A = 2^{\lambda+\epsilon}/\ln 2$ y $B = -\ln |f(0)|/\ln 2$ para concluir el resultado. □

Veamos ahora la relación existente entre los dos conceptos estudiados en esta sección, el exponente de convergencia μ y el orden λ.

Teorema 4.2.13. Sea f una función entera no constante de orden finito λ. Supongamos que los ceros de f no nulos son $\{z_n\}_n$ (finitos o infinitos) repetidos de acuerdo a su multiplicidad. En estas condiciones la serie

$$\sum_n \frac{1}{|z_n|^{\lambda+\epsilon}}$$

es convergente para cada $\epsilon > 0$. Por tanto, si μ es el exponente de convergencia de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, se tiene que $\mu \leq \lambda$.

Demostración. En primer lugar, si $\{z_n\}_n$ es un conjunto finito,

$$\sum_n \frac{1}{|z_n|^{\lambda+\epsilon}} < +\infty,$$

con lo que concluimos.

Supongamos ahora que los ceros de f son infinitos, y que estos están ordenados de forma que $|z_n| \leq |z_m|$ si $n < m$, y por tanto, $n \leq N(|z_n|)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$, en virtud del teorema 4.2.12 existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y constantes A, B, $A > 0$, tales que

$$n \leq N(|z_n|) \leq A|z_n|^{\lambda+(\epsilon/2)} + B, \quad n \geq n_0.$$

Por tanto, tomando $C = 1/A$ y $D = -B/A$, se tiene que

$$|z_n| \geq (Cn + D)^{1/(\lambda+(\epsilon/2))}, \quad n \geq n_0,$$

luego

$$\frac{1}{|z_n|^{\lambda+\epsilon}} \leq \left[\frac{1}{Cn + D}\right]^{(\lambda+\epsilon)/(\lambda+(\epsilon/2))}, \quad n \geq n_0. \tag{4.2.8}$$

Puesto que

$$\frac{\lambda + \epsilon}{\lambda + \epsilon/2} > 1,$$

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{Cn + D}\right]^{(\lambda+\epsilon)/(\lambda+(\epsilon/2)},$$

es convergente. La desigualdad (4.2.8) nos permite aplicar el criterio de comparación para series y concluir que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\lambda+\epsilon}}$$

converge. □

4.3. Lemas previos al teorema de factorización de Hadamard

En esta sección se demostrarán los lemas necesarios para poder probar posteriormente el teorema de factorización de Hadamard. La primera de ellas, nos da una forma de calcular la derivada logarítmica de una función f holomorfa en un abierto en el que no se anule, en términos de una nueva función (no holomorfa) que construiremos a partir de f.

Proposición 4.3.1. Sea f una función holomorfa y no idénticamente nula en un abierto de Jordan $U \subset \mathbb{C}$, (como puede ser por ejemplo, una bola centrada en el origen). Consideramos el abierto $U_0 = U \setminus \{z \in U : f(z) = 0\}$, y definimos la función $h : U_0 \to \mathbb{R}$ como $h(z) = \ln |f(z)|$. Entonces

$$\frac{f'}{f} = \frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Demostración. Por un lado, como $h(z) = \ln |f(z)|$, se tiene que

$$e^{2h(z)} = |f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)}.$$

Por otro lado, escribiendo la función en forma binómica, esto es, $f = u + i\mathrm{v}$, donde $u = \mathrm{Re}f$ y $\mathrm{v} = \mathrm{Im}f$, tendremos también la igualdad $e^{2h(z)} = u^2 + \mathrm{v}^2$ y derivando esta última ecuación respecto de x e y,

$$\frac{\partial h}{\partial x} e^{2h} = uu_x + \mathrm{v}\mathrm{v}_x, \tag{4.3.1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} e^{2h} = uu_y + \mathrm{v}\mathrm{v}_y. \tag{4.3.2}$$

Combinando las ecuaciones (4.3.1) y (4.3.2), se llega a que

$$e^{2h}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right) = uu_x + \mathrm{v}\mathrm{v}_x - iuu_y - i\mathrm{v}\mathrm{v}_y,$$

y usando ahora las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned} f \cdot \overline{f} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right) &= uu_x + \mathrm{v}\mathrm{v}_x + iu\mathrm{v}_x - i\mathrm{v}u_x = (u_x + i\mathrm{v}_x)u - \mathbf{v}(u_x + i\mathrm{v}_x)i \\ &= (u_x + i\mathrm{v}_x)(u - i\mathrm{v}) = f' \cdot \overline{f}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{f'}{f} = \frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}.$$

□

Recordemos ahora el teorema de derivación bajo el signo integral, estudiado durante el Grado en Matemáticas. Para su demostración, se puede consultar [4, p. 322-324].

Notación. Denotamos por $\mathbf{x}$ al vector $(x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$.

Teorema 4.3.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$ un conjunto abierto, $E \subseteq \mathbb{R}^q$ un conjunto medible y $F : A \times E \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Supongamos que

I. Para cada $\mathbf{x} \in A$ la función $F_{\mathbf{x}}$, definida por $F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, es integrable en E.

II. Para casi todo $\mathbf{y} \in E$ la función $F_{\mathbf{y}}$, definida por $F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, admite derivada parcial continua respecto de x_j en A.

III. Para cada $\mathbf{x} \in A$ la función $y \to \partial F/\partial x_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es medible en E y existe una función g_j integrable en E tal que

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right| \leq g_j(\mathbf{y})$$

para cada todo $\mathbf{x} \in A$ y casi todo $\mathbf{y} \in E$. Entonces, la función f definida en A por

$$f(\mathbf{x}) = \int_E F(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y},$$

admite derivada parcial continua respecto de x_j en A, y se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_E \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Lema 4.3.3. Sean $R > 0$ y f una función entera y no constante. En las condiciones de la proposición 4.1.3

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{z - z_k} + \frac{\overline{z_k}}{R^2 - \overline{z_k} z} \right] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^2} \log |f(Re^{i\theta})| \, \mathrm{d}\theta,$$

si $|z| < R$, $z \neq z_1, z_2, ..., z_n$.

Demostración. Por hipótesis, estamos bajo las condiciones de la proposición 4.1.3, por tanto, podemos aplicar la fórmula de Poisson-Jensen a f en $\overline{B}(0, R)$, obteniendo la igualdad

$$\ln |f(z)| = \sum_{k=1}^{n} \ln \left| \frac{R(z - z_k)}{R^2 - \overline{z_k} z} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re} \left[\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \right] \ln |f(Re^{i\theta})| \, \mathrm{d}\theta,$$

si $|z| < R$, $z \neq z_1, z_2, ..., z_n$, donde $z_1, z_2, ..., z_n$ son los ceros de f en $\overline{B}(0, R)$ repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Derivemos entonces la expresión anterior. En primer lugar, empecemos llamando

$$f_{1,k}(z) = R^2 - \overline{z_k} z, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

$$f_{2,k}(z) = R(z - z_k), \quad k = 1, 2, ..., n,$$

$$h_{1,k}(z) = \ln |f_{1,k}(z)| = \ln |R(z - z_k)|, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

$$h_{2,k}(z) = \ln |f_{2,k}(z)| = \ln |R^2 - \overline{z_k} z|, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

$$h_3(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re} \left[\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \right] \ln |f(Re^{i\theta})| \, \mathrm{d}\theta.$$

La función f es holomorfa y no idénticamente nula en el abierto $U_0 = B(0, R) \backslash \{z_1, z_2, ..., z_n\}$. Por tanto, estamos en condiciones de aplicar a la función $h(z) = \ln |f(z)|$ la proposición 4.3.1 para deducir que

$$\frac{f'}{f} = \frac{\partial h}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial y} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial h_{1,k}}{\partial x} - i \frac{\partial h_{1,k}}{\partial y} \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial h_{2,k}}{\partial x} - i \frac{\partial h_{2,k}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial h_3}{\partial x} - i \frac{\partial h_3}{\partial y} \right). \quad (4.3.3)$$

Derivemos ahora cada una de estas expresiones:

La función, f_{ik} es polinómica, luego holomorfa, y no constante en el abierto U_0, para $i = 1, 2$ y $k = 1, 2, ..., n$. Por tanto, podemos aplicar de nuevo la proposición 4.3.1 a cada una de las funciones h_{ik} para $i = 1, 2$ y $k = 1, 2, ..., n$ para deducir que

$$\frac{\partial h_{1,k}(z)}{\partial x} - i \frac{\partial h_{1,k}(z)}{\partial y} = \frac{f'_{1,k}(z)}{f_{1k}} = \frac{1}{z - z_k}, \quad k = 1, 2, ..., n, \quad (4.3.4)$$

y que

$$\frac{\partial h_{2,k}(z)}{\partial x} - i \frac{\partial h_{2,k}(z)}{\partial y} = \frac{f'_{2,k}(z)}{f_{2,k}(z)} = \frac{-\overline{z_k}}{R^2 - \overline{z_k} z}, \quad k = 1, 2, ..., n. \quad (4.3.5)$$

Calculemos ahora las derivadas parciales de h_3. Consideremos la función $\phi : B(0, R) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, definida por

$$\phi(z, \theta) = \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}.$$

Escribiendo $z \in B(0,R)$ en fórma binómica, $z = x + iy$, y separando la función ϕ en partes reales e imaginarias,

$$\phi(z,\theta) = \phi(x,y,\theta) = u(x+iy,\theta) + iv(x+iy,\theta),$$

donde $u = \mathrm{Re}(\phi)$ y $v = \mathrm{Im}(\phi)$. De esta forma, la función compleja ϕ se corresponde con el campo vectorial $\widetilde{\phi}$ definido de $B(0,R) \times [0,2\pi] \subseteq \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ mediante

$$\widetilde{\phi}(x,y,\theta) = (u(x,y,\theta), v(x,y,\theta)),$$

donde u y v son funciones reales de tres variables reales.

Con esta notación,

$$h_3(z) = h_3(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y,\theta)\ln|f(Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

Comprobemos que la función h_3 cumple las hipótesis del teorema de derivación bajo el signo integral 4.3.2. En primer lugar, para cada $(x,y) \in B(0,R)$ fijo la función $\phi_z(\theta)$ es continua en $[0,2\pi]$, por tanto, su parte real, $u_{x,y}(\theta)$, resulta continua, luego integrable en $[0,2\pi]$. Además, para cada $\theta \in [0,2\pi]$ fijo, la función $\phi_\theta(z)$ es holomorfa en el abierto $B(0,R)$, y por tanto su parte real, la función de dos variables reales $u_\theta(x,y)$, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $B(0,R)$. En consecuencia, $u_\theta(x,y)$ admite derivada parcial continua respecto de x e y en $B(0,R)$ y además,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,\theta)\right| \leq \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,\theta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,\theta)\right| = \left|\frac{\partial \phi}{\partial z}(z,\theta)\right| = \left|\frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}+z)^2}\right| \leq \frac{2R}{(R-r)^2}, \tag{4.3.6}$$

si $|z| < r < R$. La cota (4.3.6) resulta una función constante, por lo que es integrable en $[0,2\pi]$. Como la acotación (4.3.6) es válida para cada $r > 0$, y los mismos argumentos se pueden repetir para la acotación de $\partial u/\partial y(x,y,\theta)$ se satisface la tercera hipótesis del teorema de derivación bajo el signo integral para cada $(x,y) \in B(0,R)$ y $\theta \in [0,2\pi]$. Por tanto, la función h_3 es derivable respecto de x e y en $B(0,R)$ y

$$\frac{\partial h_3}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,\theta)\ln|f(Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta, \tag{4.3.7}$$

y

$$-i\frac{\partial h_3}{\partial y}(x,y) = -i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,\theta)\ln|f(Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta. \tag{4.3.8}$$

Combinando ahora las ecuaciones (4.3.7) y (4.3.8) seguimos que

$$\frac{\partial h_3}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial h_3}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,\theta) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,\theta)\right)\ln|f(Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta,$$

y utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,\theta) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,\theta)\right)\ln|f(Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial \phi}{\partial z}(z,\theta)\ln|f(Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^2}\ln|f(Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}\tag{4.3.9}$$

Finalmente, reemplazando las expresiones (4.3.4), (4.3.5) y (4.3.9) en la igualdad (4.3.3) se concluye el resultado. □

El siguiente lema, estudiado en la asignatura Variable Compleja durante el Grado, se trata de un análogo en el caso complejo al teorema de derivación bajo el signo integral. Para su demostración, se puede consultar [5, p. 68-70].

Lema 4.3.4. (Holomorfía bajo el signo integral). Sean U un abierto del plano complejo, γ una curva en $\mathbb{C}$ y $F : U \times \gamma* \to \mathbb{C}$ una función continua en $U \times \gamma*$. Se define

$$f(z) = \int_\gamma F(z, w)\,\mathrm{d}w, \quad z \in U.$$

En estas condiciones, la función F es continua en U. Además, si F es holomorfa respecto de z (explícitamente: para cada $w \in \gamma*$ la función $F_w(z) := F(w, z)$ es holomorfa en U), entonces f es holomorfa en U y

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial F(w, z)}{\partial z}\,\mathrm{d}w.$$

Lema 4.3.5. Sea f una función entera no constante de orden finito λ cuyos ceros están dados exactamente por los puntos de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ repetidos de acuerdo con su multiplicidad. Si $m + 1 > \lambda$, entonces para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene que

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z_n - z)^{m+1}}.$$

Demostración. Supongamos que $f(0) \neq 0$, y sea R tal que $f(z) \neq 0$ si $|z| = R$. Sea $n = N(R)$ el número de ceros de f contenidos en $B(0, R)$. En virtud del lema 4.3.3

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{z - z_k} + \frac{\overline{z_k}}{R^2 - \overline{z_k}z}\right] + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^2} \ln|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta \tag{4.3.10}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$, con $|z| < R$, y $z \neq z_1, z_2, ..., z_n$. Veamos que

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dz^m}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] &= -m! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z_k - z)^{m+1}} + m! \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}^{m+1}}{(R^2 - \overline{z_k}z)^{m+1}} \\ &\quad + (m+1)! \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^{m+2}} \ln|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta, \quad m = 0, 1, 2...\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Sea $U = B(0, R) \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Razonemos por inducción para ver que la suma de la igualdad (4.3.10) se transforma en las sumas de la igualdad (4.3.11) y la integral de la igualdad (4.3.10) se transforma en la integral de la igualdad (4.3.11), tras derivar m veces. En primer lugar, como ya hemos visto para $m = 0$, la igualdad se cumple. Por un lado, la suma de la igualdad (4.3.10) es una función holomorfa en U, por ser suma de funciones holomorfas en dicho abiero y si la igualdad (4.3.11) es cierta para m, claramente se cumple para $m + 1$. Hagamos el razonamiento con la integral. Supongamos que la igualdad es cierta para m. Derivemos ahora la integral que aparece en (4.3.10), a la que llamaremos h. Consideramos la curva regular $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, definida por $\gamma(\theta) = Re^{i\theta} = w$, cuyo soporte, γ^*, es la circunferencia de radio R. Escribiendo ahora

$$F_m(z, w) = \frac{2w}{(w - z)^m} \ln|f(w)|\,\mathrm{d}w,$$

por la hipótesis de inducción,

$$h^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi}(m+1)! \int_0^{2\pi} \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^{m+2}} \ln|f(Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}(m+1)! \int_\gamma \frac{F_m(z,w)}{w}\,\mathrm{d}w.$$

La función $F_m(w,z)/w$ resulta continua en $U \times \gamma^*$. Además, fijado $w \in \gamma^*$, la función $F_m^w(z)$ es holomorfa en U. Por tanto, en virtud del teorema de holomorfía bajo el signo integral, la función $h^{(m)}$ es holomorfa en U y

$$h^{(m+1)}(z) = \frac{(m+1)!}{2\pi} \int_\gamma \frac{1}{w} \frac{\partial F_m(z,w)}{\partial z}\,\mathrm{d}w.$$

Volviendo a tomar la expresión parametrizada de γ, tenemos que

$$h^{(m+1)}(z) = \frac{(m+2)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^{m+3}} \ln|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta,$$

por lo que la igualdad es cierta para $m+1$. En consecuencia, la igualdad (4.3.11) es cierta para cada $m = 0, 1, 2\ldots$

Como $N(R) \to \infty$ si $R \to \infty$, para concluir la igualdad del enunciado basta probar que los dos últimos sumandos de la ecuación (4.3.11) convergen a cero si $R \to \infty$.

Veamos que el segundo sumando de (4.3.11) converge a cero. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_n\}_{n=1}^\infty$ y tomemos $R > 2|z|$. Como $|z_k| < R$ para cada $k = 1, 2, ..., n$, con $n = N(R)$, se sigue que

$$|R^2 - \overline{z_k}z| \geq R^2 - |\overline{z_k}||z| \geq R^2 - \frac{R^2}{2} \geq \frac{1}{2}R^2, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

es decir,

$$\frac{1}{|R^2 - \overline{z_k}z|} \leq \frac{2}{R^2}, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

y de aquí

$$\left(\frac{|\overline{z_k}|}{|R^2 - \overline{z_k}z|}\right)^{m+1} \leq \left(\frac{2}{R}\right)^{m+1}, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

por lo que el segundo sumando en (4.3.11) se puede acotar por

$$\sum_{k=1}^{N(R)} \left|\frac{\overline{z_k}}{R^2 - \overline{z_k}z}\right|^{m+1} \leq N(R)\left(\frac{2}{R}\right)^{m+1}. \tag{4.3.12}$$

Dado $\epsilon > 0$, en virtud del teorema 4.2.12, podemos acotar el término $N(R)$ en la forma

$$N(R) \leq AR^{\lambda+\epsilon} + B, \tag{4.3.13}$$

donde A y B son constantes, ($A > 0$) para R suficientemente grande. Por hipótesis, $m+1 > \lambda$, tomando $\epsilon > 0$ tal que $\lambda + \epsilon - (m+1) < 0$, de la desigualdad (4.3.13), se sigue que

$$N(R)\left(\frac{2}{R}\right)^{m+1} \longrightarrow 0, \quad R \to \infty.$$

Aplicando el criterio del sandwich a la desigualdad (4.3.12) se deduce la convergencia del segundo sumando de (4.3.11) a cero.

Veamos ahora que el tercer sumando de la expresión (4.3.11) converge a cero. Supongamos de nuevo que $2|z| < R$. Nuestro objetivo es acotar la integral. En primer lugar,

$$|Re^{i\theta} - z| \geq R - |z| > \frac{R}{2},$$

de aquí

$$|2Re^{i\theta}|\left(\frac{2}{R}\right)^{m+2} = 2R\left(\frac{2}{R}\right)^{m+2} \geq 2R\left(\frac{1}{|Re^{i\theta} - z|}\right)^{m+2},$$

y se sigue que

$$2R|Re^{i\theta} - z|^{-(m+2)} \leq 2^{m+3}R^{-(m+1)}. \tag{4.3.14}$$

Notemos ahora que

$$\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^{m+2}} \mathrm{d}\theta = 0,$$

pues se trata de un múltiplo escalar de la integral

$$\int_{|w|=R} \frac{1}{(w - z)^{m+2}} \mathrm{d}w$$

que resulta nula, pues la función

$$w \to \frac{1}{(w - z)^{m+2}}$$

admite primitiva en $|w| > R/2$. Por tanto, el valor de la integral de la expresión (4.3.11) no varía si sustituimos en la integral el término $|f(Re^{i\theta})|$ por $|f(Re^{i\theta})|/M(R)$, donde, $M(R) = \max\{|f(z)| : |z| = R\}$, pues por ser

$$\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^{m+2}} \mathrm{d}\theta = 0,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^{m+2}} \ln|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^{m+2}} \ln|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^{m+2}} \ln M(R)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^{m+2}} \ln\left[\frac{|f(Re^{i\theta})|}{M(R)}\right]\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

pues el término $\ln(M(R))$ es constante.

Utilizando esto y la desigualdad (4.3.14), como $\log(|f(Re^{i\theta})|/M(R)) \leq 0$, podemos acotar la integral de la igualdad 4.3.11 como

$$\begin{aligned}
&\left|(m+1)!\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^{m+2}} \ln\left[\frac{|f(Re^{i\theta})|}{M(R)}\right] \mathrm{d}\theta\right| \\
&\leq (m+1)!\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^{m+2}} \ln\left[\frac{|f(Re^{i\theta})|}{M(R)}\right]\right| \mathrm{d}\theta \\
&\leq \frac{(m+1)!}{2\pi}\frac{2^{m+3}}{R^{m+1}}\int_0^{2\pi} \ln\left[\frac{M(R)}{|f(Re^{i\theta})|}\right] \mathrm{d}\theta.
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Pero en virtud de la fórmula de Jensen,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta \geq \ln|f(0)|,$$

que es finito, por ser $f(0) \neq 0$. Además, dado $\epsilon > 0$, por ser f de orden λ existe $R_0 > 0$ tal que $M(R) < \exp(R^{\lambda+\epsilon})$ para cada $R \geq R_0$, por lo que $\ln(M(R)) < R^{\lambda+\epsilon}$ para $R \geq R_0$. Por tanto, la cota (4.3.15) puede ser mejorada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{(m+1)!}{2\pi}\frac{2^{m+3}}{R^{m+1}}\int_0^{2\pi} \ln\left[\frac{M(R)}{|f(Re^{i\theta})|}\right]\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{(m+1)!}{2\pi}\frac{2^{m+3}}{R^{m+1}}\left(\int_0^{2\pi}\ln(M(R))\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi}\ln(|f(Re^{i\theta})|)\,\mathrm{d}\theta\right) \\
&\leq \frac{(m+1)!}{2\pi}\frac{2^{m+3}}{R^{m+1}}\left(\int_0^{2\pi} R^{\lambda+\epsilon}\,\mathrm{d}\theta - \ln|f(0)|\right) \\
&\leq (m+1)!2^{m+2}R^{\lambda+\epsilon-(m+1)} - \frac{(m+1)!}{2\pi}\frac{2^{m+3}}{R^{m+1}}\ln|f(0)|, \quad R \geq R_0
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Por la arbitrariedad de ϵ, podemos elegir ϵ de forma que $R^{\lambda+\epsilon-(m+1)} \to 0$ si $R \to \infty$, lo que hace que la cota (4.3.16) converja a cero cuando $R \to \infty$. Por el criterio del sandwich, concluimos que la integral de la igualdad (4.3.11) converge a cero cuando $R \to \infty$.

Finalmente haciendo tender R hacia infinito en la expresión (4.3.11) se concluye que

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -m!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z_n - z)^{m+1}}.$$

Si ahora $f(0) = 0$, escribiendo $f(z) = z^k g(z)$ con g una función entera tal que $g(0) \neq 0$, se tiene que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \tag{4.3.17}$$

Basta derivar m veces la expresión (4.3.17) y aplicar el caso anterior a g para obtener que

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = \frac{-m!k}{(-z)^{m+1}} - m!\sum_{n\in\mathbb{N}, z_n\neq 0}\frac{1}{(z_n - z)^{m+1}},$$

y concluir la veracidad de la igualdad del enunciado también para el caso en el que f presente un cero en el origen. □

Lema 4.3.6. Sean $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos con exponente de convergencia finito y $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/z_n)$ su producto canónico. En los puntos en los que $P(z) \neq 0$, se tiene que

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[\frac{P'(z)}{P(z)}\right] = -m!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z_n - z)^{m+1}} \quad \text{si} \quad m \geq p.$$

Demostración. Consideramos la sucesión de funciones $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$q_n(z) = E_p\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Esta es una sucesión de funciones enteras no idénticamente nulas y $\prod_{n=1}^{\infty} q_n(z) = P(z)$. En virtud del teorema 2.3.6 se sigue que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n'(z)}{q_n(z)},$$

donde la serie converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{C}$ que no contienen ceros de P. En nuestro caso,

$$q_n(z) = E_p\left(\frac{z}{z_n}\right) = \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\frac{z}{z_n} + \frac{z^2}{2z_n^2} + ... + \frac{z^p}{pz_n^p}\right),$$

por tanto,

$$\frac{q_n'(z)}{q_n(z)} = -\frac{1}{z_n - z} + \frac{1}{z_n} + \frac{z}{z_n^2} + ... + \frac{z^{p-1}}{z_n^p}.$$

Al ser $m \geq p$ derivando este término m veces se concluye el resultado. $\square$

4.4. El teorema de factorización de Hadamard

Ya hemos desarrollado la maquinaria necesaria para probar el teorema que da nombre a este capítulo y que es una mejora del teorema de factorización de Weierstrass.

Teorema 4.4.1. (Teorema de factorización de Hadamard). Sea f una función entera no constante de orden finito λ, cuyos ceros distintos del origen se encuentran exactamente en los puntos de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Supongamos además que f presenta un cero en el origen de orden k. Sea

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

el producto canónico de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. En estas condiciones, f puede ser representada mediante la fórmula

$$f(z) = z^k P(z) e^{g(z)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

donde la función g es un polinomio de grado a lo sumo la parte entera de λ.

Demostración. En virtud del teorema de factorización de Weierstrass, existen una función entera g y una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de enteros no negativos tales que

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right). \tag{4.4.1}$$

donde E_{p_n} es el p_n-ésimo factor elemental de Weierstrass.

En primer lugar, veamos que el producto de la expresión anterior resulta un producto canónico. Por el teorema 4.2.13 f tiene exponente de convergencia $\mu \leq \lambda$. Por la observación 3.2.5 podemos tomar la sucesión de enteros no negativos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ constante igual a p, siendo p el menor entero no negativo mayor que $\mu - 1$. Por tanto, el producto de la expresión (4.4.1) puede tomarse como un producto canónico

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Sustituyendo en la expresión anterior, podemos expresar f en la forma

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{z_n}\right). \tag{4.4.2}$$

En segundo lugar, veamos que g es una función polinómica de grado a lo sumo la parte entera de λ. Calculando la derivada logarítmica de la expresión (4.4.2) llegamos a que si $f(z) \neq 0$, se tiene que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z} + \frac{P'(z)}{P(z)} + g'(z).$$

Si $m+1 > \lambda$ derivando m veces la igualdad anterior y utilizando los lemas 4.3.5 y 4.3.6 llegamos a la igualdad

$$g^{m+1}(z) = -m!\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z_n - z)^{m+1}} + \frac{k}{(-z)^{m+1}}\right) + \frac{m!k}{(-z)^{m+1}} + m!\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z_n - z)^{m+1}} = 0.$$

Por tanto, los coeficientes del desarrollo de Taylor de g en torno al origen resultan nulos del término $m+1$ en adelante. Concluimos que g es un polinomio de grado a lo sumo la parte entera de λ. $\square$

Ejemplo 4.4.2. I. Consideramos de nuevo el ejemplo de la factorización de la función $f(z) = \sin(\pi z)$. En este caso la factorizaremos utilizando los nuevos argumentos obtenidos en este capítulo.

En primer lugar, por un razonamiento análogo al que vimos en el ejemplo 4.2.9 apartado II, el orden de la función $\sin(\pi z)$ es 1. Recordemos que los ceros de la función $\sin(\pi z)$ se encuentran en los números enteros, y cada uno de estos es un cero simple de f. En virtud del teorema de factorización de Hadamard, podemos expresar f como un producto infinito en la forma

$$\sin(\pi z) = z e^{g(z)} \prod_{n\neq 0} E_1\left(\frac{z}{z_n}\right) = z e^{g(z)} \prod_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}, \quad z \in \mathbb{C},$$

donde $P(z) = \prod_{n\neq 0} E_1(z/z_n)$ es el producto canónico de la sucesión de los números enteros. Este producto canónico se obtiene tomando $p = 1$, pues este es el menor entero mayor que $\mu - 1$, dónde μ es el exponente de convergencia de la sucesión, en nuestro caso, 1. Por otro lado, g es un polinomio de grado menor o igual que la parte entera del orden de la función $\sin(\pi z)$, o sea, 1. Por tanto, el producto anterior, se escribe en la forma

$$\sin(\pi z) = z e^{az+b} \prod_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}, \quad z \in \mathbb{C},$$

y como ya vimos en el capítulo anterior, podemos expresar dicho producto como

$$\sin(\pi z) = z e^{az+b} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.4.3}$$

Obtengamos ahora el valor de los coeficientes a y b. Por un lado, la función $\sin(\pi z)$ es una función impar, por lo que

$$\sin(-\pi z) = (-z)e^{-az+b} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = -z e^{az+b} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = -\sin(\pi z), \quad z \in \mathbb{C},$$

es decir, $e^{2az} = 1$ para cada $z \in \mathbb{C}$, de donde se sigue que $a = 0$.

Por otro lado, en virtud de la expresión (4.4.3) y lo anterior se tiene que

$$\frac{\sin(\pi z)}{z} = e^{b} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad 0 < |z| < 1,$$

y tomando el límite cuando $z \to 0$, tenemos que $\pi = e^b$.

Por tanto, la factorización de la función $\sin(\pi z)$ resulta

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

la misma que obtuvimos en el capítulo anterior utilizando únicamente el teorema de factorización de Weierstrass.

II. El próximo ejemplo tendrá una gran utilidad práctica, pues utilizando el teoremasa de factorización de Hadamard encontraremos fórmulas generales de factorización de funciones enteras definidas por una combinación lineal de exponenciales, como $f(z) = \exp(az) \pm \exp(bz)$, donde $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$.

Los ceros de la función entera $f(z) = \exp(az) + \exp(bz)$, se encuentran en los puntos del plano complejo $z_k = (2k+1)\pi i/(a-b)$, $k \in \mathbb{Z}$, siendo cada uno de estos ceros de multiplicidad 1. Estos puntos conforman una sucesión de ceros no nulos de f, satisfaciendo que $|z_k| \to \infty$ cuando $|k| \to \infty$. Como ya hemos visto en el ejemplo 4.2.11, la función f tiene orden 1, por el teorema de factorización de Hadamard, podemos representar f mediante la fórmula:

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k \in \mathbb{Z}} E_1\left(\frac{z}{z_k}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

donde g es un polinomio de grado a lo sumo 1, y $P(z) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} E_1(z/z_k)$ es el producto canónico de la sucesión de ceros $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, que de nuevo se obtiene tomando $p = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{g(z)} \prod_{k \in \mathbb{Z}} E_1\left(\frac{z}{z_k}\right) = e^{g(z)} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k} \\ &= e^{g(z)} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{(a-b)z}{(2k+1)\pi i}\right) e^{(a-b)z/(2k+1)\pi i}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Reordenando ahora los términos de la expresión anterior, se sigue que

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{(2n+1)^2 \pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como habíamos dicho, $g(z)$ es un polinomio de grado a lo sumo 1, es decir, de la forma $g(z) = g_1 + g_2 z$. Tratemos ahora de encontrar el valor de los coeficientes del polinomio. Como hemos visto,

$$e^{az} + e^{bz} = e^{g_1 + g_2 z} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{(2n+1)^2 \pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

evaluando en el origen se sigue que $e^{g_1} = 2$, por lo que $g_1 = \log 2$.

Obtengamos ahora el valor de g_2. Por ser f no nula en el cero, podemos considerar la derivada logarítmica de f evaluada en el origen, $f'(0)/f(0)$.

En primer lugar, utilizando la expresión original de f, $f(z) = e^{az} + e^{bz}$, su derivada será $f'(z) = ae^{az} + be^{bz}$ por lo que $f'(0) = a + b$. Además, $f(0) = 2$, por lo que

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{a+b}{2}.$$

Calculemos ahora la derivada logarítmica de f en el cero trabajando con la factorización de f que hemos obtenido. En primer lugar, sea

$$P(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{(2n+1)^2 \pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Con esta notación,

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{2g_2 P(0) + 2P'(0)}{2P(0)} = g_2 + \frac{P'(0)}{P(0)}. \tag{4.4.4}$$

Obtengamos entonces el valor de $P'(0)/P(0)$. Consideremos la sucesión de funciones enteras $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ definidas por

$$P_n(z) = 1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{(2n+1)^2 \pi^2}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

La serie funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P_n(z) - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-b)^2 z^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \quad z \in \mathbb{C},$$

converge normalmente en los subconjuntos compactos del plano complejo, luego converge uniformemente y absolutamente en dichos subconjuntos. En virtud del teorema 2.3.2 concluimos que el producto

$$\prod_{n=0}^{\infty} P_n(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{(2n+1)^2 \pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

converge uniformemente hacia P en los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, y por lo tanto, convergen en $\mathcal{H}(U)$ hacia P. En consecuencia, podemos aplicar el teorema 2.3.6 para establecer que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z(a-b)^2}{(2n+1)^2\pi^2 + (a-b)^2 z^2}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.4.5}$$

Donde la convergencia es uniforme en los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Evaluando la expresión (4.4.5) en el origen, $P'(0)/P(0) = 0$, y sustituyendo en la expresión (4.4.4),

$$\frac{a+b}{2} = \frac{f'(0)}{f(0)} = g_2,$$

de donde concluimos que $g_2 = (a+b)/2$.

Finalmente, llegamos a la factorización

$$f(z) = \exp(az) + \exp(bz) = 2e^{(a+b)z/2} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.4.6}$$

El conocimiento de esta factorización resulta muy útil, pues muchas de las funciones que cuentan con infinitos ceros están definidas mediante una combinación de exponenciales, por lo que podemos obtener una factorización para estas sin más que sustituir los coeficientes a y b en la fórmula (4.4.6). Por ejemplo, la función $\cos(\pi z)$, esta definida como

$$\cos(\pi z) = \frac{\exp(\pi i z) + \exp(-\pi i z)}{2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

por lo que tomando $a = i\pi$, y $b = -i\pi$ y sustituyendo en la fórmula (4.4.6) se tiene que

$$\cos(\pi z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(2\pi i)^2 z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Otra función cuya expresión en forma de producto infinito podemos obtener fácilmente gracias a la fórmula (4.4.6) es la función $\cosh(z)$.

Esta función está de nuevo definida por una combinación lineal de exponenciales, concretamente por

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sustituyendo de nuevo en la fórmula (4.4.6), en este caso con $a = 1$ y $b = -1$, se sigue que

$$\cosh(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{4z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

En el caso de tener una función definida mediante una resta de exponenciales del tipo, $g(z) = \exp(az) - \exp(bz)$, donde $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$, con un razonamiento similar se puede llegar a la fórmula de factorización

$$\exp(az) - \exp(bz) = (a-b)ze^{(a+b)z/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2\pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.4.7}$$

y sustituyendo en esta nueva fórmula se pueden obtener factorizaciones de funciones definidas mediante una resta de exponenciales, como el $\sinh(z)$, definida por

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

cuya factorización, sustituyendo $a = 1$ y $b = -1$ en la fórmula (4.4.7) resulta,

$$\sinh(z) = ze^z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Por último, podemos obtener de nuevo la factorización de la función $\sin(\pi z)$, sin más que sustituir $a = \pi i$ y $b = -\pi i$ en la expresión (4.4.7) y obtener

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, Análisis Matemático, Ed. Reverté, 1989.

[2] R. B. Ash, *Complex Variables*, Ed. Academic Press, 1971.

[3] R. B. Ash and W. P. Novinger, *Complex Variables.*

[4] J. de Burgos, *Cálculo infinitesimal en varias variables*, Ed. McGrraw-Hill.

[5] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Ed. Springer, 1978.

[6] F. Galindo Soto, J. Gómez Pérez, J. Sanz Gil, L.A. Tristán Vega, *Guía práctica de VARIABLE COMPLEJA y aplicaciones*, Ed. Thomson.

[7] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Basic Complex Analysis.* Second edition, Ed. Freeman.

[8] J. M. Ortega, *Introducción al análisis matemático*, Ed. Labor, s.a.

[9] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Functions Theory*, Ed. Springer, 1997.

[10] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Ed. McGraw Hill, 1970.