



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Principio de extensión para la construcción de sistemas framelets

Autor: Alejandro Martínez Álvarez

Tutor: Fernando M. Gómez Cubillo

2024

Resumen:

La teoría wavelet es ampliamente aplicable en diversos campos, desde el procesamiento de señales hasta la detección de patrones en datos complejos, gracias a su capacidad para descomponer señales en diferentes escalas y localizaciones. Los frames, una generalización de las bases tradicionales, permiten descripciones redundantes y más adaptables. Uniendo ambos conceptos surgen los sistemas framelets. Estos son familias finitas de funciones que comparten propiedades similares a las wavelets, pero dentro de un marco más general, el de los frames, siendo cruciales en el procesamiento de señales.

Encontrar sistemas de framelets es esencial para operaciones como compresión, descomposición y reconstrucción de señales. Sin embargo, la construcción de estos es una tarea complicada. El objetivo de este trabajo es presentar los principios de Extensión Unitaria y Oblicua, los cuales permiten la construcción de sistemas framelets a partir de ciertas condiciones. Se realiza una revisión de los diferentes planteamientos que han llevado a estos principios, se presentan algunos ejemplos y se comentará la generalización que supuso el último de los planteamientos.

Palabras clave:

Banco de Filtros, Ecuaciones de Refinamiento, Filtro, Frame, Framelet, Función refinable, Funciones de refinamiento, Máscara de refinamiento, Par de Framelets duales, Principio de Extensión Oblicua, Principio de Extensión Unitaria

Abstract:

Wavelet theory is widely applicable in various fields, from signal processing to pattern detection in complex data, thanks to its ability to decompose signals into different scales and locations. Frames, a generalization of traditional bases, allow for redundant and more adaptable descriptions. Combining both concepts gives rise to framelet systems. These are finite families of functions that share properties similar to wavelets but within a more general framework, that of frames, being crucial in signal processing.

Finding framelet systems is essential for operations such as compression, decomposition, and reconstruction of signals. However, constructing these systems is a complicated task. The aim of this work is to present the Unitary and Oblique Extension principles, which allow for the construction of framelet systems from certain conditions. A review of the different approaches that have led to these principles is conducted, some examples are presented, and the generalization that the latest approach entailed will be discussed.

Keywords:

Filter Bank, Unitary Extension Principle, Oblique Extension Principle, Filter, Frame, Framelet, Mask, Refinable Function, Refinement Equations, Refinement Mask, Refinement Functions, Pair of Dual Framelets.

Índice general

Introducción	7
1. Nociones preliminares	11
1.1. Frames en un espacio de Hilbert	12
1.2. Framelets y framelets duales	18
1.2.1. Propiedades de los operadores	20
1.3. Funciones refinables, ecuaciones de refinamiento y filtros	23
2. El Principio de Extensión Oblicua aplicado a un framelet	29
2.1. Resultados previos	31
2.2. Principio de Extensión Unitaria	44
2.3. Principio de Extensión Oblicua	48
2.4. Ejemplos	50
3. Principio de Extensión Oblicua aplicado a framelets duales	61
3.1. Terminología	62
3.2. Reconstrucción perfecta de la transformada framelet discreta	65
3.3. El Principio de Extensión Oblicua	70
3.4. Construcción de framelets duales	73
A. Apéndice	85
A.1. Algunos resultados sobre análisis real	85
A.2. Operadores en un espacio de Hilbert	86
A.3. Series de Fourier	87
A.4. Transformada de Fourier	87
A.5. B-Splines	88

Introducción

La teoría wavelet es un campo emergente en las matemáticas de hoy en día con gran cantidad de aplicaciones en diferentes ámbitos. La idea inicial en esta teoría consiste en obtener bases ortonormales de $L^2(\mathbb{R}^n)$ formadas por trasladadas y dilatadas (discretas) de una única función φ , la wavelet.

Estas bases presentan ventajas con respecto a otras más clásicas, como por ejemplo las bases trigonométricas asociadas a la transformada de Fourier. En particular las bases wavelet tienen la capacidad de representar cambios locales en el tiempo y la frecuencia, lo que permite analizar señales de manera más eficiente que la transformada de Fourier la cual proporciona información global sobre toda la señal. Ello es debido en gran medida a que la mayoría de las bases ortonormales wavelet (al menos las de soporte compacto) está asociada a un análisis multirresolución que permite examinar una señal a diferentes escalas, lo que facilita la detección de características importantes en diferentes niveles de detalle. Se comentará en el Capítulo 1 Sección 1.3.

Más allá de bases ortonormales existen familias de funciones que permiten la representación de funciones en un espacio de Hilbert cualquiera, por ejemplo las bases de Riesz o los frames. En este trabajo nos centraremos en el concepto de frame que generaliza el de base, pues permite la descripción de los elementos de manera redundante al eliminar la propiedad de independencia lineal. Lo introduciremos en el Capítulo 1 sección 1.1. Debido a esa redundancia en la descomposición de los elementos, estos sistemas son mucho más flexibles y útiles en el procesamiento de señales. Esto se expondrá en el teorema de Descomposición frame de [1].

El propósito de nuestro trabajo es el estudio de los sistemas frame generados mediante traslaciones y dilataciones discretas de familias finitas de funciones. Estas familias finitas de generadores se denominan comúnmente

framelets, expresión que surge de la combinación de **frame wavelet** (capítulo 1 sección 1.2). Estudiaremos framelets simples, válidos tanto para la descomposición como la reconstrucción, y también pares duales de framelets, que utilizan uno de los framelets para la descomposición y otro la reconstrucción (capítulo 1 sección 1.2). La cuestión principal estriba en encontrar estos framelets. Abordaremos este problema mediante el Principio de Extensión Unitaria [7] y el Principio de Extensión Oblicua [4], que son los resultados fundamentales de este trabajo. Estos Principios desempeñan un papel crucial en la teoría framelet, ya que posibilitan la caracterización de los framelets mediante dos ecuaciones relativas a las máscaras de refinamiento, concepto introducido en el capítulo 1 Sección 1.3. Esas ecuaciones variarán según el teorema. Construir framelets no es a priori algo fácil, de aquí la importancia de estos resultado.

Al mismo tiempo se pretende hacer una revisión histórica de dos enfoques para llegar a estos resultados:

1. El primero de ellos, el enfoque inicial y más clásico de Ron y Shen [7], que también puede encontrarse en Christensen [1]. Este planteamiento utiliza el análisis multirresolución para llegar al Principio de Extensión Oblicua que a su vez permite construir framelets.
2. El segundo es un enfoque más moderno, con un análisis centrado en la transformada framelet discreta. Seguiremos Bin Han [5], pero su texto original es [4]. Aquí notar que no haremos hincapié en la transformada y sus propiedades, simplemente la utilizaremos como una herramienta para llegar al resultado fundamental, El Principio de Extensión Oblicua, para obtener directamente pares de framelets duales.

Aunque Bin Han no utilice el planteamiento del análisis multirresolución para llegar al Principio de Extensión Oblicua, en la práctica se tratará de preservar ese análisis multirresolución. Ello quedará garantizado al utilizar funciones refinables y ecuaciones de refinamiento (concepto introducido en el capítulo 1 sección 1.3). En su trabajo original [4] Bin Han va más allá presentando directamente estos resultado (y más), a espacios de Sobolev y funciones generalizadas.

En el capítulo 2, empezaremos con el enfoque clásico. Después de un laborioso trabajo previo, en el que expondremos un contexto general donde trabajar, enunciaremos y demostraremos detalladamente resultados previos

al Principio de Extensión Unitaria que nos ayudarán en la prueba de este. Todo ello reflejado en el capítulo 2 sección 2.1. Con ello llegaremos al Principio de Extensión Unitaria y luego al Principio de Extensión Oblicua (Secciones 2.2 y 2.3) que surge casi de manera inmediata. Para finalizar este capítulo hemos desarrollado varios ejemplos de [1] y [3], basados en B-splines, que mostrarán el por qué el Principio de Extensión Oblicua es más conveniente (Sección 2.4).

En el capítulo 3, pasaremos al enfoque de Bin Han partiendo de conceptos relacionados con la transformada framelet discreta (sección 3.1) que permiten estudiar la propiedad de perfecta reconstrucción de una transformada framelet discreta (sección 3.10). En esta propiedad está la clave para llegar al Principio de Extensión Oblicua, sin recurrir al Principio de Extensión Unitaria. Uno de los mayores avances es que se pasa a trabajar directamente con pares de framelets duales. Concluiremos la parte teórica con unas reflexiones acerca de la generalización que supone esta perspectiva. Además, se mostrará un algoritmo, basado en el análisis multirresolución, para construir pares de framelets duales. Para concluir hemos detallado ejemplos de [3], basados en B-splines, que muestran cómo funciona el algoritmo.

Además, este texto dispone de un apéndice el cual recuerda Algunos resultados sobre análisis real, Operadores en un espacio de Hilbert, Series de Fourier, Transformada de Fourier y B-Splines.

Capítulo 1

Nociones preliminares

Este capítulo se estructura en tres secciones distintas. En la primera sección, se presentarán los conceptos fundamentales de frame, frame ajustado, operador preframe, operador de síntesis, operador frame, frame dual y frame dual canónico. Además, se enunciará y demostrará el teorema de descomposición frame. Este resultado es esencial, ya que muestra que un frame actúa como una base generalizada, permitiendo la descomposición de cualquier elemento de un espacio de Hilbert en términos de los elementos del frame, aunque esta descomposición no sea única.

En la segunda sección, se introducirá el concepto de framelet, comenzando con los operadores de traslación, dilatación y modulación. Posteriormente, se abordará la noción de momento de anulación y pares de framelets duales. Esta sección también explorará propiedades de los operadores y sus relaciones con la transformada de Fourier.

En la tercera sección, se presentarán conceptos básicos relevantes para los capítulos 2 y 3. Se comenzará definiendo función refinable, máscara de refinamiento, filtro, ecuaciones de refinamiento y reglas de suma. La sección concluirá con una discusión sobre la conservación del análisis multirresolución.

1.1. Frames en un espacio de Hilbert

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. En esta sección se utilizarán resultados generales de operadores en espacios de Hilbert, estos aparecerán en el apéndice A.2.

Recordemos que una familia $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} es de Bessel si existe $B > 0$ tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

A lo largo de esta sección se utilizarán propiedades de familias de Bessel dado que es la mitad de la definición de frame.

Definición 1.1. Una familia $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} es un frame de \mathcal{H} si existen constantes $A, B > 0$ tal que:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Las constantes A y B son las cotas frame y no son únicas, en el caso de que coincidan se da un caso de frames realmente interesante, los frames ajustados :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = A \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Comentaremos más adelante la importancia de estos.

Proposición 1.2 (Denso). *Sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ denso y supongamos $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una familia en \mathcal{H} tal que existen constantes $A, B > 0$ de manera que:*

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

Entonces $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame de \mathcal{H} con cotas frame A y B .

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H} - \mathcal{D}$ existen $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \in \mathcal{D}$ tal que $f = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m$. Entonces,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \lim_{m \rightarrow \infty} f_m, f_k \rangle|^2,$$

por la continuidad del producto escalar:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \lim_{m \rightarrow \infty} f_m, f_k \rangle|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f_m, f_k \rangle|^2.$$

Aplicando la hipótesis y la monotonía del límite se sigue

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A \|f_m\|^2 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f_m, f_k \rangle|^2 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} B \|f_m\|^2.$$

Y, por continuidad secuencial:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

Lo que concluye la prueba dada la generalidad de f . □

Definiremos ahora 3 operadores que juegan un papel importante en el desarrollo de la teoría frame.

Definición 1.3. Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una frame de \mathcal{H} llamaremos:

1. *Operador pre-frame:*

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{H}, \quad T(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k. \quad (1.1)$$

2. *Operador de síntesis:*

$$T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \quad T^*(f) = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}. \quad (1.2)$$

3. Componiendo T y T^* se obtiene el *operador frame* que denotaremos por S :

$$S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad S(f) = TT^*(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k. \quad (1.3)$$

Proposición 1.4. *El operador pre-frame T es un operador acotado (continuo) y $\|T\| \leq \sqrt{B}$.*

Demostración. Obviamente T es lineal gracias a la asociatividad de la suma y el producto. Recordemos que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una secuencia de Bessel con cota B .

Sea $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$. En primer lugar queremos probar que la expresión está bien definida, es decir, que la suma es convergente. Para ello veamos que la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{k=1}^N x_k\}_{N=1}^{\infty}$ es de Cauchy (recordemos que estamos trabajando en un espacio completo):

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k f_k - \sum_{k=1}^m x_k f_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k f_k \right\|.$$

La propiedad $\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|$ aplicada a nuestro caso implica:

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n x_k f_k \right\| = \sup_{\|g\|=1} |\langle \sum_{k=m+1}^n x_k f_k, g \rangle| = \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=m+1}^n |\langle x_k f_k, g \rangle|,$$

utilizando la Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\leq \left(\sum_{k=m+1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sup_{\|g\|=1} \sum_{k=m+1}^n |\langle f_k, g \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{B} \left(\sum_{k=m+1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Puesto que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ sabemos que la sucesión de las sumas parciales $\{\sum_{k=m+1}^N |x_k|^2\}_{N=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Por tanto hemos probado que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$ es convergente pues la sucesión de sumas parciales es de Cauchy.

Un razonamiento similar a lo anterior muestra que T es un operador acotado y para todo $\mathbf{x} \in \ell^2(\mathbb{N})$

$$\|T(\mathbf{x})\| \leq \sqrt{B}\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \|T\| \leq \sqrt{B},$$

pues la norma del operador viene definida como

$$\|T\| = \inf \{M > 0 : \|T(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|\}.$$

□

Lema 1.5. *El operador frame S es acotado, invertible, autoadjunto y positivo.*

Demostración. Que S es acotado se deduce por ser S composición de dos operadores acotados. Además,

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\|^2 \leq B.$$

Puesto que $S^* = (TT^*)^* = T^*T = S$ se tiene que S es autoadjunto. A lo largo del texto se utilizarán estas propiedades, para el resto de la prueba citamos Christensen [1, págs 100-101]. \square

Definición 1.6. Dados dos frames de \mathcal{H} , $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, se dice que son frames duales si

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k \quad , \forall f \in \mathcal{H}.$$

A $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ se le conoce como frame de reconstrucción y a $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ como frame de descomposición.

Dado un frame $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ existen varios frames duales. Para más información ver Christensen [1, págs 126-130]. El más típico es el conocido como frame dual canónico y denotado por $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$, se le denomina así pues hace un papel parecido a las bases duales en la teoría de bases.

Proposición 1.7. $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ define un frame de \mathcal{H} y es dual de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Demostración. En primer lugar, como S es autoadjunto también lo será S^{-1} . Supongamos $f \in \mathcal{H}$, tenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle S^{-1}f, f_k \rangle|^2 \leq B \|S^{-1}f\|^2 \leq B \|S^{-1}\|^2 \|f\|^2.$$

Luego, $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una familia de Bessel y el operador frame está bien definido. Por definición de este:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle S^{-1}f_k = S^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1}f, f_k \rangle f_k = S^{-1}SS^{-1}f = S^{-1}f,$$

esto muestra que el operador frame de $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es S^{-1} y conmuta con S e I , luego:

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, S^{-1}f_k \rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2.$$

En conclusión, $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame con cotas frame A^{-1} y B^{-1} .

Veamos ahora que $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ son duales:

$$f = SS^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1}f, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k,$$

donde hemos utilizado que S^{-1} es autoadjunto. \square

La cuestión por la que se dice que un frame es una base generalizada es que también tiene la propiedad de que cualquier elemento del espacio se puede expresar como combinación lineal (quizás infinita) de elementos del frame. Es decir, para toda función $f \in \mathcal{H}$ se tiene que existen ciertos $\{c_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ de manera que

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) f_k.$$

Al no ser una base en el sentido estricto de la palabra los coeficientes no será únicos. Veremos en el siguiente teorema que, efectivamente, se tiene esta propiedad y veremos cuáles son los coeficientes.

Teorema 1.8 (Descomposición frame). *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ un frame de \mathcal{H} con operador frame S . Entonces,*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k, \quad (1.4)$$

y

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle S^{-1}f_k. \quad (1.5)$$

Además ambas series convergen absolutamente para toda $f \in \mathcal{H}$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}$. Notemos que al ser $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ un frame también es una familia de Bessel y que $\{\langle f, S^{-1}f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

1. Probemos la primera igualdad. Se sabe que S^{-1} es autoadjunto luego:

$$f = SS^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1}f, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k.$$

2. La segunda, utilizando linealidad y continuidad del operador S^{-1}

$$f = S^{-1}Sf = S^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle S^{-1}f_k.$$

□

Los números $\langle f, S^{-1}f_k \rangle$ se denominan coeficientes frame. Se vislumbra una dificultad en la teoría frame, y es la de calcular el operador S^{-1} . Por ello se requiere trabajar con otros frames duales que ayuden a la hora de la implementación.

En la construcción de frames con determinadas propiedades es esencial conocer el comportamiento del frame dual canónico. Sin embargo, en un frame general no se tiene conocimiento de este. Por ejemplo, si un frame tiene estructura wavelet nada asegura que el dual la tenga. Es aquí donde entran en juego los frames ajustados, en estos casos el frame dual canónico conserva la estructura del frame. Veremos el por qué en el siguiente corolario del teorema de Descomposición frame.

Corolario 1.9. Si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame ajustado con cota A entonces el frame dual canónico es $\{A^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ y

$$f = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Demostración. La definición del operador frame S muestra que

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = A\|f\|^2 = \langle Af, f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Notemos que como operadores $S = AI$ y, por ende, $S^{-1} = A^{-1}I$. Por último aplicamos (1.4). □

1.2. Framelets y framelets duales

Para introducir los framelets es necesario conocer al menos la noción de wavelet, para más información sobre wavelets ver [2]. La teoría framelet, al igual que la wavelet, está basada en dos operadores de $L^2(\mathbb{R})$, las traslaciones y las dilataciones que, respectivamente, vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$T_a : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (T_a f)(x) = f(x - a), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

y

$$D_b : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (D_b f)(x) = \frac{1}{\sqrt{|b|}} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad b \neq 0. \quad (1.7)$$

Decimos que φ es un wavelet si las funciones

$$\{\varphi^{a,b}(x)\}_{(a,b) \in \Lambda} := (T_b D_a \varphi)(x) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad \Lambda \subset \mathbb{R}^2$$

forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Nuestro propósito es encontrar sistemas framelets. Estos surgen como concepto paralelo, pues un framelet es una función φ de modo que $\{\varphi_{a,b}\}_{(a,b) \in \Lambda}$, definido como antes, forme un frame.

Con fin de ser viable computacionalmente lo más normal es restringir Λ a subconjuntos al menos numerables de \mathbb{R} . Es por ello que a lo largo del texto trabajaremos con sistemas diádicos. Estos son una restricción de los operadores D y T de manera que las dilataciones son potencias de 2 y las traslaciones por enteros. Lo denotaremos como sigue:

$$(D^j T_k \varphi)(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k).$$

En este caso especial tenemos una relación que justifica el orden de los operadores en las definiciones

$$T_k D^j = D^j T_{2^j k}, \quad D^j T_k = T_{2^{-j} k} D^j, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

A lo largo de todo el texto utilizaremos la segunda notación.

Dada la importancia del concepto daremos una definición en términos más generales, pues no tiene por qué haber una única función generadora.

Definición 1.10. Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto finito de funciones de $L^2(\mathbb{R})$ diremos que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es un framelet si existen constantes positivas A y B de manera que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{\ell=1}^n \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi_\ell \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

En el caso de haber un único conjunto de funciones también se puede denominar framelet simple, aunque se utilizará únicamente framelet.

Una propiedad que buscaremos a lo largo del texto es que el framelet tenga momento de anulación de orden m , para cierto $m \in \mathbb{N}$. Se presenta la definición a continuación.

Definición 1.11 (Momento de anulación). Decimos que φ tiene momento de anulación de orden m si

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \varphi(x) dx = 0 \text{ para } k = 0, \dots, m-1.$$

Daremos una breve descripción de la utilidad de esta propiedad, para más información y detalle ver Mallat [6].

En el contexto de la compresión de datos, en la práctica, no se pueden almacenar infinitos coeficientes frame y es por ello que si φ tiene un gran número de momentos nulos los coeficientes frame $\langle f, D^j T_k \varphi \rangle$ decrecen rápidamente a medida que $j \rightarrow \infty$. Para ello hay que imponer que la función φ sea de soporte compacto y que la función f sea suficientemente diferenciable con derivadas acotadas.

Además, bajo condiciones similares, además de momentos de anulación de orden elevado, sobre la función φ se puede asegurar suficiente regularidad.

Como se comentó en la sección anterior tenemos especial interés en conocer frames duales, combinando las definiciones surge el siguiente concepto:

Definición 1.12. Sean dos familias de funciones $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ y $\{\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n\}$ de $L^2(\mathbb{R})$, decimos que son un par de framelets duales si los frames generados por ellas, respectivamente, son frames duales, es decir, se tiene:

$$f = \sum_{\ell=1}^n \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \varphi_\ell \rangle D^j T_k \tilde{\varphi}_\ell.$$

En este caso a $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \{1, \dots, n\}}$ se le denomina framelet de descomposición y a $\{\tilde{\varphi}_\ell\}_{\ell \in \{1, \dots, n\}}$ se le denomina framelet de reconstrucción. Sin embargo, no tienen un papel especial en sí mismos pues uno puede hacer de otro. Veamos el motivo, imaginemos que $\ell = 1$, es decir, que tenemos φ y $\tilde{\varphi}$ framelets entonces

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \varphi \rangle D^j T_k \tilde{\varphi} \iff f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \tilde{\varphi} \rangle D^j T_k \varphi.$$

Esto se deduce de considerar T el operador pre-frame de $\{D^j T_k \varphi\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ y U el operador preframe de $\{D^j T_k \tilde{\varphi}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ y hacer la equivalencia:

$$TU^* = I \iff UT^* = I.$$

1.2.1. Propiedades de los operadores

A mayores de la traslación y la dilatación se define otro operador que se conoce como modulación y viene dado por

$$E_c : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (E_c f)(x) = e^{2\pi i c x} f(x), \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

A continuación se expondrán propiedades de los operadores definidos arriba, y es gracias a ellas por lo que utilizamos los operadores para el desarrollo teórico. Estas propiedades se desarrollarán utilizando la transformada de Fourier con parámetro 2π :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Hasta que no se diga lo contrario se seguirá utilizando la transformada de Fourier de este modo. En el último capítulo se pasará a trabajar con parámetro π .

Nota. Lo enunciaremos en términos del operador traslación pero es análogo para la dilatación y la modulación.

Proposición 1.13. *Dado $a \in \mathbb{R}$ y el operador traslación T_a se cumple:*

1. T_a es un operador unitario.
2. Para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ la función que envía $y \rightarrow T_y f$ es continua.

Demostración. 1. Para probar que es unitario veamos que $T_a^* = T_a^{-1}$. Para toda $f, g \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\langle T_a f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) \overline{g(x)} dx.$$

Con el cambio de variable $x := x - a$ (abusamos de la notación):

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x+a)} dx = \langle f, T_{-a} g \rangle.$$

Además el operador T_a tiene como inversa T_{-a} , entonces podemos concluir que $T_a^* = T_a^{-1}$.

2. Para probar la continuidad de $y \rightarrow T_y f$ supongamos que f es una función continua de soporte compacto, que sabemos que es un denso de $L^2(\mathbb{R})$. Por comodidad probemos la continuidad en $y_0 = 0$ y supongamos que el soporte de f está contenido en un intervalo $[\alpha, \beta]$.

Entonces, para $y \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ la función

$$h(x) = T_y f(x) - T_{y_0} f(x) = f(x-y) - f(x)$$

tiene soporte en el intervalo $[-\frac{1}{2} + \alpha, \beta + \frac{1}{2}]$. Puesto que f es continua en un compacto, en virtud del teorema de Heine, también es uniformemente continua. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x-y) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{\beta - \alpha + 1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

cuando $|y| \leq \delta$. Entonces, para ese δ , se tiene que

$$\|T_y f - T_{y_0} f\| = \left(\int_{-\frac{1}{2} + \alpha}^{\beta + \frac{1}{2}} |f(x-y) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \epsilon.$$

Lo hemos probado para un denso de $L^2(\mathbb{R})$ falta verlo para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Por ser $C_c(\mathbb{R})$ un denso existe $g \in C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|f - g\| < \frac{\epsilon}{3}$ lo que implica que $\|T_p f - T_p g\| < \frac{\epsilon}{3}$, $\forall p \in \mathbb{R}$. Como $g \in C_c(\mathbb{R})$, por lo

probado arriba, existe $\delta > 0$ tal que $\|T_y g - T_{y_0} g\| < \frac{\epsilon}{3}$. Utilizando la desigualdad triangular:

$$\|T_y f - T_{y_0} f\| \leq \|T_y f - T_y g\| + \|T_y g - T_{y_0} g\| + \|T_{y_0} g - T_{y_0} f\| < \epsilon.$$

Luego queda comprobada la continuidad. □

Como bien se comentó arriba, la teoría framelet se basa en estos operadores y sus composiciones, es por eso que nos resultará conveniente enunciar algunas de sus relaciones:

$$T_a E_c f(x) = e^{2\pi i c(x-a)} f(x-a) = e^{-2\pi i c a} E_c T_a f(x),$$

$$T_b D_a f(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) = D_a T_{b/a} f(x),$$

$$D_a E_c f(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} e^{2\pi i x c/a} f\left(\frac{x}{a}\right) = E_{\frac{c}{a}} D_a f(x).$$

La versatilidad de estos operadores también viene motivada por sus buenas relaciones con la transformada de Fourier, pues en esta teoría habitualmente se pasa al ámbito de las frecuencias. En el siguiente lema enunciaremos relaciones de conmutatividad de los tres operadores con la transformada de Fourier.

Lema 1.14 (Relaciones de conmutatividad con la transformada de Fourier).

Sea $a \in \mathbb{R}$, se tiene:

1. $\mathcal{F}T_a = E_{-a}\mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}E_a = T_a\mathcal{F}$.
3. $\mathcal{F}D_a = D_{\frac{1}{a}}\mathcal{F}$.
4. $\mathcal{F}D_{\frac{1}{2}} = D_{\frac{1}{2}}^{-1}\mathcal{F}$.

Demostración. Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\xi \in \mathbb{R}$: Demostramos 1:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}T_a f(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i(x+a)\xi} dx \\ &= E_{-a} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = E_{-a} \mathcal{F}f(\xi).\end{aligned}$$

Demostramos 2:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}E_a f(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i a x} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x(\xi-a)} dx \\ &= \mathcal{F}f(\xi-a) = T_a \mathcal{F}f(\xi).\end{aligned}$$

Demostramos 3:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}D_a f(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|a|}} f\left(\frac{x}{a}\right) e^{-2\pi i x \xi} dx = a^{1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x a \xi} dx \\ &= \mathcal{F}a^{1/2} f(a\xi) = D_{\frac{1}{a}} \mathcal{F}f(\xi).\end{aligned}$$

4 es un caso particular de 3. □

1.3. Funciones refinables, ecuaciones de refinamiento y filtros

En este texto estamos particularmente interesados en obtener framelets (frameletes duales) ajustados que se deriven de una función refinable (pares de funciones refinables). Recordemos que estamos trabajando con sistemas diádicos luego el factor de dilatación es 2.

En la práctica trabajaremos con el espacio ya conocido $\ell^2(\mathbb{Z})$. Sabemos que vía el desarrollo en serie de Fourier existe una isometría entre $L^2(\mathbb{T})$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$. Es por ello que las siguientes definiciones se pueden dar en ambos dominios. Nosotros optaremos por $L^2(\mathbb{T})$ y luego estableceremos la relación correspondiente.

Definición 1.15. Una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ se dice que es refinable si

$$\widehat{\varphi}(2\gamma) = H_0(\gamma)\widehat{\varphi}(\gamma), \quad (1.9)$$

donde $H_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$. H_0 se denomina máscara de refinamiento o simplemente máscara.

Por cuestión de simplicidad aunque normalmente las máscaras también se conocen como filtros nosotros optaremos por reservar la palabra máscara para las funciones y filtro para las sucesiones formadas por sus respectivos coeficientes del desarrollo en serie de Fourier.

Definición 1.16 (Ecuaciones de refinamiento). Para el desarrollo teórico supondremos conocidas las máscaras $H_1, \dots, H_n \in L^\infty(\mathbb{T})$ y definimos funciones $\psi_\ell \in L^2(\mathbb{R})$ de manera que:

$$\widehat{\psi}_\ell(2\gamma) = H_\ell(\gamma)\widehat{\varphi}(\gamma), \quad \ell = 1, \dots, n. \quad (1.10)$$

A las funciones ψ_ℓ se las conoce como funciones de refinamiento.

Llamaremos banco de filtros a la familia $\{a_0, \dots, a_n\}$ donde a_i son sucesiones formadas por los coeficientes de H_i vía desarrollo en serie de Fourier.

Reformulando la ecuación (1.10) se tiene:

$$\widehat{\psi}_\ell(\gamma) = H_\ell(\gamma/2)\widehat{\varphi}(\gamma/2), \quad \ell = 1, \dots, n.$$

Escribimos en términos de la serie de Fourier de H_ℓ (denotando como $c_{k,\ell}$ a los coeficientes) y el operador dilatación :

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_\ell &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k,\ell} E_{k/2} D^{-1} \widehat{\varphi} = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k,\ell} E_{k/2} \widehat{D} \varphi \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{c_{k,\ell} E_{k/2} D \varphi} = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{c_{k,\ell} D T_{-k} \varphi}. \end{aligned}$$

Donde se han utilizado las relaciones entre operadores. En conclusión, se verifica:

$$\psi_\ell(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k,\ell} \varphi(2x + k). \quad (1.11)$$

Esta fórmula será la más importante en los ejemplos que exponemos en los capítulos sucesivos pues relaciona todos los elementos del framelet con φ , y permite graficar las funciones de manera más sencilla. En esos ejemplos se supondrá también que el filtro asociado a la máscara H_0 será finito, con ello gracias a la ecuación (1.9) la función refinable tendrá soporte compacto.

Notación. En el texto denotaremos $q(\xi)|\widehat{a}(\xi)$ si existe un polinomio trigonométrico 2π periódico $p(\xi)$ tal que

$$\widehat{a}(\xi) = q(\xi)p(\xi).$$

Comúnmente \widehat{a} será una máscara asociada a la función refinable, o bien una máscara asociada a una función de refinamiento.

La siguiente proposición relaciona los momentos de anulación de una función de refinamiento y sus respectivas máscaras bajo ciertas condiciones que detallamos:

Proposición 1.17. *Sea a un filtro de la ecuación de refinamiento (1.9) asociado a φ y b un filtro asociado a la función ψ de (1.10). Supondremos que a tiene soporte finito y $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(0) = 1$, $\widehat{\varphi}(0) = 1$ y que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k(0) = 0$. Entonces ψ tiene momento de anulación de orden r si y solo si $(1 - e^{-i\xi})^r \widehat{b}(\xi)$.*

Demostración. En primer lugar notemos que, al tener b soporte finito, \widehat{b} ya es un polinomio trigonométrico de periodo 2π . Además, por la misma razón, como a también tiene soporte finito la función refinable φ tiene soporte compacto, por ello $\widehat{\varphi}$ es \mathcal{C}^∞ . Se procede por inducción en r .

Caso $r = 1$: Supongamos ψ tiene momento de orden 1, luego:

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt \iff \widehat{\psi}(0) = \widehat{b}(0)\widehat{\varphi}(0).$$

Como $\widehat{\varphi}(0) = 1$ se tiene que $\widehat{b}(0) = 0$. Entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k = 0,$$

donde la suma es finita, luego \widehat{b} visto como polinomio en la variable x , $\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k x^k$, tiene una raíz cuando evaluamos en $x = 1$. Entonces es equivalente a que $\widehat{b}(\xi) = (1 - e^{-i\xi})p(\xi)$ donde $p(\xi)$ es un polinomio trigonométrico.

Suponemos cierto para $k = 1, \dots, r - 1$ veámoslo para $k = r$:

$$0 = \int_{\mathbb{R}} t^r \psi(t) dt \iff (i)^r \widehat{\psi}^{(r)}(0) = [\widehat{b}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)]^{(r)} \Big|_{\xi=0} = 0.$$

Utilizando la regla de derivación de Leibniz se tiene

$$\sum_{k=0}^r \widehat{b}^{(k)}(\xi) \widehat{\varphi}^{(r-k)}(\xi) \Big|_{\xi=0} = 0.$$

Donde utilizamos la hipótesis de inducción y sólo sobrevive el último sumando, pues $\widehat{b}^k(0) = 0$ para todo $k = 0, \dots, r - 1$. Entonces, gracias a que $\widehat{\varphi}(0) = 1$ se deduce que $\widehat{b}^r(0) = 0$ y por tanto si vemos \widehat{b} como un polinomio en la variable x se verifica que la derivada r -ésima y todas sus derivadas anteriores se anulan en $x = 1$ luego $\widehat{b}(x) = (1 - x)^r p(x)$ y por ello $\widehat{b}(x) = (1 - e^{-i\xi})^r p(\xi)$.

Todos los razonamientos son reversibles luego queda probada la equivalencia. □

La notación anterior es fundamental en la siguiente propiedad de los filtros: las reglas de suma, que detallaremos a continuación.

Definición 1.18 (Reglas de suma). Diremos que un filtro a satisface las reglas de suma de orden n si y solo si

$$\widehat{a}(\xi) = (1 + e^{-i\xi})^n p(\xi),$$

donde $p(\xi)$ es un polinomio trigonométrico 2π periódico. Con la notación introducida la definición es equivalente a $(1 + e^{-i\xi}) | \widehat{a}(\xi)$.

Nuestro objetivo variará según el capítulo. En el capítulo 2 será dar condiciones a las máscaras para que $\{\psi_\ell\}_{\ell \in \{1, \dots, n\}}$ sea un framelet ajustado de $L^2(\mathbb{R})$. En el capítulo 3 se trabajarán con dos bancos de filtros y así obtener pares de framelets duales. La cuestión será dar condiciones a los bancos de filtros.

En la práctica se parte de la función refinable y luego se calcula la máscara de refinamiento asociada. La función refinable casi siempre es de soporte compacto pues toda función refinable está asociada a un análisis multirresolución (a continuación aclaramos el concepto).

A modo informativo, si φ es de soporte compacto, esta construcción conserva la estructura de análisis multirresolución, esto es, en una familia de subespacios cerrados $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ y una función $\varphi \in V_0$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\dots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots$
2. $\overline{\cup_j V_j} = L^2(\mathbb{R})$ y $\cap_j V_j = \{0\}$.
3. $\varphi \in V_j \Leftrightarrow \varphi(2x) \in V_{j+1}$.

4. $\varphi \in V_0 \Rightarrow T_k \varphi \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$.
5. $\{T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 .

obviando la última propiedad, pues queremos un frame. Puesto que 3. implica que $V_j = D^j V_0$, es decir, son versiones escaladas de V_0 , si queremos aproximar una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ con este método la opción más natural es empezar en cierto V_j . Si en ese subespacio no hay elemento que aproxime de manera adecuada a nuestra función buscamos j mayor y simplemente reescalamos al espacio que nos interese. Además, desde el punto de vista computacional es mucho más eficiente.

Capítulo 2

El Principio de Extensión Oblicua aplicado a un framelet

En este capítulo se presentará y demostrará el Principio de Extensión Unitaria de [7] que describe cómo se pueden elegir máscaras de refinamiento de funciones ψ_1, \dots, ψ_n para que generen un frame ajustado de $L^2(\mathbb{R})$. Y posteriormente el Principio de Extensión Oblicua que surge como generalización.

Para comenzar expondremos un contexto general en el que se trabajará, luego enunciaremos y demostraremos detalladamente resultados previos al Principio de Extensión Unitaria y que nos ayudarán en la prueba de este.

Más tarde seguirá el enunciado y demostración del Principio de Extensión Unitaria y un corolario que es el utilizado en la práctica.

Después, presentaremos el Principio de Extensión Oblicua junto con su correspondiente demostración y efectivamente veremos que el Principio de Extensión Unitaria es un caso particular. Estos Principios son muy importantes en la teoría framelet pues permiten caracterizar los framelets mediante dos ecuaciones, que varían según el teorema, relativa a las máscaras de refinamiento.

Por último, mostraremos estos resultados con ejemplos prácticos, todos basados en B-splines. En primer lugar, vamos a ver dos ejemplos donde utilizaremos el Principio de Extensión Unitaria comprenderemos mejor su po-

tencial y sus limitaciones, cuando se usan B-splines. Luego, pondremos otro ejemplo relacionado con el Principio de Extensión Oblicua que, junto con un teorema específico para B-splines, resolverá las limitaciones del Principio de Extensión Unitaria.

En este planteamiento seguiremos trabajando con la transformada de Fourier:

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Partiremos de una función refinable φ , con máscara asociada H_0 , que cumpla

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \widehat{\varphi}(\gamma) = 1.$$

Buscaremos condiciones en las máscaras H_1, \dots, H_n para que las funciones ψ_1, \dots, ψ_ℓ dadas por las ecuaciones de refinamiento (1.9) sean un framelet de $L^2(\mathbb{R})$, es decir, que ψ_1, \dots, ψ_ℓ genere un frame ajustado de $L^2(\mathbb{R})$.

Notación. Resultará conveniente escribir una matriz $(n+1) \times 2$ de funciones definida por

$$H(\gamma) = \begin{pmatrix} H_0(\gamma) & T_{1/2}H_0(\gamma) \\ H_1(\gamma) & T_{1/2}H_1(\gamma) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ H_n(\gamma) & T_{1/2}H_n(\gamma) \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Pasemos a introducir lemas y proposiciones para llegar al Principio de Extensión Unitaria.

2.1. Resultados previos

Recordemos que la periodización de una función f viene dada por

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\gamma + nT), \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

donde T será el periodo. En nuestro caso nos interesa trabajar con funciones 1-periódicas luego trabajaremos con

$$\mathcal{P}f(\gamma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\gamma + n), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Proposición 2.1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces la periodización de f está bien definida y $\mathcal{P}f \in L^1(\mathbb{T})$. Además,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma) d\gamma = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{P}f(\gamma) d\gamma. \quad (2.2)$$

Demostración. Veamos que $\mathcal{P}f$ está bien definida, es decir, que la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(\gamma + n)| < \infty$ p.c.t $\gamma \in \mathbb{R}$.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ sabemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma)| d\gamma < \infty.$$

Dividimos la integral en $(-\infty, \frac{-1}{2}]$ y $(\frac{-1}{2}, \infty)$:

1. Partimos el primer intervalo y hacemos un cambio de variable $\gamma := \gamma + n$:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} |f(\gamma)| d\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}+n}^{\frac{1}{2}+n} |f(\gamma)| d\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(\gamma + n)| d\gamma.$$

2. Siguiendo el mismo razonamiento, con el cambio $\gamma := \gamma - n$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} |f(\gamma)| d\gamma &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}-n}^{\frac{1}{2}-n} |f(\gamma)| d\gamma \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(\gamma - n)| d\gamma = \sum_{n=-\infty}^0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(\gamma + n)| d\gamma. \end{aligned}$$

Uniendo ambas se llega a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma)| d\gamma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(\gamma + n)| d\gamma < \infty.$$

En virtud del Teorema de la convergencia dominada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\gamma + n)$ converge absolutamente para casi todo $\gamma \in \mathbb{R}$ y

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(\gamma + n)| d\gamma = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(\gamma + n)| d\gamma.$$

Como

$$|\mathcal{P}f(\gamma)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(\gamma + n)|, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

se tiene que $Pf \in L^1(\mathbb{T})$. Para demostrar la igualdad del enunciado se aplica de nuevo el Teorema de la convergencia dominada y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma) d\gamma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\gamma+n) d\gamma = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\gamma+n) d\gamma = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{P}f(\gamma) d\gamma,$$

donde se ha utilizado que $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f(\gamma+n) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\gamma+n)$ y que $|\sum_{-\infty}^{\infty} f(\gamma+n)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma+n)| \in L^1(\mathbb{T})$. \square

Proposición 2.2. Sean $g, \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y supongamos que $\mathcal{P}(g\widehat{\varphi}) \in L^2(\mathbb{T})$. Entonces

$$\mathcal{P}(g\widehat{\varphi}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle g, \widehat{\varphi} E_k \rangle E_k \quad (2.3)$$

y

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\mathcal{P}(g\widehat{\varphi})(\gamma)|^2 d\gamma = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle g, \widehat{\varphi} E_k \rangle|^2. \quad (2.4)$$

Demostración. Puesto que $g, \varphi \in L^2(\mathbb{R})$, en virtud de la Desigualdad de Hölder, $g\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$. Gracias a la proposición 2.1 la periodización de $g\widehat{\varphi}$ dada por

$$\mathcal{P}(g\widehat{\varphi}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\gamma+n) \overline{\widehat{\varphi}(\gamma+n)},$$

está bien definida. Por un lado tenemos:

$$\langle g, \widehat{\varphi} E_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\gamma) \widehat{\varphi}(\gamma) e^{2\pi i k \gamma} d\gamma.$$

Por otro lado de (2.1) se sigue

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(\gamma) \widehat{\varphi}(\gamma) e^{2\pi i k \gamma} d\gamma &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g(\gamma+n) \overline{\widehat{\varphi}(\gamma+n)}) e^{-2\pi i k(\gamma+n)} d\gamma = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\gamma+n) \overline{\widehat{\varphi}(\gamma+n)} \right) e^{-2\pi i k \gamma} d\gamma. \end{aligned}$$

Uniendo ambas:

$$\langle g, \widehat{\varphi} E_k \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\gamma+n) \overline{\widehat{\varphi}(\gamma+n)} \right) e^{-2\pi i k \gamma} d\gamma.$$

Como $\mathcal{P}(g\overline{\widehat{\varphi}}) \in L^2(\mathbb{T})$ se tiene que $\langle g, \widehat{\varphi}E_k \rangle$ es el k -ésimo coeficiente del desarrollo en serie de Fourier de la función $\mathcal{P}(g\overline{\widehat{\varphi}})$.

En conclusión, puesto que $\mathcal{P}(g\overline{\widehat{\varphi}}) \in L^2(\mathbb{T})$, el desarrollo está bien definido y se obtiene la primera igualdad (2.3). La segunda (2.4) es la Identidad de Parseval aplicada a nuestra función. \square

Observación 1. Como ya vimos en el capítulo 1 en 1.2 es suficiente probar la condición de frame en un subconjunto denso de $L^2(\mathbb{R})$, por ello trabajaremos en el espacio denso dado por

$$\mathcal{D} := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f} \in C_c(\mathbb{R})\}.$$

Donde \hat{f} es la transformada de Fourier y $C_c(\mathbb{R})$ es el espacio de las funciones reales continuas con soporte compacto.

Lema 2.3. *Supongamos que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y $f \in \mathcal{D}$ entonces $\mathcal{P}((D^j \hat{f})\overline{\widehat{\varphi}}) \in L^2(\mathbb{T})$.*

Demostración. Por un lado, la hipótesis $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ implica que $\overline{\widehat{\varphi}} \in L^2(\mathbb{R})$ (Ver apéndice A.4).

Por otro lado, $f \in \mathcal{D}$ implica que $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Como D^j es un operador de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$ entonces también se tiene que $D^j \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Por la Desigualdad de Hölder el producto $(D^j \hat{f})\overline{\widehat{\varphi}} \in L^1(\mathbb{R})$. En virtud de la proposición 2.1 la periodización $\mathcal{P}((D^j \hat{f})\overline{\widehat{\varphi}})$ está bien definido y pertenece a $L^1(\mathbb{T})$.

Sin embargo, para aplicar el lema anterior es necesario probar que $\mathcal{P}((D^j \hat{f})\overline{\widehat{\varphi}}) \in L^2(\mathbb{T})$. Sabemos que \hat{f} tiene soporte compacto en consecuencia su versión dilatada lo tendrá.

Por tanto, $\exists M > 0$ tal que fuera de $[-M, M]$ la función es nula. Si $\gamma \in \mathbb{T}$ la periodización se transforma en una suma finita:

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}((D^j \hat{f})\overline{\widehat{\varphi}})| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (D^j \hat{f})(\gamma + n) \overline{\widehat{\varphi}(\gamma + n)} \right| \\ &= \left| \sum_{n=-M}^M (D^j \hat{f})(\gamma + n) \overline{\widehat{\varphi}(\gamma + n)} \right| \leq \|D^j \hat{f}\|_\infty \sum_{n=-M}^M |\widehat{\varphi}(\gamma + n)|. \end{aligned}$$

Démonos cuenta que tenemos un escalar por una combinación lineal finita de traslaciones de $\widehat{\varphi}$, que pertenece a $L^2(\mathbb{R})$, luego por ser espacio vectorial

$$\|D^j \hat{f}\|_\infty \sum_{n=-M}^M |\widehat{\varphi}(\gamma + n)| \in L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow \mathcal{P}((D^j \hat{f})\widehat{\varphi}) \in L^2(\mathbb{T}).$$

□

Lema 2.4. Sean $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y $f \in \mathcal{D}$. Supongamos que $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \widehat{\varphi}(\gamma) = 1$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe $J \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $j \geq J$ se tiene:

$$(1 - \epsilon)\|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 \leq (1 + \epsilon)\|f\|^2.$$

Demostración. Fijemos $j \in \mathbb{Z}$ y $f \in \mathcal{D}$ arbitrarios. Veamos que para todo $\epsilon > 0$ se tiene:

$$(1 - \epsilon)\|D^j \hat{f}\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 \leq (1 + \epsilon)\|D^j \hat{f}\|^2.$$

Por el Teorema de Plancherel se sigue que

$$\langle f, D^j T_k \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}D^j T_k \varphi \rangle.$$

Por las relaciones de conmutatividad descritas en el capítulo 1 sección 1.2.1 coincide con:

$$\langle D^j \hat{f}, E_{-k} \widehat{\varphi} \rangle.$$

Ahora bien, como $\mathcal{P}((D^j \hat{f})\widehat{\varphi}) \in L^2(\mathbb{T})$ (lema 2.3) se puede aplicar la proposición anterior 2.2 ecuación (2.4) resultando que:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle D^j \hat{f}, E_{-k} \widehat{\varphi} \rangle|^2 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\mathcal{P}((D^j \hat{f})\widehat{\varphi})(\gamma)|^2 d\gamma \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (D^j \hat{f})(\gamma + n) \overline{\widehat{\varphi}(\gamma + n)} \right|^2 d\gamma. \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \widehat{\varphi}(\gamma) = 1$, por definición de límite

$$\exists \delta \in (0, \frac{1}{2}) \text{ tal que si } |\gamma| \leq \delta \text{ entonces } (1 - \epsilon) \leq |\widehat{\varphi}(\gamma)|^2 \leq (1 + \epsilon).$$

Elegimos $J \in \mathbb{Z}$ de manera que, para todo $j > J$, $D^j \hat{f}$ tenga soporte en $[-\delta, \delta]$. Entonces para esos valores de j se tiene:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (D^j \hat{f})(\gamma + n) \overline{\widehat{\varphi}(\gamma + n)} \right|^2 d\gamma = \int_{-\delta}^{\delta} |(D^j \hat{f})(\gamma) \widehat{\varphi}(\gamma)|^2 d\gamma.$$

La igualdad viene justificada porque el único valor de n para que la función tenga soporte en el intervalo es $n = 0$.

Con todo ello hemos llegado a que:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle D^j \hat{f}, E_{-k} \widehat{\varphi} \rangle|^2 = \int_{-\delta}^{\delta} |(D^j \hat{f})(\gamma) \widehat{\varphi}(\gamma)|^2 d\gamma = \|D^j \hat{f} \widehat{\varphi}\|^2.$$

Por la condición de límite de arriba se tiene:

$$(1 - \epsilon) \|D^j \hat{f}\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 \leq (1 + \epsilon) \|D^j \hat{f}\|^2..$$

Utilizando que D^j y la transformada de Fourier son operadores unitarios concluimos:

$$\|D^j \hat{f}\|^2 = \langle D^j \hat{f}, D^j \hat{f} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \langle f, f \rangle = \|f\|^2.$$

Llegando a:

$$(1 - \epsilon) \|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 \leq (1 + \epsilon) \|f\|^2.$$

□

Lema 2.5. Sean $\psi_\ell \in L^2(\mathbb{R})$ con $\ell = \{1, \dots, n\}$ y $f \in \mathcal{D}$. Entonces para todo $j \in \mathbb{Z}$ y $\ell = \{1, \dots, n\}$ se tiene que

$$\{\langle f, D^j T_k \psi_\ell \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Demostración. Queremos ver que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \psi_\ell \rangle|^2 < \infty$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ y $\ell = \{1, \dots, n\}$. Fijamos ℓ, j y f de sus respectivos conjuntos y aplicamos el lema 2.3. Entonces se tiene:

$$\mathcal{P}((D^j \hat{f}) \widehat{\psi_\ell}) \in L^2(\mathbb{T}).$$

En virtud de la ecuación (2.4) se concluye. □

Observación 2. Por el lema 2.4, la serie de Fourier cuyos coeficientes son $\{\langle f, D^j T_k \psi_\ell \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$ está bien definida. Luego tiene sentido considerar la familia de funciones $F_{j,\ell} \in L^2(\mathbb{T})$ dada por la serie de Fourier, es decir,

$$F_{j,\ell} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \psi_\ell \rangle E_{-k}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \ell \in \{1, \dots, n\}.$$

Y

$$F_{j,0} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \varphi \rangle E_{-k}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Puesto que $F_{j,\ell}$ está definido en términos de ψ_ℓ la cual está definida en términos de φ y H_ℓ , lo razonable es buscar expresiones para $F_{j,\ell}$ en términos de $F_{j,0}$ y H_ℓ . Por conveniencia trabajaremos con $F_{j-1,\ell}$.

Lema 2.6. Sean $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n$ funciones refinables y H_0, \dots, H_n sus respectivas máscaras. Entonces para todo $j \in \mathbb{Z}$ y $\ell = 0, \dots, n$ se cumple:

$$F_{j-1,\ell}(\gamma) = 2^{-1/2} (\overline{H_\ell(\gamma/2)} F_{j,0}(\gamma/2) + \overline{T_{1/2} H_\ell(\gamma/2)} T_{1/2} F_{j,0}(\gamma/2)) \quad p.c.t \gamma \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Demostración. Utilizando las propiedades de D^j, \mathcal{F} y las relaciones de conmutatividad se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle f, D^{j-1} T_k \psi_\ell \rangle &= \langle D^{-j} f, D^{-1} T_k \psi_\ell \rangle = \langle D^{-j} f, T_{2k} D^{-1} \psi_\ell \rangle \\ &= \langle \mathcal{F} D^{-j} f, \mathcal{F} T_{2k} D^{-1} \psi_\ell \rangle = \langle D^j \hat{f}, E_{-2k} D \widehat{\psi}_\ell \rangle. \end{aligned}$$

Gracias a que estamos trabajando con sistemas diádicos y que $\widehat{\psi}_\ell(2\gamma) = H_\ell(\gamma) \widehat{\varphi}(\gamma)$ se verifica:

$$\langle D^j \hat{f}, E_{-2k} D \widehat{\psi}_\ell \rangle = \langle D^j \hat{f}, E_{-2k} 2^{1/2} H_\ell \widehat{\varphi} \rangle.$$

Por la definición de producto escalar en $L^2(\mathbb{R})$ la expresión anterior es

$$2^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (D^j \hat{f})(\gamma) \overline{H_\ell(\gamma) \widehat{\varphi}(\gamma)} E_{2k}(\gamma) d\gamma.$$

Usando las propiedades de \mathcal{P} , en particular la ecuación (2.2):

$$= 2^{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \widehat{\varphi} E_{2k}})(\gamma) d\gamma.$$

Puesto que la función E_{2k} es periódica se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}} E_{2k})(\gamma) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}} E_{2k})(\gamma + n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (D^j \hat{f})(\gamma + n) \overline{H_\ell \hat{\varphi}}(\gamma + n) E_{2k}(\gamma + n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (D^j \hat{f})(\gamma + n) \overline{H_\ell \hat{\varphi}}(\gamma + n) E_{2k}(\gamma) = \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma) E_{2k}(\gamma). \end{aligned}$$

Aplicado a nuestra expresión:

$$\begin{aligned} &2^{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma) E_{2k}(\gamma) d\gamma \\ &= 2^{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma) E_{2k}(\gamma) d\gamma + 2^{1/2} \int_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma) E_{2k}(\gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

En la primera integral utilizando un cambio de variable dado por $\gamma := \gamma - \frac{1}{2}$:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma) E_{2k}(\gamma) d\gamma = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma - \frac{1}{2}) E_{2k}(\gamma - \frac{1}{2}) d\gamma.$$

Y por definición del operador $T_{1/2}$ y que $T_{1/2} E_{2k} = E_{2k}$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{1}{2}} T_{1/2} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma) T_{1/2} E_{2k}(\gamma) d\gamma \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} T_{1/2} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma) E_{2k}(\gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

En resumen:

$$\langle f, D^{j-1} T_k \psi_l \rangle = 2^{1/2} \int_0^{\frac{1}{2}} (\mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma) + T_{1/2} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma)) E_{2k}(\gamma) d\gamma.$$

Si consideramos el desarrollo en serie de Fourier de la función $\frac{1}{2}$ -periódica

$$\mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}}) + T_{1/2} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}}),$$

se deduce que $\langle f, D^{j-1} T_k \psi_l \rangle$ es el $-k$ -ésimo coeficiente con respecto a la base ortonormal de $\{2^{1/2} E_{2k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(0, \frac{1}{2})$.

Por un lado, notemos que:

$$E_{-k}(\gamma) = e^{2\pi i(-k)\gamma} = e^{2\pi i(-2k)\gamma/2} = E_{-2k}(\gamma/2).$$

Por otro lado, utilizando la definición de $F_{j-1,\ell}$ (2.5):

$$F_{j-1,\ell}(\gamma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^{j-1} T_k \psi_\ell \rangle E_{-k}(\gamma). \quad (2.6)$$

Uniendo ambas:

$$\begin{aligned} F_{j-1,\ell}(\gamma) &= 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^{j-1} T_k \psi_\ell \rangle 2^{1/2} E_{-2k}(\gamma/2) \\ &= 2^{-1/2} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}}) + T_{1/2} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma/2). \end{aligned}$$

Como la función H_ℓ es 1-periódica:

$$\mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}})(\gamma) = \overline{H_\ell} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{\hat{\varphi}})(\gamma).$$

Ahora bien, en la prueba del lema 2.4 se vio que $\langle f, D^j T_k \varphi \rangle = \langle D^j \hat{f}, E_{-k} \hat{\varphi} \rangle$.

$$\begin{aligned} F_{j,0} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle D^j \hat{f}, E_{-k} \hat{\varphi} \rangle E_{-k}(\gamma) \\ &= \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{\hat{\varphi}})(\gamma), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la proposición 2.2 (las condiciones de la proposición se verifican gracias al lema 2.3). Entonces

$$F_{j,0} = \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{\hat{\varphi}})(\gamma).$$

Uniendo todo lo que hemos conseguido:

$$\begin{aligned} F_{j-1,\ell} &= 2^{-1/2} (\mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}}) + T_{1/2} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{H_\ell \hat{\varphi}}))(\gamma/2) \\ &= 2^{-1/2} (\overline{H_\ell} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{\hat{\varphi}}) + T_{1/2} \overline{H_\ell} \mathcal{P}((D^j \hat{f}) \overline{\hat{\varphi}}))(\gamma/2) \\ &= 2^{-1/2} (\overline{H_\ell} F_{j,0} + T_{1/2} \overline{H_\ell} F_{j,0})(\gamma/2) \\ &= 2^{-1/2} (\overline{H_\ell(\gamma/2)} F_{j,0}(\gamma/2) + \overline{T_{1/2} H_\ell(\gamma/2)} T_{1/2} F_{j,0}(\gamma/2)). \end{aligned}$$

Como queríamos probar. □

En términos de la matriz H definida antes, el lema se puede enunciar de la siguiente manera:

Corolario 2.7. *Sean $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n$ funciones refinables y H_0, \dots, H_n sus respectivas máscaras. Se tiene:*

$$\begin{pmatrix} F_{j-1,0}(\gamma) \\ F_{j-1,1}(\gamma) \\ \vdots \\ F_{j-1,n}(\gamma) \end{pmatrix} = 2^{-1/2} \overline{H(\gamma/2)} \begin{pmatrix} F_{j,0}(\gamma/2) \\ T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2) \end{pmatrix}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{j-1,0}(\gamma) \\ F_{j-1,1}(\gamma) \\ \vdots \\ F_{j-1,n}(\gamma) \end{pmatrix} &= 2^{-1/2} \begin{pmatrix} (\overline{H_0(\gamma/2)}F_{j,0}(\gamma/2) + \overline{T_{1/2}H_0(\gamma/2)}T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2)) \\ (\overline{H_1(\gamma/2)}F_{j,0}(\gamma/2) + \overline{T_{1/2}H_1(\gamma/2)}T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2)) \\ \vdots \\ (\overline{H_n(\gamma/2)}F_{j,0}(\gamma/2) + \overline{T_{1/2}H_n(\gamma/2)}T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2)) \end{pmatrix} \\ &= 2^{1/2} \begin{pmatrix} H_0(\gamma) & T_{1/2}H_0(\gamma) \\ H_1(\gamma) & T_{1/2}H_1(\gamma) \\ \vdots & \vdots \\ H_n(\gamma) & T_{1/2}H_n(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{j,0}(\gamma/2) \\ T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2) \end{pmatrix} \\ &= 2^{-1/2} \overline{H(\gamma/2)} \begin{pmatrix} F_{j,0}(\gamma/2) \\ T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Observación 3. Si consideramos que H es unitaria, $H(\gamma)^*H(\gamma) = I$, entonces tenemos una isometría de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^{n+1} . Es decir para todo $v \in \mathbb{C}^2$ se verifica que

$$\|Hv\|_{\mathbb{C}^{n+1}} = \|v\|_{\mathbb{C}^2}.$$

Lema 2.8. *Sean $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n$ funciones refinables y H_0, \dots, H_n sus respectivas máscaras y supongamos que $H(\gamma)^*H(\gamma) = I$ p.c.t. $\gamma \in \mathbb{T}$. Entonces para todo $j \in \mathbb{Z}$ y toda $f \in \mathcal{D}$ se tiene:*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j-1} T_k \psi_\ell \rangle|^2.$$

Demostración. Partimos del lado derecho de la igualdad, por definición, $F_{j-1,\ell} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^{j-1}T_k\psi_\ell \rangle E_{-k}$ luego $\langle f, D^{j-1}T_k\psi_\ell \rangle$ es el $-k$ -ésimo coeficiente del desarrollo en serie de Fourier de $F_{j-1,\ell}$. En virtud de la Identidad de Parseval se tiene:

$$\sum_{\ell=0}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j-1}T_k\psi_\ell \rangle|^2 = \sum_{\ell=0}^n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |F_{j-1,\ell}(\gamma)|^2 d\gamma.$$

Notemos que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell=0}^n |F_{j-1,\ell}(\gamma)|^2 d\gamma = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\| \begin{pmatrix} F_{j-1,0}(\gamma) \\ F_{j-1,1}(\gamma) \\ \vdots \\ F_{j-1,n}(\gamma) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{C}^{n+1}}^2 d\gamma.$$

Por el corolario 2.7:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell=0}^n |F_{j-1,\ell}(\gamma)|^2 d\gamma = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\| 2^{-1/2} \overline{H(\gamma/2)} \begin{pmatrix} F_{j,0}(\gamma/2) \\ T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{C}^{n+1}}^2 d\gamma.$$

Y por ser una isometría:

$$= 2^{-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\| \begin{pmatrix} F_{j,0}(\gamma/2) \\ T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{C}^2}^2 d\gamma = 2^{-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (|F_{j,0}(\gamma/2)|^2 + |T_{1/2}F_{j,0}(\gamma/2)|^2) d\gamma.$$

1. La primera integral con el cambio de variable $\gamma := \gamma/2$ es igual a:

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} |F_{j,0}(\gamma)|^2 d\gamma.$$

2. La segunda integral con el cambio de variable $\gamma := \gamma/2 - 1/2$ es igual a:

$$\int_{-\frac{3}{4}}^{-\frac{1}{4}} |F_{j,0}(\gamma)|^2 d\gamma.$$

Por la aditividad de la integral con respecto a los extremos de integración y como $F_{j,0}$ es 1-periódica es igual a

$$\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}} |F_{j,0}(\gamma)|^2 d\gamma = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |F_{j,0}(\gamma)|^2 d\gamma.$$

En conclusión

$$\sum_{\ell=0}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j-1} T_k \psi_\ell \rangle|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (|F_{j,0}(\gamma)|^2) d\gamma = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2.$$

Donde hemos aplicado la Identidad de Parseval en la segunda igualdad. \square

Proposición 2.9. Sean $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n$ funciones refinables y H_0, \dots, H_n sus respectivas máscaras. Supongamos que $H(\gamma)^* H(\gamma) = I$ p.c.t. $\gamma \in \mathbb{T}$, entonces:

- a) $\{T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una familia de Bessel.
- b) Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 = 0.$$

Demostración. Como consecuencia del lema anterior, si consideramos $f \in \mathcal{D}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j-1} T_k \varphi \rangle|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2.$$

Por el lema 2.4, dado $\epsilon > 0$ existe $j_0 > 0$ tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j_0} T_k \varphi \rangle|^2 \leq (1 + \epsilon) \|f\|^2.$$

Aplicando recursivamente la primera desigualdad j_0 veces se llega a:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, T_k \varphi \rangle|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j_0} T_k \varphi \rangle|^2 \leq (1 + \epsilon) \|f\|^2.$$

Ahora bien como el ϵ es arbitrario se tiene que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, T_k \varphi \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

En virtud del lema del Denso como la desigualdad se cumple en \mathcal{D} se cumple en $L^2(\mathbb{R})$. Por tanto hemos probado la primera afirmación.

Para probar la segunda comencemos observando que $\{D^j T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es también una familia de Bessel para todo $j \in \mathbb{Z}$:

Sea j fijo, queremos ver que para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$ se cumple

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Puesto que D^j es unitaria es equivalente a probar:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle D^{-j} f, T_k \varphi \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Ahora bien, sabemos que $\{T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una familia de Bessel, luego:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle D^{-j} f, T_k \varphi \rangle|^2 \leq \|D^{-j} f\|^2.$$

y por ser D^j unitaria (conserva el producto escalar) se tiene:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle D^{-j} f, T_k \varphi \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Como queríamos.

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado, podemos escribir que

$$f = f \chi_I + f(1 - \chi_I).$$

Usando que $|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 &= |\langle f \chi_I + f(1 - \chi_I), D^j T_k \varphi \rangle|^2 \\ &= |\langle f \chi_I, D^j T_k \varphi \rangle + \langle f(1 - \chi_I), D^j T_k \varphi \rangle|^2 \leq \\ &2(|\langle f \chi_I, D^j T_k \varphi \rangle|^2 + |\langle f(1 - \chi_I), D^j T_k \varphi \rangle|^2). \end{aligned}$$

Por tener series de términos positivos se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f \chi_I + f(1 - \chi_I), D^j T_k \varphi \rangle|^2 \\ &\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f \chi_I, D^j T_k \varphi \rangle + \langle f(1 - \chi_I), D^j T_k \varphi \rangle|^2 \leq \\ &2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f \chi_I, D^j T_k \varphi \rangle|^2 + 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f(1 - \chi_I), D^j T_k \varphi \rangle|^2 \\ &\leq 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f \chi_I, D^j T_k \varphi \rangle|^2 + 2\|f(1 - \chi_I)\|^2. \end{aligned}$$

La última desigualdad viene justificada porque $\{D^j T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una familia de Bessel.

Cogiendo I suficientemente grande podemos hacer $\|f(1 - \chi_I)\|^2$ arbitrariamente pequeño. Luego, nos basta con ver que

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f \chi_I, D^j T_k \varphi \rangle|^2 = 0.$$

Por definición:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f \chi_I, D^j T_k \varphi \rangle|^2 = 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_I f(x) \overline{\varphi(2^j x - k)} dx \right|^2.$$

Por la Desigualdad de Cauchy-Schwarz y cambio de variable:

$$\leq 2^j \|f\|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_I |\overline{\varphi(2^j x - k)}|^2 dx = 2^j \|f\|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2^j I - k} |\overline{\varphi(x)}|^2 dx.$$

Veamos que en efecto tiende a 0 cuando $j \rightarrow -\infty$:

Consideramos $g_j(x) = 2^j |\overline{\varphi(x)}| \chi_{2^j I - k}$ la cual está acotada por una función integrable $|\overline{\varphi(x)}|$, además:

$$\int_{2^j I - k} 2^j |\overline{\varphi(x)}| dx = \int_{\mathbb{R}} g_j(x) dx,$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} g_j = 0 \text{ (La función característica se reduce al 0).}$$

Concluimos aplicando el Teorema de la convergencia dominada. \square

2.2. Principio de Extensión Unitaria

Estamos en condiciones de enunciar y demostrar el Principio de Extensión Unitaria, pilar fundamental de este capítulo. Gracias a todos estos lemas previos la prueba será más sencilla.

Teorema 2.10 (Principio de Extensión Unitaria). *Sean $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n$ funciones refinables y H_0, \dots, H_n sus respectivas máscaras y supongamos que $H(\gamma)^* H(\gamma) = I$ p.c.t. $\gamma \in \mathbb{T}$. Entonces $\{\psi_\ell\}_{\ell \in \{1, \dots, n\}}$ constituye un framelet ajustado de $L^2(\mathbb{R})$ con cota igual a 1, y*

$$f = \sum_{\ell=1}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \psi_\ell \rangle D^j T_k \psi_\ell, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.7)$$

Demostración. Sea una función $f \in \mathcal{D}$.

Partimos de $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2$. En virtud del lema 2.8, para cualquier $j \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 &= \sum_{\ell=0}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j-1} T_k \psi_\ell \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j-1} T_k \varphi \rangle|^2 + \sum_{\ell=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j-1} T_k \psi_\ell \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j-2} T_k \varphi \rangle|^2 + \sum_{\ell=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j-2} T_k \psi_\ell \rangle|^2 + \sum_{\ell=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^{j-1} T_k \psi_\ell \rangle|^2. \end{aligned}$$

Iterando el proceso, se tiene que para todo $m < j$:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^m T_k \varphi \rangle|^2 + \sum_{\ell=0}^n \sum_{p=m}^{j-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^p T_k \psi_\ell \rangle|^2.$$

Sea $\epsilon > 0$ fijo pero arbitrario y por el lema 2.4 existe $j_0 > 0$ tal que para todo $j > j_0$

$$(1 - \epsilon) \|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \varphi \rangle|^2 \leq (1 + \epsilon) \|f\|^2.$$

Uniendo ambas se sigue que para todo $j > j_0$ y $m < j$

$$(1 - \epsilon) \|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^m T_k \varphi \rangle|^2 + \sum_{\ell=0}^n \sum_{p=m}^{j-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^p T_k \psi_\ell \rangle|^2 \leq (1 + \epsilon) \|f\|^2. \quad (2.8)$$

Por un lado por la proposición 2.9.b)

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^m T_k \varphi \rangle|^2 = 0,$$

lo que implica que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^m T_k \varphi \rangle|^2 + \sum_{\ell=0}^n \sum_{p=m}^{j-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^p T_k \psi_\ell \rangle|^2 = \sum_{\ell=0}^n \sum_{p=-\infty}^{j-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^p T_k \psi_\ell \rangle|^2.$$

Por otro lado haciendo $j \rightarrow \infty$

$$= \sum_{\ell=0}^n \sum_{p=-\infty}^{j-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^p T_k \psi_\ell \rangle|^2 = \sum_{\ell=0}^n \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^p T_k \psi_\ell \rangle|^2.$$

Como (2.8) se cumple para todo $j > j_0$ y $m < j$ y las series convergen sabemos:

$$(1 - \epsilon) \|f\|^2 \leq \sum_{\ell=0}^n \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^p T_k \psi_\ell \rangle|^2 \leq (1 + \epsilon) \|f\|^2.$$

Se concluye, dada la generalidad de ϵ , que para toda $f \in \mathcal{D}$

$$\sum_{\ell=0}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \psi_\ell \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

Como \mathcal{D} es un Denso de $L^2(\mathbb{R})$ la igualdad se cumple para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Hemos probado que $\{D^j T_k \psi_\ell\}_{j,k \in \mathbb{Z}, \ell \in \{1, \dots, n\}}$ es un frame ajustado con cota 1.

Considerando S es operador frame se tiene

$$f = S S^{-1} f = \sum_{\ell=0}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle S^{-1} f, D^j T_k \psi_\ell \rangle D^j T_k \psi_\ell.$$

Haciendo la adjunta y puesto que S^{-1} es autoadjunto:

$$= \sum_{\ell=0}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, S^{-1} D^j T_k \psi_\ell \rangle D^j T_k \psi_\ell.$$

Notemos que está bien definido, $\{D^j T_k \psi_\ell\}_{j,k \in \mathbb{Z}, \ell \in \{1, \dots, n\}}$ es una familia de Bessel, luego $\{\langle D^j T_k \psi_\ell \rangle\}_{j,k \in \mathbb{Z}, \ell \in \{1, \dots, n\}}$ es de cuadrado sumable.

Ahora bien, tenemos un frame ajustado con cota 1 luego podemos utilizar

$$\langle S f, f \rangle = \sum_{\ell=0}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, D^j T_k \psi_\ell \rangle|^2 = \|f\|^2 = \langle f, f \rangle,$$

lo que implica que $S = I \Rightarrow S^{-1} = I$ y por tanto

$$f = \sum_{\ell=1}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, D^j T_k \psi_\ell \rangle D^j T_k \psi_\ell, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

□

También es común que el Principio de Extensión Unitaria se enuncie directamente como el siguiente corolario. Este da condiciones a las máscaras de refinamiento para que únicamente con dos ecuaciones las respectivas funciones refinables formen un framelet ajustado de $L^2(\mathbb{R})$. Notar que construir framelets no es a priori algo fácil, de aquí la importancia de este resultado.

Corolario 2.11. Sean $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n$ funciones refinables y H_0, \dots, H_n sus respectivas máscaras y supongamos que p.c.t. $\gamma \in \mathbb{T}$:

$$\begin{cases} \sum_{\ell=0}^n |H_\ell(\gamma)|^2 = 1, \\ \sum_{\ell=0}^n \overline{H_\ell(\gamma)} T_{1/2} H_\ell(\gamma) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Entonces $\{\psi_\ell\}_{\ell \in \{1, \dots, n\}}$ es un framelet ajustado de $L^2(\mathbb{R})$ con cota igual a 1.

Demostración. Nos basta con ver que

$$\begin{cases} \sum_{\ell=0}^n |H_\ell(\gamma)|^2 = 1, \\ \sum_{\ell=0}^n \overline{H_\ell(\gamma)} T_{1/2} H_\ell(\gamma) = 0 \end{cases} \iff H(\gamma)^* H(\gamma) = I.$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} H(\gamma)^* H(\gamma) &= \begin{pmatrix} \sum_{\ell=0}^n \overline{H_\ell(\gamma)} H_\ell(\gamma) & \sum_{\ell=0}^n \overline{H_\ell(\gamma)} T_{1/2} H_\ell(\gamma) \\ \sum_{\ell=0}^n T_{1/2} \overline{H_\ell(\gamma)} H_\ell(\gamma) & \sum_{\ell=0}^n T_{1/2} \overline{H_\ell(\gamma)} T_{1/2} H_\ell(\gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\ell=0}^n |H_\ell(\gamma)|^2 & \sum_{\ell=0}^n \overline{H_\ell(\gamma)} T_{1/2} H_\ell(\gamma) \\ \sum_{\ell=0}^n T_{1/2} \overline{H_\ell(\gamma)} H_\ell(\gamma) & \sum_{\ell=0}^n T_{1/2} T_{1/2} |H_\ell(\gamma)|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Utilizando que H_ℓ es de periodo 1:

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \sum_{\ell=0}^n |H_\ell(\gamma)|^2 & \sum_{\ell=0}^n \overline{H_\ell(\gamma)} T_{1/2} H_\ell(\gamma) \\ \sum_{\ell=0}^n \overline{H_\ell(\gamma)} T_{1/2} H_\ell(\gamma) & \sum_{\ell=0}^n |H_\ell(\gamma)|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \\ &\iff \begin{cases} \sum_{\ell=0}^n |H_\ell(\gamma)|^2 = 1, \\ \sum_{\ell=0}^n \overline{H_\ell(\gamma)} T_{1/2} H_\ell(\gamma) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

□

2.3. Principio de Extensión Oblicua

El siguiente resultado generaliza el teorema anterior pues notemos que si $\theta = 1$ en el enunciado obtenemos el Principio de Extensión Unitaria.

Teorema 2.12 (Principio de Extensión Oblicua). *Sean $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n$ funciones refinables y H_0, \dots, H_n sus respectivas máscaras. Supongamos que existe una función $\theta \in L^\infty(\mathbb{T})$ estrictamente positiva y tal que p.c.t $\gamma \in \mathbb{T}$:*

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \theta(\gamma) = 1$$

y

$$H_0(\gamma) \overline{H_0(\gamma + \nu)} \theta(2\gamma) + \sum_{l=1}^n H_l(\gamma) \overline{H_l(\gamma + \nu)} = \begin{cases} \theta(\gamma) & \text{si } \nu = 0, \\ 0 & \text{si } \nu = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Entonces $\{\psi_\ell\}_{\ell \in \{1, \dots, n\}}$ constituye un framelet ajustado de $L^2(\mathbb{R})$ con cota igual a 1.

Demostración. Definimos $\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ por

$$\tilde{\varphi} = \sqrt{\theta(\gamma)} \hat{\varphi}(\gamma).$$

Definimos las funciones 1-periódicas $\widetilde{H}_0, \dots, \widetilde{H}_n$ por:

$$\widetilde{H}_0(\gamma) = \sqrt{\frac{\theta(2\gamma)}{\theta(\gamma)}} H_0(\gamma), \quad \widetilde{H}_\ell(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{\theta(\gamma)}} H_\ell(\gamma), \quad \ell \in \{1, \dots, n\}.$$

La idea es intentar aplicar el Principio de Extensión Unitaria a $\tilde{\varphi}, \widetilde{H}_0, \dots, \widetilde{H}_n$ y obtener un frame ajustado $\{D^j T_k \tilde{\psi}_\ell\}_{j, k \in \mathbb{Z}, \ell \in \{1, \dots, n\}}$. Y, posteriormente, demostrar que $\tilde{\psi}_\ell = \psi_\ell, \quad \forall \ell \in \{1, \dots, n\}$. Veamos que se cumplen las hipótesis del Principio de Extensión Unitaria:

Por un lado,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(2\gamma) &= \sqrt{\theta(2\gamma)} \hat{\varphi}(2\gamma) = \sqrt{\theta(2\gamma)} H_0(\gamma) \hat{\varphi}(\gamma) \\ &= \sqrt{\frac{\theta(2\gamma)}{\theta(\gamma)}} H_0(\gamma) \hat{\varphi}(\gamma) = \widetilde{H}_0(\gamma) \hat{\varphi}(\gamma). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \widehat{\varphi}(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\sqrt{\theta(\gamma)} \widehat{\varphi}(\gamma) \right) = 1.$$

Si $\nu=0$ por hipótesis se tiene que p.c.t $\gamma \in \mathbb{T}$:

$$\sum_{\ell=0}^n |\widetilde{H}_\ell(\gamma)|^2 = \frac{\theta(2\gamma)}{\theta(\gamma)} |H_0(\gamma)|^2 + \sum_{\ell=1}^n \frac{|H_\ell(\gamma)|^2}{\theta(\gamma)} = 1.$$

Por tanto, $\widetilde{H}_0, \dots, \widetilde{H}_n \in L^\infty(\mathbb{T})$. Además, como $\theta(2(\gamma + \frac{1}{2})) = \theta(2\gamma)$ se sigue que p.c.t $\gamma \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^n \widetilde{H}_\ell(\gamma) \overline{\widetilde{H}_\ell(\gamma + \frac{1}{2})} &= \frac{\theta(2\gamma)}{\sqrt{\theta(\gamma)\theta(\gamma + \frac{1}{2})}} H_0(\gamma) \overline{H_0(\gamma + \frac{1}{2})} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\theta(\gamma)\theta(\gamma + \frac{1}{2})}} \sum_{\ell=1}^n H_\ell(\gamma) \overline{H_\ell(\gamma + \frac{1}{2})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, si definimos $\widetilde{\psi}_1, \dots, \widetilde{\psi}_n$ como:

$$\widehat{\psi}_\ell(2\gamma) = \widetilde{H}_\ell(\gamma) \widehat{\varphi}(\gamma), \quad \ell \in \{1, \dots, n\},$$

estamos en condiciones de aplicar el Principio de Extensión Unitaria, luego $\{D^j T_k \widetilde{\psi}_\ell\}_{j,k \in \mathbb{Z}, \ell \in \{1, \dots, n\}}$ es un frame ajustado de $L^2(\mathbb{R})$ con cota frame igual a 1.

Para concluir, veamos que $\widetilde{\psi}_\ell = \psi_\ell, \quad \forall \ell \in \{1, \dots, n\}$:

$$\widehat{\psi}_\ell(2\gamma) = H_\ell(\gamma) \widehat{\varphi}(\gamma) = \sqrt{\theta(\gamma)} \widetilde{H}_\ell(\gamma) \frac{1}{\sqrt{\theta(\gamma)}} \widehat{\varphi}(\gamma) = \widehat{\psi}_\ell(2\gamma).$$

Lo que muestra que $\widetilde{\psi}_\ell = \psi_\ell$. □

Para concluir esta sección comentemos algunas ventajas del Principio de Extensión Oblicua frente al Principio de Extensión Unitaria. Las ilustraremos en la siguiente sección mediante varios ejemplos. El primero de ellos, además de generar frames ajustados con menor número de generadores, permite conseguir momentos de anulación más altos de las funciones de refinamiento.

2.4. Ejemplos

Vamos a proporcionar tres ejemplos de construcción de frames de $L^2(\mathbb{R})$ e ilustraremos por qué el Principio de Extensión Oblicua resulta más útil. El primero y el segundo son una revisión de varios ejemplos de [1] mientras que para el tercero hemos seguido [3].

Los ejemplos se basarán en B-splines, ver apéndice A.5 para más información sobre ellos.

Ejemplo 2.13. Partimos de la función refinable $\varphi := N_2$ el B-spline de orden 2 (ver figura (A.1)). Queremos construir un framelet de $L^2(\mathbb{R})$ con dos elementos. Veamos que estamos en las condiciones de aplicar el Principio de Extensión Unitaria.

Ya conocemos \widehat{N}_2 (ver ecuación (A.2)), luego

$$\widehat{\varphi}(\gamma) = \left(\frac{1 - e^{-2\pi i \gamma}}{2\pi i \gamma} \right)^2 = \left(e^{-\pi i \gamma} \left(\frac{e^{\pi i \gamma} - e^{-\pi i \gamma}}{2\pi i \gamma} \right) \right)^2 = \left(e^{-\pi i \gamma} \left(\frac{\sin(\pi \gamma)}{\pi \gamma} \right) \right)^2.$$

Luego $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \widehat{\varphi}(\gamma) = 1$. Por otro lado, queremos que se cumpla la ecuación de refinamiento (1.9)

$$\widehat{\varphi}(2\gamma) = H_0(\gamma) \widehat{\varphi}(\gamma),$$

para cierto H_0 de $L^\infty(\mathbb{T})$. Despejando se obtiene:

$$\begin{aligned} H_0(\gamma) &= \frac{\widehat{\varphi}(2\gamma)}{\widehat{\varphi}(\gamma)} = \frac{\left(\frac{1 - e^{-2\pi i 2\gamma}}{2\pi i 2\gamma} \right)^2}{\left(\frac{1 - e^{-2\pi i \gamma}}{2\pi i \gamma} \right)^2} = \left(\frac{1 - e^{-4\pi i \gamma}}{2(1 - e^{-2\pi i \gamma})} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(1 - e^{-2\pi i \gamma})(1 + e^{-2\pi i \gamma})}{2(1 - e^{-2\pi i \gamma})} \right)^2 = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \gamma}}{2} \right)^2 = e^{-2\pi i \gamma} \cos^2(\pi \gamma). \end{aligned}$$

Como queremos únicamente dos generadores del frame definimos H_1 y H_2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_1(\gamma) &= i\sqrt{2}e^{-2\pi i \gamma} \sin(\pi \gamma) \cos(\pi \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2\pi i \gamma} i \sin(2\pi \gamma) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2\pi i \gamma} \left(\frac{e^{2\pi i \gamma} - e^{-2\pi i \gamma}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - e^{-4\pi i \gamma}), \end{aligned}$$

$$H_2(\gamma) = (i)^2 e^{-2\pi i \gamma} \sin^2(\pi \gamma) = \frac{(1 - e^{-2\pi i \gamma})^2}{4}.$$

Utilizando que $\cos(\pi(\gamma - 1/2)) = \sin(\pi \gamma)$, la matriz $H(\gamma)$ viene dada por:

$$H(\gamma) = \begin{pmatrix} H_0 & T_{1/2}H_0 \\ H_1 & T_{1/2}H_1 \\ H_2 & T_{1/2}H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i \gamma} \cos^2(\pi \gamma) & -e^{-2\pi i \gamma} \sin^2(\pi \gamma) \\ \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - e^{-4\pi i \gamma}) & \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - e^{-4\pi i \gamma}) \\ \frac{(1 - e^{-2\pi i \gamma})^2}{4} & \frac{(1 + e^{-2\pi i \gamma})^2}{4} \end{pmatrix}.$$

Veamos que se verifica las condiciones (2.9), trabajaremos con las formas trigonométricas de las exponenciales. La primera se traduce en:

$$\cos^4(\pi \gamma) + 2 \sin^2(\pi \gamma) \cos^2(\pi \gamma) + \sin^4(\pi \gamma) = (\sin^2(\pi \gamma) + \cos^2(\pi \gamma))^2 = 1.$$

Mientras que la segunda:

$$\overline{H_0(\gamma)} T_{1/2} H_0(\gamma) = -e^{2\pi i \gamma} \cos^2(\pi \gamma) e^{-2\pi i \gamma} \sin^2(\pi \gamma) = -\cos^2(\pi \gamma) \sin^2(\pi \gamma),$$

$$\begin{aligned} \overline{H_1(\gamma)} T_{1/2} H_1(\gamma) &= -i\sqrt{2} e^{2\pi i \gamma} \sin(\pi \gamma) \cos(\pi \gamma) i\sqrt{2} e^{-2\pi i \gamma} \sin(\pi \gamma) \cos(\pi \gamma) \\ &= 2 \cos^2(\pi \gamma) \sin^2(\pi \gamma), \end{aligned}$$

$$\overline{H_2(\gamma)} T_{1/2} H_2(\gamma) = -e^{2\pi i \gamma} \sin^2(\pi \gamma) e^{-2\pi i \gamma} \cos^2(\pi \gamma) = -\cos^2(\pi \gamma) \sin^2(\pi \gamma).$$

Sumando las tres resulta 0. Luego se verifica lo deseado.

Buscamos funciones ψ_1, ψ_2 de manera que se cumplan las ecuaciones de refinamiento (1.11)

$$\psi_\ell(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k,\ell} \varphi(2x + k), \quad \ell = 1, 2.$$

Recordemos que $H_1(\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - e^{-4\pi i \gamma})$. Identificando términos se tiene que

$$c_{k,1} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4} & \text{si } k = 0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \text{si } k = -2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego, $\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(2x) - \varphi(2x - 2)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_2(2x) - N_2(2x - 2))$.

Razonando del mismo modo:

$$H_2(\gamma) = \frac{(1 - e^{-2\pi i\gamma})^2}{4} = \frac{1}{4}(1 - 2e^{-2\pi i\gamma} + e^{-4\pi i\gamma}).$$

Identificamos los términos correspondientes:

$$c_{k,2} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } k = 0, \\ -\frac{\sqrt{1}}{2} & \text{si } k = -1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } k = -2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego, $\psi_2(x) = \frac{1}{2}(N_2(2x) - 2N_2(2x - 1) + N_2(2x - 2))$.

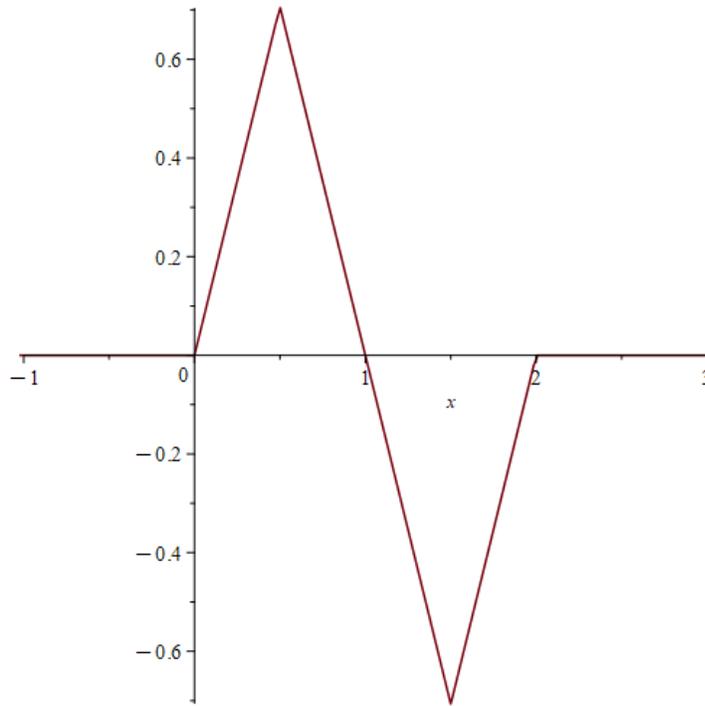
Por el corolario 2.11 podemos asegurar que $\{\psi_1, \psi_2\}$ es un framelet ajustado de $L^2(\mathbb{R})$. En las figuras 2.1 se muestran estas funciones.

Para concluir veamos lo que ocurre con los momentos de anulación, aplicaremos la proposición 1.17. Notemos que el parámetro en las transformadas de Fourier de este capítulo y el utilizado para las transformadas en la proposición son distintos, ya que ahora aparecerá 2π . El resultado sigue siendo cierto. Verifiquemos las hipótesis:

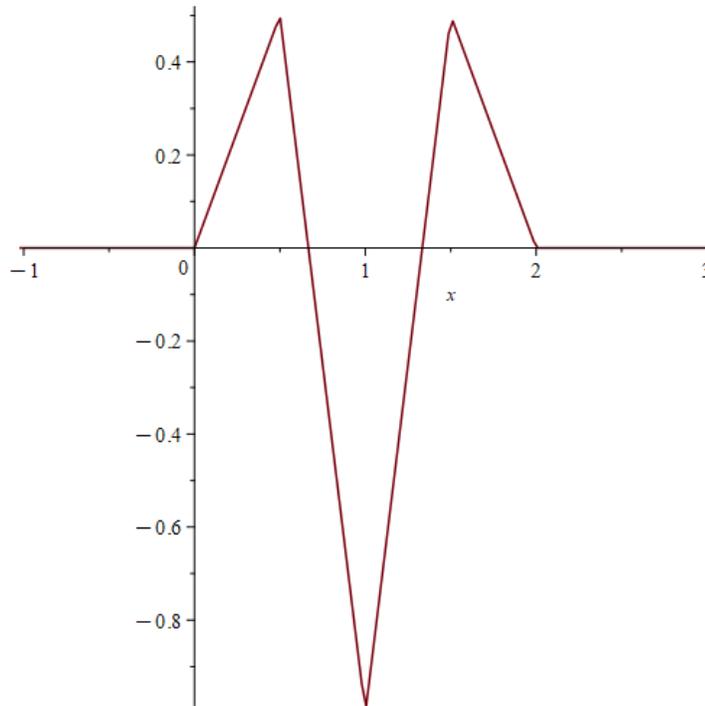
El filtro asociado a H_0 tiene soporte finito pues basta observar que es un polinomio trigonométrico y $H_0(0) = 1$. Tenemos que $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \widehat{\varphi}(\gamma) = 1$. Sin embargo, $\varphi = N_2$ tiene soporte compacto entonces $\widehat{\varphi}$ es \mathcal{C}^∞ y por ello $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \widehat{\varphi}(\gamma) = \widehat{\varphi}(0) = 1$. Por último, $H_1(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - e^{-4\pi i0}) = 0$ y $H_2(0) = \frac{(1 - e^{-2\pi i0})^2}{4} = 0$.

Entonces, como $H_1(\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - e^{-2\pi i\gamma})(1 + e^{-2\pi i\gamma})$ se tiene que $(1 - e^{-2\pi i\gamma})|H_1(\gamma)$ y aplicando la proposición comentada más arriba ψ_1 tiene momento de anulación de orden 1.

Para H_2 , como $(1 - e^{-2\pi i\gamma})^2|H_2(\gamma)$ entonces ψ_2 tiene momento de anulación de orden 2.



(a) $\psi_1(x)$



(b) $\psi_2(x)$

Figura 2.1: Elementos del framelet del ejemplo 2.13, construidos según el Principio de Extensión Unitaria y N_2 como función refinable.

Ejemplo 2.14. Haremos, sin detalle, lo mismo con el B-spline cúbico N_4 (ver figura (A.2)). Al final del ejemplo comentaremos varias observaciones.

Los cálculos serán omitidos ya que son análogos a los del ejemplo anterior. Para que se satisfaga la ecuación de refinamiento (1.9) y utilizando (A.2) H_0 debe ser $e^{-4\pi i\gamma} \cos^4(\pi\gamma)$. En este caso consideramos a mayores H_3 y H_4 , luego la matriz H es:

$$H(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-4\pi i\gamma} \cos^4(\pi\gamma) & e^{-4\pi i\gamma} \sin^4(\pi\gamma) \\ 2e^{-4\pi i\gamma} i \sin(\pi\gamma) \cos^3(\pi\gamma) & 2e^{-4\pi i\gamma} i \cos(\pi\gamma) \sin^3(\pi\gamma) \\ -\sqrt{6}e^{-4\pi i\gamma} \sin^2(\pi\gamma) \cos^2(\pi\gamma) & -\sqrt{6}e^{-4\pi i\gamma} \sin^2(\pi\gamma) \cos^2(\pi\gamma) \\ -2e^{-4\pi i\gamma} i \sin^3(\pi\gamma) \cos(\pi\gamma) & -2e^{-4\pi i\gamma} i \cos^3(\pi\gamma) \sin(\pi\gamma) \\ e^{-4\pi i\gamma} \sin^4(\pi\gamma) & e^{-4\pi i\gamma} \cos^4(\pi\gamma) \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar de manera análoga al ejemplo anterior que se verifican las condiciones del corolario 2.11. Del mismo modo que antes desarrollaremos cada H_ℓ en su serie de Fourier para obtener ψ_1, \dots, ψ_4 vía ecuaciones de refinamiento (1.11). Escribimos directamente los coeficientes del desarrollo:

$$c_{k,1} = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } k = 0, \\ \frac{1}{4} & \text{si } k = -1, \\ \frac{-1}{4} & \text{si } k = -3, \\ \frac{-1}{8} & \text{si } k = -4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$c_{k,2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{16} & \text{si } k = 0, \\ \frac{\sqrt{6}}{8} & \text{si } k = -2, \\ \frac{\sqrt{6}}{16} & \text{si } k = -4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$c_{k,3} = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } k = 0, \\ \frac{-1}{4} & \text{si } k = -1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } k = -3, \\ \frac{-1}{8} & \text{si } k = -4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$c_{k,4} = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{si } k = 0, \\ \frac{-1}{4} & \text{si } k = -1, \\ \frac{3}{8} & \text{si } k = -2, \\ \frac{-1}{4} & \text{si } k = -3, \\ \frac{1}{16} & \text{si } k = -4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Mediante las ecuaciones de refinamiento (1.11) obtenemos las funciones de refinamiento siguientes:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{4}(\varphi(2x) + 2\varphi(2x - 1) - 2\varphi(2x - 3) - \varphi(2x - 4)),$$

$$\psi_2(x) = \frac{\sqrt{6}}{8}(\varphi(2x) + 2\varphi(2x - 2) + \varphi(2x - 4)),$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{4}(\varphi(2x) - 2\varphi(2x - 1) + 2\varphi(2x - 3) - \varphi(2x - 4)),$$

$$\psi_4(x) = \frac{1}{8}(\varphi(2x) - 4\varphi(2x - 1) + 6\varphi(2x - 2) - 4\varphi(2x - 3) + \varphi(2x - 4)).$$

Podemos asegurar, en virtud del corolario 2.11, que $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ es un framelet ajustado de $L^2(\mathbb{R})$. Las gráficas de estas funciones están en la figuras 2.2.

Con respecto a los momentos de anulación de las funciones de refinamiento, razonando al igual que en el ejemplo anterior y utilizando la proposición 1.17, se llega a que:

$$\begin{cases} (1 - e^{-2\pi i\gamma})^1 |H_1(\gamma), \\ (1 - e^{-2\pi i\gamma})^2 |H_2(\gamma), \\ (1 - e^{-2\pi i\gamma})^3 |H_3(\gamma), \\ (1 - e^{-2\pi i\gamma})^4 |H_4(\gamma). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 \text{ momento de orden 1,} \\ \psi_2 \text{ momento de orden 2,} \\ \psi_3 \text{ momento de orden 3,} \\ \psi_4 \text{ momento de orden 4.} \end{cases}$$

Utilizando el Principio de Extensión Unitaria el número de generadores del frame crece con el orden del B-spline ([1], Teorema 11.1.3). Notemos que las funciones de refinamiento (los generadores) son combinaciones lineales de la función refinable entonces aquellas heredan la regularidad de esta. Por tanto si queremos aumentar la regularidad de los elementos del framelet necesitamos aumentar el número de generadores.

Esto en la práctica es ineficiente pues como ilustran estos ejemplos la complejidad en los cálculos crece a medida que aumenta el número de generadores. En el primer ejemplo tenemos que ψ_1, ψ_2 heredan las propiedades de N_2 luego son de clase \mathcal{C}^0 mientras que en el segundo $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ heredan las propiedades de N_4 luego son de clase \mathcal{C}^3 .

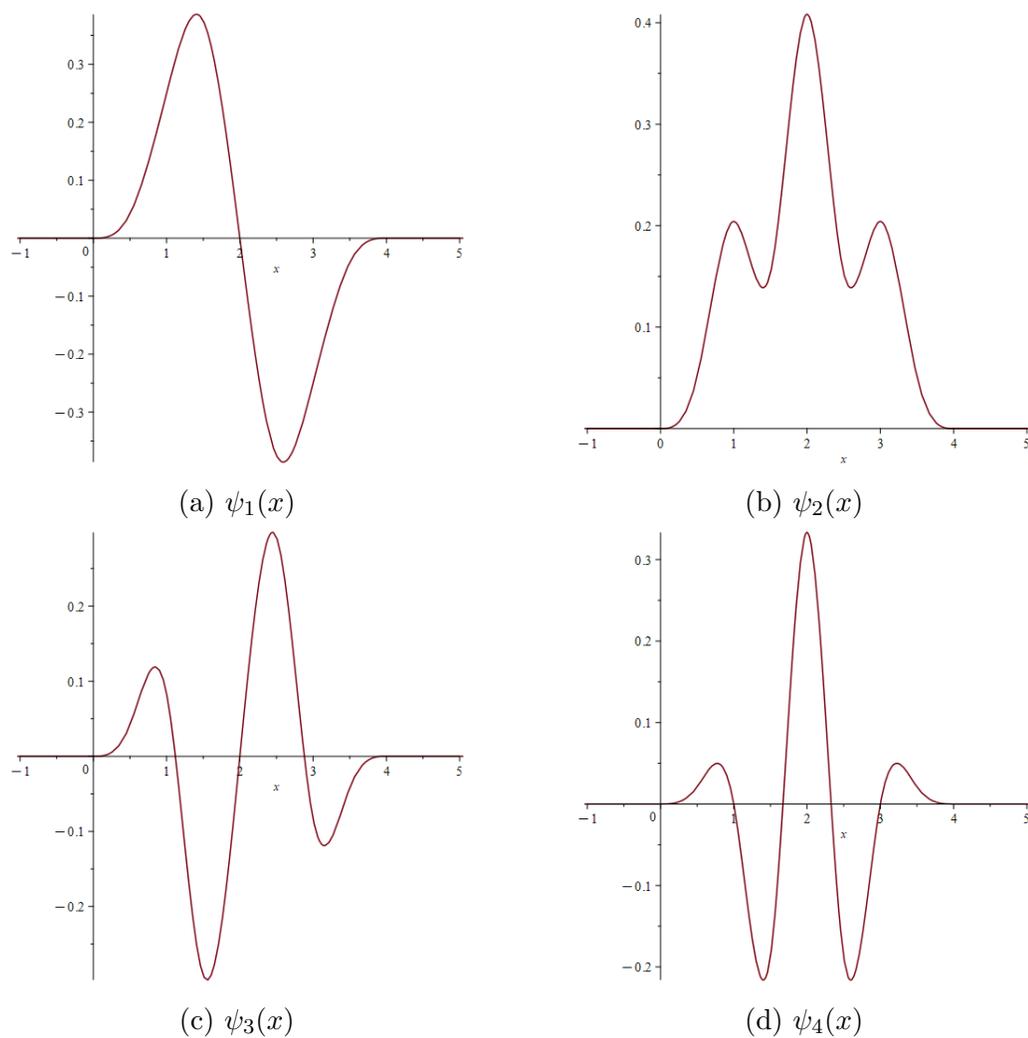


Figura 2.2: Elementos del framelet del ejemplo 2.14, construidos según el Principio de Extensión Unitaria y N_4 como función refinable.

En la práctica lo que normalmente se busca es que haya el menor número de generadores posibles. Enunciaremos dos resultados, un corolario del Principio de Extensión Oblicua y un teorema, que resuelven la cuestión combinados con el Principio de Extensión Oblicua.

El teorema, específico para B-splines, nos da una expresión de θ para aplicar posteriormente el corolario.

El corolario nos da condiciones sobre θ y H_0, \dots, H_n para que vía Principio de Extensión Oblicua consigamos un frame con 2 generadores.

Para enunciar el corolario y no hacerlo muy extenso introduciremos aquí la notación y condiciones que nos hagan falta. La demostración aparece en Christensen, [1] como ejercicio.

Consideremos $\theta \in L^\infty(\mathbb{T})$ estrictamente positiva y tal que $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \theta(\gamma) = 1$. Dada H_0 función 1-periódica:

$$\eta(\gamma) := \theta(\gamma) - \theta(\gamma) \left(|H_0(\gamma)|^2 + |H_0(\gamma + \frac{1}{2})|^2 \right)$$

y ρ, σ funciones 1-periódicas:

$$|\rho(\gamma)|^2 = \theta(\gamma), \quad |\sigma(\gamma)|^2 = \eta(\gamma)$$

Corolario 2.15. *Sea φ una función refinable y H_0 una máscara de φ . Sean $\theta, \eta, \rho, \sigma$ definidas arriba de manera que η sea positiva. Sean*

$$H_1(\gamma) = e^{2\pi i \gamma} \overline{\rho(2\gamma) H_0(\gamma + \frac{1}{2})} \quad \text{y} \quad H_2(\gamma) = H_0(\gamma) \sigma(2\gamma).$$

Entonces las funciones $\{\psi_\ell\}_{\ell=1}^2$ dadas por las ecuaciones de refinamiento generan un frame ajustado $\{D^j T_k \psi_\ell\}_{j,k \in \mathbb{Z}, \ell=1,2}$ de $L^2(\mathbb{R})$.

Si elegimos las funciones ρ, σ de manera que sean polinomios trigonométricos entonces los generadores del frame serán combinaciones lineales finitas de traslaciones y dilataciones de φ , que es lo interesante en la realidad.

El teorema a enunciar se basa en el Principio de Extensión Oblicua y es una herramienta poderosísima para lo que queremos ilustrar en este ejemplo. La prueba se encuentra en Daubechies, Bin Han, Ron y Shen, [3].

Teorema 2.16. *Sea B_{2m} el B-spline de orden $2m$ con máscara $H_0(\gamma) = \cos(\pi\gamma)^{2m}$. Entonces para cada entero positivo con $M \leq 2m$ existe un polinomio trigonométrico*

$$\theta(\gamma) = 1 + \sum_{j=1}^{M-1} c_j \sin(\pi\gamma)^{2j} \quad (2.11)$$

que cumple:

- *Los generadores del frame via Extensión Oblicua tienen exactamente momento de anulación de orden M .*
- *La función η es positiva.*
- *Los coeficientes c_j son positivos, lo que implica θ es positivo.*

Los coeficientes c_j se determinan pidiendo que:

$$\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j-1)!}{(2j)!(2j+1)} y^j\right)^{4m} = 1 + \sum_{j=1}^{M-1} c_j y^j + O(|y|^M) \quad y \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Pasaremos a mostrar una construcción de un framelet con estos resultados.

Ejemplo 2.17. Siguiendo con el ejemplo de $\varphi = N_4$. Recordemos que de la ecuación de refinamiento (1.9) era

$$H_0(\gamma) = \frac{(1 + e^{-2\pi i\gamma})^4}{16}.$$

El teorema anterior para el caso $m = 2$ y $M = 4$ nos proporciona

$$\theta(\gamma) = \frac{2452}{945} - \frac{1657}{840} \cos(2\pi\gamma) + \frac{44}{105} \cos(4\pi\gamma) - \frac{311}{7560} \cos(6\pi\gamma).$$

Entonces, aplicando el corolario 2.15 se tiene:

$$\begin{aligned} H_1(\gamma) = & (1 - e^{-2\pi i\gamma})^4 [0,004648178373 \\ & + 0,037185426987e^{-2\pi i\gamma} + 0,231579575890e^{-4\pi i\gamma} \\ & + 0,077492027449e^{-6\pi i\gamma} + 0,009686503431e^{-8\pi i\gamma}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2(\gamma) = & (1 - e^{-2\pi i\gamma})^4 [0,00815406597 \\
 & + 0,065232527739e^{-2\pi i\gamma} + 0,221444746610e^{-4\pi i\gamma} \\
 & + 0,401674890361e^{-6\pi i\gamma} + 0,257134715206e^{-8\pi i\gamma} \\
 & + 0,078828706252e^{-10\pi i\gamma} + 0,009853588281e^{-12\pi i\gamma}].
 \end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones de refinamiento (1.11) se obtienen ψ_1, ψ_2 :

$$\begin{aligned}
 \frac{\psi_1(x)}{2} = & (0,004648178373N_4(2x) + 0,01859271350N_4(2x - 1) \\
 & + 0,1107269381N_4(2x - 2) - 0,6443064278N_4(2x - 3) \\
 & + 0,9451023194N_4(2x - 4) - 0,4629267256N_4(2x - 5) \\
 & - 0,0202695133N_4(2x - 6) + 0,03874601373N_4(2x - 7) \\
 & + 0,009686503431N_4(2x - 8)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\psi_2(x)}{2} = & 0,00815406597N_4(2x) + 0,03261626386N_4(2x - 1) \\
 & + 0,00943903142N_4(2x - 2) - 0,1253251935N_4(2x - 3) \\
 & - 0,2736724120N_4(2x - 4) + 0,6397927283N_4(2x - 5) \\
 & - 0,1479077614N_4(2x - 6) - 0,1933060862N_4(2x - 7) \\
 & + 0,0009414199N_4(2x - 8) + 0,0009414199N_4(2x - 9) \\
 & + 0,009853588281N_4(2x - 10).
 \end{aligned}$$

Entonces aseguramos que $\{\psi_1, \psi_2\}$ es un framelet ajustado de $L^2(\mathbb{R})$ con la regularidad deseada, \mathcal{C}^3 . Las gráficas de este ejemplo están en la figura 2.3.

En cuanto a los momentos de anulación de las funciones de refinamiento se tiene lo siguiente. De manera análoga al primer ejemplo de la sección se verifican las hipótesis del resultado. Además, como $(1 - e^{-2\pi i\gamma})^4 |H_1(\gamma)$ y $(1 - e^{-2\pi i\gamma})^4 |H_2(\gamma)$ entonces tanto ψ_1 y ψ_2 tienen momentos de anulación de orden 4.

Como conclusión, el Principio de Extensión Oblicua permite reducir el número de generadores así como aumentar los momentos de anulación de las funciones de refinamiento.

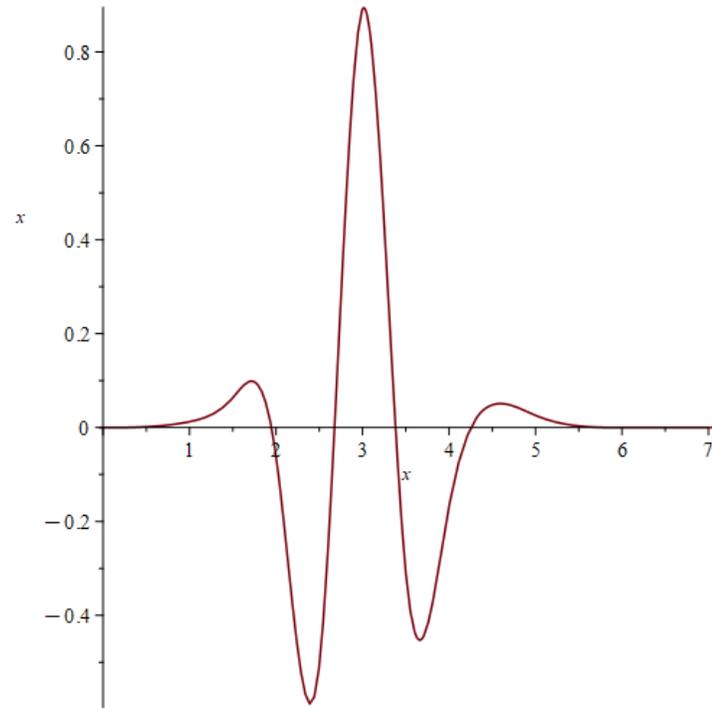
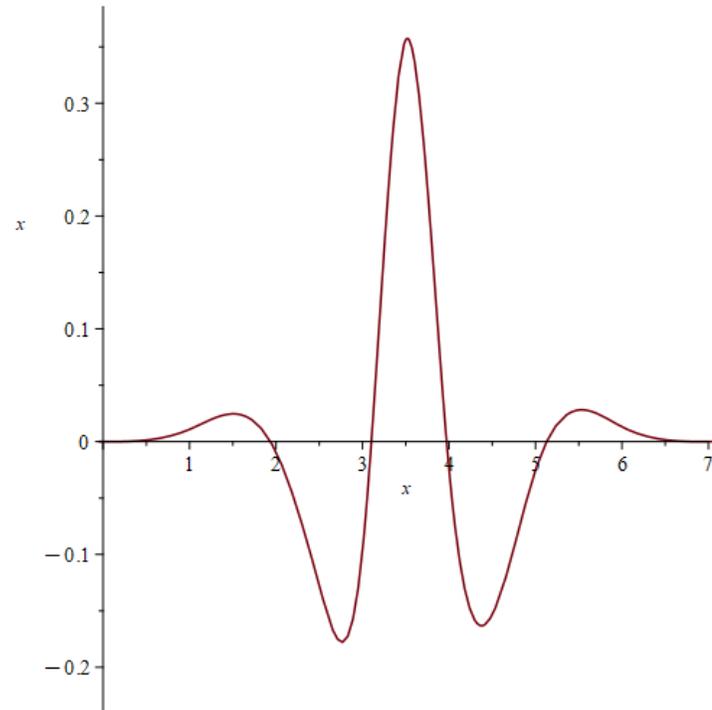
(a) $\psi_1(x)$ (b) $\psi_2(x)$

Figura 2.3: Elementos del framelet del ejemplo 2.17, construidos según el Principio de Extensión Oblicua y N_4 como función refinable.

Capítulo 3

Principio de Extensión Oblicua aplicado a framelets duales

En este capítulo, introduciremos conceptos desde una perspectiva más reciente, siguiendo la línea de investigación propuesta por Bin Han la cual utiliza la transformada framelet discreta [5].

Históricamente, se utilizan funciones refinables para desarrollar el Principio de Extensión Oblicua, como hemos visto a lo largo del texto. Este nuevo enfoque aunque permite mantener la propiedad de análisis multirresolución puede prescindir de ello. Sin embargo en la práctica es común trabajar con funciones refinables pues facilita el trabajo en la construcción de los framelets.

En esta sección, se presenta la transformada framelet discreta, fundamentada en dos operadores: subdivisión y transición. Se aborda también el estudio de las condiciones bajo las cuales la transformada framelet discreta satisface la propiedad de reconstrucción perfecta, y cómo a partir de esta se puede formular y demostrar el Principio de Extensión Oblicua.

Además, se exploran conceptos como el banco de filtros de framelets duales y el PEO-banco de filtros de framelets duales. Se muestra que esta formulación generaliza los planteamientos discutidos en el capítulo 2.

Por último, se presenta un algoritmo para la construcción de framelets duales a partir de un PEO-banco de filtros de framelets duales, acompañado de dos ejemplos ilustrativos.

3.1. Terminología

En esta sección pasaremos a trabajar con la transformada de Fourier siguiente:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

comentando que haciendo una modulación de 2π en el dominio de las frecuencias podemos relacionar ambos enfoques. Al cambiar esta definición pasaremos de trabajar con máscaras de refinamiento 1-periódicas a 2π -periódicas, del mismo modo las traslaciones de parámetro $\frac{1}{2}$ que aparecían frecuentemente serán ahora de parámetro π .

Por otro lado, utilizaremos la siguiente notación:

1. δ como la sucesión de elementos tal que

$$\delta(0) = 1 \quad \text{y} \quad \delta(k) = 0, \forall k \neq 0.$$

Además, δ cumple que $\widehat{\delta}(\xi) = 1$ pues el único sumando que sobrevive en el desarrollo de Fourier es $k = 0$.

2. Dado $u \in \ell_0(\mathbb{Z})$ se define $u^*(k) = \overline{u(-k)}$ para todo k en su soporte.
3. Dotamos al espacio $(\ell_2(\mathbb{Z}))^{1 \times (n+1)}$ del siguiente producto interno:

$$\langle (w_0, \dots, w_n), (\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_n) \rangle := \sum_{\ell=0}^n \langle w_\ell, \tilde{w}_\ell \rangle_{\ell_2(\mathbb{Z})}.$$

Y la norma se define:

$$\|(w_0, \dots, w_n)\|_{\ell_2(\mathbb{Z})^{1 \times (n+1)}}^2 := \sum_{\ell=0}^n \|w_\ell\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2.$$

La transformada framelet discreta puede ser descrita en términos de dos operadores, el de subdivisión y el de transición. Los definiremos formalmente a continuación:

Definición 3.1 (Operador de subdivisión). Sea un filtro $u \in \ell_0(\mathbb{Z})$ y una sucesión $v \in \ell(\mathbb{Z})$, se define para todo $j \in \mathbb{Z}$ el operador de subdivisión $\mathcal{S}_u : \ell(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell(\mathbb{Z})$ por:

$$[\mathcal{S}_u v](j) := 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) u(j - 2k). \quad (3.1)$$

Observación 4. También podemos dar la definición en términos del desarrollo en serie de Fourier resultando:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{S}_u v}(\xi) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_u v(j) e^{-ij\xi} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) u(j - 2k) e^{-ij\xi} \\ &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j - 2k) e^{-ij\xi} = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j) e^{-ij\xi} e^{-ik2\xi} \\ &= 2\widehat{v}(2\xi)\widehat{u}(\xi).\end{aligned}$$

Nota. El cambio de las sumas se puede hacer como consecuencia de la convergencia de las series, garantizada porque $u \in \ell_0(\mathbb{Z})$.

Definición 3.2 (Operador de transición). Sea un filtro $u \in \ell_0(\mathbb{Z})$ y una sucesión $v \in \ell(\mathbb{Z})$, se define para todo $j \in \mathbb{Z}$ el operador de transición $\mathcal{T}_u : \ell(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell(\mathbb{Z})$ por:

$$[\mathcal{T}_u v](j) := 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \overline{u(k - 2j)}. \quad (3.2)$$

Observación 5. Del mismo modo de antes se puede dar la definición en términos de los desarrollos de Fourier:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{T}_u v}(\xi) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_u v(j) e^{-ij\xi} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \overline{u(k - 2j)} e^{-ij\xi} \\ &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{u(k - 2j)} e^{-ij\xi} = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \sum_{\ell \in 2\mathbb{Z}} \overline{u(k - \ell)} e^{-i\frac{\ell}{2}\xi} \\ &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \sum_{j \in 2\mathbb{Z}} \overline{u(j)} e^{-i\frac{k-j}{2}\xi} = \widehat{v}\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{\widehat{u}\left(\frac{\xi}{2}\right)} + \widehat{v}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{\widehat{u}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)}.\end{aligned}$$

Notación. Denotaremos $\{\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n\}$ a un banco de filtros para la descomposición. Y $\{u_0, \dots, u_n\}$ a un banco de filtros para la reconstrucción

Una transformada framelet discreta de un nivel consiste en dos partes, un framelet discreto de un nivel para la descomposición y otro framelet discreto de un nivel para la reconstrucción. Veamos lo que son:

Definición 3.3. Dada $v \in \ell(\mathbb{Z})$ un framelet discreto de un nivel para la descomposición a través del banco de filtros $\{\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n\}$ es:

$$w_\ell := \frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{T}_{\tilde{u}_\ell} v, \quad \ell = 0, \dots, n. \quad (3.3)$$

A los w_ℓ se les conoce como coeficientes framelets de la señal v .

Definición 3.4. Sea $\{\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n\}$ un banco de filtros para la descomposición. Llamamos operador de análisis (o de descomposición) framelet discreto a través de $\{\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n\}$ al operador $\widetilde{\mathcal{W}} : \ell(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell(\mathbb{Z})^{1 \times (n+1)}$ definido por:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(v) := \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathcal{T}_{\tilde{u}_0} v, \dots, \mathcal{T}_{\tilde{u}_n} v), \quad v \in \ell(\mathbb{Z}). \quad (3.4)$$

Definición 3.5. Sea $\{u_0, \dots, u_n\}$ un banco de filtros para la reconstrucción. Llamamos operador de reconstrucción (o de síntesis) framelet discreto a través de $\{u_0, \dots, u_n\}$ al operador $\mathcal{V} : \ell(\mathbb{Z})^{1 \times (n+1)} \rightarrow \ell(\mathbb{Z})$ definido por:

$$\mathcal{V}(w_0, \dots, w_n) := \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{\ell=0}^n \mathcal{S}_{u_\ell} w_\ell, \quad w_0, \dots, w_n \in \ell(\mathbb{Z}). \quad (3.5)$$

Proposición 3.6. Sea $u \in \ell_0(\mathbb{Z})$ un filtro de soporte finito de \mathbb{Z} . Entonces $\mathcal{S}_u : \ell_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z})$ es el operador adjunto de $\mathcal{T}_u : \ell_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z})$.

Demostración. Queremos ver que para todo $v, w \in \ell_2(\mathbb{Z})$ se tiene que

$$\langle \mathcal{S}_u(v), w \rangle = \langle v, \mathcal{T}_u(w) \rangle.$$

Por las propiedades de la serie de Fourier sabemos que:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}_u(v), w \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\mathcal{S}_u}(\xi) \overline{\widehat{w}(\xi)} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{v}(2\xi) \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{w}(\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \widehat{v}(\xi) \widehat{u}(\xi/2) \overline{\widehat{w}(\xi/2)} d\xi. \end{aligned}$$

Haciendo la separación siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{-2\pi}^{-\pi} \widehat{v}(\xi) \widehat{u}(\xi/2) \overline{\widehat{w}(\xi/2)} d\xi + \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{v}(\xi) \widehat{u}(\xi/2) \overline{\widehat{w}(\xi/2)} d\xi \\ + \int_{\pi}^{2\pi} \widehat{v}(\xi) \widehat{u}(\xi/2) \overline{\widehat{w}(\xi/2)} d\xi. \end{aligned}$$

Y la traslación $\xi + 2\pi$ en la primera y última integral. Además, utilizando la periodicidad de \widehat{v} se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{v}(\xi) (\widehat{u}(\xi/2) \overline{\widehat{w}(\xi/2)} + \widehat{u}(\xi/2 + \pi) \overline{\widehat{w}(\xi/2 + \pi)}) d\xi \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{v}(\xi) \overline{\mathcal{T}_u(w)}(\xi) d\xi = \langle v, \mathcal{T}_u(w) \rangle. \end{aligned}$$

En conclusión, $\mathcal{T}_u^* = \mathcal{S}_u$. □

Corolario 3.7. *En el espacio $(\ell_2(\mathbb{Z}))^{1 \times (n+1)}$ el operador adjunto de \mathcal{V} es \mathcal{W} .*

Demostración. Basta tomar utilizar la definición del producto escalar en el espacio $(\ell_2(\mathbb{Z}))^{1 \times (n+1)}$ que hemos dado al comienzo del capítulo y aplicar la proposición anterior a cada sumando. □

Este corolario resultará útil en la siguiente sección.

3.2. Reconstrucción perfecta de la transformada framelet discreta

Definición 3.8. Decimos que la transformada framelet discreta asociada a un banco de filtros $(\{\widetilde{u}_0, \dots, \widetilde{u}_n\}, \{u_0, \dots, u_n\})$ tiene la propiedad de reconstrucción perfecta si

$$\mathcal{V}\widetilde{\mathcal{W}}v = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^n \mathcal{S}_{u_\ell} \mathcal{T}_{\widetilde{u}_\ell} v = v, \quad \forall v \in \ell(\mathbb{Z}). \quad (3.6)$$

Ejemplo 3.9. Veamos que expresión adquiere esta propiedad aplicada a $\boldsymbol{\delta}$. Fijemos una componente ℓ del banco de filtros. Aplicamos $\mathcal{T}_{\widetilde{u}_\ell}$, resultando que para todo $j \in \mathbb{Z}$:

$$[\mathcal{T}_{\widetilde{u}_\ell} \boldsymbol{\delta}](j) = \overline{\widetilde{u}_\ell(-2j)}.$$

Aplicamos \mathcal{S}_{u_ℓ} :

$$[\mathcal{S}_{u_\ell}](\mathcal{T}_{\widetilde{u}_\ell} \boldsymbol{\delta})(j) = 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\widetilde{u}_\ell(-2k)} u_\ell(j - 2k) = 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\widetilde{u}_\ell(2k)} u_\ell(2k + j).$$

En conclusión, (3.6) se traduce en :

$$\sum_{\ell=0}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\tilde{u}_\ell(2k)} u_\ell(j+2k) = \frac{1}{2} \delta(j), \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Observación 6. Utilizando la versión transformada de las definiciones de $\mathcal{T}_{\tilde{u}_\ell}$ y \mathcal{S}_{u_ℓ} tenemos que para $v \in \ell_0(\mathbb{Z})$ (3.6) es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\widehat{\mathcal{S}_{u_\ell} \mathcal{T}_{\tilde{u}_\ell} v}](\xi) &= \widehat{\mathcal{T}_{\tilde{u}_\ell} v}(2\xi) \widehat{u}_\ell(\xi) \\ &= \widehat{v}(\xi) \widehat{\tilde{u}_\ell(\xi)} \widehat{u}_\ell(\xi) + \widehat{v}(\xi + \pi) \widehat{\tilde{u}_\ell(\xi + \pi)} \widehat{u}_\ell(\xi). \end{aligned}$$

Por lo tanto la reconstrucción perfecta (3.6) se da si y solo si (tomando conjugados):

$$\overline{\widehat{v}(\xi)} = \overline{\widehat{v}(\xi)} \sum_{\ell=0}^n \widehat{\tilde{u}_\ell(\xi)} \overline{\widehat{u}_\ell(\xi)} + \overline{\widehat{v}(\xi + \pi)} \sum_{\ell=0}^n \widehat{\tilde{u}_\ell(\xi + \pi)} \overline{\widehat{u}_\ell(\xi)}. \quad (3.7)$$

Notemos que para $v \in \ell(\mathbb{Z})$ no se cumpliría con estas condiciones, pues habría que asegurar convergencia de series y reordenaciones.

Bin Han basa el Principio de Extensión Oblicua en la reconstrucción perfecta. Daremos unas caracterizaciones de esta propiedad que resultarán especialmente útiles en la prueba de dicho principio.

Teorema 3.10 (Reconstrucción perfecta). *Sean $\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n, u_0, \dots, u_n \in \ell_0(\mathbb{Z})$. Son equivalentes:*

1. *El banco de filtros $(\{\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n\}, \{u_0, \dots, u_n\})$ tiene la propiedad de perfecta reconstrucción.*
2. *Para todo $v \in \ell_0(\mathbb{Z})$ se tiene $\mathcal{V}\widetilde{\mathcal{W}}v = v$.*
3. *$\mathcal{V}\widetilde{\mathcal{W}}v = v$ se cumple para $v = \delta$ y $\delta(\cdot - 1)$, es decir,*

$$\sum_{\ell=0}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\tilde{u}_\ell(\eta + 2k)} u_\ell(j + \eta + 2k) = \frac{1}{2} \delta(j), \quad \forall \eta \in \{0, 1\}, j \in \mathbb{Z}. \quad (3.8)$$

4. *Para todo $\xi \in \mathbb{R}$ se cumple:*

$$\begin{cases} \sum_{\ell=0}^n \widehat{\tilde{u}_\ell(\xi)} \overline{\widehat{u}_\ell(\xi)} = 1, \\ \sum_{\ell=0}^n \widehat{\tilde{u}_\ell(\xi)} \overline{\widehat{u}_\ell(\xi + \pi)} = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Demostración. Puesto que las sucesiones δ y $\delta(\cdot - \mathbf{1}) \in \ell_0(\mathbb{Z}) \subset \ell(\mathbb{Z})$ se deduce $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$.

Para probar $3 \Rightarrow 4$ se considera (3.7) y evaluamos en:

$$v = \delta.$$

$$1 = \sum_{\ell=0}^n \widehat{u}_\ell(\xi) \overline{\widehat{u}_\ell(\xi)} + \sum_{\ell=0}^n \widehat{u}_\ell(\xi + \pi) \overline{\widehat{u}_\ell(\xi)}.$$

$$v = \delta(\cdot - 1). \text{ (en este caso tenemos } \widehat{\delta(\cdot - 1)}(\xi) = e^{-i\xi} \text{):}$$

$$1 = \sum_{\ell=0}^n \widehat{u}_\ell(\xi) \overline{\widehat{u}_\ell(\xi)} - \sum_{\ell=0}^n \widehat{u}_\ell(\xi + \pi) \overline{\widehat{u}_\ell(\xi)}.$$

Ahora bien, sumando ambas y restando se obtiene, respectivamente:

$$1 = \sum_{\ell=0}^n \widehat{u}_\ell(\xi) \overline{\widehat{u}_\ell(\xi)} \quad \text{y} \quad 0 = \sum_{\ell=0}^n \widehat{u}_\ell(\xi + \pi) \overline{\widehat{u}_\ell(\xi)}.$$

Probemos ahora $4 \Rightarrow 2$. Sea $v \in \ell_0(\mathbb{Z})$ por hipótesis se cumple (3.7). Aplicando la observación 6, se tiene la propiedad de perfecta reconstrucción y por ello 2.

Solamente resta demostrar $2 \Rightarrow 1$. Sea $v \in \ell(\mathbb{Z})$. Por hipótesis todos los filtros tienen soporte finito luego existe $N > 0$ tal que todos los filtros $u_0, \dots, u_n, \widetilde{u}_0, \dots, \widetilde{u}_n$ tienen el soporte contenido en $[-N, N]$. Sea $j \in \mathbb{Z}$ fijo pero arbitrario. Definimos $v_j \in \ell_0(\mathbb{Z})$:

$$v_j(k) = \begin{cases} v(k) & \text{si } k \in \mathbb{Z} \cap [j - 2N, j + 2N], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como todos los filtros tienen el soporte en $[-N, N]$, para todo $k \in \mathbb{Z} \cap [\frac{j-N}{2}, \frac{j+N}{2}]$ tenemos:

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}_{\widetilde{u}_\ell} v](k) &= 2 \sum_{r \in \mathbb{Z}} v(r) \overline{\widetilde{u}_\ell(r - 2k)} = 2 \sum_{r=j-2N}^{j+2N} v(r) \overline{\widetilde{u}_\ell(r - 2k)} \\ &= 2 \sum_{r=j-2N}^{j+2N} v_j(r) \overline{\widetilde{u}_\ell(r - 2k)} = [\mathcal{T}_{\widetilde{u}_\ell} v_j](k). \end{aligned}$$

Ahora bien, aplicando \mathcal{S}_{u_ℓ} a $[\mathcal{T}_{\tilde{u}_\ell}v]$ para todo $\ell = 0, \dots, n$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}_{u_\ell}]\mathcal{T}_{\tilde{u}_\ell}v(j) &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap [\frac{j-N}{2}, \frac{j+N}{2}]} [\mathcal{T}_{\tilde{u}_\ell}v](k)u_\ell(j-2k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap [\frac{j-N}{2}, \frac{j+N}{2}]} [\mathcal{T}_{\tilde{u}_\ell}v_j](k)u_\ell(j-2k) = [\mathcal{S}_{u_\ell}]\mathcal{T}_{\tilde{u}_\ell}v_j(j). \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando 2:

$$\frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^n [\mathcal{S}_{u_\ell} \mathcal{T}_{\tilde{u}_\ell}]v(j) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^n [\mathcal{S}_{u_\ell} \mathcal{T}_{\tilde{u}_\ell}]v_j(j) = v_j(j) = v(j).$$

□

Definición 3.11. La condición 4 del teorema anterior se puede reescribir como:

$$\begin{pmatrix} \widehat{u}_0(\xi) & \dots & \widehat{u}_n(\xi) \\ \widehat{u}_0(\xi + \pi) & \dots & \widehat{u}_n(\xi + \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0(\xi) & \dots & \widehat{u}_n(\xi) \\ \widehat{u}_0(\xi + \pi) & \dots & \widehat{u}_n(\xi + \pi) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Un banco de filtros que satisface la propiedad de reconstrucción perfecta en términos de las matrices anteriores se denomina banco de filtros de framelets duales.

Teorema 3.12. Sea $u_0, \dots, u_n \in \ell_0(\mathbb{Z})$ filtros. Consideremos $\mathcal{W} : \ell_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow (\ell_2(\mathbb{Z}))^{1 \times (n+1)}$. Son equivalentes:

1. \mathcal{W} es una isometría, es decir,

$$\|\mathcal{W}v\|_{(\ell_2(\mathbb{Z}))^{1 \times (n+1)}}^2 = \|v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2, \quad \forall v \in \ell_2(\mathbb{Z}).$$

2. $\langle \mathcal{W}v, \mathcal{W}w \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in \ell_2(\mathbb{Z})$.

3. $\mathcal{W}^*\mathcal{W} = I$, esto es, $\mathcal{W}^*\mathcal{W}v = v$ para todo $v \in \ell_2(\mathbb{Z})$.

4. El banco de filtros $\{u_0, \dots, u_n\}$ satisface la propiedad de reconstrucción perfecta:

$$\begin{pmatrix} \widehat{u}_0(\xi) & \dots & \widehat{u}_n(\xi) \\ \widehat{u}_0(\xi + \pi) & \dots & \widehat{u}_n(\xi + \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0(\xi) & \dots & \widehat{u}_n(\xi) \\ \widehat{u}_0(\xi + \pi) & \dots & \widehat{u}_n(\xi + \pi) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Como 1 es un caso particular de 2 se tiene $2 \Rightarrow 1$.

Probamos $1 \Rightarrow 2$. Tomando en 1 la adjunta, para todo $v \in \ell_2(\mathbb{Z})$, se verifica:

$$\langle \mathcal{W}v, \mathcal{W}v \rangle = \langle \mathcal{W}^* \mathcal{W}v, v \rangle = \langle v, v \rangle. \quad (3.11)$$

Sean $v, w \in \ell_2(\mathbb{Z})$, utilizando las identidades de polarización (ver apéndice A.2) se sigue:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W}v, \mathcal{W}w \rangle &= \langle \mathcal{W}^* \mathcal{W}v, w \rangle \\ &= \frac{1}{4} [\langle \mathcal{W}^* \mathcal{W}(v+w), v+w \rangle - \langle \mathcal{W}^* \mathcal{W}(v-w), v-w \rangle \\ &\quad + i \langle \mathcal{W}^* \mathcal{W}(v+iw), v+iw \rangle - i \langle \mathcal{W}^* \mathcal{W}(v-iw), v-iw \rangle]. \end{aligned}$$

Utilizando (3.11) se tiene:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} [\langle v+w, v+w \rangle - \langle v-w, v-w \rangle + i \langle v+iw, v+iw \rangle - i \langle v-iw, v-iw \rangle] \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Probemos $2 \Rightarrow 3$, para ello sea $v \in \ell_2(\mathbb{Z})$, de 2 se tiene que para todo $w \in \ell_2(\mathbb{Z})$

$$\langle \mathcal{W}^* \mathcal{W}v, w \rangle = \langle v, w \rangle,$$

lo que implica que $\mathcal{W}^* \mathcal{W}v = v$.

$3 \Rightarrow 2$. Supongamos $v, w \in \ell_2(\mathbb{Z})$ y planteamos $\langle \mathcal{W}v, \mathcal{W}w \rangle$ ahora hacemos la adjunta $\langle \mathcal{W}^* \mathcal{W}v, w \rangle$. Aplicamos la hipótesis resultando $\langle v, w \rangle$.

Debido a que $\mathcal{W}^* = \mathcal{S}$, 3 es equivalente a la propiedad de reconstrucción perfecta, entonces aplicando el teorema anterior se deduce la equivalencia $3 \iff 4$. □

Nota. En 1, por la definición de norma en $(\ell_2(\mathbb{Z}))^{1 \times (n+1)}$ se tiene:

$$\|v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2 = \|\mathcal{W}v\|_{(\ell_2(\mathbb{Z}))^{1 \times (n+1)}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^n \|\mathcal{T}_{u_\ell} v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2. \quad (3.12)$$

3.3. El Principio de Extensión Oblicua

Teorema 3.13 (Principio de Extensión Oblicua). Sean $\Theta, \tilde{a}, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n, a, b_1, \dots, b_n \in \ell_0(\mathbb{Z})$. Son equivalentes:

1. El banco de filtros $(\{\tilde{a}; \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}, \{a; b_1, \dots, b_n\})_\Theta$ tiene la propiedad de reconstrucción perfecta generalizada:

$$\Theta^* * v = \frac{1}{2} \mathcal{S}_a(\Theta^* * \mathcal{T}_{\tilde{a}} v) + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \mathcal{S}_{b_\ell} \mathcal{T}_{\tilde{b}_\ell} v = v, \quad \forall v \in \ell(\mathbb{Z}). \quad (3.13)$$

2. Para todo $v \in \ell_0(\mathbb{Z})$ se tiene (3.13).

3. (3.13) se cumple para $v = \delta$ y $\delta(\cdot - \mathbf{1})$.

4. Para todo $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{cases} \widehat{\Theta}(2\xi) \widehat{\tilde{a}}(\xi) \overline{\widehat{\tilde{a}}(\xi)} + \sum_{\ell=1}^n \widehat{\tilde{b}_\ell}(\xi) \overline{\widehat{\tilde{b}_\ell}(\xi)} = \widehat{\Theta}(\xi), \\ \widehat{\Theta}(2\xi) \widehat{\tilde{a}}(\xi) \overline{\widehat{\tilde{a}}(\xi + \pi)} + \sum_{\ell=1}^n \widehat{\tilde{b}_\ell}(\xi) \overline{\widehat{\tilde{b}_\ell}(\xi + \pi)} = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Demostración. Todas las equivalencias tienen el mismo argumento que en la demostración del teorema de Reconstrucción perfecta.

Aun así veremos como es la fórmula de (3.13) en el dominio de las frecuencias, utilizaremos las expresiones de $\widehat{\mathcal{T}}$ y $\widehat{\mathcal{S}}$ definidas en las observaciones 4 y 5. Para no hacerlo muy extenso iremos término a término y luego sumaremos:

1. $\widehat{\Theta^*}(\xi) = \overline{\widehat{\Theta}(\xi)}$ pues:

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta^*}(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Theta^*(k) e^{-ik\xi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\Theta(-k)} e^{-ik\xi} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\Theta(k)} e^{ik\xi} = \overline{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Theta(k) e^{-ik\xi}} = \overline{\widehat{\Theta}(\xi)}. \end{aligned}$$

2. Por las propiedades de la convolución $\widehat{\Theta^* * v}(\xi) = \overline{\widehat{\Theta}(\xi)} \widehat{v}(\xi)$.

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{S}_a(\Theta^* * \mathcal{T}_{\tilde{a}} v)}(\xi) &= (\widehat{\Theta^* * \mathcal{T}_{\tilde{a}} v})(2\xi) \widehat{a}(\xi) = \overline{\widehat{\Theta}(2\xi)} \widehat{\mathcal{T}_{\tilde{a}} v}(2\xi) \widehat{a}(\xi) \\ &= \overline{\widehat{\Theta}(2\xi)} \widehat{a}(\xi) (\widehat{v}(\xi) \overline{\widehat{a}(\xi)} + \widehat{v}(\xi + \pi) \overline{\widehat{a}(\xi + \pi)}). \end{aligned}$$

4. Al igual que en el teorema de reconstrucción perfecta:

$$\frac{1}{2} \widehat{\sum_{\ell=1}^n \mathcal{S}_{b_\ell} \mathcal{T}_{\tilde{b}_\ell} v} = \overline{\widehat{v}(\xi)} \sum_{\ell=1}^n \widehat{b}_\ell(\xi) \overline{\widehat{b}_\ell(\xi)} + \overline{\widehat{v}(\xi + \pi)} \sum_{\ell=1}^n \widehat{b}_\ell(\xi + \pi) \overline{\widehat{b}_\ell(\xi + \pi)}.$$

Uniendo todo:

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta^* * v}(\xi) &= \widehat{v}(\xi) \left(\overline{\widehat{\Theta}(2\xi) \widehat{a}(\xi)} \widehat{a}(\xi) + \sum_{\ell=1}^n \overline{\widehat{b}_\ell(\xi) \widehat{b}_\ell(\xi)} \right) + \\ &\widehat{v}(\xi + \pi) \left(\overline{\widehat{\Theta}(2\xi) \widehat{a}(\xi + \pi)} \widehat{a}(\xi) + \sum_{\ell=1}^n \overline{\widehat{b}_\ell(\xi + \pi) \widehat{b}_\ell(\xi)} \right). \end{aligned}$$

□

Definición 3.14 ((PEO)-banco de filtros de framelets duales). Un banco de filtros $(\{\tilde{a}; \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}, \{a; b_1, \dots, b_n\})_\Theta$ que satisface las condiciones para todo $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \widehat{\Theta}(2\xi) \widehat{a}(\xi) \overline{\widehat{a}(\xi)} + \sum_{\ell=1}^n \widehat{b}_\ell(\xi) \overline{\widehat{b}_\ell(\xi)} = \widehat{\Theta}(\xi), \\ \widehat{\Theta}(2\xi) \widehat{a}(\xi) \overline{\widehat{a}(\xi + \pi)} + \sum_{\ell=1}^n \widehat{b}_\ell(\xi) \overline{\widehat{b}_\ell(\xi + \pi)} = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

se denomina un (PEO)-banco de filtros de framelets duales.

Como caso particular del teorema de Principio de Extensión Oblicua surge el siguiente resultado. Antes introduciremos notación que nos facilitará el asunto:

Notación. Denotaremos:

$$\begin{aligned} \Theta &:= \theta * \theta^*, \text{ esto es, } \widehat{\Theta}(\xi) := |\widehat{\theta}(\xi)|^2, \\ \mathcal{M}_{a,\theta}(\xi) &:= \begin{pmatrix} \widehat{\Theta}(\xi) - \widehat{\Theta}(2\xi) |\widehat{a}(\xi)|^2 & -\widehat{\Theta}(2\xi) \widehat{a}(\xi) \overline{\widehat{a}(\xi + \pi)} \\ -\widehat{\Theta}(2\xi) \widehat{a}(\xi + \pi) \overline{\widehat{a}(\xi)} & \widehat{\Theta}(\xi + \pi) - \widehat{\Theta}(2\xi) |\widehat{a}(\xi + \pi)|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Teorema 3.15. *Sea $\theta, a, b_1, \dots, b_n \in \ell_0(\mathbb{Z})$ sucesiones. Entonces*

$$\|\Theta^* * \mathcal{T}_a v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2 + \sum_{\ell=1}^n \|\mathcal{T}_{b_\ell} v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2 = 2\|\Theta^* * v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2.$$

si y solo si el banco de filtros $\{a; b_1, \dots, b_n\}_\Theta$ cumple

$$\begin{pmatrix} \widehat{b}_1(\xi) & \dots & \widehat{b}_n(\xi) \\ \widehat{b}_1(\xi + \pi) & \dots & \widehat{b}_n(\xi + \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{b}_1(\xi) & \dots & \widehat{b}_n(\xi) \\ \widehat{b}_1(\xi + \pi) & \dots & \widehat{b}_n(\xi + \pi) \end{pmatrix}^* = \mathcal{M}_{a, \Theta}(\xi). \quad (3.17)$$

Demostración. Notemos que $\Theta^* = \Theta$ (pues la convolución conmuta) y que

$$\|\theta * v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\theta}(\xi)|^2 |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi = \langle \Theta^* * v, v \rangle.$$

Puesto que \mathcal{S}_a es la adjunta \mathcal{T}_a , y viceversa, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \theta * \mathcal{T}_a v, \theta * \mathcal{T}_a v \rangle &= \|\theta * \mathcal{T}_a v\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2 = \langle \Theta^* * \mathcal{T}_a v, \mathcal{T}_a v \rangle \\ &= \langle \mathcal{S}_a(\Theta^* * \mathcal{T}_a v), v \rangle. \end{aligned}$$

Y la demostración sigue como la prueba del Teorema Principio de Extensión Oblicua. \square

Por un lado notar que estos resultados son un caso particular del Principio de Extensión Oblicua presentado más arriba (considerando únicamente una familia). Entonces tiene sentido que $\{a; b_1, \dots, b_n\}_\Theta$ sea un (PEO)-banco de filtros de framelets duales ajustados si cumple la propiedad (3.18), como caso particular de la definición 3.14.

Y por otro lado notar que este resultado coincide con el Principio de Extensión Oblicua en el planteamiento de Ron y Shen. Hemos conseguido llegar directamente al resultado más importante de la sección anterior de una manera más rápida y general. En este caso no ha hecho falta considerar funciones refinables. La igualdad matricial (3.17) es equivalente a (2.10). La importancia de este resultado es que permite caracterizar framelets duales imponiendo dos ecuaciones a los filtros.

3.4. Construcción de framelets duales

Pasaremos a ilustrar un algoritmo para construir pares de framelets duales. Antes de nada comentar que estos razonamientos se pueden enunciar de manera más general con factor de dilatación d , ver Daubechies y Bin Han [3]. Nosotros nos limitaremos a los sistemas diádicos, $d = 2$, con los que hemos trabajado a lo largo del texto. Puesto que estamos interesados en la construcción y no en el detalle de las demostraciones citamos el mismo texto para encontrarlas.

Continuaremos con la notación del Principio de Extensión Oblicua. Partiremos de φ y $\tilde{\varphi}$ dos funciones refinables con filtros a y \tilde{a} , respectivamente. Seguimos suponiendo que todos los filtros tienen soporte finito. A mayores pedimos que

$$\hat{a}(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k = 1, \quad \hat{\tilde{a}}(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_k = 1$$

y que $\hat{\Theta}$ sea un polinomio trigonométrico de periodo 2π . Notemos que si los filtros tienen soporte finito entonces la respectiva función refinable tendrá soporte compacto gracias a la ecuación de refinamiento (1.9). Además, supondremos que $\hat{\varphi}(0) = \hat{\tilde{\varphi}}(0) = 1$ (realmente no hace falta suponerlo con las condiciones sobre los filtros y las ecuaciones de refinamiento se cumple).

Si construimos filtros de manera que:

1. $(\{\tilde{a}; \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}, \{a; b_1, \dots, b_n\})_{\Theta}$ sea un (PEO)-banco de filtros de framelets duales.
2. $\hat{\Theta}(0) = 1$.
3. $\hat{\tilde{b}}_{\ell}(0) = 0$, $\ell = 1, \dots, n$.
4. $\hat{b}_{\ell}(0) = 0$, $\ell = 1, \dots, n$.

Definiendo para todo $\ell = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} \psi_{\ell}(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{k,\ell} \varphi(2x - k), \\ \tilde{\psi}_{\ell}(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{b}_{k,\ell} \tilde{\varphi}(2x - k), \end{cases} \quad (3.18)$$

se tendría $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ y $\{\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_n\}$ un par de framelets duales (ver Bin Han [5], teorema 4.1.9). La demostración del teorema citado emplea las técni-

cas conocidas hasta ahora. Notemos que son la ecuación (1.11) aplicada a cada función refinable.

Por cuestión de simplicidad centraremos la atención en el caso $n = 2$. Partiremos de φ y $\tilde{\varphi}$ dos funciones refinables con máscaras \hat{a} y $\tilde{\hat{a}}$, respectivamente. Hemos supuesto que a y \tilde{a} son de soporte finito, por ello φ y $\tilde{\varphi}$ tendrán soporte compacto. Además supondremos que a y \tilde{a} tienen reglas de suma de orden m y n , respectivamente.

Como hemos comentado en la página anterior, para conseguir un par de framelets duales necesitamos construir $\Theta, b_1, b_2, \tilde{b}_1$ y \tilde{b}_2 de modo que se verifiquen las condiciones 1, 2, 3 y 4.

Las ecuaciones (3.14) del Principio de Extensión Oblicua se reescriben en notación matricial como:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1(\xi) & \hat{b}_2(\xi) \\ \hat{b}_1(\xi + \pi) & \hat{b}_2(\xi + \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\hat{b}}_1(\xi) \\ \tilde{\hat{b}}_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Theta}(\xi) - \hat{\Theta}(2\xi)\overline{\hat{a}(\xi)}\tilde{\hat{a}}(\xi) \\ -\hat{\Theta}(2\xi)\overline{\hat{a}(\xi + \pi)}\tilde{\hat{a}}(\xi) \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, como bien hemos comentado a lo largo del texto, tenemos especial interés en que los framelets tengan momento de anulación de orden alto. Recordemos la proposición 1.17.

En virtud de esa proposición, si damos expresiones sencillas surgen de manera natural las condiciones sobre los filtros b_1, b_2 :

$$\begin{cases} \hat{b}_1(\xi) = (1 - e^{-i\xi})^n g(\xi), \\ \hat{b}_2(\xi) = (1 - e^{-i\xi})^n e^{-i\xi} g(\xi). \end{cases} \quad (3.19)$$

Donde $g(\xi)$ es cierto polinomio trigonométrico que sea divisor de \hat{b}_1 y \hat{b}_2 , supondremos que es un monomio. En consecuencia, las matrices anteriores pasan a ser:

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} (1 - e^{-i\xi})^n g(\xi) & 0 \\ 0 & (1 - e^{-i(\xi + \pi)})^n g(\xi + \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\xi} \\ 1 & e^{-i(\xi + \pi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\hat{b}}_1(\xi) \\ \tilde{\hat{b}}_2(\xi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\Theta}(\xi) - \hat{\Theta}(2\xi)\overline{\hat{a}(\xi)}\tilde{\hat{a}}(\xi) \\ -\hat{\Theta}(2\xi)\overline{\hat{a}(\xi + \pi)}\tilde{\hat{a}}(\xi) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para construir \widehat{b}_1 y \widehat{b}_2 definimos

$$\begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\widehat{\Theta}(\xi) - \widehat{\Theta}(2\xi)\overline{\widehat{a}(\xi)}\widehat{a}(\xi)}{-(1-e^{i\xi})^n g(\xi)2e^{i\xi}} \\ \frac{-\widehat{\Theta}(2\xi)\widehat{a}(\xi+\pi)\widehat{a}(\xi)}{-(1-e^{i(\xi+\pi)})^n g(\xi+\pi)2e^{i\xi}} \end{pmatrix},$$

y despejamos de las ecuaciones anteriores

$$\begin{pmatrix} \widehat{b}_1(\xi) \\ \widehat{b}_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\xi+\pi)} & -1 \\ -e^{i\xi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

La cuestión que nos queda para llegar a lo comentado arriba es elegir Θ . Recordemos que $\widehat{\Theta}$ es un polinomio trigonométrico 2π periódico y $\widehat{\Theta}(0) = 1$. Lo escogeremos de manera que f_1 y f_2 sean polinomios trigonométricos 2π periódicos y $\widehat{b}_1(0) = \widehat{b}_2(0) = 0$.

Por ello presentamos en el siguiente teorema, un algoritmo para construir Θ , y por ende, \widehat{b}_1 y \widehat{b}_2 . Lo que necesitamos se cumple si imponemos que:

$$\widehat{\Theta}(0) = 1 \text{ y } (1 - e^{i\xi})^k |[\widehat{\Theta}(\xi)\widehat{A}(\xi) - \widehat{\Theta}(2\xi)\widehat{B}(\xi)], \quad (3.22)$$

donde A y B serán especificados después del teorema. En consecuencia, para cualquier entero k positivo existe un filtro de soporte finito de modo que su transformado es un polinomio trigonométrico 2π -periódico y tal que (3.22) se verifique.

Teorema 3.16 (Construcción de Θ). *Supongamos que A y B son dos sucesiones finitas sobre \mathbb{Z} tal que $\widehat{A}(0) = \widehat{B}(0) \neq 0$. (3.22) se verifica si y solo si para todo $\ell = 0, \dots, n-1$*

$$i^\ell \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} \widehat{\Theta}(\xi) \Big|_{\xi=0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Theta_k k^\ell = \lambda_\ell, \quad (3.23)$$

donde $\lambda_0 = 1$ y λ_ℓ ($\ell \in \mathbb{N}$) vienen determinadas por la fórmula recursiva:

$$\lambda_\ell = \frac{1}{(2^\ell - 1)\widehat{A}(0)} \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{\ell!}{j!(\ell-j)!} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k k^{\ell-j} - 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k k^{\ell-j} \right] \lambda_j.$$

Demostración. La caracterización que acabamos de dar viene justificada por la regla de derivación de Leibniz y utilizando que $\widehat{A}(0) = \widehat{B}(0)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} [\widehat{\Theta}(\xi)\widehat{A}(\xi) - \widehat{\Theta}(2\xi)\widehat{B}(\xi)] \Big|_{\xi=0} &= \sum_{j=0}^{\ell} \frac{\ell!}{j!(\ell-j)!} \frac{d^j}{d\xi^j} [\widehat{\Theta}(\xi)] \Big|_{\xi=0} \frac{d^{\ell-j}}{d\xi^{\ell-j}} [\widehat{A}(\xi)] \Big|_{\xi=0} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\ell} \frac{\ell!}{j!(\ell-j)!} 2^j \frac{d^j}{d\xi^j} [\widehat{\Theta}(2\xi)] \Big|_{\xi=0} \frac{d^{\ell-j}}{d\xi^{\ell-j}} [\widehat{B}(\xi)] \Big|_{\xi=0}, \end{aligned}$$

recordemos que al otro lado de la igualdad (3.22) tenemos el factor $(1 - e^{i\xi})^n$ multiplicado por un polinomio trigonométrico de periodo 2π , que no nos interesa, derivando hasta $\ell < n$ y evaluando en 0 siempre se va a anular. Luego, simplificando, para $\ell = 1, \dots, n-1$ tenemos:

$$\begin{aligned} &(2^\ell - 1)\widehat{A}(0) \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} [\widehat{\Theta}(\xi)] \Big|_{\xi=0} \\ &= \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{\ell!}{j!(\ell-j)!} \frac{d^j}{d\xi^j} [\widehat{\Theta}(\xi)] \Big|_{\xi=0} \left[\frac{d^{\ell-j}}{d\xi^{\ell-j}} [\widehat{A}(\xi)] \Big|_{\xi=0} - 2^j \frac{d^{\ell-j}}{d\xi^{\ell-j}} [\widehat{B}(\xi)] \Big|_{\xi=0} \right]. \end{aligned}$$

Se sigue, directamente, que (3.22) es equivalente a (3.23). \square

En nuestro caso, lo aplicaremos a

$$\begin{cases} \widehat{A}(\xi) \equiv 1, \\ \widehat{B}(\xi) = \overline{\widehat{a}(\xi)}\widehat{a}(\xi). \end{cases}$$

de manera que:

$$(1 - e^{i\xi})^{n+m} | [\widehat{\Theta}(\xi) - \widehat{\Theta}(2\xi)\overline{\widehat{a}(\xi)}\widehat{a}(\xi)].$$

Comprobemos que f_1 y f_2 son polinomios trigonométricos 2π periódicos y que $\widehat{b}_1(0) = \widehat{b}_2(0) = 0$.

$$f_1(\xi) = \frac{\widehat{\Theta}(\xi) - \widehat{\Theta}(2\xi)\overline{\widehat{a}(\xi)}\widehat{a}(\xi)}{-(1 - e^{i\xi})^n \overline{g(\xi)}2e^{i\xi}},$$

$$f_2(\xi) = \frac{-\widehat{\Theta}(2\xi)\overline{\widehat{a}(\xi + \pi)}\widehat{a}(\xi)}{-(1 - e^{i(\xi + \pi)})^n g(\xi + \pi) 2e^{i\xi}}.$$

Por hipótesis a y \tilde{a} tienen reglas de suma de orden m y n , respectivamente. Para f_1 , como $(1 - e^{i\xi})^{n+m} |[\widehat{\Theta}(\xi) - \widehat{\Theta}(2\xi)\overline{\widehat{a}(\xi)}\widehat{a}(\xi)]|$ no hay problema en el denominador. Además, el haber supuesto g un monomio permite concluir de manera inmediata.

Además, se verifica que $(1 - e^{i\xi})^m |\widehat{a}(\xi + \pi)|$, luego f_2 también es un polinomio trigonométrico de periodo 2π .

Que $\widehat{b}_1(0) = \widehat{b}_2(0) = 0$ se deduce inmediatamente de (3.21) ya que $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

En resumen, para conseguir un par de framelets duales con dos funciones refinables (de soporte compacto) dadas se procede en el siguiente orden:

1. Construir \widehat{b}_1 y \widehat{b}_2 según (3.19).
2. Construir $\widehat{\Theta}$ mediante (3.23).
3. Construir \widehat{b}_1 y \widehat{b}_2 a través del sistema (3.21).
4. Acudir a las ecuaciones de refinamiento (3.18).

Pasaremos ahora a exponer algunos ejemplos, de nuevo, basados en B-splines.

Ejemplo 3.17. Partimos de funciones de refinamiento $\varphi = \tilde{\varphi} = N_4$. Estas tienen como máscaras de refinamiento $\widehat{a}(\xi) = \widehat{\tilde{a}}(\xi) = 2^{-4}(1 + e^{-i\xi})^4$, que se deducen de (1.9) y de la fórmula relativa a los B-splines (A.2). Se satisface:

$$\begin{aligned} (1 + e^{-i\xi})^4 |\widehat{a}(\xi)|, \\ (1 + e^{-i\xi})^4 |\widehat{\tilde{a}}(\xi)|. \end{aligned}$$

Luego, ambas máscaras tienen reglas de suma de orden $4(n = m = 4)$.

Pasemos a utilizar el algoritmo:

- b_1 y b_2 los construimos según (3.19), para simplificar lo más posible elegiremos $g(\xi) = 1$. Luego:

$$\begin{cases} \widehat{b}_1(\xi) = (1 - e^{-i\xi})^4, \\ \widehat{b}_2(\xi) = e^{-i\xi}(1 - e^{-i\xi})^4. \end{cases}$$

- Lo siguiente será conseguir $\widehat{\Theta}$ con lo deseado. Identificando coeficientes:

$$\begin{cases} \widehat{A}(\xi) \equiv 1, \\ \widehat{B}(\xi) = \overline{\widehat{a}(\xi)}\widehat{a}(\xi). \end{cases}$$

Buscamos que:

$$\widehat{\Theta}(0) = 1 \text{ y } (1 - e^{i\xi})^8 |[\widehat{\Theta}(\xi) - \widehat{\Theta}(2\xi)\overline{\widehat{a}(\xi)}\widehat{a}(\xi)].$$

Utilizando (3.23) se tiene que:

$$\widehat{\Theta}(\xi) = \frac{1}{15120}(-311(e^{-3i\xi} + e^{3i\xi}) + 3168(e^{-2i\xi} + e^{2i\xi}) - 14913(e^{-i\xi} + e^{i\xi}) + 39232).$$

- Únicamente faltaría hallar $\widehat{b}_1(\xi)$ y $\widehat{b}_2(\xi)$. Del sistema (3.21) se obtienen:

$$\begin{aligned} \widehat{b}_1(\xi) = & \frac{(1 - e^{-i\xi})^4}{3870720}(311(e^{-6i\xi} + e^{-6i\xi}) + 2488(e^{5i\xi} + e^{-5i\xi}) \\ & + 16736(e^{4i\xi} + e^{-4i\xi}) + 81640(e^{3i\xi} + e^{-3i\xi}) + 250049(e^{2i\xi} + e^{-2i\xi}) \\ & + 494944(e^{i\xi} + e^{-i\xi}) + 654400). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{b}_2(\xi) = & \frac{(1 - e^{-i\xi})^4}{483840}(311(e^{4i\xi} + e^{-6i\xi}) + 2488(e^{3i\xi} + e^{-5i\xi}) \\ & + 10205(e^{2i\xi} + e^{-4i\xi}) + 29392(e^{i\xi} + e^{-3i\xi}) \\ & + 61868(1 + e^{-2i\xi}) + 86704e^{-i\xi}). \end{aligned}$$

Por tanto, ya hemos encontrado los filtros asociados a $\widetilde{\psi}_\ell$, $\ell = 1, 2$. Utilizamos las ecuaciones de refinamiento (3.18):

$$\psi_1(x) = \varphi(2x) - 4\varphi(2x - 1) + 6\varphi(2x - 2) - 4\varphi(2x - 3) + \varphi(2x - 4),$$

$$\psi_2(x) = \varphi(2x + 1) - 4\varphi(2x) + 6\varphi(2x - 1) - 4\varphi(2x - 2) + \varphi(2x - 3),$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_1(x) = 2 & \left[-\frac{67453\varphi(2x)}{1935360} + \frac{311\varphi(2x-9)}{967680} + \frac{311\varphi(2x-10)}{3870720} \right. \\ & + \frac{233473\varphi(2x-2)}{1935360} - \frac{17887\varphi(2x-3)}{967680} - \frac{67453\varphi(2x-4)}{1935360} \\ & + \frac{311\varphi(2x+6)}{3870720} + \frac{1783\varphi(2x-6)}{483840} + \frac{311\varphi(2x+5)}{967680} \\ & - \frac{19967\varphi(2x-5)}{967680} + \frac{865\varphi(2x+4)}{387072} + \frac{473\varphi(2x+3)}{64512} \\ & + \frac{1783\varphi(2x+2)}{483840} + \frac{473\varphi(2x-7)}{64512} + \frac{865\varphi(2x-8)}{387072} \\ & \left. - \frac{19967\varphi(2x+1)}{967680} - \frac{17887\varphi(2x-1)}{967680} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_2(x) = 2 & \left[-\frac{4111\varphi(2x)}{483840} + \frac{2119\varphi(2x+2)}{483840} - \frac{5687\varphi(2x-5)}{120960} \right. \\ & + \frac{311\varphi(2x+3)}{120960} - \frac{4111\varphi(2x-6)}{483840} + \frac{311\varphi(2x+4)}{483840} \\ & - \frac{21103\varphi(2x-2)}{483840} + \frac{2627\varphi(2x-3)}{15120} - \frac{21103\varphi(2x-4)}{483840} \\ & - \frac{5687\varphi(2x-1)}{120960} + \frac{47\varphi(2x-7)}{10080} + \frac{2119\varphi(2x-8)}{483840} \\ & \left. + \frac{311\varphi(2x-9)}{120960} + \frac{311\varphi(2x-10)}{483840} + \frac{47\varphi(2x+1)}{10080} \right]. \end{aligned}$$

En conclusión, $\{\psi_1, \psi_2\}, \{\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2\}$ son un par de framelets duales. Ambos framelets tienen momentos de orden 4 por construcción. Pues

$$\begin{cases} (1 - e^{-i\xi})^4 |\widehat{b}_\ell(\xi), & \ell = 1, 2, \\ (1 - e^{-i\xi})^4 |\widehat{\widetilde{b}}_\ell(\xi), & \ell = 1, 2. \end{cases}$$

Y donde se aplica la proposición 1.17. Pasaremos a ilustrarlos a continuación:

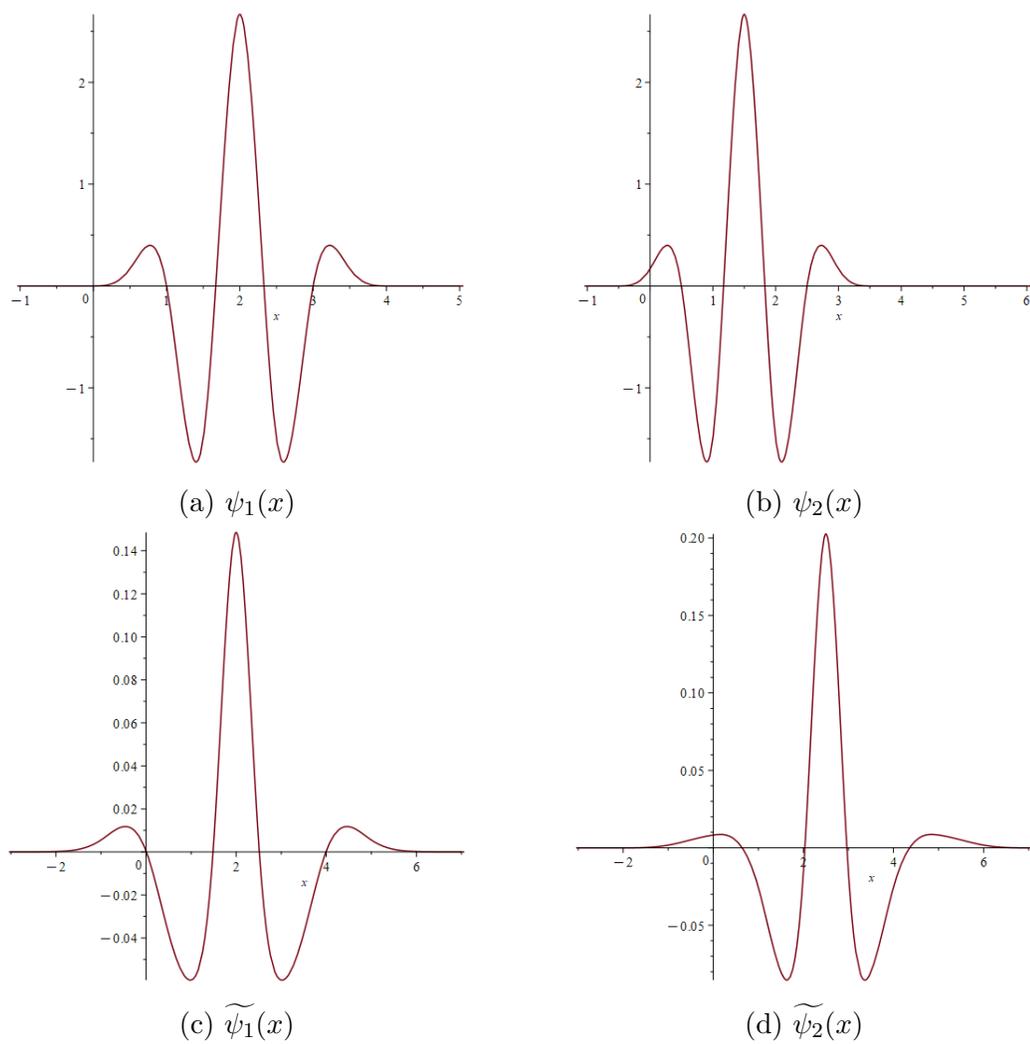


Figura 3.1: Elementos del par de framelets duales del ejemplo 3.17, contruïdos segùn el Principio de Extensi3n Oblicua y N_4 como funciones refinables.

Ejemplo 3.18. Veamos ahora otro ejemplo del algoritmo con funciones refinables distintas. Ahora consideraremos $\varphi = N_4$ y $\tilde{\varphi} = N_2$.

En este caso, gracias a la ecuación de refinamiento (1.9) y a la fórmula relativa a los B-splines (A.2), φ y $\tilde{\varphi}$ tienen máscaras de refinamiento $\hat{a}(\xi) = 2^{-4}(1 + e^{-i\xi})^4$ y $\hat{\tilde{a}}(\xi) = 2^{-2}(1 + e^{-i\xi})^2$, respectivamente. Además satisfacen las reglas de suma de orden 4 y 2 ($n = 2, m = 4$). Aplicamos el algoritmo de nuevo:

- Según (3.19) construimos los filtros b_1 y b_2 . Para simplificar elegiremos $g(\xi) = -1$.

$$\begin{cases} \hat{b}_1(\xi) = -(1 - e^{-i\xi})^2, \\ \hat{b}_2(\xi) = -e^{i\xi}(1 - e^{-i\xi})^2. \end{cases}$$

- Calculamos $\hat{\Theta}$ según el algoritmo expuesto en (3.23):

$$\hat{\Theta}(\xi) = \frac{1}{240}(13(e^{i\xi} + e^{-3i\xi}) - 112(1 + e^{-2i\xi}) + 438e^{-i\xi}).$$

- Por último hallamos $\hat{\tilde{b}}_1$ y $\hat{\tilde{b}}_2$. Del sistema (3.21) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{b}}_1(\xi) = & \frac{(1 - e^{-i\xi})^4}{15360}(13(e^{-4i\xi} + e^{4i\xi}) + 78(e^{-3i\xi} + e^{3i\xi}) \\ & + 356(e^{-2i\xi} + e^{2i\xi}) + 1226(e^{-i\xi} + e^{i\xi}) + 2334), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{b}}_2(\xi) = & \frac{(1 - e^{-i\xi})^4}{7680}(39(e^{2i\xi} + e^{-4i\xi}) + 234(e^{i\xi} + e^{-3i\xi}) \\ & + 613(e^{-2i\xi} + 1) + 948e^{-i\xi}). \end{aligned}$$

Ahora expresamos las máscaras de refinamiento

$$\psi_1(x) = 2(-\varphi(2x) + 2\varphi(2x - 1) - \varphi(2x - 2)),$$

$$\psi_2(x) = 2(2\varphi(2x) - \varphi(2x + 1) - \varphi(2x - 1)),$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_1(x) = 2 & \left[-\frac{733\widetilde{\varphi}(2x)}{15360} + \frac{61\widetilde{\varphi}(2x+2)}{7680} + \frac{109\widetilde{\varphi}(2x-5)}{7680} \right. \\ & + \frac{61\widetilde{\varphi}(2x-6)}{7680} + \frac{13\widetilde{\varphi}(2x-7)}{7680} + \frac{13\widetilde{\varphi}(2x-8)}{15360} \\ & + \frac{13\widetilde{\varphi}(2x+3)}{7680} + \frac{13\widetilde{\varphi}(2x+4)}{15360} + \frac{409\widetilde{\varphi}(2x-2)}{1280} \\ & - \frac{35\widetilde{\varphi}(2x-3)}{256} - \frac{733\widetilde{\varphi}(2x-4)}{15360} - \frac{35\widetilde{\varphi}(2x-1)}{256} \\ & \left. + \frac{109\widetilde{\varphi}(2x)}{7680} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_2(x) = 2 & \left[-\frac{89\widetilde{\varphi}(2x)}{7680} + \frac{13\widetilde{\varphi}(2x+2)}{2560} - \frac{\widetilde{\varphi}(2x-5)}{30} \right. \\ & - \frac{89\widetilde{\varphi}(2x-6)}{7680} + \frac{13\widetilde{\varphi}(2x-7)}{1280} + \frac{13\widetilde{\varphi}(2x-8)}{2560} \\ & - \frac{199\widetilde{\varphi}(2x-2)}{3840} + \frac{313\widetilde{\varphi}(2x-3)}{1920} - \frac{199\widetilde{\varphi}(2x-4)}{3840} \\ & \left. - \frac{\widetilde{\varphi}(2x-1)}{30} + \frac{13\widetilde{\varphi}(2x+1)}{1280} \right]. \end{aligned}$$

En conclusión $\{\psi_1, \psi_2\}, \{\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2\}$ son un par de framelets duales. Estos tienen momentos de anulación de orden 2 y 4 respectivamente, pues se aplica la proposición 1.17 a lo siguiente:

$$\begin{cases} (1 - e^{-i\xi})^2 |\widehat{b}_\ell(\xi)|, & \ell = 1, 2, \\ (1 - e^{-i\xi})^4 |\widehat{b}_\ell(\xi)|, & \ell = 1, 2. \end{cases}$$

Pasaremos a ilustrarlos a continuación:

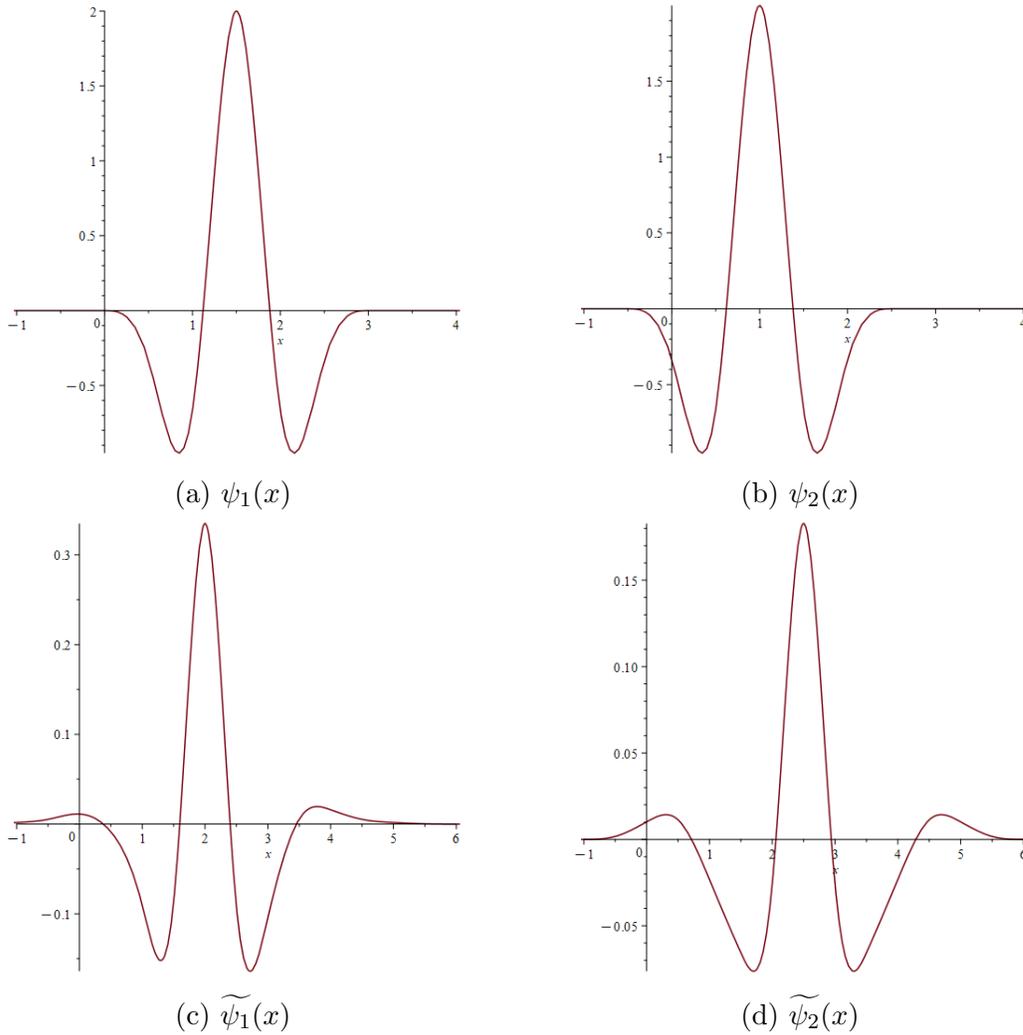


Figura 3.2: Elementos del par de framelets duales del ejemplo 3.18, contruidos según el Principio de Extensión Oblicua y N_4 y N_2 como funciones refinables.

Apéndice A

Apéndice

En este apéndice vamos a recordar algunos conceptos y resultados que se manejan a lo largo del texto principal.

A.1. Algunos resultados sobre análisis real

En esta sección los conjuntos E y F serán conjuntos reales medibles y asumiremos que todas las funciones involucradas serán Lebesgue medibles.

Teorema A.1 (Teorema de la convergencia dominada). *Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe para casi todo $x \in E$. Entonces*

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

Teorema A.2 (Teorema de Fubini-Tonelli). *Sea $f : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible Lebesgue y $m(x, y)$ una medida producto.*

Fubini Si $f \in L^1(E \times F)$ entonces

$$\int_{E \times F} f(x, y) dm(x, y) = \int_E \left(\int_F f(x, y) dy \right) dx = \int_F \left(\int_E f(x, y) dx \right) dy$$

Tonelli Si f es no negativa se tiene la igualdad anterior.

Teorema A.3 (Desigualdad de Hölder). Sean $1 \leq p \leq q \leq \infty$ tal que sean exponentes conjugados entonces para todo $f \in L^p(E)$ y $g \in L^q(E)$:

$$\|fg\|_{L^1(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^q(E)}$$

La siguiente desigualdad es válida para cualquier espacio con producto interno.

Teorema A.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si \mathcal{E} es un espacio con producto interno, $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene que:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}$$

Teorema A.5. Para todo $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $g \in L^1(\mathbb{R})$, $(f * g)(x)$ está bien definido para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ y $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

A.2. Operadores en un espacio de Hilbert

Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 espacios de Hilbert no nulos y consideremos un operador U :

$$U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$$

Recordemos que se define el operador adjunto como:

$$U^* : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1, \quad \text{tal que } \langle x, Uy \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle U^*x, y \rangle_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$$

Consideremos ahora $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.

Decimos que un operador U es unitario si se cumple $UU^* = U^*U = I$. En el caso de que U sea unitario se tiene

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Si $U^* = U$ decimos que el operador autoadjunto y en tal caso

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ux, x \rangle|$$

Decimos que un operador es positivo si:

$$\langle Ux, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

En el caso de que tengamos U un operador positivo y acotado entonces siempre es autoadjunto.

Si U es un operador acotado se tiene la identidad de polarización:

$$\begin{aligned} \langle Ux, y \rangle &= \frac{1}{4} [\langle U(x+y), x+y \rangle - \langle U(x-y), x-y \rangle \\ &+ i \langle U(x+iy), x+iy \rangle - i \langle U(x-iy), x-iy \rangle], \quad \forall x, y \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

A.3. Series de Fourier

En este texto según el capítulo se trabaja en el intervalo $[-\pi, \pi]$ o $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, llamaremos a ambos \mathbb{T} y en este apéndice utilizaremos el primer intervalo. Para $f \in L^1(\mathbb{T})$ se define su serie de Fourier como $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikx}$, $x \in \mathbb{T}$ donde $\widehat{f}(k)$ se define:

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A.4. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ viene definida por:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Proposición A.6 (Propiedades). Sean $c, \xi \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Se tienen:

1. $\widehat{(f+g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$
2. $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$
3. $\widehat{f(\cdot - c)}(\xi) = e^{-2\pi i c \xi} \widehat{f}(\xi)$
4. $\widehat{f(\lambda \cdot)}(\xi) = |\lambda|^{-1} \widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$

Teorema A.7 (Fórmula de Inversión). Si f y \widehat{f} pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$ entonces

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad (\text{A.1})$$

Teorema A.8 (Identidad de Parseval). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Además,*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

Teorema A.9 (Teorema de Plancherel). *La transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ está bien definida y $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ para todo $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Además,*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \text{ y } \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

De manera similar se puede definir para \mathcal{F}^{-1} .

Corolario A.10. *La transformada de Fourier*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

es una biyección con inversa \mathcal{F}^{-1} .

Es común encontrar la transformada de Fourier definida por:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

Los teoremas son idénticos salvo un factor 2π que multiplica.

A.5. B-Splines

Los B-splines se definen de manera recursiva partiendo de

$$N_1(x) = \chi_{[0,1]}(x)$$

y de manera general el B-spline de orden $n + 1$ se define como

$$N_{n+1} = N_n * N_1.$$

Por ejemplo, el B-spline de orden 2. N_2 viene dado por:

$$N_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

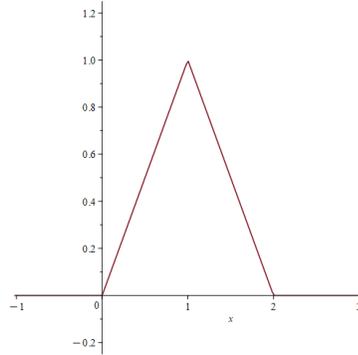


Figura A.1: B-spline lineal $N_2(x)$

Otro que utilizaremos será N_4 que tiene la forma:

$$N_4(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6} & \text{si } x \in [0, 1] \\ -\frac{x^3}{2} + 2x^2 - 2x + \frac{2}{3} & \text{si } x \in [1, 2] \\ \frac{x^3}{2} - 4x^2 + 10x - \frac{22}{3} & \text{si } x \in [2, 3] \\ -\frac{x^3}{6} + 2x^2 - 8x + \frac{32}{3} & \text{si } x \in [3, 4] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

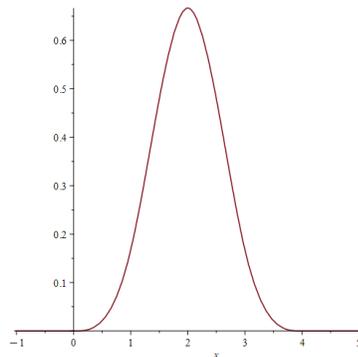


Figura A.2: B-spline cúbico $N_4(x)$

Una propiedad que utilizaremos a lo largo del texto es:

$$\widehat{N}_n(\gamma) = \left(\frac{1 - e^{-2\pi i \gamma}}{2\pi i \gamma} \right)^n \tag{A.2}$$

Bibliografía

- [1] Ole Christensen and Marzieh Hasannasab. Frames and generalized operator orbits. *Sampl. Theory Signal Process. Data Anal.*, 21(2):Paper No. 22, 7, 2023.
- [2] Ingrid Daubechies. *Ten lectures on wavelets*, volume 61 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.
- [3] Ingrid Daubechies, Bin Han, Amos Ron, and Zuowei Shen. Framelets: Mra-based constructions of wavelet frames. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 14(1):1–46, 2003.
- [4] Bin Han. Pairs of frequency-based nonhomogeneous dual wavelet frames in the distribution space. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 29(3):330–353, 2010.
- [5] Bin Han. Framelets and wavelets. *Algorithms, Analysis, and Applications, Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhäuser xxxiii Cham, 2017.
- [6] Stéphane Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Elsevier, 1999.
- [7] Amos Ron and Zuowei Shen. Affine systems in $l_2(\mathbb{R}^d)$: The analysis of the analysis operator. *Journal of Functional Analysis*, 148(2):408–447, 1997.

Índice alfabético

- Análisis multirresolución, 26
- B-splines, 88
- Banco de filtros, 24
- Banco de filtros de framelets duales, 68
- Coefficientes frame, 17
- Descomposición frame, 16
- Ecuaciones de refinamiento, 24
- Filtro, 24
- Frame, 12
- Frame ajustado, 12
- Frame de descomposición, 15
- Frame de reconstrucción, 15
- Frame dual, 15
- Frame dual canónico, 15
- Framelet, 19
- Framelet de descomposición, 20
- Framelet de reconstrucción, 20
- Funciones de refinamiento, 24
- Función refinable, 23
- Momento de anulación, 19
- Máscara de refinamiento, 23
- Operador de reconstrucción, 64
- Operador de subdivisión, 62
- Operador de síntesis, 13
- Operador de transición, 63
- Operador frame, 13
- Operador pre-frame, 13
- Par de framelets duales, 19
- PEO-banco de filtros de framelets duales, 71
- Periodización, 31
- Principio de Extensión Oblicua, 48, 70
- Principio de Extensión Unitaria, 44
- Reconstrucción perfecta, 65
- Reglas de suma, 26
- Wavelet, 18