



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Matemáticas**

**Introducción a la geometría proyectiva axiomática**

**Autora: Marta Martínez Sordo**

**Tutor: Felipe Cano Torres**

**Año 2024**



# Índice general

<b>1. Plano afín y plano proyectivo</b>	<b>9</b>
1.1. Introducción a la geometría sintética . . . . .	9
1.2. Transformaciones entre configuraciones afines y proyectivas . . .	18
1.2.1. La completión de un plano afín . . . . .	18
1.2.2. Operación inversa a la completión . . . . .	23
1.3. El plano proyectivo real . . . . .	27
<b>2. Axioma de Desargues. Objetos y transformaciones proyectivas</b>	<b>33</b>
2.1. Teorema de Desargues . . . . .	33
2.1.1. Existencia de planos proyectivos no desarguesianos . . . .	35
2.1.2. Todo plano proyectivo tridimensional es desarguesiano . .	41
2.2. La propiedad de dualidad en las geometrías proyectivas . . . . .	42
2.3. Objetos proyectivos: Cuaternas armónicas . . . . .	45
2.4. Transformaciones proyectivas: Perspectividades y proyectividades	57
<b>3. Axioma de Pappus y Teorema fundamental</b>	<b>69</b>
3.1. El Axioma de Pappus . . . . .	69
3.1.1. Pappus implica Desargues . . . . .	71
3.1.2. Espacio proyectivo desarguesiano no pappusiano . . . . .	76
3.2. El Teorema Fundamental . . . . .	76
3.2.1. Demostración del Teorema Fundamental . . . . .	76
3.2.2. Pappus y Desargues implican TF . . . . .	88
<b>4. Planos proyectivos sobre anillos de división</b>	<b>93</b>
4.1. Introducción a los anillos de división . . . . .	93
4.1.1. Los cuaterniones . . . . .	94
4.1.2. Los anillos de división finitos son cuerpos . . . . .	95
4.2. Construcción de planos proyectivos sobre anillos de división . . .	96
4.2.1. Coordenadas . . . . .	96
4.2.2. Automorfismos . . . . .	100

4.2.3. Los axiomas de Pappus y Fano . . . . .	105
<b>5. Planos proyectivos finitos</b>	<b>109</b>
5.1. Orden . . . . .	109
5.2. Planos finitos sobre un anillo de división . . . . .	111
5.3. Restricción de orden para planos proyectivos . . . . .	111
5.4. Demostraciones de existencia y no existencia a través de la compu- tación . . . . .	113
5.4.1. La no-existencia de planos proyectivos de orden 10 . . . . .	113
5.4.2. La existencia de planos proyectivos de orden 9 . . . . .	113
<b>6. El plano de coordenadas homogéneas</b>	<b>115</b>
6.1. Sextetos armónicos de Seidenberg . . . . .	115
6.1.1. Equivalencias entre sextetos armónicos . . . . .	116
6.2. Sextetos armónicos en el caso desarguesiano . . . . .	118
6.2.1. Existencia y unicidad del sexto armónico . . . . .	118
6.3. Operaciones en el anillo de división . . . . .	121
6.3.1. Operación <i>suma</i> . . . . .	121
6.3.2. Operación <i>producto</i> . . . . .	126
6.4. Introducción de coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}$ . . . . .	131
6.4.1. Coordenadas en el espacio proyectivo . . . . .	131
6.4.2. Coordenadas en el espacio afín . . . . .	132
<b>Bibliografía</b>	<b>135</b>

## Agradecimientos

El primer gracias es para los buenos profesores que me he encontrado en las distintas etapas de mi aprendizaje, porque la enseñanza con vocación es una ayuda muy grande para quien quiere aprender. Rlucio, María José, no podría contar las veces que he pensado en vosotros en estos años.

El segundo, sin duda, es a Felipe, por estar siempre dispuesto a invertir tu tiempo en enseñarme lo que sabes, por valorarme a mi, y a mi esfuerzo; y, sobre todo, por recordarme incontables veces que lo importante es disfrutar mientras estudio.

El más importante a papi y mami, por enseñarme a enfrentarme a la vida y por seguir insistiendo en la importancia de la templanza y la resiliencia; y a ti chiquitina, porque aunque tenga que pedírtelos, tus abrazos me dan una fuerza que ni te imaginas. Gracias por ser siempre mi lugar seguro, espero que estéis orgullosos de mí.

Gracias también a mi familia, porque estando juntos está claro que ser pocos no significa apoyarse ni divertirse menos.

Gracias Néstor, porque ser un equipo a tantos kilómetros no es fácil. Por hacerme reír y pensar; por tener la calma que me falta y enseñarme las cosas con perspectiva tantas veces; por haber sabido estar a mi lado en la montaña rusa que han sido estos años. No habría nadie mejor con quién crecer.

Gracias a *Casi Pitás*, a mis amigas *de la resi*, a *los de mates*, a *los doblegradistas*, a *los de diseño* y Mónica. Gracias por hacerme sentir querida, segura y acompañada, porque no ha sido un camino fácil pero habéis sabido quererme y apoyarme en todo lo que ha ido viniendo. Gracias por sacarme de la rutina y hacerme disfrutar tanto el camino.

Por último, quiero agradecer las múltiples veces que en estos cuatro años hemos escuchado *los dibujitos no demuestran nada*, porque me ha motivado a comprobar que sí, que con un gran esfuerzo de detalle y redacción, un apoyo visual puede ser de gran ayuda para centrar la mente en un campo tan abstracto.

Gracias a todos por recordarme tantísimas veces lo que valgo.

## Resumen

Si pensamos en geometría proyectiva, en base a los conocimientos adquiridos en el grado, nos resulta casi imposible imaginarlo sin contar con un espacio vectorial o una referencia proyectiva. El objetivo de este trabajo reside en estudiar esta materia desde un punto de vista meramente geométrico, para ello, construiremos espacios afines y proyectivos, a través de argumentos sintéticos, demostrando así que, si bien los razonamientos analíticos dominan, en general, el mundo del pensamiento matemático, un proceso axiomático llevado con atención puede desembocar en construcciones paralelas y, en ocasiones más esclarecedoras.

A lo largo del texto se estudiarán resultados como los de Desargues, Pappus o el Teorema fundamental, así como otros que los relacionan entre sí. También, se introducirán los conceptos de proyectividad, perspectividad, cuaterna armónica o sexteto armónico y elementos de importancia como el principio de dualidad o el concepto de orden de un plano proyectivo, entre otros.

La peculiaridad de este documento se encuentra en la forma en que se presentan los resultados dado que, siempre que sea posible, se abordarán de forma gráfica incluyendo múltiples figuras que servirán de apoyo visual a la demostración, facilitado el seguimiento de la materia pese a su elevado nivel de abstracción.

## Introducción

Los espacios proyectivos, así como los espacios afines, son objetos que tenemos naturalmente vinculados con el álgebra y, en particular, con los espacios vectoriales. Sin embargo, *¿podrían los argumentos que sostienen la geometría proyectiva presentarse con independencia de los espacios vectoriales?*

Con el fin de satisfacer la cuestión anterior, siguiendo el libro de Hartshorne [6], abordamos el primer capítulo presentando las bases de la materia que nos ocupa. Partimos de la propia definición de geometría apoyándonos en el texto de Beutelspacher y Rosenbaum [2, págs 1-2], con el fin de realizar todas las construcciones estructurando el pensamiento desde la base más primitiva. A continuación, exponemos las relaciones entre las dos estructuras principales que se tratan, los planos proyectivo y afín, a través de la operación compleción [11, págs 26-28], concretizándolo sobre un ejemplo sugerido por Moorehouse en [10, págs.40-41]. Finalmente se incluye un ejemplo fundamental en este campo, *el plano proyectivo real*, que nos permitirá precisar múltiples conceptos adquiridos a lo largo del capítulo y establecer una relación directa con la visión analítica de la geometría proyectiva.

Una vez examinados los conceptos fundamentales, dedicamos el segundo capítulo a estudiar el *Teorema de Desargues*, uno de los resultados principales en el contexto proyectivo.

El tercer capítulo, se centra en el *Teorema de Pappus* y el *Teorema fundamental de la geometría proyectiva*, así como resultados que evidencian la relación entre ellos y con el *Teorema de Desargues*.

No obstante, aunque hasta el momento se haya abordado todo desde una visión sintética, sabemos que estas construcciones pueden realizarse sobre un cuerpo. Así, el cuarto capítulo muestra un tipo concreto de planos proyectivos, los construidos sobre anillos de división. Se introduce el ejemplo del cuerpo de *los cuaterniones* apoyándonos en el escrito de Fraleigh [5, págs. 224-226], como prototipo de anillo de división no conmutativo. A lo largo del quinto capítulo, estudiamos la propiedad del orden, remitiéndonos al texto [1]. Veremos el *Teorema de Bruck-Ryser* [10, pág. 85], además de ejemplos de planos de orden 9 [8, págs. 187-195] y orden 10 [9, págs. 1117-1122].

Para concluir, el sexto capítulo se centra en la introducción de coordenadas en el plano proyectivo desarguesiano, utilizando como referencia principal el libro de Seidenberg [12, págs. 68-80]. Aunque no se presentarán los resultados con las demostraciones completas, se introducen los sextetos armónicos que, posteriormente, se emplearán en la construcción del citado plano.

*Nota.* Todas las figuras que se presentan en este trabajo son de elaboración propia.



# Capítulo 1

## Plano afín y plano proyectivo

El objeto de este capítulo reside en presentar las bases de la geometría proyectiva sintética. Partiendo de los axiomas pertinentes construiremos, a través de razonamientos meramente lógicos, objetos geométricos tales como los espacios afines y proyectivos, así como algunas propiedades básicas que, de forma natural, suceden a las definiciones.

### 1.1. Introducción a la geometría sintética

**Definición 1.1.** Definimos una *geometría* como un par  $G = (\Omega, I)$ , donde  $\Omega$  es un conjunto e  $I$  una relación, simétrica y reflexiva, sobre dicho conjunto. A esta relación  $I$  la llamamos *incidencia*.

La definición anterior expone el caso donde  $\Omega$  es un conjunto que contiene los elementos geométricos que estemos considerando e  $I$  describe la relación de contención entre ellos. De esta forma se verifica que rectas y puntos inciden en planos, puntos inciden en rectas, etc.

**Definición 1.2.** Una *configuración plana* de una geometría  $G = (\Omega, I)$  es un par  $\mathcal{C} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$  donde  $\mathcal{P}, \mathcal{R}$  son subconjuntos de  $\Omega$  que satisfacen el siguiente axioma:

C1: Dados dos elementos distintos  $p, q$  de  $\mathcal{P}$  inciden, a lo sumo, en un solo elemento de  $\mathcal{R}$ .

Dada una configuración  $\mathcal{C} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ , a los elementos de  $\mathcal{P}$  los llamaremos *puntos*, y a los de elementos de  $\mathcal{R}$  los llamaremos *rectas*.

**Observación 1.** Notemos que la relación de incidencia  $I$  de la geometría a la que

pertenece el  $\Omega$  del que son subconjuntos los elementos de  $\mathcal{C}$ , actúa determinando las relaciones entre los elementos de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$ , de forma que podrán entenderse las rectas como subconjuntos de  $\mathcal{P}$ .

En la misma línea hemos de mencionar otro abuso de notación que se repetirá a lo largo del texto con la intención de manejar un lenguaje más geométrico, este será sustituir el verbo incidir por “pertener a” o “pasar por”. Con esto, diremos que un punto pertenece a una recta cuando el punto incide en el subconjunto de  $\Omega$  con el que se relaciona a dicha recta; así mismo, escribiremos una recta pasa por un punto cuando el subconjunto de  $\Omega$  con el que se relaciona la recta contenga al punto mencionado.

**Definición 1.3.** Definimos como *plano* a cada configuración plana dada como está descrito arriba.

**Ejemplo 1.4.**

- Cualquier conjunto de puntos, con o sin rectas, es una configuración.
- En algunos casos una geometría plana se puede dar a partir de un conjunto universal  $E$ , de modo que los objetos de  $G = (\Omega, I)$  sean subconjuntos no vacíos de  $E$ , y la relación de incidencia coincida con el hecho de que la intersección de los dos elementos considerados sea no vacía.

**Definición 1.5.** Llamamos *matriz de incidencia* a una matriz con tantas filas como elementos tenga  $\mathcal{P}$ , y tantas columnas como elementos tenga  $\mathcal{R}$ . Sus entradas serán o bien  $m_{i,j} = 1$ , si el punto  $P_i \in \mathcal{P}$  incide en la recta  $r_j \in \mathcal{R}$ , o bien  $m_{i,j} = 0$  en el caso contrario.

**Definición 1.6.** Se define la restricción de una geometría  $G = (\Omega, I)$  a una configuración  $\mathcal{C} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$  dada como  $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{R}, I_{\mathcal{P} \cup \mathcal{R}})$ .

**Observación 2.** En general, cuando trabajemos en un plano afín o proyectivo entenderemos que trabajamos en la geometría restringida a la configuración pertinente aunque no se mencione.

**Definición 1.7.** Dados  $n$  puntos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  diremos que,

- son *colineales* si existe una recta que contiene a todos ellos. De igual forma diremos que son *no colineales* si no están alineados.
- son *coplanarios* si existe un plano que los contiene.

**Definición 1.8.** Un *plano afín* es una configuración  $\mathbb{A} = (\mathcal{P}_{\mathbb{A}}, \mathcal{R}_{\mathbb{A}})$  de una geometría  $G = (\Omega, I)$  que satisface los siguientes axiomas:

A1: Dos puntos distintos inciden en una única recta;

A2: Dados una recta y un punto exterior ella, existe una única recta paralela a la primera, tal que dicho punto incide en ella;

A3: Existen tres puntos no colineales.

Nos referiremos a las rectas de un plano afín como *rectas afines* y a sus puntos como *puntos afines*.

Una primera consecuencia que podemos extraer de la definición anterior es que dos rectas son *paralelas* si son iguales o si no tienen ningún punto en común, es decir, dos rectas no paralelas inciden en un único punto. Por consiguiente, todo par de rectas afines no paralelas tiene, a lo sumo, un punto en común.

De igual forma, haciendo una primera incursión en el pensamiento axiomático, podemos plantearnos algunas cuestiones geométricas básicas sobre los planos afines. Exponemos como ejemplo las siguientes:

*¿Toda recta tiene, al menos, dos puntos?*

Veamos que la respuesta es afirmativa. Para comenzar, consideremos una recta  $\ell$  y tres puntos no alineados distintos y exteriores a  $\ell$ , a los que denotaremos  $P, Q$  y  $R$ . Notemos que podemos tomar dicha configuración dado que A3 garantiza la existencia de los puntos y, por la definición de plano afín, existen rectas contenidas en él.

Distingamos tres casos:

- Supongamos que  $P, Q$  y  $R$  son exteriores a  $\ell$  y definamos  $r_1 := QR$ ,  $r_2 := PQ$  y  $r_3 := PR$ . En primer lugar comprobemos que no pueden ser las tres paralelas a  $\ell$ .

Supongamos sin pérdida de la generalidad que  $r_1 \parallel \ell$ , entonces como  $P, Q$  y  $R$  son no colineales se tiene que  $r_1 \not\parallel r_2$  y  $r_1 \not\parallel r_3$  luego, por transitividad,  $r_2, r_3 \not\parallel \ell$ . Con esto concluimos que o bien una única recta es paralela a  $\ell$ , o bien no lo es ninguna.

Ahora, denotando  $P_1 = r_2 \cap \ell$  y  $P_2 = r_3 \cap \ell$ , comprobamos que si existe una recta paralela a  $\ell$  esta tiene, al menos, dos puntos. Notemos además que, en el caso en que las tres rectas sean no paralelas a  $\ell$ , basta tomar los mismos  $P_1$  y  $P_2$ . Finalmente, podemos afirmar que en ambos casos  $P_1$  y  $P_2$  son puntos distintos pues, de lo contrario, las rectas  $r_1$  y  $r_3$  tendrían dos puntos en común ( $P$  y  $P_1$ ) luego habrían de ser la misma, implicando así que  $P, Q$  y  $R$  serían puntos alineados.

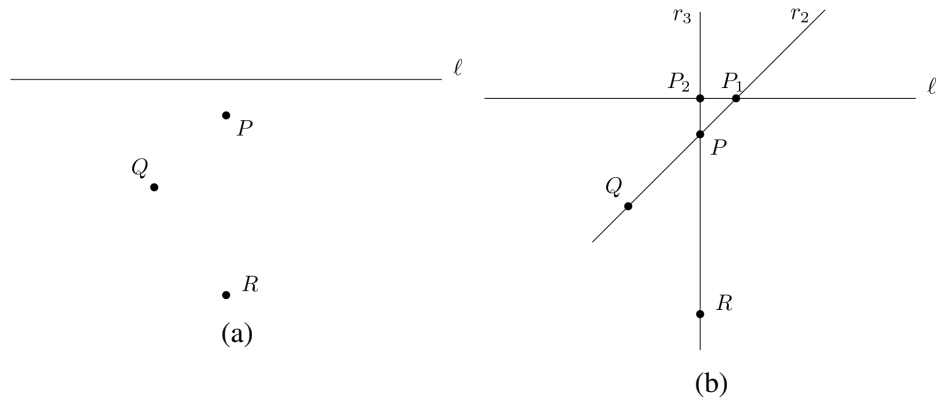


Figura 1.1: ¿Toda recta tiene, al menos, dos puntos?  
Caso 1: tres puntos exteriores

- Supongamos ahora que uno de los puntos, por ejemplo  $P$ , incide en  $\ell$ .  
 Trazamos la recta que pasa por los dos puntos exteriores a  $\ell$ , esta es, la recta  $r_1$ , y observamos que pueden darse dos situaciones: o bien la recta  $r_1$  incide con la primera en un nuevo punto  $P_1$ , o bien son paralelas. En este último caso tomamos la recta  $r_3$ , y por ser  $Q$  exterior a ella existe una única paralela  $t$  que pasa por dicho punto. Entonces  $t$  y  $\ell$  inciden en un punto  $P_1$ . En ambas situaciones  $P_1$  es distinto de  $P$  ya que, de lo contrario,  $P$  pertenecería a la recta  $r_1$  en la primera situación, o  $Q$  pertenecería a la recta  $r_3$  en la segunda y, en consecuencia,  $P, Q$  y  $R$  serían puntos alineados.

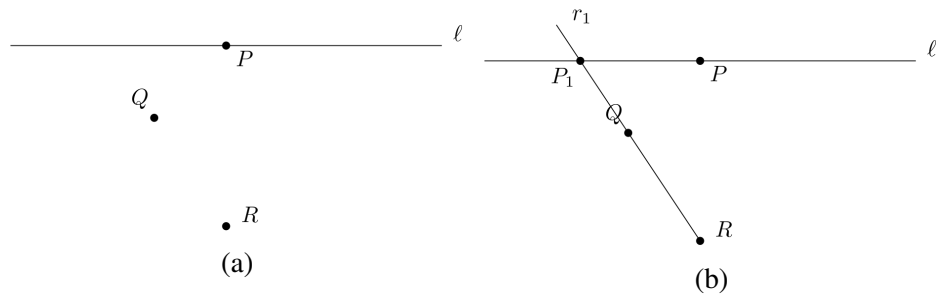
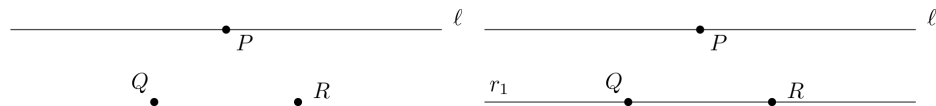


Figura 1.2: Caso 2: dos puntos exteriores sin paralelismo



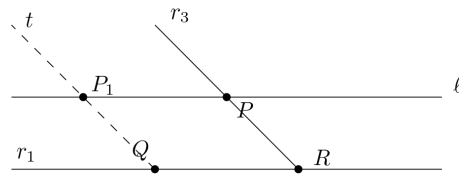


Figura 1.4: Caso3: dos puntos exteriores con paralelismo

- Por último, supongamos que dos, de los tres puntos considerados, inciden en la recta  $\ell$ , entonces el resultado es trivial.

Por consiguiente, podemos afirmar que toda recta en un plano afín tiene, al menos, dos puntos.

**Observación 3.** Notemos en relación al segundo caso que si primeramente trazamos las rectas  $r_2$  ó  $r_3$  el punto resultante de incidir con la recta  $\ell$  sería de nuevo  $P$ , por lo que no habría sido útil. Además, cuando se da el paralelismo entre las rectas  $\ell$  y  $r_1$  podríamos haber razonado de forma análoga comenzando por la recta  $r_2$  y habiendo trazado la paralela por  $R$  debido a la simetría de  $Q$  y  $R$  en el problema.

*¿En todo plano afín finito hay tantas rectas como puntos?*

Veamos cuál es la menor configuración que verifica los axiomas de plano afín y determinemos la respuesta a la pregunta anterior.

Consideremos una recta  $\ell$ , y un punto exterior a ella,  $P$ . Por A2, existe una única recta  $s$  en la que incide  $P$  y es paralela a  $\ell$ .

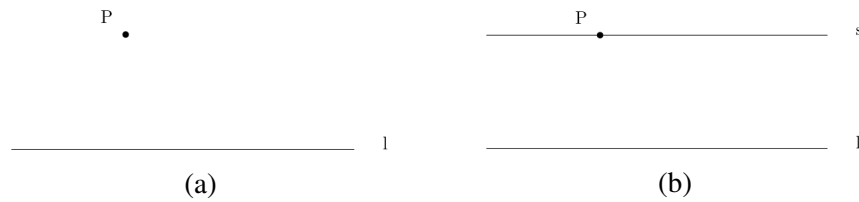


Figura 1.5: ¿En todo plano afín hay tantas rectas como puntos?

Paso 1

Tomemos, a continuación, dos puntos  $Q$  y  $R$  de  $\ell$  que, acabamos de probar, existen. Tracemos la recta en la que inciden  $P$  y  $Q$ , que sabemos única, y de la que  $R$  es punto exterior. De nuevo, por A2, podemos trazar la paralela a  $PQ$  que pasa por  $R$  a la que denotamos  $t$ .

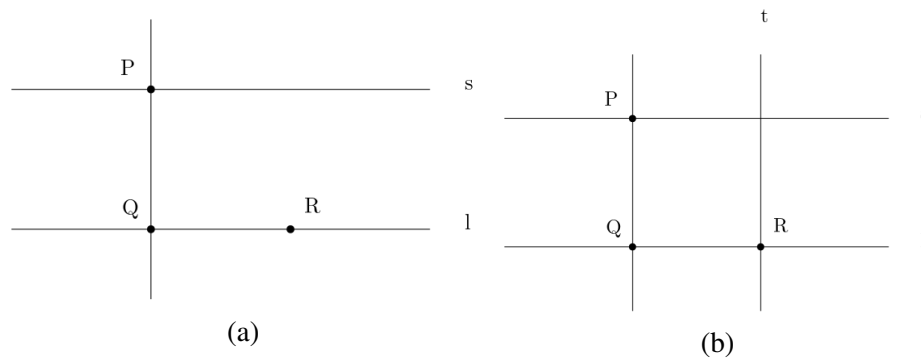


Figura 1.6: Paso 2

Ahora, las rectas  $s$  y  $t$  inciden en un único punto, al que denotaremos  $T$ .

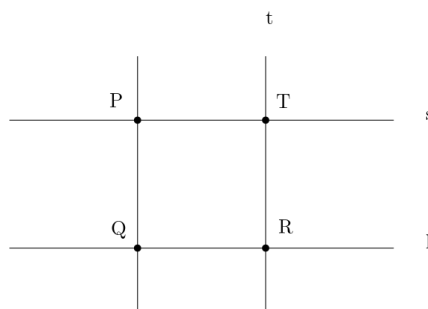


Figura 1.7: Paso 3

Este punto  $T$  es distinto de  $P$ , puesto que si fueran el mismo la recta  $t$  sería coincidente con  $PQ$  para cumplir la condición de paralelismo, pero esto es absurdo pues implicaría que  $R$  debería pertenecer a  $PQ$  y sabemos que es exterior a dicha recta. Análogamente,  $T$  no puede ser igual a  $Q$ , dado que este último es exterior tanto a  $s$  como a  $t$ .

Para concluir, notemos que las rectas  $PQ$  y  $QR$  pueden incidir, o no. Inciden, por ejemplo, en el plano proyectivo como veremos más adelante. Sin embargo, dado que la existencia de este punto no se deduce de los axiomas impuestos, no lo tendremos en cuenta por ahora.

Por consiguiente, la configuración anterior sugiere que la respuesta a la pregunta planteada es negativa, pues consta de 4 puntos ( $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $T$ ) y 6 rectas ( $l$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $PQ$ ,  $PR$ ,  $QT$ ).

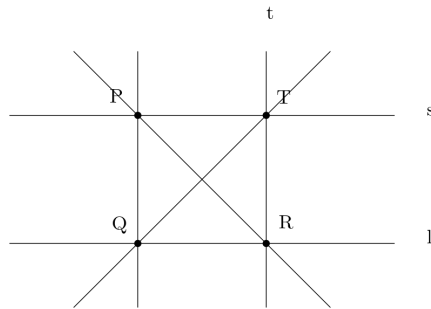


Figura 1.8: Paso 4

**Definición 1.9.** Definimos como *plano proyectivo* a cualquier configuración  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}_{\mathbb{P}}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}})$  de una geometría  $G = (\Omega, I)$  que cumpla los siguientes axiomas:

- P1: Dos puntos distintos inciden en una única recta;
- P2: Dos rectas distintas se cortan en, al menos, un punto;
- P3: Existen tres puntos no colineales;
- P4: Todas las rectas contienen, al menos, tres puntos.

Nos referiremos a las rectas de un plano proyectivo como *rectas proyectivas* y a sus puntos como *puntos proyectivos*.

Deteniéndonos sobre el tercer axioma observamos que su asunción lleva implícita la exclusión del paralelismo, lo que nos lleva a definir una recta en este espacio a la que denotaremos *recta del infinito*. No obstante reciba un nombre especial, cabe destacar que no existe distinción entre esta recta y el resto de elementos de  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$ .

**Definición 1.10.** La *recta del infinito*, representada por  $\ell_{\infty}$ , es un elemento geométrico característico de los planos proyectivos, y debe ser entendida como la recta cuyos puntos representan el conjunto de direcciones de un espacio afín. La recta del infinito es, por tanto, la formada por los puntos de incidencia de los conjuntos de rectas interpretadas como paralelas en un plano afín.

Nos referiremos a estos puntos como *puntos ideales* y, dada una recta  $s$ , representaremos por  $[s]$  su punto ideal, es decir, el punto de incidencia del conjunto de rectas con la dirección de  $s$  en un plano afín con  $\ell_{\infty}$ .

**Proposición 1.11.** *El cuarto axioma es equivalente a suponer que existen cuatro puntos tres a tres no alineados.*

*Demostración.* Supongamos que se cumplen P1-P4 y veamos que existen cuatro puntos no alineados.

Sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  tres puntos no colineales que existen por P3. Definimos  $r_1 := PQ$  y, por P4, existe un punto  $T_1 \in r_1$  distinto de  $P$  y de  $Q$ . A continuación, definimos  $r_2 := T_1R$  que es única por P1 y, de nuevo por P4, podemos considerar un punto  $T_2$ .

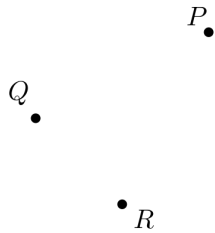


Figura 1.9: Proposición 1.11  
Configuración inicial

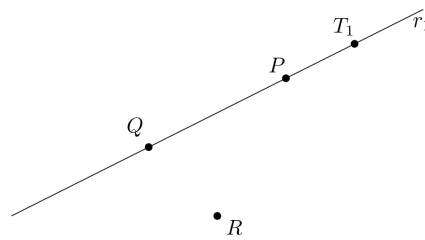


Figura 1.10: Paso 1

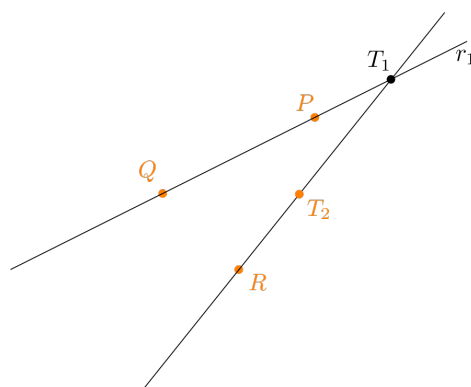


Figura 1.11: Paso 2

Notemos que  $T_2$  es distinto de  $Q$ , puesto que de lo contrario en  $r_2$  incidirían  $Q$  y  $T_1$  lo que es absurdo, pues la única recta que pasa por estos puntos es  $r_1$  y ha de



ser distinta a  $r_2$  ya que, de lo contrario,  $P$ ,  $Q$  y  $R$  serían colineales. Por la simetría del problema  $T_2$  es distinto de  $P$ .

Veamos el recíproco, para ello supongamos que existen cuatro puntos tres a tres no colineales y veamos que se verifica P4.

Sean  $P, Q, R, T$  cuatro puntos no alineados tres a tres, entonces por P1 existen las rectas  $r_1 = PQ$ ;  $r_2 = QR$ ;  $r_3 = RT$ ;  $r_4 = PT$ ;  $r_5 = QT$ ;  $r_6 = PR$ . Ahora, por P2, observamos que tenemos tres nuevos puntos  $T_1 = r_1 \cap r_3$ ;  $T_2 = r_5 \cap r_6$ ;  $T_3 = r_2 \cap r_4$ , de donde se sigue P4.  $\square$

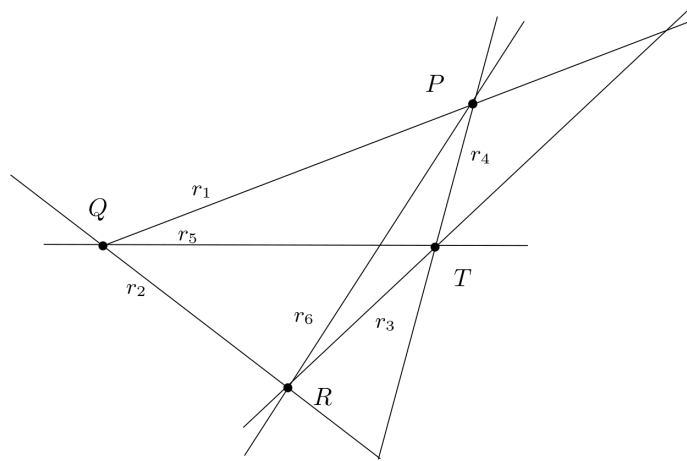


Figura 1.12: Recíproco.  
Paso 1

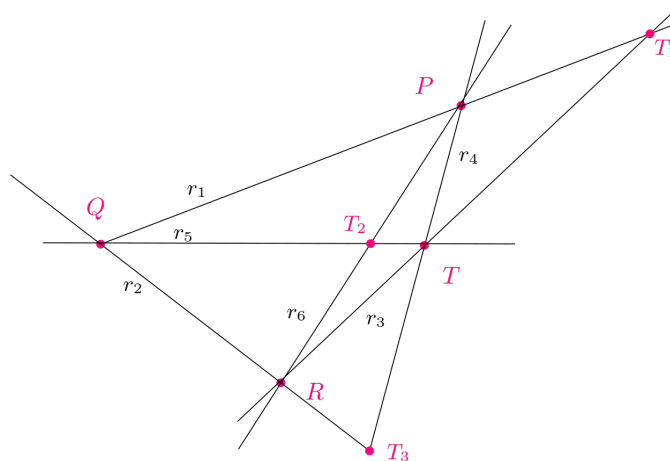


Figura 1.13: Paso 2

## 1.2. Transformaciones entre configuraciones afines y proyectivas

Tras presentar las definiciones de plano afín y plano proyectivo es natural preguntarse si existe alguna forma de completar el primero para que verifique la axiomática del segundo, o de modificar la configuración proyectiva de forma que se adapte a una configuración afín. Con este propósito presentamos las operaciones de *compleción* y su construcción inversa, que nos ayudarán a dar respuesta a estas cuestiones.

### 1.2.1. La compleción de un plano afín

**Definición 1.12.** Dado un plano afín  $\mathbb{A} = (\mathcal{P}_{\mathbb{A}}, \mathcal{R}_{\mathbb{A}})$ , seleccionamos un objeto  $l_{\infty} \notin \mathcal{R}_{\mathbb{A}}$  y definimos  $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_{\mathbb{A}} \cup \{l_{\infty}\}$ . Por otro lado, consideramos el conjunto de direcciones en un plano afín (al que denotamos  $D_{\mathbb{A}}$ ), y definimos

$$\tilde{\mathcal{P}} = (\{1\} \times \mathcal{P}_{\mathbb{A}}) \cup (\{2\} \times D_{\mathbb{A}}).$$

Entonces, definimos *la compleción* de  $\mathbb{A}$  como la configuración  $C_{\mathbb{A}} = (\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{R}})$ .

De acuerdo con la definición, los elementos de  $\tilde{\mathcal{R}}$  podrán ser o bien, rectas afines junto con su punto ideal; o bien, la recta del infinito. Para probar que esta configuración es, en efecto, un plano proyectivo hemos de comprobar que verifica los axiomas  $P1 - P4$ .

**Proposición 1.13.** *La compleción  $C_{\mathbb{A}}$  de un plano afín  $\mathbb{A}$  es un plano proyectivo.*

*Demostración.* P1: Consideremos dos puntos distintos,  $P$  y  $Q$  con  $P, Q \in \tilde{\mathcal{P}}$  y veamos si pertenecen a una única recta. Distingamos tres casos:

- i) En primer lugar, supongamos que  $P, Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ , entonces se sigue de A1 que pertenecen a una única recta afín, y es claro que esta no es la recta del infinito, pues de lo contrario  $P$  y  $Q$  serían puntos ideales por lo que no pertenecerían a  $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ .
- ii) En segundo lugar, supongamos que  $P$  es un punto ideal, entonces existe una recta  $m \in \mathcal{R}_{\mathbb{A}}$  tal que  $P = [m]$ , y sea  $Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}}$  pero  $Q \notin m$ . Disponemos entonces de una recta,  $m$ , y un punto exterior a ella,  $Q$ , luego por A2 existe una recta  $n$  paralela a  $m$  que pasa por  $Q$ , de forma que  $[n] = [m] = P$ , por lo que  $P$  y  $Q$  inciden en una única recta,  $n$ .

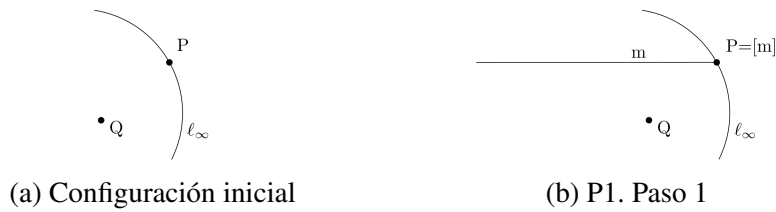


Figura 1.14: Compleción de  $\mathbb{A}$ .  
P1.

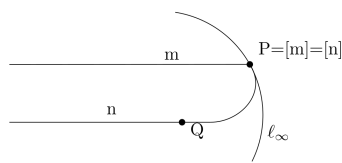


Figura 1.15: P1. Paso 2

iii) Finalmente, el caso en que ambos puntos son ideales es trivial, pues por definición ambos inciden únicamente en la recta del infinito.

P2: Sean  $\ell$  y  $m$  dos rectas distintas de  $\tilde{\mathcal{R}}$ . De nuevo distingamos casos:

- i) Por un lado, si ambas rectas son afines y no paralelas entonces hemos visto que se cortan en un único punto afín. En cambio, si son paralelas, por definición de recta del infinito,  $[\ell] = [m]$  y  $\ell \cap m = [\ell]$ .
- ii) Por otro lado, si una de las rectas, por ejemplo  $\ell$ , es la recta de infinito, entonces  $[m] \in \ell$ , luego  $\ell \cap m = [m]$ .

P3: La existencia de tres puntos no alineados se sigue de A3. Sin embargo, hemos de ver que tres puntos  $P, Q$  y  $R$  no colineales en  $\mathbb{A}$  tampoco lo son en  $C_{\mathbb{A}}$ , pero esto es claro ya que  $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_{\mathbb{A}} \cup \ell_{\infty}$ , y  $P, Q, R \notin \ell_{\infty}$ , luego permanecen no alineados.

P4: Anteriormente probamos que toda recta afín tiene, al menos, dos puntos luego, si ahora añadimos a cada recta su punto ideal, concluimos que toda recta proyectiva contiene, al menos, tres puntos.

□

Para ejemplificar el enunciado anterior vamos a estudiar la completión del plano afín de cuatro puntos.

**Ejemplo 1.14. Completión plano afín de cuatro puntos.**

Consideramos el plano afín  $\mathbb{A} = (\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{PQ, QR, s, t\})$  (ver figura 1.7),

y lo completamos con la recta del infinito obteniendo así tres nuevos puntos. Dos de estos,  $P_5$  y  $P_6$ , se encuentran sobre  $\ell_\infty$  por ser los puntos de incidencia de ambos pares de rectas afínmente paralelas ( $PQ \parallel t$ ;  $QR \parallel s$ ). El último punto,  $P_7$  incide en la recta del infinito debido a que las rectas  $P_1P_4$  y  $P_2P_3$  se cruzan.

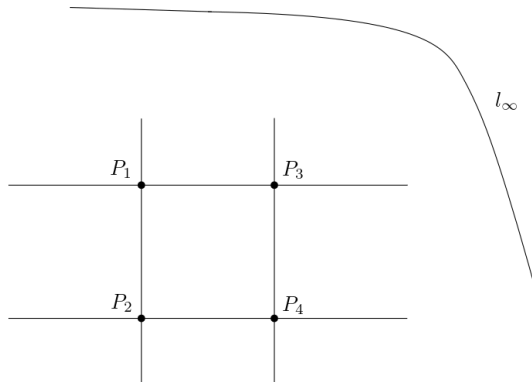


Figura 1.16: Ejemplo: Compleción de  $\mathbb{A}$ .  
Paso 1

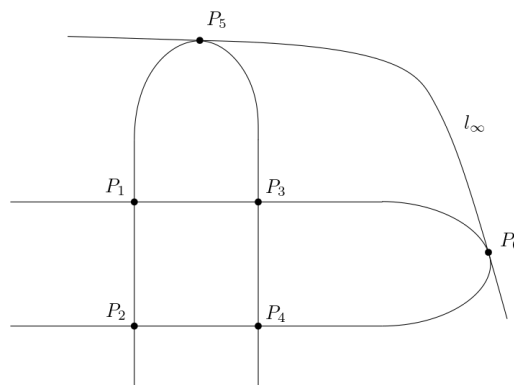


Figura 1.17: Paso 2

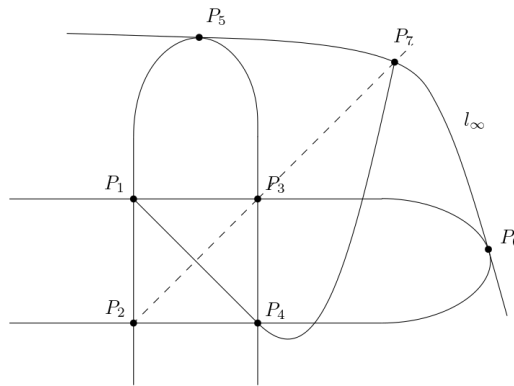


Figura 1.18: Paso 3

*Nota.* Anteriormente probamos que la configuración de la que hemos partido en este ejemplo da lugar al menor plano afín posible, en consecuencia, el plano proyectivo resultante de su completación constituye, de nuevo, la menor configuración que verifica la axiomática de plano proyectivo.

*¿Toda recta afín tiene el mismo número de puntos?*

Al principio del capítulo comprobamos que en toda recta afín inciden, al menos, dos puntos, sin embargo, la cuestión actual es más fuerte dado que su respuesta afirmativa implica la existencia de una biyección entre todo par de rectas afines. Siguiendo un razonamiento axiomático podríamos plantearlo como sigue.

Supongamos que disponemos de dos rectas distintas  $\ell$  y  $m$  y un punto exterior a ambas al que llamaremos  $O$ . Sabemos que toda recta afín tiene al menos dos puntos, luego podemos señalar  $P, Q \in \ell$ . A continuación, definiremos  $P_m$  como el punto de intersección entre  $m$  y la recta  $OP$ . De esta forma, podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \ell &\longrightarrow m \\ P &\longmapsto \Phi(P) = m \cap OP \end{aligned}$$

que es trivialmente biyectiva.

Pese a la aparente coherencia de la demostración anterior notemos que no es válida debido a la falsedad del argumento inicial. Observemos que hemos supuesto que disponemos de dos rectas distintas ( $\ell$  y  $m$ ) y un punto exterior a ambas ( $O$ ), entonces para completar la prueba habríamos de demostrar que dicho punto exterior existe.

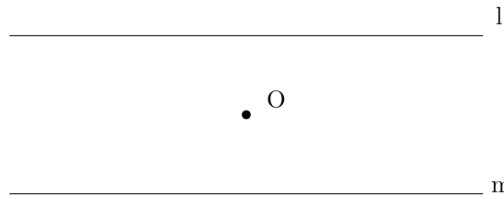


Figura 1.19: ¿Toda recta afín tiene el mismo número de puntos?  
Configuración inicial

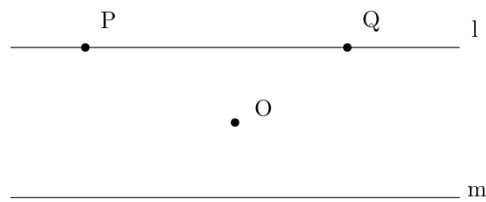


Figura 1.20: Paso 1

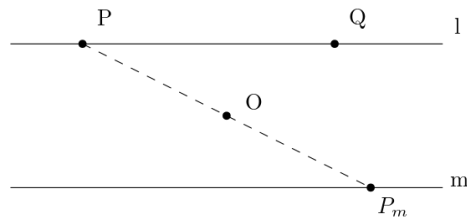


Figura 1.21: Paso 2

No obstante la existencia de dos rectas paralelas en una configuración afín es trivial gracias al segundo axioma, la posibilidad de incluir un punto exterior a ambas en la configuración no es correcto en todos los casos. Nos sirve como contraejemplo la configuración resultante al construir el plano afín completado, donde podemos observar que el punto  $P_7$  es ideal pero podría ser afín en el caso en que las rectas afines sobre las que inciden se cortaran en el espacio afín (ver figura 1.18).

*¿Toda recta proyectiva tiene el mismo número de puntos?*

En este caso, tomando  $\ell$  y  $m$  como rectas proyectivas, si es posible establecer la biyección propuesta en el caso afín debido a que en esta configuración podemos garantizar la existencia de un punto exterior a ambas rectas.

**Lema 1.15.** *Dada una recta en  $\mathbb{P}$  existen tres puntos no colineales que no inciden en dicha recta.*

*Demostración.* Por P3 existen tres puntos  $P, Q, R \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}$  no alineados y, por P1,  $PQ, QR, PR \in \mathcal{R}_{\mathbb{P}}$ .

En particular, disponemos de una recta,  $PQ$ , y un punto exterior a ella,  $R$ . Ahora, trazamos las rectas  $PR$  y  $QR$ , y sabemos que en cada recta inciden, al menos, tres puntos, por lo que existen  $T_1$  y  $T_2$  incidentes respectivamente en las rectas anteriores. Así,  $R, T_1$  y  $T_2$  son tres puntos distintos exteriores a la recta.  $\square$

Por consiguiente, siempre disponemos de una recta y tres puntos no alineados con lo que, si denotamos por  $\ell$  la recta dada y trazamos otra por dos de los tres puntos exteriores a la que denotamos  $m$ , resta únicamente un punto exterior al que podemos denominar  $O$ .

### 1.2.2. Operación inversa a la compleción

A través de la construcción desarrollada en la sección anterior es claro que cada plano afín tiene una compleción única. No obstante parece razonable suponer que la construcción inversa cumple la misma propiedad de unicidad, veremos que esto no es así.

Estudiemos qué ocurre cuando suprimimos un elemento cualquiera del conjunto de rectas de una configuración proyectiva para, posteriormente, ver cómo son las configuraciones resultantes si realizamos el mismo proceso eligiendo una recta distinta.

Sea  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}_{\mathbb{P}}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}})$ , elegimos un elemento cualquiera  $\ell_0 \in \mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  y definimos los conjuntos

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{P}_{\mathbb{P}} \setminus \{P \in \ell_0 : P \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}\}; \quad \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{R}_{\mathbb{P}} \setminus \{\ell_0\}$$

que conforman una nueva configuración  $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbb{P}}, \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{P}})$

**Proposición 1.16.** *La configuración  $\tilde{\mathcal{C}}$  es un plano afín.*

*Demostración.* A1: Tomamos  $P, Q \in \tilde{\mathcal{P}}_{\mathbb{P}}$  entonces  $P, Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}$  no incidentes en  $\ell_0$  y, por P1, existe una única recta que pasa por ambos.

A2: Consideramos  $s \in \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{P}}$  y  $P \in \tilde{\mathcal{P}}_{\mathbb{P}}$  no incidente en  $s$ , entonces  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  contiene una recta  $t$  tal que  $P$  incide en  $t$  y, además  $s \cap t \in \ell_0$ . Ahora, por definición sabemos que los puntos de  $\ell_0$  son los de intersección entre clases de rectas paralelas luego, pese a eliminar  $\ell_0$ , se mantiene  $t \in \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{P}}$ .

A3: En virtud del 1.15 podemos garantizar que existen tres puntos no alineados en  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

$\square$

¿Se obtiene el mismo plano afín a partir de la supresión de dos rectas distintas de un plano proyectivo?

Consideremos un plano proyectivo  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}_{\mathbb{P}}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}})$ , seleccionamos dos rectas  $\ell_0, \ell_1 \in \mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  y definimos

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{P}_{\mathbb{P}} \setminus \{P \in \ell_0 : P \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}\}; \quad \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{R}_{\mathbb{P}} \setminus \ell_0$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{P}_{\mathbb{P}} \setminus \{P \in \ell_1 : P \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}\}; \quad \hat{\mathcal{R}}_{\mathbb{P}} = \mathcal{R}_{\mathbb{P}} \setminus \ell_1$$

con lo que obtenemos respectivamente las configuraciones

$$\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbb{P}}, \tilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{P}});$$

$$\hat{\mathcal{C}} = (\hat{\mathcal{P}}_{\mathbb{P}}, \hat{\mathcal{R}}_{\mathbb{P}})$$

Hemos visto que estas son configuraciones afines, por lo que las denotaremos  $\mathbb{A}_0 = \tilde{\mathcal{C}}$  y  $\mathbb{A}_1 = \hat{\mathcal{C}}$ .

**Definición 1.17.** Dadas dos configuraciones  $\mathcal{C} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ ,  $\hat{\mathcal{C}} = (\hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{R}})$  llamamos *isomorfismo de configuraciones* a la aplicación

$$\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}$$

tal que  $\Phi = (\varphi, \psi)$ , con

$$\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \hat{\mathcal{P}}$$

$$\psi : \mathcal{R} \longrightarrow \hat{\mathcal{R}}$$

de forma que las relaciones de incidencia se mantengan invariantes.

*Nota.* Dos configuraciones relacionadas mediante un isomorfismo se llaman *isomorfas* y se representa por  $\mathcal{C} \cong \hat{\mathcal{C}}$ .

Estas configuraciones están biunívocamente relacionadas y sus estructuras se consideran equivalentes, es por esto que comúnmente se comenten abusos de notación estableciendo la unicidad de determinadas configuraciones cuando, rigurosamente, se trata de unicidad salvo isomorfismo.

Veremos que  $\mathbb{A}_0$  y  $\mathbb{A}_1$  no son, en general, isomorfos. Sin embargo hay casos en los que esta relación si se cumple, ejemplo de ello es el isomorfismo entre planos afines resultantes al eliminar distintas rectas del plano proyectivo es el plano de Fano. Es fácil de comprobar mediante inspección de las matrices de incidencia resultantes.



Consideremos la configuración de Fano, a la que representaremos por  $\Delta = (\{A, B, C, D, E, F, G\}, \{a, b, c, d, e, f, g\})$ , entonces las relaciones de incidencia que la caracterizan vienen dadas por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} . & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{a} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{b} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{c} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{d} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{e} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{f} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que es la matriz de incidencia de  $\Delta$ .

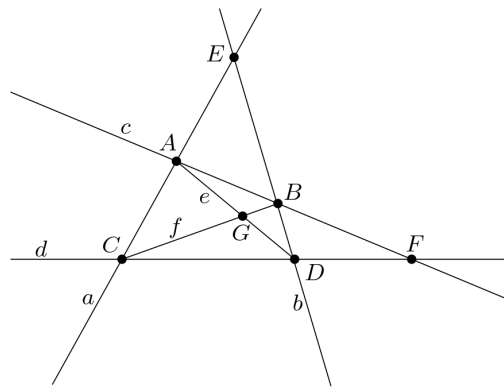


Figura 1.22: Ejemplo: Plano de Fano.  
 $\Delta$

Supongamos que eliminamos la recta  $d$  y, por consiguiente,  $C, D$  y  $F$ , entonces con el objeto de hallar la configuración resultante de una manera sencilla basta tomar la matriz de incidencia anterior y suprimir la fila correspondiente a  $d$ , así como las columnas determinadas por los puntos  $C, D$  y  $F$ .

$$\begin{pmatrix} . & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} & \mathbf{G} \\ \mathbf{a} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{b} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{c} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{e} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{f} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{g} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se corresponde con la configuración  $\tilde{\Delta} = (\{A, B, E, G\}, \{a, b, c, e, f, g\})$

Por otro lado repetimos el proceso suprimiendo la recta  $a$  y, con ella, los puntos  $A$ ,  $C$  y  $E$ . Como resultado obtenemos la configuración  $\hat{\Delta} = (\{B, D, F, G\}, \{b, c, d, e, f, g\})$ , cuya matriz de incidencia resulta

$$\begin{pmatrix} . & \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{b} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{c} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{d} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{e} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{f} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{g} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

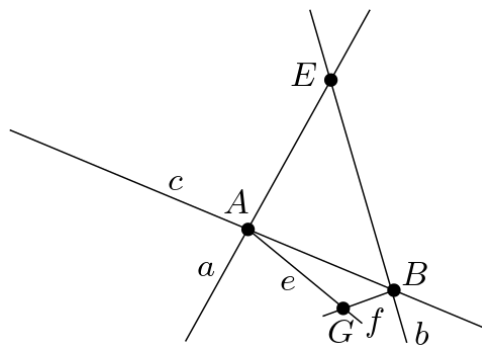


Figura 1.23:  $\tilde{\Delta}$

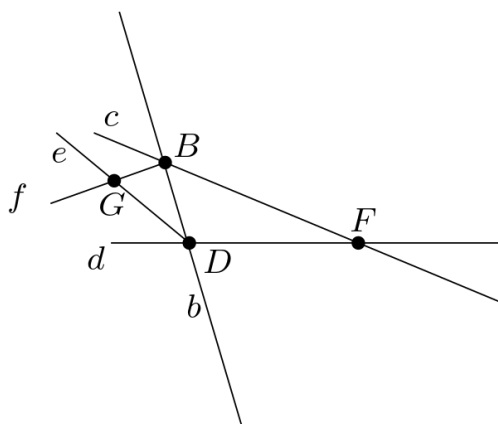


Figura 1.24:  $\hat{\Delta}$

Entonces podemos definir un isomorfismo

$$\rho : \tilde{\Delta} \longrightarrow \hat{\Delta}$$

de forma que  $\rho(A) = B$ ,  $\rho(B) = D$ ,  $\rho(E) = F$ ,  $\rho(G) = G$ .

Como indicábamos arriba no es lo habitual poder establecer isomorfismos entre los distintos planos afines obtenidos a partir de un mismo plano proyectivo, más adelante en este trabajo se proporcionará un caso particular que nos permitirá analizar la cuestión.

### 1.3. El plano proyectivo real

Con el propósito de dar un sentido más concreto a lo estudiado a lo largo del capítulo, finalizamos el mismo con el estudio del plano proyectivo real que, veremos, se obtiene mediante la complección del plano de la geometría euclídea. Este plano tiene múltiples aplicaciones en la geometría, debido a que su construcción coincide con la del espacio  $\mathbb{R}^3$  de rectas que inciden en un punto destacado denominado *origen*.

**Definición 1.18.** Entendemos por *geometría euclídea*, al conjunto de configuraciones  $\mathbb{E} = (\mathcal{P}_{\mathbb{E}}, \mathcal{R}_{\mathbb{E}})$  que verifican los postulados siguientes:

- E1: Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une;
- E2: Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido;
- E3: Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio;
- E4: Todos los ángulos rectos son congruentes;
- E5: (*Postulado de las paralelas*). Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

En concreto, llamamos *plano euclídeo* a las configuraciones de la forma anterior que cumplan E1, E2 y E5.

*Nota.* El quinto postulado puede reescribirse de forma más sencilla como sigue: *por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.*

De la definición se sigue como corolario que el plano Euclídeo es un plano afín, con lo que podemos completarlo con la recta del infinito, dando lugar a un plano proyectivo.

Para trabajar con el plano euclídeo de manera analítica necesitamos introducir un sistema de referencia, para ello presentamos las *coordenadas cartesianas*. Así, todo punto  $P$  del plano euclídeo será expresado mediante una dupla  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  que representa la distancia a un punto distinguido en el espacio, al que denominamos *origen de referencia* u *origen de coordenadas*, y representaremos como  $O$ .

**Definición 1.19.** Dado un punto en un espacio cualquiera, se define el *haz de rectas* con centro en ese punto, como el conjunto de rectas en las que incide el mismo. Los elementos de un haz de rectas vienen caracterizados por su pendiente, que puede ser un número real o infinito en el caso de las rectas horizontales. Representamos dicha pendiente por  $m$ .

Acorde a la definición anterior, las clases de puntos ideales correspondientes a las rectas pertenecientes a la compleción del plano euclídeo, vienen determinados por la pendiente de la recta que pasa por  $O$  y un punto afín  $(x, y)$  que incida en esta.

**Definición 1.20.** Sea  $\mathbb{R}^3$  el plano euclídeo tridimensional, tomemos  $O$ , un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^3$ , y definamos  $L$  como el conjunto de rectas que pasan por  $O$ . Así, un punto de  $L$  es una recta en la que incide  $O$  y una recta de  $L$  es el conjunto de rectas que pasan por  $O$  e inciden en un mismo plano. Expresado de otra forma,  $L$  es el conjunto de rectas vectoriales de  $\mathbb{R}^3$  en las que incide  $O$ .

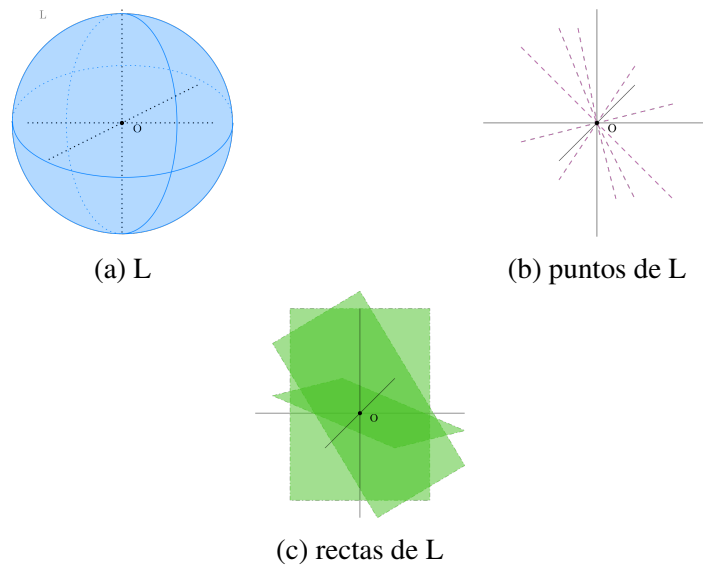


Figura 1.25:  $L$ : Plano proyectivo en  $\mathbb{R}^3$

**Proposición 1.21.**  $L$  es un plano proyectivo.

*Demostración.* Veamos que  $L$  verifica P1-P4.

P1: Consideremos dos puntos distintos de  $L$ ,  $A_1$  y  $A_2$ . Para ver que por ellos pasa una única recta razonamos como sigue: Supongamos que existen dos rectas en  $L$ ,  $\ell_1$  y  $\ell_2$  tales que  $A_1$  y  $A_2$  inciden en ambas, pero como estamos en un plano afín, en virtud de A1 concluimos que  $\ell_1$  y  $\ell_2$  son la misma recta, llegando así a un absurdo.

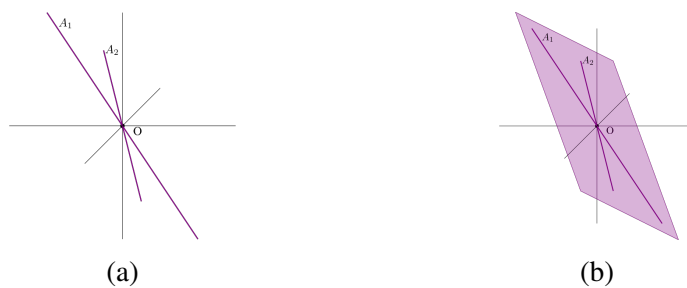


Figura 1.26: Proposición 1.21.

P1

P2: Sean  $\ell_1, \ell_2 \in L$  dos rectas distintas que, por definición de  $L$  no pueden ser paralelas puesto que  $O$  incide en ambas. Por tanto, como dos rectas afines no paralelas se cortan en un único punto, afirmamos que  $\ell_1 \cap \ell_2 = P \in L$ .



Figura 1.27: Proposición 1.21.  
P2

P3: Se sigue de A3.

P4: Sea  $\Delta$  un plano vectorial contenido en  $\mathbb{R}^3$  y  $\{e_1, e_2\}$  una base vectorial de  $\Delta$ . Entonces es claro que existen al menos tres rectas vectoriales  $\ell_1 = \langle e_1 \rangle$ ;  $\ell_2 = \langle e_2 \rangle$ ;  $\ell_3 = \langle e_1 + e_2 \rangle$ .

□

Presentamos a continuación la definición analítica de plano proyectivo, a la que nos referiremos como  $S$ , de nuevo, introduciremos este concepto a través de la incorporación de coordenadas homogéneas.

**Definición 1.22.** Un punto de  $S$  es una recta,  $\ell$ , que pasa por  $O$ . A su vez, un punto  $P \in \ell \in S$  será representado por una tupla  $(x_1, x_2, x_3) \in \ell$  donde  $x_1, x_2, x_3$  no pueden ser 0 simultáneamente.

Los números reales  $x_1, x_2, x_3$  se llaman *coordenadas homogéneas* y se cumple que cualquier otro punto de  $\ell$  se representa por  $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  no nulo. En síntesis,

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1, x_2, x_3 \neq 0; (x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3) \text{ si } x'_i = \lambda x_i \text{ con } i = 1, 2, 3\}$$

**Definición 1.23.** Diremos que dos planos proyectivos son isomorfos, si existe una biyección entre ellos que preserva la colinealidad, es decir, envía puntos colineales en puntos colineales.

**Proposición 1.24.** El plano proyectivo definido con coordenadas homogéneas, es isomorfo al plano proyectivo obtenido a completar el plano euclídeo, y se denomina plano proyectivo real.

*Demostración.* Consideremos  $S$  y  $E$  como los definidos anteriormente, donde el plano euclídeo se entiende dado con coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . Denotemos

por  $C_E$  a su completión. Busquemos, entonces, establecer un isomorfismo entre  $S$  y  $C_E$ .

Definimos  $\Phi : S \longrightarrow C_E$  y sea  $P = (x_1, x_2, x_3) \in S$  entonces,

i) Si  $x_3 \neq 0$  definimos

$$\Phi(P) = \left( \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right).$$

Notemos que está bien definida pues, si  $P' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  es otro punto de la misma recta, la imagen no cambia ya que

$$\Phi(P') = \left( \frac{\lambda x_1}{\lambda x_3}, \frac{\lambda x_2}{\lambda x_3} \right) = \left( \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right) = \Phi(P).$$

Además, es sobreyectiva, pues todo punto  $(x, y) \in C_E$  es imagen por  $\Phi$  de  $(x, y, 1) \in S$ .

ii) Si  $x_3 = 0$ , entonces definimos  $\Phi(P)$  como el punto ideal de  $C_E$  con pendiente  $m = \frac{x_1}{x_2}$ . Está bien definida ya que  $x_1$  y  $x_2$  no pueden ser simultáneamente nulas. Y, de nuevo, tomando  $P' = (x'_1, x'_2, 0)$ , el valor de la pendiente resultante coincide con la de  $P$ . También en este caso,  $\Phi$  es sobreyectiva, pues si  $m \in \mathbb{R}$  basta tomar  $P = (1, m, 0)$ , mientras que si  $m = \infty$  será imagen por  $\Phi$  del punto con coordenadas homogéneas  $(0, 1, 0)$ .

Por tanto,  $\Phi$  es una biyección y, por consiguiente, isomorfismo. Para dar la prueba por concluida basta ver que la colinealidad se mantiene por  $\Phi$ .

Sabemos que en  $\mathbb{R}^3$  la ecuación de una recta que pasa por  $O$  viene dada por

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ no todas nulas}$$

luego esta es también la forma en que describimos una recta en  $S$ . Consideramos entonces  $\ell \in S$  la forma anterior, supongamos primero que  $\alpha_1, \alpha_2$  no son simultáneamente nulas, entonces para los puntos con tercera coordenada 0 definimos  $x_1 = \lambda \alpha_2, x_2 = -\lambda \alpha_1$  así su imagen por  $\Phi$  será el punto ideal correspondiente a la recta con pendiente  $m = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2}$ , punto que pertenece a una recta de  $C_E$ .

Por último tenemos el caso en que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  lo que equivale a decir que la recta  $\ell$  tiene por ecuación  $x_3 = 0$ , de manera que cualquier punto de  $S$  con tercera coordenada nula tiene como imagen por  $\Phi$  un punto ideal de  $C_E$ , dando lugar en conjunto a una recta,  $\ell_\infty$ .

□





## Capítulo 2

# Axioma de Desargues. Objetos y transformaciones proyectivas

En el capítulo anterior vimos que a partir de cuatro axiomas podemos construir un plano proyectivo pero ¿podemos añadir nuevos axiomas sin “estropear” la estructura? ¿Hay un límite en el número de axiomas que podemos añadir? Tratando de dar respuesta a estas preguntas se desarrolla el presente capítulo. En su primera sección añadiremos el *Axioma de Desargues*, y estudiaremos qué efecto tiene sobre el plano proyectivo. A continuación, con el propósito de trabajar sobre el plano proyectivo con mayor facilidad ahondaremos en algunas estructuras proyectivas, como son las perspectivas, las proyectividades y las cuaternas armónicas.

### 2.1. Teorema de Desargues

El *Teorema de Desargues* es uno de los resultados fundamentales de la geometría proyectiva. Si bien es cierto que no es correcto denotarlo teorema (ya que no es posible probarlo únicamente a partir de los axiomas P1-P4), es históricamente conocido de esta forma. Veremos que este enunciado se verifica en el plano proyectivo y, de forma más general, en cualquier plano proyectivo sumergido en  $\mathbb{R}^3$ , lo que nos permitirá posteriormente tomarlo como un nuevo axioma dando lugar a configuraciones que denominaremos *planos desarguesianos*, cuya definición resulta de exigir un poco más a la definición de plano proyectivo.

**Teorema 2.1. Axioma de Desargues:** *Dadas tres rectas ( $a$ ,  $b$  y  $c$ ) y dos puntos incidentes en cada una de ellas ( $A$  y  $A'$ ;  $B$  y  $B'$ ;  $C$  y  $C'$  resp.), los puntos  $P = AB \cap A'B'$ ,  $Q = BC \cap B'C'$  y  $R = AC \cap A'C'$  estarán alineados si, y sólo si, las rectas iniciales son concurrentes.*

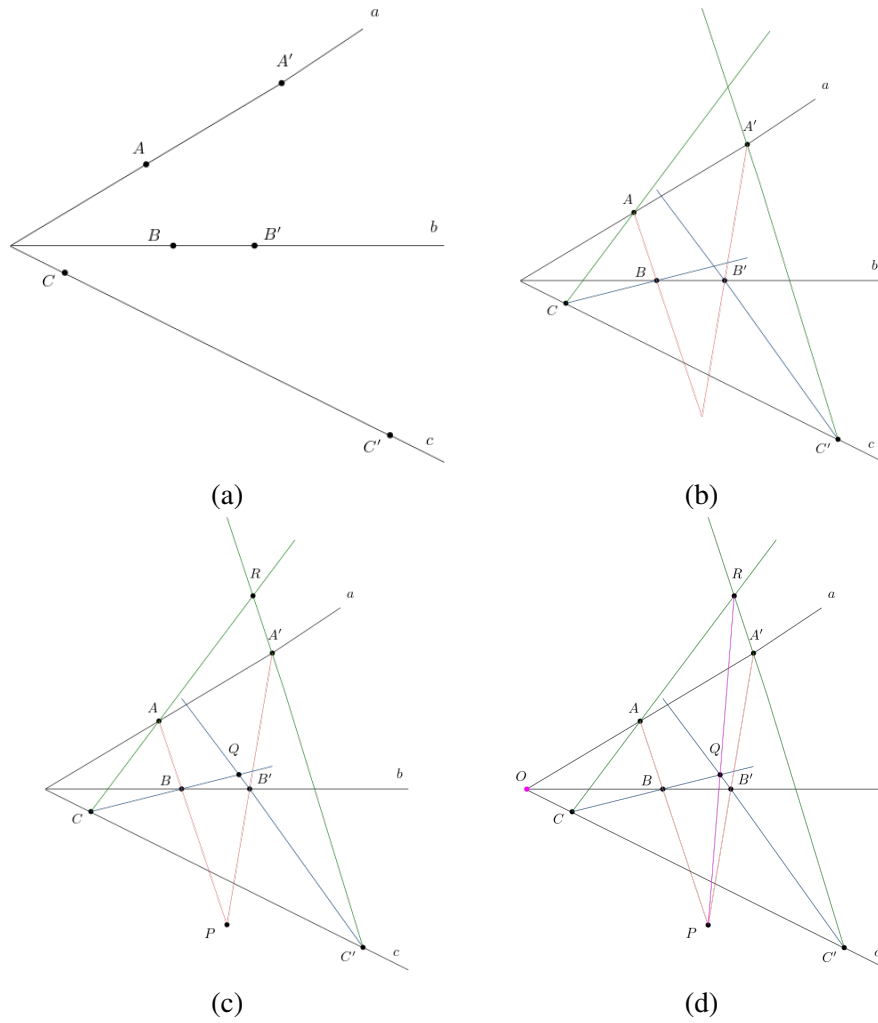


Figura 2.1: Teorema de Desargues

Es pertinente en este punto presentar la definición de espacio proyectivo tridimensional, con intención de señalar que podremos aumentar la dimensión de los espacios proyectivos tanto como queramos, teniendo en cuenta que habremos de definir los hiperelementos necesarios en cada caso.

**Definición 2.2.** Un *espacio proyectivo tridimensional* es un conjunto dotado de unos elementos que llamaremos puntos, subconjuntos de puntos a los que llamamos rectas y subconjuntos de rectas que referiremos como planos, que cumple los siguientes axiomas:

- S1: Dos puntos distintos inciden en una única recta;
- S2: Tres puntos no colineales inciden en un único plano;
- S3: Una recta y un plano inciden en, al menos, un punto;
- S4: Dos planos tienen, al menos, una recta en común;
- S5: En toda recta inciden, al menos, tres puntos.

*Nota.* En el capítulo anterior vimos cómo completar el plano Euclídeo con el fin de obtener el plano proyectivo real (1.3), ahora, a través de un proceso análogo partiendo del plano Euclídeo tridimensional (con coordenadas homogéneas  $(x, y, z)$ ), se obtiene un nuevo plano proyectivo, *el plano real tridimensional*.

### 2.1.1. Existencia de planos proyectivos no desarguesianos

Antes de establecer el teorema de Desargues como axioma hemos de comprobar que ciertamente resulta independiente de P1-P4, para ello probaremos que existen configuraciones que se ajustan a P1-P4 pero no al citado teorema, así como otras que cumplen los cinco enunciados.

**Definición 2.3.** Diremos que un espacio es *desarguesiano* si verifica los axiomas P1-P4 y, para toda configuración de 10 puntos y 10 rectas, se cumple el enunciado del teorema de Desargues.

#### Espacio proyectivo no desarguesiano

Sea  $\pi_0$  una configuración que puede estar formada por sólo puntos (afines o ideales) o por puntos y rectas, es decir, si representamos  $\pi_0 = (\mathcal{P}_{\pi_0}, \mathcal{R}_{\pi_0})$  puede darse el caso  $\mathcal{R}_{\pi_0} = \emptyset$ .

Sea  $\pi_1$  una nueva configuración tal que los puntos de  $\pi_1$  son los de  $\pi_0$ , mientras que sus rectas son las resultantes de unir cada par de elementos de  $\mathcal{P}_{\pi_0}$ , además

de las ya existentes en  $\mathcal{R}_{\pi_0}$ . Es decir,

$$\pi_1 = (\mathcal{P}_{\pi_1}, \mathcal{R}_{\pi_1}) = (\mathcal{P}_{\pi_0}, \mathcal{R}_{\pi_0} \cup \{PQ; P, Q \in \mathcal{P}_{\pi_0}\})$$

Construimos  $\pi_2$  a partir de  $\pi_1$ . Así, los puntos de  $\pi_2$  son los de  $\mathcal{P}_{\pi_1}$  más los puntos de incidencia entre las rectas no paralelas en  $\mathcal{R}_{\pi_1}$ , y sus rectas coinciden con las de  $\pi_1$  ampliadas con los nuevos puntos incluidos en  $\mathcal{P}_{\pi_2}$ . Luego,

$$\pi_2 = (\mathcal{P}_{\pi_2}, \mathcal{R}_{\pi_2}) = (\mathcal{P}_{\pi_0} \cup \{r \cap s; r, s \in \mathcal{R}_{\pi_1}\}, \mathcal{R}_{\pi_1})$$

Notemos que  $\pi_1$  verifica,

1. Todo par de puntos distintos incide en una recta;

mientras que  $\pi_2$  cumple,

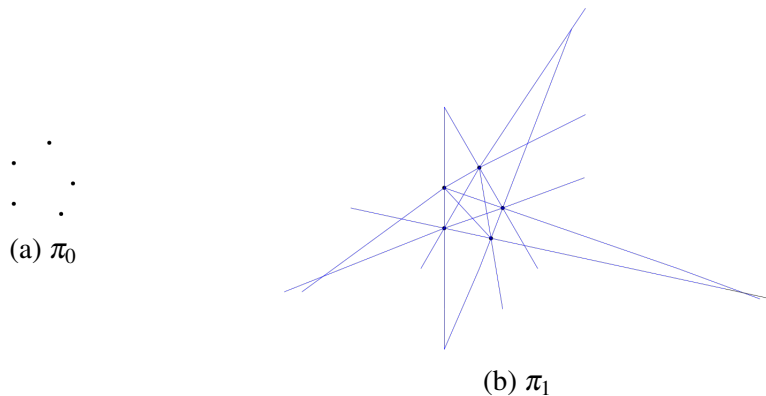
2. Todo par de rectas distintas incide en un punto.

Sin embargo,  $\pi_1$  no cumple **2**, ni  $\pi_2$  responde a **1**.

Razonando por recurrencia, construimos una sucesión de configuraciones tales que  $\pi_n$  verificará **1** si  $n$  es impar, o **2** en el caso de  $n$  par.

Sea  $\Pi = \cup_{n=0}^{\infty} \pi_n$ , y definamos una recta  $L$  como un subconjunto  $L \subseteq \Pi$  de forma que para cualquier  $n$  se cumpla  $L \cap \pi_n$  es una recta de  $\pi_n$ .

**Ejemplo 2.4.** si tomamos como configuración de partida  $\pi_0 = (\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}, \emptyset)$ , los primeros elementos de la sucesión de configuraciones generadas son los siguientes



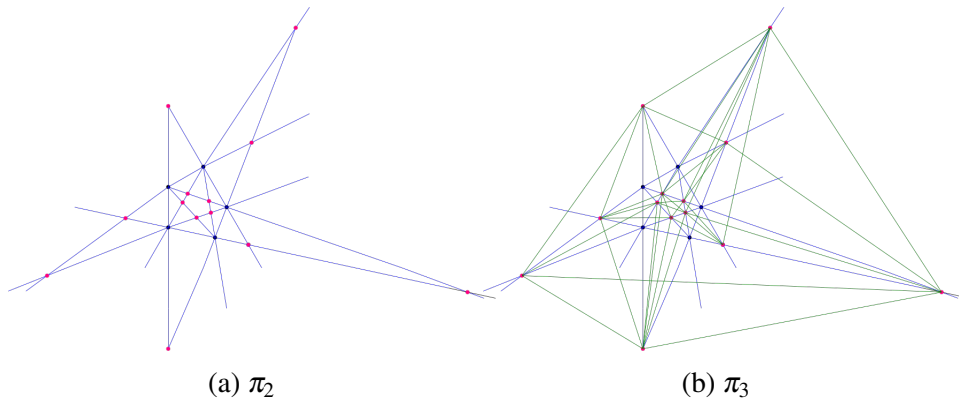


Figura 2.3: Ejemplo: Plano proyectivo no desarguesiano

**Proposición 2.5.** Si  $\pi_0$  contiene, al menos, cuatro puntos no alineados tres a tres, entonces  $\Pi$  es un plano proyectivo.

*Demostración.* Hemos definido  $\Pi$  como unión de todos los  $\pi_n$ , luego, en particular,  $\Pi$  verifica ambas propiedades, **1** y **2**, por tanto, es trivial que P1 y P2 se satisfacen en esta configuración. Además, por hipótesis del enunciado ha de verificarse P3, restando únicamente comprobar P4.

Por construcción,  $\Pi$  es el conjunto de los puntos tales que, partiendo de  $\pi_0$ , o bien se encuentran sobre rectas resultantes de unir dos puntos distintos; o bien son puntos de incidencia entre dos rectas distintas del conjunto. Así es claro que toda recta tiene, al menos, tres puntos (utilizando una vez más que por dos puntos afines pasa una única recta y que dos rectas se cortan en un único punto), luego si las rectas inciden en el espacio afín es claro que tendrán, al menos, tres puntos mientras que, si las rectas son afínmente paralelas, tendrán como tercer punto su punto ideal.  $\square$

**Definición 2.6.** Nos referiremos a  $\Pi$  como *plano proyectivo libre generado por*  $\pi_0$ .

**Definición 2.7.** Dado un punto  $P \in \Pi$ , definimos su *nivel* como el menor  $n \geq 0$  tal que  $P \in \pi_n$ . Asimismo, para cada recta  $L \subseteq \Pi$  definimos su *nivel* como el menor  $n \geq 0$  tal que  $L \cap \pi_n$  es una recta.

**Proposición 2.8.** El plano proyectivo libre generado por  $\pi_0$  es infinito si, y sólo si,  $\pi_0$  no es una configuración proyectiva.

*Demostración.* Notemos que si  $\pi_0$  es una configuración que verifica los axiomas de proyectivo cumple, en particular cumple **1** y **2** por lo que en ningún paso de la

recurrencia se añadirán elementos.  $\square$

**Definición 2.9.** Denotamos como *configuración confinada* a cualquier configuración que verifique que cada punto incide en, al menos, tres rectas y, a su vez, cada recta pase por, al menos, tres puntos.

**Ejemplo 2.10.** La configuración de Desargues (2.1) es una configuración confinada.

**Proposición 2.11.** *Cualquier configuración confinada finita de  $\Pi$  está contenida en  $\pi_0$ .*

*Demostración.* Sea  $\Lambda$  una configuración confinada contenida en  $\Pi$ , y sea  $n$  el máximo nivel alcanzado por los elementos de  $\Lambda$ . Supongamos, sin pérdida de la generalidad, que si  $L \subseteq \Lambda$  es un elemento con nivel  $n$ , entonces por definición  $L \cap \pi_n$  es una recta pero  $L \cap \pi_{n-1}$  no lo es. Razonemos por inducción sobre  $n$ .

- Si  $n = 0$  es trivial, ya que  $\Lambda \subseteq \pi_0$ .
- Veamos qué ocurre cuando  $n > 0$ .  
 $L$  es la recta resultante al unir dos puntos de  $\pi_{n-1}$  que no incidían sobre la misma recta en  $\pi_{n-2}$ , pero estamos suponiendo que todos los elementos de  $\Lambda$ , en particular los puntos, tiene nivel menor o igual que  $n$ , por lo que pertenecen a  $\pi_n$  y, en consecuencia,  $L$  ha de contener, al menos, dos de ellos llevándonos a un absurdo.

$\square$

La proposición anterior evidencia el hecho de que si existe en  $\Pi$  una configuración que verifique el teorema de Desargues (2.1), dicha configuración ya se encontraba contenida en  $\pi_0$ , podemos formalizar este enunciado como sigue.

**Corolario 2.12.** *El espacio proyectivo libre generado por  $\pi_0$  es desarguesiano si, y sólo si, el teorema de Desargues (2.1) se cumple en  $\pi_0$ .*

**Proposición 2.13.** *Sea  $\pi_0$  una configuración con cuatro puntos y ninguna recta, el plano proyectivo libre generado por  $\pi_0$  es un plano no desarguesiano.*

*Demostración.* De acuerdo con el corolario (2.12) podemos tomar una configuración de 10 puntos como sigue: primero elegimos  $A, B, C, O$  tres a tres no alineados, a continuación, tomamos  $A' \in OA, B' \in OB, C' \in OC$  de forma que  $A', B'$  y  $C'$  tampoco estén alineados y, por último, construimos  $P = AC \cap A'C', Q = BC \cap B'C'$  y  $R = AB \cap A'B'$ . Ahora, si el enunciado de Desargues se verificara entonces  $P, Q$  y  $R$  estarían alineados y dispondríamos de una configuración de 10 puntos y 10

rectas en  $\Pi$ , luego también contenida en  $\pi_0$  en virtud de la proposición 2.11, lo cual es absurdo, puesto que habíamos supuesto que  $\pi_0$  es una configuración con elementos insuficientes para cumplir el teorema Desargues (2.1).  $\square$

**Ejemplo 2.14.** Como ejemplo del enunciado anterior podemos considerar la siguiente configuración, construir el plano proyectivo libre generado por ella y, posteriormente, encontrar una configuración en que no cumpla el teorema de Desargues (2.1).

Tomamos como configuración de partida

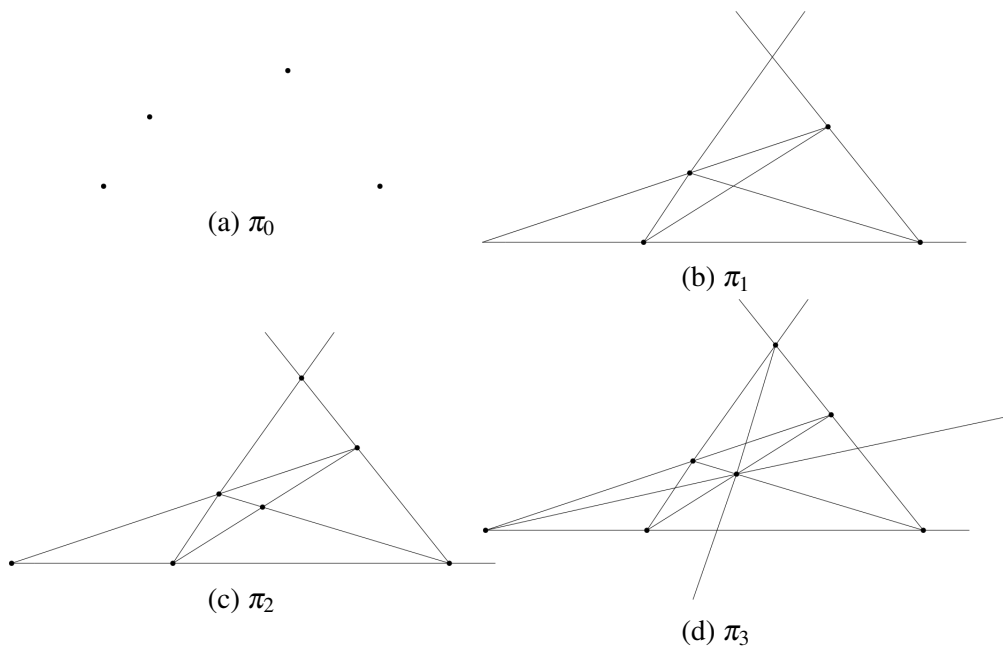
$$\pi_0 = (\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}, \emptyset)$$

entonces,

$$\pi_1 = (\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}, \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6\})$$

con lo que

$$\pi_2 = (\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\} \cup \{P_5, P_6, P_7\}, \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6\})$$



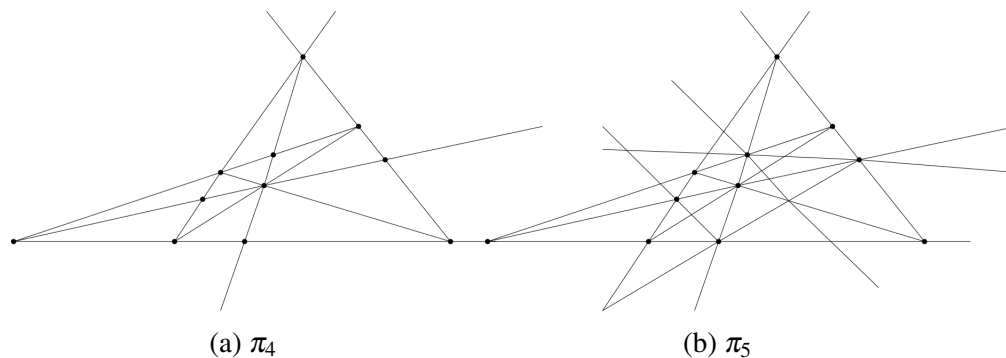


Figura 2.5: Ejemplo proposición 2.13

Elegimos los siete puntos señalados en la imagen que cumplen la hipótesis de Desargues (2.1) y realizamos la construcción de  $P$  y  $Q$  como dicta el axioma pertinente, entonces trazamos la recta  $PQ$  y observamos que su punto de incidencia con  $C'B'$  (etiquetado como  $R'$ ) es exterior a la recta  $CB$ , luego  $R = CB \cap C'B'$  es distinto de  $R' = PQ \cap C'B'$ , con lo que concluimos que  $P$ ,  $Q$  y  $R$  no son colineales por lo que no se cumple Desargues (2.1).

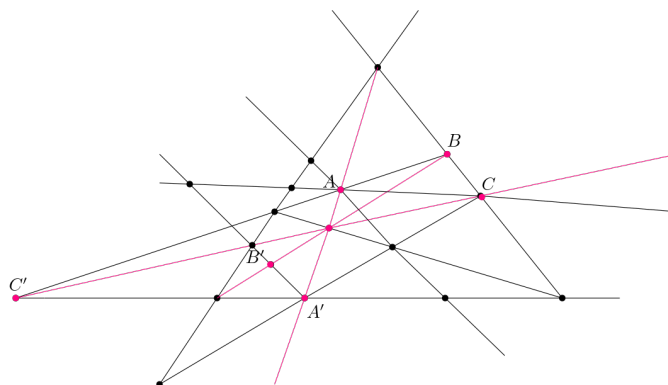


Figura 2.6: Paso 1



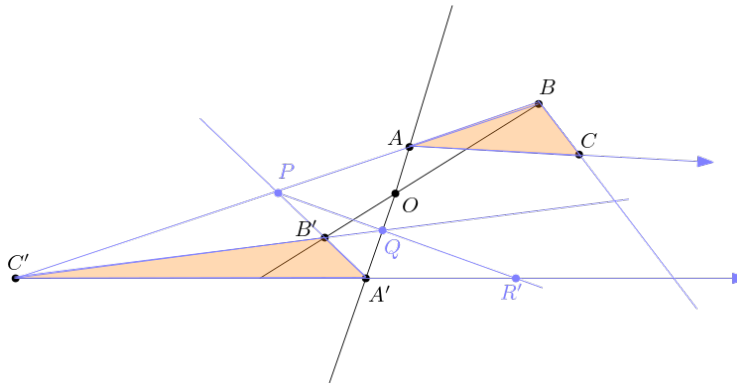


Figura 2.7: Paso 2

Por consiguiente existen espacios proyectivos que, pese a cumplir los axiomas P1-P4, no verifican el teorema de Desargues(2.1), permitiéndonos por tanto tomar este último como un nuevo axioma.

P5: Teorema de Desargues (2.1).

### 2.1.2. Todo plano proyectivo tridimensional es desarguesiano

**Teorema 2.15.** *El teorema de Desargues (2.1) se cumple en el plano proyectivo tridimensional, sin necesidad de asumir que todos los puntos del enunciado se encuentren sobre el mismo plano. En particular, el enunciado es cierto para cualquier plano que se encuentre sumergido en un espacio proyectivo tridimensional.*

Carecemos de momento de las herramientas necesarias para poder demostrar este resultado, que se probará en 4.11

En un plano proyectivo, al igual que sobre otras estructuras algebraicas, podemos encontrar varios elementos que aplicar a las configuraciones. El objetivo de esta sección reside en estudiar distintos elementos que nos ayudarán a continuar desarrollando nuevos aspectos de las configuraciones proyectivas, facilitándonos las demostraciones y la comprensión geométrica de las mismas.

## 2.2. La propiedad de dualidad en las geometrías proyectivas

En lo desarrollado hasta ahora hemos podido notar una cierto grado de simetría entre los elementos denotados como *rectas* y *puntos* dentro del espacio proyectivo. La teoría de la dualidad pone en evidencia dicha semejanza y formaliza el concepto.

Recordemos la primera definición de este trabajo, la definición de *geometría*(1.1), que involucra el concepto de incidencia como la relación de equivalencia existente entre los elementos de un determinado conjunto formado por puntos y rectas.

Ahora, si expresamos la geometría primeramente descrita por  $(\Omega, I)$  como una terna  $(P, L, I)$  donde  $P$  y  $L$  son respectivamente el conjunto de puntos y rectas de  $\Omega$ , obtendremos la *geometría dual* intercambiando el papel de ambos y definiendo una nueva relación de incidencia dada por la relación inversa de  $I$ . Observemos por tanto, que la geometría dual  $(P^*, L^*, I^*)$  con  $P^* = L$ ;  $L^* = P$ ;  $I^* = I^{-1}$  está determinada por la matriz traspuesta de la de incidencia que caracteriza a la geometría inicial.

**Teorema 2.16. Principio de dualidad.** *Sea  $T$  cualquier enunciado sobre el espacio proyectivo que pueda ser demostrado a partir de P1-P4 (y P5 si el espacio es desarguesiano), entonces el enunciado dual  $T^*$  se obtiene a partir de cambiar cada elemento/concepto siguiente por su equivalente*

<i>punto</i>	$\longleftrightarrow$	<i>recta</i>
<i>pertenece</i>	$\longleftrightarrow$	<i>pasa por</i>
<i>contenido</i>	$\longleftrightarrow$	<i>contiene</i>
<i>colineal</i>	$\longleftrightarrow$	<i>concurrente</i>

*y también podrá ser probado a partir de los citados axiomas.*

*Nota.* Observemos que es posible garantizar la veracidad de los enunciados duales gracias a la existencia de la recta del infinito, pues sin esta no habría simetría en la geometría plana, por lo que no sería posible garantizar la equivalencia entre puntos y rectas.

Cabe mencionar también que la dualidad es una propiedad invariante bajo isomorfismos para aquellos planos proyectivos denominados *autoduales*, es decir, aquellos que son isomorfos a su dual.

**Definición 2.17.** Sea  $\Pi$  un plano proyectivo y sea  $\Pi^*$  otro conjunto formado por las rectas de  $\Pi$ , a las que llamaremos *puntos duales*, y otros elementos, denotados *rectas duales*, que serán los haces de rectas centrados en los puntos de  $\Pi$ .

**Proposición 2.18.**  $\Pi^*$  es un plano proyectivo y recibe el nombre de plano proyectivo dual. Además, si  $\Pi$  es desarguesiano,  $\Pi^*$  también lo es.

*Demostración.* Comencemos comprobando que cumple los axiomas P1-P4 que reformularemos como P1\*-P4\*.

P1\*: Sean  $P^*, Q^*$  dos puntos distintos en  $\Pi^*$ , entonces existen una única recta dual que contiene a ambos. El enunciado dual establece que dadas dos rectas distintas de  $\Pi$  existe un único haz de rectas que contiene a ambas, es decir, ambas rectas inciden en un único punto (lo que es claro por P2) que será el centro del haz de rectas pertinente.

P2\*: Sean  $\ell^*$  y  $m^*$  dos rectas duales, entonces se cortan en, al menos un punto. El dual de este enunciado indica que dos haces de rectas centrados en puntos de  $\Pi$  contienen una recta común, lo cual es evidente a partir de P1, pues basta unir los centro de los haces para obtener una recta perteneciente a ambos.

P3\*: Existen  $P^*, Q^*, R^*$  no colineales en  $\Pi^*$ . Cuyo dual expresa la existencia de tres rectas no concurrentes en  $\Pi$ , pero esto es claro ya que por P3 existen tres puntos no alineados  $A, B, C$ , luego las rectas  $AB, AC$  y  $BC$  no pueden incidir en un mismo punto pues implicaría que los puntos habrían de estar sobre la misma recta.

P4\*: Toda recta dual tiene, al menos, tres puntos duales. La traducción dual de este enunciado determina la pertenencia de, al menos, tres rectas en cada haz centrado en un punto de  $\Pi$ . Veámoslo,  
Tomamos  $P \in \Pi$  como centro del haz de rectas y sea  $\ell$  una recta que no pasa por  $P$  (notemos que esta recta existe pues existen tres puntos no alineados). Entonces por P4, inciden sobre  $\ell$ , al menos, tres puntos  $Q_1, Q_2, Q_3$  a través de los cuales podemos dibujar las rectas  $PQ_1, PQ_2, PQ_3$  pertenecientes por tanto en el haz de rectas centrado en  $P$  con lo que concluimos.

Por consiguiente, podemos afirmar que  $\Pi^*$  es un plano proyectivo que verifica P1\*-P4\*.

Vamos a ver ahora qué ocurre si suponemos  $\Pi$  desarguesiano.

P5\*: Sean  $O^*, A^*, B^*, C^*, A', B', C'$  siete puntos distintos de  $\Pi^*$  de forma que  $O^*A^*A', O^*B^*B', O^*C^*C'$  son colineales y  $A^*, B^*, C^*; A', B', C'$  no lo son. Entonces  $P^* = A^*B^* \cap A'B'$ ;  $Q^* = A^*C^* \cap A'C'$ ;  $R^* = B^*C^* \cap B'C'$  son colineales.

Su expresión dual recibe el nombre de **teorema de Desargues dual** Sean  $o, a, b, c, a', b', c'$  siete rectas distintas de  $\Pi$  tales que  $oaa', obb', occ'$  son concurrentes y  $a, b, c; a', b', c'$  no lo son. Entonces  $p = (a \cap b) \cup (a' \cap b')$ ;  $q = (a \cap c) \cup (a' \cap c')$ ;  $r = (b \cap c) \cup (b' \cap c')$ <sup>1</sup> son concurrentes.

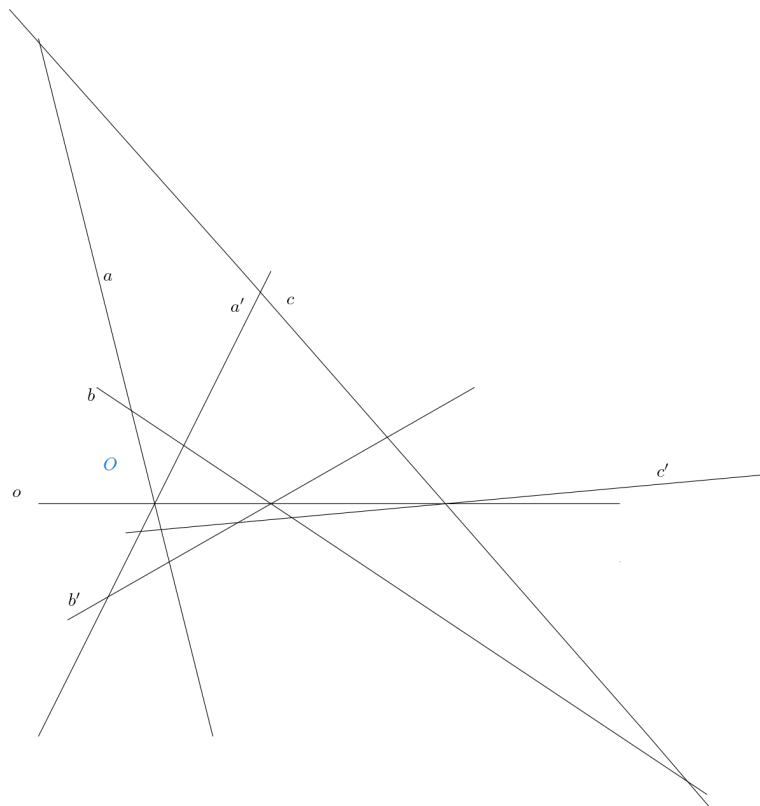


Figura 2.8: Desargues dual.  
Configuración inicial.

<sup>1</sup>La unión indica la recta que pasa por ambos puntos de incidencia de los respectivos pares de rectas.

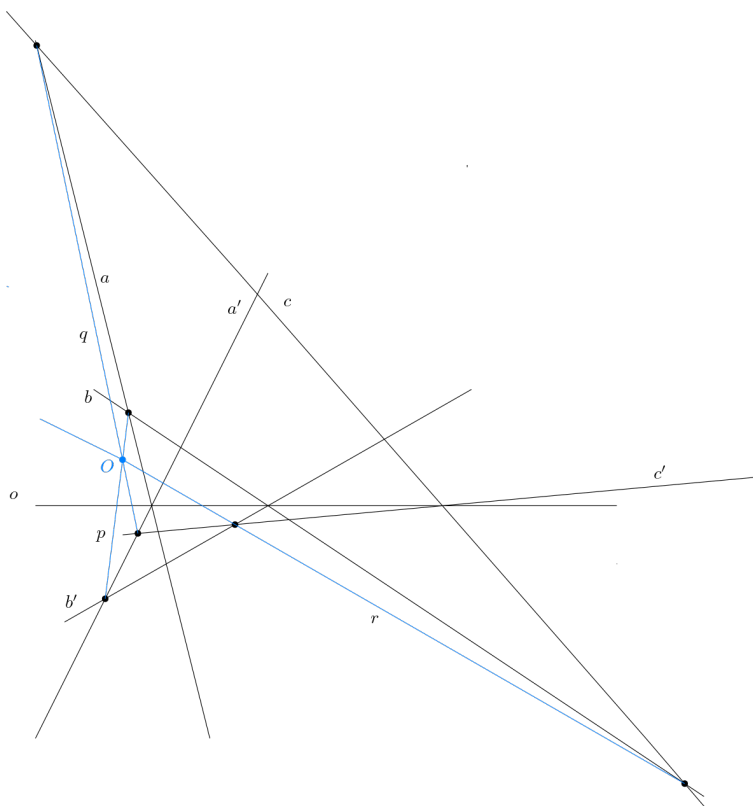


Figura 2.9: Desargues dual

Para probar esto denotaremos los puntos de incidencia de las rectas anteriores como sigue:  $O = oad'$ ,  $A = o \cap b \cap b'$ ,  $A' = o \cap c \cap c'$ ,  $B = a \cap b$ ,  $B' = a \cap c$ ,  $C = a' \cap b'$ ,  $C' = a' \cap c'$ . Entonces observemos que disponemos de una configuración de siete puntos que, por hipótesis del enunciado, verifica P5, con lo que concluimos que los puntos  $P = AB \cap A'B' = b \cap c$ ;  $Q = AC \cap A'C' = b' \cap c'$ ;  $R = BC \cap B'C' = p \cap q$  son colineales, pero  $PQ = r$  luego  $p, q, r$  son concurrentes.

□

### 2.3. Objetos proyectivos: Cuaternas armónicas

En el marco analítico conocemos varios resultados que relacionan elementos pertenecientes a una misma estructura algebraica (teorema de Tales, teorema de Pitágoras o elementos geométricos como el baricentro, la mediatriz...), con la motivación de conocer relaciones de este tipo en el contexto proyectivo estudiaremos el *cua*drivértice completo y las *cuaternas armónicas*.

**Definición 2.19.** Llamamos *cuadrivértice completo* a la construcción resultante de tomar una configuración de cuatro puntos, tres a tres no colineales y proceder como sigue:

Dibujamos las seis rectas que los unen y definimos *los puntos diagonales* del cuadrivértice completo  $P = AB \cap CD$ ,  $Q = AC \cap BD$  y  $R = AD \cap BC$ .

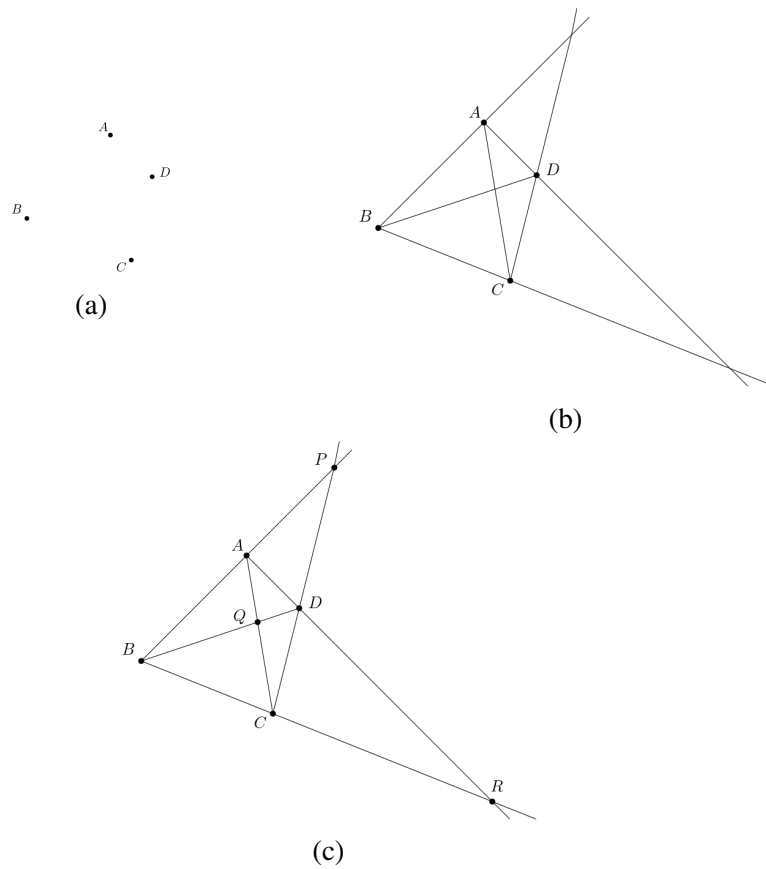


Figura 2.10: Definición cuadrivértice completo

No obstante  $P, Q, R$  podrían estar alineados (por ejemplo, en el plano proyectivo de siete puntos (1.18)), esto no ocurre en el plano proyectivo real, por lo no podemos asumir que los puntos diagonales sean colineales en general. Por este motivo tomaremos esto como axioma y estudiaremos su coherencia en relación con la axiomática anterior.

**P6: Axioma de Fano.** Los puntos diagonales de un cuadrivértice completo nunca son colineales.

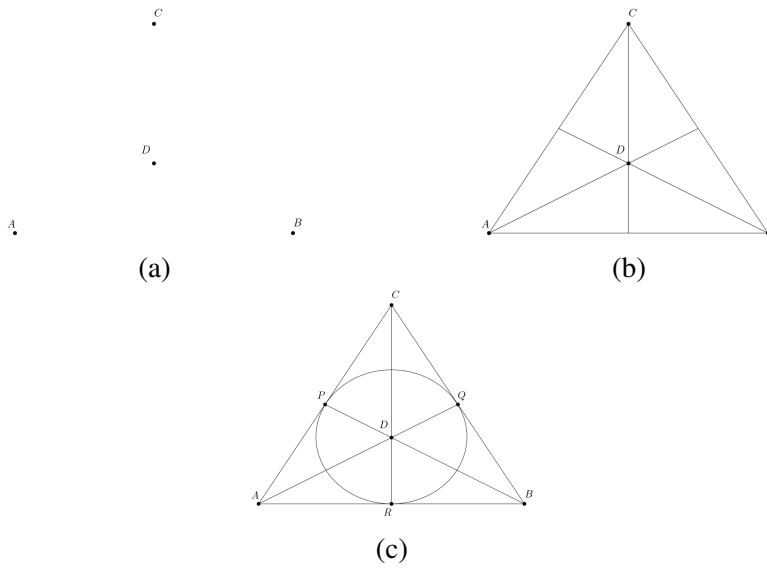


Figura 2.11: Axioma de Fano

**Definición 2.20.** Dada una configuración de cuatro puntos distintos y colineales,  $A, B, C$  y  $D$ , lo llamaremos *cuaterna armónica* si existe un cuadrivértice completo de forma que  $A$  y  $B$  sean dos de los puntos diagonales del cuadrivértice. Como notación utilizaremos  $H(AB, CD)$ .

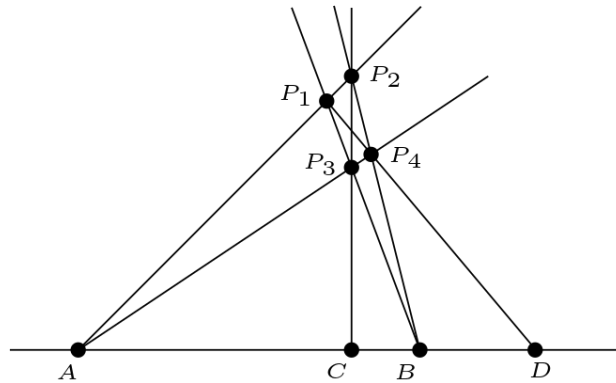


Figura 2.12: Definición cuaterna armónica

*Nota.* La exigencia de que los cuatro puntos sean distintos se debe a poder afirmar que los puntos diagonales del cuadrivértice completo resultante en la construcción son no alineados. De hecho, el concepto de cuaterna armónica no tiene sentido a menos que se verifique el axioma de Fano (2.3), por lo que a partir de ahora asumiremos que P6 se verifica siempre que trabajemos con cuaternas armónicas.

**Proposición 2.21.** Si  $A, B, C$  y  $D$ , forman una cuaterna armónica en el plano proyectivo entonces  $C, D, A$  y  $B$  también.

*Demostración.* Consideramos la cuaterna armónica formada por  $A, B, C, D$ , luego existe un cuadrivértice  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  que la soporta.

Veamos que si tomamos los puntos  $C, D, A, B$  existirá también un cuadrivértice  $Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4$  soportando esta cuaterna.



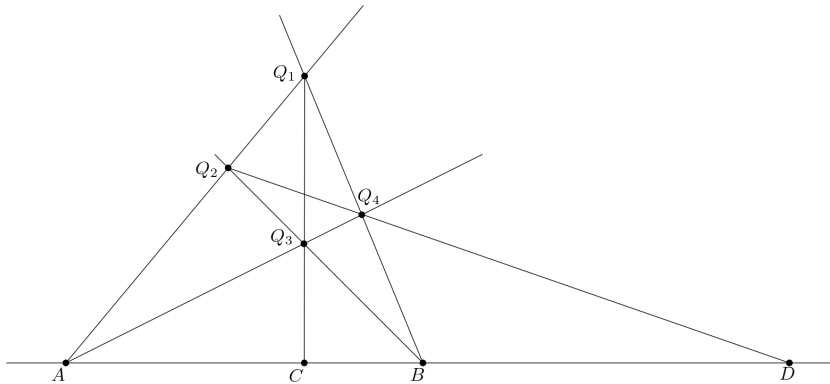


Figura 2.13: Proposición 2.20. Paso 1

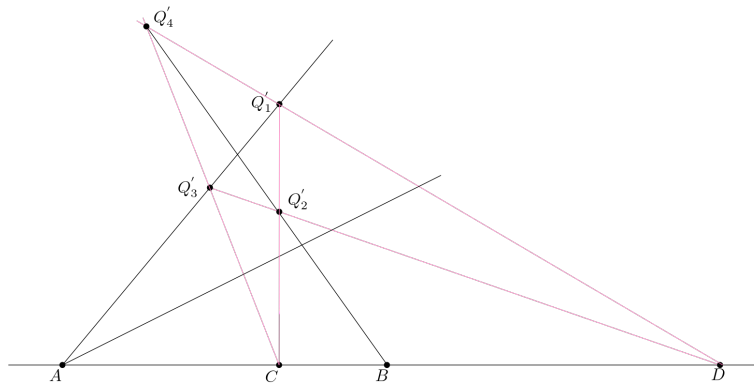


Figura 2.14: Paso 2

Para ello consideremos  $A, C, D$  y veamos que  $B$  es su cuarto armónico. Elegimos las rectas

$$\begin{aligned} a_1 &= AQ_1 & a_2 &= AQ_3 \\ c_1 &= CQ_1 & c_2 &= CQ_3 \\ d_1 &= Q_1 & d_2 &= DQ_4 \end{aligned}$$

y aplicamos Desargues dual (2.2). Así, obtenemos tres rectas concurrentes,  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ , pero observemos que  $\ell_1 = Q_1Q_4$  y  $\ell_3 = Q_2Q_3$ , luego por construcción  $\ell_1$  y  $\ell_2$  pertenecen al haz de rectas centrado en  $B$ , lo que implica que las tres rectas confluyen en  $B$  siendo este el cuarto armónico de  $A, C, D$  como queríamos probar.

□

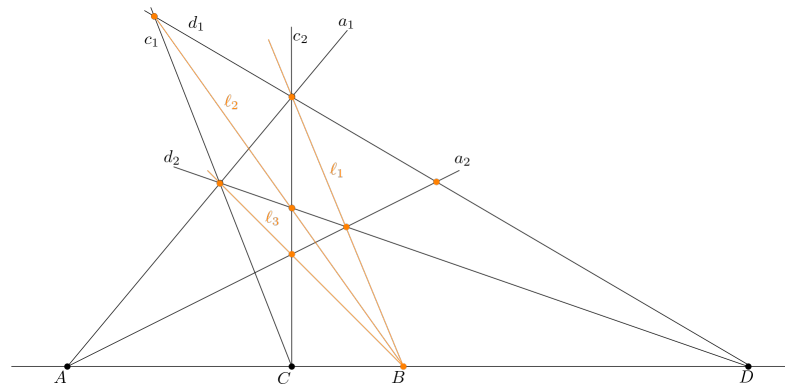


Figura 2.15: Paso 3

**Corolario 2.22.** Si  $A, B, C$  y  $D$  forman una cuaterna armónica, entonces se tienen las ocho cuaternas armónicas siguientes:

$$\begin{aligned} H(A,B,C,D) \quad H(B,A,C,D) \quad H(A,B,D,C) \quad H(B,A,D,C) \\ H(C,D,A,B) \quad H(C,D,B,A) \quad H(D,C,A,B) \quad H(D,C,B,A) \end{aligned}$$

**Definición 2.23.** Diremos que dos triángulos *están en perspectiva* cuando se verifica la siguiente situación geométrica. En esta situación, los triángulos  $XYV$  y

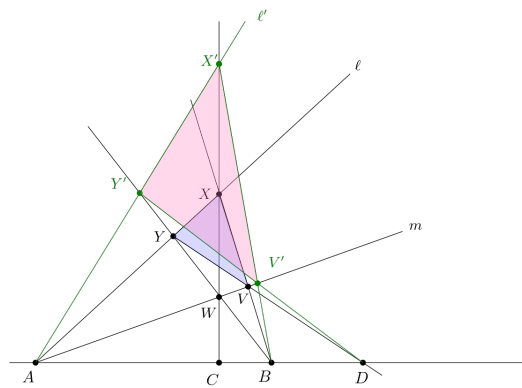


Figura 2.16: Definición perspectiva

$X'Y'V'$  están en perspectiva. El punto  $W$  se denomina *centro de perspectiva*.

**Proposición 2.24.** Sean  $A, B, C$  tres puntos distintos y colineales, entonces existe punto  $D$  tal que  $H(AB, CD)$ . De hecho, si el espacio es desarguesiano,  $D$  es único y recibe el nombre de cuarto armónico.

*Demostración.* Comencemos probando la existencia del punto  $D$  dados  $A, B, C$  alineados. En primer lugar, trazamos dos rectas cualesquiera pertenecientes al haz de rectas con centro en  $A$  y una recta cualquiera del haz de rectas con centro en  $C$ , exigiendo a todas ellas diferir de la recta  $AB$ . Denotémoslas  $\ell, m$  y  $n$  respectivamente.

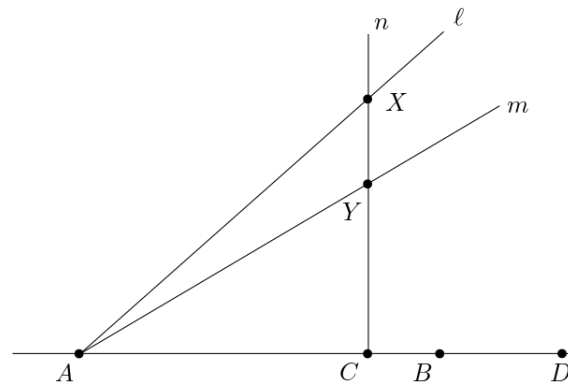


Figura 2.17: Proposición 2.23.  
Configuración inicial

Observemos que las tres rectas dibujadas inciden dos a dos, dando lugar a dos nuevos puntos, que llamaremos  $X$  e  $Y$ .

A continuación, trazamos las rectas  $BY$  y  $BX$ , cuya respectiva incidencia con  $\ell$  y  $m$  designamos  $V$  y  $W$ . Finalmente, aludiendo al axioma de Fano (2.3), el punto  $D = AB \cap VW$  es distinto de  $A, B$  y  $C$ , con lo que hemos obtenido un punto  $D$  tal que  $H(AB, CD)$

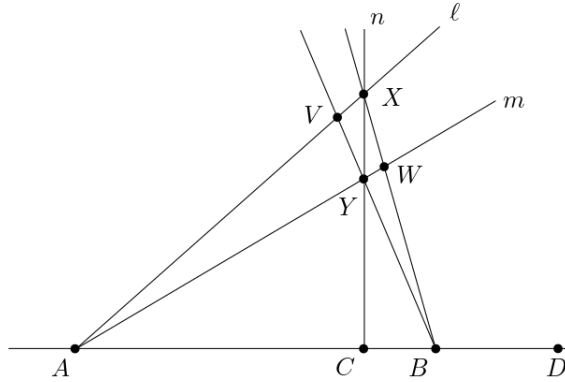


Figura 2.18: Paso 1

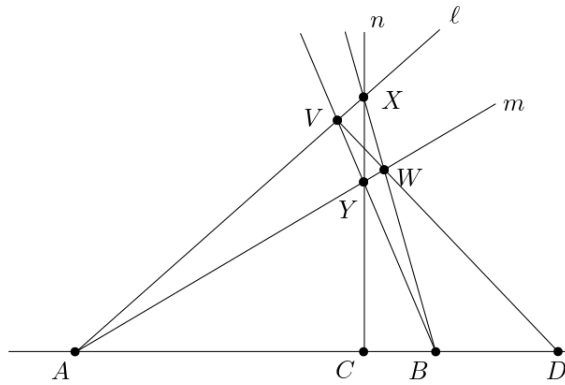


Figura 2.19: Paso 2

Supongamos ahora que el espacio es desarguesiano y veamos la unicidad del punto  $D$  arriba construido. Razonamos por reducción al absurdo.

Sea  $D'$  un punto tal que  $H(AB, CD')$  con  $D' \neq D$ , luego por la definición de cuaterna armónica, existe un cuadrilátero completo  $XYVW$  tal que  $A = XV \cap YW$ ;  $B = XW \cap YV$ ;  $C \in XY$ ;  $D \in VW$ . Denotemos por  $\ell' = AX$ ;  $m' = AW$ ;  $n' = CX$  entonces, si aplicamos la construcción realizada en la primera parte de la demostración a esta configuración, obtendremos  $D'$ .

Esto es suficiente para demostrar que la elección de las rectas  $\ell, m, n$  tomadas en un comienzo son independientes del punto  $D$  resultante. Para ello veamos los tres casos que se podrían presentar, variando en cada uno de ellos una de las rectas.

- Veamos lo que ocurre al sustituir  $\ell$  por otra recta distinta  $\ell'$ .  
Sea  $D$  el punto construido a partir de  $\ell, m, n$ , y sea  $XYVW$  el cuadrilátero completo que interviene en dicha construcción. Sea  $\ell'$  una recta que pasa por  $A$ , distinta de  $m$ , y denotemos el cuadrilátero resultante  $X'Y'V'W'$  (notemos

que  $Y$  es común a ambos cuadriláteros por ser el punto de incidencia de  $m$  y  $n$  que hemos mantenido invariantes). Terminaremos si probamos que  $VW \cap V'W' = D$ , es decir,  $AB \cap V'W' = D$ .

Observemos que en la configuración actual disponemos de dos triángulos  $XVW$  y  $X'V'W'$ , para los cuales  $Y$  funciona como centro de perspectiva y cuyos pares de lados correspondientes inciden en  $A = XV \cap X'V'$ ,  $B = VW \cap V'W'$ . Con lo anterior, disponemos de una configuración confinada en un espacio desarguesiano donde las rectas  $BX, m, n$  son concurrentes en  $Y$ , luego necesariamente los lados restantes de los triángulos inciden en un punto  $VW \cap V'W' = D \in AB$ .

Como el punto de incidencia se encuentra sobre  $AB$  y ha de verificarse la existencia de un cuadrivértice completo, el punto ha de ser único y  $D = D'$ .

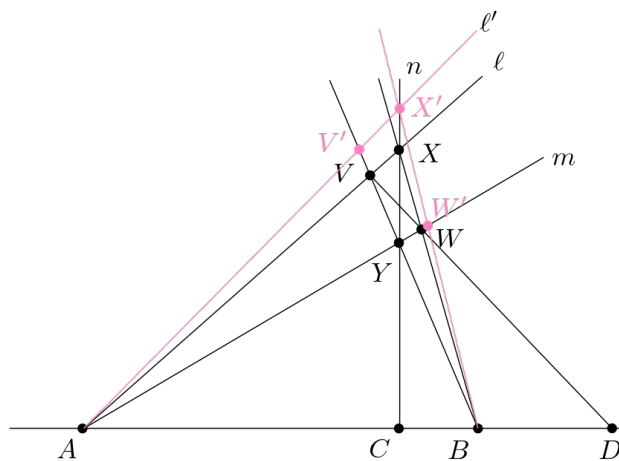
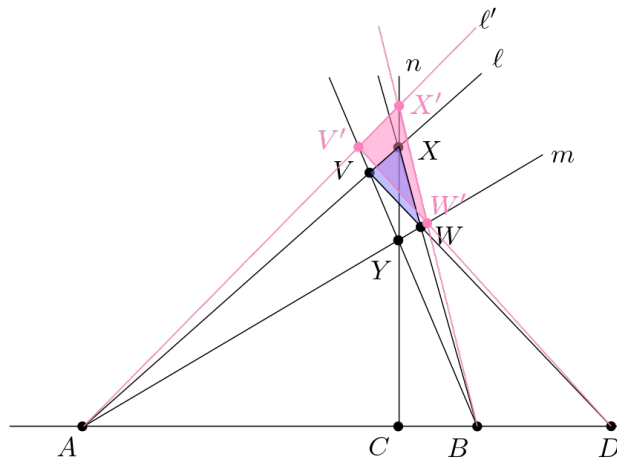
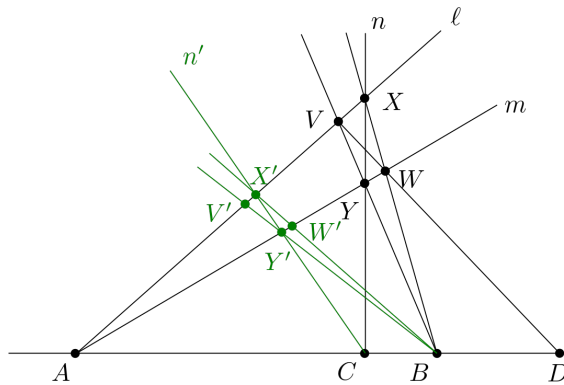


Figura 2.20: Caso 1. Cambio  $\ell$ , paso 1

Figura 2.21: Caso 1. Cambio  $\ell$ , paso 2

- El caso de sustituir la recta  $m$  es idéntico al anterior debido a la simetría de la configuración, por lo que su prueba consiste en reproducir la recién expuesta intercambiando los papeles de  $\ell$  y  $m$ .
- Veamos lo que ocurre al sustituir  $n$  por otra recta  $n'$  distinta a la primera. Sea  $D$  el punto construido a partir de  $\ell, m, n$ ; sea  $XYVW$  el cuadrilátero completo que interviene en dicha construcción; y sea  $X'Y'V'W'$  el cuadrilátero obtenido a partir de  $\ell, m, n'$ . De nuevo, queremos ver que la incidencia entre  $V'W'$  y  $AB$  es exactamente  $D$ .

Figura 2.22: Caso 1. Cambio  $n$ , paso 1

Consideramos los triángulos  $XYW$  y  $Y'V'X'$ , donde los lados correspondientes inciden en  $A, B, C$  que por hipótesis son colineales. Haciendo uso del enunciado dual del teorema de Desargues (2.2) podemos concluir que las rectas  $X'Y, Y'X$  y  $V'W$  son concurrentes en un punto  $O$ .

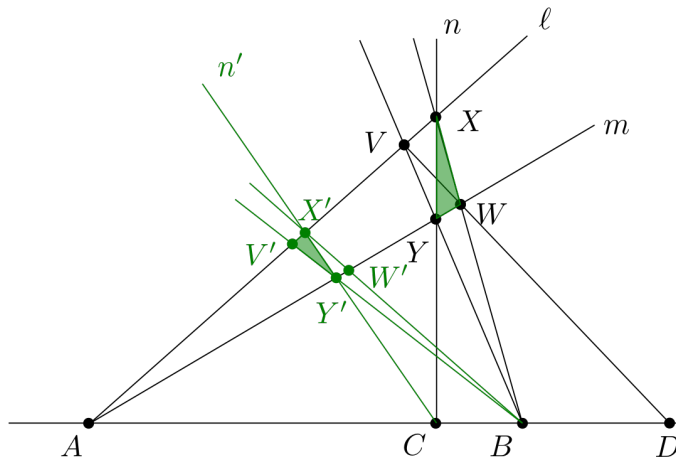


Figura 2.23: Caso 1. Cambio  $n$ , paso 2

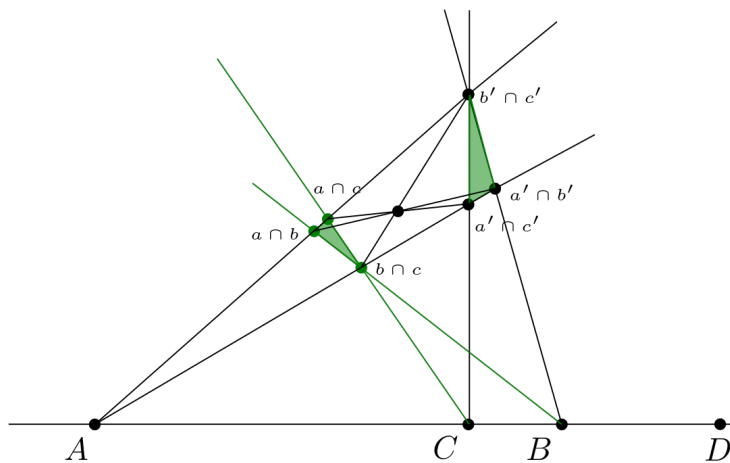


Figura 2.24: Caso 1. Cambio  $n$ , paso 3

Mediante un razonamiento paralelo, tomamos los triángulos  $XVY$  y  $Y'X'W'$  y aplicando  $P5^*$  (2.2), de nuevo concluimos que las rectas  $X'Y$ ,  $Y'X$  y  $VW'$  son concurrentes.

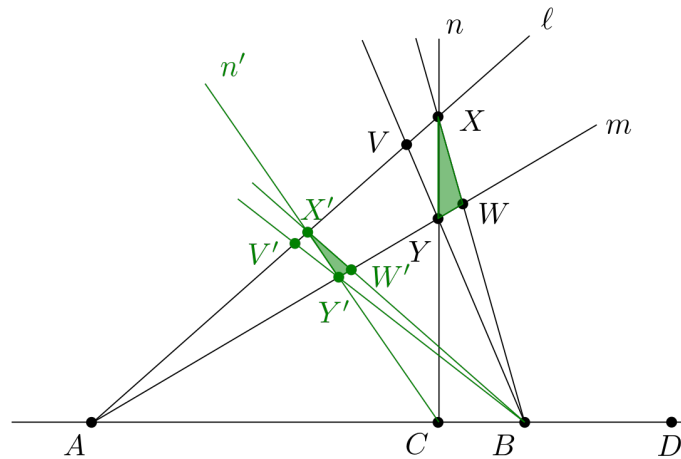


Figura 2.25: Caso 1. Cambio  $n$ , paso 4

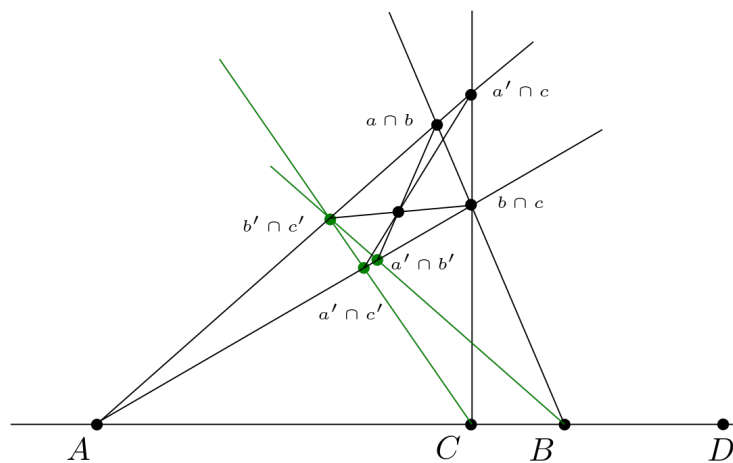


Figura 2.26: Caso 1. Cambio  $n$ , paso 4



Para concluir, observemos que las únicas rectas que difieren entre las configuraciones resultantes al aplicar desargues dual (2.2) son  $V'W$  y  $VW'$ , luego el punto de incidencia de ambas ternas de rectas ha de ser el mismo.

En resumen, dos pares de lados correspondientes inciden en  $A$  y  $B$ , y el tercero ( $V'W$ ,  $VW'$ ) ha de incidir sobre la misma recta  $AB$ , luego  $D \in V'W$ .

□

## 2.4. Transformaciones proyectivas: Perspectividades y proyectividades

En espacios con una métrica definida conocemos transformaciones tales como la homotecia, la traslación y la rotación; sin embargo, en los espacios proyectivos no tenemos definido el concepto de distancia ya que la no existencia de coordenadas impide que tengan sentido las transformaciones que acabamos de listar. Por este motivo, introducimos las perspectivas y proyectividades, transformaciones entre configuraciones que se comportan de forma similar a las biyecciones en el ámbito proyectivo.

**Definición 2.25.** Una *perspectividad* es una aplicación entre dos rectas (afines o proyectivas),  $\ell$  y  $\ell'$  que podemos definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \ell &\xrightarrow{\cong} \ell' : \ell \longrightarrow \ell' \\ A &\longmapsto A' = \ell' \cap OA \end{aligned}$$

donde  $O$  es un punto exterior a ambas rectas llamado *centro de perspectividad*.

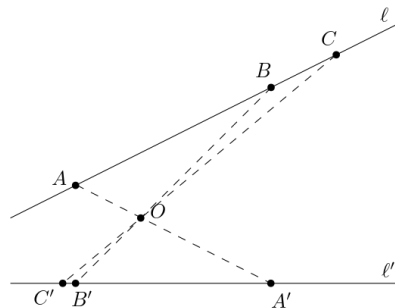


Figura 2.27: Definición perspectividad

*Nota.* La existencia de  $O$  se deriva de los axiomas de plano proyectivo. Dadas dos rectas, por P4, inciden tres puntos en cada una de ellas, llamémoslos  $A, B, C \in \ell$  y

$A', B', C' \in \ell'$ , entonces tomando dos pares de puntos cualesquiera formados por un elemento en cada recta, el punto de incidencia entre estas es exterior a  $\ell$  y  $\ell'$ .

**Proposición 2.26.**

- a) *Toda perspectividad es una biyección.*
- b) *La inversa de una perspectividad es también perspectividad*
- c) *La composición de dos o más perspectividades, no tiene por qué ser una perspectividad.*

*Demostración.*

- a) Veamos que una perspectividad es una aplicación inyectiva y sobreyectiva. La inyectividad es clara, ya que tomando un punto cualquiera  $A \in \ell$  existe una única recta  $OA$  y, a su vez, el punto de incidencia de  $OA$  y  $\ell$  es único, luego no puede haber dos puntos en  $\ell$  con la misma imagen. De forma similar vemos que se trata de una aplicación sobreyectiva, dado que tomando un punto cualquiera  $A$  en  $\ell'$ , existe una única recta distinta de esta que pasa por  $O$ . Así, el punto de incidencia entre  $OA'$  y  $\ell$  da lugar a un punto en  $\ell$ , cuya imagen por la perspectividad es  $A'$ . Notemos que, si  $\ell$  y  $\ell'$  inciden en un punto  $X$ , este se mantiene invariante por la perspectividad.
- b) Acabamos de ver que la aplicación es biyectiva, luego admite inversa. Definimos la aplicación inversa como sigue:

$$\begin{aligned} \ell' \bar{\bar{\lambda}} \ell : \ell' &\longrightarrow \ell \\ A' &\longmapsto A = \ell \cap OA' \end{aligned}$$

Entonces,

$$(\ell' \bar{\bar{\lambda}} \ell) \circ (\ell \bar{\bar{\lambda}} \ell')(A) = (\ell' \bar{\bar{\lambda}} \ell)(A) = A \tag{2.1}$$

$$(\ell \bar{\bar{\lambda}} \ell') \circ (\ell' \bar{\bar{\lambda}} \ell)(A') = (\ell \bar{\bar{\lambda}} \ell')(A') = A' \tag{2.2}$$

luego, por 2.1  $(\ell' \bar{\bar{\lambda}} \ell) \circ (\ell \bar{\bar{\lambda}} \ell') = Id$  y por 2.2  $(\ell \bar{\bar{\lambda}} \ell') \circ (\ell' \bar{\bar{\lambda}} \ell) = Id$  con lo que

$$(\ell \bar{\bar{\lambda}} \ell')^{-1} = \ell' \bar{\bar{\lambda}} \ell$$

y concluimos que la inversa de una perspectividad es, de nuevo, una perspectividad.

c) Veamos que no es cierto proporcionando un contraejemplo.

Sean  $\ell$ ,  $\ell'$  y  $\ell''$  tres rectas distintas dos a dos, definimos:

$$\begin{aligned} \ell \bar{\wedge} \ell' : \ell &\longrightarrow \ell' \\ A &\longmapsto A' = \ell' \cap OA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell' \bar{\wedge} \ell'' : \ell' &\longrightarrow \ell'' \\ A' &\longmapsto A'' = \ell'' \cap O'A' \end{aligned}$$

donde  $O$  y  $O'$  los centros respectivos de las perspectivas.

Consideremos cuatro puntos  $Y, A, B, C \in \ell$  y calculemos su imagen por  $\ell \bar{\wedge} \ell'$  obteniendo respectivamente  $Y', A', B', C' \in \ell'$ . Ahora, la perspectiva  $\ell' \bar{\wedge} \ell''$  aplicada a los puntos recién obtenidos proporciona  $Y'', A'', B'', C'' \in \ell''$  correspondientemente. A la vista de estos puntos, notemos que no existe una perspectiva que transforme el primer conjunto en el segundo, puesto que sería  $\ell \bar{\wedge} \ell''$  que mantendría  $Y$  invariable, luego  $Y = Y''$  lo que es falso siguiendo la cadena de perspectivas anterior.

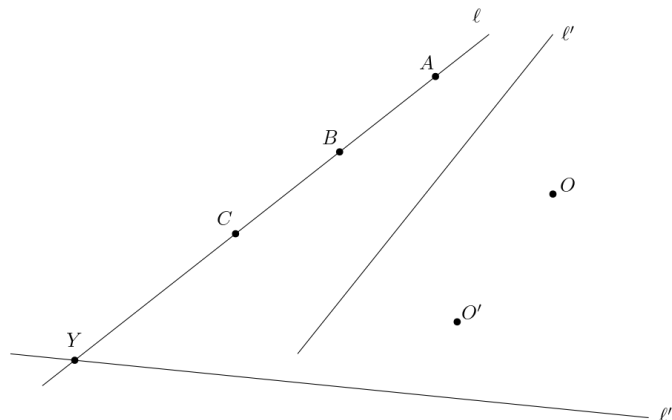


Figura 2.28: Proposición 2.25 c.  
Configuración inicial

□

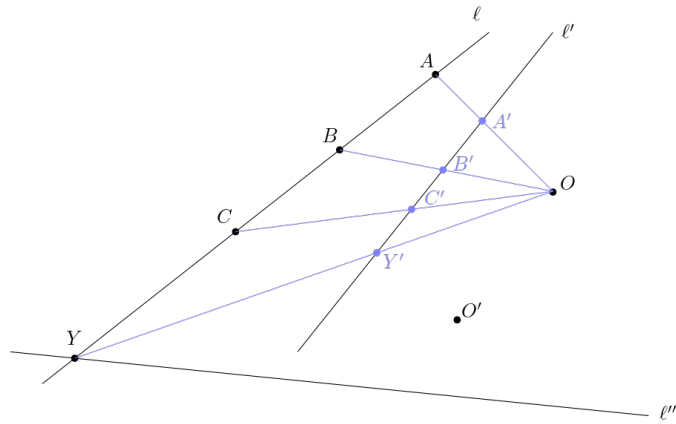


Figura 2.29: Paso 1

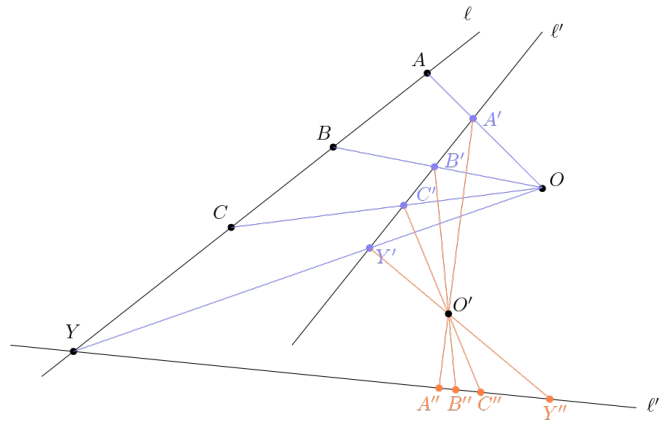


Figura 2.30: Paso 2

**Definición 2.27.** Una *proyectividad* es una aplicación entre dos rectas (pueden ser la misma), que puede ser expresada como composición de perspectividades.

$$\ell \bar{\wedge} \ell' : \ell \longrightarrow \ell'$$

*Nota.*

- Toda proyectividad es trivialmente biyección, como consecuencia de que toda perspectividad lo es.
- La composición de proyectividades es proyectividad, debido a que, de nuevo, se puede escribir como composición de perspectividades.
- La aplicación identidad es una proyectividad y, en consecuencia, una perspectividad.

**Proposición 2.28.** *Sea  $\ell$  una recta. Entonces el conjunto de proyectividades de  $\ell$  en sí mismo, junto con la operación composición, es un grupo al que denotaremos por  $PJ(\ell)$ .*

*Demostración.* Sabemos que un grupo es un conjunto no vacío junto con una operación binaria; esta operación ha de ser asociativa; ha de existir un elemento neutro; y cada elemento debe tener inverso dentro del grupo. Veamos que todo esto se cumple:

- Existe elemento neutro. La identidad se puede obtener fácilmente a partir de la composición de una perspectividad y su inversa, es claro que es una proyectividad, luego pertenece al conjunto  $PJ(\ell)$  y, debido a que su composición con otras proyectividades no altera la imagen de ningún elemento, es claro que constituye el elemento neutro de  $PJ(\ell)$ .
- La operación ha de ser asociativa. Sean  $p_1, p_2, p_3$  tres proyectividades, donde  $p_i = m_{i,1} \circ m_{i,2} \circ \dots \circ m_{i,n_i}$  con  $m_j$  perspectividad y  $n_i \in \mathbb{N}$  para todo  $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, n_i$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} & (p_1 \circ p_2) \circ p_3 = \\ & (m_{1,1} \circ m_{1,2} \circ \dots \circ m_{1,n_1} \circ m_{2,1} \circ m_{2,2} \circ \dots \circ m_{2,n_2}) \circ m_{3,1} \circ m_{3,2} \circ \dots \circ m_{3,n_3} = \\ & m_{1,1} \circ m_{1,2} \circ \dots \circ m_{1,n_1} \circ m_{2,1} \circ m_{2,2} \circ \dots \circ m_{2,n_2} \circ m_{3,1} \circ m_{3,2} \circ \dots \circ m_{3,n_3} = \\ & m_{1,1} \circ m_{1,2} \circ \dots \circ m_{1,n_1} \circ (m_{2,1} \circ m_{2,2} \circ \dots \circ m_{2,n_2} \circ m_{3,1} \circ m_{3,2} \circ \dots \circ m_{3,n_3}) = \\ & p_1 \circ (p_2 \circ p_3) \end{aligned}$$

- Cada elemento tiene inverso en el grupo. Sea  $p = m_1 \circ m_2 \circ \dots \circ m_n$  una proyectividad y su desarrollo como composición de perspectividades. Sean  $m_1^{-1}, m_2^{-1}, \dots, m_n^{-1}$  las inversas de cada perspectividad respectivamente. Entonces,  $p^{-1}$  coincide con  $m_n^{-1} \circ \dots \circ m_2^{-1} \circ m_1^{-1}$ , veámoslo,

$$\begin{aligned} & p \circ (m_n^{-1} \circ \dots \circ m_2^{-1} \circ m_1^{-1}) = \\ & (m_1 \circ m_2 \circ \dots \circ m_n) \circ (m_n^{-1} \circ \dots \circ m_2^{-1} \circ m_1^{-1}) = \\ & m_1 \circ m_2 \circ \dots \circ (m_n \circ m_n^{-1}) \circ \dots \circ m_2^{-1} \circ m_1^{-1} = \\ & m_1 \circ m_2 \circ \dots \circ (Id) \circ \dots \circ m_2^{-1} \circ m_1^{-1} = \\ & \dots = Id \end{aligned}$$

análogamente,  $(m_n^{-1} \circ \dots \circ m_2^{-1} \circ m_1^{-1}) \circ p = Id$ , luego,  $p^{-1} = m_n^{-1} \circ \dots \circ m_2^{-1} \circ m_1^{-1}$ . Entonces podemos concluir que, en efecto, la inversa de una

proyectividad es de nuevo proyectividad y, que toda proyectividad tiene inversa dentro del grupo.

□

**Definición 2.29.** Dados una recta  $\ell$  y dos puntos  $O, A$  exteriores a ella, definimos la *proyección de  $A$  sobre  $\ell$*  al punto  $OA \cap \ell$ .

**Proposición 2.30.** Sea  $\ell$  un recta, y sean  $A, B$  y  $C$  tres puntos distintos sobre ella. Sea  $A', B'$  y  $C'$  una terna distinta a la primera, de puntos colineales y exteriores a la recta dada. Entonces existe una proyectividad de  $\ell$  en sí misma que envía la primera terna en la segunda.

*Demostración.* Sea  $\ell$  una recta tal que los puntos dados inciden en ella. Comencemos eligiendo una recta cualquiera distinta de la dada y tal que no pasa por  $A$  ni  $A'$ . Sea  $O$  un punto exterior a ambas rectas, entonces proyectamos la terna  $A, B, C$  sobre  $\ell''$  dando lugar a los puntos  $A'', B'', C''$ , con lo que tenemos  $ABC \bar{\wedge} A''B''C''$  con centro en  $O$ , y  $A \notin \ell'', A'' \notin \ell$ .

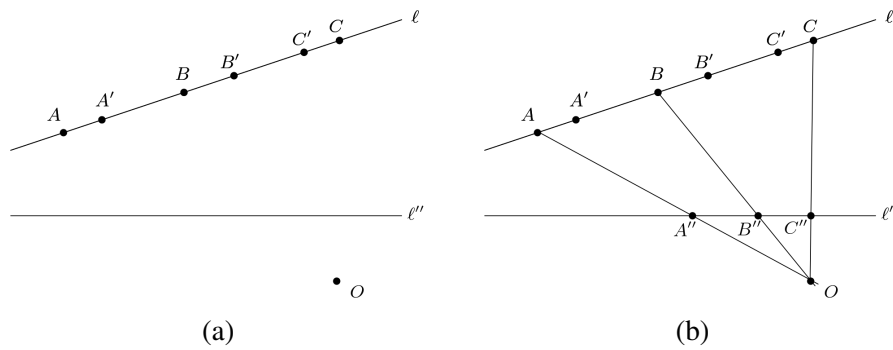


Figura 2.31: Proposición 2.29.  
Configuración inicial

Basta por tanto con construir una proyectividad de  $\ell$  en  $\ell''$  que envíe  $A'B'C'$  en  $A''B''C''$ . Con este propósito trazamos las rectas  $A'B''$ ,  $A''B'$ ,  $A'C''$ ,  $A''C'$ ; definimos los puntos  $B''' := A'B'' \cap A''B'$ ,  $C''' := A'C'' \cap A''C'$ ; y construimos la recta  $\ell''' = B'''C'''$ , cuya incidencia con  $A'A''$  denotaremos  $A'''$ .

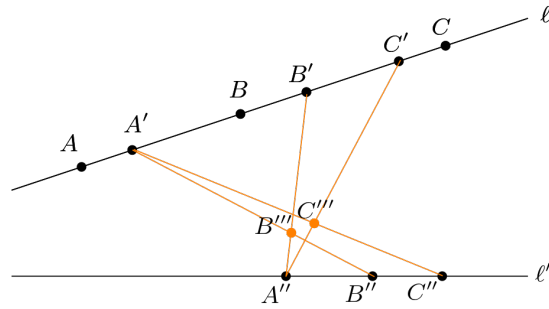


Figura 2.32: Paso 1

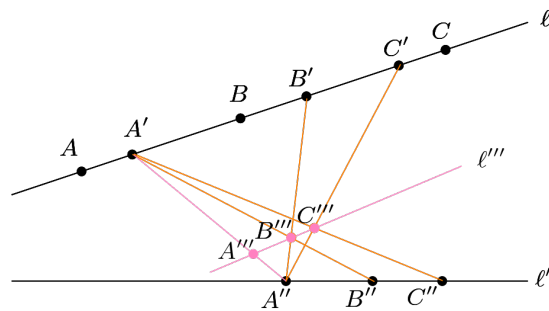


Figura 2.33: Paso 2

Ahora, tenemos la cadena de perspectivas  $\ell \bar{\bar{\ell}} \ell''' \bar{\bar{\ell}} \ell''$  centradas en  $A'$  y  $A$  resp. y que, al componerse con la perspectiva inicial, da lugar a  $\ell \bar{\bar{\ell}} \ell''' \bar{\bar{\ell}} \ell'' \bar{\bar{\ell}} \ell$ , que se trata de una proyectividad de la recta en si misma y cuya imagen de  $A, B, C$  coincide con  $A', B', C'$ .

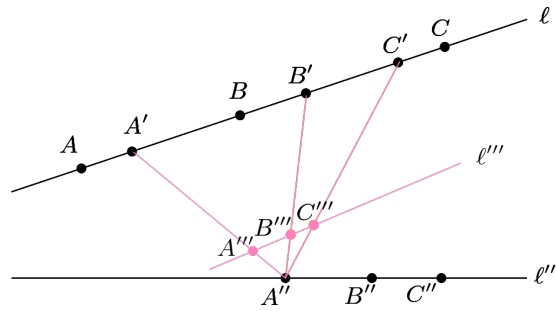


Figura 2.34: Paso 3,  $\ell \bar{\bar{\ell}} \ell'''$

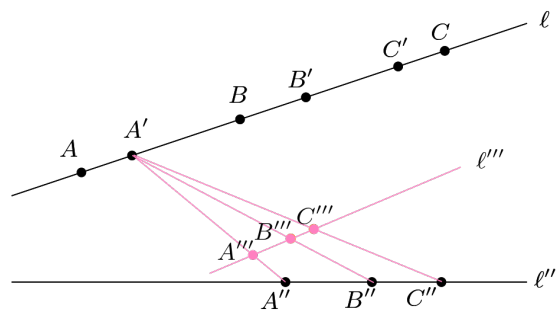


Figura 2.35: Paso 4,  $\ell''' \bar{\bar{\ell}} \ell''$



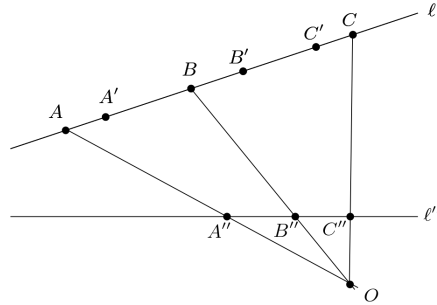


Figura 2.36: Paso 5,  $\ell'' \bar{\wedge} \ell$

□

**Corolario 2.31.** *Una proyectividad envía cuaternas armónicas en cuaternas armónicas.*

*Demostración.* Dado que toda proyectividad es composición de perspectivas bastará probar que una perspectiva envía cuaternas armónicas en cuaternas armónicas.

Sea  $\ell$  una recta y  $A, B, C, D \in \ell$  y supongamos que  $\ell \bar{\wedge} \ell'$  es una perspectiva centrada en  $O$  con  $\ell'$  distinta de la recta dada y  $O$  un punto exterior a ambas; además supongamos  $H(A, B, C, D)$ .

Denotemos  $A', B', C', D' \in \ell'$  a las imágenes de los puntos dados por la perspectiva anterior, y definamos  $\ell'' := AB'$ . Entonces la cadena de perspectivas centradas en  $O$ ,  $\ell \bar{\wedge} \ell'' \bar{\wedge} \ell'$  coincide con la proyectividad inicial, por lo que podemos considerar  $\ell \bar{\wedge} \ell''$  y  $\ell'' \bar{\wedge} \ell'$  por separado.

Supongamos que hemos tomado  $\ell'$  de forma que  $A$  sea el punto de incidencia entre ambas rectas, de esta forma el problema actual se reduce al siguiente:

*Sean  $\ell \bar{\wedge} \ell'$  centrada en  $O$  y sean  $A := \ell \cap \ell'$ ,  $B, C, D$  cuatro puntos incidentes en  $\ell$  tales que  $H(A, B, C, D)$ . Demostrar que  $H(A, B', C', D')$  donde  $B', C', D' \in \ell'$  son las imágenes de  $B, C, D$ .*

Para demostrarlo comencemos dibujando la recta  $BC'$  y definamos  $X := BC' \cap OA$ .

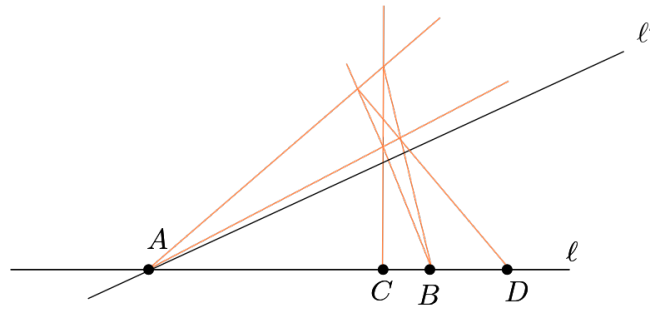


Figura 2.37: Corolario 2.30  
 $H(A, B, C, D)$

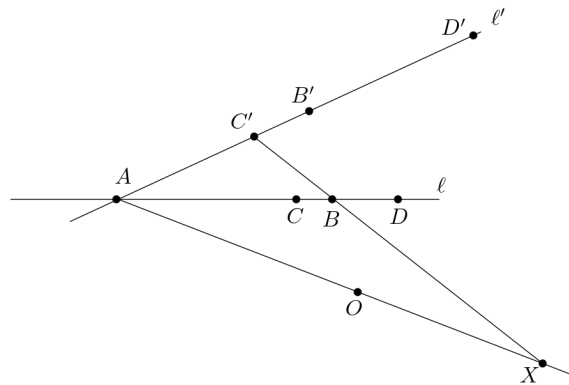


Figura 2.38: Paso 1

A continuación, consideramos el cuadrilátero completo  $AXB'C'$ . Trivialmente dos de sus puntos diagonales son  $A$  y  $B$ ; además  $C$  incide en el lado  $OC'$  del cuadrilátero y, con esto, deducimos que el cuarto armónico debe ser el punto de incidencia entre las rectas  $XB'$  y  $l$ , al que denotamos  $D$ .

Finalmente consideremos el cuadrilátero completo  $AXB'D$ , dos de sus puntos diagonales son  $A$  y  $B'$ , y los otros dos son los puntos  $C' = l' \cap BX$  y  $D' = l' \cap OD$ .

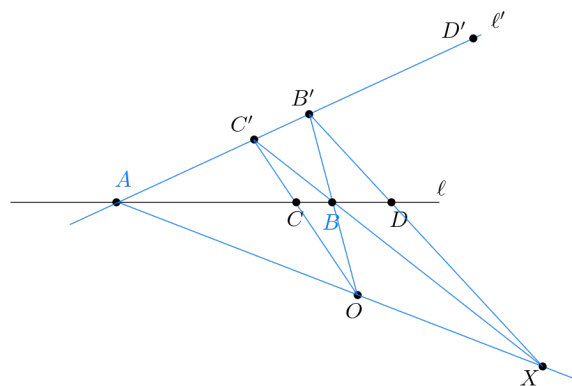


Figura 2.39: Paso 2  
 $OXB'C'$

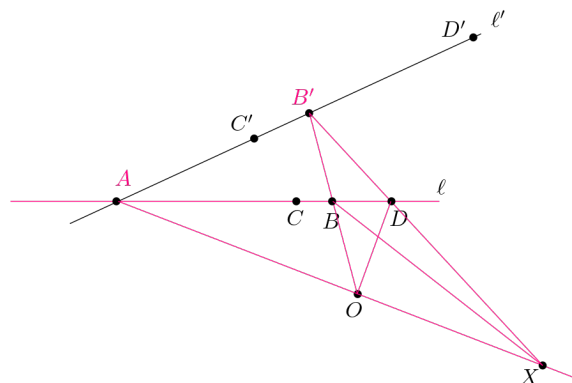


Figura 2.40: Paso 3  
 $OXBD$

□

**Definición 2.32.** Diremos que un grupo es  $r$ -veces transitivo cuando, dadas dos tuplas de  $r$  elementos del grupo, exista una transformación que envíe la primera en la segunda.

Considerando esta definición, otra consecuencia que podemos obtener es que el grupo  $PJ(\ell)$  es tres veces transitivo, pero no cuatro, esto es, dadas dos ternas de puntos hemos probado en la proposición (2.30) que existe un elemento del grupo que envía una en la otra. Sin embargo, dadas dos cuaternas esto no es cierto ya que, de lo contrario, debería enviar cuaternas de puntos armónicos en cuaternas de puntos armónicos y, lo único que podemos garantizar gracias al corolario anterior (2.31) es que se cumple en caso de que ambas sean cuaternas armónicas.



## Capítulo 3

# Axioma de Pappus y Teorema fundamental

En el capítulo anterior nos preguntábamos si existía la posibilidad de añadir nuevos axiomas a P1-P4 y, en que medida, afectaría esto al espacio generado. En la primera sección de dicho capítulo confirmamos que esto es posible presentando el Axioma de Desargues (2.1) y, con ello, obtuvimos los espacios proyectivos desarguesianos. En este capítulo, presentaremos dos nuevos enunciados: el *Axioma de Pappus* (3.1) y el *Teorema fundamental de la geometría proyectiva* (3.8). Veremos que las nuevas configuraciones proyectivas a las que dan lugar son estrictamente más restrictivas que las estudiadas hasta ahora. Como ejemplo paradigmático de planos proyectivos que cumplen estos resultados tenemos el plano proyectivo obtenido sobre un cuerpo conmutativo. Finalmente, estudiaremos que el TF no se puede deducir a partir de la definición sintética de plano proyectivo, ni tampoco haciendo uso de los axiomas de Desargues o Fano. En particular, probaremos que el Axioma de Pappus implica el de Desargues, y que, de hecho, es equivalente al TF.

El Teorema fundamental (3.8) no se puede deducir a partir de la definición sintética estudiada de plano proyectivo ni tampoco haciendo uso de los axiomas de Desargues (2.1) o Fano (2.3), es por esto que introducimos el *Axioma de Pappus*.

### 3.1. El Axioma de Pappus

**Teorema 3.1. Axioma de Pappus:** Sean  $\ell$  y  $\ell'$  dos rectas y sean  $A, B, C \in \ell$ ;  $A', B', C' \in \ell'$  todos ellos distintos de  $\ell \cap \ell'$ . Definimos  $P = AB' \cap A'B$ ;  $Q = AC' \cap A'C$ ;  $R = BC' \cap B'C$ . Entonces  $P, Q$  y  $R$  son colineales.

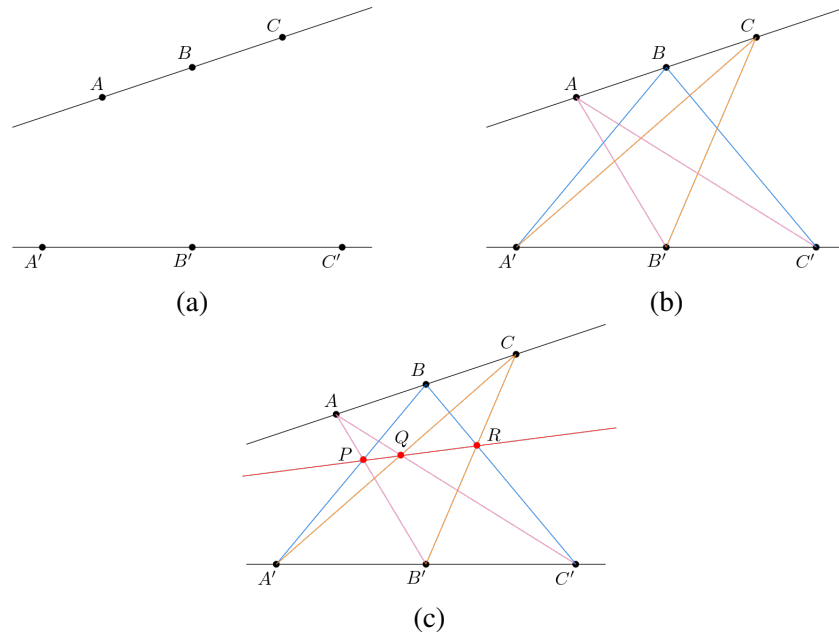


Figura 3.1: Axioma de Pappus

Este axioma puede enunciarse también en el espacio afín, dado que hemos probado que basta eliminar una recta del espacio proyectivo para obtener un espacio afín, si tomamos la recta  $PQR$  como recta del infinito el enunciado continúa siendo válido, y se corresponde al siguiente enunciado:

**Teorema 3.2. Pappus afín.** Sean  $\ell$  y  $\ell'$  dos rectas afines y  $A, B$  y  $C$ ;  $A', B'$  y  $C'$  dos ternas de puntos sobre cada una de ellas respectivamente. Si las rectas  $AB'$  y  $A'B$ , así como,  $AC'$  y  $C'A$  son paralelas entre sí, entonces  $BC'$  y  $B'C$  también lo son y  $P, Q$  y  $R$  son puntos del infinito (por consecuente colineales).

Otra opción de representación que posee este teorema es su versión dual proyectiva, que se enuncia como sigue.

**Teorema 3.3. Pappus dual.** Dados  $A, B$  dos puntos, y  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  seis rectas distintas entre sí y distintas a la recta  $AB$ , tales que las tres primera pertenecen al haz de rectas centrado en  $A$ , y las restantes al haz de rectas centrado en  $B$ . Entonces las rectas  $p = (a_1 \cap b_2) + (a_2 \cap b_1)$ ;  $q = (a_1 \cap b_3) + (a_3 \cap b_1)$ ;  $r = (a_2 \cap b_3) + (a_3 \cap b_2)$  son concurrentes.

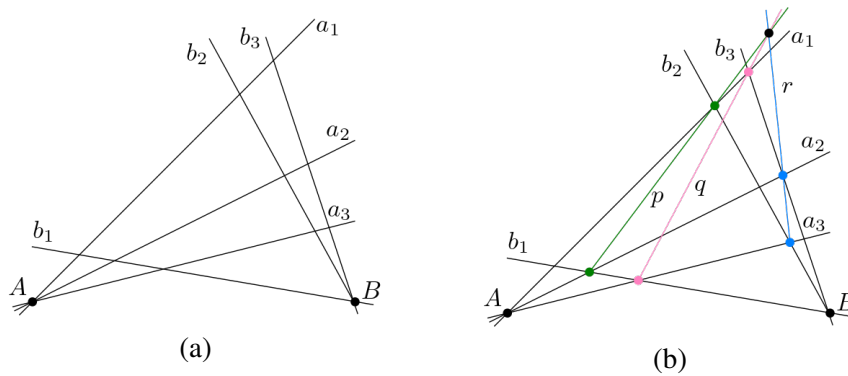


Figura 3.2: Axioma de Pappus dual

**Definición 3.4.** Diremos que un espacio es *pappusiano* si cumple P1-P4 y, para toda configuración de seis puntos y dos rectas dispuesta como dicta el axioma de Pappus (3.1), se verifica el mismo. De lo contrario diremos que el espacio es *no pappusiano*.

### 3.1.1. Pappus implica Desargues

**Teorema 3.5. de Hessenberg.** El axioma de Pappus (3.1) implica el Teorema de Desargues (2.1).

*Demostración.* Sea  $O, A, B, C, A', B'$  y  $C'$  una configuración de siete puntos que satisface la hipótesis del Teorema de Desargues (2.1), entonces construimos  $P, Q, R$  como dicta el citado teorema y probemos que están alineados.

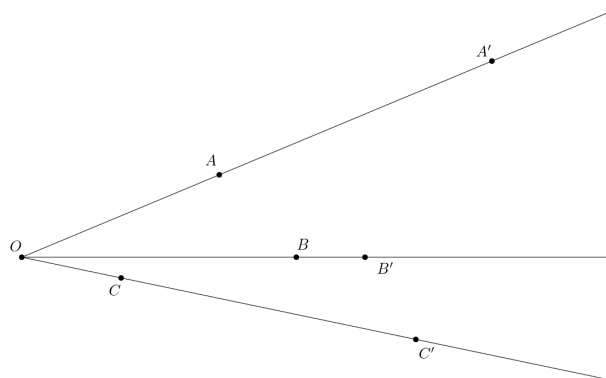


Figura 3.3: Teorema de Hessenberg. Configuración inicial

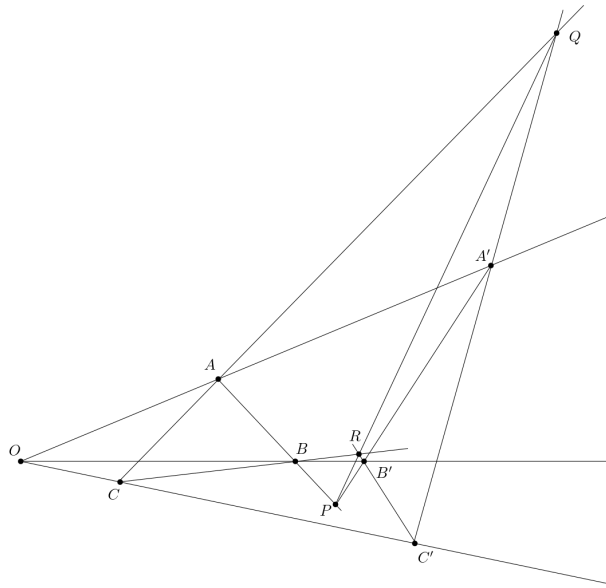


Figura 3.4: Paso 0

En un primer paso comenzamos definiendo  $S = A'C' \cap AB$  para, a continuación, aplicar el axioma de Pappus (3.1) a la configuración formada por  $O, C, C', B, S, A$ , que determina tres puntos colineales

$$P_1 = OS \cap BC \quad ; \quad P_2 = OA \cap BC' \quad ; \quad Q$$

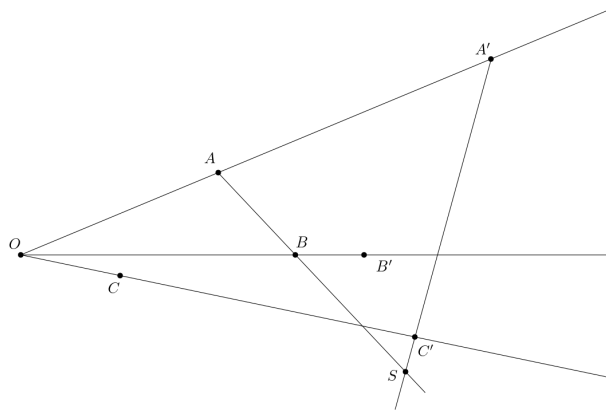


Figura 3.5: Paso 1



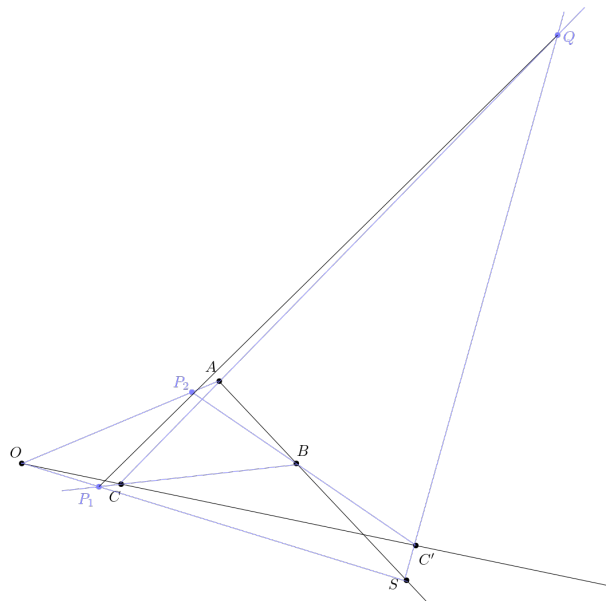


Figura 3.6: Paso 1.1

En un segundo paso, tomamos  $O, B, B', C, A', S$ , y en virtud de P5 obtenemos la colinealidad de

$$P_2 \ ; \ P_3 = OS \cap B'C' \ ; \ P$$

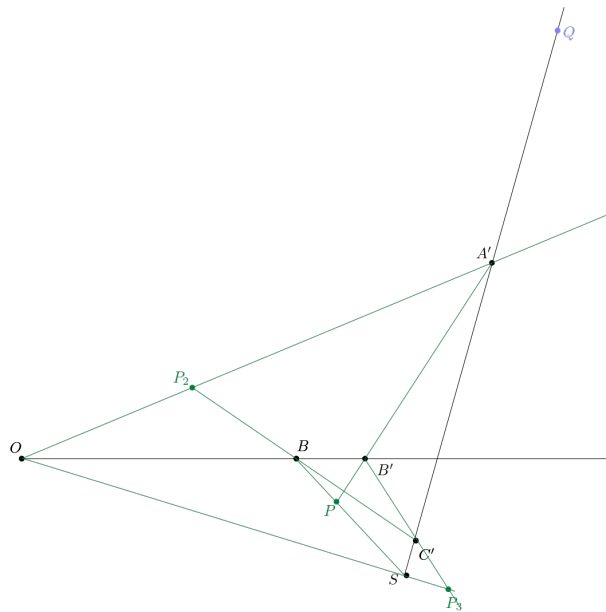


Figura 3.7: Paso 2

Por último, elegimos los puntos  $B, C', P_2, P_3, P_1, S$  y concluimos, gracias al axioma de Pappus (3.1), la colinealidad de

$$R \quad ; \quad P = BS \cap P_2P_3 \quad ; \quad Q = C'S \cap P_1P_2$$

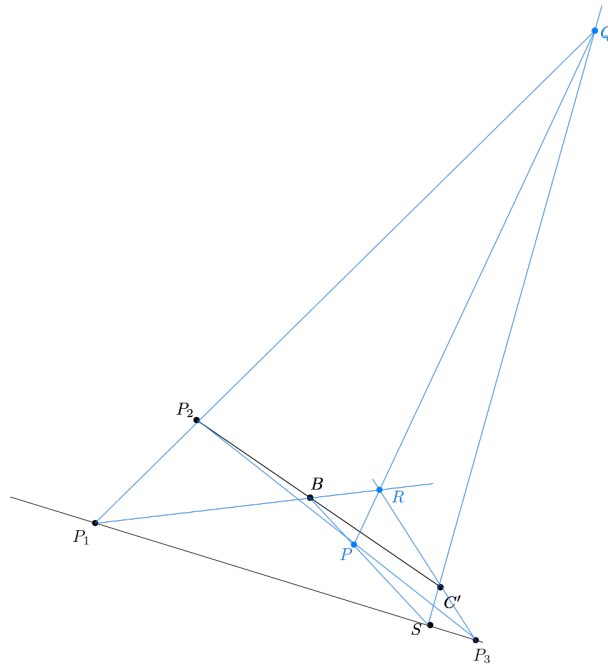


Figura 3.8: Paso 4

□

*Nota.* En cada paso previo al uso del axioma de Pappus (3.1) deberíamos comprobar que la configuración sobre la cual se aplica está formada por puntos distintos. Si no hemos hecho notar este aspecto en el momento pertinente se debe a la trivialidad de esta distinción, puesto que los puntos pertenecientes a la configuración de partida son diferentes por hipótesis, y los que introducimos posteriormente son resultado de la intersección de las rectas resultantes al unir los primeros.

**Corolario 3.6.** *Todo espacio proyectivo pappusiano, es también desarguesiano.*

**Corolario 3.7.** *Todo espacio proyectivo que no cumpla el axioma de Desargues, tampoco verifica el axioma de Pappus.*

Por consiguiente, la proposición (2.13) constituye un ejemplo de espacio proyectivo no pappusiano. Además, refleja la independencia de P1-P4 con respecto al axioma de Pappus, lo que nos permite afirmar que podemos adoptar este enunciado como séptimo axioma.

P7: Axioma de Pappus. (3.1)

### 3.1.2. Espacio proyectivo desarguesiano no pappusiano

Más adelante estudiaremos el *plano proyectivo de los cuaterniones*, que constituye un ejemplo de plano proyectivo desarguesiano no pappusiano, revelando que el recíproco del Teorema de Hesseberg (3.5) no es cierto.

## 3.2. El Teorema Fundamental

**Teorema 3.8. Teorema fundamental de la geometría proyectiva (TF):** Sean  $\ell$  y  $\ell'$  dos rectas y sean  $A, B$  y  $C; A', B'$  y  $C'$  dos ternas de puntos sobre  $\ell$  y  $\ell'$  respectivamente. Entonces existe una única proyectividad que envía la primera terna en la segunda.

### 3.2.1. Demostración del Teorema Fundamental

Como hemos adelantado al comienzo del capítulo, la principal motivación que nos ha llevado a presentar el axioma de Pappus (3.1) reside en demostrar el TF (3.8). Realizaremos la prueba de manera constructiva, en presencia de los axiomas P1-P6, pero previamente presentaremos una serie de resultados previos para poder llegar a ella.

**Proposición 3.9.** Si una configuración proyectiva cumple el Teorema fundamental (3.8) entonces también verifica el Axioma de Pappus (3.1).

*Demostración.* Sean  $\ell, \ell', A, B, C, A', B'$  y  $C'$  como en el enunciado del axioma de Pappus (3.1), y supongamos que esta configuración verifica el Teorema fundamental (3.8). Veamos que los puntos  $P = AB' \cap A'B; Q = AC' \cap A'C; R = BC' \cap B'C$  son colineales.

En primer lugar tracemos las rectas  $AB', A'B, AC', A'C$  para obtener  $P$  y  $Q$ , y denotemos  $\ell''$  a la recta  $PQ$  y como  $A''$  al punto de incidencia de la misma con  $AA'$ .

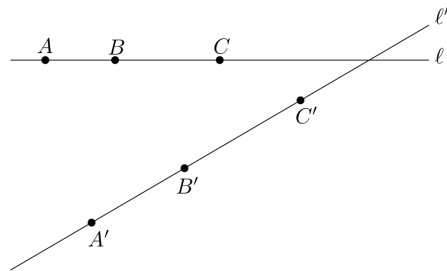


Figura 3.9: Proposición 3.39.  
Configuración inicial

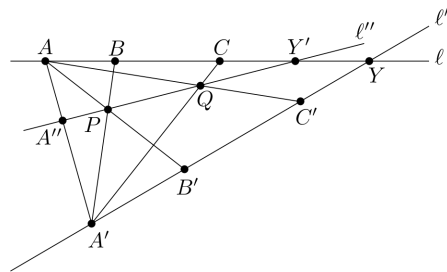


Figura 3.10: Paso 1

Ahora, en virtud de la proposición 2.30, podemos construir una proyectividad que envía  $ABC$  en  $A'B'C'$  como sigue:  $l \bar{\bar{\wedge}} l'' \bar{\bar{\wedge}} l'$  con centro en  $A'$  y  $A$  respectivamente. A continuación, consideremos los puntos de incidencia  $Y = l \cap l'$ ,  $Y' = l' \cap l''$  y, observemos, que las proyectividades anteriores realizan las transformaciones siguientes  $ABCY \bar{\bar{\wedge}} A''PQY' \bar{\bar{\wedge}} A'B'C'Y'$

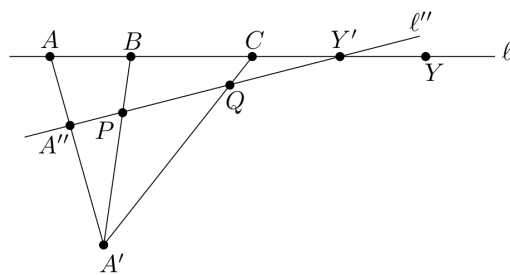


Figura 3.11: Paso 3  
 $l \bar{\bar{\wedge}} l''$  con centro en  $A'$

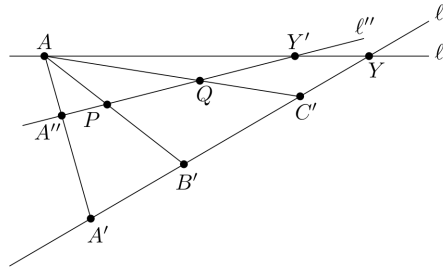


Figura 3.12: Paso 4  
 $\ell'' \bar{\wedge} \ell'$  con centro en  $A$

Por otro lado, definamos  $R' := B'C \cap \ell''$  y  $C'' := BR' \cap \ell'$  y consideremos la cadena de perspectivas  $\ell \bar{\wedge} \ell'' \bar{\wedge} \ell'$  esta vez con centros  $B'$  y  $B$  respectivamente. En este caso

$$ABCY \bar{\wedge} PB''R'Y' \bar{\wedge} A'B'C''Y'$$

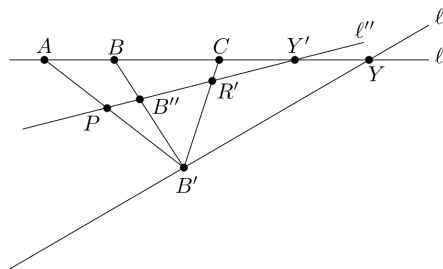


Figura 3.13: Paso 5  
 $\ell \bar{\wedge} \ell''$  con centro en  $B'$

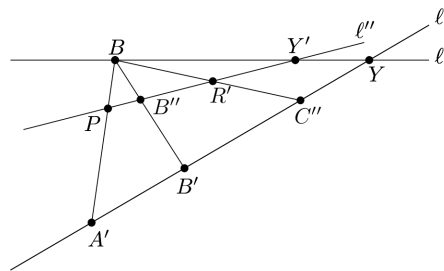


Figura 3.14: Paso 6  
 $\ell'' \bar{\wedge} \ell'$  con centro en  $B$

Por consiguiente, tenemos dos proyectividades desde  $\ell$  a  $\ell'$  que transforman  $ABY$  en  $A'B'Y'$ , luego por el TF (3.8) concluimos que se trata de la misma. Con esto, también han de coincidir  $C' = C''$  y  $R' = R$ , por lo tanto  $P, Q$  y  $R$  están alineados.

□

**Lema 3.10.** Sea  $\ell \bar{\wedge} m \bar{\wedge} n$ , centrada en  $O$  y  $P$  resp. y donde  $\ell \neq n$  y supongamos que, o bien  $\ell, m, n$  son concurrentes, o bien  $O, P, \ell \cap n$  son colineales. Entonces,  $\ell$  está en perspectiva con  $n$ , es decir, existe un punto  $Q$  tal que la perspectiva que transforma  $\ell$  en  $n$  con centro en  $Q$  da lugar a las mismas imágenes que la proyectividad  $\ell \bar{\wedge} n := \ell \bar{\wedge} m \bar{\wedge} n$ .

**Observación 4.** Omitimos la demostración de este lema por su similitud a la prueba desarrollada a continuación, no obstante puede encontrarse en [6].

**Lema 3.11.** Sea  $\ell \bar{\wedge} m \bar{\wedge} n$ , con centro en  $O$  y  $P$  resp. y donde  $\ell \neq n$  y supongamos que, ni  $\ell, m, n$  son concurrentes, ni  $O, P, \ell \cap n$  son colineales. Entonces existe una recta  $m'$  y puntos  $O' \in n, P' \in \ell$  de forma que  $\ell \bar{\wedge} m' \bar{\wedge} n$  con centros en  $O'$  y  $P'$  resp. da lugar a la misma proyectividad que  $\ell \bar{\wedge} m \bar{\wedge} n$ .

*Demostración.* Sean  $\ell, m, n, O$  y  $P$  los elementos de la configuración dada.

Consideremos dos puntos  $A, A' \in \ell$  tales que  $AA' \bar{\wedge} BB' \bar{\wedge} CC'$  con centros en  $O, P$  respectivamente.

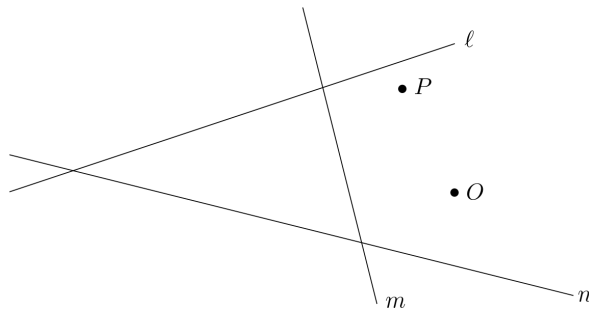


Figura 3.15: Lema 3.41  
Configuración inicial

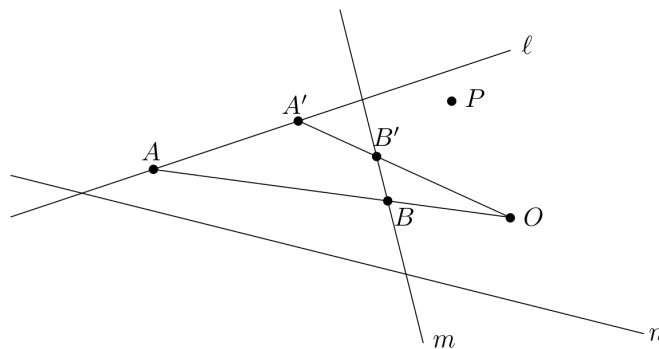


Figura 3.16: Paso 2  
 $\ell \perp m$  con centro en  $O$

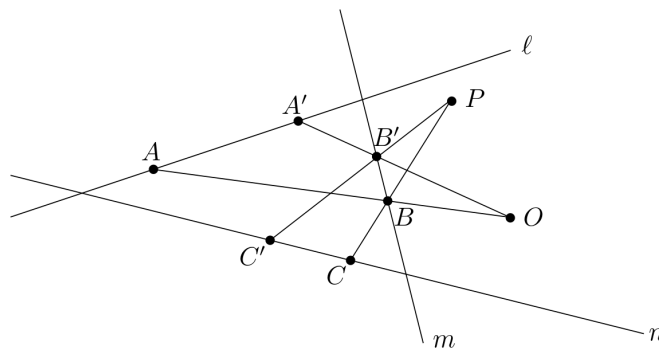


Figura 3.17: Paso 3  
 $m \perp n$  con centro en  $P$

Definamos  $O' = OP \cap n$ . Ahora, dado que estamos suponiendo que  $O, P$  y  $X := \ell \cap n$  no están alineados, entonces  $O' \neq X$ , con lo que  $O' \notin \ell$ . A continuación, dibujamos las rectas  $O'A, O'A'$  y denotamos  $D := O'A \cap PC$  y  $D' := O'A' \cap PC'$ . Observando la configuración actual notamos que los lados correspondientes de los



triángulos  $ABD$  y  $A'B'D'$  inciden respectivamente en los puntos  $O, P, O'$  que son colineales, entonces, por el enunciado de Desargues dual (2.2), concluimos que las rectas que  $\ell, m$  y  $m_1 := DD'$  concurre, y lo hacen en el punto  $Y := \ell \cap m$ .

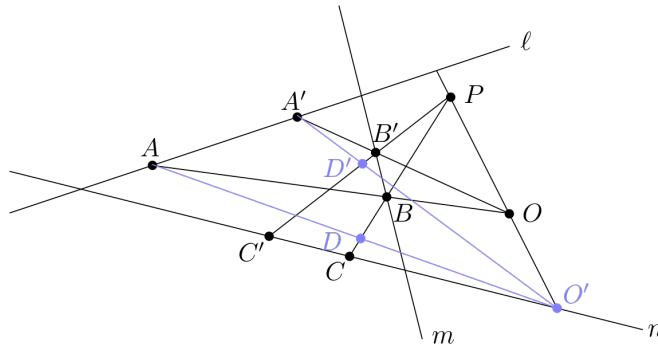


Figura 3.18: Paso 4

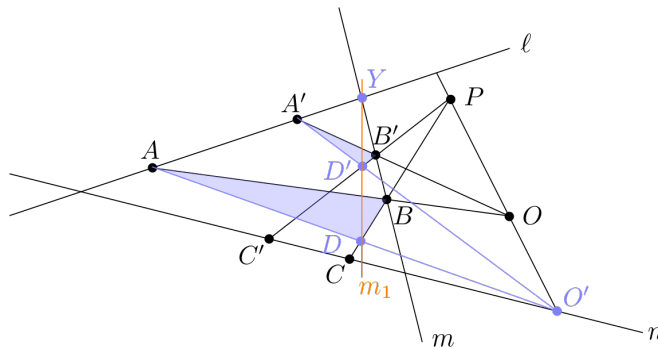


Figura 3.19: Paso 5

Además,  $m_1$  queda determinada por los puntos  $D$  e  $Y$ , con lo que si  $A'$  varía a lo largo de  $\ell$ , también lo hará  $D'$  sobre  $m_1$ .

Con lo anterior observamos que ambas proyectividades transforman  $A, A'$  en  $C$  y  $C'$ , luego la proyectividad inicial coincide con  $\ell \bar{\wedge} m_1 \bar{\wedge} n$  (centradas en  $O$  y  $P$  resp.) como queríamos ver.

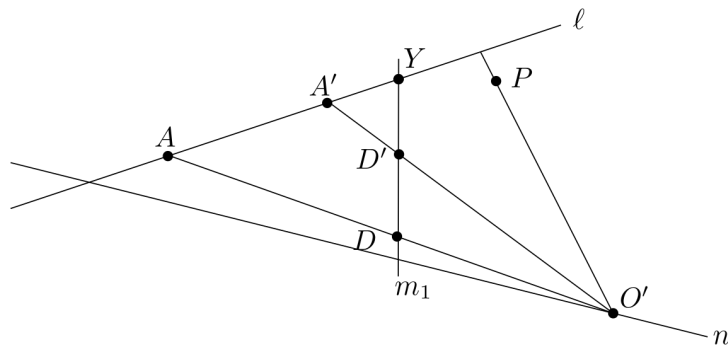


Figura 3.20: Paso 6  
 $\ell \bar{\wedge} m_1$  con centro en  $O'$

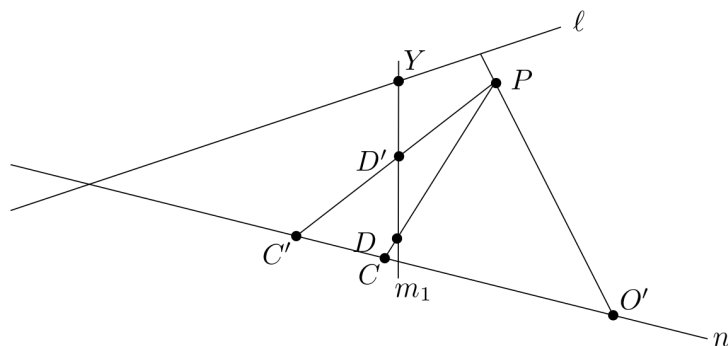


Figura 3.21: Paso 7  
 $m_1 \bar{\wedge} n$  con centro en  $P$

□

**Lema 3.12.** Sean  $\ell$  y  $\ell'$  dos rectas distintas, entonces cualquier proyectividad  $\ell \bar{\wedge} \ell'$  puede ser expresada como composición de dos perspectivas.

*Demostración.* Recordemos que habíamos definido una perspectiva como composición de proyectividades, por tanto, basta ver que cualquier cadena de perspectivas de longitud  $n > 2$  puede reducirse a una de longitud  $n - 1$ . En particular, basta ver que podemos reducir la composición de tres perspectivas a dos. Probemos esto por inducción.

El argumento del lema anterior mostraba que podemos mover la recta  $m$  para evitar cualquier punto dado, con lo que será suficiente probar que  $\ell \bar{\wedge} m \bar{\wedge} n \bar{\wedge} o$  con centros en  $P, Q$  y  $R$  resp. es una cadena de tres perspectivas donde  $\ell \neq o$ , y así, la proyectividad resultante  $\ell \bar{\wedge} o$  podrá ser expresada como la composición de, a lo sumo, de dos perspectivas.

En primer lugar, si  $m = \ell$ , ó  $m = n$ , ó  $m = o$ , ó  $n = \ell$ , ó  $n = o$  en virtud del lema 3.10 el problema se reduce trivialmente a la composición de dos perspectivas, por tanto supondremos que las cuatro rectas son distintas entre sí.

En segundo lugar, utilizando el resultado del lema 3.10 tenemos uno de los siguientes casos:

- $m \bar{\wedge} o$  en cuyo caso habríamos terminado.
- Podemos mover  $n$  de forma que los centros de las perspectivas  $m \bar{\wedge} n$  y  $n \bar{\wedge} o$  se encuentren sobre  $m$  y  $o$  resp., dando lugar a:  $\ell \bar{\wedge} m \bar{\wedge} n \bar{\wedge} o$  con centros en  $P, Q$  y  $R$  resp.;  $\ell, m, n, o$  distintas entre sí;  $Q \in o$  y  $R \in m$ .  
Si ahora definimos  $X := \ell \cap m, Z := n \cap o$  y trazamos la recta  $XZ$ , asumiendo que  $X \notin o$  (ya que de lo contrario por el lema 3.11 podríamos mover  $m$  hasta  $X \notin o$ ), obtendremos que,  $Q \notin XZ$ . Proyectamos  $m \bar{\wedge} XZ$  con centro en  $Q$ , de forma que  $BB' = HH'$ .

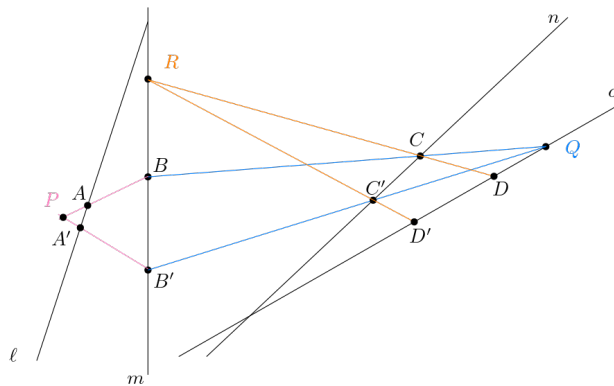


Figura 3.22: Lema 3.42  
Paso 1

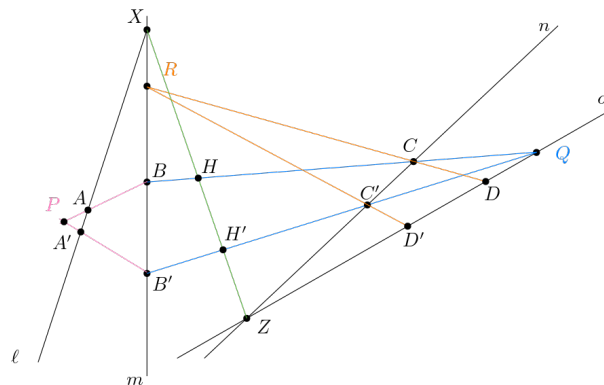


Figura 3.23: Paso 2

Ahora,  $CDH$  está en perspectiva con  $C'D'H'$  desde  $Z$ , y los pares de lados correspondientes inciden en  $Q$ ,  $R$  y, en virtud de P5, el par restante lo hace en un punto  $N \in QR$ . De este modo,  $N$  queda determinado por la recta  $DH$  y además podemos afirmar que, pese a variar  $D'$  y  $H'$ ,  $N$  sigue incidiendo sobre la recta  $D'H'$ , en otras palabras  $XZ \overline{\wedge} o$  centrado en  $N$ .

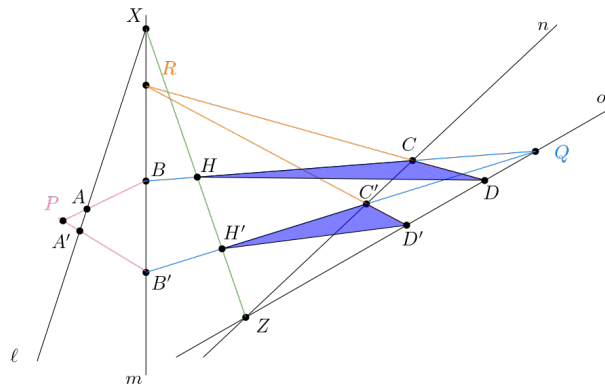


Figura 3.24: Paso 3

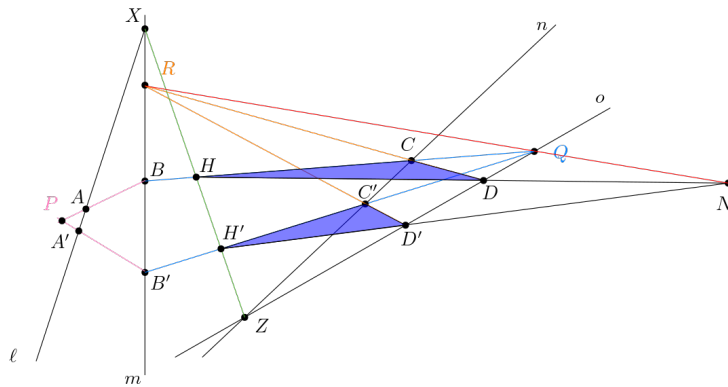


Figura 3.25: Paso 4

Análogamente, los triángulos  $ABH$  y  $A'B'H'$  están en perspectiva respecto de  $X$ , luego haciendo uso de P5 de nuevo, tenemos que  $AH$  y  $A'H'$  inciden en  $M \in PQ$ . En consecuencia,  $\ell \bar{\wedge} XZ$  centrado en  $M$ .

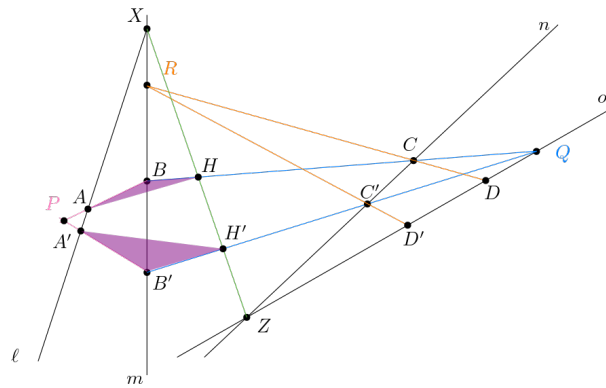


Figura 3.26: Paso 5

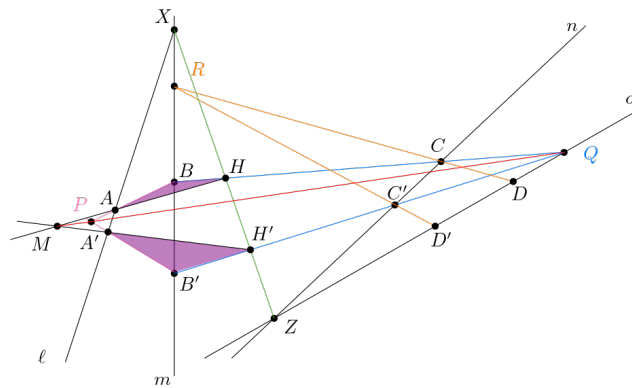


Figura 3.27: Paso 6

En síntesis, tenemos la proyectividad de partida expresada como composición de dos proyectividades:  $\ell \bar{\wedge} XZ \bar{\wedge} o$  centradas en  $M$  y  $N$  resp.

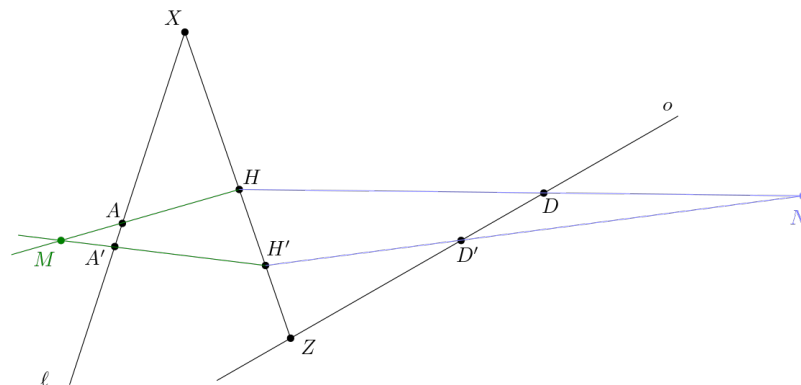


Figura 3.28: Paso 7

□

### 3.2.2. Pappus y Desargues implican TF

**Teorema 3.13.** *Los axiomas de Pappus (3.1) y Desargues (2.1), en presencia de P1-P4, implican el Teorema Fundamental (3.8).*

*Demostración.* Dada una recta  $\ell$ , y dos ternas de puntos incidentes en ella y distintos entre sí,  $A, B, C; A', B', C'$ , debemos probar que existe una única proyectividad que transforma la primera terna en la segunda.

Seleccionemos una recta  $\ell'$  sobre la que no incida ninguno de los puntos dados y proyectemos  $A', B', C'$  sobre  $\ell'$  dando lugar resp. a los puntos  $A'_1, B'_1, C'_1$ . Así, hemos reducido el problema a  $A, B, C \in \ell$  y  $A'_1, B'_1, C'_1 \in \ell'$  donde todos los puntos difieren de  $\ell \cap \ell'$ . En esta situación basta ver que existe una única proyectividad tal que  $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$ , pero ya sabemos que dicha proyectividad existe dado que lo probamos en la proposición 2.30, luego se trata de ver que cualquier otra proyectividad coincide con esta.

caso 1: Tomemos una proyectividad cualquiera y supongamos que es, de hecho, una perspectividad. Sea  $\ell \bar{\wedge} \ell'$  centrada en  $O$  tal que  $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$ . Definamos  $P := AB' \cap A'B$ ,  $Q := AC' \cap A'C$  y sea  $\ell'' := PQ$ . Veamos que  $\ell''$  pasa por  $X := \ell \cap \ell''$ .

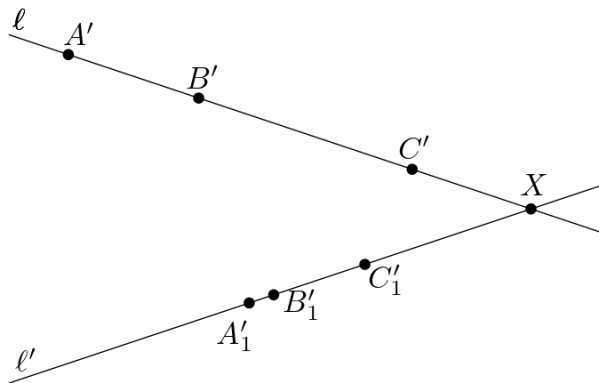


Figura 3.29: Teorema 3.43  
Caso 1. Configuración inicial

En vista de P5, los pares de lados correspondientes de los triángulos  $A'BC$  y  $A'B'C'$  (que se encuentran en perspectiva desde  $O$ ), inciden en los puntos  $P, Q$  y  $X$  resp. Por consiguiente,  $\ell''$  queda determinada por los puntos  $P$  y  $X$ , lo que nos permite observar que, a medida que variamos  $C$ , la perspectividad  $\ell \bar{\wedge} \ell'$  centrada en  $O$  coincide con  $\ell \bar{\wedge} \ell'' \bar{\wedge} \ell'$  con centros en  $A'$  y  $A$  respectivamente.



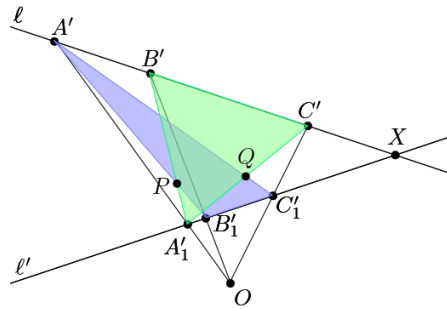


Figura 3.30: Caso 1. Paso 1

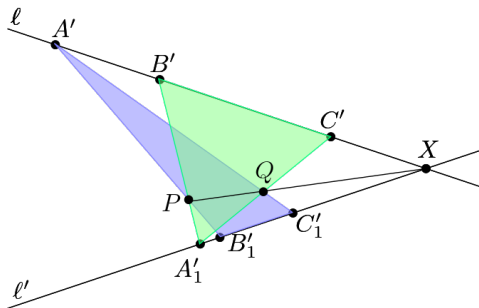


Figura 3.31: Caso 1. Paso 2

caso 2: Supongamos esta vez que tomamos una proyectividad cualquiera que no es perspectividad, sin embargo, por el lema 3.12 puede ser expresado como composición de, exactamente, dos perspectividades. Además, en virtud del lema 3.11 podemos asumir que los centros inciden, respectivamente sobre  $l'$  y  $l$ . Así tenemos  $l \bar{\bar{\wedge}} l'' \bar{\bar{\wedge}} l'$  con centro en  $R'$  y  $R$ ; entonces  $ABC \bar{\bar{\wedge}} A''B''C'' \bar{\bar{\wedge}} A'B'C'$  y, por tanto, tenemos la siguiente configuración siguiente:

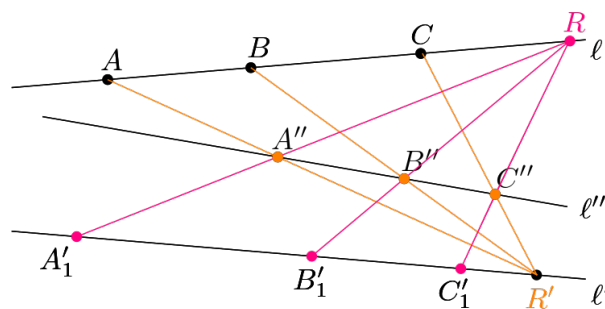


Figura 3.32: Caso 2.  
Configuración inicial

Aplicando ahora el axioma de Pappus (3.1) el punto  $P := AB' \cap A'B$  incide en la recta  $\ell''$ , análogamente aplicando el mismo axioma a las ternas  $ACR$  y  $A'C'R'$  obtenemos que el punto  $Q := AC' \cap A'C$  incide en la recta  $\ell''$ .

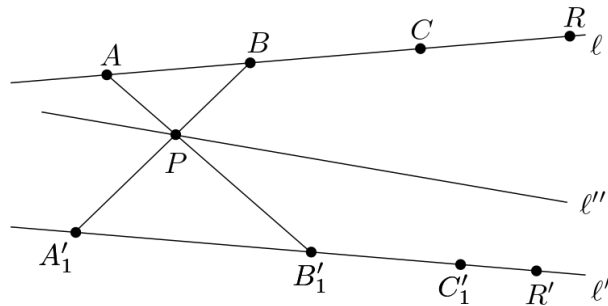


Figura 3.33: Caso 2. Paso 1

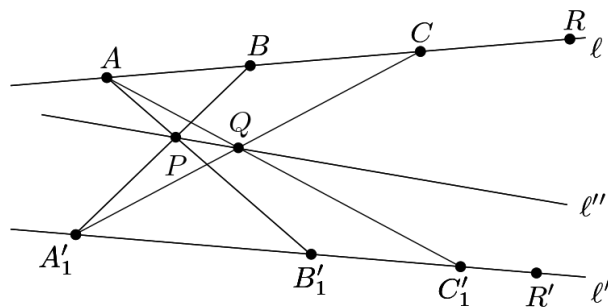


Figura 3.34: Caso 2. Paso 2

Con todo esto, la recta  $\ell''$  es la empleada en la proposición 3.10 para construir la proyectividad  $\ell \bar{\wedge} \ell'' \bar{\wedge} \ell'$  con centro en  $A'$  y  $A$  respectivamente, por lo que si  $D \in \ell$  es un punto cualquiera y definimos  $D'' := R'D \cap \ell''$  y  $D' = RD'' \cap \ell'$ , el resultado de aplicar el axioma de Pappus a  $ADR, A'D'R'$ , es que los puntos  $AD' \cap A'D, A'', D''$  son colineales, y además  $AD' \cap A'D \in \ell''$ , lo que implica que  $D$  tiene como imagen  $D''$  para la proyectividad de la proposición 3.10 luego, en efecto, estas coinciden.

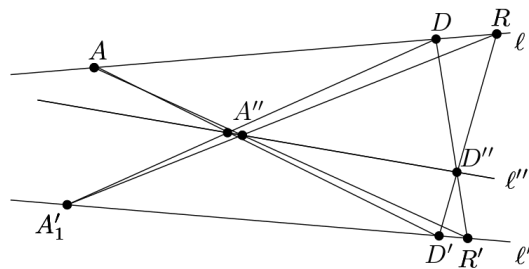


Figura 3.35: Caso 2. Paso 3

□

**Corolario 3.14.** (del Teorema Fundamental). Una proyectividad entre las rectas  $\ell$  y  $\ell'$  ( $\ell \neq \ell'$ ) es una perspectividad si, y sólo si, mantiene fijo su punto de incidencia  $Y = \ell \cap \ell'$

En resumen, hemos probado, en presencia de P1-P4, las siguientes implicaciones entre los axiomas expuestos:

- **Teorema de Hessemberg:** Pappus  $\Rightarrow$  Desargues. (3.5)
- TF  $\Rightarrow$  Pappus. (3.9)
- Pappus y Desargues  $\Rightarrow$  TF. (3.13)



# Capítulo 4

## Planos proyectivos sobre anillos de división

Hasta ahora hemos presentado la geometría proyectiva únicamente desde una visión sintética, no obstante, desde el punto de vista analítico sabemos que para construir un plano proyectivo hemos de hacerlo sobre un cuerpo. En este marco se presenta el actual capítulo, destacando los planos proyectivos construidos sobre unas estructuras determinadas: los anillos de división. El estudio de planos proyectivos sobre estos cuerpos enriquecerán la construcción axiomática, permitiéndonos estudiar con mayor facilidad, en capítulos posteriores, la propiedad del orden a través de ejemplos concretos, así como profundizar en los automorfismos e isomorfismos de una forma menos abstracta.

### 4.1. Introducción a los anillos de división

**Definición 4.1.** Un *anillo de división* es un conjunto, al que denotaremos  $\mathbb{F}$ , junto con dos operaciones,  $+$  y  $\cdot$ , a las que nos referiremos como *suma* y *producto* respectivamente, tal que:

- $(\mathbb{F}, +)$  es un grupo abeliano;
- Los elementos no nulos de  $\mathbb{F}$  forman un grupo para el producto;
- La distributividad de la suma respecto al producto.

De hecho, un anillo de división es un cuerpo, sea conmutativo o no, sin embargo, en general se llama cuerpo a aquellos que son conmutativos. Por tanto diremos que, un anillo de división  $\mathbb{F}$  es un cuerpo si, y sólo si,  $(\mathbb{F}, \cdot)$  es un grupo conmutativo.

### 4.1.1. Los cuaterniones

El ejemplo más conocido de anillo de división es el cuerpo de *los cuaterniones*.

Sea  $\mathbb{H} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , entonces la operación suma da una operación de adición. A continuación, definimos los siguientes elementos en  $\mathbb{H}$ :

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 0, 0, 0) & i &= (0, 1, 0, 0) \\ j &= (0, 0, 1, 0) & k &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

con lo que tenemos

$$\begin{aligned} a_1 * 1 &= (a_1, 0, 0, 0) & a_2 * i &= (0, a_2, 0, 0) \\ a_3 * j &= (0, 0, a_3, 0) & a_4 * k &= (0, 0, 0, a_4) \end{aligned}$$

de dónde se sigue

$$a_1 + a_2 * i + a_3 * j + a_4 * k = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

Si elegimos el 1 como el elemento neutro para el producto, podemos definir  $1 * a = a * 1 = a$ ; además podemos establecer las siguientes relaciones entre los elementos anteriores:

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 & j^2 &= -1 & k^2 &= -1 \\ i * j &= k & j * k &= i & k * i &= j \\ j * i &= -k & k * j &= -i & i * k &= -j \end{aligned}$$

Con el fin de que se cumplan las reglas de la distributividad, el producto sobre  $\mathbb{H}$  se define de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) * (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k) &= \\ (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) &+ \\ (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3)i &+ \\ (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 - a_4b_2)j &+ \\ (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)k & \end{aligned}$$

Para concluir, con las estructuras introducidas, definimos el grupo de *los cuaterniones* como  $(\mathbb{H}, \cdot)$  y notemos que, en efecto, se trata de un anillo de división.

- La no conmutatividad se hace evidente tras haber definido  $ij = k$  y  $ji = -k$ .

- El grupo de los cuaterniones es isomorfo al subanillo  $M_2(\mathbb{C})$ , de donde se sigue la asociatividad del producto. <sup>1</sup>
- La asociatividad del producto con respecto de la suma es trivial en base a lo anterior.
- En relación a la existencia de inversos para el producto, tomemos  $a = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$  con  $a \neq 0$ , entonces dado que

$$(a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) * (a_1 - a_2i - a_3j - a_4k) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

si tomamos  $\|a\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$  y  $\bar{a} = a_1 - a_2i - a_3j - a_4k$  observamos que

$$\frac{\bar{a}}{\|a\|^2} = \frac{a_1}{\|a_1\|^2} - \frac{a_2}{\|a_2\|^2}i - \frac{a_3}{\|a_3\|^2}j - \frac{a_4}{\|a_4\|^2}k$$

luego todo elemento en  $\mathbb{H}$  tiene inverso.

*Nota.* Como adelantamos en un capítulo anterior, el plano proyectivo de los cuaterniones sostiene el Teorema de Desargues (2.1) pero no el de Pappus (3.1).

Por un lado, sabemos que es desarguesiano porque está construido sobre un anillo de división; sin embargo, no es pappusiano ya que es condición necesaria que sea conmutativo. Como consecuencia se trata de un contraejemplo al recíproco del Teorema de Hesseberg (3.5).

### 4.1.2. Los anillos de división finitos son cuerpos

**Definición 4.2.** Sea  $\mathbb{F}$  un anillo de división, definimos la característica de  $\mathbb{F}$  como el menor entero  $p > 1$  tal que

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p \text{ veces}} = 0$$

si no existe este  $p$  diremos que  $\mathbb{F}$  tiene característica cero. Representamos esto como  $Char(\mathbb{F})$

**Proposición 4.3.** La característica de cualquier anillo de división es un número primo.

*Demostración.* Sea  $\mathbb{F}$  un anillo de división con  $Char(\mathbb{F}) = p$ , y supongamos que  $p = m * n$  con  $m, n > 1$ , entonces

$$\underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{m \text{ veces}} * \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ veces}} = 0$$

luego necesariamente o bien  $m = 0$ , o bien  $n = 0$  llegando así a un absurdo.  $\square$

<sup>1</sup>Su demostración se puede encontrar en el ejercicio 19 del texto [5].

**Proposición 4.4.** *Para cada  $p$  primo, existe un cuerpo  $\mathbb{F}_p$  de  $p$  elementos y característica  $p$ .*

*Demostración.* Tomemos el conjunto  $F = \{0, 1, \dots, p-1\}$  y definamos las operaciones suma y producto tratando los símbolos anteriores como números enteros y operando módulo  $p$ , entonces como establecimos en 4.1,  $\mathbb{F}_p$  es un cuerpo y, dado que estamos trabajando módulo  $p$ , es evidente que  $\text{Char}(\mathbb{F}_p) = p$ .  $\square$

**Proposición 4.5.** *Sea  $\mathbb{F}_q$  donde  $q = p^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$  y  $p$  primo, entonces  $\mathbb{F}_q$  es un cuerpo con  $\text{Char}(\mathbb{F}_q) = p$  y  $q$  elementos.*

Notemos que todo cuerpo finito tiene como característica un número primo, pero el recíproco es falso, es decir, existen cuerpos infinitos con característica primo.

Se tiene como ejemplo  $\mathbb{F}_2[X]$  el anillo de fracciones sobre el anillo de división  $\mathbb{F}_2$ ; se trata de un cuerpo infinito cuya característica es 2.

**Teorema 4.6. Teorema de Wedderburn.**

*Todo anillo de división finito es un cuerpo conmutativo.*

*Demostración.* Se puede ver la prueba en [5]  $\square$

Los cuaterniones son un ejemplo de cuerpo no conmutativo respecto de la suma ni del producto.

**Corolario 4.7.** *Como consecuencia del teorema anterior se tiene que todo plano proyectivo finito y desargésiano es, de hecho, pappusiano.*<sup>2</sup>

Ahora que hemos comprobado que  $\mathbb{F}_p$  es, en efecto, un cuerpo, podemos construir un plano proyectivo sobre él.

## 4.2. Construcción de planos proyectivos sobre anillos de división

### 4.2.1. Coordenadas

**Definición 4.8.** Sea  $\mathbb{F}$  un anillo de división, entonces definimos *el plano proyectivo de coordenadas sobre  $\mathbb{F}$*  como la configuración  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2 = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ , donde

$$\mathcal{P} = \{[(x_1, x_2, x_3)] : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F} \ x_1, x_2, x_3 \neq 0\} = \mathbb{F} \setminus \{0\}$$

<sup>2</sup>Véase el Teorema 4.25



$$\mathcal{R}_{a,b,c} = \{ [(x_1, x_2, x_3)] \in \mathcal{P} \} : x_1 a + x_2 b + x_3 c = 0 : a, b, c \in \mathbb{F} \ a, b, c \neq 0 \}$$

**Observación 5.**

- La relación de equivalencia que define las clases que son elementos de  $\mathcal{P}$ , viene dada por  $(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$  para  $\lambda \in \mathbb{F} \ \lambda \neq 0$ .
- Si en  $\mathcal{R}_{a,b,c}$  incide un punto  $(x_1, x_2, x_3)$ , lo hace toda su clase, pues si  $[(x_1, x_2, x_3)] = [(y_1, y_2, y_3)]$  entonces  $y_1 a + y_2 b + y_3 c = \lambda x_1 a + \lambda x_2 b + \lambda x_3 c = \lambda(x_1 a + x_2 b + x_3 c) = 0$ .
- Observemos que el producto por escalares se define por la izquierda en  $\mathbb{F}$ , mientras que el producto entre elementos del cuerpo se da por la derecha.

**Construcción de planos proyectivos sobre  $\mathbb{F}$**

**Proposición 4.9.**  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  es un plano proyectivo.

*Demostración.* Como en demostraciones anteriores, para comprobar que  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  es un plano proyectivo hemos de ver que se cumplen los axiomas P1-P4.

P1: Sean  $Q_1 = [(x_1, x_2, x_3)]$ ,  $Q_2 = [(y_1, y_2, y_3)]$  dos elementos diferentes de  $\mathcal{P}$ . Para probar que ambos inciden en una única recta hemos de ver que existen  $a, b$  y  $c$  únicos tales que

$$x_1 a + x_2 b + x_3 c \tag{4.1}$$

$$y_1 a + y_2 b + y_3 c \tag{4.2}$$

$$\tag{4.3}$$

Siguiendo lo anterior tenemos:

$$a = \frac{x_2 b + x_3 c}{x_1} = \frac{y_2 b + y_3 c}{y_1}$$

$$y_1 x_2 b + y_1 x_3 c = x_1 y_2 b + x_1 y_3 c$$

$$b(y_1 x_2 - x_1 y_2) + c(y_1 x_3 - x_1 y_3)$$

$$b = -c \frac{y_1 x_3 - x_1 y_3}{y_1 x_2 - x_1 y_2}$$

Por consiguiente,  $R_{\left(\frac{x_2 b + x_3 c}{x_1}, -c \frac{y_1 x_3 - x_1 y_3}{y_1 x_2 - x_1 y_2}, c\right)}$  es una recta sobre la que se encuentran  $Q_1$  y  $Q_2$ .

Para ver la unicidad es suficiente darse cuenta que, por la forma en la que está definido el producto,  $R_{a,b,c}$  coincide con  $R_{a\mu,b\mu,c\mu}$  ya que  $x_1a + x_2b + x_3cx_1a\mu + x_2b\mu + x_3c\mu = 0$ . Por tanto, la relación de pertenencia de los puntos a la recta es independiente de la elección de  $c$  ya que esta será la misma sin importar el valor de este parámetro.

- P2: Debido a los papeles simétricos que toman los puntos y las rectas en este contexto, es suficiente con seguir un razonamiento análogo al anterior, con la salvedad de cuidar que el producto se realiza por la izquierda en lugar de por la derecha, como fue especificado en su definición.
- P3: Basta considerar las clases  $[(1, 0, 0)]$ ,  $[(0, 1, 0)]$ ,  $[(0, 0, 1)]$ .
- P4: Sean  $[(x_1, x_2, x_3)]$ ,  $[(y_1, y_2, y_3)]$ ,  $[(z_1, z_2, z_3)]$  tres elementos diferentes de  $\mathcal{P}$ , entonces todos ellos pertenecen a  $\mathcal{R}_{a,b,c}$  con  $a, b, c \in \mathbb{F}$  solución del sistema compatible determinado siguiente:

$$x_1a + x_2b + x_3c \tag{4.4}$$

$$y_1a + y_2b + y_3c \tag{4.5}$$

$$z_1a + z_2b + z_3c \tag{4.6}$$

$$\tag{4.7}$$

□

*Nota.* Al igual que hemos presentado la construcción de un plano proyectivo sobre un anillo de división, puede realizarse el proceso paralelo con el fin de obtener un plano afín.

#### Ejemplo 4.10.

- **Sobre un anillo de división con característica 0**

Si consideramos  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  y construimos  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  nos encontramos con la construcción realizada en el capítulo 1, es decir, el plano proyectivo real.

- **Sobre un anillo de división con característica 2**

Tenemos en este caso el anillo de división  $\mathbb{F}_2$ , cuyos elementos podemos escribir como  $\{0, 1\}$ . Veamos que  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2 = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$  es el plano proyectivo de siete puntos con

$$\mathcal{P} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

$$\mathcal{R} = \{ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 : a, b, c \in \mathbb{F}_2 \text{ } a, b, c \neq 0\}.$$

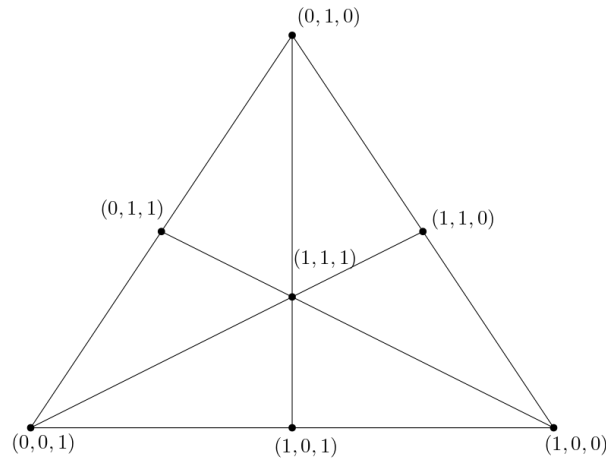


Figura 4.1:  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$

Ahora que sabemos que  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  es plano proyectivo para cualquier anillo de división  $\mathbb{F}$ , podemos exigir más y preguntarnos si verifica los axiomas P5, P6 y P7.

**Teorema 4.11.** *Los planos proyectivos construidos sobre anillos de división siempre son desarguesianos.*

*Demostración.* Consideremos  $\mathbb{F}$  anillo de división, y  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  el plano proyectivo construido sobre el mismo. Por dimensionalidad,  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  está sumergido en  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$  (plano proyectivo tridimensional sobre  $\mathbb{F}$ ) luego, si probamos que este último es desarguesiano, tendremos, por consiguiente, que el Teorema de Desargues (2.1) se cumple en el plano proyectivo que estamos estudiando.

Observemos que los puntos de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$  son clases de equivalencia de la forma  $[(x_1, x_2, x_3, x_4)]$  con no todas las coordenadas nulas, y que es equivalente a  $[(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)]$  donde  $\lambda \neq 0$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$ . En particular,  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  es un plano contenido en  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^3$ , se trata del plano de ecuación  $x_4 = 0$ .

Veamos el siguiente resultado para concluir la demostración:

*El Teorema de Desargues (2.1) se cumple en el plano proyectivo tridimensional, sin necesidad de asumir que todos los puntos del enunciado se encuentren sobre el mismo plano. En particular, el enunciado es cierto para cualquier plano que se encuentre sumergido en un espacio proyectivo tridimensional.*

En primer lugar estudiemos el caso en que los puntos  $A, B, C$  se encuentran sobre un plano  $\Sigma$ , mientras que  $A', B', C'$  están en  $\Sigma'$  distinto al primero. Por su parte, el punto  $O$  es un punto exterior a ambos planos.

Las rectas  $AB$  y  $A'B'$  se encuentran en el plano determinado por  $OAB$  e inciden en

un punto que llamaremos  $P$ , análogamente las rectas  $BC$  y  $B'C'$  están contenidas en el plano  $OBC$  e inciden en un punto  $R$ ; por su parte  $AC$  y  $A'C'$  pertenecen al plano  $OAC$  e inciden en un punto  $Q$ . Los puntos de incidencia  $P$ ,  $Q$  y  $R$  pertenecen a  $\Sigma$  y también a  $\Sigma'$ , por tanto se encuentran en la recta  $\Sigma \cap \Sigma'$ .

Para el segundo caso supongamos que  $A, B, C, A', B', C'$  son coplanarios. Elija-  
mos un punto  $X$  exterior al plano que contiene la configuración anterior (existe por S5). Comencemos dibujando las rectas que unen dicho punto con los antes mencionados y, a continuación, seleccionemos un  $D \in XB$  cualquiera distinto de  $B$ ; finalmente, definamos  $D' = XD \cap OB$ .

Ahora, los triángulos  $ADC$  y  $A'D'C'$  están en perspectiva desde  $O$  y se encuentran situados en planos distintos, luego del caso anterior se deduce que los puntos  $P' = AD \cap A'D'$ ,  $Q' = AC \cap A'C'$ ,  $R' = BC \cap B'C'$  están alineados, por lo que su proyección desde  $X$  sobre el plano que soporta la configuración inicial da lugar de nuevo a tres puntos  $P, Q$  y  $R$  colineales.

□

### 4.2.2. Automorfismos

Para poder continuar desarrollando la teoría sobre la construcción y propiedades de los planos proyectivos sobre anillos de división, es adecuado presentar algunos resultados sobre automorfismos y matrices en este contexto proyectivo.

Omitiremos la demostración de muchos de los siguientes resultados debido a que sus argumentos principales se basan en propiedades matriciales que carecen de dificultad e interés para el tema que nos concierne, no obstante, incluiremos aquellas que puedan aportar ideas interesantes.

**Definición 4.12.** Un *automorfismo sobre un anillo de división*  $\mathbb{F}$  es una aplicación biyectiva a la que representaremos por  $\sigma$  y que se comporta como sigue,

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ a &\longmapsto a^\sigma \end{aligned}$$

tal que  $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$  y  $(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$ . De donde se sigue  $0^\sigma = 0$  y  $1^\sigma = 1$ .

**Definición 4.13.** Una matriz  $A$  con coeficientes en  $\mathbb{F}$  es *invertible* si existe una matriz  $A^{-1}$  tal que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ .

**Proposición 4.14.** Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz invertible de tamaño  $3 \times 3$  con coeficientes en  $\mathbb{F}$ , entonces las ecuaciones  $x'_i = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$  definen un automorfismo que denotaremos por  $T_A$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$ .

En lo que resta de sección nos referiremos a los puntos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$  como  $P_1, P_2, P_3$  y  $Q$  resp.

**Proposición 4.15.** *Sean  $A$  y  $A'$  dos matrices invertibles, entonces la imagen tanto por  $T_A$ , como por  $T_{A'}$  coincide para los puntos  $P_1, P_2, P_3, Q$  si, y sólo si, existe  $\lambda \in \mathbb{F}$  con  $\lambda \neq 0$  y tal que  $A = \lambda A'$ .*

**Definición 4.16.** Sea  $\mathbb{F}$  un anillo de división, el conjunto

$$\{a \in \mathbb{F} \mid ab = ba \text{ para todo } b \in \mathbb{F}\}$$

es un cuerpo y se llama *centro de  $\mathbb{F}$* .

**Proposición 4.17.** *Sea  $\lambda \in \mathbb{F}$  con  $\lambda \neq 0$  y consideremos la matriz  $\lambda I$ . Entonces el automorfismo  $T_\lambda$  es la identidad para  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  si, y sólo si,  $\lambda$  pertenece al centro de  $\mathbb{F}$ . En caso contrario,  $T_\lambda(x_1, x_2, x_3) = (x_1^\sigma, x_2^\sigma, x_3^\sigma)$  donde  $\sigma(x) = \lambda x \lambda^{-1}$ .*

**Corolario 4.18.** *Sean  $A$  y  $A'$  dos matrices invertibles, entonces  $T_A = T_{A'}$  si, y sólo si, existe  $\lambda$  perteneciente al centro de  $\mathbb{F}$  con  $\lambda \neq 0$  y tal que  $A = \lambda A'$ .*

**Definición 4.19.** Denotamos como  $PGL(2, \mathbb{F})$  al grupo de automorfismos de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  de la forma  $T_A$  para alguna matriz invertible  $A$ .

Ahora que tenemos definidos el grupo de automorfismos de  $\mathbb{F}$ , y el mismo grupo para el plano proyectivo sobre  $\mathbb{F}$ , veamos que existe una relación de isomorfía entre ellos.

**Proposición 4.20.** *Sean  $A, B, C, D$  y  $A', B', C', D'$  dos cuaternas de puntos no colineales tres a tres, entonces existe un elemento  $T \in PGL(2, \mathbb{F})$  tal que  $T(A) = A', T(B) = B', T(C) = C', T(D) = D'$ .*

**Proposición 4.21.**  *$T \in PGL(2, \mathbb{F})$  es única si, y sólo si,  $\mathbb{F}$  es conmutativo.*

*Demostración.* Se sigue de las proposiciones 4.15 y 4.18, ya que  $\mathbb{F}$  es conmutativo equivale a que coincida con su centro.  $\square$

**Proposición 4.22.** *Sea  $\varphi \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  un automorfismo cualquiera que deja fijos  $P_1, P_2, P_3, Q$ , entonces existe un automorfismo  $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{F})$  tal que  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1^\sigma, x_2^\sigma, x_3^\sigma)$  con  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$ .*

*Demostración.* Comencemos demostrando el enunciado en el caso particular siguiente:

Sea  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , tomemos  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$  tal que deja fijos  $P_1, P_2, P_3, Q$ , entonces existe un automorfismo  $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{R})$  tal que  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1^\sigma, x_2^\sigma, x_3^\sigma)$  con  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ .

En este caso nos encontramos sobre el plano euclídeo, en el que tenemos definido un sistema de coordenadas homogéneas <sup>3</sup>, por ello podemos notar que  $\varphi$  deja invariante la recta de ecuación  $x_3 = 0$ , dado que inciden en ella los puntos  $P_1$  y  $P_2$ .

En consecuencia con lo anterior, elegiremos esta recta como línea del infinito y consideraremos el plano afín  $\mathbb{A} = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \{x_3 = 0\}$ , así  $\varphi(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$ , luego es un automorfismo del plano afín, y usaremos las coordenadas afines  $x = \frac{x_1}{x_3}$ ;  $y = \frac{x_2}{x_3}$ .

Ahora, como  $\varphi$  deja fijos  $P_1$  y  $P_2$ , enviará rectas horizontales en rectas horizontales, y rectas verticales en rectas verticales. Además, mantiene invariante el punto  $P_3$  y  $Q$  con coordenadas afines  $(0,0)$  y  $(1,1)$  respectivamente, lo que implica que se mantienen fijos ambos ejes de coordenadas.

Sea  $(a, 0)$  un punto sobre el eje horizontal, entonces  $\varphi((a, 0))$  está también sobre el mismo eje, con lo que puede escribirse también como  $(a^\sigma, 0)$  para un elemento  $a^\sigma \in \mathbb{R}$ . De este modo definimos la aplicación,

$$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de donde se sigue  $0^\sigma = 0$  y  $1^\sigma = 1$ .

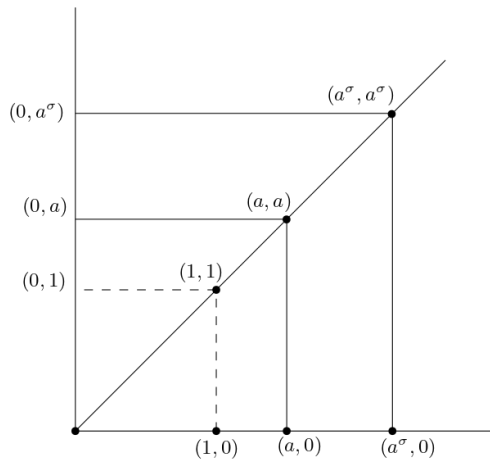


Figura 4.2: Proposición 4.23  
Automorfismo  $\sigma$

Observamos entonces que  $\sigma$  envía la recta  $x = y$  en ella misma (por mantenerse  $P_3$  y  $Q$  fijos) y las rectas verticales tienen como imagen rectas verticales, por eso

$$\varphi(a, a) = \varphi(\{x = y\} \cap \{x = a\}) = \varphi(a, a) = \varphi(\{x = y\} \cap \{x = a^\sigma\}) = (a^\sigma, a^\sigma)$$

<sup>3</sup>El desarrollado en la última sección del capítulo 1.

De forma análoga, las rectas horizontales tienen como imagen rectas horizontales, de donde se deduce  $\varphi((0, a)) = (0, a^\sigma)$ .

Por último, sea  $(a, b)$  un punto cualquiera, deducimos gráficamente, dibujando las rectas  $x = a, y = b$  que  $\varphi((a, b)) = (a^\sigma, b^\sigma)$ .

Con todo, la acción de  $\varphi$  sobre el plano afín viene completamente determinado por la aplicación  $\sigma$  que hemos construido.

Para finalizar la prueba en el caso real hemos de comprobar que  $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{A})$ .

En primer lugar, sean  $a, b \in \mathbb{R}$  dos elementos que tomamos sobre el eje X, luego tienen como coordenadas  $(a, 0)$  y  $(b, 0)$ , podemos construir geoméricamente el punto  $(a + b, 0)$  siguiendo los siguientes pasos:

Primero, trazamos las rectas  $x = a$  y  $y = 1$  obteniendo como intersección el punto  $(a, 1)$ . A continuación, unimos el punto  $(0, 1)$  con el  $(b, 0)$  para, finalmente, trazar la recta paralela a esta incidente en  $(a, 1)$ , siendo el punto de intersección entre esta recta y  $x = 0$  el buscado,  $(a + b, 0)$ .

Ahora, como  $\varphi(\{y = 1\}) = \{y = 1\}$ ;  $\varphi(\{x = a\}) = \{x = a^\sigma\}$ ;  $\varphi((b, 0)) = (b^\sigma, 0)$ ; además conserva intersección, unión y paralelismo, luego  $\varphi((a + b, 0)) = (a^\sigma + b^\sigma, 0)$ , con lo que  $(a + b)^\sigma = (a^\sigma + b^\sigma, 0)$ .

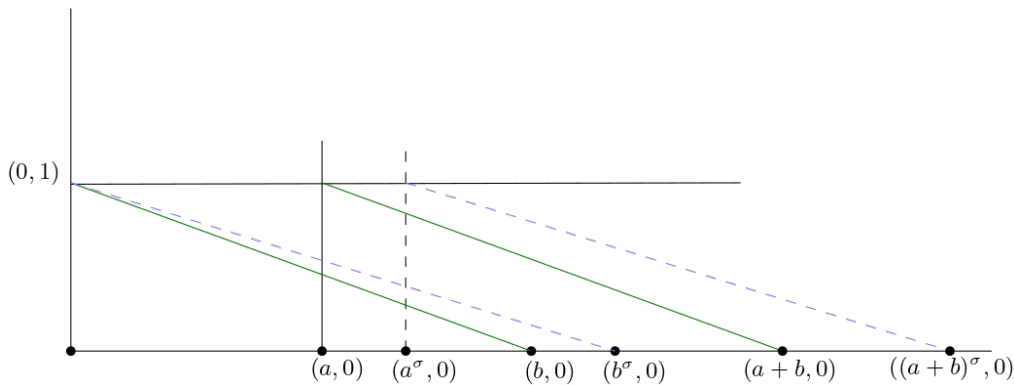


Figura 4.3: Proposición 4.23  
Definición de suma en  $\sigma$

En segundo lugar, mediante otra construcción podemos obtener el punto  $(ab, 0)$  a partir de  $(a, 0)$  y  $(b, 0)$  también geoméricamente.

Comenzamos dibujando las rectas  $y = x$  y  $x = a$  cuya intersección denotamos como  $(a, a)$ . De nuevo unimos los puntos  $(0, 1)$  y  $(b, 0)$  y trazamos la paralela a esta por  $(a, a)$ , finalmente la intersección entre esta recta y  $x = 0$  es  $(ab, 0)$ .

De nuevo,  $\varphi(\{y = x\}) = \{y = x\}$ ;  $\varphi(\{x = a\}) = \{x = a^\sigma\}$ ;  $\varphi((b, 0)) = (b^\sigma, 0)$ .

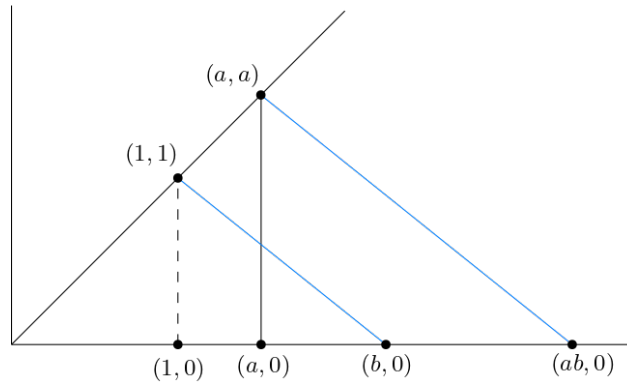


Figura 4.4: Proposición 4.23  
Definición de producto en  $\sigma$

Además como conserva intersección, unión y paralelismo,  $\varphi((ab, 0)) = (a^\sigma b^\sigma, 0)$ , con lo que  $(ab) = (a^\sigma b^\sigma, 0)$ .

Por consiguiente, concluimos que  $\sigma$  es un automorfismo.

Ahora, volviendo al plano proyectivo real, debemos estudiar cómo afecta  $\varphi$  en un punto con coordenadas homogéneas  $(x_1, x_2, x_3)$ . Distingamos dos casos,

- Si el punto tiene tercera coordenada nula, lo escribiremos como punto de intersección entre  $\{x_3 = 0\}$  y la recta que une  $P_3$  con  $(x_1, x_2, 1)$ , que será un punto afín con coordenadas afines  $(x_1, x_2)$ . Es por esto que  $\varphi(x_1, x_2) = (x_1^\sigma, x_2^\sigma)$  con coordenadas homogéneas  $(x_1^\sigma, x_2^\sigma, 1)$ . Así, intersectando las rectas transformadas obtenemos  $\varphi(x_1, x_2, 0) = (x_1^\sigma, x_2^\sigma, 0)$ .
- Si  $x_3 \neq 0$ , entonces  $(x_1, x_2, x_3)$  es un punto afín, con coordenadas afines  $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$ ; luego  $\varphi(x, y) = (x^\sigma, y^\sigma) = (\frac{x_1^\sigma}{x_3^\sigma}, \frac{x_2^\sigma}{x_3^\sigma})$ . Por tanto,  $\varphi(x, y)$  tiene coordenadas homogéneas  $(x_1^\sigma, x_2^\sigma, x_3^\sigma)$

Para concluir la prueba debemos ver, mediante geometría analítica sobre  $\mathbb{F}$ , que las construcciones para  $a + b$  y  $ab$  funcionan. La prueba completa se puede encontrar en el libro [6] □

**Proposición 4.23.** *La aplicación*

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{F}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2) \\ \sigma &\longmapsto \varphi \end{aligned}$$

con  $\varphi$  definida como en la proposición anterior, es un isomorfismo que tiene como imagen el subgrupo de  $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2)$  que deja fijos los puntos  $P_1, P_2, P_3, Q$ .



*Demostración.* Se sigue de la demostración anterior, para ver que es una biyección se debe aplicar  $\sigma$  y  $\sigma' \in \text{Aut}(\mathbb{F})$  al punto  $(x, 1, 0)$ , entonces se ve que las imágenes coinciden con lo que  $x^\sigma = x^{\sigma'}$  y, por consiguiente,  $\sigma = \sigma'$ . De nuevo se puede encontrarla demostración completa en [6].  $\square$

*Nota.* Disponemos de dos subgrupos del grupo de automorfismos de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$ , que son  $PGL(2, \mathbb{F})$  y aquel que deja fijos los puntos  $P_1, P_2, P_3, Q$ , lo que indica que cualquier automorfismo de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  puede expresarse como producto de dos elementos en cualquiera de los dos subgrupos.

### 4.2.3. Los axiomas de Pappus y Fano

Habiendo comprendido cómo funcionan los automorfismos en este contexto podemos continuar estudiando las situaciones en las que los axiomas de Pappus (3.1) y Fano (2.3) se cumplen en estos espacios.

**Lema 4.24.** Sean  $\ell, A, B, C; \ell', A', B', C'$  dos configuraciones contenidas en  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  y conformadas por una recta y tres puntos no colineales exteriores a la recta. Entonces existe un automorfismo  $\varphi$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  tal que  $\varphi(\ell) = \ell', \varphi(A) = A', \varphi(B) = B', \varphi(C) = C'$ .

*Demostración.* Definimos  $X = \ell \cap AC, Y = \ell \cap BC; X' = \ell' \cap A'C', Y' = \ell' \cap B'C'$ . Entonces  $A, B, X, Y; A', B', X', Y'$  son dos cuaternas de puntos no colineales tres a tres entonces por la proposición 4.20 existe un automorfismo  $\varphi$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  que envía la primera cuaterna en la segunda, de donde se sigue  $\varphi(\ell) = \ell'$  y  $\varphi(C) = C'$ .  $\square$

**Teorema 4.25.**  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  verifica el axioma de Pappus (3.1) si, y sólo si, el anillo de división  $\mathbb{F}$  es conmutativo.

*Demostración.* Sea  $\mathbb{F}$  un anillo de división. Supongamos que  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  cumple el axioma de Pappus (3.1) y que  $x_3 = 0$  es la recta del infinito. Sean  $a, b \in \mathbb{F}$  los representaremos como  $(a, 0), (b, 0)$ .

Sea  $x + (b - 1)y = b$  la recta que une los puntos  $(1, 1)$  y  $(b, 0)$ , si ahora trazamos la paralela por  $(a, a)$  obtenemos la recta  $x + (b - 1)y = ba$ , construyendo así el punto  $(ba, 0)$ . Para obtener el producto en el orden contrario basta con invertir el razonamiento, así, partiendo de la recta que pasa por  $(1, 1)$  y  $(a, 0)$  llegamos al punto de coordenadas  $(b, b)$  y la versión afín del axioma de Pappus (3.2) indica que ambos puntos coinciden, con lo que  $ab = ba$  y  $\mathbb{F}$  es conmutativo.

Para la implicación en el sentido contrario supondremos que  $\mathbb{F}$  es conmutativo y veremos que se cumple el axioma de Pappus.

Sean  $P = AB' \cap A'B$ ,  $R = BC' \cap B'C$  y denotemos por  $\ell'' := PR$ , asumiendo que el punto  $X = \ell \cap \ell'$  no incide en  $\ell''$ <sup>4</sup>. Sea  $Y = AR \cap \ell'$ , entonces  $Y \notin \ell''$  y  $A, X, Y$  no son colineales.

En consecuencia, por el lema previo podemos encontrar un automorfismo  $\varphi$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  que envía  $\ell''$  en la recta  $x_3 = 0$ , y los puntos  $A, X, Y$  en  $(1, 1), (0, 0), (1, 0)$  respectivamente.

Tenemos por tanto la situación siguiente,

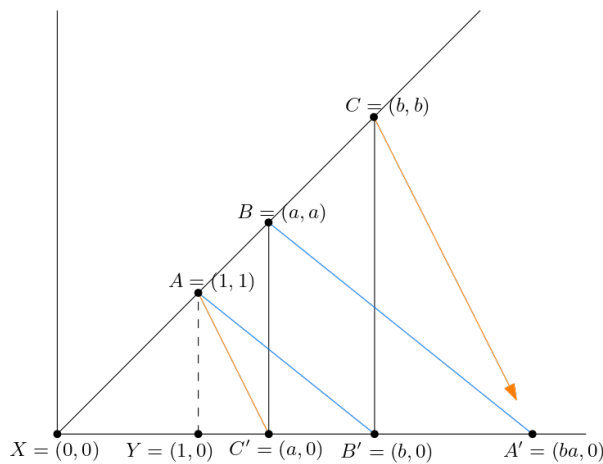


Figura 4.5: Teorema 4.26

donde queremos ver que la recta  $AC'$  es paralela a  $A'C$ . Aunque aún no disponemos de una definición formal, la forma de multiplicar en el espacio (construido sobre  $\mathbb{F}$ ) que definiremos en el capítulo 6, conllevará la trivialidad del resultado.

□

Pasamos ahora al último axioma que nos concierne, el de Fano (2.3), y observemos que gracias a los conocimientos que hemos ido adquiriendo sobre anillos de división podemos afirmar que los tres puntos diagonales de un cuadrivértice sobre un plano proyectivo están alineados si y solamente si la característica del cuerpo base es 2. Esto, en términos del axioma, se traduce en el siguiente teorema.

**Teorema 4.26.**  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  verifica el axioma de Fano (2.3) si, y sólo si,  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ .

*Demostración.* Dado que  $\mathbb{F}$  puede ser un cuerpo no conmutativo evitaremos el uso de matrices y presentaremos una demostración directa.

<sup>4</sup>si esto pasara tomamos los pares PQ ó QR, y si sigue incidiendo directamente tendremos que P,Q R están alineados.

## CAPÍTULO 4. PLANOS PROYECTIVOS SOBRE ANILLOS DE DIVISIÓN 107

---

Eligiendo un automorfismo en  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$  podemos suponer (por la prop. 4.15) que  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  son colineales, esto es, pertenecen a la misma recta de la forma  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$  con  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}$  no todos nulos. Por tanto, se cumple

$$a_1 + a_2 = 0 \tag{4.8}$$

$$a_1 + a_3 = 0 \tag{4.9}$$

$$a_2 + a_3 = 0 \tag{4.10}$$

de donde se sigue que

$$a_1 = -a_2 \tag{4.11}$$

$$a_1 = -a_3 \tag{4.12}$$

$$a_2 = -a_3 \tag{4.13}$$

Entonces, o bien  $a_2 = 0$ , lo que implica  $a_1 = a_3 = 0$ , o bien se da el caso  $2 = 0$  con lo que  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ , llegando en ambos casos a un absurdo. De este último caso se sigue la equivalencia buscamos demostrar.  $\square$



# Capítulo 5

## Planos proyectivos finitos

Considerando lo estudiado hasta el momento, es claro que los planos proyectivos axiomáticos pueden ser finitos o infinitos, en particular, enfatizamos el caso de los planos proyectivos finitos dado que producen estructuras combinatorias interesantes sobre las que todavía existen preguntas abiertas. Para estudiar estos planos proyectivos usaremos fundamentalmente la propiedad del orden, que se define como el número de puntos de un plano proyectivo menos uno. Cuando los planos proyectivos están construidos sobre anillos de división (o cuerpos), el orden es el número de elementos del anillo de división (o del cuerpo). En cambio, existen planos proyectivos finitos donde el orden no se corresponde con este número.

En este capítulo desarrollamos algunas de estas ideas, así como el hecho de que planos proyectivos finitos de un determinado orden pueden estar construidos, o no, sobre un cuerpo, como ocurre para el caso de orden 9. Incidentalmente, en el caso finito los anillos de división y los cuerpos conmutativos coinciden.

### 5.1. Orden

#### Definición 5.1.

- Definimos el *orden de un plano afín* como el número de puntos afines incidentes en cada recta afín.
- Definimos el *orden de un plano proyectivo* como el número de puntos proyectivos por los que pasa una recta proyectiva menos uno.

Como ejemplos podemos tomar el plano euclídeo, que es un plano afín cuyo orden es infinito, o el plano de Fano, tratándose de un plano proyectivo de orden dos.

*Nota.* En particular, el orden de un plano proyectivo construido sobre un anillo de división, es igual al número de elementos de dicho anillo que, sabemos, será siempre potencia de un número primo.

Notemos que la definición de orden en el caso del plano proyectivo carece de ambigüedad gracias a la siguiente proposición.

**Proposición 5.2.** *En un plano proyectivo toda las rectas tienen el mismo número de puntos.*

*Demostración.* Dadas dos rectas distintas  $\ell, \ell' \in \mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  y sea  $A \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}$  un punto exterior a ambas. Entones podemos construir una función biyectiva  $\mathcal{T}$  de forma que para cualquier  $Z \in \ell$ ,  $\mathcal{T}(Z) = AZ \cap \ell'$ . Así,  $\mathcal{T}(\ell) = \ell'$  con lo que en ambas rectas incide el mismo número de puntos.  $\square$

Estudiemos brevemente algunas propiedades de existencia y cardinalidad.

**Proposición 5.3.** *Un plano afín de orden  $n$  existe si, y sólo si, existe un plano proyectivo con el mismo orden<sup>1</sup>.*

*Demostración.* Sea  $\mathbb{A}$  un plano afín de orden  $n$ , entonces su compleción es una configuración  $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}$  con una recta más que  $\mathbb{A}$ , y un punto más en cada una de sus rectas. Por tanto, tenemos un plano proyectivo con  $n + 1$  puntos en cada recta, es decir,  $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}$  es un plano proyectivo de orden  $n$ .

Recíprocamente, dado un plano proyectivo  $\mathbb{P}$  de orden  $n$  hemos visto que podemos obtener un plano afín eliminando una recta cualquiera de  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$ . Observando que cada recta proyectiva del plano de partida incide en  $n + 1$  puntos, concluimos que las rectas afines del plano obtenido al suprimir la recta elegida tendrá orden  $n$ .  $\square$

**Proposición 5.4.** *Sea  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}_{\mathbb{P}}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}})$  un plano proyectivo de orden  $n$ , entonces  $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$  y  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  tienen el mismo número de elementos:  $n^2 + n + 1$ .*

*Demostración.* El hecho de que el plano proyectivo dado tenga orden  $n$  implica, por definición, que en cada recta inciden  $n + 1$  puntos, y que por cada punto pasan  $n + 1$  rectas.

- Sea  $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{P}}$  y sabemos que en él inciden  $n + 1$  rectas, que a su vez inciden en  $n + 1$  puntos, esto hace  $(n + 1)^2$  elementos. Sin embargo, por dos puntos distintos incide una única recta, lo que hace un total de  $n$  rectas. Por tanto, el número total de rectas que contiene  $\mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  será  $(n + 1)^2 - n = n^2 + n + 1$ .

<sup>1</sup>Hay que tener en cuenta la definición de orden en cada caso.

- Por otro lado, si comenzamos considerando una recta  $r \in \mathcal{R}_{\mathbb{P}}$  y sabemos que inciden en ella  $n + 1$  puntos, por los que de nuevo pasan  $n + 1$  rectas. Sin embargo, cada par de rectas distintas incide en un único punto, lo que son exactamente  $n$  puntos y, en consecuencia, el número total de elementos de  $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$  es  $(n + 1)^2 - n = n^2 + n + 1$ .

□

## 5.2. Planos finitos sobre un anillo de división

Vimos en el capítulo anterior que “ Los planos proyectivos construidos sobre anillos de división siempre son desarguesianos”.<sup>2</sup>

También hemos demostrado que es condición necesaria y suficiente para que un cuerpo  $\mathbb{F}$  sea anillo de división, que  $(\mathbb{F}, \cdot)$  sea un grupo conmutativo. Además, sabemos que, si  $q = p^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$  y  $p$  primo, entonces  $\mathbb{F}_q$  es un cuerpo con  $Char(\mathbb{F}_q) = p$  y  $q$  elementos.

Entonces, podemos afirmar que para cada número expresable como potencia de un número primo existe, al menos, un plano proyectivo construido sobre el anillo de división correspondiente. Este plano proyectivo, según lo visto en 4.2 tendrá como orden el número elementos del anillo de división<sup>3</sup>.

Recíprocamente, bastará considerar un plano proyectivo sobre un anillo de división con  $q = p^r$  elementos (donde  $r \in \mathbb{N}$  y  $p$  primo), para obtener un plano proyectivo desarguesiano con característica  $p$  y  $q$  elementos.

## 5.3. Restricción de orden para planos proyectivos

Con lo estudiado hasta ahora podríamos definir infinidad de planos proyectivos sin ambigüedad pero de dicho estudio surgen también cuestiones cómo *¿todos los órdenes son posibles?, ¿ha de tener el plano proyectivo alguna particularidad?*

Primeramente podemos asegurar, que podemos construir planos proyectivos sobre anillos de división de la forma  $\mathbb{F}_{p^r}$ , estos tendrán la particularidad de que su orden sea una potencia de primo, y los planos proyectivos generados a partir de estos últimos tendrán su mismo orden. Con esto, podemos extraer como primera conclusión que *para cualquier potencia de un número primo existe un plano proyectivo con ese orden*, permitiéndonos deducir que existen planos proyectivos de

<sup>2</sup>Teorema 4.11.

<sup>3</sup>Ver definición 5.1.

orden infinito numerable.

No obstante la conclusión anterior es válida, el estudio del orden de los planos proyectivos continúa siendo un problema abierto en muchos aspectos, con lo que no es factible realizar más afirmaciones tan contundentes. Dado que restringir la existencia de planos proyectivos de determinados órdenes no es viable, partiremos del supuesto que afirma que existen planos proyectivos de cualquier orden. Sin embargo, lo que sí nos será posible es restringir esta existencia aplicando el teorema de Bruck-Ryser (5.5) para determinar sobre qué cuerpos pueden construirse planos proyectivos con órdenes adecuados, garantizando así la no existencia de los mismos para otros determinados órdenes.

Por ahora, podemos afirmar que el orden de todos los planos proyectivos finitos que se conocen se encuentra en la secuencia A246655 proporcionada por OEIS<sup>4</sup> que incluye todos los números que pueden ser expresados como potencia de primo, pero conocer si existen planos proyectivos finitos con órdenes fuera de esta lista está aún por determinar.

Comenzamos presentando el teorema de restricción de órdenes.

**Teorema 5.5. (de Bruck-Ryser).** *Sea  $n \in \mathbb{N}$  cumpliendo  $n \equiv 1 \pmod{4}$  ó  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , y tal que no existen  $a, b \in \mathbb{N}$  con  $n^2 = a^2 + b^2$ , entonces no existe ningún plano proyectivo finito de orden  $n$ .*

Presentamos este teorema sin demostración, ya que su desarrollo excede las competencias de este trabajo. Desde su publicación, el estudio del teorema, así como la búsqueda de respuestas al problema de los órdenes, han desembocado en demostraciones alternativas más asequibles como la que se presenta en [3]. Asimismo, se han redactado adaptaciones de la demostración original que, con la ayuda de lemas intermedios, facilitan la comprensión de la misma, como es el caso de la proporcionada en [10].

Notemos que el teorema anterior nos proporciona un gran sesgo para las posibilidades del orden, por ejemplo, ninguno de los enteros 6, 14, 21, 22, 30, 33 se puede expresar como suma de dos cuadrados, con lo que podemos afirmar que no existen planos proyectivos con estos órdenes.

En resumen, hasta ahora hemos podido determinar dos propiedades que han de cumplir los órdenes de los anillos de división para que se verifique la existencia de planos proyectivos sobre ellos. En primer lugar, el orden ha de ser potencia de un número primo, y en segundo lugar, ha de cumplir el teorema anterior. Con esto, los órdenes menores o iguales a 100 que no cumplen ninguno de los anteriores son: 10, 12, 15, 18, 20, 24, 26, 28, 34, 35, 36, 39, 40, 44, 45, 48, 50, 51, 52, 55,

<sup>4</sup>Enciclopedia On-line de las Secuencias de los Números Enteros.



56, 58, 60, 63, 65, 68, 72, 74, 75, 76, 80, 82, 84, 85, 87, 88, 90, 91, 92, 95, 96, 98, 99, and 100.

## **5.4. Demostraciones de existencia y no existencia a través de la computación**

Como hemos mencionado, se han realizado diversos estudios sobre los planos proyectivos de órdenes pertenecientes a la lista anterior aunque la mayoría de ellos no han obtenido nada concluyente debido a los altos recursos computacionales que se requieren en cada caso. Presentamos a continuación algunos comentarios sobre dos estudios que se han podido completar y con los que se ha demostrado, por un lado, que sí existen planos proyectivos de orden 9 y, por otro, que no existe ninguno de orden 10.

### **5.4.1. La no-existencia de planos proyectivos de orden 10**

Un grupo de investigación de la Concondial University ha probado, a través de la computación, que las posibilidades de que existan planos proyectivos de este orden son ínfimas.

El hecho que sugiere renegar de este hallazgo como una demostración rigurosa se centra en que el proceso realizado consiste en una prueba experimental, lo que lleva implícita la posibilidad de errores (en este caso de programación o de hardware). No obstante pudieran darse los mismos, en el escrito se exponen las múltiples medidas que tomaron para evitarlos, así como las labores de comprobación y contraste de resultados, con todo esto los autores abogan que la conclusión puede tomarse como cierta.

La idea que da lugar al comienzo de la demostración de la no existencia de planos proyectivos de orden 10 surge de la teoría de códigos y puede encontrarse desarrollada en el artículo [9].

### **5.4.2. La existencia de planos proyectivos de orden 9**

Otro de los focos en el estudio del orden de los planos proyectivos reside en conocer la unicidad (salvo isomorfismos) de estos. Recordando lo expuesto en el primer capítulo sobre isomorfismos de configuraciones, es claro que podemos establecer estas aplicaciones entre estructuras de planos proyectivos construidos sobre anillos de división, así generaremos *grupos de isomorfía* y podremos averiguar el número exacto de planos proyectivos de orden  $n$  existentes salvo isomorfía, lo que permitirá clasificar los planos proyectivos dentro de cada orden. Actualmente

se sabe que todos los planos proyectivos de orden 2 son isomorfos al plano de Fano, pero esto no puede tomarse como propiedad general. De hecho, los planos proyectivos de orden 3, 4, 5, 7 y 8 son únicos salvo isomorfismo. En particular, el caso de orden 8 fue probado comparando la estructura de cientos de casos realizando las cuentas manualmente. Sin embargo, la unicidad de los planos de orden mayor que 9 continúa siendo un problema abierto.

*¿Cómo se relaciona la computación en este contexto?*

Hasta ahora hemos presentado la computación como una herramienta para refutar la existencia de planos proyectivos de determinados órdenes, pero este caso resalta una idea diferente.

Es claro que podemos expresar 9 como  $3^2$ , con lo que la existencia de planos proyectivos de este orden está garantizada, la cuestión que aparece tras esto es determinar cuántos son los planos proyectivos (únicos salvo isomorfismo) que poseen este orden. Es esta la labor de la computación en este caso, asistir al establecimiento de isomorfismos como vía para determinar planos proyectivos únicos.

En el trabajo de G. Kolesova y L. Thiel [8] exponen que, partiendo de los cuatro planos proyectivos de orden 9 conocidos hasta ese momento, la computación muestra que todos los demás son isomorfos a alguno de ellos, con lo que concluyen que no existen más clases de isomorfía que las cuatro que se conocían y, en consecuencia, no existen más planos proyectivos de orden 9.

En el libro [10] dice: “Hay exactamente cuatro clases de isomorfía de planos proyectivos de orden 9: El plano clásico, el plano proyectivo de Hall de orden 9, el dual de este último y el plano de Hughes de orden 9. El número de órbitas en estos planos es 1, 2, 2, 2 respectivamente, lo que da un total de 7 clases de isomorfía de los planos afines de orden 9.”

Así, sabiendo que existen 7 planos afines de orden 9, podemos concluir que para un orden relativamente pequeño hay más clases de isomorfía de planos afines que de planos proyectivos. Lo que nos permite sentenciar que existe algún plano proyectivo tal que, al eliminar rectas distintas como recta del infinito, se obtienen planos afines no isomorfos.

# Capítulo 6

## El plano de coordenadas homogéneas

Si  $\mathbb{P}$  es un plano proyectivo desarguesiano, entonces existe un anillo de división  $\mathbb{F}$  tal que  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$ . El principal objetivo de este capítulo es presentar la construcción, paso a paso, de un anillo de división  $\mathbb{F}$  de forma que  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$ .

### 6.1. Sextetos armónicos de Seidenberg

Comenzamos presentando los *sextetos armónicos*, un objeto geométrico propuesto por Seidenberg <sup>1</sup> que nos permitirá desarrollar con mayor facilidad los argumentos que serán requeridos para las demostraciones de este capítulo.

**Definición 6.1.** Diremos que  $A, B, C; A', B'$  y  $C'$  forman un *sexteto armónico* si existen cuatro puntos  $P, Q, R$  y  $S$  no colineales de forma que se verifique la siguiente configuración.

---

<sup>1</sup>Consultar libro [12].

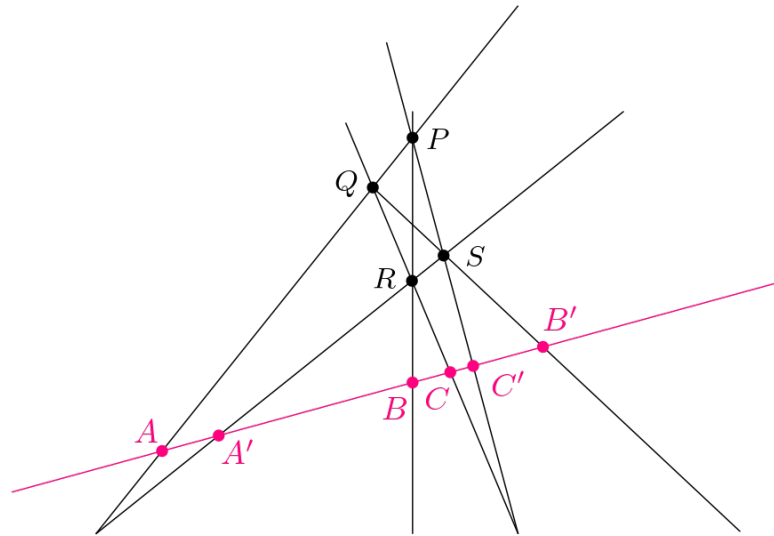


Figura 6.1: Sexteto armónico

Para representar que los puntos anteriores forman un sexteto armónico emplearemos la siguiente notación:  $Q(A, B, C; A', B', C')$ .

### 6.1.1. Equivalencias entre sextetos armónicos

Los sextetos armónicos cumplen algunas de las propiedades estudiadas para las cuaternas armónicas (observemos que estas últimas son un caso particular de las primeras). Por ejemplo, se cumplen los siguientes resultados:

- $A$  y  $A'$  pueden coincidir, así como  $B$  y  $B'$  y  $C$  y  $C'$ , si dos de estas situaciones se dan simultáneamente, se obtiene una cuaterna armónica. En otras palabras,  $H(A, B, C, D) = Q(A, B, C; A, B', C)$ .
- No puede ocurrir, en el contexto en que trabajamos, a excepción del caso de característica 2, que los  $A = A'$ ,  $B = B'$  y  $C = C'$  en la misma configuración.

Además, notemos que dada la disposición de un sexteto armónico, los puntos diagonales del cuadrivértice completo que lo soporta  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  pueden situarse en cualquiera de los vértices manteniendo que los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  continúan verificando  $Q(A, B, C; A', B', C')$ . Esto es, existen  $4! = 24$  sextetos equivalentes.

Para verlo, consideremos

$$\begin{aligned} \alpha &= (A, A') & \beta &= (B, B') & \gamma &= (C, C') \\ \alpha &= (A, A') & \beta^{-1} &= (B', B) & \gamma^{-1} &= (C', C) \end{aligned}$$

y, convenimos expresar

$$Q(A, B, C; A', B', C') := [\alpha, \beta, \gamma]$$

Ahora, intercambiando sus posiciones tenemos seis sextetos, diferentes y equivalentes, que podemos expresar como sigue:

$$[\alpha, \beta, \gamma] = [\beta, \alpha, \gamma] = [\gamma, \alpha, \beta] = [\alpha, \gamma, \beta] = [\beta, \gamma, \alpha] = [\gamma, \beta, \alpha]$$

Por otro lado, cambiando adecuadamente el orden de los puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  también tenemos que  $[\alpha, \beta, \gamma]$  es igual a  $[\beta, \alpha^{-1}, \gamma^{-1}]$  entonces, combinando este enunciado con los seis sextetos anteriores tenemos que,

$$[\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma] = [\beta^{-1}, \alpha^{-1}, \gamma] = [\gamma, \alpha^{-1}, \beta^{-1}] = [\alpha^{-1}, \gamma, \beta^{-1}] = [\beta^{-1}, \gamma, \alpha^{-1}] = [\gamma, \beta^{-1}, \alpha^{-1}]$$

$$[\alpha^{-1}, \beta, \gamma^{-1}] = [\beta, \alpha^{-1}, \gamma^{-1}] = [\gamma^{-1}, \alpha^{-1}, \beta] = [\alpha^{-1}, \gamma^{-1}, \beta] = [\beta, \gamma^{-1}, \alpha^{-1}] = [\gamma^{-1}, \beta, \alpha^{-1}]$$

$$[\alpha, \beta^{-1}, \gamma^{-1}] = [\beta^{-1}, \alpha, \gamma^{-1}] = [\gamma^{-1}, \alpha, \beta^{-1}] = [\alpha, \gamma^{-1}, \beta^{-1}] = [\beta^{-1}, \gamma^{-1}, \alpha] = [\gamma^{-1}, \beta^{-1}, \alpha]$$

Es decir, no podemos asegurar que  $[\alpha, \beta, \gamma]$  sea equivalente a  $[\alpha^{-1}, \beta, \gamma]$ . Más adelante veremos que si esto ocurriera se daría la conmutatividad del producto.

**Corolario 6.2.** *Dados  $A, B, C, A', B'$  y  $C'$  tales que  $Q(A, B, C; A', B', C')$ , entonces se cumple su equivalencia con las otras 23 disposiciones.*

## 6.2. Sextetos armónicos en el caso desarguesiano

### 6.2.1. Existencia y unicidad del sexto armónico

**Teorema 6.3.** *El sexto armónico de cinco puntos dados existe y es único.*

*Demostración.* El problema que abordamos ahora parte de los puntos  $A, A', B, B'$  y  $C$ ; el objeto reside en demostrar la existencia de un único punto  $C'$  de forma que  $Q(A, B, C; A', B', C')$ .<sup>2</sup>

#### Existencia

Supongamos dada una recta  $\ell$  y cinco puntos sobre ella  $A, A', B, B'$  y  $C$ , entonces comenzamos trazamos sendas rectas  $r_1$  y  $r_2$  que incidan en  $\ell$  respectivamente en los puntos  $A$  y  $A'$ , y otra recta  $r_3$  que lo haga en  $C$ . Ahora, a los puntos de incidencia de  $r_3$  con  $r_1$  y  $r_2$  los denotamos  $Q$  y  $R$  y dibujamos las rectas  $QB'$  y  $RB$ , de donde obtenemos  $S = r_2 \cap QB'$  y  $P = r_1 \cap RB$ . Así, tenemos un cuadrivértice completo con vértices  $p, Q, R$  y  $S$  y concluimos que el sexto armónico existe y es el punto de incidencia entre  $PS$  y  $\ell$ .

#### Unicidad

Dados  $A, A', B, B'$  y  $C$  puntos colineales, la construcción de un sexto armónico es unívoca a partir de

- Una recta  $r$  con  $A \in r$
- Una recta  $r'$  con  $A' \in r'$
- Una recta  $\ell$  con  $C \in \ell$

Construiremos el sexto armónico  $C'_{r_1, r'_1, \ell}$  y veremos que todo sexto armónico es de esta forma para una terna de rectas dada  $(r_1, r'_1, \ell)$ . Con esto, probar la unicidad equivale a demostrar la igualdad  $C'_{r, r', \ell} = C'_{r_1, r'_1, t}$  donde  $(r, r', \ell)$  y  $(r_1, r'_1, t)$  son dos ternas de rectas con las propiedades requeridas.

Realizamos la demostración en tres etapas

1.  $C'_{r, r', \ell} = C'_{r_1, r'_1, \ell}$
2.  $C'_{r, r', \ell} = C'_{r, r'_1, \ell}$
3.  $C'_{r, r', \ell} = C'_{r, r', t}$

<sup>2</sup>Supondremos que los puntos de partida son colineales y que sólo existen las degeneraciones permitidas, por ejemplo  $A = A'$ .

**Etapa 1.** Supongamos que la recta que pasa por  $A$  es  $r_1$ . En esta situación, el cuadrivértice completo resultante es el que tiene por vértices  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $R_1$  y  $S_1$ . Además, podemos notar que los triángulos  $PQS$  y  $P_1Q_1S_1$  están en proyección desde el punto  $R_1$ . Aplicando el Teorema de Desargues (2.1), como los puntos  $A$ ,  $B'$  y  $P_1S_1 \cap PS$ , están alineados, entonces  $C = C'$ .

En consecuencia, por simetría,  $C'_{r,r',\ell} = C'_{r_1,r',\ell}$ .

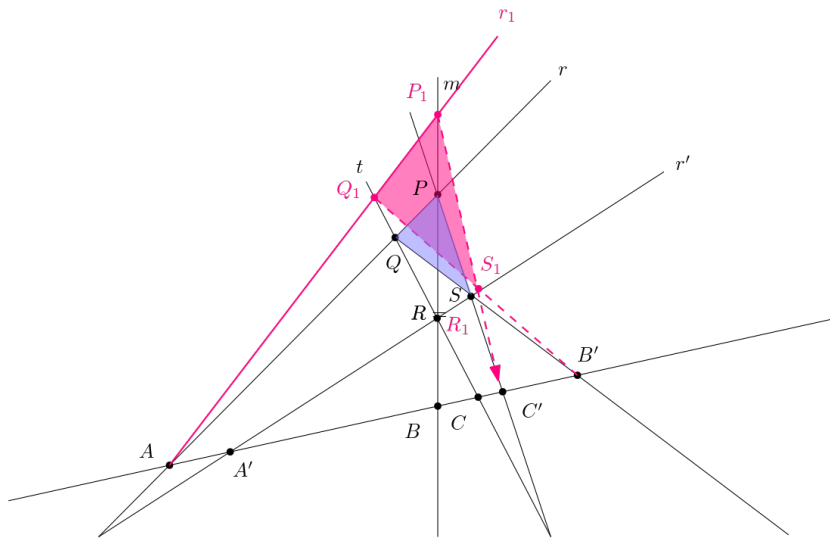


Figura 6.2: Mover una recta incidente en  $A$

**Etapa 2.** Es suficiente con seguir un procedimiento paralelo al anterior reemplazando  $r$  por  $r'$ . Así, mediante los mismos argumentos, se concluye que  $C'_{r,r',\ell} = C'_{r',r',\ell}$ .

**Etapa 3.**

Supongamos que la recta que pasa por  $C$  es  $t$ . Como antes,  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $R_1$  y  $S_1$ , dan lugar a un nuevo cuadrivértice completo.

Definimos los puntos  $E = r \cap r'$ ;  $F_1 = P_1R_1 \cap Q_1S_1$ ;  $F = PR \cap QS$ . Y fijándonos en los triángulos  $PSF$  y  $P_1S_1F_1$ , observamos que se encuentran en proyección desde el punto  $C_2 = P_1S_1 \cap PS$ . Ahora, si demostramos que  $E, F, F_1$  son colineales, entonces  $C = C'$ . De donde se sigue que  $B, C_2$  y  $B'$  están alineados y, empleando el resultado de Desargues (2.1),  $C = C' = C_2$  como queríamos ver.

Para probar lo anterior es suficiente elegir los triángulos  $B'Q_1Q$  y  $BR_1R$ , entonces podemos comprobar que están en proyección desde  $C$  y, de nuevo, por el Teorema de Desargues (2.1),  $E, F_1$  y  $F$  están, en efecto, alineados. Con lo que se cumple lo anterior y podemos afirmar  $C'_{r,r',\ell} = C'_{r',r',t}$ .

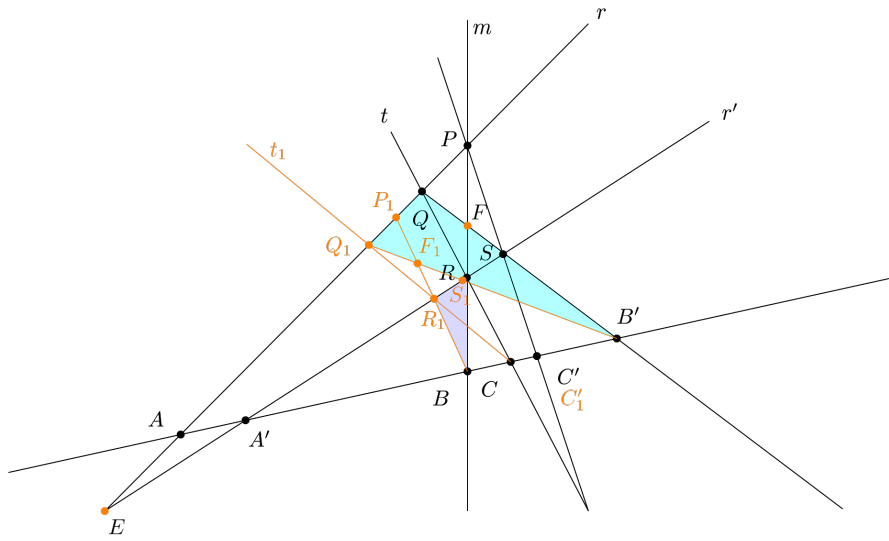


Figura 6.3:  $E$ ,  $F_1$  y  $F$  alineados

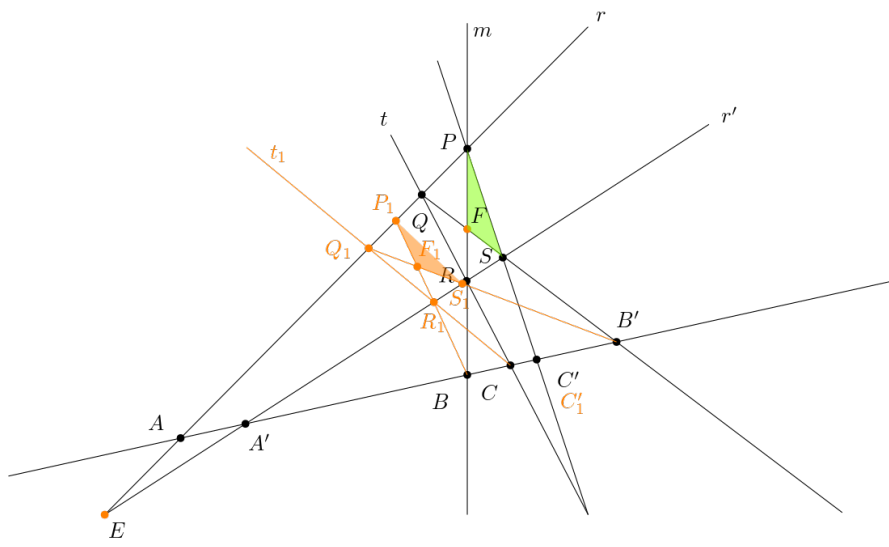


Figura 6.4:  $B$ ,  $C_2$  y  $B'$  colineales

□



### 6.3. Operaciones en el anillo de división

**Definición 6.4.** Sea  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}_{\mathbb{P}}, \mathcal{R}_{\mathbb{P}})$  un plano proyectivo, una *referencia proyectiva* es un conjunto  $\{P_0, P_1, P_2; \mathcal{U}\}$ , formado por cuatro puntos pertenecientes a  $\mathcal{P}_{\mathbb{P}}$  tres a tres no colineales.  $\mathcal{U}$  recibe el nombre de *punto unidad*.

En primer lugar, fijaremos una *referencia proyectiva*  $\{P_0, P_1, P_2; \mathcal{U}\}$  dentro de  $\mathbb{P}$ . Llamaremos *cero* al punto  $P_0$  e *infinito* al punto  $P_1$ .

Ahora, consideremos la recta  $\ell$  que pasa por  $P_0$  y  $P_1$ . Entonces los elementos de  $\mathbb{F}$  se identificarán con  $\ell \setminus \{P_1\}$ , en otras palabras, se corresponderán con los puntos de  $\ell$  distintos del infinito.

Tomemos  $P_0 = (1, 0, 0)$ ,  $P_1 = (1, 1, 0)$ ,  $P_2 = (1, 0, 1)$  y  $\mathcal{U} = (1, 1, 1)$ , y consideremos la recta  $\ell$  definida arriba, que tiene como ecuación  $x_3 = 0$ .

A continuación, definimos geoméricamente dos operaciones a las que llamaremos, respectivamente, suma y producto, y que representaremos por  $+$  y  $\cdot$ . Con este desarrollo, podremos afirmar que  $\mathbb{F}$  es un cuerpo con dos operaciones bien definidas, sin embargo, como expresamos con anterioridad aún habremos de probar algunas propiedades adicionales para poder verificar que se trata de un anillo de división.

Como venimos haciendo hasta el momento, las demostraciones restantes pueden realizarse mediante construcciones geométricas similares a las ya presentadas. Debido a la similitud de las pruebas realizamos sólo algunas de ellas a modo de ejemplo.

#### 6.3.1. Operación suma

Definimos la recta  $y$  como la única sobre la que inciden  $P_0$  y  $P_2$ .

Sean  $a = (1, a, 0)$   $b = (1, b, 0)$  dos elementos cualesquiera, entonces el elemento suma de estos dos será representado por  $(1, a + b, 0)$ , y lo obtendremos mediante la siguiente construcción geométrica.

1. Trazamos una recta paralela a  $\ell$  por el punto  $P_{(1,0,1)}$ .
2. Análogamente dibujamos la paralela a  $y$  incidente en  $(1, a, 0)$  que, en su intersección con la anterior, da lugar a un punto al que denotamos por  $(1, a, 1)$
3. Tras esto, unimos  $P_{(1,0,1)}$  con  $(b, 0)$  y, para concluir, dibujamos la recta paralela que pasa por  $(1, a, 1)$  y, cuya incidencia con  $\ell$  es el punto suma buscado, es decir,  $(1, a + b, 0)$ .

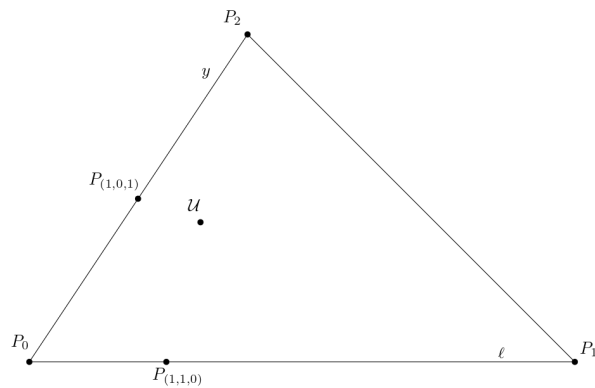


Figura 6.5: Definición operación suma, versión proyectiva.  
Configuración inicial

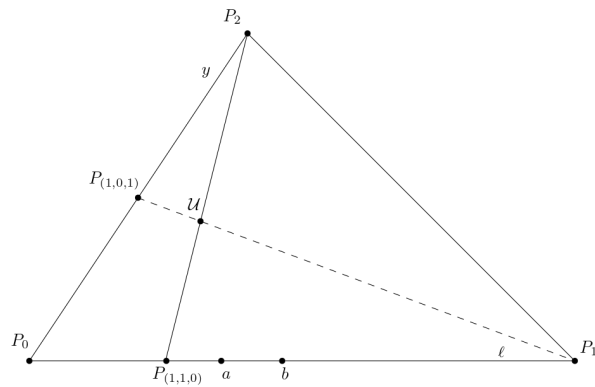


Figura 6.6: paso 1.

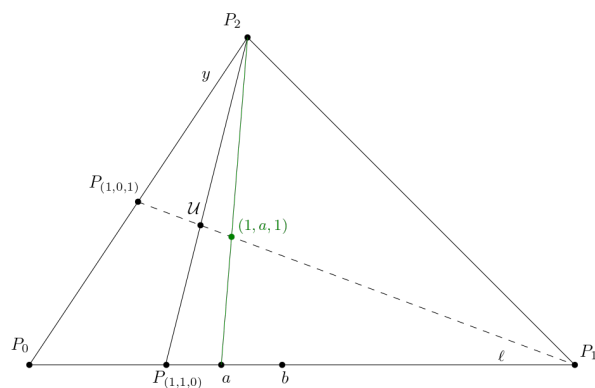


Figura 6.7: paso 2.

*Nota.* La misma construcción se puede realizar en su versión afín, es suficiente con suprimir la primera coordenada de cada punto involucrado en el proceso.

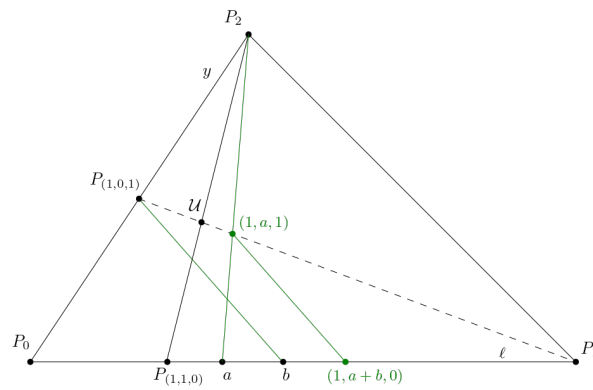


Figura 6.8: paso 3.

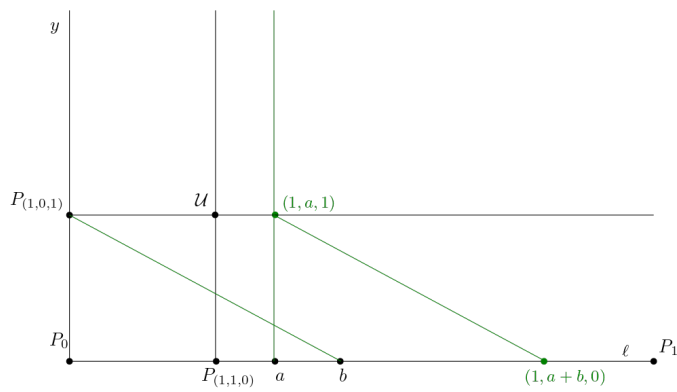


Figura 6.9: Operación suma, versión afín

**Existencia del elemento neutro para la suma**

Es sencillo comprobar que el neutro para la suma es  $P_0$ .

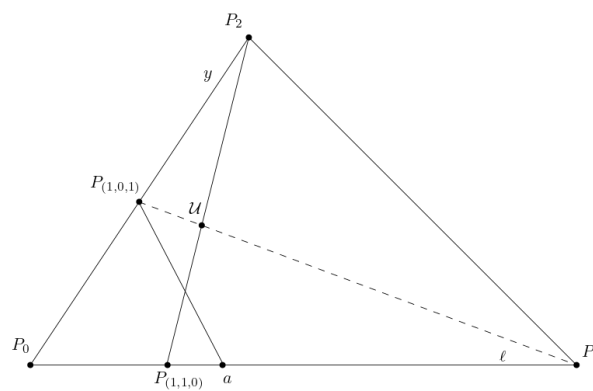


Figura 6.10: Neutro para la suma

Concluimos por tanto  $P_0 + a = a + P_0 = a$ .

**Asociatividad de la suma**

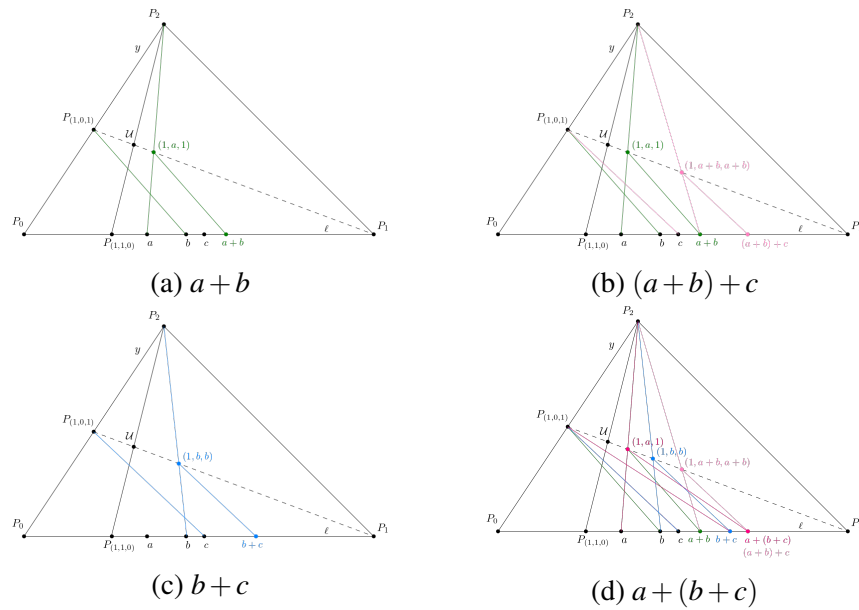


Figura 6.11: Demostración asociatividad de la suma

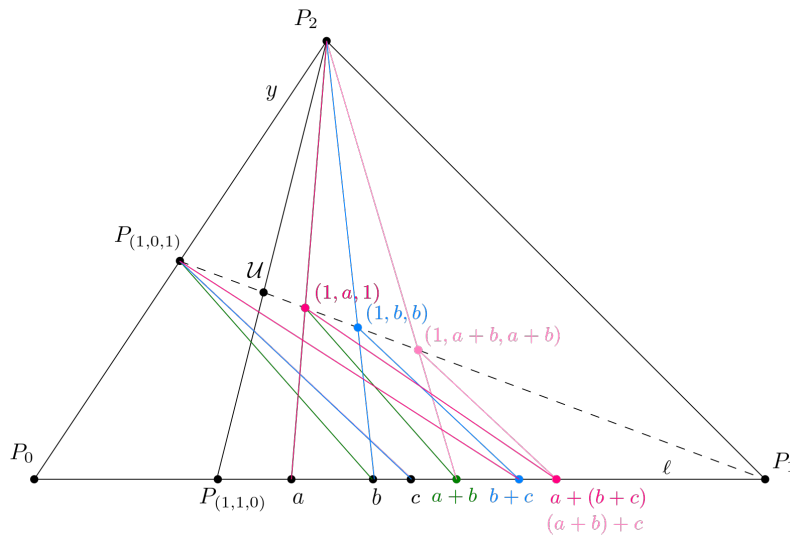


Figura 6.12: Demostración asociatividad de la suma

**Conmutatividad de la suma**

Esta propiedad se deriva de la demostración del teorema 6.3.

Comencemos tomando la siguiente referencia.

$$\begin{array}{cccc}
 P_0 = O = C & P_1 = \omega = A = A' & P_2 = R & P_{(1,0,1)} = Q \\
 a = B & b = B' & a + b = C' &
 \end{array}$$

Una vez probada la existencia del sexto armónico, de entre las propiedades vistas al definir los sextetos se manifiesta la posibilidad de alterar el orden de los puntos, esto es,

$$\begin{array}{l}
 Q(A, B, C; A', B', C') \iff Q(C, B, A; C', B, A') \\
 Q(A, B, C; A', B', C') \iff Q(A, B', C'; A', B, C)
 \end{array}$$

con lo que

$$Q(\omega, a, O; \omega, b, a+b) \iff Q(O, a, \omega; a+b, b, \omega) \iff Q(O, b, \omega; b+a, a, \omega)$$

y, por tanto,  $a + b = b + a$ .

Con esto podemos afirmar que  $a + b$  es el sexto armónico de  $\omega, a, O, \omega, b$  y, en consecuencia es único, derivándose de ello la conmutatividad de la suma.

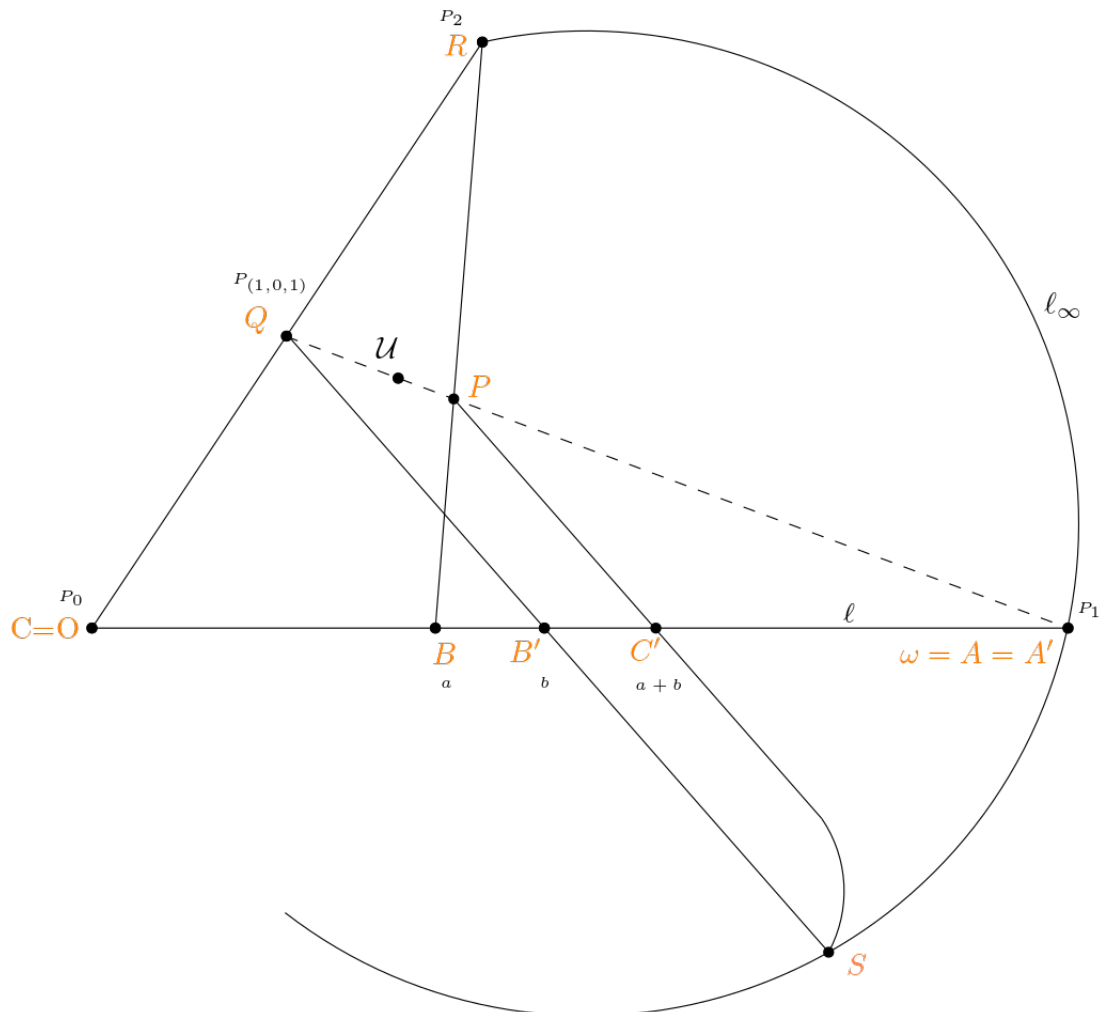


Figura 6.13: Suma de elementos mediante sextetos

### 6.3.2. Operación *producto*

Sean  $\ell$ ,  $y$ ,  $(1, a, 0)$  y  $(1, b, 0)$  como antes. Para definir el producto de  $(1, a, 0)$  y  $(1, b, 0)$  procedemos como expondremos a continuación.

1. Consideremos la recta que pasa por los puntos  $P_0$  y  $\mathcal{U}$ , a la que llamaremos  $m$ .
2. Sea  $(1, a, a)$  el punto de intersección de  $m$  con la paralela a  $y$  que pasa por  $(1, a, 0)$
3. Unimos  $\mathcal{U}$  con  $(1, b, 0)$  y, finalmente, trazamos la paralela a esta que pasa por  $(1, a, a)$ . Su incidencia con  $\ell$  es el punto  $(1, ab, 0)$  que buscábamos.

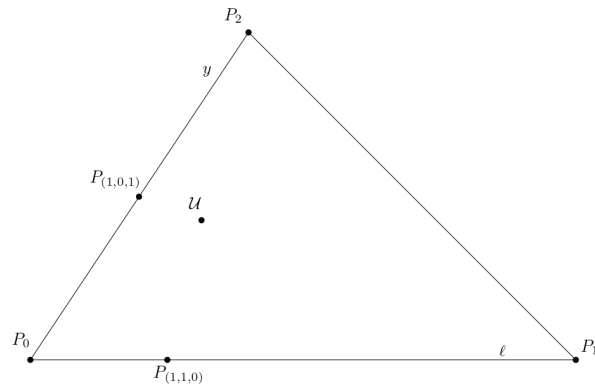


Figura 6.14: Definición operación producto, versión proyectiva. Configuración inicial

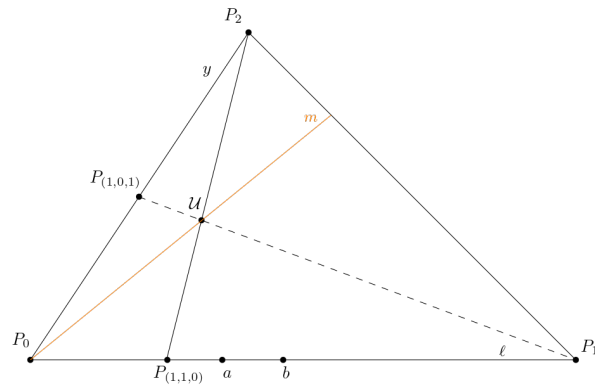


Figura 6.15: paso 1.

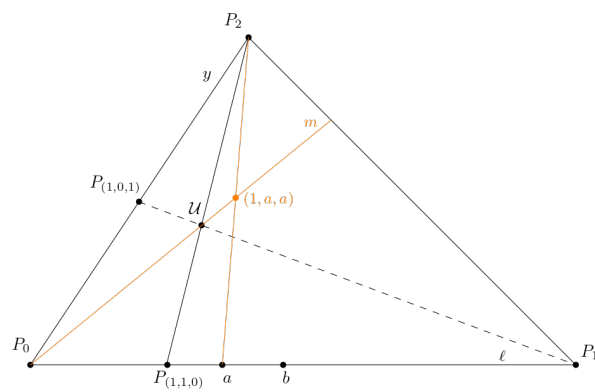


Figura 6.16: paso 2.

*Nota.* De igual manera que para la operación anterior, se puede dar una versión afín para el producto como se muestra en la siguiente figura.

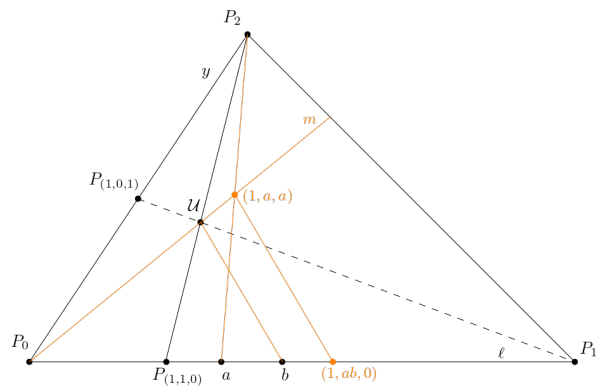


Figura 6.17: paso 3.

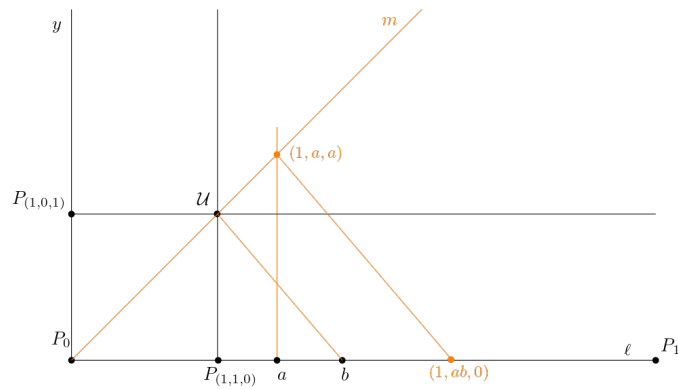


Figura 6.18: Operación producto, versión afín

**Existencia del elemento neutro para el producto**

El razonamiento es idéntico al anterior, en este caso el neutro resulta ser  $P_{(1,1,0)}$ .

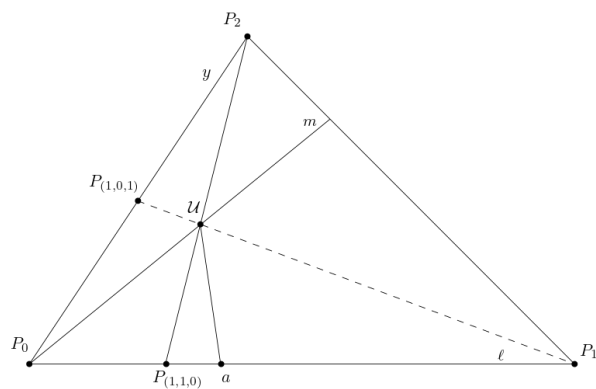


Figura 6.19: Neutro para el producto



**Existencia del inverso para el producto**

Como se comprueba en la figura, el inverso será el elemento que permita trazar una recta paralela a la que pasa por  $P(1, 1, 0)$  y  $(1, a, 1)$ . Así,  $a * a^{-1} = a^{-1} = P_{(1,1,0)}$ .

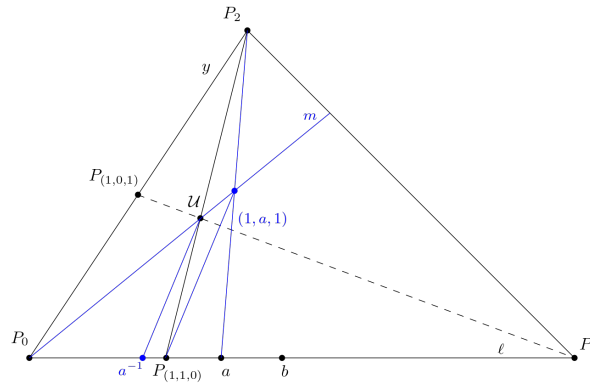


Figura 6.20: Inverso para el producto

### Conmutatividad del producto

Es importante destacar que la prueba de la conmutatividad del producto no es posible debido a que este elemento no puede expresarse cómo sexto armónico.

El producto como sexto armónico no permite hacer una alteración de orden de manera que se cumpla  $ab = ba$ . En otras palabras, para el caso de la suma, dado  $Q(\omega, a, O; \omega, b, a+b)$  hemos visto que  $Q(O, b, \omega; b+a, a, \omega)$  es una de las 23 configuraciones equivalente a la primera, en el caso del producto obtener un sexteto equivalente a  $Q(\omega, a, O; \omega, b, ab)$  no es posible.

Veámoslo tomando la siguiente referencia.

$$\begin{array}{ll}
 O = A & P_{(1,1,0)} = A' \\
 a = B & b = B' \\
 \omega = C & ab = C' \\
 (1, a, 1) = P & \mathcal{U} = Q \\
 P_2 = R & \mathcal{U}b \cap P_2P_1 := S
 \end{array}$$

En la imagen anterior podemos observar que

$$Q(O, a, \omega; P_{(1,1,0)}, b, ab)$$

pero no se cumple que  $Q(O, b, \omega; P_{(1,1,0)}, a, ab)$ , por consiguiente deducimos que el producto no es conmutativo.

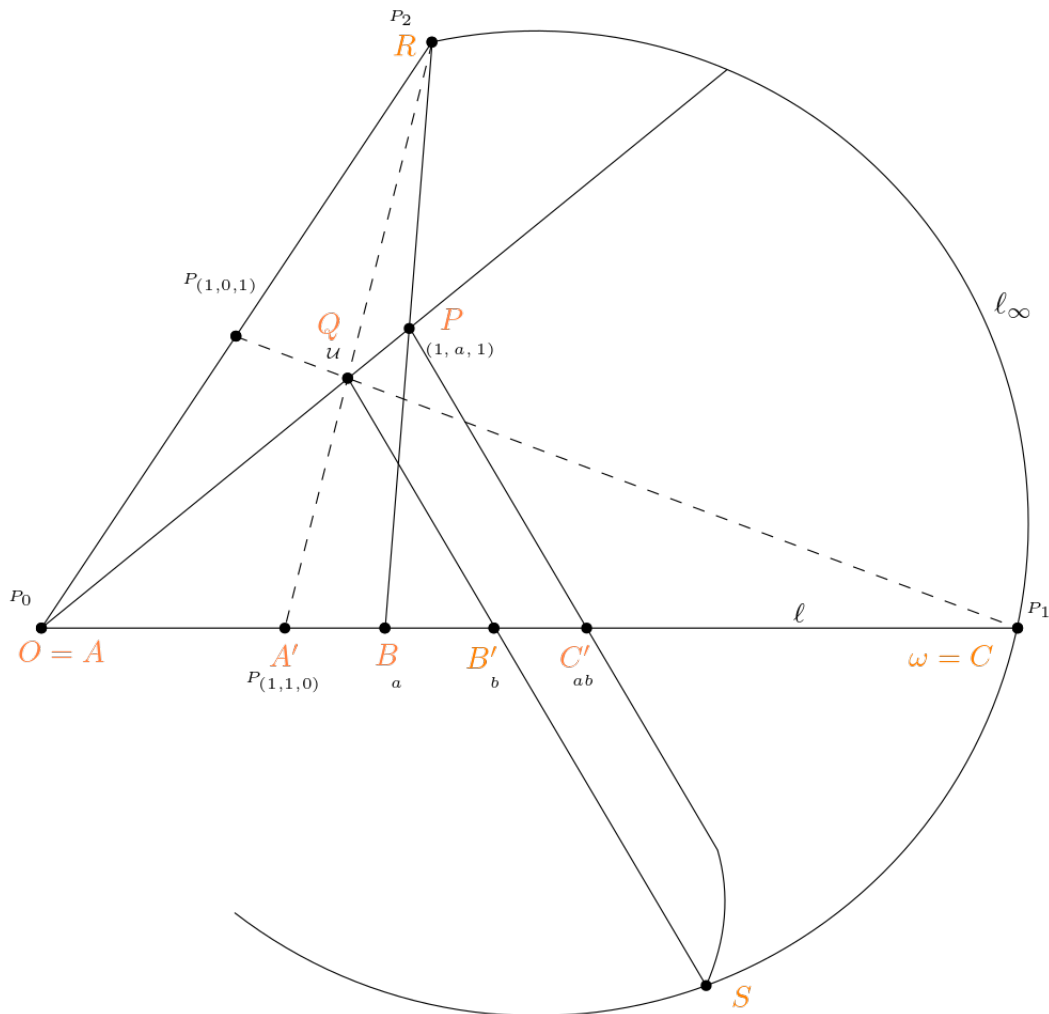


Figura 6.21: El producto no es conmutativo

## 6.4. Introducción de coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}$

Como último propósito de esta sección mostramos una forma de introducir coordenadas homogéneas en este espacio, pues recordemos que uno de los propósitos de este capítulo reside en ver que existe un anillo de división  $\mathbb{F}$  tal que el espacio de coordenadas homogéneas sobre él es isomorfo a  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$ .

### 6.4.1. Coordenadas en el espacio proyectivo

Como antes, partimos de una referencia proyectiva  $\{P_0, P_1, P_2; \mathcal{U}\}$ , cuyos puntos son  $P_0 = (1, 0, 0)$ ,  $P_1 = (1, 1, 0)$ ,  $P_2 = (1, 0, 1)$  y  $\mathcal{U} = (1, 1, 1)$ . Por su parte, las

rectas que los unen serán  $\ell_0$  es la recta de ecuación  $x_2 = 0$ ; asimismo,  $\ell_1$  será la que cumple la ecuación  $x_1 = 0$ ; finalmente, tomamos  $\ell_\infty$  aquella que verifica  $x_0 = 1$  y que elegimos como *recta del infinito*.

Es conveniente recordar que habíamos definido el anillo de división  $\mathbb{F}$ , como el conjunto de puntos que inciden en  $\ell_\infty \setminus P_1$ .

Sentadas estas bases, para coordinatizar un punto cualquiera,  $A$ , del espacio, seguiremos tres pasos.

- En primer lugar trazamos la recta que une  $A$  con  $P_1$  cuya intersección con  $\ell_1$  da lugar a un punto de la forma  $(1, 0, \mu)$ . Este valor  $\mu$  constituye la tercera coordenada del punto  $A$ .
- A continuación, dibujamos la recta que pasa por  $P_2$  y el punto dado. En esta ocasión, dicha recta incide con  $\ell_0$  en un punto de la forma  $(1, \lambda, 0)$ , y tomaremos  $\lambda$  como segunda coordenada del punto  $A$ .
- Finalmente, en relación a la primera coordenada de  $A$ , elegiremos siempre la unidad.

Por consiguiente, el punto  $A$  coordinatizado resulta ser  $(1, \lambda, \mu)$ .

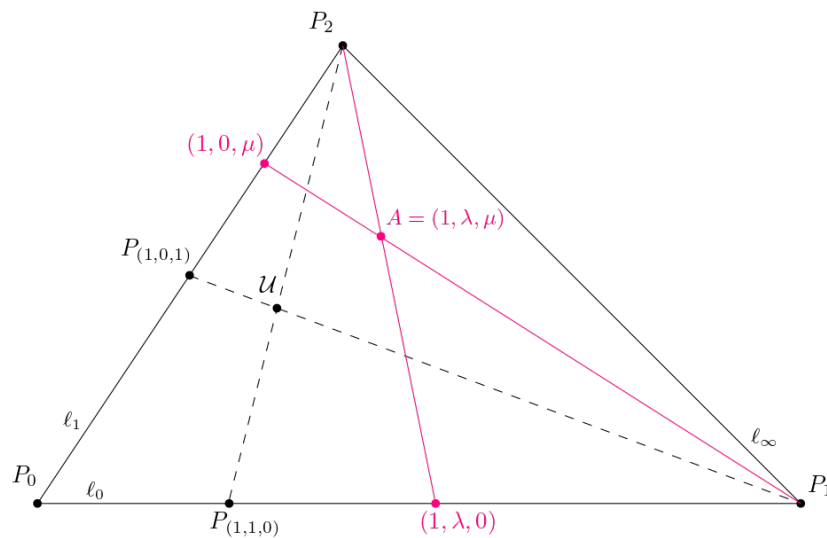


Figura 6.22: Introducción de coordenadas en el plano proyectivo

### 6.4.2. Coordenadas en el espacio afín

El proceso geométrico expuesto arriba permite también la introducción de coordenadas en el espacio afín. Será suficiente con eliminar la primera coordenada de

cada elemento para obtener las coordenadas afines del mismo.

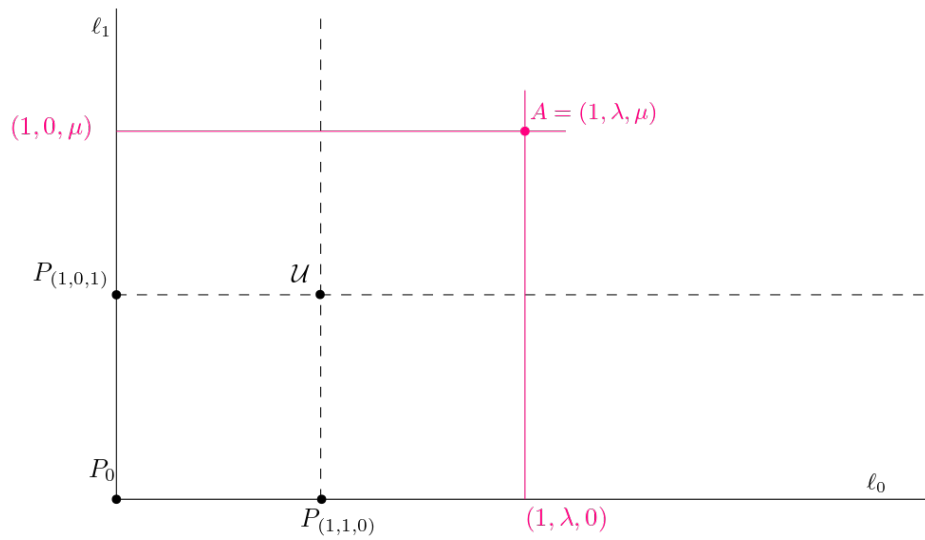


Figura 6.23: Introducción de coordenadas en el plano afín



# Bibliografía

- [1] Abrunho, J., Angdinata, D., Kim, H., Pan, Y. y Xing, X. *An Introduction to Finite Projective Planes*. Imperial College London. (Group Project).(2018).
- [2] Beutelspacher, A. y Rosenbaum, U. *Projective geometry: From Foundations to Applications*. Cambridge University Press. (1998).
- [3] Cameron, J. *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*. Cambridge Univ. Press. (1994).
- [4] Cano, F., Molina-Samper, B. y Sanz, F. *Curso breve de geometría proyectiva*. Universidad Nacional Autónoma de México. (2020).
- [5] Fraleigh, J. *A first course in abstract algebra*. Pearson new international edition. (2014).
- [6] Hartshorne, R. *Foundations of projective geometry*. Harvard University. (1967).
- [7] Joyce, D. *Euclid's Elements, Book I*. Clarck University. (1996).
- [8] Kolesova, G. y Thiel, L. *A computer search for finite projective planes of order 9*. Concordia University. (1988).
- [9] Lam, H., Thiel, L. y Swiercz, S. *The non-existence of finite projective planes of order 10*. Canadian Journal Mathematics, Vol. XLI, No. 6, 1989, pp. 1117-1123. (1989)
- [10] Moorehouse, G. *Incidence Geometry*. University of Wyoming. (2017).
- [11] Pascoe, A. *Affine and projective planes*. Missouri State University. (Masters Thesis). (2018).
- [12] Seidenberg, A. *Lectures in projective geometry*. Van Nostrand Reinhold company. (1962).

- [13] Sloane, N. *The on-line encyclopedia of integer sequences*. OEIS Foundation. (1964).



# Índice de figuras

1.1. ¿Toda recta tiene, al menos, dos puntos? Caso1: tres puntos exteriores . . . . .	12
1.2. Caso2: dos puntos exteriores sin paralelismo . . . . .	12
1.4. Caso3: dos puntos exteriores con paralelismo . . . . .	13
1.5. ¿En todo plano afín hay tantas rectas como puntos? Paso 1 . . . . .	13
1.6. Paso 2 . . . . .	14
1.7. Paso 3 . . . . .	14
1.8. Paso 4 . . . . .	15
1.9. Proposición 1.11 Configuración inicial . . . . .	16
1.10. Paso 1 . . . . .	16
1.11. Paso 2 . . . . .	16
1.12. Recíproco. Paso 1 . . . . .	17
1.13. Paso 2 . . . . .	17
1.14. Compleción de $\mathbb{A}$ . P1. . . . .	19
1.15. P1. Paso 2 . . . . .	19
1.16. Ejemplo: Compleción de $\mathbb{A}$ . Paso 1 . . . . .	20
1.17. Paso 2 . . . . .	20
1.18. Paso 3 . . . . .	21
1.19. ¿Toda recta afín tiene el mismo número de puntos? Configuración inicial . . . . .	22
1.20. Paso 1 . . . . .	22
1.21. Paso 2 . . . . .	22
1.22. Ejemplo: Plano de Fano. $\Delta$ . . . . .	25
1.23. $\hat{\Delta}$ . . . . .	26
1.24. $\hat{\Delta}$ . . . . .	26
1.25. $L$ : Plano proyectivo en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	29
1.26. Proposición 1.21. P1 . . . . .	29
1.27. Proposición 1.21. P2 . . . . .	30
2.1. Teorema de Desargues . . . . .	34

2.3. Ejemplo: Plano proyectivo no desarguesiano . . . . .	37
2.5. Ejemplo proposición 2.13 . . . . .	40
2.6. Paso 1 . . . . .	40
2.7. Paso 2 . . . . .	41
2.8. Desargues dual. Configuración inicial. . . . .	44
2.9. Desargues dual . . . . .	45
2.10. Definición cuadrivértice completo . . . . .	46
2.11. Axioma de Fano . . . . .	47
2.12. Definición cuaterna armónica . . . . .	48
2.13. Proposición 2.20. Paso 1 . . . . .	49
2.14. Paso 2 . . . . .	49
2.15. Paso 3 . . . . .	50
2.16. Definición <i>perspectiva</i> . . . . .	50
2.17. Proposición 2.23. Configuración inicial . . . . .	51
2.18. Paso 1 . . . . .	52
2.19. Paso 2 . . . . .	52
2.20. Caso 1. Cambio $\ell$ , paso 1 . . . . .	53
2.21. Caso 1. Cambio $\ell$ , paso 2 . . . . .	54
2.22. Caso 1. Cambio $n$ , paso 1 . . . . .	54
2.23. Caso 1. Cambio $n$ , paso 2 . . . . .	55
2.24. Caso 1. Cambio $n$ , paso 3 . . . . .	55
2.25. Caso 1. Cambio $n$ , paso 4 . . . . .	56
2.26. Caso 1. Cambio $n$ , paso 4 . . . . .	56
2.27. Definición perspectividad . . . . .	57
2.28. Proposición 2.25 c. Configuración inicial . . . . .	59
2.29. Paso 1 . . . . .	60
2.30. Paso 2 . . . . .	60
2.31. Proposición 2.29. Configuración inicial . . . . .	62
2.32. Paso 1 . . . . .	63
2.33. Paso 2 . . . . .	63
2.34. Paso 3, $\ell \bar{\wedge} \ell'''$ . . . . .	64
2.35. Paso 4, $\ell''' \bar{\wedge} \ell''$ . . . . .	64
2.36. Paso 5, $\ell'' \bar{\wedge} \ell$ . . . . .	65
2.37. Corolario 2.30 $H(A, B, C, D)$ . . . . .	66
2.38. Paso 1 . . . . .	66
2.39. Paso 2 $OXB'C'$ . . . . .	67
2.40. Paso 3 $OXBD$ . . . . .	67
3.1. Axioma de Pappus . . . . .	70
3.2. Axioma de Pappus dual . . . . .	71
3.3. Teorema de Hessenberg. Configuración inicial . . . . .	71

3.4. Paso 0 . . . . .	72
3.5. Paso 1 . . . . .	72
3.6. Paso 1.1 . . . . .	73
3.7. Paso 2 . . . . .	74
3.8. Paso 4 . . . . .	75
3.9. Proposición 3.39. Configuración inicial . . . . .	77
3.10. Paso 1 . . . . .	77
3.11. Paso 3 $\ell \bar{\wedge} \ell''$ con centro en $A'$ . . . . .	77
3.12. Paso 4 $\ell'' \bar{\wedge} \ell'$ con centro en $A$ . . . . .	78
3.13. Paso 5 $\ell \bar{\wedge} \ell''$ con centro en $B'$ . . . . .	78
3.14. Paso 6 $\ell'' \bar{\wedge} \ell'$ con centro en $B$ . . . . .	79
3.15. Lema 3.41 Configuración inicial . . . . .	80
3.16. Paso 2 $\ell \bar{\wedge} m$ con centro en $O$ . . . . .	80
3.17. Paso 3 $m \bar{\wedge} n$ con centro en $P$ . . . . .	80
3.18. Paso 4 . . . . .	81
3.19. Paso 5 . . . . .	81
3.20. Paso 6 $\ell \bar{\wedge} m_1$ con centro en $O'$ . . . . .	82
3.21. Paso 7 $m_1 \bar{\wedge} n$ con centro en $P$ . . . . .	82
3.22. Lema 3.42 Paso 1 . . . . .	84
3.23. Paso 2 . . . . .	84
3.24. Paso 3 . . . . .	85
3.25. Paso 4 . . . . .	85
3.26. Paso 5 . . . . .	86
3.27. Paso 6 . . . . .	86
3.28. Paso 7 . . . . .	86
3.29. Teorema 3.43 Caso 1. Configuración inicial . . . . .	88
3.30. Caso 1. Paso 1 . . . . .	89
3.31. Caso 1. Paso 2 . . . . .	89
3.32. Caso 2. Configuración inicial . . . . .	89
3.33. Caso 2. Paso 1 . . . . .	90
3.34. Caso 2. Paso 2 . . . . .	90
3.35. Caso 2. Paso 3 . . . . .	91
4.1. $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$ . . . . .	99
4.2. Proposición 4.23 Automorfismo $\sigma$ . . . . .	102
4.3. Proposición 4.23 Definición de suma en $\sigma$ . . . . .	103
4.4. Proposición 4.23 Definición de producto en $\sigma$ . . . . .	104
4.5. Teorema 4.26 . . . . .	106
6.1. Sexteto armónico . . . . .	116
6.2. Mover una recta incidente en $A$ . . . . .	119

6.3. $E, F_1$ y $F$ alineados . . . . .	120
6.4. $B, C_2$ y $B'$ colineales . . . . .	120
6.5. Definición operación suma, versión proyectiva. Configuración inicial . . . . .	122
6.6. paso 1. . . . .	122
6.7. paso 2. . . . .	122
6.8. paso 3. . . . .	123
6.9. Operación suma, versión afín . . . . .	123
6.10. Neutro para la suma . . . . .	123
6.11. Demostración asociatividad de la suma . . . . .	124
6.12. Demostración asociatividad de la suma . . . . .	125
6.13. Suma de elementos mediante sextetos . . . . .	126
6.14. Definición operación producto, versión proyectiva. Configuración inicial . . . . .	127
6.15. paso 1. . . . .	127
6.16. paso 2. . . . .	127
6.17. paso 3. . . . .	128
6.18. Operación producto, versión afín . . . . .	128
6.19. Neutro para el producto . . . . .	128
6.20. Inverso para el producto . . . . .	130
6.21. El producto no es conmutativo . . . . .	131
6.22. Introducción de coordenadas en el plano proyectivo . . . . .	132
6.23. Introducción de coordenadas en el plano afín . . . . .	133