Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

GRUPOS DIVISIBLES Y LINEALMENTE COMPACTOS

Autor/a: Fernando Méndez Menéndez
Tutor/es/as: Alberto Fernández Boix
Año 2024

A mi tutor Alberto, por su paciencia e interés.

A mis padres, mi hermana y Sara

Resumen

Se estudiarán los grupos divisibles, sus propiedades y sus relaciones con otras estructuras, se propondrán y justificarán resultados acerca de su descomposición como grupos más sencillos. Tras esto se estudiarán los grupos linealmente compactos, se dará su relación con los límites inversos y se propondrán comparaciones con otras nociones de índole similar.

Palabras clave

Grupo divisible, inyectividad, grupo linealmente compacto, límite inverso

Abstract

Divisible groups, their properties and their relationships with other structures will be studied, results on their decomposition as simpler groups will be proposed and justified. After this, the linearly compact groups will be studied, their relationship with the inverse limit of groups will be given and comparisons with other notions of a similar nature will be proposed.

Keywords

Divisible groups, injectivity, linearly compact group, inverse limit.

Índice general

Introducción

En la teoría de grupos abelianos, los conceptos de grupos divisibles y grupos linealmente compactos juegan un papel crucial debido a sus propiedades algebraicas y topológicas características. Mientras que los grupos divisibles se caracterizan por su capacidad para 'dividir' elementos por cualquier número entero, los grupos linealmente compactos destacan por sus propiedades topológicas en términos de subgrupos, completitud, y más propiedades que se estudiarán. Este último tipo son, de hecho, grupos cuyo estudio es un asunto ya obsoleto, dada la fecha de la mayor parte de publicaciones que se referenciarán en el respectivo capítulo. El interés en su estudio en este trabajo reside en la escasez de veces que en el grado se han manejado los conceptos de grupos de torsión, grupos libres, sistema y límite inverso, y un largo etcétera.

Para ello se introducirán estos conceptos por medio de definiciones, y pudiendo ser ampliado en algún caso concreto por un ejemplo. Los resultados que conllevarán estas definiciones se enunciarán mediante lemas, proposiciones, corolarios y etcétera, y se proporcionará (excepto en algún caso concreto) su correspondiente prueba.

El trabajo sigue principalmente el libro [6] durante el capítulo de grupos divisibles y del paper [1], y alguna definición se ha sacado del libro [3]. En el segundo capítulo se emplearán también referencias a [4],[5] y [2], algunas de las cuales trabajan con módulos, debido a que el contenido que se puede encontrar acerca de los grupos de este segundo capítulo se remonta a los años 50-60.

El trabajo se estructura de la siguiente manera. En el capítulo 1 se llevará a cabo una revisión acerca de divisibilidad de un grupo, estudio de su parte libre y parte de torsión, propiedad de inyectividad y finalizará con resultados acerca de la descomposición de este tipo de grupos. Se introducirán también ejemplos de grupos con estas características a medida que avance el capítulo y se vayan dando nuevos resultados.

En el segundo capítulo, mas extenso, se introducirá a la noción de topología lineal y de compacidad lineal, dando resultados acerca del comportamiento de estos grupos y relaciones con otros grupos con otras características, como lo son los grupos finitamente generados, Artinianos, etcétera. Se comprobará también la relación que tiene el concepto 'compacidad lineal' con los conceptos de 'compacidad' y 'compacidad algebraica'. Se trabajará también con los números p-ádicos.

0.1. Nociones preliminares

Daremos aquí información previa a los temas a tratar, que estando aquí presente, no se mencionará en los capítulos posteriores:

Definición 0.1. Por *grupo topológico* G se entiende un conjunto G que cumple:

- G es un grupo con respecto a las operaciones $+, -$ y el elemento neutro 0.
- G es un espacio topológico, es decir, tiene asociada una topología τ

Un *subgrupo topológico* es un subgrupo H de G con la topología subespacio inducida por G.

Esta definición cobra especial relevancia en el segundo capítulo, en el cual un grupo linealmente compacto requerirá de una topología, por lo que será automáticamente un grupo topológico. A pesar de ello, nos referiremos a estos también como sencillamente grupos, obviando lo 'topológico'.

Definición 0.2. Un *morfismo de grupos topológicos* $\psi : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo continuo del grupo G al grupo H.

Similarmente a lo anterior, en lo que resta de trabajo nos referiremos a estos como *morfismos* a secas.

Con respecto también al segundo capítulo, tienen especial importancia los grupos cociente y la aplicación proyección al cociente:

Definición 0.3. Sea G un grupo y H subgrupo de éste. El *grupo cociente*

$$G/H = \{g + H : g \in G\}$$

es el grupo formado por las *clases* $g + H$.
La aplicación

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

es un morfismo que lleva a un elemento g en su clase $g + H$ se denomina *proyección*.
Para este grupo cociente G/U, la topología inducida por G se denomina *topología cociente* y sus abiertos $V \subset G/H$ son los conjuntos cuya contraimagen en G es un conjunto abierto.

En esta topología (que es la que consideraremos siempre que estemos hablando de grupos cociente) la aplicación proyección es una aplicación abierta, es decir, envía abiertos de G en abiertos en G/H: Si $A \subset G$ es un abierto de G, el conjunto $H + A$ es abierto (es unión de los conjuntos $h + A$ con $h \in H$ que son claramente abiertos) por lo que la contraimagen de la imagen de A es abierto, luego la imagen de A debe ser abierta.

En lo respectivo a los subgrupos topológicos, estos cumplen una propiedad muy interesante: todo subgrupo abierto es también cerrado.
Dado un subgrupo $H \subset G$ abierto de un grupo G,tenemos que cada clase $g + H$ (para $g \in G$) es también un abierto. $G \setminus H$ debe ser un conjunto cerrado en G por ser el complementario del abierto H, pero como la unión de todas las clases abiertas $g+H$ con $g \in G\setminus H$ da el conjunto $G \setminus H$, este debe ser también abierto, por lo que su complementario H es cerrado.

Capítulo 1

Grupos abelianos divisibles

Comenzaremos viendo una serie de definiciones clave para el resto del contenido, así como un resultado acerca de su descomposición.
Sea G un grupo abeliano (usaremos notación aditiva), y $x, y \in G$ elementos de G, con órdenes finitos respectivos m, n. Si $l = mcm(m, n)$, entonces ocurre que $l(x \pm y) = lx \pm ly = 0$, es decir, el orden de $x \pm y$ divide a l. De hecho, dado un entero positivo n, el conjunto de todos los elementos x en G que satisfacen la ecuación $nx = 0$ forman un subgrupo de G, al que se le denota $G[n]$. Así mismo, los elementos que tienen como orden una potencia de un primo fijo p, forman también un subgrupo de G:

Definición 1.1. Denotamos por G_p, y llamamos *p-componente o componente p-primaria de G*, al subgrupo $G_p \subset G$ formado por todos los elementos que tienen orden una potencia del primo p.

De igual forma, el conjunto de todos los elementos de orden finito de G también:

Definición 1.2. Decimos que $T \subset G$, es el *subgrupo de torsión de G* si T está compuesto por todos los elementos de orden finito.

Esto nos da las herramientas suficientes para demostrar un primer resultado:

Proposición 1.3. *(de descomposición primaria): El subgrupo de torsión T de un grupo abeliano G es la suma directa de todas las componentes primarias de G.*

Demostración. Sea $x \in T$ elemento de orden finito m. Entonces m descompone como producto de primos distintos $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$. Denotemos $m_i = m/p_i^{e_i}$. Es sencillo observar que, al ser $p_1, p_2, ..., p_k$ primos distintos entre sí, los enteros $m_1, m_2, ..., m_k$ tienen como mínimo común múltiplo de todos ellos 1. Por tanto existen enteros $l_1, l_2, ..., l_k$ de tal

forma que $l_1m_1 + l_2m_2 + ... + l_km_k = 1$. Entonces $x = 1x = (l_1m_1 + l_2m_2 + ... + l_km_k)x = l_1m_1x + l_2m_2x + ... + l_km_kx = l_1x_1 + l_2x_2 + ... + l_kx_k$, donde $x_i = m_ix$ para $i = 1, 2, ..., k$. Cada uno de estos x_i tienen orden $p_i^{e_i}$, es decir, cada x_i pertenece a su respectiva componente p_i-primaria para $i = 1, ..., k$.
Veamos ahora que, en efecto, la suma es directa: dados dos primos cualesquiera distintos p y q, tenemos que comprobar que la intersección de G_p y G_q es el elemento nulo. Supongamos que $g \in G_p \cap G_q$. Entonces existen enteros positivos m, n tal que $p^m g = 0$ y $q^n g = 0$. Como p^m y q^n son potencias de primos distintos, sabemos que existen dos enteros a, b tal que $ap^m + bq^n = 1$. Pero entonces $g = 1g = (ap^m + bq^n)g = ap^m g + bq^n g = 0 + 0 = 0$, por lo tanto la suma es directa. □ □

Mediante este teorema, podemos centrarnos en el estudio por separado de dos tipos de grupos, estos son, los libres de torsión, y los grupos de torsión, que, a su vez, se pueden reducir en el estudio de las componentes primarias.

1.1. Divisibilidad

A continuación se introduce el concepto principal de este capítulo:

Definición 1.4. Sea G un grupo abeliano. Un elemento $g \in G$ se dice *divisible* por el entero positivo m si existe algún elemento $g_1 \in G$ de forma que $g = mg_1$. Si todos los elementos de G son divisibles por cualquier entero positivo, diremos que G es un *grupo abeliano divisible.*

Una propiedad interesante de estos grupos divisibles tiene que ver con la suma directa:

Proposición 1.5. *Sea el grupo $G = \oplus_{i\in I} G_i$ suma directa de los grupos G_i, donde I es un conjunto de índices, finito o infinito. Entonces G es divisible si y sólo si todos los G_i son divisibles.*

Demostración. Supongamos que cada uno de los G_i, con $i \in I$, son divisibles. Sea $x \in G$ un elemento de G y $m > 0$ un entero positivo. Tenemos que demostrar que existe un $y \in G$ de tal forma que $x = my$. Como $x \in \oplus_{i\in I} G_i$, entonces $x = \sum_{i\in I} x_i$ donde $x_i \in G_i \forall i \in I$ y $x_i \neq 0$ para un número finito de x_i. Como los G_i son divisibles, podemos encontrar un y_i para cada x_i de manera que $x_i = my_i$. Por tanto $x_i = \sum_{i\in I} my_i = m \sum_{i\in I} y_i$. Tomando $y = \sum_{i\in I} y_i$ se demuestra esta implicación.
Supongamos ahora G divisible. Sea $x_i \in G_i$ para un $i \in I$ cualquiera, y $m > 0$ un entero positivo. Tenemos que probar que existe un $y_i \in G_i$ de manera que $x_i = my_i$. Sabemos que, como G es divisible, existe un elemento $y \in G$ de tal forma que $x_i = my$. Entonces, dado que $y = \sum_{j\in I} y_j$ para unos ciertos $y_j \in G_j$, y tal que la cantidad de $y_j \neq 0$ es finita, podemos poner $x_i = m \sum_{j\in I} y_j = my_i + m \sum_{j\in I, j\neq i} y_j$. Pasando el término y_i a la izquierda obtenemos la igualdad $x_i - my_i = \sum_{j\in I, j\neq i} my_j$. Como $x_i - my_i \in G_i$ y

$\sum_{j\in I, j\neq i} my_j \neq G_i$ (ya que la suma es directa y por tanto la intersección de dos grupos G_l y G_k distintos esa el 0), no queda más remedio que $x_i - my_i = 0$, por lo que $x_i = my_i$ con $y_i \in G_i$ como queríamos. $\square$

Ejemplos: Como ejemplos de grupos divisibles, está el grupo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Este es, además, un grupo libre de torsión.
En cambio, el grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es también un grupo divisible, pero ya no es libre de torsión: dado el elemento $m/n+\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $n(m/n+\mathbb{Z}) = m+\mathbb{Z} = 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$

1.2. Grupos cuasicíclicos

Retomando el ejemplo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ anterior, y aplicando el **Teorema 1.1**, resulta en que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es la suma directa de sus componentes primarias, cada una de las cuales es también divisible. De hecho, para una componente p-primaria $\bar{P}$, se tiene que esta está formada por las clases $m/p^i + \mathbb{Z}$, generadas por los elementos $b_i = 1/p^i + \mathbb{Z}$, y además se satisfacen las relaciones $pb_1 = 0$ y $pb_{i+1} = b_i$.

Inversamente, definamos P como un grupo con generadores $a_1, a_2, a_3, ...$, a los cuales les pedimos que cumplan las siguientes propiedades:

Definición 1.6. Si un grupo P tiene un conjunto de generadores $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ de tal forma que para algún primo p se cumpla

1. $pa_1 = 0$
2. $pa_{i+1} = a_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, ...\}$
3. $a_i + a_j = a_j + a_i$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3, ...\}$

Este grupo P se le denomina como *p-grupo cuasicíclico* o como *grupo de Prüfer de tipo p^∞*, y se denota por $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

Ciertamente entonces P es un grupo abeliano, y más concretamente un p-grupo. Haciendo una identificación $\varphi : P \longrightarrow \bar{P}$ de forma que $a_i \longrightarrow b_i$, tenemos que φ es un isomorfismo, puesto que los elementos de P pueden ser vistos de la forma ma_i para algunos enteros adecuados m e i. Es decir, la aplicación φ que lleva el elemento ma_i de P en el elemento $mb_i = m(1/p^i + \mathbb{Z}) = m/p^i + \mathbb{Z}$ de $\bar{P}$ nos permite ver el grupo P como la p-componente de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, por lo que P funciona a modo de p-grupo divisible.
Esto nos servirá, más adelante, para ver que todo grupo abeliano divisible se puede descomponer como suma directa de grupos de Prüfer de tipo p^∞ y copias de $\mathbb{Q}$.

1.3. Propiedad de inyectividad de grupos abelianos divisibles

A continuación veremos un tipo especial de grupos que guardan mucha relación con los grupos divisibles, estos son, los grupos inyectivos:

Definición 1.7. Un grupo G se dice *inyectivo* si, dados H y K grupos abelianos, un homomorfismo $\alpha : H \longrightarrow G$, y un monomorfismo (homomorfismo inyectivo) $\mu : H \longrightarrow K$, se puede encontrar otro homomorfismo $\beta : K \longrightarrow G$ de forma que $\alpha = \mu\beta$, es decir, tal que el diagrama de homomorfismos

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & K \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ G & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

sea conmutativo.

Observación 1.8. Esto puede verse también de la siguiente manera: como el homomorfismo μ es inyectivo, $H \simeq Im(\mu) \leq K$, por lo que podemos ver el grupo H directamente como subgrupo de K, y donde μ es el mapa de inclusión. Entonces la afirmación anterior sobre un grupo inyectivo puede traducirse en que la aplicación $\alpha : H \longrightarrow G$ puede extenderse al homomorfismo $\beta : K \longrightarrow G$, en el sentido de que α es la restricción de β al conjunto H.

Veremos, de hecho, que las propiedades de divisibilidad e inyectividad son equivalentes en el marco de los grupos abelianos.

Teorema 1.9. *Un grupo abeliano es inyectivo si y sólo si es divisible.*

Demostración. Supongamos G grupo abeliano inyectivo. Veamos que, dados un elemento $g \in G$ y un entero positivo m cualesquiera, m divide a g: consideremos el homomorfismo $\alpha : m\mathbb{Z} \longrightarrow G$ determinado por la asignación $m \longrightarrow g$, y la inclusión $\tau : m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Como G es divisible, podemos encontrar un homomorfismo $\beta : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ de forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} m\mathbb{Z} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ G & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Entonces $g = \alpha(m) = \alpha(m) = \beta(\tau(m)) = \beta(m) = m\beta(1)$, luego m divide a g. Por lo tanto el grupo G es divisible.

Supongamos ahora que el grupo G es divisible, y asumamos que tenemos unos grupos K y H, un monomorfismo $\mu : H \longrightarrow K$, y un homomorfismo $\alpha : H \longrightarrow G$. Como μ es inyectivo, el grupo H es isomorfo a $Im(\alpha) \subset K$, por lo que podemos tomar $H \simeq Im(\alpha)$ como subgrupo de K, y μ la inclusión, sin pérdida de generalidad. Tendremos que extender la aplicación α al grupo K.
Sea S entonces el conjunto de todas las extensiones parciales γ de α, es decir, homomorfismos $\gamma : L \longrightarrow G$ donde $H \leq L \leq K$ y tal que $\gamma(h) = \alpha(h)$ para todo $h \in H$. En S consideremos el orden siguiente: $\gamma_i \leq \gamma_j$ para $\gamma_i : L_i \longrightarrow G$, $\gamma_j : L_j \longrightarrow G$ si $L_i \subset L_j$ y γ_j es extensión de γ_i. Veremos que este conjunto tiene un elemento maximal, y para ello trataremos de aplicar el lema de Zorn.
Consideremos para ello una cadena $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ creciente en S en el sentido anterior. Sea $L = \cup_{i\in I} L_i$ y $\gamma : L \longrightarrow G$ definida por $\gamma(l) = \gamma_i(l)$ cuando $l \in L_i$. Esto tiene sentido pues las γ_i coinciden donde están definidas. Por tanto γ es una cota superior del conjunto $\{\gamma_i\}_{i\in I}$, lo que quiere decir que el conjunto S tiene un maximal, $\beta : L \longrightarrow G$. Ahora lo que tendremos que ver es que, efectivamente, $L = K$. Para ello, supongamos que existe un elemento $x \in K$ tal que $x \notin L$. Puede suceder entonces que, o bien $L\cap < x >= 0$, o bien $L\cap < x >\neq 0$.
En el primer caso, sea $M = L\oplus < x >$. Entonces podemos extender β a $\beta_1 : M \longrightarrow G$ con sencillamente asignar $\beta_1(x) = 0$, y por lo tanto β no sería elemento maximal, lo cual es una contradicción.
Si, en cambio $L\cap < x >\neq 0$, eso quiere decir que existe un $nx \in L$ para algún entero positivo n. Sea de nuevo $M = L\oplus < x >$. Supongamos que $\beta(nx) = g$ para un elemento g. Como G es divisible, $g = ng_1$ para algún g_1 en G. Como todo elemento de M se puede escribir de la forma $l + mx$ con $l \in L$ y m entero no negativo menor que n, podemos extender de nuevo β a $\beta_1 : M \longrightarrow G$, de forma que $\beta_1(l + mx) = \beta(l) + mg_1$. Esto indicaría que β no es maximal y concluye la prueba. □

La consecuencia más importante de este teorema es la propiedad de suma directa de grupos divisibles, que veremos inmediatamente:

Proposición 1.10. *Si G es un grupo abeliano, y D es un subgrupo divisible de este, entonces $G = D \oplus E$, donde E es un subgrupo de G.*

Demostración. Sea $\tau : D \longrightarrow G$ la aplicación de inclusión de D en G. Por el teorema anterior, el grupo D resulta inyectivo, por lo que podemos dibujar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "I"'] & G \arrow[dl, "\beta"] \\
D &
\end{tikzcd}$$

donde la aplicación I es la identidad. Entonces tenemos que $I(d) = \beta\tau(d) = \beta(d) = d$ para todo $d \in D$, y esto implica que los elementos de la forma $g - \beta(g)$ con $g \in G$ pertenecen al $ker(\beta) = E$, pues $\beta(g - \beta(g)) = \beta(g) - \beta(\beta(g)) = \beta(g) - \beta(g) = 0$ ($\beta(\beta(g)) = I(\beta(g))$ pues la aplicación β se comporta como la identidad al actuar sobre elementos de D). Como $g = \beta(g) + g - \beta(g)$ para todo $g \in G$, de esto se sigue que $G = D + ker(\beta) = D + E$. Para comprobar que la suma es directa, supongamos que $g \in D \cap E$. Entonces $g = \beta(g)$ pues $g \in D$ y $\beta(g) = 0$ pues $g \in E = ker(\beta)$, por lo tanto $g = 0$, lo que quiere decir que $D \cap E = 0$ y que $G = D \oplus E$. □

Es especialmente interesante esta descomposición cuando el grupo E es un grupo reducido:

Definición 1.11. Un grupo E se dice *reducido* si no tiene subgrupos divisibles además del trivial.

El siguiente resultado nos da la relación entre estos subgrupos reducidos y los divisibles de un grupo, además nos permite reducir el estudio de un grupo a sus subgrupos divisible y reducido.

Teorema 1.12. *Si G es un grupo abeliano, existe un único subgrupo D divisible mayor a cualquier otro subgrupo divisible, y tal que $G = D \oplus E$, donde E es un subgrupo reducido.*

Demostración. Tomamos D como la suma de todos los subgrupos divisibles de G. Es evidente entonces que D es un subgrupo divisible. Aplicando la proposición anterior, $G = D \oplus E$. Ver que E es reducido es sencillo puesto que si no lo fuese la suma no podría ser directa. □

1.4. Estructura de grupos abelianos divisibles

El siguiente teorema, final de esta sección, nos dará ya un método para caracterizar los grupos abelianos divisibles, y este no es otro que reducirnos a copias de $\mathbb{Q}$ y a grupos de Prüfer de tipo p^∞

Teorema 1.13. *Un grupo G es divisible si y solo si se puede descomponer en sumas directas de copias isomorfas de $\mathbb{Q}$ y de grupos cuasicíclicos.*

Demostración. Solo deberemos probar que si G es divisible entonces es suma directa de copias isomorfas de $\mathbb{Q}$ y de grupos cuasicíclicos, pues ya sabemos que éstos son divisibles, y por tanto así será también su suma.

Sea entonces G un grupo abeliano divisible, y T el subgrupo de torsión de G. Veamos primero que T es divisible: si $x \in T$ y $m > 0$ es un entero, existe un elemento $y \in G$ tal que $my = x$. Si n es el orden de x, entonces $nmy = nx = 0$ y por tanto y es un elemento de torsión, luego $y \in T$ y por tanto T es divisible. Como hemos visto anteriormente (Teorema

1.1), T es la suma directa de todas las componentes primarias de G, cada una de ellas, a su vez, divisible. Consecuentemente podemos reducir la demostración a dos casos: G es un grupo libre de torsión y G es un p-grupo:

Supongamos que G es un grupo libre de torsión. Sea $g \in G$, y m un entero positivo. Entonces existe un g_1 de forma que $g = mg_1$, que de hecho es único: si hubiesen g_1, g_2 de tal forma que $g = mg_1 = mg_2$, entonces $m(g_1 - g_2) = 0$, por lo tanto $g_1 - g_2 \in G$ tendría orden que divide a m, lo cual es absurdo, pues G es libre de torsión. Podemos entonces denotar el elemento g_1 como g/m. Tenemos así una acción de $\mathbb{Q}$ en G, lo que convierte a G en un $\mathbb{Q}$-módulo. Pero un $\mathbb{Q}$-módulo es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, y por tanto tendrá una base. Visto como un grupo abeliano entonces, G es una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$

Sea ahora G un p-grupo, y $P = G[p]$, es decir, $x \in P$ si tiene exactamente orden p. Entonces P es un módulo sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, en términos de la acción $x(n + p\mathbb{Z}) = nx$, donde $x \in P$, $n \in \mathbb{Z}$. P se comporta, entonces, como un espacio vectorial: sea c su dimensión (un número cardinal). Formemos ahora una suma directa G^* de c grupos de tipo p^∞, y pongamos $P^* = G^*[p]$. Entonces P^* es también un espacio de dimensión c sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, y hay un monomorfismo $\alpha : P^* \longrightarrow G$ que identifica isomórficamente a P^* con P. Como G es divisible, es un grupo inyectivo, por lo que podemos hacer el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} P^* \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\alpha"'] & G^* \arrow[dl, "\beta"] \\ G & \end{tikzcd}$$

donde τ es la inclusión de P^* en G^* y β es la extensión del homomorfismo α a G^*. Si $ker(\beta)$ fuese distinto a cero, tendría que contener un elemento $g^* \in G^*$, que supongamos de orden p^k, y entonces el elemento $p^{k-1}g$ tiene orden p, por lo que $\beta(p^{k-1}g) = p^{k-1}\beta(g) = 0$, algo que no puede suceder pues β identifica isomórficamente a P^* con P. De igual manera, si $Im(\beta) \neq G$, tendríamos un $g \in G$ de orden p^j para algún entero positivo j y tal que no es imagen de ningún elemento en G^*. Pero entonces el elemento $p^{j-1}g$ tiene orden p y tampoco sería imagen de ningún elemento en G^*, lo cual es absurdo. Por tanto β es un isomorfismo, y la prueba esta completada. $\square$

Capítulo 2

Grupos abelianos linealmente compactos

En este capítulo estudiaremos los Grupos linealmente compactos, y estableceremos su relación con otras estructuras algebraicas, como lo son los límites inversos, los espacios completos, etcétera. Veremos también la relación entre los términos 'compacto', 'algebraicamente compacto' y 'compacto'. Nos referiremos, en todo lo que sigue, a grupos topológicos sencillamente como grupos, dado que la noción de compacidad lineal implica ya de por sí una topología.

Definición 2.1. Se dice que G tiene *topología lineal* si existe un sistema de subgrupos $\{U_i\}_{i\in I}$ de G tal que, para cualquier $g \in G$, las clases laterales $g + Ui$ $(i \in I)$ forman un sistema fundamental de entornos de g, es decir, para cualquier entorno $V \subset G$ del punto g, existe un U_j tal que $g + Ui \subseteq V$.

Las operaciones del grupo son continuas en cualquier topología lineal, siempre se supone que las topologías son Hausdorff, es decir, $\cap_{i\in I} U_i = 0$.

Definición 2.2. Un grupo *linealmente compacto* es un grupo G con una topología lineal tal que si $\{g_j + G_j \ : \ j \in I\}$ es un sistema de clases laterales módulo subgrupos cerrados G_j con la propiedad de intersección finita (es decir, cualquier número finito de $g_j + G_j$ tiene una intersección no vacía), entonces la intersección $\cap_{j\in I}(g_j + G_j)$ de todos ellos es no vacía.

Nuestro objetivo actual es estudiar la estructura algebraica de los grupos linealmente compactos. En particular, veremos que todo grupo que admite una topología compacta, es linealmente compacto en alguna topología adecuada, mientras que todos los grupos linealmente compactos son algebraicamente compactos. Veremos así que se puede obtener un sistema completo de invariantes para los grupos linealmente compactos.
En la obtención de estos invariantes juega un papel fundamental el hecho de que todo grupo G linealmente compacto se puede descomponer como un producto directo $G = \prod_p G_p$,

donde, para cada primo p, G_p es un módulo topológico sobre los enteros p-ádicos, con la topología del producto en G.
Para los componentes G_p. podemos aplicar la teoría de la dualidad de Kaplansky y Schoneborn [4](entre módulos p-ádicos discretos y linealmente compactos) para obtener un teorema de estructura completo en grupos linealmente compactos. Usaremos las siguientes notaciones:

- $\mathbb{Z}_p$ = grupo de enteros p-ádicos;
- $\mathbb{Q}_p$ = grupo de números p-ádicos;

Requeriremos previamente unos resultados sobre grupos linealmente compactos:

Proposición 2.3. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) Un subgrupo de un grupo linealmente compacto es linealmente compacto si y solo si es cerrado.

b) La imagen de un grupo linealmente compacto a través de un homomorfismo continuo es también un grupo linealmente compacto.

c) Si $f : G_1 \longrightarrow G_2$ es un homomorfismo continuo de un grupo linealmente compacto G_1 a un grupo G_2, el núcleo $ker(f)$ es un subgrupo linealmente compacto de G_1.

d) El producto de grupos linealmente compactos es también un grupo linealmente compacto con la topología producto.

Demostraciones:

a) Sea G un grupo linealmente compacto y H un subgrupo linealmente compacto de G. Supongamos que H no es cerrado, es decir, que existe un $x \in G$ tal que $x \in Fr(H)$ pero $x \notin H$. Como x está en la frontera de H, cualquier entorno de x de la forma $x + G_i$ interseca a H en al menos un punto, pongamos $h_i \in (x + G_i) \cap H$. Los conjuntos $(x + G_i) \cap H$ tienen la propiedad de la intersección finita: dados $i_1, i_2, ..., i_n$, la intersección $((x+G_{i_1}) \cap H) \cap ((x+G_{i_2}) \cap H) \cap ... \cap ((x+G_{i_n}) \cap H) = H \cap ((x + G_{i_1}) \cap (x + G_{i_2}) \cap ... \cap (x + G_{i_n}))$ es no vacía (la intersección finita de entornos es también un entorno). Dado que H es linealmente compacto, tenemos que la intersección total $\cap_{i \in I}(x + G_i) \cap H$ es no vacía. Esta intersección es precisamente x, y debe estar en H. Entonces hemos llegado a una contradicción y por tanto $x \in H$ y H debe ser cerrado.

Supongamos ahora que H es un subgrupo cerrado del grupo linealmente compacto G. Veamos que la topología de subespacio de H es también una topología lineal: dado $h \in H$, los entornos de h en G son de la forma $h + G_i$, con $i \in I$. por tanto los de H como subespacio de G son de la forma $(h + G_i) \cap H$. Tomando los subgrupos $H_i = G_i \cap H$, de H tenemos que $(h + G_i) \cap H = h + H_i$, pues si $x \in (h+G_i) \cap H$, entonces $x - h \in G_i$ y también $x - h \in H$, (pues $x, h \in H$), por lo que $x - h \in G_i \cap H = H_i$, luego $x \in h + H_i$. Recíprocamente: si $x \in h + H_i$ entonces $x - h \in H_i = G_i \cap H$. Por un lado $x - h \in G_i$ implica que $x \in h + G_i$, y por otra parte $x \in H$ pues así lo hemos supuesto, por lo tanto $x \in (h + G_i) \cap H$. Hemos visto que H tiene topología lineal, falta ver la propiedad de la intersección: sean $\{h_i + H_i\}$, con $i \in I$ y H_i subgrupo cerrado de H, entornos en H con la propiedad de la intersección finita. Dado que H es cerrado en G, los subgrupos H_i cerrados en H son también cerrados en G. Como G es linealmente compacto, se cumple que la interseccion $\cap_{i\in I} h_i + H_i$ es distinta al vacío en G, y como $h_i + H_i \subset H$ para todo $i \in I$, la intersección debe estar en H. Hemos probado entonces que H es un subgrupo linealmente compacto de G. $\square$

b) Sea G un grupo linealmente compacto, y $\alpha : G \longrightarrow K$ un homomorfismo continuo del grupo G en el grupo K, en el que supondremos sin pérdida de generalidad que $K = Im(\alpha)$. Veamos que K es también un grupo linealmente compacto. Para ello, veamos primero que la topología inducida en K por el homomorfismo α es lineal: Sea $k \in K$ y $V \subset K$ un entorno de k. Deberemos hallar un subgrupo $K_i \subset K$ de forma que $k \in k + K_i \subset V$. Sea $U \subset G$ un subconjunto de G tal que $\alpha(U) = V$, y $g \in U$ tal que $\alpha(g) = k$. Como G es un grupo linealmente compacto, existe un subgrupo G_i de G tal que $g \in g + G_i \subset U$. Tomando $K_i = \alpha(G_i)$, se tiene que $\alpha(g) = k \in \alpha(g + G_i) = \alpha(g) + \alpha(G_i) = k + K_i \subset \alpha(U) = V$. Esto prueba que la topología inducida en K por α es una topología lineal.

Queda comprobar la propiedad de la intersección: sean $\{k_i + K_i\}_{i\in I}$ un conjunto de entornos que cumplen que cualquier intersección finita entre ellos es no vacía. Veamos que entonces la intersección total tampoco lo es. Sean $g_i \in G$, con $i \in I$ elementos de G tal que $\alpha(g_i) = k_i$ para cada $i \in I$; y $G_i \subset G$ subgrupos de G de forma que $\alpha(G_i) = K_i$ para cada $I \in I$. Como las intersecciones finitas de los $k_i + K_i$ no son vacías, tampoco lo pueden ser las de los $g_i + G_i$. Como G es linealmente compacto, esto quiere decir que la intersección total de los $g_i + G_i$ es no vacía. Por lo tanto, $\alpha(\cap_{i\in I} g_i + G_i) \subset \cap_{i\in I} k_i + K_i$ y por tanto es no vacía. $\square$

c) Por ser el conjunto $\{0\} \subset G_2$ cerrado en G_2, y el homomorfismo f continuo, la contraimagen $f^{-1}(0) = ker(f)$ debe ser un subgrupo cerrado en G_1, que es linealmente compacto. Entonces por la propiedad a), el subgrupo $ker(f)$ es linealmente compacto. $\square$

d) Para probar que que el producto de grupos linealmente compactos es también linealmente compacto, pongamos $G = \prod_{i\in I} G_i$, donde cada uno de los G_i es un grupo linealmente compacto. Veamos primero que G tiene una topología lineal dada por la topología producto: sean $g \in G$ y V un entorno de g en G. Entonces, por ser base de la topología producto, podemos encontrar un entorno de g dentro de V de la forma

$$U = \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} G_i$$

, donde J es una cantidad finita de índices de I. Como cada G_i es linealmente compacto, (en particular para los $j \in J$), sabemos que en cada G_j con $j \in J$ podemos tomar entornos de la forma $g_j + H_j \subset U_j$, siendo H_j subgrupo de G_j, y g_j la proyección en G_j de g. Formando el conjunto

$$\prod_{j \in J}(g_j + H_j) \times \prod_{i \in I \setminus J}(g_i + G_i) = g + (\prod_{j \in J} H_j \times \prod_{i \in I \setminus J} G_i)$$

, este cumple que está contenido en $U = \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} G_i \subset V$. Luego la topología producto de G es lineal.
Falta probar que una familia de entornos de la forma $\{g_k + H_k\}_{k \in K}$ (donde $g_k \in G$ y $H_k \subset G$ es un subgrupo para cada $k \in K$) con la propiedad de la intersección finita, cumplen también que la intersección total es distinta del vacío. Para ver esto, supongamos que estos entornos cumplen la propiedad de la intersección finita, pero la intersección total es vacía. Esto quiere decir que en alguna coordenada (es decir, para algún $i \in I$) de la intersección es el vacío. Por lo tanto para algun G_i se tiene que se cumple la propiedad de la intersección finita, pero no la total, por lo que hemos llegado a una contradicción, ya que este grupo donde ocurre esto no sería linealmente compacto. □

2.1. Límite inverso

El límite inverso juega un papel fundamental en la teoría de grupos linealmente compactos. Para entender qué es un límite inverso, debemos comprender bien qué es un *Sistema Inverso*:

Definición 2.4. Un *sistema inverso* de grupos consiste en un trío $(I, \{G_i\}_{i \in I}, \{f_{ij}\})$ (aunque por abreviar pondremos $(\{G_i\}_{i \in I}, \{f_{ij}\})$) formado por:

I Un conjunto ordenado de índices I.

II Una familia de subgrupos $\{G_i\}_{i \in I}$.

III Una familia de homomorfismos $\{f_{ij}\}_{i \geq j}$ con $i \geq j$ e $i, j \in I$ que cumplen:

- $f_{ij} : G_i \longrightarrow G_j$ para $i \geq j$ con $i, j \in I$
- $f_{ii} = Id_{G_i}$ para todo $i \in I$.

- Dados unos índices $i, j, k \in I$ de forma que $i \geq j \geq k$, los homomorfismos f_{ij}, f_{jk}, f_{ik} se cumple que $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$.

Ejemplos: Como ejemplo de un primer sistema inverso muy trivial, dado un grupo G, podemos poner $G_i = G$ y los homomorfismos igual a la identidad, $f_{ij} = Id_G$.
Otro ejemplo menos trivial es el de los enteros $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Este es, dado un primo p, el sistema formado por

- El conjunto de índices $I = \mathbb{N}$ (por lo que renombraremos $i = n$).
- $G_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$
- los homomorfismos f_{mn} para $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ se corresponden con hacer el módulo en el grupo $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, es decir, dado un $z \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, su imagen en $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ mediante el homomorfismo f_{ij} es $\phi_{ij}(z) = z \mod p^n$

Visto ya lo que es un sistema inverso, podemos pasar entonces a la definición del límite inverso:

Definición 2.5. Dado un sistema inverso $(\{G_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\})$, diremos que un grupo G y una colección de homomorfismos $\{\pi_i\}_{i\in I}$ donde $\pi_i : G \longrightarrow G_i$ para cada $i \in I$ es el *límite inverso del sistema inverso* $(\{G_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ij}\})$, y escribiremos

$$G = \varprojlim G_i = \{(g_i) \in \prod_{i\in I} G_i : f_{ij}(g_i) = g_j \text{ para todo } i \geq j\}$$

si se cumple que:

- $$G \subset \prod_{i\in I} G_i$$
- Para cualesquiera $i, j, k \in I$ con $i \geq j$, se tiene que $f_{ij} \circ \pi_i = \pi_j$

De hecho, este límite inverso cumple también otra propiedad muy importante que hace a este grupo único salvo isomorfismos, llamada *Propiedad universal del límite inverso:*

Teorema 2.6. *Sea $\{G_i, f_{ij}, I\}$ un sistema inverso de grupos G_i, y sea G su límite inverso:*

$$G = \{(g_i) \in \prod_{i\in I} G_i : f_{ij}(g_i) = g_j \text{ para todo } i \geq j\}$$

Entonces, dado un grupo L junto con homomorfismos $\{\phi_i\}_{i\in I}$ tal que $f_{ij} \circ \phi_i = \phi_j$ para todo $i \geq j$ en I, existe un único homomorfismo continuo $u : L \longrightarrow G$ tal que $\pi_i \circ u = \phi_i$ para todo $i \in I$

Demostración: Como $G \subset \prod_{i\in I} G_i$ consideramos $u : L \longrightarrow G$ tal que, para un $l \in L$, $u(l) = g$ donde $g = (g_i) \in G$ es tal que $\phi_i(l) = g_i$ para cada $i \in I$. Por construcción de u, tenemos $\pi_i \circ u = \phi_i$ $\forall i \in I$. Como las proyecciones π_i y ϕ_i son continuas para todo índice, y $u(l) = (\pi_i(u(l))_i) \in G \subset \prod_{i\in I} G_i$, la aplicación u es continua también.
Para ver su unicidad, supongamos $u, v : L \longrightarrow G$ homomorfismos continuos distintos que cumplen $\pi_i \circ u = \phi_i$, $\pi_i \circ v = \phi_i$ para todo $i \in I$. Como son distintos, debe existir un elemento $l \in L$ tal que $u(l) \neq v(l)$, pongamos $u(l) = g = (g_i) \in G$, $v(l) = g' = (g'_i) \in G$. Entonces debe existir algún índice $j \in I$ tal que $g_j \neq g'_j$, y por lo tanto $\phi_j(l) = (\pi_j \circ u)(l) = g_j \neq g'_j = (\pi_j \circ v)(l) = \phi_j(l)$, lo cual es absurdo. Por tanto el homomorfismo u debe ser único. $\square$

Observación 2.7. Básicamente, y para tener una idea mas esquemática de este teorema, lo que nos quiere decir este resultado es que podemos formar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[ddl, "\phi_i"'] \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, "\phi_j"] & \\
 & G \arrow[dl, "\pi_i"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & \\
G_i \arrow[rr, "f_{ij}"'] & & G_j
\end{tikzcd}$$

Ahora que ya conocemos un poco más los sistemas y límites inversos, podemos empezar a dar unos primeros resultados que vinculan a estos límites inversos con grupos linealmente compactos, aunque antes requeriremos de la siguiente proposición:

Proposición 2.8. *El límite inverso de un sistema inverso* $(\{G_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ij}\})$ *es cerrado en la topología producto.*

Demostración: Veamos que el límite inverso de unos grupos linealmente compactos $\{G_i\}_{i\in I}$ es intersección de cerrados en el producto, y por tanto $G = \varprojlim G_i$ un subgrupo cerrado del grupo $\prod_{i\in I} G_i$:
Dados $i, j \in I$ con $i \geq j$, formamos el conjunto

$$C_{ij} = \{(g_k) \in \prod_{k\in I} G_k : f_{ij}(g_i) = g_j\}$$

. Como es evidente, por construcción del límite inverso, para cuales quiera $i, j \in I$ tal que $i \geq j$, tenemos que $G \subset C_{ij}$. De hecho, es sencillo ver que la intersección de todos estos C_{ij} es exactamente el límite inverso:

$$G = \varprojlim G_i = \bigcap_{i \geq j : i, j \in I} C_{ij}$$

. Por lo tanto G es intersección de cerrados, luego G es cerrado en $\prod_{i \in I} G_i$. □

Ahora ya podemos dar un primer resultado para grupos linealmente compactos en términos del límite inverso:

Proposición 2.9. *El límite inverso $G = \varprojlim G_i$ de grupos linealmente compactos G_i es linealmente compacto.*

Demostración: Si los G_i son linealmente compactos, por las propiedad anteriores de grupos linealmente compactos, el grupo producto $K = \prod_{i \in I} G_i$ es linealmente compacto. Por la proposición anterior, el grupo G es cerrado en K, y de nuevo por las propiedades iniciales que hemos visto de grupos linealmente compactos, al ser G cerrado en un linealmente compacto K, automáticamente G es también linealmente compacto. □

De hecho, posteriormente probaremos un resultado más potente, que nos dirá que un grupo es linealmente compacto si y solo si es límite inverso de unos grupos que cumplen cierta propiedad. Sin embargo, para ello necesitaremos definir un nuevo tipo de grupo, que en teoría de módulos se llaman *Artinianos*:

2.2. Condición del mínimo

Para los próximos resultados debemos tener en cuenta las siguientes definiciones:

Definición 2.10. Dado un grupo abeliano G, diremos que el subgrupo $S \subset G$ es el *zócalo* de G (traducción literal de *socle of* G), y escribiremos $S = soc(G)$ si S es el subgrupo generado por todos los subgrupos minimales no triviales, es decir, aquellos subgrupos que no contienen a ningún otro subgrupo a parte del trivial.

Observación 2.11. De hecho el zócalo $S = Soc(G)$ de un grupo G es un subgrupo de la torsión de G:
Supongamos que hay un subgrupo H minimal tal que un elemento $g \in H$ es de orden

infinito. Este elemento ya genera un subgrupo de por si, $< g >\subseteq H$, por lo que tiene que ocurrir que $< g >= H$ (pues H es minimal). Tomando ahora el elemento $g + g$, éste también genera un subgrupo $< g+g >$, por lo que debe ocurrir que $< g+g >=< g >= H$. Por tanto para algún $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $n(g + g) = g$, es decir, G es combinación de $g + g$, y por tanto $(2n - 1)g = 0$. Como para un $n \in \mathbb{Z}$, $2n - 1 \neq 0$, tiene que ocurrir que g tenga orden $2n - 1$. Pero esto es absurdo pues hemos considerado a g libre de torsión.
Por tanto los subgrupos minimales que generan el zócalo son grupos de orden finito. Estos deben ser, por lo tanto, de orden primo, por lo que el zócalo se puede definir también como

$$soc(G) = \langle g \in G : g \text{ tiene orden primo } \rangle$$

Definición 2.12. Diremos que un grupo G cumple la *condición del mínimo en subgrupos* si toda cadena descendente de subgrupos de G se vuelve constante después de un número finito de pasos. Es decir, para toda cadena descendente $H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq ...$ existe un entero n de pasos tal que $H_n = H_j$ para todo $j \geq n$.

Con estas definiciones probaremos el siguiente lema:

Proposición 2.13. *Un grupo G cumple con la condición del mínimo en los subgrupos si y solo si su zócalo $Soc(G)$ es finito.*

Demostración: Supongamos que G cumple la condición del mínimo en subgrupos, y veamos que $Soc(G)$ debe ser finito. Para ello, supongamos que es infinito e intentemos llegar a una contradicción: si el zócalo de G fuese infinito, esto implica que hay infinitos subgrupos de G de orden primo $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que cada H_i está generado por un elemento h_i de orden primo distinto a otro h_j. Consideremos entonces los siguientes subgrupos:

- $K_1 = \oplus_{i=1}^{\infty} H_i$
- $K_2 = \oplus_{i=2}^{\infty} H_i$
- ...
- $K_n = \oplus_{i=n}^{\infty} H_i$
- ...

Con ellos podemos formar la cadena descendente:

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset ... \supset K_n \supset ...$$

Esta cadena de subgrupos cumple ser estrictamente decreciente (en el sentido de que $h_i \notin K_{i+1}$, pues sino su orden primo sería divisible por otros primos), e infinita, por lo que G no cumpliría la condición del mínimo, llegando así a una contradicción.
Supongamos ahora que el zócalo es finito, y $\{H_i\}_{i=1}^{N}$ la familia de subconjuntos minimales

no triviales de G. Sea $L_1 \supset L_2 \supset ...$ una cadena decreciente de subgrupos no triviales de G. Por la definición de grupos minimales, existirá un subconjunto $J_1 \subset J$ de índices tal que $\oplus_{i \in J_1} H_j = H_k$ para todo $k \geq n$ a partir de un $n \in \mathbb{N}$ en adelante. Como J es finito, también lo es J_1, por lo tanto la sucesión debe estabilizarse en algún momento. Luego G cumple con la condición del mínimo en subgrupos. □

Usando este resultado precedente se consigue probar la siguiente proposición que relaciona la condición del mínimo y la compacidad lineal cuando la topología del grupo en cuestión es la discreta:

Proposición 2.14. *Un grupo G con la topología discreta es linealmente compacto si y solo si cumple la condición del mínimo en los subgrupos, es decir, si toda cadena de subgrupos $G_1 > G_2 > G_3 > ...$ estrictamente descendiente de G es finita.*

Demostración: Sea G un grupo linealmente compacto con la topología discreta. Veamos que G no tiene elementos de orden infinito: si así fuese, supongamos que $p \in G$ es un elemento de orden infinito. Entonces las clases cerradas $s_0+s_1p^1+s_2p^2+...+s_{n-1}p^{n-1}+p^nZ$ cumplen la propiedad de la intersección finita, sin embargo la intersección de todas estas clases es vacía, y por tanto G no tiene elementos de orden infinito. Es decir, G es un grupo de torsión. Sea entonces $S = \{g \in G : g \text{ tiene orden primo}\}$ su zócalo, y $\{b_i\}_{i \in I}$ una base de S de forma que cada b_i tenga orden primo. Consideremos B_i el subgrupo generado por todos los b_j, $j \in I$ tal que $i \neq j$. Entonces, las clases cerradas $b_i + B_j$ cumplen la propiedad de la intersección finita, pero la total resulta vacía a menos que el conjunto de índices I sea vacío. Esto quiere decir que el zócalo $Soc(G)$ está finitamente generado, y por tanto es finito. A su vez, como ya hemos visto que todos los elementos tienen orden finito, esto implica que no podemos formar una cadena estrictamente descendiente (en algún momento llegaremos a uno de los subgrupos generados por un único elemento b_i, y de ahí no podremos extraer otro subgrupo aparte del trivial). Por lo tanto G cumple con la condición del mínimo en subgrupos.

Por otro lado, sea G un grupo que cumple la condición del mínimo en los subgrupos. Supongamos que tenemos las clases laterales $\{g_j+G_j\}_{j \in J}$, donde $g_j \in G$ y G_j es subgrupo de G para todo $j \in J$, y que estas clases cumplen la propiedad de la intersección finita. Entonces, seleccionando un minimal en las intersecciones finitas $G_{i_1} \cap ... \cap G_{i_{n'}}$ (la condición del mínimo nos garantiza que existe este minimal), se sigue que la interseccion de todos los $g_j + G_j$ es igual a la interseccion de las clases correspondientes a la interseccion finita minimal, y por tanto es no vacía, luego G es linealmente compacto. □

Proposición 2.15. *Si G es un grupo linealmente compacto y U es un subgrupo abierto de éste, el grupo cociente G/U cumple la condición del mínimo en subgrupos.*

Demostración: Consideremos $H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq ...$ una cadena descendente de subgrupos en G/U, y sea aplicación $\pi : G \longrightarrow G/U$ la proyección canónica. Tomando las contraimágenes cerradas $\pi^{-1}(H_i)$ podemos formar la cadena descendiente en G de estas contraimágenes: $\pi^{-1}(H_1) \supseteq \pi^{-1}(H_2) \supseteq \pi^{-1}(H_3) \supseteq ....$ El subgrupo U está contenido en todas estas contraimágenes, por lo que tanto la intersección finita como la total es distinta del vacío. Por lo tanto, llegará un punto que la sucesión se estabilice y no pueda seguir decreciendo, es decir, existe un n tal que $\pi^{-1}(H_n) = \pi^{-1}(H_k)$ para cualquier $k \geq n$. Tomando de nuevo las proyecciones tendremos que $H_n = H_k$ para todo $k \geq n$ por lo que la sucesión se estabiliza en G/U, y esto implica que se cumple la condición del mínimo en subgrupos en G/U. □

De hecho G/U es linalmente compacto en la topología discreta. Este último resultado es el que nos servirá para demostrar un resultado más fuerte que el que vimos antes sobre límites inversos y grupos linealmente compactos:

Teorema 2.16. *Un grupo es linealmente compacto si y solo si es el límite inverso de grupos que cumplen la condición del mínimo.*

Demostración: Supongamos que el grupo G es el límite inverso de grupos G_i con la condición del mínimo. Entonces, tomando la topología discreta en cada uno de ellos, obtenemos por el lema anterior que estos G_i son linealmente compactos, y por la propiedad d), el límite inverso de linealmente compactos es linealmente compacto, luego G es linealmente compacto.
Supongamos ahora que G es un grupo linealmente compacto y sean $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de subgrupos que forman un sistema fundamental de entornos alrededor del 0, que podemos suponer abiertos sin pérdida de generalidad. Entonces, por el resultado anterior, el grupo cociente G/U_i satisface la condición del mínimo en subgrupos para cualquier $i \in I$. Para cada par de índices $i, j \in I$ tal que $U_i \subseteq U_j$ tomamos la aplicación $\pi^i_j : G/U_i \longrightarrow G/U_j$ que lleva $a + U_i$ en $a + U_j$. Los grupos cocientes G/U_i junto con las aplicaciones anteriores forman un sistema inverso cuyo límite debe ser, por la propiedad universal del límite, el grupo G. □

Viéndolo de nuevo en el diagrama es más facil su comprensión:

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, "\phi_i"'] \arrow[ddr, "\phi_j"] & \\
 & \varprojlim G/U_k \arrow[dl, "\pi_i"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & \\
G/U_i \arrow[rr, "\pi_j^i"'] & & G/U_j
\end{tikzcd}$$

Es decir, si G es un grupo linealmente compacto, este teorema nos dice que siempre tendremos un sistema inverso $(\{G_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\})$, de modo que:

- Los grupos que forman el sistema inverso son los grupos cociente con G módulo un U_i de los que forman el sistema fundamental de entornos del 0, es decir $G_i = G/U_i$.
- Los homomorfismos $\{f_{ij}\}$ se corresponden con las aplicaciones $\pi_j^i : G/U_i \longrightarrow G/U_j$ empleadas en la anterior demostración.

Curiosamente este concepto de ver un grupo linealmente compacto como un límite de grupos con la condición del mínimo es muy similar a otro concepto que no está en desuso, al contrario que la compacidad lineal:

Definición 2.17. Diremos que un grupo G es *profinito* si es límite inverso de grupos finitos.

Por ser finitos cumplen la condición del mínimo, por lo que un grupo profinito es también linealmente compacto.
El sistema dado por los $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ del que hemos hablado antes tiene como límite inverso un grupo llamado *grupo de los enteros p-ádicos*, que por lo anterior debe ser profinito y por tanto linealmente compacto. Lo estudiaremos más profundamente en lo posterior.

2.3. Completitud

Cuando hablamos de espacios completos, se suele entender por ellos espacios con una métrica, en los que cualquier sucesión de Cauchy es convergente. Sin embargo, si se quiere definir esta noción más generalmente, y en concreto para nuestros grupos linealmente compactos, debemos darlo en términos de la topología del grupo:

Definición 2.18. Diremos que un grupo abeliano G es *completo respecto a su topología* τ si existe una familia de subgrupos $G_i \in \tau$ de G de forma que:

$$G \cong \varprojlim G/G_i$$

Por lo visto anteriormente, sabemos que si un grupo G es linealmente compacto, es límite inverso de grupos con la condición del mínimo. Por lo tanto la siguiente propiedad se da sin demostración:

Proposición 2.19. *Todo grupo linealmente compacto es completo.*

Es fácil anticipar que no todo grupo completo va a ser linealmente compacto (por ejemplo el grupo $\mathbb{R}$), pero añadiendo unas condiciones a sus subgrupos, se consigue el siguiente resultado:

Teorema 2.20. *Un grupo G con la topologia lineal es linealmente compacto si y solo si es completo y los grupos factores módulo subgrupos abiertos de G cumplen con la condición del mínimo en subgrupos.*

Demostración. La primera implicación se deduce fácilmente de lo anterior.
Si G es completo, $G \cong \varprojlim G/G_i$, y estos G/G_i cumplen con la condición del mínimo en los subgrupos por hipótesis, entonces G es un límite inverso de grupos $\{G/G_i\}_{i \in I}$ que cumplen la condición del mínimo en subgrupos, y por el Teorema 2, es linealmente compacto. □

2.4. Compacidad y compacidad algebraica

2.4.1. Compacidad

A continuación daremos unos resultados que relacionan entre sí los conceptos de compacidad y compacidad lineal, para ello, usaremos una de las equivalencias de la definición de compacidad:

Definición 2.21. Diremos que un grupo G es compacto si para toda familia de subconjuntos cerrados $\{F_i\}_{i \in I}$ de G con la propiedad de la intersección finita, su intersección total es distinta al vacío

Se puede intuir que no todo grupo linealmente compacto será compacto, y esto es cierto, por ejemplo para el grupo de los números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ (que no es otro que el cuerpo de fracciones del grupo $\mathbb{Z}_p$, pero, como veremos más tarde, este sí es compacto). Seguidamente veremos un resultado que nos dirá cuando un grupo linealmente compacto es compacto, pero anterior a ello necesitaremos el siguiente lema:

Proposición 2.22. *Si G es límite inverso de grupos G_i finitos, es compacto*

Demostración: Si los G_i son finitos, son compactos en la topología discreta. Por tanto el producto $\prod_{i\in I} G_i$ es compacto en la topología producto. Como $G \subset \prod_{i\in I} G_i$ es un subconjunto cerrado de un compacto, es compacto. $\square$

Proposición 2.23. *Un grupo linealmente compacto y acotado (en el sentido de que hay una cota superior para el orden de cualquier elemento) es compacto.*

Demostración : Sea G un grupo acotado en el sentido del enunciado y linealmente compacto. Por el Teorema 1, G debe ser límite inverso de grupos G_i que cumplen la condición del mínimo en subgrupos. Entonces por el Lema 1 su zócalo debe ser finito. Como además hay una cota superior para el orden de cualquier elemento, cada G_i debe ser un grupo finito. Dado que G es el límite inverso de grupos finitos, debe ser compacto.$\square$

La relación entre compacidad y compacidad lineal va más allá cuando se trata con grupos con la siguiente topología:

Definición 2.24. Para un grupo G, llamamos topología $\mathbb{Z}$-ádica a la topología lineal para la que los subconjuntos

$$nG = \{ng : g \in G\} \text{ para } n = 1, 2, ...$$

forman un sistema fundamental de entornos alrededor del 0.

Esta topología es claramente lineal, y además se cumple que:

Proposición 2.25. *Un grupo G linealmente compacto con la topología $\mathbb{Z}$-ádica es compacto.*

Demostración: Consideremos los grupos G/nG para $n = 1, 2, ...$ Estos cumplen que tienen la topología discreta y son linealmente compactos. Además están acotados en el sentido anterior: sea $g + nG \in G/nG$ entonces el orden de g divide a n, pues $n(g + nG) = ng + nG \subset nG = 0_G$. Esto implica que los G/nG deben ser finitos, y de igual manera que antes, al ser G límite inverso de grupos finitos, G debe ser compacto. $\square$

A continuación, veamos estos conceptos en algunos ejemplos de grupos:

- El grupo de los enteros $p-$ádicos:

  $$\mathbb{Z}_p = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} : a_j = f_{ij}(a_i) = a_i \mod p^j \ \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ tal que } i \geq j\}$$

  con la topología p-ádica (que en este caso es la misma que la $\mathbb{Z}$-ádica) son un grupo linealmente compacto. En particular, este grupo es límite inverso $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ Para un elemento $a \in \mathbb{Z}_p$, los subconjuntos de la forma $a + p^n\mathbb{Z}_p$ son un sistema fundamental de entornos de este punto. Es linealmente compacto, pues es límite inverso de grupos $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ que cumplen la condición del mínimo, y por el corolario anterior, también es compacto.

- El grupo $\mathbb{K} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es el grupo de los numeros reales $\mod 1$, es algebraicamente el producto

  $$\mathbb{K} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}(p^\infty) = \prod_{p \text{ primo}} \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : a_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, a_n = a_{n+1} \mod p^n\}$$

  Con la topología discreta en cada $\mathbb{Z}(p^\infty)$, todos estos grupos son linealmente compactos, y por la propiedades vistas anteriormente, el producto de todos estos grupos con la topología producto da un grupo linealmente compacto.

- El grupo $\mathbb{R}$ de los números reales tiene muchas topologías lineales. Es, de hecho, isomorfo al grupo $\mathbb{Q}_p$ de los números p-ádicos, y este último es el límite inverso de grupos de tipo $\mathbb{Z}(p^\infty)$, supongamos $C_n \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$. Entonces tenemos que $\mathbb{Q}_p = \varprojlim C_n$, donde los homomorfismos que forman parte del sistema inverso $(\{C_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\})$ son los f_{ij} tal que, para $j = i-1$, los homomorfismos $f_{i,i-1}$ llevan elementos de orden p^k de C_i a elementos de orden p^{k-1} de C_{i-1}.

2.4.2. Compacidad Algebraica

Al igual que pasaba con grupos linealmente compactos y compactos, los grupos algebraicamente compactos también guardan mucha relación con el tema principal de esta sección. Empecemos por definir qué es un grupo algebraicamente compacto:

Definición 2.26. Diremos que un grupo G es algebraicamente compacto si cumple una de las siguientes tres condiciones equivalentes entre sí:

I) G es un sumando directo de un grupo compacto C. Es decir, si C es un grupo compacto y existe K un subgrupo de C tal que $G \oplus K = C$, entonces G es algebraicamente compacto (y K también).

II) G es sumando directo de todo grupo que lo contiene como subgrupo puro ($G \subset C$ es subgrupo puro de C si $nG = G \cap nC$ para $1, 2, 3, ...$). Es decir, si para todo grupo C que contiene a G como subgrupo puro, entonces existe un subgrupo $K \subset C$ tal que $G \oplus K = C$.

III) Si dado un sistema de una cantidad I de ecuaciones en G de la forma

$$\sum_j n_{ij} x_j = g_i \text{ con } i \in I$$

y tal que para cualquier subconjunto finito de I, el sistema tiene solución, entonces el sistema completo tiene también solución

Los siguientes dos teoremas nos ayudarán a comprender la relación entre grupos compactos, linealmente compactos y algebraicamente compactos:

Teorema 2.27. *Un grupo que admite una topología compacta admite también una topología linealmente compacta.*

Demostración: Todo grupo que admita una topología compacta es un producto directo de grupos de tipo $\mathbb{Z}(p^n)$, $\mathbb{Z}(p^\infty)$, $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{R}$,[2] de manera que el número de grupos del tipo $\mathbb{Z}(p^\infty)$ no supera al número de grupos del tipo $\mathbb{R}$. Todos estos grupos admiten una topología linealmente compacta, por lo tanto su producto también lo admite.

El recíproco, en cambio, no tiene por qué ser cierto, es decir, un grupo con una topología linealmente compacta no admite necesariamente una topología compacta. Por ejemplo, el grupo $\mathbb{Z}(p^\infty)$ con la topología discreta es un grupo linealmente compacto, sin embargo, no es compacto. $\square$

Teorema 2.28. *Todo grupo linealmente compacto es algebraicamente compacto.*

Demostración: Veamos que un grupo linealmente compacto G cumple con la condición III. Para ello, supongamos que tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\sum_j n_{ij} x_j = g_i \text{ con } i \in I$$

, que tiene solución para cualquier subsistema finito. Entonces una solución para la i-ésima ecuación puede verse como un elemento $(..., c_j, ...)$ del producto $\prod_j G = G^*$ (un G por cada componente j), para la cual sustituir $x_j = c_j$ resuelve la ecuación i-ésima. Sea $S_i \subset G^*$ el conjunto de soluciones de la ecuación i-ésima.
Denotemos por R_i el conjunto de soluciones de la ecuación

$$\sum_j n_{ij} x_j = 0 \text{ con } i \in I$$

(es un subgrupo cerrado), y sea $s^i = (s^i_j)_j \in S_i$ una solución cualquiera de la i-ésima ecuación. Entonces se tiene $S_i = s^i + R_i$. Repitiendo ese razonamiento para todo indice de I, obtendremos las clases $\{s^i + R_i\}_{i \in I} = \{S_i\}_{i \in I}$, que deben tener la propiedad de la intersección finita. Como G^* es linealmente compacto (por serlo G), la intersección total de todas las clases $\{s^i + R_i\}_{i \in I}$ es no vacía, y por lo tanto existe una solución para el sistema anterior. Por esta razón, G es algebraicamente compacto. $\square$

Al igual que antes, el recíproco no tiene por qué darse necesariamente. Por ejemplo:

- la suma directa de un cantidad numerable de grupos cíclicos del mismo orden p^k es algebraicamente compacto, pero no linealmente compacto. Para ver esto, dado una potencia p^k de un p primo, podemos considerar los grupos distintos $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde cada G_n tiene orden p^k. Este grupo G cumple, por la definición equivalente número

II, ser algebraicamemte compacto, pero no así compacto: Si lo fuese, como todo orden está acotado, por la prop. **2.21** debería ser compacto, pero no lo es, pues un sistema de cerrados con la propiedad de la intersección finita no cumple necesariamente que su intersección exista (pensemos en los conjuntos cerrados $H_m = \oplus_{m=n}^{\infty} G_m$)

- Un grupo que sea producto de un número finito o infinito numerable de copias de $\mathbb{Q}$ también cumple ser algebraicamente compacto, pero tampoco es linealmente compacto.

Por el Teorema 2 sabemos que un grupo G linealmente compacto puede escribirse como $G = \varprojlim M_i$ donde los M_i son grupos que cumplen con la condición del mínimo en subgrupos. Por un teorema de Kurosh[1], cada M_i es suma directa de una cantidad finita de grupos de tipo $\mathbb{Z}(p^n)$ donde p es primo y $n \leq \infty$
Si para cada M_i nos reducimos a las p-componentes M_{ip}:

$$M_{ip} = \{m \in M_i : m \text{ tiene orden una potencia de } p\}$$

y consideramos las restricciones de los homomorfismos $f_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ para $i \geq j$, entonces esto forma a su vez el sistema inverso$(\{G_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\})$: comprobemos que efectivamente es un sistema inverso:
Dado $m_i \in M_{ip}$ con orden p^k, tendremos que, para un $j \in I$ con $j \leq i$, $f_{ij}(0_{M_i}) = f_{ij}(p^k m_i) = p^k f_{ij}(m_i) = 0_{M_j}$ tiene como límite inverso un grupo G_p que debe ser un factor directo del grupo G:

$$G_p = \varprojlim M_{ip} \subset G$$

Los p-grupos son, de forma natural, p-módulos, (es decir, multiplicar por un entero p-ádico es una operación continua en estos grupos) por lo que cada G_p cumple también ser p-módulo. Esto permite verificar que G es suma directa de los G_p cuando p recorre todos los primos:

$$G = \oplus_{p \text{ primo}} G_p$$

Donde la topología lineal de G coincide con la topología producto heredada de los G_p.

El producto directo de los anillos compactos $\mathbb{Z}_p$ de los enteros p-ádicos es la completación del anillo de enteros en la topología $\mathbb{Z}$-ádica;

$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p$$

Un sistema fundamental de entornos de 0 está formado por los ideales $n\mathbb{Z}$ para $n = 1, 2, ...$
Todo grupo de torsión es, de forma natural, un $\hat{\mathbb{Z}}$-módulo, y al igual que antes, se sigue de esto que todo grupo linealmente compacto es un $\hat{\mathbb{Z}}$-módulo topológico, es decir, si

$G = \prod_p G_p$ entonces para cada G_p los enteros p-ádicos actúan de la forma natural, mientras que los enteros q-ádicos (tal que $p \neq q$) actúan sobre G_p de forma trivial.
La demostración del siguiente resultado fue dada por Schöneborn:

Teorema 2.29. *Todo grupo linealmente compacto G es un $\hat{\mathbb{Z}}$-módulo topológico, y existe un única descomposición $G = \prod_p G_p$, donde para cada primo p, G_p es un módulo p-ádico topológico.*

En vista de este teorema, y para lograr dar uno acerca de la estructura de los grupos abelianos linealmente compactos, nos podemos reducir a aquellos que son módulos p-ádicos. Kaplansky[4] estableció un teorema de dualidad entre todas las clases de módulos p-ádicos linealmente compactos y todas las clases de módulos p-ádicos discretos, mediante homomorfismos continuos al módulo discreto $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Consecuentemente, estos módulos p-ádicos linealmente compactos son, desde un punto de vista algebraico, los grupos

$$\hom_{\hat{\mathbb{Z}}_p}(M, \mathbb{Z}(p^\infty))$$

donde M denota a un módulo p-ádico discreto.

Para entender estos homomorfismos, empecemos por un submódulo básico $B \in M$. Por lo visto anteriormente, B es suma directa de grupos de tipo $\mathbb{Z}(p^\infty)$ y de grupos de tipo $\mathbb{Z}_p$, que son módulos p-ádicos:

$$B \cong \oplus_{n=1}^{\infty}(\oplus_{I_n}\mathbb{Z}(p^\infty) \ \oplus \ \oplus_{J_n}\mathbb{Z}_p)$$

Por tanto, el cociente de M módulo B será un grupo con la siguiente forma:

$$M/B \cong \oplus_I \mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \oplus_J \mathbb{Q}_p$$

Estos grupos son divisibles, y por tanto, como se ha visto en la primera sección, son grupos inyectivos.

Capítulo 3

Conclusión

Empezando por los grupos divisibles, hemos empezado viendo como descomponen, de forma primaria, en sus subgrupos de torsión y los libres, dando así resultados que nos han proporcionado la herramienta para establecer la correspondencia de estos grupos con los que cumplen la propiedad de inyectividad. Esta correspondencia nos sirvió para dar una serie de resultados que son ciertos para grupos inyectivos, y con estos resultados se logro demostrar un resultado mucho más fuerte acerca de la descomposición de éstos.

En el segundo capítulo comenzamos el estudio con la definición de grupos linealmente compactos, y aplicando las propiedades extraídas de esta, conseguimos dar unas primeras propiedades acerca de la compacidad lineal. Proseguimos enunciando los sistemas y límites inversos, para dar con estos un nuevo significado a la compacidad lineal que nos sirvió para establecer unas nuevas propiedades sobre estos grupos, siendo esta (quizá) la herramienta más útil del capítulo. Se vio también un concepto más actual que es muy similar a nuestra compacidad lineal, aunque más restrictivo en cuanto a su caracterización como límite inverso. Tras esto pudimos establecer cúal es la relación entre la compacidad, la compacidad algebraica y la 'nuestra', ayudándonos con algún ejemplo.

Bibliografía

[1] L. Fuchs. Note on linearly compact abelian groups. *J. Austral. Math. Soc.*, 9:433–440, 1969.

[2] D. K. Harrison. Infinite abelian groups and homological methods. *Ann. of Math. (2)*, 69:366–391, 1959.

[3] P. J. Higgins. *Introduction to topological groups*, volume No. 15 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, London-New York, 1974.

[4] I. Kaplansky. Dual modules over a valuation ring. I. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4:213–219, 1953.

[5] S. Lefschetz. *Algebraic Topology*, volume Vol. 27 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, New York, 1942.

[6] D. J. S. Robinson. *A course in the theory of groups*, volume 80 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.