



TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Física

Desigualdades de Bell con post-selección

Autor:

Víctor Calleja Rodríguez

Tutores:

Luis Miguel Nieto Calzada

Mateus Araújo

Abstract

Quantum nonlocality was one of the most surprising discoveries of 20th century physics. It started as a philosophical debate, progressed into an experimentally-accessible effect, and became the foundation of a large field of research, quantum information and computation. At its core, the effect of quantum nonlocality involves the violation of Bell inequalities, which are upper bounds on the strength of correlations that can be achieved in classical theories.

In this work, we review the theory of nonlocality, and introduce a new kind of Bell inequality called post-selection games. These post-selection games have two advantages with respect to traditional Bell inequalities: they have higher statistical power, which allows for the verification of nonlocality with fewer experimental rounds, and also allow a more direct translation of philosophical arguments such as Hardy's paradox into physical experiments.

Resumen

La no localidad cuántica fue uno de los descubrimientos más sorprendentes de la física del siglo XX. Comenzó como un debate filosófico, progresó hasta convertirse en un efecto accesible experimentalmente y se convirtió en la base de un amplio campo de investigación: la información y la computación cuántica. En su esencia, el efecto de la no localidad cuántica implica la violación de las desigualdades de Bell, que son límites superiores sobre la fuerza de las correlaciones que se pueden lograr en teorías clásicas.

En este trabajo, revisamos la teoría de la no localidad e introducimos un nuevo tipo de desigualdades de Bell denominadas juegos con post-selección. Estos juegos con post-selección tienen dos ventajas con respecto a las desigualdades de Bell tradicionales: poseen una mayor potencia estadística, lo que permite verificar la no localidad con menos rondas experimentales, y también permiten una traducción más directa de argumentos filosóficos, como la paradoja de Hardy, en experimentos físicos.

Índice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción | 2 |
| 2 | Teoría previa | 4 |
| 2.1 | Escenarios de Bell, comportamientos y estrategias | 4 |
| 2.2 | Estrategias cuánticas en dimensión 2 | 8 |
| 2.3 | La desigualdad CHSH | 9 |
| 2.3.1 | El juego CHSH | 10 |
| 2.4 | La desigualdad CH | 11 |
| 3 | La paradoja de Hardy y juegos con post-selección | 12 |
| 3.1 | La paradoja de Hardy con dos preguntas y dos respuestas | 13 |
| 3.2 | La paradoja de Hardy con varias preguntas | 16 |
| 3.3 | Un juego con post-selección con varias preguntas | 17 |
| 3.4 | La paradoja de Hardy con varias preguntas y respuestas | 19 |
| 3.5 | Juego con post-selección con varias preguntas y varias respuestas | 22 |
| 4 | Juegos con post-selección: descripción general | 23 |
| 4.1 | Definiciones | 23 |
| 4.2 | Conjuntos convexos de comportamientos | 24 |
| 5 | Determinación experimental de la violación de desigualdades de Bell | 26 |
| 5.1 | Valor p para un juego tradicional | 27 |
| 5.2 | Factor de Bayes para un juego tradicional | 28 |
| 5.3 | Factor de Bayes para un juego con post-selección | 29 |
| 5.4 | Un problema más sencillo | 31 |
| 5.5 | Algunos números | 32 |
| 6 | Experimentos con fotones | 34 |
| 6.1 | (In)eficiencia | 34 |
| 6.2 | Búsqueda de comportamiento cuántico | 35 |
| 7 | Conclusiones | 39 |

1 Introducción

En 1935, Einstein, Podolski y Rosen publicaron un artículo en el que supuestamente mostraban una contradicción presente en la teoría cuántica; esta supuesta contradicción es conocida como la paradoja EPR (por las iniciales de los autores). En su artículo, argumentan que el entrelazamiento cuántico permite conocer de manera determinista, debido a la imposibilidad de acción a distancia, dos propiedades de una partícula tales como los valores de espín en dos ejes perpendiculares, mientras que la mecánica cuántica dice que no es posible conocer de manera determinista estos dos valores a la vez. Si tienes un sistema de dos partículas de espín entrelazadas y las separas lo suficiente como para poder medir los dos valores de espín de una de ellas en un tiempo menor de lo que tardaría una señal luminosa en llegar de una a otra, puedes saber cuáles son los valores de espín de la otra partícula sin haber actuado sobre ella, lo que implica que estos dos valores están determinados antes de medir la partícula. Cuando se demostró que verdaderamente el entrelazamiento cuántico permitía medir estos dos valores de espín a distancia, Einstein dijo que, entonces, la mecánica cuántica es probabilística solo porque está incompleta, y debe haber una teoría que tiene en cuenta variables a las que no tenemos acceso permite conocer los valores de las partículas de forma determinista manteniendo verdaderas las predicciones de la mecánica cuántica; a las supuestas teorías que cumplen esto se las conoce como teorías de variables ocultas o teorías locales (pues son las que permitirían la localidad).

Veremos, gracias al teorema de Fine, que son equivalente, desde el punto de vista de las consecuencias estadísticas, las dos siguientes posibles definiciones de teoría local

1. En un proceso en el que se realizan mediciones en varias partes de un sistema, cada una fuera del cono de luz del resto, la probabilidad de obtener cada resultado posible a cada una de las medidas posibles en cada una de las partes es mutuamente independiente, e independiente de cuáles sean las medidas que se realicen en el resto de partes.

2. En un proceso de medida se revela un valor que ya estaba predefinido. Observemos que la segunda definición implica la primera.

John Bell demostró en 1964 que ninguna posible teoría de variables ocultas locales es capaz de reproducir la estadística predicha por la mecánica cuántica. Para ello, dedujo una cota para una función de correladores de las mediciones de dos partículas. Con el tiempo fueron apareciendo otras desigualdades de Bell. La más importante es la desigualdad CHSH, cuyo nombre proviene de las iniciales de los físicos que la presentaron, Clauser, Horne, Shimony y Holt. Su importancia en parte se debe a que es sencilla de comprender y no es difícil, en principio, idear experimentos para encontrar la violación cuántica de su cota local; también porque utiliza el mínimo número de partes (2) de medidas posibles en cada parte (2) y de resultados posibles en cada parte (2) para poder hablar de presencia o no de comportamientos no locales, y es en cierto modo la única en estas condiciones. Hoy día se presenta de la siguiente manera. Imaginemos una situación en la que una persona, llamada Charlie, prepara dos preguntas, $x, y \in \{0, 1\}$ y le envía la pregunta x a una persona llamada Alice y la pregunta y a una persona llamada Bob (ambas suficientemente alejadas, como daremos por hecho siempre). Entonces, Alice y Bob deciden mandar cada uno una respuesta a y $b \in \{0, 1\}$, respectivamente. Este proceso se realiza suficientemente rápido (como supondremos siempre), de manera que el proceso debería de ser local, luego (como veremos) cumplirá la definición 2. Supongamos que Charlie quiere medir la cantidad

$$S = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle, \quad (1)$$

donde las medias se calculan tras un gran número de rondas. Suponer la definición 2 en este contexto es decir que la estrategia elegida por Alice y Bob en esta ronda es que sus salidas son (a_0, a_1, b_0, b_1) , prefijadas para cada posible pregunta que le llegue a cada uno. Por lo tanto, existe también la cantidad

$$s = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1, \quad (2)$$

de la que podemos calcular la media $\langle s \rangle$ tras un gran número de rondas. En todas ellas, la probabilidad

de que Charlie envíe el par de preguntas (x, y) es la misma para todos los posibles pares en $\{0, 1\}^2$. Como la media de la suma es la suma de las medias, tenemos que $\langle s \rangle = S$. Ahora, observamos que

$$s = a_0(b_0 + b_1) + a_1(b_0 - b_1). \quad (3)$$

Como cada respuesta solo puede ser -1 o $+1$, tenemos que, o $b_0 + b_1 = 0$, o bien $b_0 - b_1 = 0$. Con cualquiera de las 2 opciones, vemos que s puede tomar el valor -2 o el valor 2 . Entonces, para calcular la media $\langle s \rangle$, prorateamos por la probabilidad de tener cada posible tupla (a_0, a_1, b_0, b_1) ,

$$\langle s \rangle = \sum_{(a_0, a_1, b_0, b_1)} P(a_0, a_1, b_0, b_1)(a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1) \quad (4)$$

$$\leq \sum_{(a_0, a_1, b_0, b_1)} P(a_0, a_1, b_0, b_1) 2 \leq 2. \quad (5)$$

Como la media de la suma es la suma de las medias, tenemos que

$$S = \langle s \rangle \leq 2. \quad (6)$$

Ahora vamos a suponer que Alice y Bob pueden medir cada uno una parte del estado cuántico entrelazado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1, 1\rangle + |1, -1\rangle). \quad (7)$$

siendo $|i\rangle$ el vector propio de σ_Z con valor propio $i \in \{-1, 1\}$. Entonces, se ponen de acuerdo en seguir la estrategia que consiste en que Alice mide el observable $A_0 = \sigma_Z$ en su parte del sistema (la primera parte) cuando le llega la pregunta $x = 0$ y el observable $A_1 = \sigma_X$ cuando le llega la pregunta $x = 1$, mientras que Bob mide el observable $B_0 = \frac{-\sigma_Z - \sigma_X}{\sqrt{2}}$ en su parte del sistema si le llega la pregunta $y = 0$, y el observable $B_1 = \frac{\sigma_Z - \sigma_X}{\sqrt{2}}$ si su pregunta es $y = 1$. Estas medidas les darán precisamente resultado -1 o $+1$, que será el valor de su respuesta. El valor S será entonces

$$S = \langle A_0 \otimes B_0 \rangle_\psi + \langle A_0 \otimes B_1 \rangle_\psi + \langle A_1 \otimes B_0 \rangle_\psi - \langle A_1 \otimes B_1 \rangle_\psi \quad (8)$$

Calculamos $\langle A_0 \otimes B_0 \rangle_\psi$:

$$\begin{aligned} \langle \psi | A_0 \otimes B_0 | \psi \rangle &= \frac{1}{2} \left(\langle 01 | \sigma_Z \otimes \frac{-\sigma_Z - \sigma_X}{\sqrt{2}} | 01 \rangle + \langle 10 | \sigma_Z \otimes \frac{-\sigma_Z - \sigma_X}{\sqrt{2}} | 10 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle 01 | \sigma_Z \otimes \frac{-\sigma_Z - \sigma_X}{\sqrt{2}} | 10 \rangle + \langle 10 | \sigma_Z \otimes \frac{-\sigma_Z - \sigma_X}{\sqrt{2}} | 01 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + 1 + 0 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Análogamente se obtiene para el resto de términos

$$\langle A_0 \otimes B_1 \rangle_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle A_1 \otimes B_0 \rangle_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \langle A_1 \otimes B_1 \rangle_\psi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

por lo que

$$S = 2\sqrt{2}. \quad (11)$$

Desde el descubriendo de estas desigualdades, se han realizado numerosos experimentos para determinar su violación y, consecuentemente, concluir que existen comportamientos no locales, siendo especialmente destacable el realizado por Alain Aspect, Philippe Grangier, Gérard Roger en 1982 [2]. Sin embargo, en todos ellos se utilizaban técnicas estadísticas que suponían propiedades extras de los comportamientos locales. Para estudiar la estadística de un experimento ideado para mostrar no localidad, hoy día se utilizan estimadores que se pueden interpretar como la probabilidad de que Alice y Bob ganen un juego en cada ronda del experimento, donde los sucesos de victoria son los sucesos que aumentan el valor de la desigualdad y derrota aquellos que la disminuyen; este es un estadístico que

se calcula de forma directa de los datos obtenidos. Sin embargo, sigue siendo complicado determinar que se está produciendo una violación de una desigualdad de Bell, ya que la estadística debe tener en cuenta todas las imperfecciones de los experimentos.

No obstante, en 2015, experimentos como el de Shalm et al. [19] concluyeron con fiabilidad estadística la existencia de comportamientos no locales. Esto fue debido a que utilizaron como estadístico una cantidad que no en la que no intervenían las frecuencias todos los sucesos que se obtienen a la hora de realizar el experimento de Bell en el escenario de dos partes, dos medidas y dos posibles respuestas para cada medida. Existe una versión de la desigualdad CHSH, presentada por Clauser y Horne en 1974 [6] en la que aparecen todos los posibles sucesos. Interpretando como victoria los sucesos que aumentan la cantidad acotada por la desigualdad, y como derrota los que la disminuyen, aumenta considerablemente el poder estadístico del experimento. Inspirados en este hecho, vamos a estudiar un nuevo tipo de juegos, que denominaremos juegos con post-selección, en los que se interpreta como victoria o derrota solo algunos de los posibles sucesos que pueden aparecer, descartando las rondas en las que no aparece uno de estos, en un escenario de dos partes, k_1 y k_2 posibles medidas en cada parte y d_1 y d_2 posibles resultados para las medidas de cada parte.

Tenemos dos principales motivaciones para este estudio. La primera es encontrar posibles experimentos que aumenten aún más el convencimiento de la existencia de comportamientos no locales en la naturaleza. La segunda es que es que, con un poder estadístico mayor, podemos disminuir el número de rondas necesarias en un experimento para determinar que se está produciendo un comportamiento no local. Esto es de interés ya que se puede utilizar para comprobar si hay espionaje en un proceso de distribución cuántica de clave independiente del dispositivo de medida (DIQKD). Para que aparezcan comportamientos no locales en un mundo que admitimos cuántico, es indispensable el entrelazamiento y la indeterminación previa de los resultados de las medidas. Si un espía intenta intervenir en la distribución de la clave, debe medir una parte del estado cuántico entrelazado que se comparte, haciendo colapsar el estado a uno en el que queda determinado el resultado de realizar la misma medida, o incluso rompiendo el entrelazamiento.

Este trabajo consta fundamentalmente de dos partes. En la primera, introducimos la teoría matemática necesaria para el estudio de la no localidad y presentamos en este contexto los juegos con post-selección. Para ello, a parte de la desigualdad CHSH, será de gran utilidad una propiedad, que no es una desigualdad, que cumplen los comportamientos locales y para la que Lucien Hardy observó que existen comportamientos cuánticos que no la cumplen; este hecho se conoce como la paradoja de Hardy [11]. En la segunda parte veremos detalladamente cómo realizar el estudio estadístico correcto para experimentos que utilizan estos juegos no locales, y utilizaremos una forma de utilizar esto para mejorar la potencia de los experimentos.

2 Teoría previa

En este capítulo vamos a describir el marco teórico en el que se estudia la no localidad. Utilizaremos todo el rato como referencia el libro de Scarani [18].

2.1 Escenarios de Bell, comportamientos y estrategias

Los escenarios de Bell son los espacios abstractos adecuados para representar experimentos en los que se miden varias partes de un sistema, en las cuales se pueden hacer una serie de medidas que pueden dar, según la parte, una serie de resultados, y en los que se quieren obtener conclusiones estadísticas de las correlaciones de estas medidas. En este trabajo vamos a tratar solamente con escenarios de Bell de dos partes, llamados escenarios bipartitos.

Definición 2.1. Un *escenario de Bell bipartito* es una 4-tupla $\mathcal{T} = (X, Y, A, B)$ donde X, Y, A y B son conjuntos no vacíos y finitos.

Para simplificar el lenguaje y facilitar la comprensión, nos referimos a las partes del escenario como jugadores. Diremos que X es el conjunto de *preguntas a Alice* y que Y es el conjunto de *preguntas a Bob*; también diremos que A es el conjunto de *respuestas de Alice* y que B es el conjunto de *respuestas de Bob*. Un escenario de Bell queda completamente determinado por el número de elementos de cada conjunto de la tupla \mathcal{T} . Sean k_A, k_B, d_A y d_B cuatro números naturales. Denotaremos por $(k_A, k_B; d_A, d_B)$ al escenario (X, Y, A, B) , donde $X = \{0, 1, \dots, k_A-1\}$, $Y = \{0, 1, \dots, k_B-1\}$, $A = \{0, 1, \dots, d_A-1\}$ y $B = \{0, 1, \dots, d_B-1\}$.

Definición 2.2. Dado un escenario de Bell $\mathcal{T} = (X, Y, A, B)$, llamamos *comportamiento en \mathcal{T}* a una función $P : (a, b, x, y) \in A \times B \times X \times Y \mapsto P(ab|xy)$ tal que

$$\sum_{(a,b) \in A \times B} P(ab|xy) = 1 \quad \text{para cada } (x, y) \in X \times Y. \quad (12)$$

Sea $\mathcal{T} = (X, Y, A, B)$ un escenario de Bell. Llamaremos *suceso en \mathcal{T}* a una tupla $(a, b, x, y) \in A \times B \times X \times Y$. Imaginemos un juego en el que un árbitro, al que llamaremos Charlie, envía la pregunta $x \in X$ e $y \in Y$ a Alice y a Bob, respectivamente, y estos tienen que devolver cada uno una respuesta, siendo a la de Alice y b la de Bob. Un comportamiento P en \mathcal{T} es tal que el valor $P(ab|xy)$ representa la probabilidad de que Alice dé la respuesta a y Bob dé la respuesta b cuando Alice recibe la pregunta x y Bob recibe la pregunta y . La probabilidad de que Alice dé la respuesta a cuando las preguntas son x e y , independientemente de cuál sea la respuesta de Bob, debe ser por lo tanto

$$P_A(a|xy) = \sum_{b' \in B} P(ab'|xy), \quad (13)$$

y la probabilidad de que Bob dé la respuesta b cuando las preguntas son x e y es

$$P_B(b|xy) = \sum_{a' \in A} P(a'b|xy). \quad (14)$$

Omitiremos los subíndices A y B cuando se sobreentiendan.

Vamos a representar con λ el proceso por el cual se decide cuál es la probabilidad de que Alice y Bob den unas respuestas u otras a las distintas preguntas que les pueden llegar en *una ronda* del juego. Denotamos por $P(ab|xy, \lambda)$ la probabilidad de que Alice dé la respuesta a y Bob la respuesta b cuando les llega la pregunta a a Alice y la pregunta b a Bob y el proceso que se sigue en esa ronda es λ . Supongamos que Alice no sabe qué pregunta recibe Bob y vice-versa, y que no se pueden comunicar entre ellos. Entonces, es “lógico” pensar que, en una ronda del juego, la probabilidad de que Alice dé una respuesta u otra es independiente de la pregunta y de la respuesta de Bob en esa ronda. Esta es la definición de *proceso local* en un sistema bipartito, y matemáticamente se representa

$$P(ab|xy, \lambda) = P(a|xy, \lambda)P(b|xy, \lambda) \quad \text{para todo } (a, b, x, y) \in A \times B \times X \times Y, \quad (15a)$$

$$P(a|xy, \lambda) = P(a|xy', \lambda) \equiv P(a|x, \lambda) \quad \text{para todo } x \in X, y, y' \in Y, a \in A, \quad (15b)$$

$$P(b|xy, \lambda) = P(b|x'y, \lambda) \equiv P(b|y, \lambda) \quad \text{para todo } x, x' \in X, y \in Y, b \in B. \quad (15c)$$

Es claro entonces que, para un proceso local λ ,

$$P(ab|xy, \lambda) = P(a|x, \lambda)P(b|y, \lambda) \quad \text{para todo } (a, b, x, y) \in A \times B \times X \times Y. \quad (16)$$

La ecuación (16), de hecho, caracteriza los procesos locales, ya que, suponiendo que se cumple, dado un suceso $(a, b, x, y) \in A \times B \times X \times Y$,

$$P(a|xy, \lambda) = \sum_{b' \in B} P(ab'|xy, \lambda) = \sum_{b' \in B} P(a|x, \lambda)P(b'|y, \lambda); \quad (17)$$

pero $\sum_{b' \in B} P(b'|y, \lambda) = 1$, luego $P(a|xy, \lambda) = P(a|x, \lambda)$ (esto hay que demostrarlo porque, aunque parezca que (16) presupone la independencia de la respuesta de Alice y la pregunta por cómo hemos introducido la notación $P(a|x)$, en realidad esta cantidad se puede calcular utilizando las reglas de la probabilidad si conoces las probabilidades de las preguntas de Bob aunque no haya independencia; la independencia nos permite tenerla sin conocer las probabilidades de las preguntas); análogamente, $P(b|xy, \lambda) = P(b|y, \lambda)$, y, utilizando ambas, obtenemos (29).

Pongamos que Λ es el conjunto de los procesos locales posibles que pueden darse durante el juego. Debe haber, por lo tanto, una función de densidad $q : \lambda \in \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\int_{\Lambda} q(\lambda) d\lambda = 1$ que nos de la densidad de probabilidad $q(\lambda)$ de que siga el proceso local λ en una ronda del juego. El comportamiento debe cumplir entonces

$$P(ab|xy) = \int_{\Lambda} P(a|x, \lambda) P(b|y, \lambda) q(\lambda) d\lambda. \quad (18)$$

Una *estrategia local* está definida por una tupla (Λ, q, P_1, P_2) donde

- Λ es un conjunto,
- q es una función de densidad en Λ ,
- $P_A : (a, x, \lambda) \in A \times X \times \Lambda \mapsto P_1(a|x, \lambda) \in [0, 1]$ es tal que

$$\sum_{a \in A \times \Lambda} P_1(a|x, \lambda) = 1 \quad \text{para todo } (x, \lambda) \in X \times \Lambda, \quad (19)$$

- $P_B : (b, y, \lambda) \in B \times Y \times \Lambda \mapsto P_2(b|y, \lambda) \in [0, 1]$ es tal que

$$\sum_{b \in B \times \Lambda} P_2(b|y, \lambda) = 1 \quad \text{para todo } (y, \lambda) \in Y \times \Lambda. \quad (20)$$

Definición 2.3. Un comportamiento P en un escenario $\mathcal{T} = (X, Y, A, B)$ se dice que es *local* si existe (Λ, q, P_1, P_2) una estrategia local tal que

$$P(ab|xy) = \int_{\Lambda} P_1(a|x, \lambda) P_2(b|y, \lambda) q(\lambda) d\lambda \quad \text{para todo } (a, b, x, y) \in A \times B \times X \times Y. \quad (21)$$

Supongamos ahora que, en cada ronda del juego, Alice y Bob tienen cada uno una respuesta predeterminada para cada posible pregunta que les llegue; es decir, para una ronda del juego, existen dos funciones respuesta $f : X \rightarrow A$ y $g : Y \rightarrow B$ tales que, para un suceso $(a, b, x, y) \in A \times B \times X \times Y$,

$$p(ab|xy) = \delta_{a, f(x)} \delta_{b, f(y)} \quad (22)$$

en esa ronda. Como los conjuntos X, Y, A y B son finitas, el número de funciones de f y g existentes es también finito, por lo que existe la probabilidad finita $Q(f, g)$ de que las funciones respuestas utilizadas por Alice y Bob sean f y g , respectivamente. Denotamos por $F(Z, C)$ al conjunto de las funciones de Z en C . Si estos conjuntos son finitos, el número de funciones que existen es $|F(Z, C)| = |C|^{|Z|}$. Se cumple que

$$\sum_{f \in F(X, A), g \in F(Y, B)} Q(f, g) = 1, \quad (23)$$

y el comportamiento a lo largo del juego es

$$P(ab|xy) = \sum_{f \in F(X, A), g \in F(Y, B)} Q(f, g) \delta_{a, f(x)} \delta_{b, f(y)}. \quad (24)$$

Arthur Fine probó en 1982 que todo comportamiento local se puede describir con una estrategia de esta forma [8]. Esto no significa que Alice y Bob estén siguiendo realmente una estrategia con esa forma, sino que existe una estrategia de esa forma que genera las probabilidades que observa Charlie, que es en cierto modo lo que nos importa.

Teorema 2.4 (Arthur Fine). *Sea P un comportamiento local en el escenario bipartito (k_A, k_B, d_A, d_B) . Entonces, para cada $i \in \{1, 2, \dots, (d_A)^{k_A}\}$ y cada $j \in \{1, 2, \dots, (d_B)^{k_B}\}$, existen funciones $f_i : X \rightarrow A$ y $g_j : Y \rightarrow B$ y un coeficiente $q_{ij} \in [0, 1]$ tales que*

$$\sum_{i=1}^{(d_A)^{k_A}} \sum_{j=1}^{(d_B)^{k_B}} q_{ij} = 1$$

y

$$P(ab|xy) = \sum_{i=1}^{(d_A)^{k_A}} \sum_{j=1}^{(d_B)^{k_B}} q_{ij} \delta_{a, f_i(x)} \delta_{b, g_j(y)}.$$

Si escribimos un comportamiento local P en la forma que nos dice el teorema de Fine y encontramos que existe un coeficiente $q_{ij} = 1$ y, por lo tanto, el resto son cero, decimos que estamos ante un comportamiento determinista local.

Definición 2.5. Un comportamiento P en un escenario $\mathcal{T} = (X, Y, A, B)$ se dice que es *determinista local* si existen dos funciones $f : X \rightarrow A$ y $g : Y \rightarrow B$ tales que

$$P(ab|xy) = \delta_{a, f(x)} \delta_{b, g(y)}. \quad (25)$$

El teorema de Fine se puede reescribir de forma sencilla como

Teorema. *Todo comportamiento local es combinación convexa de comportamientos deterministas locales.*

Por lo tanto, el conjunto \mathcal{L} de los comportamientos locales en un escenario \mathcal{T} es un conjunto convexo.

Imaginemos ahora que Alice y Bob juegan en el escenario (k_A, k_B, d_A, d_B) y comparten un estado cuántico ρ , pudiendo realizar Alice k_A diferentes medidas en su parte del estado, cada una con d_A posibles resultados diferentes, y Bob k_B diferentes medidas en su parte, cada una con d_B posibles resultados diferentes. Sea \mathcal{H}_A un espacio de Hilbert de dimensión $D_A \geq d_A$. Una medida en \mathcal{H}_A con d_A resultados posibles se define como

$$\mathcal{M}_A^x = \{\Pi_x^a : a \in A\} \quad (26)$$

donde los Π_x^a son operadores hermíticos positivos en el espacio \mathcal{H}_A tales que $\sum_{a \in A} \Pi_x^a = \mathbb{1}$. Una *estrategia cuántica* está definida por

- dos espacios de Hilbert \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B de dimensiones $D_A \geq d_A$ y $D_B \geq d_B$ (no necesariamente finitas), respectivamente;
- un estado ρ de $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$;
- una familia de medidas en \mathcal{H}_A con d_A resultados posibles $\{\mathcal{M}_A^x : x \in X, \}$
- una familia de medidas en \mathcal{H}_B con d_B resultados posibles $\{\mathcal{M}_B^y : y \in Y, \}$.

Definición 2.6. Un comportamiento P en (k_A, k_B, d_A, d_B) se dice que es *cuántico* si existe una estrategia cuántica tal que

$$P(ab|xy) = \text{Tr}(\rho \Pi_x^a \otimes B_y^b) \quad (27)$$

Es fácil ver que toda estrategia clásica es cuántica. También es muy fácil ver que el conjunto \mathcal{Q} de los comportamientos cuánticos es convexo, ya que, como no se especifica la dimensión de los espacios,

$$P(ab|xy) = \sum_j \lambda_j \text{Tr}(\rho_j \Pi_{x,k}^a \otimes \Pi_{y,k}^b) \quad (28)$$

con $\rho = \bigoplus_j \lambda_j \rho_j$, $\Pi_j^a = \bigoplus_j \Pi_{x,j}^a$ y $\Pi_y^b = \bigoplus_j \Pi_{y,j}^b$.

Otro tipo de comportamientos relevantes son los denominados *no señalizantes*

Definición 2.7. Un comportamiento P en (k_A, k_B, d_A, d_B) se dice que es *no señalizante*

$$\begin{aligned} P(a|xy) &= P(a|xy') \equiv P(a|x) \quad \text{para todo } x \in X, y, y' \in Y, a \in A, \\ P(b|xy) &= P(b|x'y) \equiv P(b|y) \quad \text{para todo } x, x' \in X, y \in Y, b \in B. \end{aligned} \quad (29)$$

Tanto los comportamientos locales como los comportamientos cuánticos son no señalizantes.

2.2 Estrategias cuánticas en dimensión 2

A la hora de buscar estrategias cuánticas con sistemas de qubits, es importante tener en cuenta las simetrías del problema. Vamos a considerar estrategias con un estado ρ , que es una aplicación hermítica, positiva y con traza $\text{Tr}(\rho) = 1$ de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, y 8 proyectores A_x^a y B_y^b con $x, y, a, b \in \{0, 1\}$, operando en \mathbb{C}^2 y cumpliendo

$$A_x^0 A_x^1 = 0 \quad \text{para todo } x \in \{0, 1\} \quad (30)$$

$$B_y^0 B_y^1 = 0 \quad \text{para todo } y \in \{0, 1\}. \quad (31)$$

Estos proyectores se pueden escribir en la forma

$$A_x^a = |A_x^a\rangle\langle A_x^a| \quad \text{y} \quad B_y^b = |B_y^b\rangle\langle B_y^b| \quad (32)$$

para ciertos vectores $|A_x^a\rangle$ y $|B_y^b\rangle$ con $x, y, a, b \in \{0, 1\}$.

Consideramos el comportamiento cuántico

$$P(ab|xy) = \text{Tr}(\rho A_x^a \otimes B_y^b). \quad (33)$$

Sean U_A y U_B dos transformaciones unitarias en \mathbb{C}^2 . Entonces,

$$\begin{aligned} P(ab|xy) &= \text{Tr}\left(\rho (U_A \otimes U_B)^\dagger (U_A \otimes U_A) (A_x^a \otimes B_y^b) (U_A \otimes U_A)^\dagger (U_A \otimes U_A)\right) \\ &= \text{Tr}\left((U_A \otimes U_A) \rho (U_A \otimes U_B)^\dagger (\tilde{A}_x^a \otimes \tilde{B}_y^b)\right) = \text{Tr}(\tilde{\rho} \tilde{A}_x^a \otimes \tilde{B}_y^b) \end{aligned} \quad (34)$$

Podemos tomar U_A y U_B tales que $\tilde{A}_0^0 = U_A^\dagger |A_0^0\rangle\langle A_0^0| U_A = |0\rangle\langle 0|$ y $\tilde{B}_0^0 = U_B^\dagger |B_0^0\rangle\langle B_0^0| U_B = |0\rangle\langle 0|$, de donde obtenemos, por (30) y (31), que $\tilde{A}_0^1 = U_A^\dagger |A_0^1\rangle\langle A_0^1| U_A = |1\rangle\langle 1|$ y $\tilde{B}_0^1 = U_B^\dagger |B_0^1\rangle\langle B_0^1| U_B = |1\rangle\langle 1|$. Por (34), seguiremos generando el mismo comportamiento.

En segundo lugar, podemos tomar otras dos transformaciones unitarias \tilde{U}_A y \tilde{U}_B tales que $\tilde{U}_A^\dagger |0\rangle = |0\rangle$ y $\tilde{U}_B^\dagger |0\rangle = |0\rangle$ y también

$$\tilde{U}_A^\dagger |\tilde{A}_1^0\rangle = c_A |0\rangle + c_A^\perp |1\rangle \quad \text{y} \quad \tilde{U}_A^\dagger |\tilde{A}_1^1\rangle = c_B |0\rangle + c_B^\perp |1\rangle \quad (35)$$

con $c_A, c_A^\perp, c_B, c_B^\perp \in \mathbb{R}$. Por (30) y (31), podemos escribir

$$\tilde{U}_A^\dagger |\tilde{A}_1^1\rangle\langle \tilde{A}_1^1| \tilde{U}_A = |\tilde{\tilde{A}}_1^1\rangle\langle \tilde{\tilde{A}}_1^1| \quad \text{y} \quad \tilde{U}_B^\dagger |\tilde{B}_1^1\rangle\langle \tilde{B}_1^1| \tilde{U}_B = |\tilde{\tilde{B}}_1^1\rangle\langle \tilde{\tilde{B}}_1^1| \quad (36)$$

con

$$|\tilde{\tilde{A}}_1^1\rangle = c_A^\perp |0\rangle - c_A |1\rangle \quad \text{y} \quad |\tilde{\tilde{B}}_1^1\rangle = c_B^\perp |0\rangle - c_B |1\rangle. \quad (37)$$

También tenemos la siguiente propiedad: Sean M un proyector con coeficientes reales en la base canónica de un espacio de Hilbert \mathcal{H} (pongamos de dimensión finita) y un estado ρ en \mathcal{H} . Si consideramos $(\rho M)^T$ la matriz traspuesta de ρM en su representación en la base canónica, tenemos

$$\text{Tr}(\rho M) = \text{Tr}((\rho M)^T) = \text{Tr}(M^T \rho^T) = \text{Tr}(\rho^T M) \quad (38)$$

y, por lo tanto,

$$\text{Tr}(\rho M) = \frac{\text{Tr}(\rho M) + \text{Tr}(\rho^T M)}{2} = \text{Tr}\left(\frac{\rho + \rho^T}{2} M\right) \quad (39)$$

Como ρ es un operador hermítico, $\rho^T = \rho^*$, tomando el conjugado también en su representación en la base canónica, y $\frac{\rho + \rho^T}{2}$ es un estado con coeficientes reales en la base canónica.

Con todo esto, llegamos a que, si tenemos una estrategia en el sistema de dos partes, con espacios de Hilbert $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$ y $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$ y con medidas proyectivas, que genera un comportamiento P , siempre podemos encontrar una estrategia en \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B tal que

- ρ tiene coeficientes reales en la base canónica,
- las bases de medida de Alice son la base canónica y $\{|A_1^0\rangle, |A_1^1\rangle\}$, donde los vectores $|A_1^a\rangle$ tienen componentes reales en la base canónica
- las bases de medida de Bob son la base canónica y $\{|B_1^0\rangle, |B_1^1\rangle\}$, donde los vectores $|A_1^a\rangle$ tienen componentes reales en la base canónica.
- $P(ab|xy) = \text{Tr}(\rho |A_x^a\rangle\langle A_x^a| \otimes |B_y^b\rangle\langle B_y^b|)$

En el artículo [14], Masanes prueba que todos los puntos extremos del conjunto \mathcal{Q} de los comportamientos cuánticos en el escenario $(2, 2; 2, 2)$ (que es un conjunto convexo) se alcanzan con estrategias formadas por un estado puro $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ y medidas proyectivas en \mathbb{C}^2 . Como el comportamiento P es una función lineal del estado ρ , y este a su vez, si sus coeficientes son reales, es combinación convexa de estados puros con componentes reales, podremos encontrar estrategias como las que hemos descrito y con un estado puro de componentes reales que maximicen funciones lineales del comportamiento. De hecho, no solo funciones lineales: podremos maximizar funciones cuasiconexas de los comportamientos (definición 4.2) utilizando cinco parámetros reales.

2.3 La desigualdad CHSH

Bajo la hipótesis de localidad, encontramos en (6) la desigualdad CHSH en la forma

$$\langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle \leq 2, \quad (40)$$

donde $(a_0, a_1, b_0, b_1) \in \{-1, 1\}^4$, siendo a_x (b_y) la respuesta que da Alice (Bob) cuando le llega la pregunta x (y). Si Alice y Bob dan las respuestas según el comportamiento P

$$\begin{aligned} \langle a_x b_y \rangle &= 1(P(11|xy) + P(-1-1|xy)) - 1(P(1-1|xy) + P(-11|xy)) \\ &= P(a = b|xy) - P(a \neq b|xy), \end{aligned} \quad (41)$$

y encontramos

$$\begin{aligned} S_P^{(1)} &:= P(a=b|00) - P(a \neq b|00) + P(a=b|01) - P(a \neq b|01) \\ &\quad + P(a=b|10) - P(a \neq b|10) - P(a=b|11) + P(a \neq b|11) \leq 2 \quad \text{si } P \text{ es local,} \end{aligned} \quad (42)$$

donde estamos utilizando la notación

$$P(a=b|xy) = P(00|xy) + P(11|xy) \quad \text{para cada } x, y \in \{0, 1\}$$

y

$$P(a \neq b|xy) = P(01|xy) + P(10|xy) \quad \text{para cada } x, y \in \{0, 1\}.$$

Hemos pasado de llamar a las respuestas -1 y 1 a llamarlas 0 y 1 (tal y como está escrita la desigualdad (42), está claro que el nombre de las respuestas no influye). Como vimos en (11), se puede encontrar una estrategia cuántica con un comportamiento asociado Q tal que

$$S_Q^{(1)} = 2\sqrt{2}. \quad (43)$$

De forma análoga a como hemos obtenido la desigualdad (42) se pueden encontrar otras 7 siete desigualdades. Para cada par $(x, y) \in \{0, 1\}$, definimos

$$E_{xy} = P(a=b|xy) - P(a \neq b|xy). \quad (44)$$

Entonces, si P es un comportamiento local en el escenario $(2, 2; 2, 2)$,

$$S_P^{(1)} := E_{00} + E_{01} + E_{10} - E_{11} \leq 2 \quad (45a)$$

$$S_P^{(2)} := E_{00} + E_{01} - E_{10} + E_{11} \leq 2 \quad (45b)$$

$$S_P^{(3)} := E_{00} - E_{01} + E_{10} + E_{11} \leq 2 \quad (45c)$$

$$S_P^{(4)} := -E_{00} + E_{01} + E_{10} + E_{11} \leq 2 \quad (45d)$$

$$S_P^{(5)} := -E_{00} + E_{01} + E_{10} + E_{11} \geq -2 \quad (45e)$$

$$S_P^{(6)} := E_{00} - E_{01} + E_{10} + E_{11} \geq -2 \quad (45f)$$

$$S_P^{(7)} := E_{00} + E_{01} - E_{10} + E_{11} \geq -2 \quad (45g)$$

$$S_P^{(8)} := E_{00} + E_{01} + E_{10} - E_{11} \geq -2 \quad (45h)$$

Todas ellas se pueden demostrar de manera sencilla utilizando el teorema de Fine.

2.3.1 El juego CHSH

Haciendo un poco de álgebra con $S_P^{(1)}$ (sin considerar que P es local)

$$\begin{aligned} S_P^{(1)} + P(a \neq b|00) + P(a \neq b|01) + P(a \neq b|10) + P(a=b|11) \\ = P(a=b|00) + P(a=b|01) + P(a=b|10) + P(a \neq b|11). \end{aligned} \quad (46)$$

Sumando el segundo miembro a ambas partes de la ecuación, y teniendo en cuenta que $P(a=b|xy) + P(a \neq b|xy) = 1$

$$S_P^{(1)} + 4 = 2(P(a=b|00) + P(a=b|01) + P(a=b|10) + P(a \neq b|11)), \quad (47)$$

de donde

$$w_P := P(a=b|00) + P(a=b|01) + P(a=b|10) + P(a \neq b|11) = \frac{S_P^{(1)} + 4}{2} \quad (48)$$

Utilizando (42), encontramos

$$w_P \leq 3 \quad \text{si } P \text{ es local.} \quad (49)$$

Sea P local o no, w_P siempre es positiva. Imaginemos que Charlie prepara un juego para Alice y Bob en el que les manda aleatoriamente la pregunta $x \in \{0, 1\}$ a Alice y la pregunta $y \in \{0, 1\}$ a Bob, y cada uno tiene que responder con una respuesta, Alice $a \in \{0, 1\}$ y Bob $b \in \{0, 1\}$. Supongamos también que la probabilidad $\mu(xy)$ de que reciban cada una de las cuatro posibles combinaciones de preguntas es la misma ($\mu(xy) = \frac{1}{4}$ para todo $(x, y) \in X \times Y$). Diremos que Alice y Bob ganan o pierden una ronda del juego según la tabla 1. A este juego lo llamaremos el *juego CHSH*.

| | | |
|----------------|-------------|------------------------|
| $a = b$ | $x = y = 0$ | \rightarrow Victoria |
| $a = b$ | $x \neq y$ | \rightarrow Victoria |
| $a \neq b$ | $x = y = 1$ | \rightarrow Victoria |
| Otra situación | | \rightarrow Derrota |

Tabla 1: Reglas de juego CHSH

Antes de comenzar el juego, Alice y Bob se ponen de acuerdo en la estrategia que van a utilizar; pongamos que esta estrategia tiene un comportamiento asociado P . Entonces, la probabilidad del

suceso $(a, b, x, y) \in A \times B \times X \times Y$ será $\mu(xy)P(ab|xy)$, y la probabilidad ω_P de ganar una ronda será

$$\omega_P = \frac{1}{4}(P(a=b|00) + P(a=b|01) + P(a=b|10) + P(a \neq b|11)) \quad (50)$$

La desigualdad (49) nos da una cota para ω_P cuando P es local:

$$\omega_P \leq \frac{3}{4} =: \omega_l \quad \text{si } P \text{ es local.} \quad (51)$$

La cota local ω_l de un juego se llama *valor local*. De (48), obtenemos, para un comportamiento P arbitrario,

$$\omega_P = \frac{S_P^{(1)} + 4}{8}. \quad (52)$$

Un comportamiento que alcanza la cota (51) es, por ejemplo, el comportamiento determinista local $D(ab|xy) = \delta_{a,f(x)}\delta_{b,g(y)}$ definido por las funciones respuesta

$$f(x) = 1 \quad \text{para todo } x \in \{0, 1\} \quad \text{y} \quad g(y) = 1 \quad \text{para todo } y \in \{0, 1\}. \quad (53)$$

Sin embargo, si Alice y Bob siguen la estrategia cuántica que da el comportamiento Q de (43), consiguen

$$\omega_Q = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \approx 0,854. \quad (54)$$

El planteamiento de los juegos es muy útil, no solo porque son fáciles de comprender, sino también porque se relacionan muy bien con los experimentos destinados a la determinación de no localidad. Primero porque en la descripción aparecen también las probabilidades de las preguntas, y segundo porque la probabilidad de victoria es una cantidad que se puede estimar directamente con las frecuencias de los sucesos obtenidas en el experimento.

2.4 La desigualdad CH

La desigualdad CH es otra forma de expresar la desigualdad CHSH, presentada por primera vez por Clauser y Horne en su artículo de 1974 [6]. Aquí, vamos a utilizar la forma de Eberhard, presentada por Philippe H. Eberhard en su artículo de 1993 [7].

Proposición 2.8 (Desigualdad CH en la forma de Eberhard). *Para todo comportamiento local P en un el escenario $(2, 2; 2, 2)$ se cumple*

$$S_P^{\text{Eb}} = P(11|11) - P(01|01) - P(10|10) - P(11|00) \leq 0. \quad (55)$$

Esta proposición se puede demostrar fácilmente a partir de la representación de Fine (teorema 2.4); sin embargo, es interesante mostrar su relación con la desigualdad CHSH. Lo que vamos a comprobar es que, dado un comportamiento no señalizante P (como es el caso de los comportamientos locales y cuánticos), la relación entre S_P y $S_P^{(4)}$, definida en (45d), es afín con pendiente positiva.

De acuerdo con la definición 2.7, un comportamiento P en el escenario $(2, 2; 2, 2)$ decimos que es no señalizante si cumple

$$P(a0|x0) + P(a1|x0) = P(a0|x1) + P(a1|x1) \quad \text{para todo } a, x \in \{0, 1\} \quad (56)$$

y

$$P(0b|0y) + P(1b|0y) = P(0b|1y) + P(1b|1y) \quad \text{para todo } b, y \in \{0, 1\}. \quad (57)$$

Cuando P es un comportamiento no señalizante en $(2, 2; 2, 2)$, fijados $a, x, b, y \in \{0, 1\}$ utilizamos la notación

$$P_A(a|x) = P(a0|x0) + P(a1|x0) \quad \text{y} \quad P_B(b|y) = P(0b|0y) + P(1b|0y). \quad (58)$$

Proposición 2.9. *Sea P una estrategia no señalizante. Entonces,*

$$S_P^{(4)} = 2 + 4S_P^{\text{Eb}}. \quad (59)$$

Demostración. En primer lugar, fijados $x, y \in \{0, 1\}$, vemos que

$$P(10|xy) = P_A(1|x) - P(11|xy), \quad P(01|xy) = P_B(1|y) - P(11|xy) \quad (60)$$

y

$$P(00|xy) = 1 - P(11|xy) - P(01|xy) - P(10|xy) = 1 + P(11|xy) - P_A(1|x) - P_B(1|y). \quad (61)$$

Entonces,

$$P(a=b|xy) = P(00|xy) + P(11|xy) = 1 + 2P(11|xy) - P_A(1|x) - P_B(1|y) \quad (62)$$

y

$$P(a \neq b|xy) = P(01|xy) + P(10|xy) = P_A(1|x) + P_B(1|y) - 2P(11|xy). \quad (63)$$

Por lo tanto,

$$E_{xy} = P(a=b|xy) - P(a \neq b|xy) = 1 + 4P(11|xy) - 2P_A(1|x) - 2P_B(1|y). \quad (64)$$

Encontramos

$$\begin{aligned} S_P^{(4)} &= -E_{00} + E_{01} + E_{10} + E_{11} \\ &= 2 - 4P(11|00) + 4P(11|01) + 4P(11|10) + 4P(11|11) - 4P_A(1|1) - 4P_B(1|1). \end{aligned} \quad (65)$$

De nuevo por la no señalización de P , tenemos que $P(11|01) - P_B(1|1) = -P(01|01)$ y $P(11|10) - P_A(1|1) = -P(10|10)$, luego

$$S_P^{(4)} = 2 + 4(P(11|11) - P(01|01) - P(10|10) - P(11|00)) = 2 + 4S_P^{\text{Eb}}. \quad (66)$$

□

Cuando P es un comportamiento local, tenemos que $S_P^{(4)} \leq 2$, y, por la proposición anterior,

$$S_P^{\text{Eb}} = \frac{1}{4}S_P^{(4)} - \frac{1}{2} \leq 0. \quad (67)$$

La potencia del resultado es que no hace falta que el comportamiento P sea local. Si P es un comportamiento no señalizante tal que $S_P^{(4)} > 2$, tenemos que $S_P^{\text{Eb}} > 0$; si Q es un comportamiento cuántico para el que $S_Q^{(4)} = 2\sqrt{2}$, se tiene

$$S_P^{\text{Eb}} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2}. \quad (68)$$

Por lo tanto, existen estrategias cuánticas que violan la desigualdad CH (55).

3 La paradoja de Hardy y juegos con post-selección

En este capítulo vamos a estudiar otro importante test de no localidad, conocido como la *paradoja de Hardy*, y vamos a utilizarlo como punto de partida para estudiar un nuevo tipo de juegos, a los que denominaremos *juegos con post-selección*. El primero de estos juegos que mostramos, tiene asociada a su probabilidad de victoria la desigualdad de Bell no lineal (73), que presentamos en la primera sección. En estos nuevos test de localidad no tendremos en cuenta todas las rondas para el cómputo de la probabilidad de victoria, sino que descartaremos alguna en función de que suceso se dé (o sea que se tienen en cuenta las respuestas que den Alice y Bob), pero con la regla de descarte establecida previamente y que no depende de otras rondas. Utilizaremos las generalizaciones de la paradoja de Hardy para encontrar juegos con post-selección con más preguntas y respuestas.

3.1 La paradoja de Hardy con dos preguntas y dos respuestas

La denominada paradoja de Hardy, presentada por Lucien Hardy en 1993 [11], es un ejemplo de propiedad que cumplen los comportamientos locales pero que no cumplen en general los comportamientos cuánticos. Es muy relevante por ser uno de los primeros ejemplos, y el más sencillo, que no utiliza desigualdades.

Para el caso de dos partes, dos preguntas y dos respuestas, se puede expresar de la siguiente manera: sea P una estrategia local en el escenario $(2, 2; 2, 2)$ tal que

$$\begin{aligned} P(11|00) &= 0 \\ P(01|01) &= 0 \\ P(10|10) &= 0 \end{aligned} \tag{69}$$

Entonces,

$$P(11|11) = 0. \tag{70}$$

Sin embargo, se pueden encontrar un estado normalizado $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ y cuatro bases ortonormales $\{|A_x^a\rangle\}_{a=0}^1 \subset \mathbb{C}^2$ y $\{|B_y^b\rangle\}_{b=0}^1 \subset \mathbb{C}^2$ para $x, y \in \{0, 1\}$, tales que la estrategia

$$P(ab|xy) = \left| \langle A_x^a B_y^b | \psi \rangle \right|^2$$

cumple las condiciones (69) pero no cumple (70).

La primera afirmación se deduce como consecuencia inmediata de la desigualdad CH (55). Vamos a describir una estrategia cuántica P que cumple la segunda afirmación. Sea $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ la base canónica de \mathbb{C}^2 , y definimos

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2.$$

Escogemos $|A_0^i\rangle = |B_0^i\rangle = |i\rangle$ para $i = \{0, 1\}$ (es decir, si Alice recibe la pregunta 0, mide su parte del sistema en la base canónica, y si Bob recibe la pregunta 0, mide su parte en la base canónica). Definimos también los estados

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \text{y} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

que forman una base ortonormal de \mathbb{C}^2 . Escogemos $|A_1^0\rangle = |B_1^0\rangle = |+\rangle$ y $|A_1^1\rangle = |B_1^1\rangle = |-\rangle$. Vamos a comprobar que la estrategia $P(ab|xy) = \left| \langle A_x^a B_y^b | \psi \rangle \right|^2$ cumple las condiciones (69): en primer lugar,

$$P(11|00) = \left| \langle 11 | \psi \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 11 | (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle) \right|^2 = 0.$$

En segundo lugar,

$$\begin{aligned} P(01|01) &= \left| \langle 0- | \psi \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | (\langle 0 | - \langle 1 |) (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle) \right|^2 \\ &= \frac{1}{6} \left| \langle 00|00\rangle - \langle 01|01\rangle \right|^2 = 0. \end{aligned}$$

Y en tercero,

$$\begin{aligned} P(10|10) &= \left| \langle -0 | \psi \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0 | - \langle 1 |) \langle 0 | (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle) \right|^2 \\ &= \frac{1}{6} \left| \langle 00|00\rangle - \langle 10|10\rangle \right|^2 = 0. \end{aligned}$$

Vemos que, no obstante, no se cumple (70):

$$P(11|11) = \left| \langle ---|\psi \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} (\langle 0| - \langle 1|) (\langle 0| - \langle 1|) (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle) \right|^2$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{4} \left| \langle 00|00\rangle - \langle 01|01\rangle - \langle 10|10\rangle \right|^2 = \frac{1}{12} \neq 0.$$

Llamamos *estrategia de Hardy* a una estrategia cuántica P que cumple (69) pero no cumple (70). Dada P una estrategia de Hardy, llamamos *probabilidad de Hardy* al valor $h_P = P(11|11)$. En el siguiente capítulo trataremos el problema de obtener una estrategia de Hardy con la mayor probabilidad de Hardy posible para un caso más general. Anticipamos que, para el caso $(2, 2; 2, 2)$, la mayor probabilidad de Hardy que se puede obtener es

$$h = \text{máx}\{h_P : P \text{ estrategia de Hardy}\} = \frac{5\sqrt{5} - 11}{2} \approx 0,0902.$$

Con la intención de describir el la paradoja de Hardy como un juego en el que haya ventaja cuántica, vamos a definir el *juego de Hardy* con las reglas

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|------------|
| a | b | x | y | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | → Victoria |
| 0 | 1 | 0 | 1 | → Derrota |
| 1 | 0 | 1 | 0 | → Derrota |
| 1 | 1 | 0 | 0 | → Derrota |

(71)

Supongamos además que la probabilidad de que aparezca cada uno de los cuatro posibles pares de preguntas $(x, y) \in \{0, 1\}^2$ es $\mu(xy) = \frac{1}{4}$ la misma para todos los pares posibles. Entonces, la probabilidad de ganar una ronda con una estrategia P será

$$\omega_P = \frac{\mu(11)P(11|11)}{\mu(11)P(11|11) + \mu(01)P(01|01) + \mu(10)P(10|10) + \mu(00)P(11|00)}$$

$$= \frac{P(11|11)}{P(11|11) + P(01|01) + P(10|10) + P(11|00)}.$$
(72)

Sin embargo, ω_P no está completamente definida, ya que el denominador de (72) puede ser 0; en ese caso, le asignaremos a ω_P el valor 0 (vemos que el numerador también es 0 en ese caso).

Cuando Alice y Bob siguen una estrategia local P , podemos acotar la probabilidad de victoria gracias a la desigualdad CH. Pasando los términos que restan en el primer miembro de (55) a la derecha y sumando $P(11|11)$ a ambos miembros,

$$2P(11|11) \leq P(11|11) + P(01|01) + P(10|10) + P(11|00),$$

luego

$$\omega_P = \frac{P(11|11)}{P(11|11) + P(01|01) + P(10|10) + P(11|00)} \leq \frac{1}{2} \quad \text{para toda } P \text{ estrategia local.}$$

(73)

(cuando γ_P^{post} es cero tenemos $0 = \omega_P \leq \frac{1}{2}$). Esta desigualdad es una nueva desigualdad de Bell que, a diferencia de las expuestas anteriormente, *no es lineal*. En este trabajo vamos estudiar esta y otras desigualdades no lineales desde el punto de vista de los juegos; es decir, cada una como cota de la probabilidad de ganar un cierto juego utilizando estrategias locales.

Pero ¿tiene sentido hablar de ω_P como una probabilidad de victoria? Realmente, Alice y Bob podrían dar las respuestas $a = 0$ y $b = 0$ a las preguntas $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente, que es un

ejemplo de suceso que no aparece en la tabla (71). Esto, de hecho, es lo que ocurre en un experimento de Bell. Lo que representa ω_P es la probabilidad de ganar *suponiendo que se ha dado uno de los sucesos de la tabla (71)*. Con el objetivo de ver ω_P como una probabilidad de victoria efectiva, vamos a añadir a la tabla de las reglas del juego (71) la nueva regla

Otro suceso \rightarrow Se descarta la ronda

A los juegos en los que se descartan, *a posteriori*, rondas en las que se han dado ciertos sucesos, los vamos a llamar *juegos con post-selección*. Definimos también la *probabilidad de post-selección* como la probabilidad γ_P^{post} de que **no** se descarte la ronda con una estrategia P . Para el juego que hemos definido, tenemos

$$\begin{aligned}\gamma_P^{\text{post}} &= \mu(11)P(11|11) + \mu(01)P(01|01) + \mu(10)P(10|10) + \mu(00)P(11|00) \\ &= \frac{1}{4}(P(11|11) + P(01|01) + P(10|10) + P(11|00)).\end{aligned}$$

La desigualdad (73) nos dice que, entre todas las posibles estrategias clásicas, no encontraremos ninguna con una probabilidad de victoria mayor que 0,5. Vamos a ver una estrategia que alcanza esta probabilidad de victoria, y así también ver cómo se trabaja en el caso clásico. Consideramos la estrategia determinista $D(ab|xy) = \delta_{a,f(x)}\delta_{b,g(y)}$ donde Alice y Bob utilizan, respectivamente, las funciones respuesta

$$f(x) = 1 \quad \text{para todo } x \in \{0, 1\} \quad \text{y} \quad g(y) = 1 \quad \text{para todo } y \in \{0, 1\}.$$

Tenemos entonces las probabilidades

$$D(11|11) = 1, \quad D(01|01) = 0, \quad D(10|10) = 0 \quad \text{y} \quad D(11|00) = 1,$$

luego

$$\omega_D = \frac{D(11|11)}{D(11|11) + D(11|00)} = \frac{1}{2}.$$

Es decir, cuando las preguntas sean $x = 1$ e $y = 1$, ganarán la ronda; cuando sean $x = 0$ e $y = 0$, perderán, y, en cualquiera de los otros dos casos, se descartará la ronda, luego tenemos 1 suceso favorable entre 2 sucesos ‘posibles’ (no descartados).

Vemos también que la probabilidad de ganar cumple

$$\boxed{\omega_P = \frac{P(11|11)}{P(11|11)} = 1 \quad \text{para toda } P \text{ estrategia de Hardy.}} \quad (74)$$

Aunque esta propiedad es independiente de la estrategia concreta P , veremos más adelante que sí que nos interesa maximizar el valor $P(11|11)$, ya que así maximizamos la probabilidad γ_P^{post} de que la ronda no se descarte.

3.2 La paradoja de Hardy con varias preguntas

El propio Hardy generalizó su observación al caso de varias preguntas y respuestas, con un buen estudio de las estrategias cuánticas, tanto en [10] como en el artículo de Boschi et al. de 1997 [3].

Supongamos que tenemos una estrategia P en el escenario $(k, k; 2, 2)$, $k \geq 2$, que cumple

$$P(11|00) = 0 \quad (75a)$$

$$P(01|i-1i) = 0 \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, k-1\} \quad (75b)$$

$$P(10|ii-1) = 0 \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, k-1\} \quad (75c)$$

Si, además, P es local, entonces

$$P(11|k-1k-1) = 0. \quad (76)$$

Daremos la prueba de esta afirmación para el caso de varias preguntas y varias respuestas. A una estrategia cuántica que cumple las condiciones (75) y no cumple (76) la llamamos *estrategia de Hardy*. Vamos a ver que ciertamente existen estrategias de Hardy.

Consideramos el estado de dos qubits

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle - \beta|11\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2, \quad (77)$$

donde, por simplicidad, suponemos que α y β son reales y positivos (y cumplen la condición de normalización). Para $i \in \{0, \dots, k-1\}$, definimos los estados

$$|C_i^0\rangle = c_i|0\rangle + c_i^\perp|1\rangle, \quad |C_i^1\rangle = (c_i^\perp)^*|0\rangle - c_i^*|1\rangle, \quad (78)$$

Vemos que $\langle C_i^0|C_i^1\rangle = 0$ para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Vamos a buscar las componentes c_i y c_i^\perp para que la estrategia

$$P(ab|xy) = \left| \langle C_x^a C_y^b | \psi \rangle \right|^2, \quad a, b \in \{0, 1\}, x, y \in \{0, \dots, k-1\} \quad (79)$$

cumpla las condiciones (75) (por lo que estamos también restringiéndonos a estrategias en las que Alice y Bob miden en las mismas bases). Primero

$$\left| \langle C_0^1 C_0^1 | \psi \rangle \right|^2 = 0 \quad (80)$$

por la condición (75a), luego

$$0 = \left(c_0^\perp \langle 0| - c_0 \langle 1| \right) \left(c_0^\perp \langle 0| - c_0 \langle 1| \right) \left(\alpha|00\rangle - \beta|11\rangle \right) = (c_0^\perp)^2 \alpha - c_0^2 \beta, \quad (81)$$

que se satisface cuando

$$c_0^\perp = N_0 \beta^{1/2} \quad \text{y} \quad c_0 = N_0 \alpha^{1/2}, \quad (82)$$

donde N_0 es la constante de normalización.

La condición (75b) nos dice

$$\left| \langle C_{i-1}^0 C_i^1 | \psi \rangle \right|^2 = 0, \quad (83)$$

de donde

$$0 = \left(c_{i-1}^* \langle 0| + (c_{i-1}^\perp)^* \langle 1| \right) \left(c_i^\perp \langle 0| - c_i \langle 1| \right) \left(\alpha|00\rangle - \beta|11\rangle \right) = c_{i-1}^* c_i^\perp \alpha + (c_{i-1}^\perp)^* c_i \beta. \quad (84)$$

Cuando $i = 1$, utilizando (82) tenemos

$$0 = N_0^* \alpha^{1/2} c_1^\perp \alpha + N_0^* \beta^{1/2} c_1 \beta = N_0^* \left(c_1^\perp \alpha^{3/2} + c_1 \beta^{3/2} \right), \quad (85)$$

que se satisface cuando

$$c_1^\perp = N_1 \beta^{3/2} \quad \text{y} \quad c_1 = -N_1 \alpha^{3/2}, \quad (86)$$

con N_1 constante de normalización. Por inducción, se encuentra fácilmente que

$$c_i = N_i \alpha^{i+1/2} \quad \text{y} \quad c_i^\perp = N_i (-1)^i \beta^{i+1/2} \quad \text{para todo } i \in \{0, \dots, k-1\}, \quad (87)$$

siendo N_i constantes de normalización.

Vamos a comprobar si se cumple (75c); es decir, si $\left| \langle C_i^1 C_{i-1}^0 | \psi \rangle \right|^2 = 0$. Desarrollando la parte de dentro del módulo,

$$\left(c_{i-1}^* \langle 0| + (c_{i-1}^\perp)^* \langle 1| \right) \left(c_i^\perp \langle 0| - c_i \langle 1| \right) \left(\alpha |00\rangle - \beta |11\rangle \right) = c_{i-1}^* c_i^\perp \alpha + (c_{i-1}^\perp)^* c_i \beta \quad (88)$$

y, sustituyendo (87), encontramos

$$\langle C_i^1 C_{i-1}^0 | \psi \rangle = N_{i-1}^* N_i (-1)^{i-1} \left(-\alpha^{i+1/2} \beta^{i+1/2} + \beta^{i+1/2} \alpha^{i+1/2} \right) = 0, \quad (89)$$

como queríamos.

Por lo tanto, la estrategia cuántica $P(ab|xy) = \left| \langle C_x^a C_y^b | \psi \rangle \right|^2$ cumple las condiciones (75). Vamos a calcular $P(11 | k-1 k-1)$, que es

$$\begin{aligned} \left| \langle C_{k-1}^1 C_{k-1}^0 | \psi \rangle \right|^2 &= \left| \left(c_{k-1}^\perp \langle 0| - c_{k-1} \langle 1| \right) \left(c_{k-1}^\perp \langle 0| - c_{k-1} \langle 1| \right) \left(\alpha |00\rangle - \beta |11\rangle \right) \right|^2 \\ &= \left| (c_{k-1}^\perp)^2 \alpha - c_{k-1}^2 \beta \right|^2 = \left| N_{k-1}^2 \beta^{2k-1} \alpha - N_{k-1}^2 \alpha^{2k-1} \beta \right|^2 = |N_{k-1}|^4 \left(\alpha \beta^{2k-1} - \beta \alpha^{2k-1} \right)^2, \end{aligned} \quad (90)$$

donde hemos sustituido (87) en la tercera igualdad. Las constante de normalización N_i son tal que

$$|c_i|^2 + |c_i^\perp|^2 = 1 \quad \text{para todo } i \in \{0, \dots, k-1\}, \quad (91)$$

luego

$$|N_i|^2 \alpha^{2i+1} + |N_i|^2 \beta^{2i+1} = 1 \quad \iff \quad |N_i|^2 = \frac{1}{\alpha^{2i+1} + \beta^{2i+1}}. \quad (92)$$

Sustituyendo en (90), obtenemos la probabilidad

$$P(11 | k-1 k-1) = \left(\frac{\alpha \beta^{2k-1} - \beta \alpha^{2k-1}}{\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1}} \right)^2, \quad (93)$$

que será distinta de 0 siempre que $\alpha \neq \beta$.

3.3 Un juego con post-selección con varias preguntas

Aprovechando que conocemos la paradoja de Hardy para varias preguntas, vamos a definir un nuevo juego con post-selección que presenta ventaja cuántica. El nuevo juego lo definimos para dos jugadores, con k opciones de preguntas y 2 opciones de respuesta para cada uno y con las reglas

| a | b | x | y | | |
|-------------|-----|-------|-------|---------------|---|
| 1 | 1 | $k-1$ | $k-1$ | \rightarrow | Victoria |
| 0 | 1 | $i-1$ | i | \rightarrow | Derrota para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$ |
| 1 | 0 | i | $i-1$ | \rightarrow | Derrota para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | \rightarrow | Derrota |
| Otro suceso | | | | \rightarrow | Se descarta la ronda |

En el caso $k = 2$, que es el juego visto en el capítulo anterior, se cumple que, para todo par de preguntas $(x, y) \in \{0, \dots, k-1\}^2$ existe un par de respuestas $(a, b) \in \{0, 1\}^2$ tal que el suceso (a, b, x, y) no se descarta; sin embargo, para el caso más general que estamos presentando, no es así. Veremos más adelante que nos interesa aumentar la probabilidad de post-selección, así que vamos a pedir que sea

0 la probabilidad de que se envíe un par de preguntas para el que no existe ningún suceso con esas preguntas que no se descarte. Para el resto de pares de preguntas posibles, vamos a pedir que todos tengan la misma probabilidad de ser enviados; como el número de pares de preguntas para los que existen sucesos que no se descartan es $2k$, nos queda

$$\mu(xy) = \begin{cases} \frac{1}{2k} & \text{si } (x, y) \in \{(0, 0), (k-1, k-1)\} \cup \{(i, i-1)\}_{i=1}^{k-1} \cup \{(i-1, i)\}_{i=1}^{k-1} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (95)$$

Dada una estrategia P , la probabilidad de que no se descarte una ronda es

$$\begin{aligned} \gamma_P^{\text{post}} &= \mu(k-1 k-1)P(11 | k-1 k-1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} (\mu(i-1 i)P(01 | i-1 i) + \mu(i i-1)P(10 | i i-1)) + \mu(00)P(11 | 00) \\ &= \frac{1}{2k} \left(P(11 | k-1 k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} (P(01 | i-1 i) + P(10 | i i-1)) + P(11 | 00) \right), \end{aligned} \quad (96)$$

y la probabilidad de ganar una ronda suponiendo que esta no se descarta es

$$\omega_P = \begin{cases} \frac{\mu(k-1 k-1)P(11 | k-1 k-1)}{\gamma_P^{\text{post}}} & \text{si } \gamma_P^{\text{post}} \neq 0, \\ 0 & \text{si } \gamma_P^{\text{post}} = 0. \end{cases} \quad (97)$$

Cuando $\gamma_P^{\text{post}} \neq 0$, tenemos

$$\omega_P = \frac{P(11 | k-1 k-1)}{P(11 | k-1 k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} (P(01 | i-1 i) + P(10 | i i-1)) + P(11 | 00)} \quad (98)$$

Hemos definido este juego queriendo generalizar el presentado en el capítulo anterior, en el que las estrategias de Hardy ganaban con probabilidad 1. Claramente, tenemos

$$\boxed{\omega_P = \frac{P(11 | k-1 k-1)}{P(11 | k-1 k-1)} = 1 \quad \text{para toda } P \text{ estrategia de Hardy.}} \quad (99)$$

También es inmediato que con una estrategia local no se puede alcanzar esta cota. Para que la probabilidad de ganar sea mayor que cero es necesario que $P(11 | k-1 k-1)$ sea distinto de 0; si P es una estrategia local, esto hace que el denominador de ω_P deba ser estrictamente mayor que el numerador para que no se cumplan las condiciones (75) (ya que, si no, se tendría que cumplir (76)). En el caso de una estrategia determinista local, necesitamos que el numerador sea 1, y esto implica que el denominador valga, como mínimo, 2. En el siguiente capítulo veremos, para juegos con post-selección más generales, que la máxima probabilidad de victoria ω_P que se puede encontrar entre las estrategias deterministas no puede ser superada por ninguna estrategia local. Tenemos, por lo tanto, una cota para ω_P cuando P es local:

$$\boxed{\omega_P \leq \frac{1}{2} \quad \text{para toda } P \text{ estrategia local.}} \quad (100)$$

Además, existen estrategias deterministas que alcanzan la cota (100); por ejemplo, consideremos la estrategia $D(ab|xy) = \delta_{a,f(x)}\delta_{b,g(y)}$ con

$$f(x) = 1 \quad \text{para todo } x \in \{0, \dots, k-1\}, \quad \text{y} \quad g(y) = 1 \quad \text{para todo } y \in \{0, \dots, k-1\}.$$

Para esta estrategia, tenemos que

$$\omega_D = \frac{D(11 | k-1 k-1)}{D(11 | k-1 k-1) + D(11 | 00)} = \frac{1}{2}. \quad (101)$$

Sustituyendo (98) en (100), multiplicando por los denominadores y pasando todo al primer miembro, encontramos que, si P es un comportamiento local en $(k, k; 2, 2)$, entonces

$$P(11|k-1 k-1) - \sum_{i=1}^{k-1} (P(01|i-1 i) + P(10|i i-1)) - P(11|00) \leq 0, \quad (102)$$

que es una generalización de la desigualdad CH.

3.4 La paradoja de Hardy con varias preguntas y respuestas

La paradoja de Hardy se puede generalizar al caso de varias preguntas y varias respuestas. Es conveniente hacerlo con una denominación de las preguntas y respuestas diferente a la que hemos utilizado hasta ahora. Esto no cambia el contenido en sí, ya que la cadena de implicaciones no depende del símbolo que utilicemos para referirnos a una pregunta, pero nos permite utilizar una notación más compacta. En primer lugar, dada una estrategia P en el escenario $(k, k; d, d)$ vamos a introducir la notación

$$P(a < b | xy) = \sum_{\substack{a, b=0 \\ a < b}}^{d-1} P(ab | xy). \quad (103)$$

La paradoja de Hardy se puede expresar de la siguiente forma: supongamos que tenemos una estrategia P en el escenario $(k, k; d, d)$ tal que

$$P(a < b | 0 k-1) = 0, \quad (104a)$$

$$P(a < b | i i-1) = 0 \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, k-1\}, \quad (104b)$$

$$P(b < a | i-1 i-1) = 0 \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, k-1\}. \quad (104c)$$

Entonces, si P es una estrategia local,

$$P(a < b | k-1 k-1) = 0. \quad (105)$$

Vamos a comprobar este resultado. Primero, escribiendo la estrategia P en la representación de Fine, tenemos

$$P(a < b | xy) = \sum_{\substack{a, b=0 \\ a < b}}^{d-1} \sum_{i, j=1}^{d^k} q_{ij} \delta_{a, f_i(x)} \delta_{b, g_j(y)}. \quad (106)$$

Definimos

$$F_{ij}(xy) = \sum_{\substack{a, b=0 \\ a < b}}^{d-1} \delta_{a, f_i(x)} \delta_{b, g_j(y)} \quad \text{y} \quad G_{ij}(xy) = \sum_{\substack{a, b=0 \\ b < a}}^{d-1} \delta_{a, f_i(x)} \delta_{b, g_j(y)}.$$

Supongamos que existe un par $(m, n) \in \{1, \dots, d^k\}^2$ tal que $q_{mn} \neq 0$. Entonces, por la ecuación (104b), tenemos que $g_n(k-2) \leq f_m(k-1)$ (ya que si no, $F_{mn}(k-1 k-2) = 1$, lo que implicaría que $P(a < b | i i-1) \geq q_{mn} > 0$). Esto supone, por la condición (104c), que $f_m(k-2) \leq g_n(k-2) \leq f_m(k-1)$, (pues de lo contrario, $G_{mn}(k-2, k-2) = 1$ y esto llevaría a que $P(b < a | i-1 i-1) \geq q_{mn} > 0$). De aquí, deducimos que $g_n(k-3) \leq f_m(k-1)$. Llegamos a (se puede comprobar inducción) que $f_m(0) \leq f_m(k-1)$, lo que lleva, por la condición (104a) a $g_n(k-1) \leq f_m(k-1)$. Es decir, $f_m(k-1) \geq g_n(k-1)$ siempre que $q_{mn} \neq 0$, luego $P(a < b | k-1 k-1) = 0$.

Podemos encontrar una estrategia cuántica que cumple las condiciones (104) pero viola (105); de hecho, va a ser la misma, salvo nomenclatura, que para el caso anterior. Podemos ver el vector

$$|\psi\rangle = \alpha |00\rangle - \beta |11\rangle \quad (107)$$

como un estado de dos qudits: sea $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |d-1\rangle\}$ la base canónica de \mathbb{C}^d , y, tal como está escrito, entendemos que $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ (aunque no aparezcan vectores $|ij\rangle$ con i o j mayor que 1). También los estados $|C_i^0\rangle$ y $|C_i^1\rangle$ de (78) podemos verlos como estados de un qudit con las dos primeras componentes definidas como en (87) y el resto 0, y siguen siendo ortogonales (para un mismo valor de i). Vamos a cambiar la notación de los estados para que la estrategia P mantenga la notación que hemos usado hasta ahora

$$P(ab|xy) = \left| \langle A_x^a B_y^b | \psi \rangle \right|^2. \quad (108)$$

En primer lugar, la probabilidad $P(a < b | k-1, k-1)$ juega el papel que jugaba $P(11 | k-1, k-1)$ en el caso anterior. Por lo tanto, tomamos

$$|A_{k-1}^0\rangle = |C_{k-1}^1\rangle \quad \text{y} \quad |B_{k-1}^1\rangle = |C_{k-1}^1\rangle, \quad (109)$$

y, por el requerimiento $\langle A_{k-1}^0 | A_{k-1}^1 \rangle = 0 = \langle B_{k-1}^0 | B_{k-1}^1 \rangle$,

$$|A_{k-1}^1\rangle = |C_{k-1}^0\rangle \quad \text{y} \quad |B_{k-1}^0\rangle = |C_{k-1}^0\rangle. \quad (110)$$

La ecuación (104b) nos dice $\left| \langle A_{k-1}^0 B_{k-2}^1 | \psi \rangle \right|^2 = 0$, y por (75c), $\left| \langle C_{k-1}^1 C_{k-2}^0 | \psi \rangle \right|^2 = 0$. Como $|A_{k-1}^0\rangle = |C_{k-1}^1\rangle$, escogemos

$$|B_{k-2}^1\rangle = |C_{k-2}^0\rangle \quad \text{y} \quad |B_{k-2}^0\rangle = |C_{k-2}^1\rangle. \quad (111)$$

Por (104c), $\left| \langle A_{k-2}^1 B_{k-2}^0 | \psi \rangle \right|^2 = 0$, y por (75b) $\left| \langle C_{k-3}^0 C_{k-2}^1 | \psi \rangle \right|^2 = 0$, luego escogemos

$$|A_{k-2}^1\rangle = |C_{k-3}^0\rangle \quad \text{y} \quad |A_{k-2}^0\rangle = |C_{k-3}^1\rangle. \quad (112)$$

Continuando este proceso, vamos tomando

$$|B_{k-3}^1\rangle = |C_{k-4}^0\rangle, \quad |B_{k-3}^0\rangle = |C_{k-4}^1\rangle, \quad |A_{k-3}^1\rangle = |C_{k-5}^0\rangle \quad \text{y} \quad |A_{k-3}^0\rangle = |C_{k-5}^1\rangle. \quad (113)$$

Se puede comprobar por inducción que, cuando k es par, esta regla para escoger los estados lleva a

$$|A_{k-1-i}^1\rangle = |C_{k-1-2i}^0\rangle, \quad |A_{k-1-i}^0\rangle = |C_{k-1-2i}^1\rangle, \quad i \in \left\{ 0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1 \right\}, \quad (114)$$

y

$$|B_{k-2-i}^1\rangle = |C_{k-2-2i}^0\rangle, \quad |B_{k-2-i}^0\rangle = |C_{k-2-2i}^1\rangle, \quad i \in \left\{ 0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1 \right\}, \quad (115)$$

Para $i = \frac{k}{2} - 1$, tenemos $|B_{\frac{k}{2}-1}^0\rangle = |C_0^1\rangle$, y por (104c) y (75a), $\left| \langle A_{\frac{k}{2}-1}^1 B_{\frac{k}{2}-1}^0 | \psi \rangle \right|^2 = 0 = \left| \langle C_0^1 C_0^1 | \psi \rangle \right|^2$, luego escogemos

$$|A_{\frac{k}{2}-1}^1\rangle = |C_0^1\rangle \quad \text{y} \quad |A_{\frac{k}{2}-1}^0\rangle = |C_0^0\rangle. \quad (116)$$

Por (104b), tenemos $\left| \langle A_{\frac{k}{2}-1}^0 B_{\frac{k}{2}-2}^1 | \psi \rangle \right|^2 = 0$, y por (75b), $\left| \langle C_0^0 C_1^1 | \psi \rangle \right|^2 = 0$, así que tomamos

$$|B_{\frac{k}{2}-2}^1\rangle = |C_1^1\rangle \quad \text{y} \quad |B_{\frac{k}{2}-2}^0\rangle = |C_1^0\rangle. \quad (117)$$

Por las condiciones (104c) y (75c), escogemos

$$|A_{\frac{k}{2}-2}^1\rangle = |C_2^1\rangle \quad \text{y} \quad |A_{\frac{k}{2}-2}^0\rangle = |C_2^0\rangle. \quad (118)$$

De nuevo por (104b) y (75b),

$$|B_{\frac{k}{2}-3}^1\rangle = |C_3^1\rangle \quad \text{y} \quad |B_{\frac{k}{2}-3}^0\rangle = |C_3^0\rangle. \quad (119)$$

Se puede deducir fácilmente que continuando el proceso se llega a

$$\left|A_{\frac{k}{2}-1-i}^1\right\rangle = |C_{2i}^1\rangle, \quad \left|A_{\frac{k}{2}-1-i}^0\right\rangle = |C_{2i}^0\rangle, \quad i \in \left\{0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1\right\} \quad (120)$$

y

$$\left|B_{\frac{k}{2}-2-i}^1\right\rangle = |C_{1+2i}^1\rangle, \quad \left|B_{\frac{k}{2}-2-i}^0\right\rangle = |C_{1+2i}^0\rangle, \quad i \in \left\{0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 2\right\}. \quad (121)$$

Para $i = \frac{k}{2} - 1$ tenemos $|A_0^0\rangle = |C_{k-2}^0\rangle$, y por (104a) y (75b), podemos tomar

$$\left|B_{k-1}^1\right\rangle = |C_{k-1}^1\rangle \quad y \quad \left|B_{k-1}^0\right\rangle = |C_{k-1}^0\rangle, \quad (122)$$

como ya habíamos definido en (109) y (110).

Si k es impar, llegamos a

$$\left|A_{k-1-i}^1\right\rangle = |C_{k-1-2i}^0\rangle, \quad \left|A_{k-1-i}^0\right\rangle = |C_{k-1-2i}^1\rangle, \quad i \in \left\{0, 1, \dots, \frac{k-1}{2}\right\}, \quad (123)$$

y

$$\left|B_{k-2-i}^1\right\rangle = |C_{k-2-2i}^0\rangle, \quad \left|B_{k-2-i}^0\right\rangle = |C_{k-2-2i}^1\rangle, \quad i \in \left\{0, 1, \dots, \frac{k-3}{2}\right\}. \quad (124)$$

Para $i = \frac{k-1}{2}$, tenemos $\left|A_{\frac{k-1}{2}}^0\right\rangle = |C_0^1\rangle$, y por (104b) y (75a), $\left|\left\langle A_{\frac{k-1}{2}}^0 B_{\frac{k-3}{2}}^1 \middle| \psi \right\rangle\right|^2 = 0 = \left|\left\langle C_0^1 C_0^1 \middle| \psi \right\rangle\right|^2$, por lo que escogemos

$$\left|B_{\frac{k-3}{2}}^1\right\rangle = |C_0^1\rangle \quad y \quad \left|B_{\frac{k-3}{2}}^0\right\rangle = |C_0^0\rangle. \quad (125)$$

Por (104c), tenemos $\left|\left\langle A_{\frac{k-3}{2}}^1 B_{\frac{k-3}{2}}^0 \middle| \psi \right\rangle\right|^2 = 0$, y por (75c), $\left|\left\langle C_1^1 C_0^0 \middle| \psi \right\rangle\right|^2 = 0$, así que tomamos

$$\left|A_{\frac{k-3}{2}}^1\right\rangle = |C_1^1\rangle \quad y \quad \left|A_{\frac{k-3}{2}}^0\right\rangle = |C_1^0\rangle. \quad (126)$$

Por las condiciones (104b) y (75b), escogemos

$$\left|B_{\frac{k-5}{2}}^1\right\rangle = |C_2^1\rangle \quad y \quad \left|B_{\frac{k-5}{2}}^0\right\rangle = |C_2^0\rangle. \quad (127)$$

De nuevo por (104c) y (75c),

$$\left|A_{\frac{k-5}{2}}^1\right\rangle = |C_3^1\rangle \quad y \quad \left|A_{\frac{k-5}{2}}^0\right\rangle = |C_3^0\rangle. \quad (128)$$

Se puede deducir fácilmente que, continuando el proceso, se llega a

$$\left|A_{\frac{k-3}{2}-i}^1\right\rangle = |C_{1+2i}^1\rangle, \quad \left|A_{\frac{k-3}{2}-i}^0\right\rangle = |C_{1+2i}^0\rangle, \quad i \in \left\{0, 1, \dots, \frac{k-3}{2}\right\}, \quad (129)$$

y

$$\left|B_{\frac{k-3}{2}-i}^1\right\rangle = |C_{2i}^1\rangle, \quad \left|B_{\frac{k-3}{2}-i}^0\right\rangle = |C_{2i}^0\rangle, \quad i \in \left\{0, 1, \dots, \frac{k-3}{2}\right\}. \quad (130)$$

Para $i = \frac{k-3}{2}$ tenemos $|A_0^0\rangle = |C_{k-2}^0\rangle$, y por (104a) y (75b), podemos tomar

$$\left|B_{k-1}^1\right\rangle = |C_{k-1}^1\rangle \quad y \quad \left|B_{k-1}^0\right\rangle = |C_{k-1}^0\rangle, \quad (131)$$

como en (109) y (110).

Ahora, para cada i escogemos dos series de vectores $|A_i^2\rangle, |A_i^3\rangle, \dots, |A_i^{d-1}\rangle$ y $|B_i^2\rangle, |B_i^3\rangle, \dots, |B_i^{d-1}\rangle$ de tal forma que los conjuntos $\left\{|A_i^j\rangle\right\}_{j=0}^{d-1}$ y $\left\{|B_i^j\rangle\right\}_{j=0}^{d-1}$ sean bases ortonormales del espacio de Hilbert \mathcal{C}^d . Dados $x, y \in \{0, \dots, k-1\}$, vemos que la probabilidad $P(ab|xy)$ se anula cuando a o b

es mayor que 1, ya que $|\psi\rangle$ pertenece al subespacio generado por $\left\{ |A_x^a B_y^b\rangle \right\}_{a,b=0}^1$ y el estado sobre el que se proyecta $|\psi\rangle$ cuando a o b es mayor que 1, es ortogonal a este subespacio. Hemos definido esta estrategia de tal forma que se cumplen las condiciones (104), pero

$$\begin{aligned} P(a < b | k-1 \ k-1) &= P(01 | k-1 \ k-1) = \left| \langle A_{k-1}^0 B_{k-1}^1 | \psi \rangle \right|^2 \\ &= \left| \langle C_{k-1}^1 C_{k-1}^1 | \psi \rangle \right|^2 = \left(\frac{\alpha\beta^{2k-1} - \beta\alpha^{2k-1}}{\beta^{2k-1} + \alpha^{2k-1}} \right)^2, \end{aligned}$$

luego no se cumple (105) cuando $\alpha \neq \beta$.

3.5 Juego con post-selección con varias preguntas y varias respuestas

Definimos un juego con post-selección de dos jugadores, con k posibles preguntas y d posibles respuestas para ambos, y con las reglas

$$\begin{array}{l|ll} a < b & x = y = k-1 & \rightarrow \text{Victoria} \\ a < b & x = 0, y = k-1 & \rightarrow \text{Derrota} \\ a < b & x = i, y = i-1 & \rightarrow \text{Derrota} & \text{para todo } i \in \{1, \dots, k-1\} \\ b < a & x = y = i-1 & \rightarrow \text{Derrota} & \text{para todo } i \in \{1, \dots, k-1\} \\ \text{Otro suceso} & & \rightarrow \text{Se descarta la ronda} \end{array}$$

Dentro de los posibles pares $(x, y) \in \{0, \dots, k-1\}^2$ de preguntas, hay un total de $2k$ pares para los que existe algún suceso (a, b, x, y) que no se descarta. Para que estos tengan todos la misma probabilidad y el resto 0, definimos

$$\mu(xy) = \begin{cases} \frac{1}{2k} & \text{si } (x, y) \in \{(0, k-1), (k-1, k-1)\} \cup \{(i, i-1)\}_{i=1}^{k-1} \cup \{(i-1, i-1)\}_{i=1}^{k-1} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (132)$$

Dada una estrategia P , la probabilidad de post-selección es

$$\begin{aligned} \gamma_P^{\text{post}} &= \mu(k-1 \ k-1)P(a < b | k-1 \ k-1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} (\mu(i, i-1)P(a < b | i \ i-1) + \mu(i-1, i-1)P(b < a | i-1 \ i-1)) + \mu(0 \ k-1)P(a < b | 0 \ k-1) \\ &= \frac{1}{2k} \left(P(a < b | k-1 \ k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} (P(a < b | i \ i-1) + P(b < a | i-1 \ i-1)) + P(a < b | 0 \ k-1) \right), \end{aligned} \quad (133)$$

y la probabilidad de ganar una ronda suponiendo que esta no se descarta es

$$\omega_P = \begin{cases} \frac{\mu(k-1 \ k-1)P(a < b | k-1 \ k-1)}{\gamma_P^{\text{post}}} & \text{si } \gamma_P^{\text{post}} \neq 0, \\ 0 & \text{si } \gamma_P^{\text{post}} = 0. \end{cases} \quad (134)$$

Cuando $\gamma_P^{\text{post}} \neq 0$, tenemos

$$\omega_P = \frac{P(a < b | k-1 \ k-1) = 0}{P(a < b | k-1 \ k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} (P(a < b | i \ i-1) + P(b < a | i-1 \ i-1)) + P(a < b | 0 \ k-1)}. \quad (135)$$

Nuevamente, se cumple

$$\boxed{\omega_P = \frac{P(a < b | k-1 \ k-1)}{P(a < b | k-1 \ k-1)} = 1 \quad \text{para toda } P \text{ estrategia de Hardy.}} \quad (136)$$

La paradoja de Hardy nos dice, sin embargo, que no hay ninguna estrategia clásica P para la que ω_P alcance el valor 1. Una estrategia determinista D no puede tener probabilidad de victoria, condicionada a no descarte, mayor que $\frac{1}{2}$, ya que en el numerador de (135) solo habrá un término de la forma $P(a b | k-1 k-1)$ (donde $a < b$) con valor 1 en lugar de 0 (aunque en esta ocasión hay más de un suceso que ganan el juego, todos se corresponden con el mismo par de preguntas $(k-1, k-1)$, luego, con una estrategia determinista, solo se puede dar uno de estos sucesos). Una estrategia determinista D que gana con probabilidad $\frac{1}{2}$ es $D(ab|xy) = \delta_{a,f(x)}\delta_{b,g(y)}$ con

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \{0, \dots, k-1\} \quad \text{y} \quad g(y) = \begin{cases} d-1 & \text{si } y = k-1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (137)$$

La mayor probabilidad ω_P posible restringiéndonos a estrategias deterministas no puede ser superada por ninguna estrategia local (como veremos en el siguiente capítulo). Por lo tanto,

$$\boxed{\omega_P \leq \frac{1}{2} \quad \text{para toda } P \text{ estrategia local.}} \quad (138)$$

Procediendo de la misma manera que para obtener (102), sustituyendo (135) en (138) encontramos que, si P es un comportamiento local en $(k, k; 2, 2)$, entonces

$$P(a < b | k-1 k-1) - \sum_{i=1}^{k-1} (P(a < b | i i-1) + P(b < a | i-1 i-1)) - P(b < a | 0 k-1) \leq 0. \quad (139)$$

que es una generalización de la desigualdad CH, ahora para varias preguntas y varias respuestas. Esta desigualdad está presentada en [16]

4 Juegos con post-selección: descripción general

4.1 Definiciones

Definición 4.1. Un *juego con post-selección* bipartito es una 7-tupla $\mathcal{G} = (X, Y, A, B, \mu, S, V)$, donde

1. X, Y, A, B son conjuntos no vacíos y finitos,
2. $\mu : (x, y) \in X \times Y \mapsto \mu(xy) \in [0, 1]$ es una probabilidad en $X \times Y$ (luego $\sum_{(x,y) \in X \times Y} \mu(xy) = 1$),
3. $V \subseteq S \subseteq A \times B \times X \times Y$.

Dado un juego con post-selección bipartito $\mathcal{G} = (X, Y, A, B, \mu, S, V)$, llamamos estrategia en \mathcal{G} a una estrategia en el escenario bipartito $(|X|, |Y|; |A|, |B|)$. Dada P una estrategia en \mathcal{G} , definimos:

1. la probabilidad γ_P de ganar una ronda como

$$\gamma_P = \sum_{(a,b,x,y) \in V} \mu(xy) P(ab|xy), \quad (140)$$

2. la probabilidad γ_P^{post} de post-selección de una ronda como

$$\gamma_P^{\text{post}} = \sum_{(a,b,x,y) \in S} \mu(xy) P(ab|xy) \quad (141)$$

3. y la probabilidad γ_P de victoria (efectiva) como la probabilidad de ganar un ronda condicionada a que se ha producido post-selección; es decir,

$$\omega_P = \begin{cases} \frac{\sum_{(a,b,x,y) \in V \cap S} \mu(xy) P(ab|xy)}{\gamma_P^{\text{post}}} & \text{si } \gamma_P^{\text{post}} > 0, \\ 0 & \text{si } \gamma_P^{\text{post}} = 0; \end{cases} \quad (142)$$

pero, como $V \subseteq S$,

$$\omega_P = \begin{cases} \frac{\gamma_P}{\gamma_P^{\text{post}}} & \text{si } \gamma_P^{\text{post}} > 0, \\ 0 & \text{si } \gamma_P^{\text{post}} = 0. \end{cases} \quad (143)$$

Estas cantidades son no negativas por serlo P y μ . Vemos también que

$$\gamma_P \leq \gamma_P^{\text{post}} \leq \sum_{(x,y) \in X \times Y} \mu(xy) \sum_{(a,b) \in A \times B} P(ab|xy) = 1$$

y, por la primera desigualdad,

$$\omega_P \leq 1. \quad (144)$$

Si $S = A \times B \times X \times Y$, tenemos que el juego con post-selección es un juego tradicional.

No vamos a definir los valores clásico y cuántico para los juegos con post-selección; en la sección 5.3 del siguiente capítulo comentamos por qué (ecuación (189), y ver (196)).

4.2 Conjuntos convexos de comportamientos

Para los juegos tradicionales, se comprueba muy fácilmente que no hay ninguna estrategia local que mejore la mayor probabilidad efectiva de victoria ω_P que se puede encontrar entre las estrategias deterministas locales. Esto es debido a que, para este caso, ω_P es una función lineal de P , y a que el conjunto de las estrategias locales (el politopo local) es la envolvente convexa del conjunto de las estrategias deterministas locales. Para juegos con post-selección en general, esto no es tan sencillo, ya que ω_P no es lineal.

Sea P una estrategia local en el escenario $\mathcal{T} = (|X|, |Y|; |A|, |B|)$. La escribimos en la representación de Fine

$$P(ab|xy) = \sum_{i=1}^{|A|^{|X|}} \sum_{j=1}^{(d_2)^{k_2}} q_{ij} \delta_{a, f_i(x)} \delta_{b, g_j(y)}, \quad (145)$$

y definimos, para cada par $(i, j) \in \{1, \dots, |A|^{|X|}\} \times \{1, \dots, |B|^{|Y|}\}$, la estrategia determinista local

$$D_{ij}(ab|xy) = \delta_{a, f_i(x)} \delta_{b, g_j(y)} \quad (a, b, x, y) \in A \times B \times X \times Y. \quad (146)$$

Entonces, para un juego tradicional sobre \mathcal{T} , la probabilidad de victoria cumple

$$\omega_P = \sum_{i=1}^{(d_1)^{k_1}} \sum_{j=1}^{(d_2)^{k_2}} q_{ij} \omega_{D_{ij}} \leq \max_{ij} \{\omega_{D_{ij}}\} \sum_{i=1}^{(d_1)^{k_1}} \sum_{j=1}^{(d_2)^{k_2}} q_{ij}; \quad (147)$$

pero $\sum_{i=1}^{(d_1)^{k_1}} \sum_{j=1}^{(d_2)^{k_2}} q_{ij} = 1$, luego

$$\omega_P \leq \max_{ij} \{\omega_{D_{ij}}\} \quad (148)$$

Queremos ver si se cumple (148) cuando existe post-selección. Si el dominio es convexo (como es el caso del conjunto de las estrategias locales y del de las estrategias cuánticas), esta desigualdad caracteriza a las llamadas *funciones cuasiconvexas* [4].

Definición 4.2. Una función $f : M \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es cuasiconvexa si su dominio M es convexo y, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el subnivel

$$S_\alpha = \{x \in M : f(x) \leq \alpha\} \quad (149)$$

es un conjunto convexo.

Proposición 4.3. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto convexo, y sea $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, f es cuasiconvexa si y sólo si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad \text{para todo } x, y \in C \text{ y todo } \lambda \in [0, 1]. \quad (150)$$

La desigualdad (150) es equivalente a decir: dado $n \in \mathbb{N}$ y dado $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset [0, 1]$ tal que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \max_i \{f(x_i)\} \quad \text{para todo } x_1, \dots, x_n \in D. \quad (151)$$

La prueba de que (150) es condición suficiente para que f sea cuasiconvexa es inmediata y no es la implicación que nos importa.

Demostración de que es condición necesaria. Sean $x, y \in D$ y $\lambda \in [0, 1]$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(x) \leq f(y)$, luego $\max\{f(x), f(y)\} = f(y)$. Tenemos, entonces, que x e y están en el subnivel $S_{f(y)}$. Como todo subnivel es convexo,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_{f(y)}; \quad (152)$$

es decir, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(y) = \max\{f(x), f(y)\}$. \square

Sea \mathcal{G} es un juego con post-selección y sea \mathcal{S} un conjunto convexo de estrategias en \mathcal{G} . Vamos a ver por casos si los subniveles de ω_P en el dominio \mathcal{S} son convexos. Si $\alpha < 0$, es claro que $S_\alpha = \emptyset$, que es un conjunto convexo. Si $\alpha \geq 1$, $S_\alpha = \mathcal{S}$, que también es convexo. Para $0 \leq \alpha < 1$, tenemos que

$$S_\alpha = \{P \in \mathcal{L} : \gamma_P \leq \alpha \gamma_P^{\text{post}}\}, \quad (153)$$

también cuando $\gamma_P^{\text{post}} = 0$. Si definimos $f(P) = \gamma_P - \alpha \gamma_P^{\text{post}}$, nos queda

$$S_\alpha = \{P \in \mathcal{L} : f(P) \leq 0\}, \quad (154)$$

y f es una función lineal de P . Sean $P, Q \in S_\alpha$ y $\lambda \in [0, 1]$. Entonces,

$$f(\lambda P + (1 - \lambda)Q) = \lambda f(P) + (1 - \lambda)f(Q) \leq 0, \quad (155)$$

por ser $\lambda f(P) \leq 0$ y $(1 - \lambda)f(Q) \leq 0$. Por la proposición 4.3, tenemos el resultado que buscábamos, que escribimos como proposición.

Proposición 4.4. Sea \mathcal{G} un juego con post-selección y sea \mathcal{S} un conjunto convexo de estrategias en \mathcal{G} . Entonces, existe P^* un punto extremo de \mathcal{S} tal que

$$\omega_P \leq \omega_{P^*}. \quad (156)$$

5 Determinación experimental de la violación de desigualdades de Bell

Una forma de intentar determinar la existencia de comportamientos no locales predichos por la mecánica cuántica es mediante un test de hipótesis sobre una desigualdad de Bell. Los experimentos enfocados en buscar la violación de la cota local de un juego no local son una manera visual y directa de realizar estos test.

Consideramos un experimento que reproduce un juego no local en el que los jugadores siguen una estrategia cuyo comportamiento P es no local. Queremos determinar estadísticamente que el comportamiento P no puede ser local. Sabemos que, si fuese local, la probabilidad de victoria ω_P no superaría la cota local ω_l^* del juego. En la ronda número i del experimento, obtendremos victoria, derrota o que la ronda se descarta; guardamos esta información en las variables estadística $W_i, S_i \in \{0, 1\}$ del siguiente modo: si la ronda se descarta, $S_i = W_i = 0$; si se obtiene victoria, $S_i = W_i = 1$, y si se obtiene derrota, $S_i = 1$ y $W_i = 0$. Supongamos que hemos realizado n rondas del experimento. Es presumible que, cuando n es suficientemente grande, el estadístico

$$\hat{\omega}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \quad (157)$$

será un buen estimador de la probabilidad de ganar el juego con el comportamiento que verdaderamente siga el experimento, y

$$\hat{\gamma}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i \quad (158)$$

será un buen estimador de la probabilidad de post-selección para ese mismo comportamiento. Definimos también

$$\hat{k}_n = \sum_{i=1}^n W_i = n\hat{\omega}_n \quad \text{y} \quad \hat{t}_n = \sum_{i=1}^n S_i = n\hat{\gamma}_n \quad (159)$$

Fijado un comportamiento P y un número de rondas n , definimos $E(\hat{t}_n = t | P)$ como la probabilidad de obtener en el experimento t post-selecciones suponiendo que se está siguiendo el comportamiento P . Vamos a deducir cuál debe ser la fórmula que defina $E(\hat{t}_n = t | P)$. Si ha habido post-selección en exactamente t rondas del experimento, se han descartado $n - t$ rondas. Un ejemplo de este suceso es que se produzca post-selección en las t primeras rondas y se pierda en las $n - t$ últimas, y la probabilidad de que ocurra esto (a partir de aquí sobreentendemos la coletilla “suponiendo que se sigue el comportamiento P ” cuando proceda utilizarla) es

$$E(S_1 = 1, \dots, S_t = 1, S_{t+1} = 0, \dots, S_n = 0 | P). \quad (160)$$

Como cada ronda del experimento es independiente, esta probabilidad es igual a

$$E(S_1 = 1 | P) \dots E(S_t = 1 | P) E(S_{t+1} = 0 | P) \dots E(S_n = 0 | P). \quad (161)$$

La probabilidad de post-selección de una ronda es γ_P^{post} , y la probabilidad de descartarla es $1 - \gamma_P^{\text{post}}$, luego nos queda que la probabilidad de que se seleccionen las t primeras rondas y se descarten las demás es

$$(\gamma_P^{\text{post}})^t (1 - \gamma_P^{\text{post}})^{n-t}. \quad (162)$$

El resto de muestras posibles para las que el número de rondas seleccionadas es t tienen todas la misma probabilidad de aparecer (162), y la cantidad de estas muestras es el número de combinaciones posibles de n elementos al tomar t . Por lo tanto, encontramos

$$E(\hat{t}_n = t | P) = \binom{n}{t} (\gamma_P^{\text{post}})^t (1 - \gamma_P^{\text{post}})^{n-t}, \quad (163)$$

que indica que \hat{t}_n sigue una distribución binomial de parámetros n y γ_P^{post} .

Otra cantidad que nos interesa es $E(\hat{k}_n = k | P, \hat{t}_n = t)$ la probabilidad de obtener victoria en k rondas condicionada a que se ha habido post-selección en t rondas. En este caso, no nos importa cuántas rondas del experimento n ha habido, pues solo se puede obtener victoria en una ronda en la que se ha producido post-selección. Razonando igual que en el párrafo anterior, se encuentra que

$$E(\hat{k}_n = k | P, \hat{t}_n = t) = \binom{t}{k} \omega_P^k (1 - \omega_P)^{t-k}. \quad (164)$$

En el caso de que el juego sea tradicional, $\hat{t}_n = n$ siempre, y la probabilidad de obtener victoria en k rondas es

$$E(\hat{k}_n = k | P) = \binom{n}{k} \omega_P^k (1 - \omega_P)^{n-k}. \quad (165)$$

Nuestro objetivo final es disminuir el número de rondas del experimento n para que el resultado *esperado* del test (que se obtiene suponiendo que el comportamiento que se sigue en el experimento se corresponde con el del estado cuántico y las medidas elegidas) sea el menor posible. Parece razonable pensar que los juegos con post-selección ayudarán a disminuir este valor n si escogemos estrategias con las que se aumente la probabilidad de post-selección. Sin embargo, para evitar errores, a la hora de comparar con los posibles comportamientos locales, no hay que olvidar que para estos segundos también existe esta probabilidad de post-selección. Los test de hipótesis que vamos ver no usan ninguna asunción injustificada y tienen en cuenta todo lo que podría ocurrir en un mundo realista y local.

5.1 Valor p para un juego tradicional

Un test de hipótesis habitual es el cálculo del denominado valor p . En este tipo de test, lo que se contrasta es (en un sentido que vamos a formalizar a continuación) si lo que se obtiene experimentalmente es plausible o no cuando suponemos que el comportamiento que se sigue durante el experimento es el comportamiento local que maximiza la probabilidad de obtener los datos que hemos obtenido; a esta suposición la llamamos *hipótesis nula*. Si el resultado del test es que *sí* es plausible, *no* podemos afirmar que el comportamiento seguido es local. Esto se debe a que *no* estamos calculando la probabilidad de obtener los resultados que hemos obtenido condicionada a que se sigue el comportamiento *no* local que maximiza esta probabilidad, y nada impide que esta probabilidad sea también lo suficientemente alta como para *no* poder rechazar esta segunda suposición. Pero, si el resultado es que *no* es plausible, podemos rechazar la hipótesis de que el comportamiento sea local. Vamos a ver cómo plantear este test siguiendo el artículo [1].

El valor p para un contraste de hipótesis se define como *la probabilidad, suponiendo que se cumple la hipótesis nula, de obtener un resultado al menos tan extremo como el obtenido*. En nuestro caso, la definición precisa es la siguiente:

$$p = \text{máx} \{E(\hat{\omega} \geq \omega | P) : P \text{ comportamiento local}\}. \quad (166)$$

De (165) deducimos que

$$E(\hat{\omega} \geq \omega | P) = E(\hat{k} \geq n\omega | P) = \sum_{n\omega \leq k \leq n} \binom{n}{k} \omega_P^k (1 - \omega_P)^{n-k}. \quad (167)$$

Si $\omega > \omega_P > 0$, la desigualdad de Chernoff-Hoeffding [12] nos dice que

$$E(\hat{\omega} \geq \omega | P) \leq e^{-nD(\omega || \omega_P)}, \quad (168)$$

donde

$$D(\alpha || \beta) = \alpha \log \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) + (1 - \alpha) \log \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \beta} \right) \quad (169)$$

es la denominada divergencia de Kullback-Leibler o entropía relativa. Fijado el valor ω_P , la función $\omega \mapsto D(\omega||\omega_P)$ crece con ω cuando $\omega > \omega_P$. Si $\omega > \omega_l$, encontramos, para el valor p , la cota

$$p \leq \text{máx} \left\{ e^{-nD(\omega||\omega_P)} : P \text{ comportamiento local} \right\} = e^{-nD(\omega||\omega_l^*)} \quad (170)$$

que disminuye cuando aumenta ω . Con el fin de disminuir esta cota, escogemos para el experimento una estrategia cuántica con probabilidad de victoria ω_q^* . Suponiendo que tras un número de rondas lo suficientemente grande se cumplirá $\omega \approx \omega_q$, encontramos para el valor p la cota aproximada

$$p \lesssim e^{-nD(\omega_q^*||\omega_l^*)}. \quad (171)$$

5.2 Factor de Bayes para un juego tradicional

Otro test de hipótesis, también muy importante, es el cálculo del factor Bayes [13]. En este caso, lo que se pretende estudiar es el ratio de las llamadas *probabilidades a posteriori*, que son las probabilidades, condicionadas a los resultados obtenidos, de que se cumplan la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1 , respectivamente. Veremos que un factor de Bayes suficientemente pequeño es una fuerte evidencia de que la probabilidad a posteriori de la hipótesis nula es muy pequeña en comparación con la de la hipótesis alternativa, llevándonos a descartar la primera en favor de la segunda.

Las probabilidad a posteriori de una hipótesis H es $E(H|D)$, donde D son los datos obtenidos en el experimento. Por la definición de probabilidad condicionada,

$$E(H|D) = \frac{E(H, D)}{E(D)} = \frac{E(D|H)E(H)}{E(D)} \quad (172)$$

que es el contenido del teorema de Bayes. Entonces, el ratio de las probabilidades a posteriori es

$$\frac{E(H_0|D)}{E(H_1|D)} = \frac{E(D|H_0)E(H_0)}{E(D|H_1)E(H_1)}. \quad (173)$$

$E(H_0)$ y $E(H_1)$ son las denominadas *probabilidades a priori*. Su ratio se considera que hace referencia al convencimiento previo que se tiene de una de las hipótesis respecto de la otra. Cuando no hay evidencias previas que hagan presuponer que una de las hipótesis es mucho más probables que la otra, podemos decir que el ratio de las probabilidades a posteriori es muy pequeño si lo es la cantidad que multiplica al ratio de las probabilidades a priori en (173). El factor de Bayes K es precisamente esta cantidad,

$$K = \frac{E(D|H_0)}{E(D|H_1)}. \quad (174)$$

Supongamos que el resultado experimental es $\hat{k}_n = k$. Nuestra hipótesis alternativa será que se sigue la estrategia cuántica del estado y las medidas con las que se diseña el experimento, y la hipótesis nula será que se sigue un comportamiento local L que minimiza el factor de Bayes para nuestra hipótesis alternativa. Sea Q el comportamiento cuántico asociado a la estrategia con la que se diseña el experimento. Entonces, utilizando (165),

$$K_n = \frac{E(\hat{k}_n = k | L)}{E(\hat{k}_n = k | Q)} = \frac{\binom{n}{k} \omega_L^k (1 - \omega_L)^{n-k}}{\binom{n}{k} \omega_Q^k (1 - \omega_Q)^{n-k}} \quad (175)$$

y nos queda

$$K_n = \frac{\omega_L^k (1 - \omega_L)^{n-k}}{\omega_Q^k (1 - \omega_Q)^{n-k}}. \quad (176)$$

Suponiendo que el comportamiento que verdaderamente se ha seguido durante el experimento es Q , para un número de rondas n suficientemente grande tendremos

$$\frac{k}{n} = \omega \approx \omega_Q. \quad (177)$$

Para aprovechar esto, bajamos los exponentes tomando logaritmos en (176),

$$K_n = \exp\left(k \log\left(\frac{\omega_L}{\omega_Q}\right) + (n-k) \log\left(\frac{1-\omega_L}{1-\omega_Q}\right)\right). \quad (178)$$

Sacamos factor común $-n$ en el argumento de la exponencial y obtenemos

$$K_n \approx \exp\left(-n \left(\omega_Q \log\left(\frac{\omega_Q}{\omega_L}\right) + (1-\omega_Q) \log\left(\frac{1-\omega_Q}{1-\omega_L}\right)\right)\right) = e^{-nD(\omega_Q||\omega_L)} \quad (179)$$

Si $\omega_Q \leq \omega_l^*$, existe un comportamiento local L tal que $\omega_L = \omega_Q$. La hipótesis nula es precisamente que se seguiría un comportamiento local en tales condiciones, lo que implica $D(\omega_Q||\omega_L) = 0$ y, por lo tanto, $K_n \approx 1$. Por lo tanto, necesitamos que $\omega_Q > \omega_l^*$. Fijada $\omega_Q > \omega_l^*$, la función $\omega_L \mapsto D(\omega_Q||\omega_L)$ disminuye cuando aumenta $\omega_L \leq \omega_l^* < \omega_Q$. Deducimos que

$$\max \left\{ \min \left\{ e^{-nD(\omega_Q||\omega_L)} : L \text{ local} \right\} : Q \text{ cuántico} \right\} = e^{-nD(\omega_Q^*||\omega_l^*)}. \quad (180)$$

Por lo tanto, la hipótesis nula nos dice que se sigue un comportamiento local L tal que $\omega_L = \omega_l^*$, y la estrategia para la que diseñemos el experimento debe ser tal que su comportamiento Q cumpla $\omega_Q = \omega_l^*$. El factor de Bayes esperado cumple entonces

$$K_n \approx e^{-nD(\omega_Q^*||\omega_l^*)}. \quad (181)$$

La aproximación que hemos obtenido para el factor de Bayes esperado coincide con la cota aproximada que obtuvimos para el valor p esperado (171). Para ser más conservadores, vamos a trabajar con el factor de Bayes en lugar de con el valor p .

5.3 Factor de Bayes para un juego con post-selección

Otra razón para trabajar con el factor de Bayes en lugar de con el valor p es que con el primero es más sencillo plantear el test de un juego con post-selección ya que no tenemos una cota local para la probabilidad de post-selección y esto hace más difícil interpretar lo que significa “obtener un resultado al menos tan extremo” para este caso.

Supongamos que se realizan n rondas del experimento, de las cuales se produce post-selección en t y se obtiene victoria en k . Supongamos también que admitimos que el factor de Bayes es lo suficientemente pequeño como para descartar la hipótesis nula cuando está por debajo de una tolerancia T . Nuestro objetivo es encontrar una estrategia cuántica Q tal que

$$K_{n,Q} = \max \left\{ \frac{E(t, k | L)}{E(t, k | Q)} : L \text{ comportamiento local} \right\} < T \quad (182)$$

para el menor número n de rondas del experimento posible (estamos escribiendo t y k en lugar de $\hat{t}_n = t$ y $\hat{k}_n = k$ para simplificar la notación).

Desarrollamos $E(t, k | P)$ con P un comportamiento arbitrario:

$$\begin{aligned} E(t, k | P) &= E(k | P, t)E(t | P) \\ &= \binom{n}{t} (\gamma_P^{\text{post}})^t (1 - \gamma_P^{\text{post}})^{n-t} \binom{t}{k} \omega_P^k (1 - \omega_P)^{t-k} \end{aligned} \quad (183)$$

por (164) y (163). Fijado un comportamiento (cuántico) Q ,

$$\begin{aligned}
K_{n,Q} &= \text{máx} \left\{ \frac{\binom{t}{k} \omega_L^k (1 - \omega_L)^{t-k} \binom{n}{t} (\gamma_L^{\text{post}})^t (1 - \gamma_L^{\text{post}})^{n-t}}{\binom{t}{k} \omega_Q^k (1 - \omega_Q)^{t-k} \binom{n}{t} (\gamma_Q^{\text{post}})^t (1 - \gamma_Q^{\text{post}})^{n-t}} : L \text{ local} \right\} \\
&= \text{máx} \left\{ \exp \left(\log \left(\frac{\omega_L^k (1 - \omega_L)^{t-k} (\gamma_L^{\text{post}})^t (1 - \gamma_L^{\text{post}})^{n-t}}{\omega_Q^k (1 - \omega_Q)^{t-k} (\gamma_Q^{\text{post}})^t (1 - \gamma_Q^{\text{post}})^{n-t}} \right) \right) : L \text{ local} \right\} \\
&= \text{máx} \left\{ \exp \left(k \log \left(\frac{\omega_L}{\omega_Q} \right) + (t - k) \log \left(\frac{1 - \omega_L}{1 - \omega_Q} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + t \log \left(\frac{\gamma_L^{\text{post}}}{\gamma_Q^{\text{post}}} \right) + (n - t) \log \left(\frac{1 - \gamma_L^{\text{post}}}{1 - \gamma_Q^{\text{post}}} \right) \right) : L \text{ local} \right\}. \quad (184)
\end{aligned}$$

Bajo la suposición de que la estrategia que se seguirá durante el experimento es Q , para un número de rondas suficientemente grande

$$\frac{k}{t} \approx \omega_Q \quad \text{y} \quad \frac{t}{n} \approx \gamma_Q^{\text{post}}, \quad (185)$$

luego

$$\begin{aligned}
K_{k,Q} &= \text{máx} \left\{ \exp \left(-t \left[\frac{k}{t} \log \left(\frac{\omega_Q}{\omega_L} \right) + \left(1 - \frac{k}{t} \right) \log \left(\frac{1 - \omega_Q}{1 - \omega_L} \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - n \left[\frac{t}{n} \log \left(\frac{\gamma_Q^{\text{post}}}{\gamma_L^{\text{post}}} \right) + \left(1 - \frac{t}{n} \right) \log \left(\frac{1 - \gamma_Q^{\text{post}}}{1 - \gamma_L^{\text{post}}} \right) \right] \right) : L \text{ local} \right\} \\
&\approx \text{máx} \left\{ \exp \left(- \left[tD(\omega_Q || \omega_L) + nD(\gamma_Q^{\text{post}} || \gamma_L^{\text{post}}) \right] \right) : L \text{ local} \right\} \\
&\approx \text{máx} \left\{ \exp \left(-n \left[\gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega_L) + D(\gamma_Q^{\text{post}} || \gamma_L^{\text{post}}) \right] \right) : L \text{ local} \right\} \quad (186)
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que, fijada una estrategia cuántica Q y un número de rondas n , debemos minimizar

$$\gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega_L) + D(\gamma_Q^{\text{post}} || \gamma_L^{\text{post}}) \quad (187)$$

entre todos los posibles comportamientos locales L .

Nuestro problema es, por lo tanto, encontrar un comportamiento cuántico Q que maximice

$$m_Q^* := \text{mín} \left\{ \gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega_L) + D(\gamma_Q^{\text{post}} || \gamma_L^{\text{post}}) : L \text{ local} \right\}. \quad (188)$$

De forma análoga al caso de juegos tradicionales, podríamos intentar definir el valor clásico ω_i^* y el valor cuántico ω_q^* , así como $(\gamma_i^{\text{post}})^*$ y $(\gamma_q^{\text{post}})^*$, de manera que

$$\text{máx} \{ m_Q^* : Q \text{ cuántico} \} = (\gamma_q^{\text{post}})^* D(\omega_q^* || \omega_i^*) + D((\gamma_q^{\text{post}})^* || (\gamma_i^{\text{post}})^*) \quad (189)$$

Sin embargo, la ecuación (189) no sirve como definición porque el conjunto de valores que la cumple no tiene por qué ser único.

De forma general, este problema es difícil de tratar y se queda fuera de los objetivos de este trabajo. Nuestro objetivo es disminuir el número de rondas n necesario para determinar con fiabilidad estadística que el comportamiento del experimento no es local, por lo que nos podemos conformar con encontrar una cota superior de m_Q^* que mejore lo conocido hasta ahora. Esto significa encontrar un

comportamiento cuántico Q para el que (188) sea menor que el máximo que puede llegar a alcanzar con un comportamiento cuántico, pero con el que se cumpla

$$m_Q^* \geq -\frac{1}{n} \log(T), \quad (190)$$

para un número de rondas n cuanto más pequeño mejor. Vamos a trabajar en esto en la siguiente sección.

5.4 Un problema más sencillo

Observamos que la entropía relativa D , definida en (169), es positiva o 0 (cumpliendo $D(\alpha || \beta) = 0$ si y solo si $\alpha = \beta$), luego el segundo término de (187) no puede ser menor que 0. Por lo tanto, fijado un comportamiento cuántico Q , es claro que

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega_L) : L \text{ local} \right\} \\ & \leq \min \left\{ \gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega_L) + D\left(\gamma_Q^{\text{post}} || \gamma_L^{\text{post}}\right) : L \text{ local} \right\} \end{aligned} \quad (191)$$

ya que, si L_1 y L_2 son comportamientos locales tales que

$$\gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \gamma_{L_1}) = \min \left\{ \gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega_L) : L \text{ local} \right\} \quad (192)$$

y

$$\gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \gamma_{L_2}) + D\left(\gamma_Q^{\text{post}} || \gamma_{L_2}^{\text{post}}\right) = \min \left\{ \gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega_L) + D\left(\gamma_Q^{\text{post}} || \gamma_L^{\text{post}}\right) : L \text{ local} \right\} \quad (193)$$

solo puede ser

$$\gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \gamma_{L_1}) \leq \gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \gamma_{L_2}) \quad (194)$$

pues al no tener en cuenta el segundo término de (187) para obtener L_1 , no puede ocurrir que aumente el primero. Entonces, si

$$m_Q := \min \left\{ \gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega_L) : L \text{ local} \right\} \geq -\frac{1}{n} \log(T), \quad (195)$$

para un número de rondas n más pequeño que lo conocido hasta ahora, habremos alcanzado nuestro objetivo.

Razonando igual que en (180), definimos un “pseudo valor clásico”

$$\omega'_i = \max \{ \omega_L : L \text{ local} \} \quad (196)$$

y tenemos que,

$$m_Q = \gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega'_i) \quad \text{si } \omega_Q > \omega'_i. \quad (197)$$

Cuando $\omega_Q < \omega'_i$, siempre podemos encontrar un comportamiento local L tal que $\omega_L = \omega_Q$, anulando $D(\omega_Q || \omega_L)$. En conclusión

$$m_Q = \begin{cases} \gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega'_i) & \text{si } \omega_Q > \omega'_i \\ 0 & \text{si } \omega_Q \leq \omega'_i \end{cases} \quad (198)$$

| | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ |
|---------|----------|----------|----------|---------|---------|
| $d = 2$ | 0,09017 | 0,17455 | 0,23126 | 0,27088 | 0,29995 |
| $d = 3$ | 0,141327 | 0,267769 | 0,348158 | 0,40184 | |
| $d = 4$ | 0,176512 | | | | |
| $d = 5$ | 0,203057 | | | | |
| $d = 6$ | 0,224221 | | | | |
| $d = 7$ | 0,241728 | | | | |

Tabla 2: Probabilidades de Hardy optimizadas [5, 16].

| | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ |
|---------|---------|-----------|-----------|-----------|----------|
| $d = 2$ | 0,01562 | 0,0201648 | 0,0200372 | 0,018776 | 0,017325 |
| $d = 3$ | 0,02449 | 0,0309339 | 0,0301656 | 0,0278534 | |
| $d = 4$ | 0,03058 | | | | |
| $d = 5$ | 0,03518 | | | | |
| $d = 6$ | 0,03885 | | | | |
| $d = 7$ | 0,04188 | | | | |

Tabla 3: $m_P = \gamma_P^{\text{post}} D(\omega_P || \omega'_i)$ para el juego de Hardy con comportamientos de Hardy como los de la tabla 2.

5.5 Algunos números

Podemos ir calculando algunas cantidades. Primero, vamos a calcular la entropía relativa esperada con el juego CHSH cuando se prepara el experimento con una estrategia cuántica óptima

$$D(\omega_q^* || \omega_l^*) = D\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \left\| \frac{3}{4}\right.\right) \approx 0,0321, \quad (199)$$

que es un valor de referencia.

Para comparar la potencia estadística del juego CHSH con la de un juego con post-selección que sigue un comportamiento P , vamos a comparar (199) con m_P , definida en (197). Para el caso del juego de Hardy y un comportamiento de Hardy P , tenemos

$$m_P = \frac{h_P}{2k} D\left(1 \left\| \frac{1}{2}\right.\right) = \frac{h_P}{2k} \log(2), \quad (200)$$

donde h_P es la probabilidad de Hardy de P . En el artículo [5], Chen et al. buscan optimizar la probabilidad del Hardy para escenarios $(2, 2, d, d)$. En [16], Meng et al. la optimizan para escenarios más generales (k, k, d, d) . Recogemos algunos resultados en la tabla 2. En la tabla 3 calculamos las potencias m_P con los datos de la tabla anterior. Observamos que, al variar el número de preguntas k , el mejor valor se alcanza para $k = 3$, no superando (199) ni para $d = 2$ ni para $d = 3$. Al aumentar d con $k = 2$, la potencia m_P también aumenta, superando la del juego CHSH a partir de $d = 5$.

En el artículo [19], Shalm et al. explican su experimento para encontrar evidencias del comportamiento no local, en el cuál consiguieron determinar con fiabilidad estadística la violación de la desigualdad CH. La evidencia estadística la consiguen utilizando un estimador que se corresponde con la probabilidad de obtener el suceso que suma en la desigualdad CH condicionada a que aparece uno de los sucesos de la desigualdad CH. Esta probabilidad es precisamente nuestra probabilidad de victoria del juego de Hardy.

| | 11 | 10 | 01 | 00 | Total |
|----|------|-------|-------|----------|----------|
| 11 | 6378 | 3289 | 3147 | 44336240 | 44349054 |
| 10 | 6794 | 2825 | 23230 | 44311018 | 44343867 |
| 01 | 6486 | 21358 | 2818 | 44302570 | 44333232 |
| 00 | 106 | 27562 | 30000 | 44274530 | 44332198 |

Tabla 4: Frecuencias de los posibles sucesos recogidas en el experimento de Shalm et al. (material suplementario de [19]).

En el experimento preparan un escenario de Bell (2, 2; 2, 2), utilizan la misma probabilidad para los cuatro pares de preguntas posibles, y escogen, según los resultados de una simulación, un estado y unas bases de medida que describen la estrategia cuántica que se pretende que se siga durante el experimento. Por lo tanto, en cada ronda del experimento obtienen un suceso $(a, b, x, y) \in \{0, 1\}$ de entre los 16 sucesos posibles, no solo de entre los cuatro con los que realizan el análisis estadístico. Vamos a utilizar los datos del número de veces que aparece cada suceso para ver la diferencia entre el factor de Bayes cuando consideramos el juego tradicional y cuando consideramos el juego con post-selección.

Las frecuencias de los distintos sucesos se recogen en la tabla 4. El número total de rondas es

$$n = 177358351 \quad (201)$$

Consideramos el juego asociado a la desigualdad

$$S_P^{(4)} = -E_{00} + E_{01} + E_{10} + E_{11} \leq 2, \quad (202)$$

es decir, victoria si $a \neq b$ cuando las preguntas son $x = y = 0$, y si $a = b$ para el resto de preguntas. El número total de victorias es

$$\hat{k}_n = 133023380 \quad (203)$$

Dividiendo el número de casos de victoria entre el número total de rondas, obtenemos la estimación de la probabilidad de victoria

$$\hat{\omega}_n \approx 0,750026030632186 \quad (204)$$

Tomando como hipótesis alternativa $k = 133023380$, podemos calcular el factor de Bayes

$$K = \frac{(0,75)^k (1 - 0,75)^{n-k}}{(k/n)^k (1 - k/n)^{n-k}} = 0,7258011437183434, \quad (205)$$

valor que claramente no permite descartar la hipótesis nula

Si consideramos el juego de Hardy, el número de rondas seleccionadas es

$$\hat{t}_n = 12127, \quad (206)$$

y el número de rondas que ganan

$$\hat{k}_n = 6378, \quad (207)$$

de donde obtenemos la probabilidad de victoria efectiva

$$\hat{\omega}_n \approx 0,5259338665787087 \quad (208)$$

y la probabilidad de post-selección

$$\hat{\gamma}_n \approx 0,000068376. \quad (209)$$

Este último valor nos hace pensar que no buscaron una estrategia que maximizara esta probabilidad. Como la probabilidad de post-selección clásica puede también tomar ese valor, la información relativa

a la post-selección no va a afectar al valor del factor de Bayes. Si asumimos que la hipótesis alternativa es $k = 6378$ y consideramos solo la información de la probabilidad de victoria (como si el experimento se hiciese hasta llegar a un número de rondas seleccionadas $t = 12127$ predefinido), obtenemos el factor de Bayes

$$K = \frac{0,5^k(1-0,5)^{t-k}}{\omega_Q^k(1-\omega_Q)^{t-k}} = 8,174 \cdot 10^{-8} \quad (210)$$

que se puede considerar suficientemente pequeño.

6 Experimentos con fotones

6.1 (In)eficiencia

La eficiencia de los instrumentos de medida es un tema que hay que tratar con especial delicadeza a la hora de realizar un experimento de Bell [17]. Nuestro objetivo en estos experimentos es “medir” no localidad: estudiamos la distribución muestral de los datos tomados por los aparatos de medida que se encuentran a suficiente distancia como para que no pueda haber influencia de uno sobre el otro. Esto es importante para estudiar la ineficiencia en los aparatos por dos razones. La primera es que debemos asumir que el “mejor comportamiento local posible” no es “el mejor comportamiento local posible sin tener en cuenta la eficiencia”. La única característica que se le atribuye a la “naturaleza local” y que buscamos rechazar con el experimento, es precisamente que sea local. La segunda razón es que, conocida la eficiencia real de los aparatos de medida, podemos (y debemos) elegir la estrategia cuántica con la que diseñamos el experimento de modo que, teniendo en cuenta la eficiencia de las medidas, los datos medidos sean muy poco probables de obtener si el comportamiento es local.

La única ineficiencia que vamos a tratar es la pérdida de detecciones. Imaginemos que Alice tiene un detector de fotones (un fotodetector) y una fuente de luz que emite un fotón hacia el detector cada 10 segundos. Sin embargo, Alice se da cuenta de que hay veces que la fuente emite un fotón pero este no es detectado por el fotodetector. Diremos que el detector hace clic cuando detecta un fotón. Entonces, definimos la eficiencia η del detector como la probabilidad de que este haga clic cuando le llega un fotón.

Consideremos un experimento en el escenario $(k, k; 2, 2)$. Que Alice de la respuesta 1 se corresponda con que su detector D_A haga clic, y 0 con que su detector *no* haga clic. Suponemos también que el detector nunca hace clic si no le llega un fotón. Entonces, dado un par de preguntas $(x, y) \in X \times Y$,

$$P(1b|xy) = P(\text{clic}_A b | xy) = P(\text{clic}_A b | xy, \text{photon}_A)P(\text{photon}_A). \quad (211)$$

Asumimos que el hecho de que el detector de Alice haga clic o no cuando le llega un fotón no depende de la respuesta b de Bob ni de las preguntas (x, y) , luego

$$P(1b|xy) = \eta P(b | xy, \text{photon}_A)P(\text{photon}_A) = \eta P(\text{photon}_A b | xy). \quad (212)$$

De modo similar,

$$\begin{aligned} P(0b|xy) &= P(\text{no-clic}_A b | xy) \\ &= P(\text{no-clic}_A b | xy, \text{photon}_A)P(\text{photon}_A) + P(\text{no-clic}_A b | xy, \text{no-photon}_A)P(\text{no-photon}_A) \\ &= (1 - \eta)P(\text{photon}_A b | xy) + P(\text{no-photon}_A b | xy). \end{aligned} \quad (213)$$

Procediendo igual con Bob y su detector B , que suponemos tiene la misma eficiencia η que el

de Alice, llegamos a

$$P(11|xy) = \eta^2 \tilde{P}(11|xy) \quad (214a)$$

$$P(01|xy) = \eta \tilde{P}(01|xy) + \eta(1 - \eta) \tilde{P}(11|xy) \quad (214b)$$

$$P(10|xy) = \eta \tilde{P}(10|xy) + \eta(1 - \eta) \tilde{P}(11|xy) \quad (214c)$$

$$P(00|xy) = \tilde{P}(00|xy) + (1 - \eta) \left(\tilde{P}(01|xy) + \tilde{P}(10|xy) \right) + (1 - \eta)^2 \tilde{P}(11|xy) \quad (214d)$$

donde \tilde{P} es el comportamiento cuando la eficiencia es 1.

Vamos a escribir entonces las probabilidades de victoria y de post-selección del juego de Hardy en función de la eficiencia. La probabilidad de post-selección nos queda

$$\begin{aligned} \gamma_P^{\text{post}}(\eta) &= \frac{1}{4} \left(P(11|11) + P(01|01) + P(10|10) + P(11|00) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\eta^2 \tilde{P}(11|11) + \eta \tilde{P}(01|01) + \eta(1 - \eta) \tilde{P}(11|01) \right. \\ &\quad \left. + \eta \tilde{P}(10|10) + \eta(1 - \eta) \tilde{P}(11|10) + \eta^2 \tilde{P}(11|00) \right) \end{aligned} \quad (215)$$

y la probabilidad de victoria

$$\omega_P(\eta) = \frac{\eta^2 \tilde{P}(11|11)}{\gamma_P^{\text{post}}(\eta)}. \quad (216)$$

En su artículo de 1993 [7], Eberhard encuentra que se puede conseguir violación de la desigualdad CHSH hasta eficiencias mayores que $\eta = \frac{2}{3}$. En [15], Massar y Pironio demuestran en el teorema 1 que no se puede encontrar violación para eficiencias menores de $\frac{2}{3}$.

6.2 Búsqueda de comportamiento cuántico

Vamos a buscar computacionalmente un comportamiento cuántico Q_η que maximiza la potencia estadística $m_Q(\eta)$ (198) del juego de Hardy en el escenario $(2, 2; 2, 2)$ para cada valor de η . Para ello, consideramos una estrategia que consta de un estado

$$|\psi\rangle = \cos(\varphi) |00\rangle + \sin \varphi |11\rangle \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \quad (217)$$

y cuatro bases $\{|A_x^0\rangle, |A_x^1\rangle\} \subset \mathbb{C}^2$ para $x \in \{0, 1\}$ y $\{|B_y^0\rangle, |B_y^1\rangle\} \subset \mathbb{C}^2$ para $y \in \{0, 1\}$, donde

$$|C_z^0\rangle = \cos(\tilde{\theta}_z^C) |0\rangle + \sin(\tilde{\theta}_z^C) |1\rangle \quad (218a)$$

$$|C_z^1\rangle = \cos\left(\tilde{\theta}_z^C + \frac{\pi}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\tilde{\theta}_z^C + \frac{\pi}{2}\right) |1\rangle \quad (218b)$$

para $C = A, B$ y $z = 0, 1$. El comportamiento cuántico que obtendremos será

$$Q(ab|xy) = \left| \langle A_x^a B_y^b | \psi \rangle \right|^2 = \langle \psi | A_x^a B_y^b \rangle \langle A_x^a B_y^b | \psi \rangle. \quad (219)$$

Si definimos los proyectores

$$\hat{A}_x^a = |A_x^a\rangle\langle A_x^a| \quad \text{y} \quad \hat{B}_y^b = |B_y^b\rangle\langle B_y^b| \quad (220)$$

obtenemos

$$P(ab|xy) = \langle \psi | \hat{A}_x^a \otimes \hat{B}_y^b | \psi \rangle. \quad (221)$$

En la base canónica, la matriz asociada a un proyector será

$$\hat{C}_z^c = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\tilde{\theta}_z^C + c\pi/2\right) & \cos\left(\tilde{\theta}_z^C + c\pi/2\right) \sin\left(\tilde{\theta}_z^C + c\pi/2\right) \\ \cos\left(\tilde{\theta}_z^C + c\pi/2\right) \sin\left(\tilde{\theta}_z^C + c\pi/2\right) & \sin^2\left(\tilde{\theta}_z^C + c\pi/2\right) \end{pmatrix}. \quad (222)$$

Utilizando propiedades trigonométricas,

$$\begin{aligned}\hat{C}_z^c &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos(2\tilde{\theta}_z^C + c\pi) & \sin(2\tilde{\theta}_z^C + c\pi) \\ \sin(2\tilde{\theta}_z^C + c\pi) & 1 - \cos(2\tilde{\theta}_z^C + c\pi) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^c \cos(2\tilde{\theta}_z^C) & (-1)^c \sin(2\tilde{\theta}_z^C) \\ (-1)^c \sin(2\tilde{\theta}_z^C) & 1 - (-1)^c \cos(2\tilde{\theta}_z^C) \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (223)$$

Para simplificar la notación, definimos $\theta_z^C = 2\tilde{\theta}_z^C$.

Por lo tanto, fijado $\eta \in [\frac{2}{3}, 1]$, vamos a buscar los cinco parámetros $(\varphi, \theta_0^A, \theta_1^A, \theta_0^B, \theta_1^B)$ que maximizan el valor

$$m_Q(\eta) = \begin{cases} \gamma_Q^{\text{post}}(\eta) D(\omega_Q(\eta) || \omega'_i) & \text{si } \omega_Q > \omega'_i \\ 0 & \text{si } \omega_Q \leq \omega'_i, \end{cases}\quad (224)$$

con $\gamma_Q^{\text{post}}(\eta)$ definida en (215) y $\omega_Q(\eta)$ en (216). Para ello, aplicamos el método del descenso de gradiente a $-m_Q(\eta)$. A los máximos valores de probabilidad de victoria y probabilidad de post-selección encontrados con estrategias de la forma (217), (218) los denotamos por $\bar{\omega}_Q$ y $\bar{\gamma}_P^{\text{post}}$, respectivamente.

Queremos ver si nuestro resultado disminuye el número de rondas necesario para determinar comportamiento no local con respecto a buscarlo con juego CHSH. Por lo tanto, vamos a comparar $m_Q(\eta)$ con

$$D(\omega_Q^{\text{CHSH}}(\eta) || (\omega_i^{\text{CHSH}})^*)\quad (225)$$

para un comportamiento cuántico $Q^{\text{CHSH}}(\eta)$ que maximice (225). Como $D(\omega_Q^{\text{CHSH}}(\eta) || (\omega_i^{\text{CHSH}})^*)$ crece con ω_Q^{CHSH} cuando es mayor que $(\omega_i^{\text{CHSH}})^*$. En el artículo [9], Gigena et al. maximizan de forma analítica la violación de la desigualdad CHSH en función de la eficiencia. En el teorema 1, demuestran que, para el caso de la misma eficiencia en ambos detectores, este máximo se relaciona con la máxima raíz real del polinomio de cuarto grado

$$f(\lambda) = \lambda^4 + (4 - \alpha^2)\lambda^3 + \left(\frac{11}{4}\alpha^4 - 12\alpha^2 - 4\right)\lambda^2 + (2\alpha^6 - \alpha^4 - 20\alpha^2 - 32)\lambda + 5\alpha^6 - 21\alpha^4 + 16\alpha^2 - 32,\quad (226)$$

donde

$$\alpha = \frac{2(1 - \eta)}{\eta}.\quad (227)$$

Si c es la máxima raíz real del polinomio en λ (226), el máximo que puede alcanzar $S_Q^{(1)}(\eta)$ es

$$S_Q^{(1)}(\eta) = \eta^2 c + 2(1 - \eta)^2.\quad (228)$$

Utilizando (52), tenemos

$$\omega_Q^{\text{CHSH}}(\eta) = \frac{S_Q^{(1)}(\eta) + 4}{8}.\quad (229)$$

Mostramos las gráficas de $m_Q(\eta)$ y $D(\omega_Q^{\text{CHSH}}(\eta) || (\omega_i^{\text{CHSH}})^*)$ en la figura 1. Vemos que alrededor del valor de eficiencia $\eta \approx 0,8$, la gráfica de $m_Q(\eta) = \gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega'_i)$ está por encima de la del caso del juego CHSH. Para comparar las tendencias de ambas, mostramos también el ratio

$$r = \frac{\gamma_Q^{\text{post}} D(\omega_Q || \omega'_i)}{D(\omega_Q^{\text{CHSH}}(\eta) || (\omega_i^{\text{CHSH}})^*)}\quad (230)$$

en la figura 2.

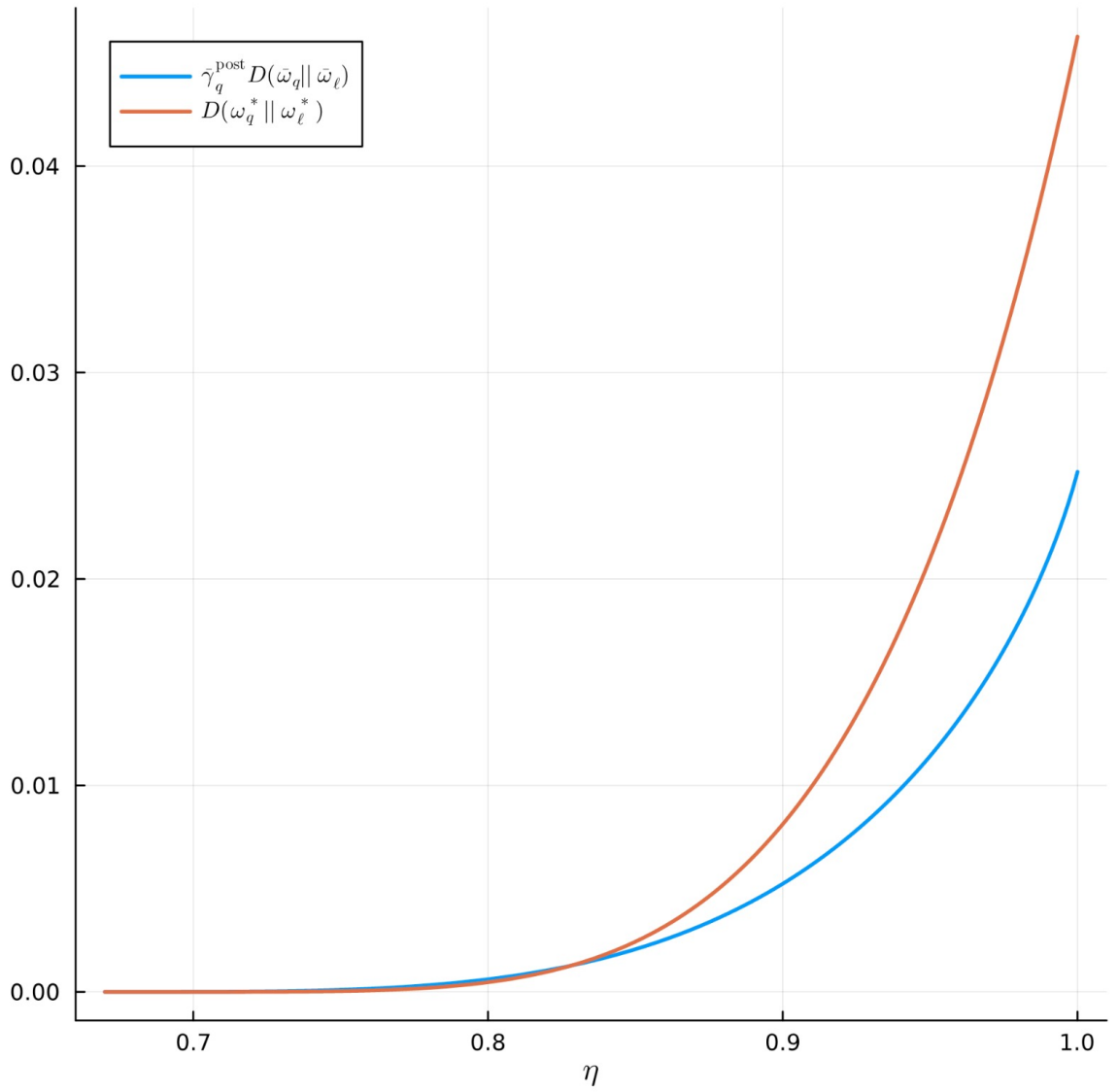


Figura 1: Potencia contra eficiencia de detección. En la gráfica azul se muestra la máxima potencia encontrada computacionalmente para el juego de Hardy en el escenario $(2, 2, 2, 2)$ con una estrategia de la forma eqs. (217) and (218). En la gráfica marrón, la máxima potencia que se puede encontrar para el juego CHSH.

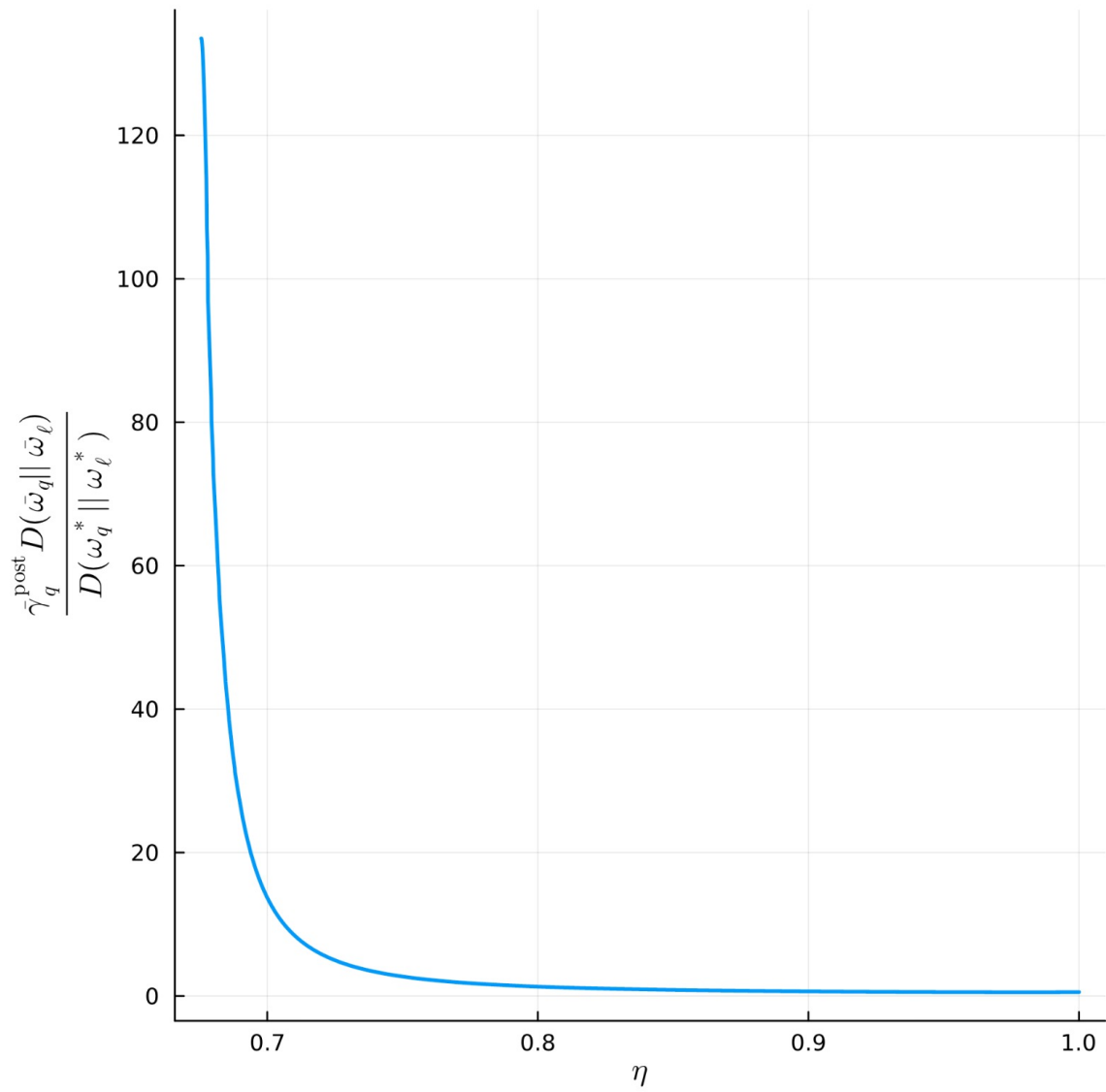


Figura 2: Ratio de la potencia máxima del juego de Hardy con estrategia de la forma (217), (218) en el escenario (2, 2, 2, 2) con respecto a la máxima potencia del juego CHSH, en función de la eficiencia de detección.

7 Conclusiones

En este trabajo hemos introducido un nuevo tipo de juegos no-locales, los juegos con post-selección. Hemos estudiado su teoría, descubriendo cómo computar sus cotas locales, y hemos traducido varias versiones de la paradoja de Hardy en términos de juegos no-locales. También hemos reinterpretado el análisis estadístico de los datos de un experimento de Bell libre de loopholes en términos de un juego con post-selección, demostrando que permite un rechazo conclusivo de las teorías de variables ocultas locales, lo que no sería posible con un juego no-local tradicional.

Referencias

- [1] Mateus Araújo, Flavien Hirsch y Marco Túlio Quintino. “Bell nonlocality with a single shot”. En: *Quantum* 4 (2020), pág. 353.
- [2] Alain Aspect, Philippe Grangier y Gérard Roger. “Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: a new violation of Bell’s inequalities”. En: *Physical review letters* 49.2 (1982), pág. 91.
- [3] Danilo Boschi et al. “Ladder proof of nonlocality without inequalities: Theoretical and experimental results”. En: *Physical review letters* 79.15 (1997), pág. 2755.
- [4] Stephen Boyd y Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [5] Jing-Ling Chen et al. “Hardy’s paradox for high-dimensional systems”. En: *Physical Review A* 88.6 (2013), pág. 062116.
- [6] John F Clauser y Michael A Horne. “Experimental consequences of objective local theories”. En: *Physical review D* 10.2 (1974), pág. 526.
- [7] Philippe H Eberhard. “Background level and counter efficiencies required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment”. En: *Physical Review A* 47.2 (1993), R747.
- [8] Arthur Fine. “Hidden variables, joint probability, and the Bell inequalities”. En: *Physical Review Letters* 48.5 (1982), pág. 291.
- [9] Nicolas Gigena et al. “Robust self-testing of Bell inequalities tilted for maximal loophole-free nonlocality”. En: *arXiv preprint arXiv:2405.08743* (2024).
- [10] Lucien Hardy. “A bigger contradiction between quantum theory and locality for two particles without inequalities”. En: *New Developments on Fundamental Problems in Quantum Physics* (1997), págs. 163-170.
- [11] Lucien Hardy. “Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states”. En: *Physical Review Letters* 71.11 (1993), pág. 1665.
- [12] Wassily Hoeffding. “Probability inequalities for sums of bounded random variables”. En: *The collected works of Wassily Hoeffding* (1994), págs. 409-426.
- [13] Emmanuel Lesaffre y Andrew B Lawson. *Bayesian biostatistics*. John Wiley & Sons, 2012, págs. 46-81.
- [14] Ll Masanes. “Extremal quantum correlations for N parties with two dichotomic observables per site”. En: *arXiv preprint quant-ph/0512100* (2005).
- [15] Serge Massar y Stefano Pironio. “Violation of local realism versus detection efficiency”. En: *Physical Review A* 68.6 (2003), pág. 062109.
- [16] Hui-Xian Meng et al. “Hardy’s paradox for multisetting high-dimensional systems”. En: *Physical Review A* 98.6 (2018), pág. 062103.
- [17] Marco Tulio Coelho Quintino. “Black box correlations: Locality, noncontextuality, and convex polytopes”. En: (2012).
- [18] Valerio Scarani. *Bell nonlocality*. Oxford University Press, 2019.

- [19] Lynden K. Shalm et al. “Strong Loophole-Free Test of Local Realism”. En: *Physical Review Letters* 115.25 (dic. de 2015). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.115.250402](https://doi.org/10.1103/physrevlett.115.250402). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.250402>.