

**Universidad de Valladolid**  
Facultad de Ciencias

Trabajo de Fin de Grado  
Grado en Matemáticas

**Puntos de inflexión de superficies  
algebraicas, un enfoque moderno  
del trabajo de Salmon.**

Autor: Jorge Rodríguez Pérez  
Tutor: Philippe Gimenez

## Resumen

Este trabajo se enfoca en proporcionar un marco teórico actualizado para el cálculo de Clebsch, abordando los casos límite y formalizando el método simbólico utilizado por Clebsch y Salmon. Se formaliza el método simbólico utilizando álgebra multilineal, se revisan las propiedades de los determinantes en anillos, y se introducen conceptos de geometría algebraica para estudiar puntos de inflexión. Finalmente, se presenta una prueba rigurosa del cálculo de Clebsch para obtener una expresión cerrada del polinomio de Salmon.

**Palabras clave:** G. Salmon, A. Clebsch, puntos de inflexión, geometría algebraica, método simbólico

## Abstract

This work focuses on providing an updated theoretical framework for Clebsch's calculation, addressing limit cases and formalizing the symbolic method used by Clebsch and Salmon. The symbolic method is formalized using multilinear algebra, properties of determinants in rings are reviewed, and concepts of algebraic geometry are introduced to study inflection points. Finally, a rigorous proof of Clebsch's calculation is presented to obtain a closed expression for Salmon's polynomial.

**Keywords:** G. Salmon, A. Clebsch, inflection points, algebraic geometry, symbolic method

*Quiero expresar mi agradecimiento a mi tutor, Philippe Gimenez, por su orientación,  
paciencia y apoyo durante todos mis estudios de grado.  
A Carlos D'Andrea y Juan Carlos Naranjo por su ayuda en los inicios de este trabajo.  
Y a mi familia y amigos por su compañía y fé en mí.*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Polinomios homogéneos . . . . .	3
2.2. Álgebra multilineal . . . . .	8
2.3. Método simbólico . . . . .	12
2.4. Aplicación de polaridad . . . . .	15
2.5. Determinantes . . . . .	19
2.5.1. Determinantes orlados . . . . .	26
<b>3. Geometría algebraica</b>	<b>30</b>
3.1. Conjuntos algebraicos y topología de Zariski . . . . .	30
3.2. Componentes irreducibles . . . . .	36
3.3. Dimensión . . . . .	39
3.4. Multiplicidad de intersección con una recta . . . . .	41
3.4.1. Hipersuperficies . . . . .	42
<b>4. Cálculo de Clebsch</b>	<b>48</b>
4.1. Puntos singulares . . . . .	48
4.2. Expresión cerrada . . . . .	49
4.3. Eliminación de los planos $\alpha$ y $\beta$ . . . . .	52
4.4. Factorización del plano $g$ . . . . .	55
4.5. Conjunto de puntos de inflexión . . . . .	60
<b>5. Implementación en Sage</b>	<b>64</b>
5.1. Aplicación de polaridad . . . . .	64
5.2. Puntos de inflexión . . . . .	66

# Capítulo 1

## Introducción

La geometría algebraica es el campo de las matemáticas que estudia los conjuntos determinados por soluciones de sistemas de ecuaciones polinomiales. Estos conjuntos definen lo que se conoce como variedades algebraicas, afines o proyectivas, dependiendo del espacio ambiente donde se estudian las soluciones. Este campo experimentó un periodo de esplendor en el siglo XIX, gracias a matemáticos como Laguerre, Cayley, Klein, Riemann, Hilbert o Clebsch. En este marco se sitúa el concepto de punto de inflexión, que da título a este trabajo.

Un punto de una superficie algebraica es un punto de inflexión si existe una recta que pasa por él que tiene multiplicidad de intersección al menos 4 con la superficie. Se trata de una generalización del concepto de punto de inflexión de una curva. El estudio de los puntos de inflexión de curvas y superficies fue tratado por Monge, Salmon y Cayley, entre otros.

George Salmon, matemático y teólogo irlandés, probó en 1849 que para una superficie algebraica de grado  $d$  mayor o igual que 3, existe un polinomio homogéneo de grado  $11d - 24$  que determina sus puntos de inflexión. Además, proporcionó un algoritmo para calcularlo, obteniendo una ecuación de “forma poco conveniente”, según él mismo afirma en [19]. Alfred Clebsch proporcionó en 1861 un cálculo para obtener el polinomio de Salmon de una forma más elegante ([7]). Salmon ([19]), en su libro «*A treatise on the analytic geometry of three dimensions*» de 1862, sustituyó su propio cálculo del polinomio por el realizado por Clebsch.

El resultado más conocido de Salmon es el hecho de que un cúbica no singular contiene exactamente 27 rectas, y fue desarrollado en correspondencia con Cayley. El número de rectas contenidas en una superficie, está acotado por una expresión relacionada con el grado del polinomio de Salmon, que sigue siendo de interés en la actualidad y citado en trabajos recientes ([10], [17], [6]).

Al igual que hace Salmon en [19], nos referiremos en este trabajo por el nombre de cálculo de Clebsch al proceso por el que este matemático obtuvo la expresión del polinomio de grado  $11d - 24$  previamente calculado por Salmon. Como era típico de la época, ni Salmon ni Clebsch mostraron una gran preocupación por el rigor en sus cálculos. Esto, unido al empleo de técnicas caídas en desuso y a la anticuada notación utilizada en sus publicaciones, hace del cálculo de Clebsch un resultado que no se comprende completamente en la actualidad. De hecho, János Kollár ([14]), profesor de la Universidad de Princeton, trató de construir en 2014 el polinomio de Salmon, consiguiendo, sin embargo,

un polinomio de grado  $11d - 18$ , superior al que Salmon afirma que debería tener.

El propósito principal de este trabajo es proporcionar un marco teórico actual al cálculo de Clebsch, para lo que seguiremos sus pasos, poniendo especial cuidado en los casos límite que haya podido pasar por alto, por la falta de rigor antes mencionada.

Una técnica fundamental en el razonamiento de Clebsch es el método simbólico. Desarrollado por Cayley, Aronhold, Clebsch y Gordan, consiste en un algoritmo para operar con polinomios homogéneos introduciendo unos símbolos con determinadas propiedades que permiten compactar la notación. Este método, tal y como lo usan Clebsch y Salmon, no está formalizado y los símbolos utilizados no tienen una base matemática rigurosa. Por ese motivo, en primer lugar, formalizaremos el método simbólico utilizando álgebra multilineal de forma similar a [9]. Esta formalización del método simbólico será fundamental de cara a obtener el propósito de este trabajo y proporcionará rigor a la demostración de Clebsch.

Gran parte del proceso a seguir consiste en trabajar con determinantes que involucran estos símbolos. Esto, como veremos más adelante, nos obliga a considerar determinantes en anillos. Por este motivo, haremos una revisión de las propiedades de los determinantes basándonos en [15].

A continuación, recogeremos los conceptos de geometría algebraica necesarios para dar un sentido actual a la noción de punto de inflexión. Veremos cómo este tipo de propiedades locales pueden estudiarse mediante el uso de unas superficies que denominaremos polares.

Una vez abordados estos preliminares, estaremos en condiciones de proporcionar una prueba rigurosa del cálculo de Clebsch, que nos permitirá obtener una expresión cerrada para el polinomio de Salmon. Además, el polinomio obtenido tiene grado  $11d - 24$ , lo que es coherente con el resultado de Salmon. Este trabajo finaliza con la implementación en SageMath de un código que permite calcular el polinomio resultante.

Busé et al. en [5] obtienen una fórmula en términos de resultantes de varias variables para el conjunto de puntos de inflexión de una hipersuperficie proyectiva, generalizando el resultado clásico de Salmon desarrollado para superficies en  $\mathbb{P}^3$ . Dicha fórmula no tiene una expresión cerrada, por lo que deja abierta la generalización del cálculo de Clebsch a dimensión mayor que 3.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Polinomios homogéneos

El principal propósito de esta sección es enunciar y demostrar un teorema que nos permitirá calcular la derivada formal de un polinomio en un punto, como la evaluación parcial de una forma multilineal, la denominada forma polar del polinomio. La existencia de la forma polar del polinomio sentará las bases del método simbólico, que resultará imprescindible en la modernización del cálculo de Clebsch llevada a cabo en este trabajo. En el camino hacia la demostración de este teorema, obtendremos caracterizaciones de los polinomios homogéneos en términos de funciones y de aplicaciones multilineales.

Por otra parte, en el estudio de hipersuperficies en el espacio proyectivo, el que  $\mathbb{C}$  sea algebraicamente cerrado jugará un papel esencial, por lo que hemos optado por fijar el cuerpo de los números complejos desde el inicio, aunque muchos de los resultados que se tratarán en la sección son aplicables a polinomios con coeficientes en otros cuerpos.

Comenzamos la sección introduciendo el concepto de polinomio homogéneo.

**Definición 2.1.1.** Se dice que un polinomio  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  es homogéneo de grado  $d$  si todos sus monomios son de grado  $d$ , es decir, si

$$f(X_0, \dots, X_n) = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0, \dots, i_n} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n} \quad (2.1)$$

con  $a_{i_0, \dots, i_n} \in \mathbb{C}$ ,  $\forall i_0, \dots, i_n \in \{0, 1, 2, \dots, d\}$ . A lo largo de este trabajo, denotaremos por  $f(\mathbf{X}) = f(X_0, \dots, X_n)$ .

A continuación, vamos a presentar algunos resultados necesarios para obtener otras caracterizaciones de los polinomios homogéneos de grado  $d$ . Para la primera caracterización se sigue [25].

**Lema 2.1.2.** Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ . El polinomio  $f$  es homogéneo de grado  $d$  si y solo si se verifica  $f(ZX_0, \dots, ZX_n) = Z^d f(\mathbf{X})$  como polinomios en  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n, Z]$ .

*Demostración.* La implicación hacia la derecha resulta evidente a partir de la Definición 2.1.1. Veamos la otra implicación.

Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio de grado  $k$ , con  $f(ZX_0, \dots, ZX_n) = Z^d f(\mathbf{X})$ . Agrupando los monomios del mismo grado, podemos escribir

$$f = f_0 + \cdots + f_k \quad (2.2)$$

donde  $f_i$  es un polinomio homogéneo de grado  $i$ .

La implicación hacia la derecha dice que para cada  $f_i$ , con  $i \in \{1, \dots, k\}$ , se verifica  $f_i(ZX_0, \dots, ZX_n) = Z^i f_i(\mathbf{X})$ , por tratarse de polinomios homogéneos, entonces

$$f(ZX_0, \dots, ZX_n) = f_0(\mathbf{X}) + \dots + Z^k f_k(\mathbf{X}) = Z^d f(\mathbf{X}).$$

Puesto que los polinomios coinciden como polinomios en  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n][Z]$ , sus coeficientes han de ser iguales, luego  $f_i(\mathbf{X}) = 0$ ,  $\forall i \in 0, \dots, k$  con  $i \neq d$ , y  $f_d(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})$ . Por lo que  $f(\mathbf{X})$  es un polinomio homogéneo de grado  $d$ . En particular,  $k = d$ .  $\square$

Hay que tener en cuenta que no es lo mismo hablar de un polinomio que de la función que define al evaluarlo. Si dos polinomios son iguales, la función que definen coincide, pero el recíproco es en general falso. La siguiente proposición, de la que se puede encontrar una demostración en [16], nos dice que, en condiciones muy generales, la igualdad como funciones implica la igualdad como polinomios. No entraremos en los detalles de la demostración.

**Proposición 2.1.3.** *Sea  $R$  un dominio de integridad y sea  $S \subset R$  infinito. Dado un polinomio en  $n$  variables  $f \in R[\mathbf{X}]$  no nulo, existe  $\mathbf{b} \in S^n$  tal que  $f(\mathbf{b}) \neq 0$ .*

De esta proposición se deduce inmediatamente el resultado que nos permitirá identificar un polinomio homogéneo  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  con su función polinomial. Como  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  es un dominio de integridad porque  $\mathbb{C}$  lo es y  $\mathbb{C}$  es infinito, denotando por  $R = \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  y por  $S = \mathbb{C}$  se cumplen las hipótesis del Lema 2.1.2, lo que nos proporciona el siguiente resultado.

**Corolario 2.1.4.** *Dos polinomios  $f, g \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  son iguales si y solo si las funciones polinomiales definidas por ellos son iguales.*

**Notación 2.1.5.** A lo largo de todo el trabajo, dado un polinomio  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ , denotaremos también por  $f$  a la función polinomial  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  definida al evaluarlo.

A partir de estos resultados, podemos demostrar fácilmente el siguiente resultado, que proporciona la caracterización de un polinomio  $f$  homogéneo de grado  $d$ .

**Proposición 2.1.6.** *Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio de grado  $d$ .  $f$  es homogéneo de grado  $d$  si y solo si  $f(\lambda\mathbf{X}) = \lambda^d f(\mathbf{X})$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Evidentemente, si  $f$  es homogéneo de grado  $d$ , de la definición de polinomio homogéneo, se tiene que  $f(\lambda\mathbf{X}) = \lambda^d f(\mathbf{X})$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ , por lo que se cumple la implicación hacia la derecha.

Veamos que la implicación contraria es consecuencia de los resultados anteriores.

Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  tal que para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  se cumple que  $f(\lambda\mathbf{X}) - \lambda^d f(\mathbf{X}) = 0$ . Consideremos los polinomios  $f(Z\mathbf{X})$  y  $Z^d f(\mathbf{X})$  en  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n][Z]$ , por el Corolario 2.1.4, la igualdad como funciones, dada por hipótesis, justifica la igualdad de ambos polinomios. Por tanto, por el Lema 2.1.2,  $f$  es homogéneo de grado  $d$ .  $\square$

La Proposición 2.1.6 proporciona la caracterización más habituales de los polinomios homogéneos. Sin embargo, para nuestros propósitos, también resultará de utilidad verlos como aplicaciones multilineales como hace Bochnak en [3]. Este enfoque coincide con el

usualmente empleado en el estudio de las cuádras como aplicaciones bilineales y permite emplear toda la potencia de las herramientas del álgebra lineal. Los resultados que se prueban a continuación nos permitirán generalizar este planteamiento para polinomios homogéneos de grado mayor que 2.

En primer lugar introduciremos el concepto de forma  $d$ -lineal simétrica ya que será el tipo de aplicación multilineal que nos proporcionará la siguiente caracterización de un polinomio homogéneo de grado  $d$ .

**Definición 2.1.7.** Sea  $d \in \mathbb{N}$ . Una aplicación  $\phi: (\mathbb{C}^{n+1})^d \rightarrow \mathbb{C}$  es una forma  $d$ -lineal simétrica si es lineal en cada componente y dada  $\sigma \in S_d$ , una permutación de  $d$  elementos, se verifica que

$$\phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) = \phi(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(d)}), \quad \forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

**Definición 2.1.8.** Dado  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio de grado  $d$ , se denomina forma polar de  $f$  a una forma  $d$ -lineal simétrica,  $\tilde{f}: (\mathbb{C}^{n+1})^d \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que

$$f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Una forma polar de  $f$ , de existir, determina de forma unívoca el polinomio, ya que lo determina como función. El siguiente resultado, demuestra que es condición necesaria y suficiente para la existencia de una forma polar el que  $f$  sea homogéneo.

**Teorema 2.1.9.** Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio de grado  $d$ . Son equivalentes:

1.  $f$  es homogéneo.
2. Existe una única forma  $d$ -lineal simétrica,  $\tilde{f}: (\mathbb{C}^{n+1})^d \rightarrow \mathbb{C}$  con  $f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$ , es decir, existe una única forma polar de  $f$ .

*Demostración.* Supongamos que se verifica la segunda condición, entonces, de la linealidad de  $\tilde{f}$  se tiene que  $f(\lambda \mathbf{x}) = \tilde{f}(\lambda \mathbf{x}, \dots, \lambda \mathbf{x}) = \lambda^d \tilde{f}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) = \lambda^d f(\mathbf{x})$ . Por tanto, la Proposición 2.1.6 nos permite concluir que  $f$  es homogéneo de grado  $d$ .

Para demostrar la implicación contraria, veamos en primer lugar que si  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$ , y  $\phi: (\mathbb{C}^{n+1})^d \rightarrow \mathbb{C}$  es una forma  $d$ -lineal simétrica cualquiera, entonces

$$\phi(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} \frac{d!}{i_0! \dots i_n!} \phi(\overbrace{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_0}^{i_0}, \dots, \overbrace{\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_n}^{i_n}) x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} \quad (2.3)$$

con  $\{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Esta notación se mantendrá a lo largo de todo el trabajo.

Probaremos este resultado por inducción sobre  $d$ .

En el caso  $d = 1$ ,  $\phi$  es una aplicación lineal, por tanto se verifica que

$$\phi(\mathbf{x}) = x_0 \phi(\mathbf{e}_0) + \dots + x_n \phi(\mathbf{e}_n).$$

Supongamos ahora que  $d \geq 2$  y que para todas las formas  $(d-1)$ -lineales simétricas se verifica (2.3) entonces, por la linealidad de  $\phi$  en la primera componente y por hipótesis

de inducción se verifica

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) &= x_0 \phi(\mathbf{e}_0, \overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^{d-1}) + \dots + x_n \phi(\mathbf{e}_n, \overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^{d-1}) \\
&= x_0 \sum_{i_0 + \dots + i_n = d-1} \frac{(d-1)!}{i_0! \dots i_n!} \phi(\mathbf{e}_0, \overbrace{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_0}^{i_0}, \dots, \overbrace{\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_n}^{i_n}) x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} \\
&\quad + \dots + x_n \sum_{i_0 + \dots + i_n = d-1} \frac{(d-1)!}{i_0! \dots i_n!} \phi(\mathbf{e}_n, \overbrace{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_0}^{i_0}, \dots, \overbrace{\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_n}^{i_n}) x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}
\end{aligned}$$

Como  $\phi$  es simétrica, podemos reordenar los elementos de la base canónica con el fin de agrupar los que son iguales.

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) &= \sum_{i_0 + \dots + i_n = d-1} \frac{(d-1)!}{i_0! \dots i_n!} \phi(\overbrace{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_0}^{i_0+1}, \dots, \overbrace{\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_n}^{i_n}) x_0^{i_0+1} \dots x_n^{i_n} \\
&\quad + \dots + \sum_{i_0 + \dots + i_n = d-1} \frac{(d-1)!}{i_0! \dots i_n!} \phi(\overbrace{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_0}^{i_0}, \dots, \overbrace{\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_n}^{i_n+1}) x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n+1}
\end{aligned}$$

A continuación, realizamos un cambio en el nombre del índice renombrando como  $i_j$  a  $i_j + 1$  en todos los sumatorios.

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) &= \sum_{\substack{i_0 + \dots + i_n = d \\ i_0 > 0}} \frac{(d-1)!}{(i_0-1)! \dots i_n!} \phi(\overbrace{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_0}^{i_0}, \dots, \overbrace{\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_n}^{i_n}) x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} \\
&\quad + \dots + \sum_{\substack{i_0 + \dots + i_n = d \\ i_n > 0}} \frac{(d-1)!}{i_0! \dots (i_n-1)!} \phi(\overbrace{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_0}^{i_0}, \dots, \overbrace{\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_n}^{i_n}) x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} =
\end{aligned}$$

Podemos eliminar la condición  $i_j > 0$ , expresando el resultado de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} \left( i_0 \frac{(d-1)!}{i_0! \dots i_n!} + \dots + i_n \frac{(d-1)!}{i_0! \dots i_n!} \right) \phi(\overbrace{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_0}^{i_0}, \dots, \overbrace{\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_n}^{i_n}) x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} \\
&= \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} \frac{d!}{i_0! \dots i_n!} \phi(\overbrace{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_0}^{i_0}, \dots, \overbrace{\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_n}^{i_n}) x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}.
\end{aligned}$$

Probemos ahora que si se verifica la primera condición también se cumple la segunda. Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ . Por la Definición 2.1.1 se puede escribir

$$f = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0, \dots, i_n} X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n}.$$

Como una aplicación multilinear queda unívocamente determinada por la imagen de la base canónica, podemos definir  $\tilde{f}$ , como aquella que verifica

$$\tilde{f}(\overbrace{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_0}^{i_0}, \dots, \overbrace{\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_n}^{i_n}) = \frac{i_0! \dots i_n!}{d!} a_{i_0, \dots, i_n}.$$

Entonces, por la ecuación (2.3),  $\tilde{f}$  es una forma polar de  $f$ , y por construcción es única.  $\square$

Por la Proposición 2.1.3, como la forma multilineal  $\tilde{f}$  nos proporciona toda la información necesaria de  $f$  como función, también nos permite caracterizar  $f$  como polinomio. Esta representación de  $f$  resulta muy útil a la hora de trabajar con las derivadas de  $f$ . Veamos primero cómo derivar una forma multilineal simétrica.

**Proposición 2.1.10.** Sean  $\phi: (\mathbb{C}^{n+1})^d \rightarrow \mathbb{C}$  una forma  $d$ -lineal simétrica y  $\bar{\phi}: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  la aplicación definida por  $\bar{\phi}(\mathbf{x}) = \phi(\overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^d)$ . Entonces, dados  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$  y  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq d$ , se verifica

$$\frac{\partial^k \bar{\phi}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{p}) = \frac{d!}{(d-k)!} \phi(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-k}, \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}).$$

*Demostración.* Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Vamos a probar el resultado por inducción sobre  $d$ .

Si  $d = 1$ , en virtud de la igualdad  $\bar{\phi}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) = x_0\phi(\mathbf{e}_0) + \cdots + x_n\phi(\mathbf{e}_n)$ , tenemos

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \phi(\mathbf{e}_i).$$

Supongamos ahora que  $d \geq 2$  y que el resultado es cierto para  $d-1$ . Sea  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq d$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \bar{\phi}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{p}) &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_{i_k}} \right) (\mathbf{p}) \\ &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} \left( \phi(\mathbf{e}_{i_k}, \overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^{d-1}) + \phi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{i_k}, \overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^{d-2}) + \cdots \right) (\mathbf{p}) \\ &= d \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} \left( \phi(\overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^{d-1}, \mathbf{e}_{i_k}) \right) (\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Como  $\phi(\overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^{d-1}, \mathbf{e}_{i_k})$  es una forma  $(d-1)$ -lineal simétrica a la que podemos aplicar la hipótesis de inducción, entonces,

$$\frac{\partial^k \bar{\phi}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{p}) = d \frac{(d-1)!}{(d-k)!} \phi(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-k}, \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_{k-1}}, \mathbf{e}_{i_k})$$

como queríamos probar. □

**Corolario 2.1.11.** Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ , y  $\tilde{f}$  su forma polar. Entonces, dados  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$  y  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq d$ , se verifica

$$\frac{\partial^k f}{\partial X_{i_1} \cdots \partial X_{i_k}}(\mathbf{p}) = \frac{d!}{(d-k)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-k}, \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}).$$

Esta propiedad será muy útil para estudiar propiedades locales de las hipersuperficies proyectivas más adelante, ya que nos permitirá calcular derivadas como evaluaciones parciales de una forma multilineal. Esto nos lleva a desarrollar algunas herramientas de álgebra multilineal imprescindibles para nuestro propósito.

## 2.2. Álgebra multilineal

Esta sección recoge una selección de los principales resultados de álgebra multilineal que se emplearán en los capítulos finales de este trabajo. Para su redacción hemos seguido, principalmente, a Curtis [8], [12] y Lang [15].

En esta sección supondremos que  $k$  es un cuerpo.

Nuestro objetivo es dotar de estructura a las  $d$ -tuplas de vectores de forma que sus operaciones sean compatibles con las propiedades de la aplicación multilineal dada por la forma polar del polinomio. Para ello, en primer lugar, introduciremos la noción de producto tensorial a partir del siguiente teorema, siguiendo el desarrollo que podemos encontrar en [8].

**Teorema 2.2.1.** *Sean  $V_1, \dots, V_d$   $k$ -espacios vectoriales. Existen un  $k$ -espacio vectorial  $V_1 \otimes \dots \otimes V_d$  y una aplicación  $d$ -lineal  $t: V_1 \times \dots \times V_d \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_d$  tales que  $V_1 \otimes \dots \otimes V_d$  está generado por la imagen de  $t$ . Además, dados un  $k$ -espacio vectorial  $W$  y una aplicación  $d$ -lineal  $\phi: V_1 \times \dots \times V_d \rightarrow W$ , existe una aplicación lineal  $\lambda: V_1 \otimes \dots \otimes V_d \rightarrow W$  que hace el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_d & \xrightarrow{t} & V_1 \otimes \dots \otimes V_d \\ & \searrow \phi & \downarrow \lambda \\ & & W \end{array}$$

El  $k$ -espacio vectorial  $V_1 \otimes \dots \otimes V_d$  es único salvo isomorfismo.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de funciones  $f: V_1 \times \dots \times V_d \rightarrow k$  con  $f(v_1, \dots, v_d) = 0$ , para toda tupla  $(v_1, \dots, v_d) \in V_1 \times \dots \times V_d$ , salvo un número finito de ellas. Dadas  $f, f' \in \mathcal{F}$  y  $\alpha \in k$ , consideramos en  $\mathcal{F}$  las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} (f + f')(v_1, \dots, v_d) &= f(v_1, \dots, v_d) + f'(v_1, \dots, v_d), \\ (\alpha f)(v_1, \dots, v_d) &= \alpha f(v_1, \dots, v_d). \end{aligned}$$

Entonces,  $f + f'$  es no nula en, a lo sumo, la unión de las tuplas en las que  $f$  y  $f'$  son no nulas, que es un conjunto finito, por lo que  $f + f' \in \mathcal{F}$ . Además, si  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha f$  es no nula en las mismas tuplas que  $f$ , luego  $\alpha f \in \mathcal{F}$ . Por tanto,  $\mathcal{F}$ , con estas operaciones, es un  $k$ -espacio vectorial.

Dados  $v_i \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , sea  $(v_1 * \dots * v_d)$  la función de  $\mathcal{F}$  definida por

$$(v_1 * \dots * v_d)(x_1, \dots, x_d) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_1, \dots, x_d) = (v_1, \dots, v_d), \\ 0 & \text{si } (x_1, \dots, x_d) \neq (v_1, \dots, v_d). \end{cases}$$

Sea  $Y$  el subespacio de  $\mathcal{F}$  generado por todas las funciones de la forma

$$\begin{aligned} &(v_1 * \dots * (v_{i1} + v_{i2}) * \dots * v_d) - (v_1 * \dots * v_{i1} * \dots * v_d) - (v_1 * \dots * v_{i2} * \dots * v_d), \\ &(v_1 * \dots * \alpha v_i * \dots * v_d) - \alpha(v_1 * \dots * v_i * \dots * v_d), \end{aligned}$$

donde  $v_i, v_{i1}, v_{i2} \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, d$  y  $\alpha \in k$ . Definimos  $V_1 \otimes \dots \otimes V_d$  como el espacio cociente  $\mathcal{F}/Y$ , y la aplicación  $d$ -lineal

$$\begin{aligned} t: V_1 \times \dots \times V_d &\rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_d \\ (v_1, \dots, v_d) &\mapsto [v_1 * \dots * v_d] \end{aligned}$$

donde  $[v_1 * \cdots * v_d]$  denota la clase de  $v_1 * \cdots * v_d$ .

Sea  $f \in \mathcal{F}$  nula salvo en las tuplas  $(v_{11}, \dots, v_{d1}), \dots, (v_{1k}, \dots, v_{dk})$ , entonces

$$f = f(v_{11}, \dots, v_{d1})(v_{11} * \cdots * v_{d1}) + \cdots + f(v_{1k}, \dots, v_{dk})(v_{1k} * \cdots * v_{dk}).$$

Por lo que  $[f] \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$  es combinación lineal de  $\{t(v_{1i}, \dots, v_{di}), i = 1, \dots, k\}$ , es decir, la imagen de  $t$  genera  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ . Además, de la definición de  $Y$ , al tomar clases, se tiene que la aplicación  $t$  es  $d$ -lineal.

Finalmente, dada  $\phi: V_1 \times \cdots \times V_d \rightarrow W$  una aplicación bilineal, sea  $\tilde{\lambda}: \mathcal{F} \rightarrow W$  la aplicación definida por

$$\tilde{\lambda}(f) = f(v_{11}, \dots, v_{d1})\phi(v_{11}, \dots, v_{d1}) + \cdots + f(v_{1k}, \dots, v_{dk})\phi(v_{1k}, \dots, v_{dk}),$$

para cada  $f \in \mathcal{F}$ , donde las tuplas  $(v_{11}, \dots, v_{d1}), \dots, (v_{1k}, \dots, v_{dk})$  son aquellas en las que  $f$  no se anula. Resulta sencillo comprobar que la aplicación  $\tilde{\lambda}$  es lineal. Además, se verifica  $Y \subset \ker \tilde{\lambda}$  ya que las imágenes de los generadores de  $Y$  por  $\tilde{\lambda}$  son

$$\begin{aligned} &\phi(v_1, \dots, (v_{i1} + v_{i2}), \dots, v_d) - \phi(v_1, \dots, v_{i1}, \dots, v_d) - \phi(v_1, \dots, v_{i2}, \dots, v_d), \\ &\phi(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_d) - \alpha \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_d), \end{aligned}$$

con  $v_i, v_{i1}, v_{i2} \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, d$  y  $\alpha \in k$ , que son nulas por ser  $\phi$   $d$ -lineal. Por tanto, podemos construir la aplicación lineal  $\lambda: V_1 \otimes \cdots \otimes V_d \rightarrow W$ , que a  $f \in \mathcal{F}$  le asigna  $\lambda([f]) = \tilde{\lambda}(f)$ . Esta aplicación está bien definida puesto que si  $[f] = [f']$ , entonces se tiene  $f - f' \in Y$  y  $\tilde{\lambda}(f - f') = \tilde{\lambda}(f) - \tilde{\lambda}(f') = 0$ . Además,

$$(\lambda \circ t)(v_1, \dots, v_d) = \lambda([v_1 * \cdots * v_d]) = \tilde{\lambda}(v_1 * \cdots * v_d) = \phi(v_1, \dots, v_d),$$

con lo que  $\lambda \circ t = \phi$  y se tiene la conmutatividad del diagrama.

A continuación veamos que las propiedades que se exigen permiten caracterizar el  $k$ -espacio vectorial  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$  salvo isomorfismo. En efecto, supongamos que tenemos un  $k$ -espacio vectorial  $T$  y una aplicación  $d$ -lineal  $\tau: V_1 \times \cdots \times V_d \rightarrow T$  tal que  $T$  está generado por su imagen, y que cualquier aplicación  $d$ -lineal  $\phi: V_1 \times \cdots \times V_d \rightarrow W$  descompone como  $\sigma \circ \tau$  con  $\sigma: T \rightarrow W$  una aplicación lineal. Entonces, al ser  $t$  y  $\tau$  aplicaciones  $d$ -lineales existen  $\lambda: V_1 \otimes \cdots \otimes V_d \rightarrow T$  y  $\sigma: T \rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$  aplicaciones lineales tales que

$$\begin{aligned} \lambda(t(v_1, \dots, v_d)) &= \tau(v_1, \dots, v_d), \\ \sigma(\tau(v_1, \dots, v_d)) &= t(v_1, \dots, v_d), \end{aligned}$$

para todo  $v_i \in V_i$ , con  $i = 1, \dots, d$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda(t(v_1, \dots, v_d))) &= \sigma(\tau(v_1, \dots, v_d)) = t(v_1, \dots, v_d), \\ \lambda(\sigma(\tau(v_1, \dots, v_d))) &= \lambda(t(v_1, \dots, v_d)) = \tau(v_1, \dots, v_d). \end{aligned}$$

Como  $T$  está generada por la imagen de  $\tau$ , se tiene que  $\lambda \circ \sigma$  es la identidad en  $T$ , y como  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$  está generada por la imagen de  $t$ ,  $\sigma \circ \lambda$  es la identidad en  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ . Es decir,  $\lambda$  y  $\sigma$  son isomorfismos entre ambos espacios e inversos uno del otro.  $\square$

**Definición 2.2.2.** Sean  $V_1, \dots, V_d$   $k$ -espacios vectoriales. El espacio vectorial  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$  que verifica las condiciones del teorema anterior se llama producto tensorial de  $V_1, \dots, V_d$  y la aplicación  $t$  se denota por  $t(v_1, \dots, v_d) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_d$ .

En este teorema, hemos construido el producto tensorial de varios espacios vectoriales. Sin embargo, es habitual en la literatura definir en primer lugar el producto tensorial de dos espacios vectoriales, ampliar la definición al producto tensorial de tres espacios vectoriales como  $((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3)$ , y así sucesivamente. La siguiente proposición demuestra que el resultado final, siguiendo un camino o el otro, es el mismo.

**Proposición 2.2.3.** *Dados  $V_1, V_2, V_3$   $k$ -espacios vectoriales, existe un isomorfismo  $\sigma: V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \rightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  tal que  $\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$ , para todo  $v_i \in V_i, i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Consideremos la aplicación  $\phi: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  definida como  $\phi(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$ . Es sencillo comprobar que esta aplicación es trilineal, por lo que existe una aplicación lineal  $\sigma: V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \rightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  tal que  $\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$ . A continuación vamos a demostrar que  $\sigma$  es el isomorfismo que buscamos.

Dado  $v_3 \in V_3$ , sea  $\mu_{v_3}: V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$  la aplicación bilineal definida como  $\mu_{v_3}(v_1, v_2) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ . Esta induce una aplicación lineal  $\lambda_{v_3}: V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$  tal que  $\lambda_{v_3}(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ . Sea  $\mu: (V_1 \otimes V_2) \times V_3 \rightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$  la aplicación bilineal definida por  $\mu(u, v_3) = \lambda_{v_3}(u)$ , con  $u \in V_1 \otimes V_2, v_3 \in V_3$ . Esta induce una aplicación  $\lambda: (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \rightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$  tal que  $\lambda(u \otimes v_3) = \mu(u, v_3)$  para todo  $u \in V_1 \otimes V_2, v_3 \in V_3$ . Por tanto,

$$\lambda((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) = \mu(v_1 \otimes v_2, v_3) = \lambda_{v_3}(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3.$$

Como los vectores  $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$  con  $v_i \in V_i, i = 1, 2, 3$ , generan el espacio  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ , se tiene que  $\lambda \circ \sigma$  es la identidad en este. Y como los vectores  $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$  con  $v_i \in V_i, i = 1, 2, 3$ , generan el espacio  $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  (es inmediato de comprobar a partir de que  $v_1 \otimes v_2$  generan  $V_1 \otimes V_2$  y  $u \otimes v_3$ , con  $u \in V_1 \otimes V_2$ , generan  $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ ), se tiene que  $\sigma \circ \lambda$  es la identidad en  $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ . Por tanto,  $\lambda$  y  $\sigma$  son isomorfismos entre ambos espacios.  $\square$

El isomorfismo  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$  se prueba de forma análoga a la demostración realizada para ver que  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ . Por tanto, concluimos que  $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$  y que existe un isomorfismo entre ambos tal que  $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \mapsto v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ . En este sentido, se dice que el producto tensorial es asociativo.

Podemos usar esta propiedad para dotar a las  $d$ -tuplas de una estructura más rica que la de espacio vectorial. Sea  $V$  un  $k$ -espacio vectorial y sea  $r \in \mathbb{N}$ , denotamos

$$T^r(V) = \bigotimes_{i=1}^r V \quad \text{y} \quad T^0(V) = k.$$

Es decir,  $T^r(V)$  es el producto tensorial de  $V$  consigo mismo  $r$  veces. Asimismo, definimos

$$T(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(V) = \{(t_0, t_1, \dots), t_r \in T^r(V) \text{ y } t_r = 0 \text{ salvo una cantidad finita de índices}\}.$$

$T(V)$  es la suma directa de todos los espacios vectoriales  $T^r(V)$ , que dotada de suma y multiplicación por escalar componente a componente es un  $k$ -espacio vectorial. Además, dado  $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , la inyección canónica

$$\begin{aligned} \iota_r: T^r(V) &\hookrightarrow T(V) \\ t_r &\mapsto (0, \dots, 0, t_r, 0, \dots) \end{aligned}$$

permite considerar  $T^r(V)$  como un subespacio vectorial de  $T(V)$ . En particular, se tiene que  $V$  y  $k$  son subespacios vectoriales de  $T(V)$ .

De la asociatividad del producto tensorial se obtiene una aplicación bilineal

$$\otimes: T^r(V) \times T^s(V) \rightarrow T^{r+s}(V)$$

tal que, dados  $v_1, \dots, v_{r+s} \in V$ , se tiene  $(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \otimes (v_{r+1} \otimes \dots \otimes v_{r+s}) = v_1 \otimes \dots \otimes v_{r+s}$ . Esta aplicación se extiende de forma natural a  $T(V)$ , dotándolo de estructura de anillo y de álgebra, y da lugar a la siguiente definición.

**Definición 2.2.4.** Dado un  $k$ -espacio vectorial  $V$ ,  $T(V)$  se denomina álgebra tensorial de  $V$ .

El inconveniente de esta estructura es que el álgebra  $T(V)$  no es, en general, conmutativa. Por tanto, no es tan útil como necesitamos a la hora de operar y no refleja el carácter simétrico de las formas multilineales que usamos en los polinomios homogéneos. Para solucionar esto, vamos a definir un cociente que haga este álgebra conmutativa.

Sea  $\mathfrak{b}_r$  el subespacio de  $T^r(V)$  generado por los elementos

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) - (v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(r)})$$

con  $v_i \in V$ ,  $i = 1, \dots, r$  y  $\sigma \in S_r$  donde  $S_r$  es el grupo de permutaciones de  $r$  elementos. Llamaremos  $S^r(V)$  al espacio vectorial cociente  $T^r(V)/\mathfrak{b}_r$ .

**Proposición 2.2.5.** Sean  $V$  un  $k$ -espacio vectorial y  $d \in \mathbb{N}$ . Existe una aplicación  $d$ -lineal  $\tilde{t}: V^d \rightarrow S^d(V)$  tal que  $S^d(V)$  está generado por la imagen de  $\tilde{t}$ . Además, dados un  $k$ -espacio vectorial  $W$  y una aplicación  $d$ -lineal simétrica  $\phi: V^d \rightarrow W$ , existe una aplicación lineal  $\Lambda: S^d(V) \rightarrow W$  que hace el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} V^d & \xrightarrow{\tilde{t}} & S^d(V) \\ & \searrow \phi & \downarrow \Lambda \\ & & W \end{array}$$

*Demostración.* Sea  $q$  la aplicación de paso al cociente  $T^d(V) \rightarrow S^d(V)$  y llamemos  $\tilde{t}$  a la composición  $q \circ t$ . Puesto que la imagen de  $t$  genera  $T^d(V)$ , tomando clases tenemos que la imagen de  $\tilde{t}$  genera  $S^d(V)$ .

Dada una aplicación  $d$ -lineal simétrica  $\phi: V^d \rightarrow W$ , existe una aplicación lineal  $\lambda: V^d \rightarrow T^d(V)$  tal que  $\phi = \lambda \circ t$ . Definimos  $\Lambda: S^d(V) \rightarrow W$  por  $\Lambda(q(t)) = \lambda(t)$ , para cada  $t \in T^d(V)$ . Para ver que  $\Lambda$  está bien definida basta observar que  $\mathfrak{b}_d \subset \ker \lambda$ , puesto que demostrada esa condición, si  $t, t' \in T^d(V)$  verifican  $q(t) = q(t')$ , se tiene

$t - t' \in \mathfrak{b}_d$  y  $\Lambda(q(t)) - \Lambda(q(t')) = \lambda(t - t') = 0$ . En efecto, se verifica  $\mathfrak{b}_d \subset \ker \lambda$  puesto que la imagen de los elementos que generan  $\mathfrak{b}_d$  por  $\lambda$  es

$$\lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) - \lambda(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}) = \phi(v_1, \dots, v_d) - \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(d)}) = 0$$

por ser  $\phi$  simétrica. Por tanto,  $\Lambda$  está bien definida, y como  $q$  es suprayectiva, está definida en todo  $S^d(V)$ . Además, por construcción, hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{t} & & \\ & \nearrow & \text{---} & \searrow & \\ V^d & \xrightarrow{t} & T^d(V) & \xrightarrow{q} & S^d(V) \\ & \searrow & \downarrow \lambda & \swarrow \Lambda & \\ & & W & & \end{array}$$

En particular,  $\phi = \Lambda \circ \tilde{t}$ . □

Siguiendo un procedimiento análogo, al realizado para considerar  $T^r(V)$  como un subespacio del álgebra tensorial  $T(V)$ , vamos a definir un álgebra en el que podamos estudiar  $S^r(V)$ . Denotemos

$$S(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S^r(V)$$

y

$$\mathfrak{b} = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathfrak{b}_r.$$

Estudiemos  $\mathfrak{b}$  como subespacio de  $T(V)$ . Como  $\mathfrak{b}_r$  es un subespacio de  $T^r(V)$  para todo  $r$ ,  $\mathfrak{b}$  es un subespacio de  $T(V)$ , es decir, es estable por suma y multiplicación por escalares. Pero además, dados  $v_1, \dots, v_{r+s} \in V$  y  $\sigma \in S_r$ , se verifica

$$\begin{aligned} & ((v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) - (v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)})) \otimes (v_{r+1} \otimes \cdots \otimes v_{r+s}) = \\ & = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_{r+1} \otimes \cdots \otimes v_{r+s}) - (v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)} \otimes v_{r+1} \otimes \cdots \otimes v_{r+s}) \in \mathfrak{b}_{r+s}, \end{aligned}$$

por lo que  $\mathfrak{b}$  es estable por multiplicación por cualquier elemento de  $T(V)$ . Entonces,  $\mathfrak{b}$  es un ideal de  $T(V)$  y el cociente  $T(V)/\mathfrak{b}$  tiene estructura de álgebra. Pero resulta inmediato comprobar que  $T(V)/\mathfrak{b} \cong S(V)$  como espacios vectoriales, luego a través de esta identificación podemos dar a  $S(V)$  estructura de álgebra. Además, por construcción, se tiene que  $S(V)$  es un álgebra conmutativa.

**Definición 2.2.6.** Dado un  $k$ -espacio vectorial  $V$ ,  $S(V)$  se denomina álgebra simétrica de  $V$ . Sean  $u, v \in S(V)$  denotaremos por  $uv$  al producto de ambos en  $S(V)$ . En particular, dados  $v_1, \dots, v_d \in V$ ,  $v_1 \cdots v_d$  es la imagen por  $\tilde{t}$  de  $(v_1, \dots, v_d)$ .

## 2.3. Método simbólico

La combinación de los principales resultados de la Sección 2.1. y la Sección 2.2. nos permitirá operar con polinomios homogéneos en  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  realizando los cálculos en el álgebra conmutativa  $S(\mathbb{C}^{n+1})$  y posteriormente trasladar los resultados de nuevo a  $\mathbb{C}$

a través de una aplicación lineal cuya construcción es el propósito de esta sección. Esta forma de proceder se conoce como método simbólico.

A continuación, aplicaremos los resultados anteriormente demostrados a  $V = \mathbb{C}^{n+1}$  y a la aplicación multilineal asociada a un polinomio homogéneo, su forma polar, obteniendo de esta forma un significado riguroso para los símbolos que emplean Salmon y Clebsch en sus cálculos.

**Proposición 2.3.1.** *Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio homogéneo de grado  $d \in \mathbb{N}$ . Existe una aplicación  $\Lambda_f: S^d(\mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$*

$$f(\mathbf{x}) = \Lambda_f \left( (x_0 \mathbf{e}_0 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)^d \right) = \Lambda_f(\mathbf{x}^d)$$

y

$$\frac{\partial^k f}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_k}}(\mathbf{x}) = \frac{d!}{(d-k)!} \Lambda_f \left( (x_0 \mathbf{e}_0 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)^{d-k} \mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_k} \right).$$

*Demostración.* Consideramos la aplicación obtenida al aplicar la Proposición 2.2.5 a la forma polar de  $f$ ,  $\tilde{f}$ , y veamos que es la aplicación que buscamos. Si denotamos por  $\Lambda_f$  a esta aplicación, se verifica que  $\Lambda_f: S^d(\mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{C}$  es tal que, para todo  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d \in \mathbb{C}^{n+1}$  se cumple

$$\tilde{f}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) = \Lambda_f(\tilde{t}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)) = \Lambda_f(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_d).$$

Tomando  $\mathbf{x}_1 = \dots = \mathbf{x}_d = \mathbf{x} = x_0 \mathbf{e}_0 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ , se obtiene la primera condición del enunciado de la proposición

$$f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) = \Lambda_f(\mathbf{x}^d)$$

Por otra parte, en virtud del Corolario 2.1.11, haciendo  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-k} = \mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}_{d-k+j} = \mathbf{e}_{i_j}$  concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k f}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_k}}(\mathbf{x}) &= \frac{d!}{(d-k)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^{d-k}, \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) \\ &= \frac{d!}{(d-k)!} \Lambda_f \left( (x_0 \mathbf{e}_0 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)^{d-k} \mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_k} \right). \end{aligned}$$

□

La aplicación  $\Lambda_f$  está completamente caracterizada dando una imagen de los elementos  $\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_d}$ , con  $i_1, \dots, i_d \in \{0, \dots, n\}$ , puesto que dichos elementos generan  $S^d(\mathbb{C}^{n+1})$  y además sabemos que

$$\Lambda_f(\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_d}) = \frac{\partial^d f}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_d}}. \quad (2.4)$$

Por tanto, un polinomio se puede representar a partir de la aplicación  $\Lambda_f$ , algo bastante habitual en algunos textos antiguos como [24]. Podríamos haber definido la aplicación  $\Lambda_f$  en el álgebra libre  $\mathbb{C}[\mathbf{e}_i]$ ,  $i = 0, \dots, n$ , como aquella que verifica la ecuación (2.4), pero sus propiedades se obtienen de forma más natural a partir del álgebra multilineal.

Para comprobar las virtudes de esta representación de los polinomios homogéneos veamos un ejemplo de aplicación del método simbólico.

**Ejemplo 2.3.2.** Veamos la demostración del teorema de Euler para polinomios homogéneos mediante el método simbólico. Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ , entonces

$$\begin{aligned} x_0 \frac{\partial f}{\partial X_0}(\mathbf{x}) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial X_n}(\mathbf{x}) &= x_0 d \Lambda_f(\mathbf{x}^{d-1} \mathbf{e}_0) + \dots + x_n d \Lambda_f(\mathbf{x}^{d-1} \mathbf{e}_n) = \\ &= d \Lambda_f(\mathbf{x}^{d-1} (x_0 \mathbf{e}_0 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)) = d \Lambda_f(\mathbf{x}^d) = d f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Hasta ahora hemos considerado el método simbólico para un solo polinomio homogéneo. Sin embargo, en el cálculo de Clebsch se emplea para estudiar el producto de dos polinomios homogéneos. Sea  $m \in \mathbb{N}$ , con  $m \geq 2$ , si tenemos  $m$  polinomios homogéneos  $f_1, \dots, f_m$  de grados  $d_1, \dots, d_m$ , respectivamente, su producto es un polinomio homogéneo de grado  $d = d_1 + \dots + d_m$ , por lo que podemos estudiarlo usando  $\Lambda_{f_1 \dots f_m}$ . Sin embargo, esta aplicación no refleja bien las propiedades individuales de cada uno de los polinomios de partida. El resultado que enunciamos y demostramos a continuación nos proporciona una representación de los polinomios que solventará esa deficiencia que presenta la aplicación  $\Lambda_f$  cuando se trabaja con varios polinomios.

**Proposición 2.3.3.** Sean  $\lambda_i$  aplicaciones lineales de  $V_i$  en  $k$ , con  $V_i$  un  $k$ -espacio vectorial,  $i = 1, \dots, m$ , entonces existe una aplicación lineal  $\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_m: V_1 \otimes \dots \otimes V_m \rightarrow k$  tal que

$$(\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_m)(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) = \lambda_1(x_1) \dots \lambda_m(x_m)$$

*Demostración.* Este resultado es consecuencia inmediata del Teorema 2.2.1 sin más que aplicarlo a la aplicación  $m$ -lineal de  $\lambda_1 \times \dots \times \lambda_m: V_1 \otimes \dots \otimes V_m \rightarrow k$  definida por  $(\lambda_1 \times \dots \times \lambda_m)(x_1, \dots, x_m) = \lambda_1(x_1) \dots \lambda_m(x_m)$ .  $\square$

La aplicación  $\Lambda_{f_1} \otimes \dots \otimes \Lambda_{f_m}$  obtenida a partir de este resultado, nos proporciona más información que la anterior,  $\Lambda_{f_1 \dots f_m}$ . Además, como veremos a continuación, en el caso de trabajar con varios polinomios homogéneos, nos permite trabajar en un álgebra conmutativa de manera análoga a como cuando teníamos un solo polinomio homogéneo.

Definimos  $\mathcal{A} = T^m(S(\mathbb{C}^{n+1}))$  con la estructura de espacio vectorial propia del producto tensorial y un producto en  $\mathcal{A}$  por

$$(u_1 \otimes \dots \otimes u_m)(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) = (u_1 v_1) \otimes \dots \otimes (u_m v_m)$$

donde  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m \in S(\mathbb{C}^{n+1})$ . Como  $\mathcal{A}$  está generado por elementos de esta forma, extendiendo el producto por bilinealidad queda definido para todo elemento de  $\mathcal{A}$ . Este producto hereda las propiedades de asociatividad y conmutatividad del producto en  $S(\mathbb{C}^{n+1})$ , dotando a  $\mathcal{A}$  de estructura de álgebra conmutativa sobre los complejos. Como tenemos una inyección de  $S^{d_1}(\mathbb{C}^{n+1}) \otimes \dots \otimes S^{d_m}(\mathbb{C}^{n+1})$  en  $\mathcal{A}$ , podemos trabajar en  $\mathcal{A}$  y recuperar el resultado en  $\mathbb{C}$  a través de la aplicación  $\Lambda_{f_1} \otimes \dots \otimes \Lambda_{f_m}$ .

**Notación 2.3.4.** En el último capítulo usamos esto en el caso del producto de dos polinomios homogéneos, utilizaremos la siguiente notación:  $\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i \otimes 1$  y  $\mathbf{b}_i = 1 \otimes \mathbf{e}_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

**Ejemplo 2.3.5.** Sean  $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ , polinomios homogéneos de grados  $d_1$  y  $d_2$ , respectivamente, y sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Por la Proposición 2.3.1, existen aplicaciones lineales  $\Lambda_{f_1}$  y  $\Lambda_{f_2}$  tales que  $f_1(\mathbf{x}) = \Lambda_{f_1}(\mathbf{x}^{d_1})$  y  $f_2(\mathbf{y}) = \Lambda_{f_2}(\mathbf{y}^{d_2})$ .

Entonces, por la Proposición 2.3.3,

$$(\Lambda_{f_1} \otimes \Lambda_{f_2})(\mathbf{x}^{d_1} \otimes \mathbf{y}^{d_2}) = \Lambda_{f_1}(\mathbf{x}^{d_1})\Lambda_{f_2}(\mathbf{y}^{d_2}) = f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{y}).$$

Esto se puede reformular utilizando la Notación 2.3.4 como

$$(\Lambda_{f_1} \otimes \Lambda_{f_2})\left((\mathbf{a}_0x_0 + \dots + \mathbf{a}_nx_n)^{d_1}(\mathbf{b}_0y_0 + \dots + \mathbf{b}_ny_n)^{d_2}\right) = f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{y}).$$

## 2.4. Aplicación de polaridad

Un polinomio admite un desarrollo de Taylor finito y exacto. Esto es consecuencia de ser una función infinitamente derivable y de que las derivadas de orden mayor que su grado son nulas. Es un resultado bien conocido que no demostraremos aquí. Se puede encontrar una demostración en [2].

**Teorema 2.4.1.** (*Fórmula de Taylor*) Dados  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$ , denotando  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$  se tiene que

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^d \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^n h_{i_1} \dots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_k}}(\mathbf{p}) \quad (2.5)$$

Vamos a estudiar cada uno de esos sumandos, homogéneos de grado  $k$  en  $\mathbf{h}$ . Para ello definimos la aplicación de polaridad.

**Definición 2.4.2.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Se define la aplicación de polaridad de grado  $k$  en  $\mathbf{p}$  como

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{p}}^k: \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n] &\rightarrow \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n] \\ f &\mapsto \Delta_{\mathbf{p}}^k f = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^n X_{i_1} \dots X_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_k}}(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

y nos referiremos a  $\Delta_{\mathbf{p}}^k f$  como la polar de  $f$  de grado  $k$  en  $\mathbf{p}$ .

Resulta evidente a partir de la Definición 2.1.1 que la polar de  $f$  de grado  $k$  es un polinomio homogéneo de grado  $k$ . Además, observemos que, usando la notación de la Definición 2.4.2, el desarrollo de Taylor de  $f$  como función de varias variables en un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$  no es más que

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \Delta_{\mathbf{p}}^1 f(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \dots + \frac{1}{d!} \Delta_{\mathbf{p}}^d f(\mathbf{x} - \mathbf{p}). \quad (2.6)$$

Vamos a usar las polares para estudiar propiedades locales de un polinomio en el punto  $\mathbf{p}$ . Estas propiedades tendrán después un significado geométrico cuando veamos los polinomios como hipersuperficies. Observemos que si tenemos una recta que pasa por  $\mathbf{p}$  con vector director  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n+1}$ , podemos considerar el polinomio  $f(\mathbf{p} + t\mathbf{u}) \in \mathbb{C}[t]$  cuya

evaluación es la restricción de la evaluación de  $f$  a la recta. La ventaja de la representación dada por la fórmula de Taylor en la ecuación (2.6) es que nos proporciona los coeficientes que acompañan a los monomios  $1, t, t^2, \dots$ , ya que al ser las polares homogéneas, tenemos que

$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{u}) = f(\mathbf{p}) + t \Delta_{\mathbf{p}}^1 f(\mathbf{u}) + \dots + \frac{t^d}{d!} \Delta_{\mathbf{p}}^d f(\mathbf{u}). \quad (2.7)$$

En la mayoría de textos, lo que aquí llamamos la aplicación de polaridad de grado  $k$  se suele denotar diferencial de orden  $k$  y en vez de representarse por  $\Delta_{\mathbf{p}}^k f$ , se representa por  $f^{(k)}(\mathbf{p})$  o  $D^k f(\mathbf{p})$ . El llamarla aplicación de polaridad se justifica por el comportamiento que tiene esta aplicación al actuar sobre un polinomio homogéneo.

**Proposición 2.4.3.** *Sea  $f$  un polinomio homogéneo de grado  $d$  y sea  $\tilde{f}$  su forma polar. Si  $k \leq d$  entonces, para todo  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$*

$$\Delta_{\mathbf{p}}^k f(\mathbf{x}) = \frac{d!}{(d-k)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-k}, \overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^k)$$

*Demostración.* Como consecuencia del Corolario 2.1.11

$$\Delta_{\mathbf{p}}^k f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^n x_{i_1} \cdots x_{i_k} \frac{d!}{(d-k)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-k}, \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}).$$

Sacando factor común y usando la linealidad de  $\tilde{f}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{p}}^k f(\mathbf{x}) &= \frac{d!}{(d-k)!} \left( \sum_{i_2, \dots, i_k=0}^n x_{i_2} \cdots x_{i_k} \left( \sum_{i_1=0}^n x_{i_1} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-k}, \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) \right) \right) = \\ &= \frac{d!}{(d-k)!} \left( \sum_{i_2, \dots, i_k=0}^n x_{i_2} \cdots x_{i_k} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-k}, \mathbf{x}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) \right) = \dots = \\ &= \frac{d!}{(d-k)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-k}, \overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^k). \end{aligned}$$

□

Entonces, la aplicación de polaridad de grado  $k$  en  $\mathbf{p}$  actúa sobre un polinomio homogéneo evaluando parcialmente en  $\mathbf{p}$  su forma multilineal asociada  $d-k$  veces. Esto es, esencialmente, lo que suele tomarse en álgebra como definición de la aplicación de polaridad, salvo que el grado suele estar definido en términos del número de veces que se evalúa parcialmente  $\mathbf{p}$  en vez de por el grado de homogeneidad en  $\mathbf{x}$ . Por ejemplo, en el primer capítulo del libro de geometría algebraica clásica de Dolgachev ([9]), se desarrolla, con un lenguaje algo técnico para el nivel de grado, todo lo que hemos hecho aquí y define la polar de grado  $k$  por  $\Delta_{\mathbf{p}}^{d-k} f$ . A nosotros nos resultará más cómoda, sin embargo, la definición que se ha dado, puesto que en el cálculo de Clebsch trabajaremos con la primera, segunda y tercera polar.

La aplicación de polaridad así definida generaliza la que estudiábamos en geometría proyectiva en segundo para las cuádricas, que era lo que aquí llamamos primera polar. En este caso  $d = 2$ , y  $\Delta_{\mathbf{p}}^{d-1} f = \Delta_{\mathbf{p}}^1 f$  por lo que ambas definiciones coinciden.

Considerando la aplicación de polaridad como evaluación parcial de una forma multilineal, el método simbólico permite escribirla de una forma muy sencilla.

**Proposición 2.4.4.** Dado  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ ,

$$\Delta_p^k f(\mathbf{x}) = \frac{d!}{(d-k)!} \Lambda_f(\mathbf{p}^{d-k} \mathbf{x}^k).$$

*Demostración.* De acuerdo a la Proposición 2.2.5, la forma  $d$ -lineal  $\tilde{f}$  asociada al polinomio  $f$  y la aplicación lineal  $\Lambda_f: S^d(\mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{C}$  verifican que, para todo  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d \in \mathbb{C}^{n+1}$ ,

$$\tilde{f}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) = \Lambda_f(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_d).$$

Por lo que haciendo  $\mathbf{x}_1 = \cdots = \mathbf{x}_{d-k} = \mathbf{p}$  y  $\mathbf{x}_{d-k+1} = \cdots = \mathbf{x}_d = \mathbf{x}$ , tenemos por la Proposición 2.4.3 que

$$\Delta_p^k f(\mathbf{x}) = \frac{d!}{(d-k)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-k}, \overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^k) = \frac{d!}{(d-k)!} \Lambda_f(\mathbf{p}^{d-k} \mathbf{x}^k).$$

□

Además, el desarrollo de Taylor no es más que la conocida fórmula del binomio de Newton. Ya que,

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{x}) = \Lambda_f((\mathbf{p} + \mathbf{x})^d) = \Lambda_f\left(\sum_{k=0}^d \binom{d}{k} \mathbf{p}^{d-k} \mathbf{x}^k\right) = \sum_{k=0}^d \frac{1}{k!} \frac{d!}{(d-k)!} \Lambda_f(\mathbf{p}^{d-k} \mathbf{x}^k).$$

A parte de para la representación que hemos usado en la sección anterior, la proposición también nos permite obtener algunas identidades útiles que verifica la aplicación de polaridad.

**Propiedades 2.4.5.** Sean  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$  y  $k \in \{0, \dots, d\}$ , entonces se verifican las siguientes propiedades:

1.  $\Delta_{\lambda \mathbf{p}}^k f = \lambda^{d-k} \Delta_{\mathbf{p}}^k f$ , para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
2.  $\Delta_{\mathbf{p}}^k f(\mathbf{p}) = \frac{d!}{(d-k)!} f(\mathbf{p})$ .
3. Dado  $m \in \mathbb{N}$ , con  $k \leq m \leq d$ , se verifica  $\Delta_{\mathbf{p}}^k (\Delta_{\mathbf{p}}^m f) = \frac{m!(d-k)!}{(m-k)!(d-m)!} \Delta_{\mathbf{p}}^k f$ .

*Demostración.*

1. Sean  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda \mathbf{p}}^k f(\mathbf{x}) &= \frac{d!}{(d-k)!} \tilde{f}(\overbrace{\lambda \mathbf{p}, \dots, \lambda \mathbf{p}}^{d-k}, \overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^k) \\ &= \lambda^{d-k} \frac{d!}{(d-k)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-k}, \overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^k) = \lambda^{d-k} \Delta_{\mathbf{p}}^k f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Al coincidir como funciones, coinciden como polinomios.

$$2. \Delta_p^k f(\mathbf{p}) = \frac{d!}{(d-k)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-k}, \overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^k) = \frac{d!}{(d-k)!} f(\mathbf{p})$$

3. Sea  $m \in \mathbb{N}$ , con  $k \leq m \leq d$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_p^k(\Delta_p^m f(\mathbf{x})) &= \Delta_p^k \left( \frac{d!}{(d-m)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-m}, \overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^m) \right) \\ &= \frac{m!}{(m-k)!} \frac{d!}{(d-m)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-m}, \overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{m-k}, \overbrace{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}}^k) \\ &= \frac{m!(d-k)!}{(m-k)!(d-m)!} \Delta_p^k f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Al coincidir como funciones, coinciden como polinomios. □

Cuando estudiemos las polares como hipersuperficies en el capítulo siguiente dedicado a la geometría algebraica, estaremos interesados en los ceros de estos polinomios. Sobre todo cuando  $\mathbf{p}$  está en la hipersuperficie, es decir, cuando  $f(\mathbf{p}) = 0$ . La siguiente proposición nos da una importante propiedad de la intersección de polares en ese caso.

**Proposición 2.4.6.** *Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ , sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$  tal que  $f(\mathbf{p}) = 0$  y sea  $k \in \{1, \dots, d\}$ . Entonces, dados  $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbb{C}^{n+1}$ , si existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\mathbf{u}' = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{u}$ , se verifica que  $\Delta_p^1 f(\mathbf{u}) = \dots = \Delta_p^k f(\mathbf{u}) = 0$  si y solo si  $\Delta_p^1 f(\mathbf{u}') = \dots = \Delta_p^k f(\mathbf{u}') = 0$ .*

*Demostración.* Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbb{C}^{n+1}$  con  $\mathbf{u} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{u}'$ . Desarrollando  $f(\mathbf{p} + t\mathbf{u}')$  como polinomio de Taylor en  $t$  al igual que en la ecuación (2.6) tenemos que

$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{u}') = f(\mathbf{p}) + t\Delta_p^1 f(\mathbf{u}') + \dots + \frac{t^d}{d!} \Delta_p^d f(\mathbf{u}')$$

pero también se puede desarrollar como

$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{u}') = f(\mathbf{p} + t\mathbf{p} + t\lambda\mathbf{u}) = \Lambda_f \left( ((1+t)\mathbf{p} + t\lambda\mathbf{u})^d \right),$$

de cuya expresión se deduce

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p} + t\mathbf{u}') &= f(\mathbf{p} + t\mathbf{p} + t\lambda\mathbf{u}) = f \left( (1+t) \left( \mathbf{p} + \frac{t}{1+t} \lambda \mathbf{u} \right) \right) = (1+t)^d f \left( \mathbf{p} + \frac{t}{1+t} \lambda \mathbf{u} \right) \\ &= (1+t)^d \left( f(\mathbf{p}) + \frac{t\lambda}{1+t} \Delta_p^1 f(\mathbf{u}) + \dots + \frac{t^d \lambda^d}{(1+t)^d d!} \Delta_p^d f(\mathbf{u}) \right) \\ &= (1+t)^d f(\mathbf{p}) + t\lambda(1+t)^{d-1} \Delta_p^1 f(\mathbf{u}) + \dots + \frac{t^d \lambda^d}{d!} \Delta_p^d f(\mathbf{u}) \\ &= t^{k+1} \frac{\lambda^{k+1} (1+t)^{d-k-1}}{(k+1)!} \Delta_p^{k+1} f(\mathbf{u}) + \dots + \frac{t^d \lambda^d}{d!} \Delta_p^d f(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Por tanto, el término de menor exponente es  $\frac{t^{k+1} \lambda^{k+1}}{(k+1)!} \Delta_p^{k+1}$ , y podemos concluir que todos los términos del polinomio de grado menor o igual que  $k$  son nulos. Si volvemos a la primera expresión que dedujimos, obtenemos que  $\Delta_p^1 f(\mathbf{u}') = \dots = \Delta_p^k f(\mathbf{u}') = 0$ . □

*Nota.* Una vez que hemos visto con detalle lo que es la aplicación de polaridad, resulta pertinente una nota en cuanto a la notación empleada. Ya hemos mencionado que esta aplicación es más frecuentemente denotada por el nombre de diferencial de orden  $k$  en textos de análisis. El emplear  $\Delta_p^k$ , más similar a la notación de Salmon [19], tiene como objetivo el pensar en la aplicación de polaridad como un operador que actúa localmente en un polinomio en el punto  $\mathbf{p}$ . Puesto que la usaremos en el cálculo de Clebsch para estudiar propiedades locales de superficies, este punto de vista adquirirá un significado más geométrico en el siguiente capítulo.

Otra ventaja de ver la aplicación de polaridad como un operador, y la forma que tiene Salmon de pensar en este objeto, es que  $k$  se puede ver no como un superíndice sino como un exponente. En efecto, aunque en las propiedades de la aplicación polar hemos visto qué ocurre al componerlas actuando en las variables  $\mathbf{x}$ , observemos que al componerlas en la variable  $\mathbf{p}$ , vemos que podemos obtener la aplicación polar de grado  $k$  componiendo  $k$  veces la de grado 1. Esto lo veremos en más detalle en la última sección, cuando lo implementemos en Sage.

## 2.5. Determinantes

Los resultados que hemos visto hasta ahora nos van a permitir desarrollar el cálculo de Clebsch trabajando en  $\mathcal{A} = T^m(S(\mathbb{C}^{n+1}))$ , el álgebra conmutativa que introdujimos anteriormente. Durante ese proceso, será necesario operar con determinantes sobre  $\mathcal{A}$ , es decir, con elementos  $\lambda(1 \otimes \cdots \otimes 1)$  con  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Dado que  $\mathcal{A}$  no tiene estructura de cuerpo y por tanto las matrices de elementos de  $\mathcal{A}$  no son un espacio vectorial, dedicaremos esta sección al estudio de los determinantes de matrices en un anillo conmutativo, comprobando que el determinante en este caso tiene buenas propiedades, siguiendo [15].

A lo largo de esta sección, si no se especifica otra cosa,  $R$  denotará un anillo conmutativo.

**Definición 2.5.1.** Sea  $R$  un anillo conmutativo. Un  $R$ -módulo  $M$  es un grupo abeliano, usualmente escrito con notación aditiva, junto con una operación  $\cdot : R \times M \rightarrow M$  tal que para todos  $a, b \in R$  y  $x, y \in M$  se verifica que

$$(ab)x = a(bx), \quad (a+b)x = ax + bx, \quad a(x+y) = ax + ay \quad y \quad 1x = x.$$

Si  $k$  es un cuerpo, entonces un  $k$ -módulo es un  $k$ -espacio vectorial. Dado un anillo conmutativo  $R$ , el conjunto de matrices con elementos en  $R$  o el conjunto de  $n$ -tuplas  $R^n$  son otros ejemplos de conjuntos a los que se puede dotar de estructura de módulo. El concepto de módulo es más general que el de espacio vectorial. Los conceptos de aplicación lineal y aplicación multilineal se definen para módulos de manera similar al caso de espacios vectoriales, por lo que no detallamos su definición.

**Definición 2.5.2.** Sean  $M, F$  dos  $R$ -módulos, se dice que una aplicación multilineal  $f: M^n \rightarrow F$  es alternada si en caso de existir un índice  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  tal que  $x_i = x_{i+1}$ , se verifica  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

**Proposición 2.5.3.** Sea  $M, F$  dos  $R$ -módulos y  $f: M^n \rightarrow F$  una aplicación multilineal alternada, entonces  $f(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots) = -f(\dots, x_{i+1}, x_i, \dots)$ , para todo  $x_1, \dots, x_n \in M$ .

*Demostración.* Se tiene que  $f(\dots, x_i + x_{i+1}, x_i + x_{i+1}, \dots) = 0$  por definición de aplicación multilineal alternada. Además, por la multilinealidad de  $f$

$$\begin{aligned} f(\dots, x_i + x_{i+1}, x_i + x_{i+1}, \dots) &= \\ &= f(\dots, x_i, x_i, \dots) + f(\dots, x_i, x_{i+1}) + f(\dots, x_{i+1}, x_i, \dots) + f(\dots, x_{i+1}, x_{i+1}, \dots) \end{aligned}$$

donde  $f(\dots, x_i, x_i, \dots) = f(\dots, x_{i+1}, x_{i+1}, \dots) = 0$ . Por lo que

$$f(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots) + f(\dots, x_{i+1}, x_i, \dots) = 0.$$

□

La propiedad de la proposición es la que suele usarse para definir la propiedad alternada en espacios vectoriales, donde es equivalente a la definición que hemos usado ya que en un cuerpo el único elemento que coincide con su inverso para la suma es el cero. Sin embargo, en módulos la definición que hemos dado es más restrictiva. Por ejemplo, en  $\mathbb{Z}_4^2$  la aplicación bilineal dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no es alternada pero sí cumple la propiedad de la proposición.

A continuación se introducen otras propiedades de las aplicaciones multilineales alternadas que utilizaremos más adelante.

**Propiedades 2.5.4.** *Sea  $M$  un  $R$ -módulo y  $f$  una aplicación multilineal alternada definida en  $M^n$ . Sean  $x_1, \dots, x_n \in M$ .*

1. *Si  $x_i = x_j$ , con  $i \neq j$ , entonces  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .*

2. *Dado  $a \in R$ , para  $i \neq j$  se define  $x'_i = x_i + ax_j$ . Entonces*

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n).$$

3. *Sean  $v_1, \dots, v_n \in M$  tales que  $x_i = a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n$  con  $a_{ij} \in R$  entonces*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} f(v_1, \dots, v_n)$$

*donde  $S_n$  es el grupo de permutaciones de  $n$  elementos y  $\text{sg}(\sigma)$  es el signo de la permutación  $\sigma$ .*

*Demostración.* La primera propiedad es inmediata a partir de la Proposición 2.5.3, ya que nos permite intercambiar los elementos hasta tener  $x_i$  y  $x_j$  adyacentes. Entonces, por la definición de aplicación multilineal alternada, la función se anula.

La segunda propiedad se demuestra aplicando la linealidad de  $f$  en la componente  $i$ . Por la primera propiedad, el sumando que contiene  $x_j$  repetido se anula y la función queda invariante.

Veamos ahora la tercera propiedad. Aplicando la linealidad de  $f$  tenemos que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

donde  $\sigma$  recorre todas las funciones de  $\{1, \dots, n\}$  en sí mismo, no necesariamente de forma biyectiva. Sin embargo, por la primera propiedad, si  $\sigma$  no es biyectiva la función se anula, por lo que podemos restringir el sumatorio a  $S_n$ . Ahora bien, por la Proposición 2.5.3 podemos ordenar los argumentos de  $f$ , salvo signo, y por cada cambio de argumentos adyacentes la expresión se multiplica por  $-1$ . Por tanto, el signo que acompaña al sumando  $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} f(v_1, \dots, v_n)$  es precisamente  $\text{sg}(\sigma)$ .  $\square$

**Definición 2.5.5.** Denotando por  $\mathcal{M}_n(R)$  el  $R$ -módulo de las matrices cuadradas  $n \times n$  con elementos en  $R$ , se define un determinante  $n \times n$  como una aplicación

$$\det: \mathcal{M}_n(R) \rightarrow R$$

que considerada como función de los vectores columna de la matriz es multilineal alternada y tal que  $\det I = 1$ .

**Proposición 2.5.6.** Si existen determinantes estos son únicos, y el determinante de una matriz  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  está dado por

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

*Demostración.* Sean  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  las columnas de  $A$ , entonces  $\mathbf{c}_i = a_{1i}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{ni}\mathbf{e}_n$ . Por tanto, aplicando la tercera propiedad de las aplicaciones multilineales alternadas, se tiene que

$$\begin{aligned} \det A = \det(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \end{aligned}$$

ya que  $\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det I = 1$ .  $\square$

Por supuesto, en el caso de las matrices con elementos en un cuerpo esta definición coincide con el determinante de una matriz al que estamos acostumbrados. Nos falta probar la existencia, pero antes vamos a probar otras dos propiedades.

**Proposición 2.5.7.** Dada  $A \in \mathcal{M}_n(R)$ ,  $\det A = \det A^T$ .

*Demostración.* Puesto que  $a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$  y  $\text{sg}(\sigma) = \text{sg}(\sigma^{-1})$ , se tiene que

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \text{sg}(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

pero, como  $S_n$  es un grupo,  $S_n = \{\sigma^{-1}, \sigma \in S_n\}$ , luego

$$\sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \text{sg}(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \det A^t.$$

$\square$

**Proposición 2.5.8.** Dada  $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$ ,  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

*Demostración.* Sea  $C = AB = (c_{ij})$ , definimos  $\mathbf{w}_i = c_{i1}\mathbf{e}_1 + \cdots + c_{in}\mathbf{e}_n$ . Entonces, por la propiedad 3 de las aplicaciones multilineales alternadas y las proposiciones anteriores,

$$\det(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \det(C) \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det(C).$$

Además, definiendo  $\mathbf{v}_i = b_{i1}\mathbf{e}_1 + \cdots + b_{in}\mathbf{e}_n$ , se tiene que  $\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{in}\mathbf{v}_n$  por lo que aplicando la propiedad 3 de nuevo, se obtiene que

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) &= \det(A) \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \\ &= \det(A) \det(B) \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det(A) \det(B). \end{aligned}$$

□

Ya hemos visto que, de existir determinantes, son únicos y se comportan como esperaríamos. Vamos a probar ahora la existencia.

**Proposición 2.5.9.** *Dado un anillo conmutativo  $R$ , existen los determinantes  $n \times n$  y satisfacen la regla de desarrollo por filas y columnas.*

*Demostración.* Probaremos este resultado por inducción en  $n$ . Cuando  $n = 1$  definimos  $\det(a) = a$  para todo  $a \in R$ . Supongamos probada la existencia de determinantes para todo entero menor que  $n$ , sea  $A \in \mathcal{M}_n(R)$ . Denotaremos por  $A_{ij}$  a la matriz  $(n-1) \times (n-1)$  que resulta de eliminar la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima de la matriz  $A$ . Fijemos arbitrariamente un  $i \in \{1, \dots, n\}$  y definimos

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Es irrelevante la elección de  $i$  puesto que ya hemos demostrado la unicidad del determinante. Basta ver que es multilineal alternado en las columnas de  $A$  para demostrar que existe uno. Fijada una columna  $k$ , entonces si  $j \neq k$ ,  $a_{ij}$  no depende de la columna  $k$ -ésima y  $\det A_{ij}$  depende linealmente de ella. Por el contrario, si  $j = k$ , el  $\det A_{ij}$  no depende de la columna  $k$ -ésima y  $a_{ij}$  depende linealmente de ella. En consecuencia, la suma de todos esos términos es lineal en cada columna, es decir, multilineal.

Para ver que es alternada supongamos que existe un  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  tal que las columnas  $k$  y  $k+1$  coinciden. Entonces,

$$\det A = (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} + (-1)^{i+k+1} a_{i,k+1} \det A_{i,k+1} = 0$$

puesto que  $a_{ik} = a_{i,k+1}$  y  $A_{ik} = A_{i,k+1}$ . Por lo que el determinante es alternado. Para ver la regla de desarrollo por columnas basta usar la proposición 2.5.7. □

Ya hemos visto que la mayoría de propiedades del determinante siguen siendo ciertas en el caso de un anillo conmutativo. Sin embargo, algunas son exclusivas de cuerpos. Sabemos que el determinante de  $n$  vectores de  $K^n$  es nulo si y solo si son linealmente dependientes. Esto deja de ser cierto en el caso de módulos. Por ejemplo, consideremos el determinante en  $\mathbb{Z}_4$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

El determinante es no nulo pero  $(2, 1)$  y  $(0, 1)$  son linealmente dependientes pues  $2(2, 1) + 2(0, 1) = (0, 0)$ .

Ahora bien, una vez probadas las propiedades básicas y la existencia, observemos que por la proposición 2.5.6 podemos considerar el determinante  $n \times n$  como un polinomio homogéneo de grado  $n$  en los coeficientes de la matriz  $\det \in R[a_{ij}]$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Como tal, podemos considerar la derivada simbólica del polinomio con respecto a alguna de las entradas de la matriz. Por tanto, tiene sentido considerar cosas como

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A)$$

y en ocasiones nos resultará útil porque nos permite aplicar el teorema de Euler para deducir identidades de los determinantes de una forma rápida. El teorema de Euler para polinomios homogéneos se prueba en [16] para condiciones mucho más generales que como hicimos nosotros para polinomios en los complejos, no siendo siquiera necesaria la conmutatividad del anillo. Dicho esto, lo usaremos a lo largo de todo el documento sin más comentarios. Por ejemplo, aplicando el teorema de Euler al determinante obtenemos

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) = n \det A.$$

Podemos calcular el valor de  $\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}$  usando el desarrollo por la fila  $i$ -ésima del determinante, entonces

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} \det A_{ik} \right) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

ya que  $\det A_{ik}$  es independiente de  $a_{ij}$  para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

La regla de desarrollo por filas o columnas de un determinante se puede ver como un caso particular del teorema de Euler cuando se aplica al polinomio homogéneo que resulta de evaluar el determinante en todas las entradas de la matriz salvo por la fila o columna por la que se está desarrollando. Por la proposición 2.5.6, el polinomio que resulta de esa evaluación parcial es homogéneo de grado 1, y la aplicación del teorema de Euler proporciona la identidad del desarrollo por fila o columna.

La parcial del determinante respecto a  $a_{ij}$ , por ser el factor que acompaña a  $a_{ij}$  en estos desarrollos, recibe el nombre de cofactor de  $a_{ij}$ . Y la matriz

$$B = \left( \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) \right)$$

se denomina la matriz de cofactores de  $A$ . Una importante relación entre los menores de la matriz de cofactores y de la matriz original nos la proporciona el teorema de Jacobi cuya demostración se encuentra en el libro de Prasolov [18] y que aquí recogemos.

**Teorema 2.5.10.** (Jacobi) Sea  $R$  es un dominio conmutativo. Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(R)$ ,  $B = (b_{ij})$  su matriz de cofactores,  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , y  $\sigma \in S_n$ , con  $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ . Entonces,

$$\det \begin{pmatrix} b_{i_1 j_1} & \cdots & b_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_k j_1} & \cdots & b_{i_k j_k} \end{pmatrix} = (-1)^{sg(\sigma)} \det \begin{pmatrix} a_{i_{k+1} j_{k+1}} & \cdots & a_{i_{k+1} j_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_n j_{k+1}} & \cdots & a_{i_n j_n} \end{pmatrix} (\det A)^{k-1}$$

*Demostración.* Vamos a probarlo primero para el caso en que  $\sigma$  es la permutación identidad, es decir,  $i_1 = j_1 = 1, \dots, i_n = j_n = n$ . Se tiene que

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & b_{1,k+1} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} & b_{k,k+1} & \cdots & b_{kn} \\ & & 0 & & \text{I} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det(A) \text{ I} & & & & & 0 \\ a_{1,k+1} & \cdots & a_{k,k+1} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{n,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{kn} & a_{k+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ya que la entrada de la fila  $r$ -ésima y columna  $s$ -ésima del producto, con  $r, s \in \{1, \dots, k\}$ , es

$$\sum_{t=1}^n b_{rt} a_{st}$$

que es el determinante de la matriz que resulta al poner en la fila  $r$ -ésima de  $A$  las entradas de la fila  $s$ -ésima. Por tanto, si  $r \neq s$ , el determinante es nulo por tener dos filas repetidas, y de lo contrario es  $\det(A)$ .

Tomando determinantes se deduce que

$$\det \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix} \det A = (\det A)^k \det \begin{pmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{n,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si  $\det A \neq 0$ , entonces basta dividir para obtener el resultado del teorema. En el caso de que  $\det A = 0$ , consideremos  $\det A$  como un polinomio de grado  $n$  en las entradas de la matriz, todos los pasos de la demostración siguen siendo válidos puesto que hemos visto que todas esas propiedades del determinante se verifican para un anillo conmutativo, en este caso  $R[a_{ij}]$ , y obtenemos una igualdad entre polinomios. Ahora bien, si  $R$  es un dominio de integridad, también lo es el anillo de polinomios  $R[a_{ij}]$ . Y  $\det A$ , como polinomio, no es el polinomio nulo, luego podemos simplificarlo de la ecuación. Evaluando la identidad de polinomios en los valores de las entradas de  $A$  queda demostrado el teorema para la permutación identidad.

Sea ahora la matriz  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{rs})$  donde  $\tilde{a}_{rs} = a_{i_r j_s}$ , entonces  $\det \tilde{A} = (-1)^{\text{sg}(\sigma)} \det A$ . Si denotamos por  $\tilde{B} = (\tilde{b}_{rs})$  a la matriz de cofactores de  $\tilde{A}$ , entonces  $\tilde{b}_{rs} = (-1)^{\text{sg}(\sigma)} b_{i_r j_s}$  puesto que una transposición de filas, o columnas, en la matriz  $A$  induce la misma transposición de la fila, o columna, correspondiente en la matriz adjunta, además de cambiar a todos sus elementos de signo.

Aplicando ahora el caso previo a las matrices  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ , obtenemos que

$$\det \begin{pmatrix} (-1)^{\text{sg}(\sigma)} b_{i_1 j_1} & \cdots & (-1)^{\text{sg}(\sigma)} b_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{\text{sg}(\sigma)} b_{i_k j_1} & \cdots & (-1)^{\text{sg}(\sigma)} b_{i_k j_k} \end{pmatrix} = \left( (-1)^{\text{sg}(\sigma)} \det A \right)^{k-1} \det \begin{pmatrix} a_{i_{k+1}, j_{k+1}} & \cdots & a_{i_n, j_{k+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_{k+1}, j_n} & \cdots & a_{i_n j_n} \end{pmatrix}$$

y multiplicando ambos lados de la expresión por  $\left((-1)^{\text{sg}(\sigma)}\right)^p$  se obtiene la identidad que se buscaba.  $\square$

Salmon enuncia este teorema en su libro [20] y en el cálculo de Clebsch lo usa en un par de ocasiones para calcular expresiones de la forma

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) \frac{\partial \det}{\partial a_{rs}}(A) - \frac{\partial \det}{\partial a_{is}}(A) \frac{\partial \det}{\partial a_{rj}}(A)$$

porque le permite reorganizar los subíndices al trabajar con cofactores en las expresiones que le aparecen.

**Corolario 2.5.11.** *Sea  $R$  un dominio conmutativo,  $A \in \mathcal{M}_n(R)$ , entonces*

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) \frac{\partial \det}{\partial a_{rs}}(A) - \frac{\partial \det}{\partial a_{is}}(A) \frac{\partial \det}{\partial a_{rj}}(A) = \det(A) \frac{\partial^2 \det}{\partial a_{ij} \partial a_{rs}}(A).$$

*Demostración.* Si  $i = r$  o  $j = s$  entonces la igualdad se reduce a  $0 = 0$ . El lado izquierdo es 0 puesto que ambos términos restando son iguales. El lado derecho es 0 porque una vez derivado respecto a  $a_{ij}$  el resultado no depende de ningún elemento de la fila  $i$ -ésima ni de la columna  $j$ -ésima.

Supongamos ahora que  $i \neq r$  y que  $j \neq s$ . Recordemos que

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \det C$$

donde  $C$  es la matriz que resulta al sustituir en la matriz  $A$  un 1 en la posición  $(i, j)$  y ceros en el resto de las entradas de la fila  $i$ -ésima y de la columna  $j$ -ésima. Entonces,

$$\frac{\partial^2 \det}{\partial a_{ij} \partial a_{rs}}(A) = \frac{\partial \det}{\partial a_{rs}}(C) = \det D$$

donde  $D$  es la matriz que resulta al sustituir en  $C$  dicha entrada por un 1 y rellenar con ceros el resto de las entradas de la fila  $r$ -ésima y la columna  $s$ -ésima, por el mismo argumento que antes, puesto que la entrada  $(r, s)$  de  $C$ , que es una matriz  $n \times n$ , es  $a_{rs}$ . Es decir, la derivada segunda del determinante se calcula sustituyendo por 1 en las entradas respecto a las que derivamos y rellenando con ceros el resto de ambas filas y columnas.

Además, puesto que las primeras derivadas son los cofactores, denotando  $b_{ij} = \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A)$

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) \frac{\partial \det}{\partial a_{rs}}(A) - \frac{\partial \det}{\partial a_{is}}(A) \frac{\partial \det}{\partial a_{rj}}(A) = \det \begin{pmatrix} b_{ij} & b_{is} \\ b_{rj} & b_{rs} \end{pmatrix}$$

que en virtud del teorema

$$\det \begin{pmatrix} b_{ij} & b_{is} \\ b_{rj} & b_{rs} \end{pmatrix} = (-1)^{\text{sg}(\sigma)} \det(A_{ij,rs}) \det(A)$$

donde  $A_{ij,rs}$  es la matriz que resulta de quitar las filas  $i$  y  $r$  y las columnas  $j$  y  $s$  de la matriz  $A$  y  $\sigma$  es la permutación  $\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$  con  $i_1 = i$ ,  $i_2 = r$ ,  $j_1 = j$ ,  $j_2 = s$  y el resto ordenados en orden creciente.

Todo lo que falta para probar el teorema es ver que  $(-1)^{\text{sg}(\sigma)} \det(A_{ij,rs}) = \det D$  pero es evidente, ya que al permutar las filas y columnas de  $D$  para mover los unos de las posiciones  $(i, j)$  y  $(r, s)$  a  $(1, 1)$  y  $(2, 2)$  el determinante nos queda multiplicado por  $(-1)^{\text{sg}(\sigma)}$  y tenemos la igualdad

$$\det D = (-1)^{\text{sg}(\sigma)} \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_{ij,rs} \end{pmatrix} = (-1)^{\text{sg}(\sigma)} \det(A_{ij,rs}).$$

con lo que el resultado queda probado.  $\square$

Este resultado no es más que una reformulación del teorema para el caso  $k = 2$  con una notación algo distinta, que necesitaremos en la próxima sección para probar algunas identidades.

### 2.5.1. Determinantes orlados

A continuación vamos a estudiar determinantes orlados (*bordered determinants* en inglés), que, aunque no son muy frecuentes en la literatura actual, fueron ampliamente estudiados en libros más viejos ([1], [20], [24]).

**Definición 2.5.12.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(R)$ , y sean  $U, V \in \mathcal{M}_{n \times k}(R)$ , donde  $k \in \mathbb{N}$ , denotamos por determinante orlado de  $A$  por  $U$  y  $V$  de orden  $k$  al determinante  $(n+k) \times (n+k)$

$$\det \begin{pmatrix} A & U \\ V^T & 0 \end{pmatrix}$$

que denotaremos por  $\det_A \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$  para no ocupar demasiado espacio con ceros en las fórmulas.

En este trabajo trabajamos con vectores columna, de ahí que nos interese tomar  $U, V \in \mathcal{M}_{n \times k}(R)$ , estamos cogiendo dos familias de  $k$  vectores y bordeando la matriz  $A$  con ellos antes de tomar el determinante. El orden del determinante orlado es la cantidad de vectores que tomamos tanto a derecha como por abajo al extender el determinante.

Veamos un ejemplo para entender mejor la notación, sea  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in R^n$ , sean  $U = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2)$ , y  $V = (\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2)$  las matrices por bloques de tamaño  $n \times 2$ . Entonces el determinante orlado de  $A$  de orden 2 es

$$\det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{y}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

donde se han omitido los paréntesis de  $U$  y de  $V$  en un abuso de notación, igual que se hará frecuentemente de aquí en adelante sin más comentarios.

Esta notación no es la más habitual, siendo más típico denotarlos mediante determinantes de matrices por bloques, pero es la que usan Salmon [19] y Clebsch [7] y nos resultará útil para expresar algunos cálculos de una forma más compacta.

Ahora pasamos a demostrar algunas propiedades del determinante orlado que necesitaremos para el cálculo de Clebsch. En primer lugar, a partir de la definición tenemos un resultado inmediato.

**Proposición 2.5.13.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(R)$ , y sean  $U, V \in \mathcal{M}_{n \times k}(R)$ , donde  $k \in \mathbb{N}$ , el determinante orlado de  $A$  es lineal en las columnas de  $U$  y  $V$ .

*Demostración.* Veamos primero que es lineal en las columnas de  $U$ . Sea  $\mathbf{u}_i$  la columna  $i$ -ésima de la matriz  $U$ , con  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Por la definición de determinante, este es lineal en la columna  $n+i$  de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} A & U \\ V^T & 0 \end{pmatrix} = (m_{rs})$$

pero la columna  $n+i$  de esa matriz es la columna  $\mathbf{u}_i$  seguida de  $i$  ceros. Esto es la restricción al subespacio lineal  $m_{n+1, n+i} = \dots = m_{n+k, n+i} = 0$ , luego la aplicación restringida sigue siendo lineal.

En cuanto a las columnas de  $V$  el argumento es el mismo pero usando que  $\det M = \det M^T$  por la proposición 2.5.7.  $\square$

Volviendo al ejemplo (2.8), el determinante orlado es lineal en  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1$  y  $\mathbf{y}_2$ . Y usando esta propiedad en el caso más sencillo, obtenemos la siguiente identidad para determinantes orlados de orden 1.

**Corolario 2.5.14.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(R)$ ,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in R^n$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in R$ ,

$$\det_A \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \\ \mu_1 \mathbf{y}_1 + \mu_2 \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mu_1 \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \mu_2 \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \mu_1 \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \mu_2 \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$$

Otra propiedad inmediata es que los papeles de  $U$  y  $V$  son intercambiables cuando la matriz  $A$  es simétrica.

**Proposición 2.5.15.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(R)$  una matriz simétrica, y sean  $U, V \in \mathcal{M}_{n \times k}(R)$ , entonces

$$\det_A \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \det_A \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix}$$

*Demostración.* Es una consecuencia de la proposición 2.5.7, ya que

$$\det_A \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & U \\ V^T & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A^T & V \\ U^T & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & V \\ U^T & 0 \end{pmatrix} = \det_A \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix}$$

$\square$

Vamos a ver otras dos identidades que nos resultarán útiles más adelante. La primera es el desarrollo de un determinante orlado de orden 1.

**Proposición 2.5.16.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(R)$ , y sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ , entonces

$$\det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} x_i y_j$$

*Demostración.* Vamos a ver que la identidad se obtiene desarrollando primero por la columna con los  $x_i$  y después cada uno de los menores que aparecen por la fila con los  $y_j$ . Observemos primero que

$$\det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que desarrollado por la última columna queda

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{n+1+i} x_i \det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}.$$

Desarrollando ahora por la última fila, obtenemos

$$\sum_{i,j=1}^n (-1)^{n+1+i} (-1)^{n+j} x_i y_j \det \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = - \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+j} \det A_{ij} x_i y_j$$

que, usando la notación de las parciales del determinante es lo mismo que lo que queríamos probar.  $\square$

Finalmente, también necesitaremos una relación entre los determinantes orlados de orden 2 y los de orden 1, que nos proporciona el teorema 2.5.10.

**Proposición 2.5.17.** *Sea  $R$  un dominio conmutativo,  $A \in \mathcal{M}_n(R)$ , y sean  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in R^n$ , entonces*

$$\det(A) \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} - \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix}$$

*Demostración.* Vamos a aplicar el teorema 2.5.10 a la matriz  $(n+2) \times (n+2)$

$$M = \begin{pmatrix} A & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{y}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con  $k = 2$ ,  $i_1 = j_1 = n+1$ ,  $i_2 = j_2 = n+2$ ,  $i_3 = j_3 = 1, \dots, i_{n+2} = j_{n+2} = n$  según la notación del teorema. Entonces, la permutación es la identidad, que tiene signo cero y el teorema afirma que

$$\det \begin{pmatrix} b_{n+1,n+1} & b_{n+1,n+2} \\ b_{n+2,n+1} & b_{n+2,n+2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \det M$$

donde  $B = (b_{ij})$  son los cofactores de  $M$ . Ahora bien,  $m_{ij} = a_{ij}$  cuando  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  y

$$\det M = \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$$

por lo que el lado derecho de la igualdad del teorema es

$$\det(A) \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, los cofactores  $b_{n+i, n+j}$  son el determinante de la matriz que resulta al borrar la fila  $n+i$ , que corresponde al vector  $\mathbf{y}_i$  y la columna  $n+j$ , que corresponde al vector  $\mathbf{x}_j$ , y multiplicarlo por  $(-1)^{n+i+n+j} = (-1)^{i+j}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} b_{n+1, n+1} &= \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} & b_{n+2, n+2} &= \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} \\ b_{n+1, n+2} &= -\det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} & b_{n+2, n+1} &= -\det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} b_{n+1, n+1} & b_{n+1, n+2} \\ b_{n+2, n+1} & b_{n+2, n+2} \end{pmatrix} &= b_{n+1, n+1} b_{n+2, n+2} - b_{n+1, n+2} b_{n+2, n+1} \\ &= \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} - \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \det_A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lo que prueba la identidad. □

# Capítulo 3

## Geometría algebraica

El trabajo de Salmon se enmarca dentro de lo que hoy en día es el campo de la geometría algebraica. En este capítulo vamos a tratar los conceptos más básicos de esta amplia rama necesarios para entender el cálculo de Clebsch.

La geometría algebraica es el estudio de la estructura que tienen los ceros de polinomios, o de forma más precisa, el estudio de objetos geométricos que se pueden describir localmente por ceros de polinomios. Se desarrolló principalmente a mediados del siglo XX gracias a Hilbert y Noether por sus avances en álgebra conmutativa y a Zariski y Weil por sentar las bases de este área. Todo esto es muy posterior a la época de Salmon, por supuesto.

Actualmente, el lenguaje que se emplea es el de esquemas, desarrollado por Grothendieck. Sin embargo, aunque más potente, es más oscuro y no lo necesitamos para nuestros propósitos, por lo que, igual que muchos libros básicos de geometría algebraica, no lo emplearemos en este trabajo.

### 3.1. Conjuntos algebraicos y topología de Zariski

En primer lugar, tenemos que definir los conjuntos con los que vamos a trabajar en geometría algebraica, y dotarlos de una estructura topológica que nos permita concretar a qué nos vamos a referir con propiedades locales. Para esta sección usaré el libro de Shafarevich [21] y el de Smith [22] como referencias principales.

Denotaremos de aquí en adelante por  $\mathbb{A}^n$  el espacio afín de dimensión  $n$  sobre el cuerpo de los complejos, es decir, el espacio formado por los puntos  $(x_1, \dots, x_n)$  con  $x_i \in \mathbb{C}$ . Denotaremos por  $\mathbb{P}^n$  el espacio proyectivo de dimensión  $n$  sobre el cuerpo de los complejos. Recordemos que una forma de definir el espacio proyectivo consiste en tomar las clases de equivalencia  $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) / \sim$ , que denotaremos por  $[x_0 : \dots : x_n]$ , donde  $x_i \in \mathbb{C}$  y donde

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (x_0', \dots, x_n') \text{ si } \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } x_i = \lambda x_i', i \in \{0, \dots, n\}.$$

Los espacios afín y proyectivo serán los espacios ambiente en los que trabajaremos. Veremos más adelante en algún ejemplo por qué es importante restringir el estudio a los números complejos.

**Definición 3.1.1.** Sean  $f_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  polinomios, con  $i \in I$ , siendo  $I$  un conjunto de índices. Denotaremos por  $\mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I})$  al conjunto de ceros de los polinomios  $f_i$ . Es

decir,

$$\mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A}^n, f_i(\mathbf{x}) = 0, \forall i \in I\}.$$

Decimos que un subconjunto  $V \subset \mathbb{A}^n$  es un conjunto algebraico afín si existe una familia de polinomios  $f_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  con  $i \in I$  tal que  $V = \mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I})$ .

Dos ejemplos inmediatos de conjunto algebraico afín son  $\mathbb{A}^n$  y  $\emptyset$ , ya que  $\mathbb{A}^n = \mathbb{V}(0)$  y  $\emptyset = \mathbb{V}(1)$ . Otros ejemplos sencillos de conjunto algebraico son los puntos. El punto  $(p_1, \dots, p_n)$  de  $\mathbb{A}^n$  es el conjunto  $\mathbb{V}(X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n)$ .

En estos casos, el conjunto  $I$  es finito, pero no tiene por qué ser así. El conjunto vacío se puede escribir también como  $\emptyset = \mathbb{V}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n])$ . Esto ilustra un principio más general,

$$V = \mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I}) = \mathbb{V}(J)$$

donde  $J$  es el ideal generado por la familia de polinomios  $\{f_i\}_{i \in I}$ . En efecto, si  $f \in J$ , existen  $i_1, \dots, i_m \in I$  tales que  $f$  es combinación lineal de  $f_{i_1}, \dots, f_{i_m}$ . Como para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $f_{i_k}$  se anula en todo punto de  $\mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I})$ ,  $f$  se anula en el conjunto algebraico  $\mathbb{V}(J)$ . Esto prueba que  $\mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I}) \subset \mathbb{V}(J)$ , y la otra contención es evidente.

Por tanto, un conjunto algebraico puede describirse por un ideal del anillo de polinomios o por un sistema de generadores de este. Ahora bien, gracias al teorema de la base de Hilbert sabemos que  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  es un anillo noetheriano por lo que todo ideal de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  admite un sistema de generadores finito, y obtenemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.1.2.** *Sea  $V$  un conjunto algebraico afín, existen  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  tales que  $V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_m)$ .*

*Demostración.* Sea  $\{f_i\}_{i \in I}$  una familia de polinomios tal que  $V = \mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I})$  y sea  $J \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  el ideal generado por dicha familia. Como  $\mathbb{C}$  es un cuerpo, es un anillo noetheriano, por lo tanto, por el teorema de la base de Hilbert,  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  es noetheriano y  $J$  es finitamente generado, es decir, existen  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  tales que  $J = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ . Por lo tanto,

$$V = \mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I}) = \mathbb{V}(J) = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_m).$$

□

Una vez visto lo que son los conjuntos algebraicos afines, vamos a ver que nos sirven para definir una topología en el espacio afín. En efecto, ya hemos visto que el vacío y el total son conjuntos algebraicos afines. Nos falta ver qué ocurre con la unión finita y la intersección de cualquier número de conjuntos algebraicos afines.

**Proposición 3.1.3.** *La unión de dos conjuntos algebraicos afines es un conjunto algebraico afín.*

*Demostración.* Sean  $V_1$  y  $V_2$  dos conjuntos algebraicos afines, y  $\{f_i\}_{i \in I}$  y  $\{f_j\}_{j \in J}$ , dos familias de polinomios tales que  $V_1 = \mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I})$  y  $V_2 = \mathbb{V}(\{f_j\}_{j \in J})$ .

Si  $\mathbf{p} \in V_1 \cup V_2$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\mathbf{p} \in V_1$ , con lo que  $f_i(\mathbf{p}) = 0$ , para todo  $i \in I$ . Entonces,  $f_i(\mathbf{p})f_j(\mathbf{p}) = 0$ , para cualquier  $(i, j) \in I \times J$ , por lo que  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(\{f_i f_j\}_{(i,j) \in I \times J})$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(\{f_i f_j\}_{(i,j) \in I \times J})$ , si  $f_j(\mathbf{p}) = 0$  para todo  $j \in J$ ,  $\mathbf{p} \in V_2$ . Si existe un  $j \in J$  tal que  $f_j(\mathbf{p}) \neq 0$ , entonces fijado ese  $j$ , como  $f_i(\mathbf{p})f_j(\mathbf{p}) = 0$  para todo  $i \in I$ , concluimos que  $f_i(\mathbf{p}) = 0$  y que  $\mathbf{p} \in V_1$ .

Por tanto,

$$\mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I}) \cup \mathbb{V}(\{f_j\}_{j \in J}) = \mathbb{V}(\{f_i f_j\}_{(i,j) \in I \times J})$$

y la unión finita de conjuntos algebraicos afines sigue siendo un conjunto algebraico afín.  $\square$

**Proposición 3.1.4.** *La intersección de un número arbitrario de conjuntos algebraicos afines es un conjunto algebraico afín.*

*Demostración.* Sea  $\{V_i\}_{i \in I}$  una familia de conjuntos algebraicos afines, con  $V_i = \mathbb{V}(\{f_j\}_{j \in J_i})$  entonces

$$\bigcap_{i \in I} V_i = \mathbb{V}(\{f_j\}_{j \in \cup_{i \in I} J_i})$$

por lo que la intersección de conjuntos algebraicos afines es un conjunto algebraico afín.  $\square$

Obsérvese que mientras que no hay problema en hacer una intersección infinita de conjuntos algebraicos afines, sí puede ocurrir que una unión infinita de conjuntos algebraicos afines deje de serlo. Como ya dijimos antes, los puntos son un conjunto algebraico, y todo conjunto puede escribirse como la unión de sus puntos. Sin embargo, el conjunto  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$  no es algebraico ya que cualquier polinomio  $f \in \mathbb{C}[X]$  que se anule en todos los puntos de  $\mathbb{C}$  salvo el 0 debe anularse en el cero por continuidad.

La Proposición 3.1.3 y la Proposición 3.1.4, junto con el comentario que ya se hizo de que el total y el vacío también son algebraicos nos permite afirmar que los conjuntos algebraicos afines definen una topología en la que estos son precisamente los conjuntos cerrados.

**Definición 3.1.5.** Llamaremos topología de Zariski a la topología en  $\mathbb{A}^n$  donde los conjuntos cerrados son justamente los conjuntos algebraicos afines.

Sin embargo, nos son familiares los problemas que surgen al considerar intersecciones de subespacios en el espacio afín. En el plano afín, dos rectas no tienen por qué tener una intersección común mientras que en el plano proyectivo sí tienen siempre mínimo un punto de intersección. En el caso de los conjuntos algebraicos tendremos problemas similares. Es por eso que en geometría algebraica interesa estudiar los ceros de polinomios en el espacio proyectivo, no en el afín.

En primer lugar, sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ , observemos que no tiene sentido evaluarlo en un punto  $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n$ , ya que

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = f_0(x_0, \dots, x_n) + \dots + \lambda^d f_d(x_0, \dots, x_n),$$

donde  $d$  es el grado de  $f$  y  $f_i$  es la descomposición en polinomios homogéneos de  $f$ , visto como polinomio de una variable en  $\lambda$ , es una constante si y solo si  $d = 0$ . Por tanto, en general, un polinomio toma valores distintos para puntos que pertenecen a la misma clase como elementos de  $\mathbb{P}^n$ .

Por otro lado, sí tiene sentido considerar los puntos en los que el polinomio se anula.  $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  si y solo si es nulo como polinomio en  $\lambda$ . Pero eso es que sus coeficientes sean nulos, es decir, si y solo si  $f_i(x_0, \dots, x_n) = 0$ ,  $i = 0, \dots, d$ .

Usando este concepto de cero de polinomio en el espacio proyectivo, podemos definir los conjuntos algebraicos proyectivos de la misma forma que para el caso afín.

**Definición 3.1.6.** Sean  $f_i \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ ,  $i \in I$ , denotaremos por  $\mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I}) \subset \mathbb{P}^n$  al conjunto de ceros de los polinomios  $f_i$ . Es decir,

$$\mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n, f_i(\mathbf{x}) = 0 \forall i \in I\}$$

Decimos que un subconjunto  $V \subset \mathbb{P}^n$  es un conjunto algebraico proyectivo si existe una familia de polinomios  $f_i \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  con  $i \in I$  tal que  $V = \mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I})$ .

*Nota.* Obsérvese que en la definición se ha cometido el abuso de notación de identificar  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  con la clase de  $\mathbf{x}$  en  $\mathbb{P}^n$ . Esto se ha hecho así para no sobrecargar la notación y se trata de un abuso de notación que se dará frecuentemente en el texto.

Trabajar en el proyectivo tiene sus particularidades. Observemos que hemos dicho que hemos dicho que el que se anule el polinomio es equivalente a que se anulen todos los polinomios de su descomposición en homogéneos. Por lo que

$$\mathbb{V}(f) = \mathbb{V}(f_0, \dots, f_d) = \mathbb{V}(\langle f_0, \dots, f_d \rangle) \subset \mathbb{P}^n,$$

donde  $f_0, \dots, f_d$  son homogéneos. Por tanto, los polinomios homogéneos jugarán un papel muy importante en los conjuntos algebraicos proyectivos.

**Proposición 3.1.7.** Sea  $V$  un conjunto algebraico proyectivo, existe un número finito de polinomios homogéneos en  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  que definen  $V$ .

*Demostración.* De igual manera que en la Proposición 3.1.2, se prueba que  $V$  está generado por un número finito de polinomios

$$V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_m).$$

Ahora bien, como hemos explicado antes, que un punto se anule en cada uno de esos polinomios es equivalente a que se anule en sus componentes homogéneas, luego

$$V = \mathbb{V}(f_{1,0}, \dots, f_{1,d_1}, \dots, f_{m,0}, \dots, f_{m,d_m}),$$

donde  $d_i$  es el grado de  $f_i$  y  $f_{i,0}, \dots, f_{i,d_i}$  es la descomposición en polinomios homogéneos de  $f_i$ . □

De igual manera que para el caso afín, se demuestra que la unión de dos conjuntos algebraicos proyectivos es un conjunto algebraico proyectivo y que la intersección de un número arbitrario de conjuntos algebraicos proyectivos sigue siendo un conjunto algebraico proyectivo. De esta forma, es posible definir una topología igual que en caso afín.

**Definición 3.1.8.** Llamaremos topología de Zariski a la topología en  $\mathbb{P}^n$  donde los conjuntos cerrados son justamente los conjuntos algebraicos proyectivos.

Ahora bien, podemos considerar el espacio afín inmerso en el proyectivo mediante la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto [1: x_1: \dots: x_n]. \end{aligned}$$

La elección de hacer  $x_0 = 1$  es arbitraria y bien se podría haber fijado a 1 cualquier otra de las coordenadas del proyectivo. Estas aplicaciones las llamaremos cartas afines, y denotaremos sus imágenes por  $\mathbb{A}_i^n$  donde  $i$  es el índice de la coordenada que se ha fijado a 1. Podemos identificar cualquier  $\mathbb{A}_i^n$  por el espacio afín  $\mathbb{A}^n$ . Sus complementarios son los hiperplanos  $\mathbb{V}(X_i)$ , que llamaremos puntos del infinito. Además, puesto que  $\mathbb{A}_i^n = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(X_i)$ , se tratan de un abiertos de  $\mathbb{P}^n$ .

Si podemos considerar  $\mathbb{A}^n$  inmerso en  $\mathbb{P}^n$ , cabe preguntarse si la topología de Zariski en  $\mathbb{A}^n$  coincide con la topología de subespacio. Es decir, queremos ver qué ocurre con la intersección de los conjuntos algebraicos proyectivos con  $\mathbb{A}_i^n$ . Puesto que los conjuntos algebraicos proyectivos están definidos por polinomios homogéneos y los conjuntos algebraicos afines están definidos por polinomios, lo primero es ver cómo pasar de un caso a otro.

**Definición 3.1.9.** Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio homogéneo, definimos por

$$f_* = f(1, X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$$

al deshomonogeneizado de  $f$  en la coordenada  $X_0$ .

**Definición 3.1.10.** Sea

$$f = \sum_{i_1 + \dots + i_n \leq d} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n],$$

un polinomio de grado  $d$ , definimos por

$$f^* = \sum_{i_1 + \dots + i_n \leq d} a_{i_1, \dots, i_n} X_0^{d-i_1-\dots-i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$$

al homogeneizado de  $f$  en la coordenada  $X_0$ .

Nótese que el homogeneizado de  $f$  en la coordenada  $X_0$  es un polinomio homogéneo de grado  $d$  al que no divide  $X_0$ , ya que existe un monomio  $X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$  de grado exactamente  $d$ .

Estas aplicaciones nos permiten establecer una biyección entre los polinomios homogéneos de grado  $d$  en  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  y los polinomios  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  de grado menor o igual que  $d$ . Usaremos esta biyección para probar la relación entre la topología de Zariski afín y proyectiva.

**Proposición 3.1.11.** *Cualquier  $\mathbb{A}_i^n$  con la topología de subespacio que induce la topología de Zariski de  $\mathbb{P}^n$  es homeomorfo a  $\mathbb{A}^n$  con la topología de Zariski.*

*Demostración.* Basta probarlo para el caso  $\mathbb{A}_0^n$ , para otro  $\mathbb{A}_i^n$  la prueba es análoga.

Tenemos que encontrar una biyección entre  $\mathbb{A}_0^n$  y  $\mathbb{A}^n$  que transforme cerrados en cerrados. Sea  $\phi: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}_0^n$  la aplicación  $\phi(x_1, \dots, x_n) = [1: x_1: \dots: x_n]$ . Está bien definida y es evidentemente biyectiva.

Los conjuntos cerrados de  $\mathbb{A}_0^n$  son aquellos que se pueden escribir como  $V \cap \mathbb{A}_0^n$  con  $V \subset \mathbb{P}^n$  un conjunto cerrado para la topología de Zariski en  $\mathbb{P}^n$ . Por la Proposición 3.1.7, existen  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  polinomios homogéneos tal que  $V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_m)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(V \cap \mathbb{A}_0^n) &= \phi^{-1}(\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_0^n, f_1(1, x_1, \dots, x_n) = \dots = f_m(1, x_1, \dots, x_n) = 0\}) \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n, f_{1*}(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_{m*}(x_1, \dots, x_n) = 0\} \\ &= \mathbb{V}(f_{1*}, \dots, f_{m*}) \subset \mathbb{A}^n \end{aligned}$$

Sea  $V$  un cerrado de  $\mathbb{A}^n$ , por la Proposición 3.1.2, existen  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  tal que  $V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_m)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \phi(V) &= \phi(\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}^n, f_1(\mathbf{x}) = \dots = f_m(\mathbf{x}) = 0\}) \\ &= \phi(\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}^n, f_1^*(1, x_1, \dots, x_n) = \dots = f_m^*(1, x_1, \dots, x_n) = 0\}) \\ &= \mathbb{V}(f_1^*, \dots, f_m^*) \cap \mathbb{A}_0^n \end{aligned}$$

Con lo que  $\phi$  es un homeomorfismo entre  $\mathbb{A}_0^n$  y  $\mathbb{A}^n$ , lo que prueba la proposición.  $\square$

Esta proposición justifica que de aquí en adelante cometamos el abuso de notación de decir que  $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ . Entendiendo que estamos identificando  $\mathbb{A}^n$  con la copia afín  $\mathbb{A}_0^n$  a menos que se especifique alguna otra  $\mathbb{A}_i^n$ . Además, puesto que cualquier punto de  $\mathbb{P}^n$  pertenece a algún  $\mathbb{A}_i^n$ , y estos son abiertos, cualquier punto tiene un entorno homeomorfo a  $\mathbb{A}^n$ . Por lo tanto, para estudiar propiedades locales de la topología de Zariski siempre podemos trabajar en el espacio afín mediante una carta afín apropiada.

Como se ha justificado,  $\mathbb{A}^n$  es un abierto de  $\mathbb{P}^n$  y, como se ha probado en la proposición,

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_m) = \mathbb{V}(f_1^*, \dots, f_m^*) \cap \mathbb{A}^n.$$

Entonces, el conjunto algebraico afín  $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{A}^n$  es un abierto para la topología de subespacio del conjunto algebraico proyectivo  $\mathbb{V}(f_1^*, \dots, f_m^*) \subset \mathbb{P}^n$ .

*Nota.* En ningún momento hemos dado una definición de variedad algebraica, sino que nos limitamos a conjuntos algebraicos, afines o proyectos, que dependen de un espacio proyectivo ambiente. Estamos trabajando por tanto de forma algo más restringida a como se suele hacer en geometría algebraica. El siguiente grado de abstracción sería lo que Shafarevich [21] llama variedades cuasiproyectivas, y que engloba tanto los conjuntos algebraicos proyectivos como los afines. Sin embargo, en nuestro caso nos es suficiente con esto y desarrollar las herramientas para estudiar la estructura de las variedades de forma más general nos desviaría de nuestro objetivo de estudio.

En el caso de los conjuntos algebraicos afines es sencillo comprobar que el producto de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico, ya que tenemos una inmersión natural de  $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n$  en  $\mathbb{A}^{m+n}$ . Sin embargo, no resulta tan sencillo el caso proyectivo, que vamos a desarrollar ahora. Esto nos servirá de ejemplo, ya que el producto tiene sentido topológico independientemente de la geometría algebraica. Pero, además, este ejemplo tiene bastante importancia puesto que veremos que de hecho el producto de conjuntos algebraicos proyectivos sigue siendo un conjunto algebraico.

**Ejemplo 3.1.12.** (Aplicación de Segre) Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , definimos la aplicación de Segre de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Sigma_{m,n}: \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ ([x_0, \dots, x_m], [y_0, \dots, y_n]) &\mapsto [z_{00}: z_{01}: \dots: z_{mn}] \end{aligned}$$

donde  $N = (m+1)(n+1) - 1$  y  $z_{ij} = x_i y_j$ . Y, evidentemente, está bien definida, puesto que  $\Sigma_{m,n}(\lambda \mathbf{x}, \mu \mathbf{y}) = \lambda \mu \mathbf{z}$  y no todos los  $z_{ij}$  son nulos.

Para estudiar esta aplicación, consideremos su restricción a los subespacios  $\mathbb{A}_i^m \times \mathbb{A}_j^n$ , con  $i \in \{0, \dots, m\}$  y  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Estos subespacios son abiertos en la topología producto por ser producto de abiertos, y su imagen está contenida en  $\mathbb{A}_{ij}^N := \mathbb{P}^N \setminus \mathbb{V}(Z_{ij})$ .

La aplicación de Segre es inyectiva. En efecto, sean  $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{P}^m$  y  $\mathbf{y}, \mathbf{v} \in \mathbb{P}^n$  tal que  $\Sigma_{m,n}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \Sigma_{m,n}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \mathbf{z}$ . Entonces, existen  $i, j$  tales que  $\mathbf{z} \in \mathbb{A}_{ij}^N$ , y, por tanto,  $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{A}_i^m$  y  $\mathbf{y}, \mathbf{v} \in \mathbb{A}_j^n$ . Entonces, de  $\Sigma_{m,n}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \Sigma_{m,n}(\mathbf{y}, \mathbf{v})$ , comparando las componentes del representante con  $z_{ij} = 1$ , concluimos que  $z_{1j} = x_1 = u_1, \dots, z_{mj} = x_m = u_m$  y  $z_{i1} = y_1 = v_1, \dots, z_{in} = y_n = v_n$ , con lo que la aplicación es inyectiva.

Veamos ahora que la imagen de  $\Sigma_{m,n}$  es una variedad algebraica. En primer lugar, está contenida en  $V = \mathbb{V}(\{Z_{ij}Z_{kl} - Z_{il}Z_{kj}, 0 \leq i, k \leq m, 0 \leq j, l \leq n\})$ , como se ve inmediatamente a partir de la definición. Ahora, sea  $\mathbf{z} \in V$ , igual que hicimos antes, existen  $i, j$  tales que  $\mathbf{z} \in \mathbb{A}_{ij}^N$ . Fijando el representante de  $\mathbf{z}$  con  $z_{ij} = 1$ , se tiene de las ecuaciones que definen  $V$  que  $z_{kl} = z_{il}z_{kj}$  para todo  $k \in \{0, \dots, m\}$  y  $l \in \{0, \dots, n\}$ . Entonces,  $\mathbf{z} = \Sigma_{m,n}([z_{0j}: \dots: z_{mj}], [z_{i0}: \dots: z_{in}])$ , con lo que  $V = \text{Im}(\Sigma_{m,n})$ .

Nos falta comprobar que, de hecho,  $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$  es homeomorfo a su imagen por la aplicación de Segre. Para ello, nótese primero que  $V \cap \mathbb{A}_{ij}^N \cong \mathbb{A}^{m+n}$ . Esto es consecuencia de que la imagen de la aplicación de Segre, en la copia afín  $\mathbb{A}_{ij}^N$ , verifique que  $z_{1j} = x_1, \dots, z_{mj} = x_m$  y  $z_{i1} = y_1, \dots, z_{in} = y_n$  como se ha justificado antes. Entonces, puesto que tanto la aplicación de Segre como su inversa son continuas en abiertos que recubren los espacios de salida y de llegada son continuas. Esto permite afirmar que  $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$  es homeomorfo a  $V$ , y, por tanto, la aplicación de Segre nos proporciona una inmersión continua de un producto de variedades en el espacio ambiente  $\mathbb{P}^N$ .

## 3.2. Componentes irreducibles

**Definición 3.2.1.** Un conjunto algebraico afín  $V$  se dice irreducible si al tener  $V = V_1 \cup V_2$  con  $V_1$  y  $V_2$  conjuntos algebraicos afines, se tiene que o bien  $V_1 = V$  o bien  $V_2 = V$ . Si  $V$  no es irreducible, se dice que es reducible.

Vamos a ver cómo estudiar si un conjunto algebraico afín es irreducible. Para ello, tenemos que definir el ideal de un conjunto.

**Definición 3.2.2.** Sea  $X \subset \mathbb{A}^n$ , se define el ideal de  $X$  como

$$\mathbb{I}(X) = \{f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n], f(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Es inmediato comprobar que para cualquier conjunto  $X \subset \mathbb{A}^n$ ,  $\mathbb{I}(X)$  es un ideal. Muchas propiedades geométricas de los conjuntos algebraicos tienen su equivalente en propiedades algebraicas de su ideal asociado. La irreducibilidad es un ejemplo de esto.

**Lema 3.2.3.** *Dos conjuntos algebraicos afines son iguales si y solo si sus ideales lo son.*

*Demostración.* Sean  $V_1, V_2 \subset \mathbb{A}^n$  dos conjuntos algebraicos. Es evidente que si son iguales entonces  $\mathbb{I}(V_1) = \mathbb{I}(V_2)$ , veamos ahora la otra implicación.

En primer lugar, por definición, tenemos que  $V \subset \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$  para cualquier  $V \subset \mathbb{A}^n$ . Ahora, si  $V$  es un conjunto algebraico afín definido por  $V = \mathbb{V}(J)$  con  $J$  un ideal, y  $\mathbf{x} \in \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ , entonces,  $f(\mathbf{x}) = 0$  para todo  $f \in \mathbb{I}(V)$ , en particular, puesto que  $J \subset \mathbb{I}(V)$ ,  $f(\mathbf{x}) = 0$  para todo  $f \in J$ , luego  $\mathbf{x} \in V$ . Con esto queda probado que si  $V$  es un conjunto algebraico afín,  $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ .

Finalmente, si  $\mathbb{I}(V_1) = \mathbb{I}(V_2)$ , entonces,  $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V_1)) = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V_2))$ , lo que implica como hemos demostrado que  $V_1 = V_2$ .  $\square$

**Proposición 3.2.4.** *Sea  $V$  un conjunto algebraico afín,  $V$  es irreducible si y solo si  $\mathbb{I}(V)$  es primo.*

*Demostración.* Supongamos que el ideal  $\mathbb{I}(V)$  no es primo. Entonces, existen  $f_1, f_2 \notin \mathbb{I}(V)$  con  $f_1 f_2 \in \mathbb{I}(V)$ . Podemos escribir  $V = V_1 \cup V_2$  con  $V_1 = V \cap \mathbb{V}(f_1)$  y  $V_2 = V \cap \mathbb{V}(f_2)$ . Además, se tiene que  $V_1 \neq V$  ya que  $f_1 \in \mathbb{I}(V_1)$  pero  $f_1 \notin \mathbb{I}(V)$  y análogamente con  $V_2$ . Por lo que  $V$  no es irreducible.

Supongamos ahora que  $V$  no es irreducible, es decir, que existen  $V_1$  y  $V_2$  distintos de  $V$  con  $V = V_1 \cup V_2$ . Como  $V_1$  está estrictamente contenido en  $V$ , existe un  $f_1 \in \mathbb{I}(V_1) \setminus \mathbb{I}(V)$ , ya que de lo contrario se tendría  $\mathbb{I}(V_1) = \mathbb{I}(V)$  y hemos dicho que  $V_1 \neq V$ . De la misma forma existe un  $f_2 \in \mathbb{I}(V_2) \setminus \mathbb{I}(V)$ .

Ahora,  $f = f_1 f_2 \in \mathbb{I}(V)$ , ya que si  $\mathbf{x} \in V$ , o bien  $\mathbf{x} \in V_1$  y  $f_1(\mathbf{x}) = 0$  o  $\mathbf{x} \in V_2$  y  $f_2(\mathbf{x}) = 0$ , en cualquier caso  $f(\mathbf{x}) = 0$ . Por lo tanto,  $\mathbb{I}(V)$  no es primo.  $\square$

**Corolario 3.2.5.** *Un conjunto algebraico,  $V = \mathbb{V}(f)$ , con  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , y tal que  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ , es irreducible si y solo si  $f$  es irreducible.*

En este trabajo nos centraremos particularmente en los conjuntos algebraicos de esta forma. Este caso, dada su importancia, recibe un nombre, hipersuperficie.

**Definición 3.2.6.** Un conjunto algebraico,  $V = \mathbb{V}(f)$ , con  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , y tal que  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ , se llama hipersuperficie. Se define el grado de la hipersuperficie como el grado de  $f$ . Una hipersuperficie de grado 1 se llama hiperplano.

Si el espacio ambiente es  $\mathbb{A}^2$ , llamaremos curvas a las hipersuperficies, y si es  $\mathbb{A}^3$ , las llamaremos superficies.

El siguiente resultado nos dice que todo conjunto algebraico afín puede descomponerse de manera única en conjuntos algebraicos afines irreducibles. Por tanto, algunas propiedades se pueden estudiar en conjuntos irreducibles sin pérdida de generalidad.

**Teorema 3.2.7.** *Cualquier conjunto algebraico afín  $V$  es una unión finita de conjuntos algebraicos irreducibles  $V_i$ . Se puede exigir, además, que  $V_i \not\subset V_j$  para cualquier par  $i, j$ . En estas condiciones, los conjuntos  $V_i$  están definidos de forma única y reciben el nombre de componentes irreducibles de  $V$ .*

*Demostración.* Sea  $V$  un conjunto algebraico afín. Probaremos primero que es unión finita de conjuntos algebraicos irreducibles. Supongamos que no lo fuera, entonces,  $V$  es reducible y podemos poner  $V = V_1 \cup V_1'$ , donde o bien  $V_1$  o  $V_1'$  no es unión finita de conjuntos

algebraicos irreducibles, podemos decir sin pérdida de generalidad que es el caso de  $V_1$ . Repitiendo el mismo razonamiento de forma inductiva, obtenemos una cadena de conjuntos algebraicos estrictamente contenidos cada uno en el anterior  $V \supsetneq V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \dots$ .

Aplicando  $\mathbb{I}$  a dicha cadena obtenemos una cadena estrictamente creciente de ideales  $\mathbb{I}(V) \subsetneq \mathbb{I}(V_1) \subsetneq \mathbb{I}(V_2) \subsetneq \dots$ . Sin embargo, esto no es posible, por el teorema de la base de Hilbert. Al ser  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  Noetheriano, la unión de todos los ideales de la cadena es finitamente generada por unos polinomios  $\{f_1, \dots, f_r\}$ . Entonces, para cada  $f_i$  existe un  $\mathbb{I}(V_{k_i})$  tal que  $f_i \in \mathbb{I}(V_{k_i})$ . Sea  $k = \max\{k_i, i = 1, \dots, r\}$ , entonces a partir de  $\mathbb{I}(V_k)$  todos los ideales deben ser iguales, en contra de que las contenciones sean estrictas. Por tanto, llegamos a un absurdo, y todo conjunto algebraico afín se puede escribir como una unión finita de conjuntos algebraicos irreducibles.

Si  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$ , y existen  $i, j$  tales que  $V_i \subset V_j$ , podemos eliminar el conjunto  $V_i$  de la unión. Repitiendo esto, eventualmente, obtenemos una descomposición como la que exige el teorema. Veamos ahora que es única. Sean  $U_j$  conjuntos algebraicos afines irreducibles tal que  $V = U_1 \cup \dots \cup U_s$ . Entonces,

$$V_i = V_i \cap V = V_i \cap \left( \bigcup_{j=1}^s U_j \right) = \bigcup_{j=1}^s (V_i \cap U_j).$$

Pero como  $V_i$  es irreducible, existe un  $j$  tal que  $V_i \cap U_j = V_i$ , es decir,  $V_i \subset U_j$ . Inter-cambiando los papeles de  $V_i$  y  $U_j$  concluimos que existe  $i'$  tal que  $U_j \subset V_{i'}$ . Entonces,  $V_i \subset U_j \subset V_{i'}$ , luego por cómo hemos construido la descomposición  $V_i, i = i'$  y  $V_i = U_j$ . Concluimos que  $r = s$  y que ambas descomposiciones coinciden, lo que prueba el teorema.  $\square$

En el caso de conjuntos algebraicos proyectivos, se define el concepto de irreducibilidad de la misma forma, y todos los resultados siguen siendo ciertos sin más que adaptar las demostraciones mínimamente.

**Definición 3.2.8.** Un conjunto algebraico proyectivo  $V$  se dice irreducible si al tener  $V = V_1 \cup V_2$  con  $V_1$  y  $V_2$  conjuntos algebraicos proyectivos, se tiene que o bien  $V_1 = V$  o bien  $V_2 = V$ .

El concepto de ideal de un conjunto proyectivo también se define igual, salvo que el que un polinomio se anule en un punto, como ya vimos, requiere que se anulen todas sus componentes homogéneas. Exceptuando esta salvedad, todos los resultados de esta sección se pueden demostrar igual.

**Definición 3.2.9.** Sea  $X \subset \mathbb{P}^n$ , se define el ideal de  $X$  como

$$\mathbb{I}(X) = \{f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n], f(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in X\}.$$

Así mismo, el concepto de hipersuperficie, se extiende de forma natural al caso proyectivo sin más que exigir que el polinomio que la define sea homogéneo, ya que de acuerdo a la Proposición 3.1.11, si tenemos una hipersuperficie  $\mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^n$ , donde  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ . Entonces, se verifica que  $\mathbb{V}(f) = \mathbb{V}(f^*) \cap \mathbb{A}_0^n$  donde  $f^* \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  es un polinomio homogéneo. Esto justifica que podamos llamar hipersuperficies a los conjuntos algebraicos proyectivos definidos por un solo polinomio homogéneo.

**Ejemplo 3.2.10.** (Polares) Sea una hipersuperficie  $V = \mathbb{V}(f)$ , con  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  homogéneo de grado  $d$  y tal que  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ . Dado  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^n$ , por la primera de las Propiedades 2.4.5,  $\Delta_{\mathbf{p}}^k f$  está definido salvo constante para todo representante del punto proyectivo  $\mathbf{p}$  y es un polinomio homogéneo de grado  $k$ . De este modo, para la hipersuperficie  $V$  tenemos una familia de hipersuperficies  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^k f)$  de grado  $k$ , que llamaremos hipersuperficies polares de la hipersuperficie en el punto  $\mathbf{p}$ . El resto de las Propiedades 2.4.5 también tiene un claro significado geométrico cuando las aplicamos a las hipersuperficies polares. La segunda propiedad se traduce en que  $\mathbf{p} \in V$  si y solo si  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^k f)$ . Por otro lado, la tercera propiedad afirma que si fijamos un  $m \leq d$ , las hipersuperficies polares de  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^m f)$  en  $\mathbf{p}$  coinciden hasta grado  $m$  con las hipersuperficies polares de  $V$  en  $\mathbf{p}$ .

La Proposición 2.4.6 también tiene un claro significado geométrico cuando se ve en términos de conjuntos algebraicos. Sea  $\mathbf{p} \in V$ , dados  $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbb{P}^n$  con  $\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{u}'$  colineales. Entonces, la Proposición 2.4.6 se lee como  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^1 f, \dots, \Delta_{\mathbf{p}}^k f)$  si y solo si  $\mathbf{u}' \in \mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^1 f, \dots, \Delta_{\mathbf{p}}^k f)$ . Esto quiere decir que un punto de una recta que pasa por  $\mathbf{p}$  pertenece a la intersección de las primeras  $k$  hipersuperficies polares  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^1 f) \cap \dots \cap \mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^k f)$  si y solo si pertenece cualquier otro punto de la recta, es decir, el conjunto algebraico  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^1 f) \cap \dots \cap \mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^k f)$  es unión de rectas que pasan por  $\mathbf{p}$ , en particular, se trata de un conjunto algebraico reglado.

Esta forma de ver las polares es la que justifica la notación empleada. La forma de pensar en las polares es como objetos geométricos centrados en el punto  $\mathbf{p}$  cuando  $\mathbf{p} \in V$ .

### 3.3. Dimensión

Un desarrollo riguroso del concepto de dimensión de una variedad algebraica requeriría un nivel y extensión que no sería apropiado para este trabajo, y que distraería del objetivo principal de este. Sin embargo, el cálculo de Clebsch requiere en un momento dado demostrar que la intersección de dos variedades es no nula, y la manera más rápida de demostrarlo es recurriendo a la dimensión de estas. Por ello, en esta breve sección vamos a recoger sin demostrar los resultados más relevantes para nuestros propósitos y una definición que, siendo perfectamente rigurosa, tiene un significado geométrico más claro que la definición algebraica de dimensión. Todo este desarrollo se puede encontrar en detalle en el libro de Shafarevich [21], donde, además, se demuestra que la definición que damos, que es la que da Smith [22], es equivalente a la suya.

**Definición 3.3.1.** La dimensión de un conjunto algebraico (afín o proyectivo)  $V$  es el mayor entero no negativo  $d$  para el cuál existe una cadena de conjuntos algebraicos irreducibles  $V_i$  tales que

$$V \supsetneq V_d \supsetneq \dots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 \supsetneq \emptyset.$$

Escribiremos entonces  $\dim V = d$ . Definimos la codimensión de un conjunto algebraico en el espacio ambiente  $\mathbb{A}^n$  o  $\mathbb{P}^n$  como  $\text{codim}(V) = n - \dim V$ .

Resulta evidente que los hiperplanos como conjuntos algebraicos son justamente los subespacios proyectivos de dimensión  $n - 1$ . Por tanto, esperaríamos que esta definición de dimensión de conjunto algebraico fuera consistente con el concepto de dimensión que ya conocemos. En el caso de los puntos, resulta inmediato comprobar que su dimensión es efectivamente 0.

Además, considerando conjuntos algebraicos lineales (puntos, rectas, planos, etc), es sencillo comprobar que la dimensión de los conjuntos algebraicos lineales es como mínimo su dimensión como subespacios. Sin embargo, no es tan sencillo probar que su dimensión es justamente esta. Probarlo requiere estudiar el grado de trascendencia del cuerpo de funciones asociado a los conjuntos algebraicos, cosa que no vamos a hacer aquí.

**Proposición 3.3.2.**  $\dim \mathbb{A}^n = \dim \mathbb{P}^n = n$

Sabiendo que se comporta bien con variedades lineales, hay ciertas propiedades que esperaríamos que se mantengan en este caso más general. En particular, esperaríamos que la dimensión se comportara de manera aditiva al tomar producto de conjuntos algebraicos. En efecto, así ocurre.

**Proposición 3.3.3.** Sean  $V_1, V_2$  conjuntos algebraicos irreducibles. Entonces,

$$\dim V_1 \times V_2 = \dim V_1 + \dim V_2.$$

En el caso de los subespacios lineales, la contención de uno en otro implica que su dimensión es menor, y si sus dimensiones coinciden, entonces, los subespacios coinciden. Análogamente, en el caso de conjuntos algebraicos tenemos una propiedad similar.

**Proposición 3.3.4.** Sean  $V_1, V_2$  conjuntos algebraicos, si  $V_1 \subset V_2$ , entonces se tiene  $\dim V_1 \leq \dim V_2$ . Además, si  $V_2$  es irreducible y  $\dim V_1 = \dim V_2$  se tiene que  $V_1 = V_2$ .

También, puesto que los conjuntos algebraicos en los que vamos a estar interesados son las hipersuperficies, conviene destacar un importante resultado relativo a su dimensión.

**Proposición 3.3.5.** Sea  $V = \mathbb{V}(f)$ , con  $f \neq 0$ , una hipersuperficie afín o proyectiva, entonces  $\text{codim}(V) = 1$ . Recíprocamente, si  $V$  es un conjunto algebraico, y todas sus componentes irreducibles tienen codimensión 1, entonces  $V$  es una hipersuperficie y el ideal  $\mathbb{I}(V)$  es principal.

Estas propiedades nos permiten tener una idea intuitiva del concepto de dimensión en geometría algebraica. Sin embargo, el resultado principal que nos interesa es el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.6.** Sean  $V_1, V_2 \subset \mathbb{P}^N$  conjuntos algebraicos proyectivos irreducibles con  $\dim V_1 = n$  y  $\dim V_2 = m$ . Entonces, cualquier componente irreducible  $W$  de  $V_1 \cap V_2$  tiene  $\dim W \geq n + m - N$ . Además, si  $n + m \geq N$  entonces la intersección de  $V_1$  y  $V_2$  es no vacía.

Este importante teorema de existencia es el resultado que necesitaremos más adelante durante el cálculo de Clebsch. Se trata de un resultado similar al teorema de Bezout para curvas planas. En efecto, si tenemos dos curvas planas irreducibles, puesto que las curvas planas son hipersuperficies de  $\mathbb{P}^2$ , la dimensión de ambas es 1. Entonces, en el espacio ambiente  $\mathbb{P}^2$  el Teorema 3.3.6 nos permite afirmar que tienen intersección no vacía. Esto es justamente lo que afirma el teorema de Bezout en el caso proyectivo, con la salvedad de que el teorema de Bezout nos proporciona más información sobre la intersección de acuerdo con el grado de las curvas.

### 3.4. Multiplicidad de intersección con una recta

En esta sección estamos interesados en estudiar la intersección entre un conjunto algebraico y una recta que pasa por uno de sus puntos. En primer lugar, vamos a ver el caso de un conjunto algebraico afín  $V \subset \mathbb{A}^n$ . Según Shafarevich [21], la multiplicidad de intersección entre una recta y el conjunto algebraico  $V$  se define de la siguiente manera.

**Definición 3.4.1.** Dado un conjunto algebraico afín  $V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{A}^n$ , con  $\mathbb{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ . Sea  $\mathbf{p}, \mathbf{u} \in \mathbb{A}^n$  y  $L = \{\mathbf{p} + t\mathbf{u}, t \in \mathbb{C}\}$ , con  $\mathbf{u} \neq 0$ , una recta que pasa por  $\mathbf{p}$ . Se define la multiplicidad de intersección de  $L$  con  $V$  en  $\mathbf{p}$  como la multiplicidad de  $t = 0$  como cero del polinomio

$$f(t) = \text{mcd} \{f_1(\mathbf{p} + t\mathbf{u}), \dots, f_m(\mathbf{p} + t\mathbf{u})\} \in \mathbb{C}[t].$$

Denotaremos a la multiplicidad de intersección de  $L$  con  $V$  en  $\mathbf{p}$  por  $\mu_{\mathbf{p}}(V, L)$ .

En primer lugar, tenemos que comprobar que la multiplicidad de intersección está bien definida. Observemos que  $f(t) = \text{mcd} \{F(\mathbf{p} + t\mathbf{u}), F \in \mathbb{I}(V)\}$ , luego el polinomio  $f(t)$  es independiente de la elección de generadores del ideal. Además, si tomamos como vector director de la recta  $\mathbf{u}' = \lambda\mathbf{u}$ , con  $\lambda \neq 0$ , entonces el polinomio en  $\mathbb{C}[t]$  sería  $f'(t) = f(\lambda t)$ , que tiene la misma multiplicidad de  $t = 0$  como cero que  $f(t)$ . Por tanto, la definición es independiente también del vector director de la recta.

A continuación, vamos a definirlo para un conjunto algebraico proyectivo.

**Definición 3.4.2.** Dado un conjunto algebraico proyectivo  $V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{P}^n$ , con  $\mathbb{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ , siendo  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  homogéneos. Sea  $\mathbf{p}, \mathbf{u} \in \mathbb{P}^n$  y  $L = \{\mathbf{p} + t\mathbf{u}, t \in \mathbb{C}\} \cup \{\mathbf{u}\}$ , con  $\mathbf{u} \neq \mathbf{p}$ , una recta que pasa por  $\mathbf{p}$ . Se define la multiplicidad de intersección de  $L$  con  $V$  en  $\mathbf{p}$  como la multiplicidad de  $t = 0$  como cero del polinomio

$$f(t) = \text{mcd} \{f_1(\mathbf{p} + t\mathbf{u}), \dots, f_m(\mathbf{p} + t\mathbf{u})\} \in \mathbb{C}[t].$$

Denotaremos a la multiplicidad de intersección de  $L$  con  $V$  en  $\mathbf{p}$ , al igual que en el caso afín, por  $\mu_{\mathbf{p}}(V, L)$ .

De nuevo, tenemos que comprobar que esta definición es consistente. El mismo argumento de antes nos permite afirmar que la definición es independiente de la elección de los generadores de  $\mathbb{I}(V)$ . Ahora bien, en la definición estamos cometiendo el abuso de notación de referirnos por  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{u}$  tanto a los puntos de  $\mathbb{P}^n$  como a los representantes en  $\mathbb{C}^{n+1}$  para las operaciones, con lo que tenemos que ver que la definición es también independiente de esta elección. Supongamos que hubiéramos tomado  $\mathbf{p}' = \mu\mathbf{p}$  y  $\mathbf{u}' = \lambda\mathbf{u}$ , con  $\mu, \lambda$  no nulos. Entonces, si  $f_i$  es homogéneo de grado  $d_i$ , se tiene

$$\begin{aligned} f'(t) &= \text{mcd} \{f_1(\mu\mathbf{p} + t\lambda\mathbf{u}), \dots, f_m(\mu\mathbf{p} + t\lambda\mathbf{u})\} \\ &= \text{mcd} \left\{ \mu^{d_1} f_1 \left( \mathbf{p} + t \frac{\lambda}{\mu} \mathbf{u} \right), \dots, \mu^{d_m} f_m \left( \mathbf{p} + t \frac{\lambda}{\mu} \mathbf{u} \right) \right\} = f \left( \frac{\lambda}{\mu} t \right). \end{aligned}$$

Por tanto,  $t = 0$  tiene la misma multiplicidad como cero de  $f'(t)$  que como cero de  $f(t)$ .

Queda una última comprobación que realizar. Hemos definido  $L$  como la recta que une  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{u}$ , pero la recta que une  $\mathbf{p}$  con cualquier punto  $\mu\mathbf{p} + \lambda\mathbf{u}$  sigue siendo  $L$ . Tenemos que comprobar que tampoco depende de esta elección.

$$\begin{aligned} f''(t) &= \text{mcd} \{f_1((1+t\mu)\mathbf{p} + t\lambda\mathbf{u}), \dots, f_m((1+t\mu)\mathbf{p} + t\lambda\mathbf{u})\} \\ &= \text{mcd} \left\{ (1+t\mu)^{d_1} f_1 \left( \mathbf{p} + t \frac{\lambda}{1+t\mu} \mathbf{u} \right), \dots, (1+t\mu)^{d_m} f_m \left( \mathbf{p} + t \frac{\lambda}{1+t\mu} \mathbf{u} \right) \right\} \\ &= (1+t\mu)^{d_m} f \left( \frac{\lambda}{1+t\mu} t \right) = (1+t\mu)^{d_m-d} f(\lambda t) \in \mathbb{C}[t]. \end{aligned}$$

Se ha denotado por  $d_m = \min\{d_1, \dots, d_m\}$  y por  $d$  al grado de  $f$ , que al ser factor de polinomios homogéneos, es un polinomio homogéneo de grado menor o igual que  $d_m$ . Puesto que  $t = 0$  no es una raíz de  $(1+t\mu)$ , se tiene que la multiplicidad de cero como raíz de  $f''$  coincide con la de  $f$ .

**Proposición 3.4.3.** *Dado un conjunto algebraico  $V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{P}^n$ , con  $\mathbb{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ , siendo  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  homogéneos. Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{A}_0^n$  y sea  $L$  una recta que pasa por  $\mathbf{p}$ . La multiplicidad de  $L$  con  $V$  en  $\mathbf{p}$  coincide con la multiplicidad de  $L$  con  $\mathbb{V}(f_{1*}, \dots, f_{m*}) \subset \mathbb{A}^n$  en el sentido afín.*

*Demostración.* Como hemos justificado antes, la definición de multiplicidad de intersección es independiente de la elección de  $\mathbf{u}$ . Por tanto, podemos tomar como  $\mathbf{u}$  el único punto de  $L \cap \mathbb{V}(X_0)$ ,  $\mathbf{u} = [0: u_1: \dots: u_n]$ . Entonces, si  $\mathbf{p} = [1: p_1: \dots: p_n]$ ,

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{mcd} \{f_1(1, p_1 + tu_1, \dots, p_n + tu_n), \dots, f_m(1, p_1 + tu_1, \dots, p_n + tu_n)\} \\ &= \text{mcd} \{f_{1*}(p_1 + tu_1, \dots, p_n + tu_n), \dots, f_{m*}(p_1 + tu_1, \dots, p_n + tu_n)\} \end{aligned}$$

□

Por tanto, esta proposición justifica el que la multiplicidad de intersección con una recta en  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^n$  es una propiedad local en el punto  $\mathbf{p}$  en el sentido de que podemos estudiarla en un entorno afín de este. Por supuesto, no hay nada de particular en tomar  $\mathbb{A}_0^n$ , se podía haber usado cualquier copia afín que contuviera a  $\mathbf{p}$ .

Con esto ya estamos en condiciones de definir lo que es un punto de inflexión, que es el objetivo de este trabajo.

**Definición 3.4.4.** Dada un conjunto algebraico  $V \subset \mathbb{P}^n$ , una recta con multiplicidad de intersección mayor que 2 en un punto  $\mathbf{p} \in V$  se dice que es tangente a  $V$  en  $\mathbf{p}$ . Si la recta tiene multiplicidad de intersección mayor que  $n + 1$  se llama recta de inflexión.

**Definición 3.4.5.** Dado un conjunto algebraico  $V \subset \mathbb{P}^n$ , se dice que un punto  $\mathbf{p} \in V$  es de inflexión si existe una recta de inflexión que pasa por  $\mathbf{p}$ .

### 3.4.1. Hipersuperficies

A continuación, vamos a estudiar la multiplicidad de intersección de una recta  $L$  con una hipersuperficie  $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^n$ , donde  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ , con  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  homogéneo de grado  $d$ , y  $f \neq 0$ . Sean  $\mathbf{p}, \mathbf{u} \in \mathbb{P}^n$ , con  $\mathbf{p} \neq \mathbf{u}$ , y sea  $L$  la recta que los une. En estas

condiciones, la multiplicidad de intersección de  $L$  con  $V$  en  $\mathbf{p}$  es la multiplicidad de  $t = 0$  como cero de  $f(\mathbf{p} + t\mathbf{u})$ .

Entonces, de acuerdo con la ecuación (2.7), se trata de estudiar la multiplicidad de  $t = 0$  como cero del polinomio en  $t$

$$f(\mathbf{p}) + t\Delta_p^1 f(\mathbf{u}) + \cdots + \frac{t^d}{d!}\Delta_p^d f(\mathbf{u}).$$

A partir de esto es inmediato que la multiplicidad de intersección con cualquier recta es cero si  $f(\mathbf{p}) \neq 0$ , es decir, si  $\mathbf{p} \notin V$ . Si  $f(\mathbf{p}) = 0$ , entonces

$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{u}) = \frac{t^m}{m!}\Delta_p^m f(\mathbf{u}) + \cdots + \frac{t^d}{d!}\Delta_p^d f(\mathbf{u}),$$

donde  $m \in \{1, \dots, d\}$  es el menor entero tal que  $\Delta_p^m f(\mathbf{u}) \neq 0$ . Observemos que en este caso  $t = 0$  es un cero de multiplicidad  $m$ , luego  $\mu_p(V, L) = m$ . Por tanto, por la Proposición 2.4.6 y en base a la discusión del Ejemplo 3.2.10, hemos probado el siguiente resultado.

**Proposición 3.4.6.** *Sea  $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^n$ , donde  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ , con  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  homogéneo de grado  $d$ . Sea  $k \in \{1, \dots, d\}$ . Dado un punto  $\mathbf{p} \in V$  y una recta  $L$  que pasa por  $\mathbf{p}$ ,  $L \subset \mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \dots, \Delta_p^k f)$  si y solo si  $\mu_p(V, L) > k$ .*

La Proposición 3.4.6 afirma que dada una hipersuperficie  $V$  y un punto  $\mathbf{p} \in V$ , el conjunto algebraico  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \dots, \Delta_p^k f)$  es el lugar geométrico de las rectas que pasan por  $\mathbf{p}$  con  $\mu_p(V, L) > k$ , de lo que se deducen inmediatamente los siguientes corolarios.

**Corolario 3.4.7.** *Sea  $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^n$ , donde  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ , con  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  homogéneo. Dado un punto  $\mathbf{p} \in V$ ,  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si el conjunto algebraico proyectivo  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \dots, \Delta_p^n f) \neq \{\mathbf{p}\}$ .*

**Corolario 3.4.8.** *Sea  $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^n$ , donde  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ , con  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  homogéneo. Dado un punto  $\mathbf{p} \in V$ , el conjunto algebraico proyectivo  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f)$  es el lugar geométrico de las rectas tangentes a  $V$  por  $\mathbf{p}$ .*

Si  $\Delta_p^1 f \neq 0$ , entonces la primera polar define un hiperplano donde están contenidas todas las rectas tangentes a  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(f)$ . Por la Proposición 3.3.5, este hiperplano tiene codimensión 1, al igual que  $\mathbb{V}(f)$ . Sin embargo, si  $\Delta_p^1 f = 0$ , entonces  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f) = \mathbb{P}^n$ , que tiene codimensión 0, distinta de  $\text{codim}(\mathbb{V}(f))$ . Un punto en el que la dimensión del espacio tangente sea mayor que el del conjunto algebraico es, esencialmente, lo que Shafarevich [21] llama punto singular. Esto justifica que nosotros lo definamos de la siguiente manera para una hipersuperficie.

**Definición 3.4.9.** *Sea  $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^n$ , donde  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ , con  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  homogéneo. Dado  $\mathbf{p} \in V$ , decimos que  $\mathbf{p}$  es un punto singular de  $V$  si  $\Delta_p^1 f = 0$ . Decimos que  $V$  es no singular si no tiene puntos singulares.*

Entonces, dada una hipersuperficie  $V$ , un punto  $\mathbf{p} \in V$  es singular si y solo si toda recta  $L$  que pasa por  $\mathbf{p}$  es tangente a  $V$ , es decir, tiene  $\mu_p(V, L) \geq 2$ . La siguiente definición nos permite expresar esta condición mejor.

**Definición 3.4.10.** Sea  $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^n$ , donde  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ , con  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  homogéneo de grado  $d$ . Dado  $\mathbf{p} \in V$ , se define la multiplicidad de la hipersuperficie  $V$  en  $\mathbf{p}$  como el menor  $\mu_p(V) \in \mathbb{N}$  tal que  $\Delta_p^{\mu_p(V)} f \neq 0$ .

Esta es la definición que Harris [13] proporciona para la multiplicidad de una hipersuperficie. Para este trabajo es suficiente con definir este caso, aunque se puede definir para conjuntos algebraicos en general.

A partir de la definición, es evidente que dada una hipersuperficie  $V$  y un punto  $\mathbf{p} \in V$ , entonces,  $\mu_p(V, L) \geq \mu_p(V)$  para cualquier recta  $L$ . En particular,  $\mathbf{p}$  es singular si y solo si  $\mu_p(V) \geq 2$ .

Las definiciones que hemos dado de punto singular y de multiplicidad de una hipersuperficie están referidas a conjuntos algebraicos proyectivos, ya que usan las polares, pero podemos extenderlas al caso afín.

**Definición 3.4.11.** Dada una hipersuperficie  $V \subset \mathbb{A}^n$ , y un punto  $\mathbf{p} \in V$ , definimos la multiplicidad de la hipersuperficie  $V$  en  $\mathbf{p}$  como

$$\mu_p(V) = \min\{\mu_p(V, L), L \text{ recta que pasa por } \mathbf{p}\}.$$

Decimos que  $\mathbf{p}$  es singular si  $\mu_p(V) \geq 2$ .

La Proposición 3.4.3 nos permite afirmar que esta definición es consistente con las que ya hemos dado en el caso proyectivo. Vamos a ver algunos ejemplos concretos que ilustran todos estos conceptos.

**Ejemplo 3.4.12.** Tomemos  $f = X_2 - X_1^3 \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ , y sea  $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^2$ . Queremos estudiar si  $(0, 0) \in V$  es un punto de inflexión.  $V$  se trata de una hipersuperficie del espacio afín, pero todos los resultados con polares que hemos demostrado son aplicables en el espacio proyectivo. Por tanto, lo primero que tenemos que hacer es homogeneizar, ya que, como demuestra la Proposición 3.4.3, podemos realizar los cálculos en el espacio proyectivo. Entonces, sea  $F = f^* = X_2X_0^2 - X_1^3 \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ , todas las propiedades locales de  $V$  en  $(0, 0)$  se pueden calcular con  $F$  en  $\mathbf{p} = [1: 0: 0]$ .

Ahora que estamos trabajando en el espacio proyectivo, vamos a calcular la primera y segunda polar de  $F$  en  $\mathbf{p}$ . Los cálculos se han realizado en Sage, como se contará en la última sección, aquí solo mostraremos el resultado final. Las polares de  $F$  en  $\mathbf{p}$  son

$$\Delta_p^1 F = X_2, \quad \text{y} \quad \Delta_p^2 F = 4X_0X_2.$$

Entonces,  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 F) = \mathbb{V}(X_2)$  y  $\mathbb{V}(\Delta_p^2 F) = \mathbb{V}(X_0) \cup \mathbb{V}(X_2)$ , por lo que  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 F, \Delta_p^2 F) = \mathbb{V}(X_2)$ , es decir, la recta  $X_2 = 0$  tiene multiplicidad de intersección 3 con  $\mathbf{p}$  como mínimo.  $\mathbf{p}$  es, por tanto, de inflexión.

No es necesario que la recta tenga exactamente multiplicidad de intersección 3, pero vamos a ver que en este caso es así. Para ello, tenemos que ver que  $\mathbb{V}(X_2) \not\subset \mathbb{V}(\Delta_p^3 F)$ . Sin embargo, puesto que  $F$  es de grado 3, como se deduce de la Proposición 2.4.3,  $\mathbb{V}(\Delta_p^3 F) = \mathbb{V}(F)$  y el punto  $[1: 1: 0]$  pertenece a  $\mathbb{V}(X_2)$  pero no a  $\mathbb{V}(F)$ .

Se ha representado la curva  $\mathbb{V}(f)$ , en negro, junto con la recta de inflexión, en rojo, en la Figura 3.1, que recoge la región  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  de la copia afín  $X_0 \neq 0$ .

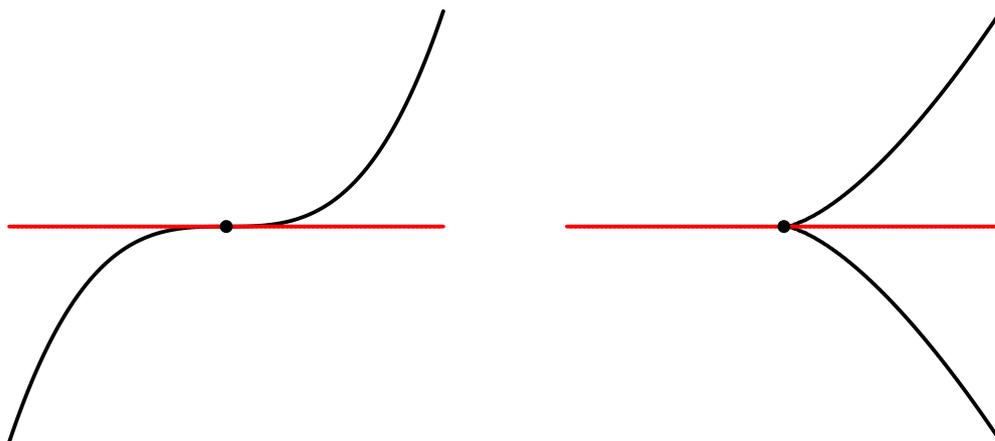


Figura 3.1: A la izquierda, curva del Ejemplo 3.4.12. A la derecha, curva del Ejemplo 3.4.13

**Ejemplo 3.4.13.** Sea  $f = X_2^2 - X_1^3 \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ , y sea  $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{A}^2$ . Como en el ejemplo anterior, vamos a estudiar qué ocurre en el punto  $(0, 0)$ . De nuevo, lo primero es homogeneizar la curva. Sea  $F = X_2^2 X_0 - X_1^3 \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$  y  $\mathbf{p} = [1: 0: 0]$ , en este caso,

$$\Delta_{\mathbf{p}}^1 F = 0, \quad \text{y} \quad \Delta_{\mathbf{p}}^2 F = 2X_2^2.$$

Por tanto,  $\mathbf{p}$  es un punto singular de la curva, ya que  $\mu_{\mathbf{p}}(V) = 2$  pero también es un punto de inflexión ya que la recta  $X_2 = 0$  es precisamente  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^1 f, \Delta_{\mathbf{p}}^2 f) = \mathbb{V}(X_2)$ .

Al igual que en el ejemplo anterior, se ha representado la curva  $\mathbb{V}(f)$ , en negro, junto con la recta de inflexión, en rojo, en la Figura 3.1, que recoge la región  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  de la copia afín  $X_0 \neq 0$ .

En el plano proyectivo complejo, de hecho, se conoce la ecuación que describen los puntos de inflexión de una curva. Vamos a ver que los puntos de inflexión de una curva son un subconjunto algebraico de esta descrito por una expresión en sus derivadas segundas. Se trata de un resultado típico de cursos de curvas algebraicas que se puede encontrar en el libro de Fulton [11], pero que aquí vamos a demostrar usando las polares.

**Definición 3.4.14.** Dado  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ , se define la matriz Hessiana de  $f$ , como  $H_f \in \mathcal{M}_{(n+1)}(\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n])$  dada por

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial X_0 \partial X_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_0 \partial X_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial X_0 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_n \partial X_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_n \partial X_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial X_n \partial X_n} \end{pmatrix}$$

**Teorema 3.4.15.** Dada la curva  $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^2$ , donde  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ , con  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_2]$  homogéneo de grado  $d$ . Los puntos de inflexión de  $V$  son el subconjunto algebraico  $\mathbb{V}(f, \det H_f)$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbf{p} \in V$ ,  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^1 f)$  y  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^2 f)$  comparten una recta. Si  $d = 1$ , entonces la segunda polar,  $\Delta_{\mathbf{p}}^2 f$ , es nula, y como  $\Delta_{\mathbf{p}}^1 f$  siempre contiene una recta, todos los puntos son de inflexión. Además, como  $H_f$  en este caso es la matriz

nula, entonces  $\mathbb{V}(f, \det H_f) = \mathbb{V}(f)$  y el resultado se cumple. Suponemos entonces que  $d \geq 2$  para el resto de la demostración.

Supongamos que  $\mathbf{p}$  es de inflexión, entonces  $\mathbb{V}(\Delta_p^2 f)$  es una cónica con matriz  $H_f(\mathbf{p})$  que contiene una recta, y es, por tanto, degenerada. Como la cónica es degenerada, su matriz tiene determinante nulo, es decir,  $\det H_f(\mathbf{p}) = 0$ . Por tanto,  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(f, \det H_f)$ .

Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(f, \det H_f)$ . Como  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(f)$ , se tiene que  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(\Delta_p^2 f)$  y puesto que  $\det H_f(\mathbf{p}) = 0$ , la cónica  $\mathbb{V}(\Delta_p^2 f)$  es degenerada y contiene una recta  $L$  que pasa por  $\mathbf{p}$ . Si comprobamos que  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f)$  contiene a  $L$ , por el Corolario 3.4.7, tendremos que  $\mathbf{p}$  es de inflexión. Sea  $\mathbf{u} \in L$ , con  $\mathbf{u} \neq \mathbf{p}$ , y sea  $g$  la forma polar de  $\Delta_p^2 f$  de la Proposición ??, es decir,  $\Delta_p^2 f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ .

Como la recta  $L$  está contenida en  $\mathbb{V}(\Delta_p^2 f)$ , entonces,  $g(\mathbf{p} + \lambda \mathbf{u}, \mathbf{p} + \lambda \mathbf{u}) = 0$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ , y  $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ . Por tanto, expandiendo por bilinealidad,

$$0 = g(\mathbf{p} + \lambda \mathbf{u}, \mathbf{p} + \lambda \mathbf{u}) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + 2\lambda g(\mathbf{p}, \mathbf{u}) + \lambda^2 g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2\lambda g(\mathbf{p}, \mathbf{u}),$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ , con lo que  $g(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = 0$ .

Además, por la tercera de las Propiedades 2.4.5 y la Proposición 2.4.3, se tiene que

$$2g(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \Delta_p^1(\Delta_p^2 f)(\mathbf{u}) = 2(d-1)\Delta_p^1 f(\mathbf{u}),$$

por lo que  $\Delta_p^1 f(\mathbf{u}) = 0$ , lo que prueba que la recta  $L$  está contenida en  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f)$ , al ser este conjunto algebraico reglado.  $\square$

**Ejemplo 3.4.16.** Sea  $f = 2X_1X_2^3 - 2X_1^3X_2 - X_0^4 + X_1^4 + X_2^4$ , entonces

$$H_f = \begin{pmatrix} -12X_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12(X_1^2 - X_1X_2) & 6(X_2^2 - X_1^2) \\ 0 & 6(X_2^2 - X_1^2) & 12(X_2^2 - X_1X_2) \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \det H_f &= 432X_0^2X_1^4 - 1728X_0^2X_1^3X_2 - 864X_0^2X_1^2X_2^2 + 1728X_0^2X_1X_2^3 + 432X_0^2X_2^4 \\ &= 432X_0^2(X_1 - X_2)(X_1 + X_2)(X_1 - (2 + \sqrt{5})X_2)(X_1 - (2 - \sqrt{5})X_2). \end{aligned}$$

Concluimos del Teorema 3.4.15 que los puntos de inflexión de  $\mathbb{V}(f)$  son los puntos de corte de  $\mathbb{V}(f)$  con las 5 rectas en que descompone  $\mathbb{V}(\det H_f)$ . Se representa en la Figura 3.2 la región  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  de la copia afín  $X_0 \neq 0$ , donde se ha dibujado en negro el conjunto algebraico  $\mathbb{V}(f_*)$ , en gris el conjunto algebraico  $\mathbb{V}(\det H_{f_*})$  y en rojo los puntos de inflexión.

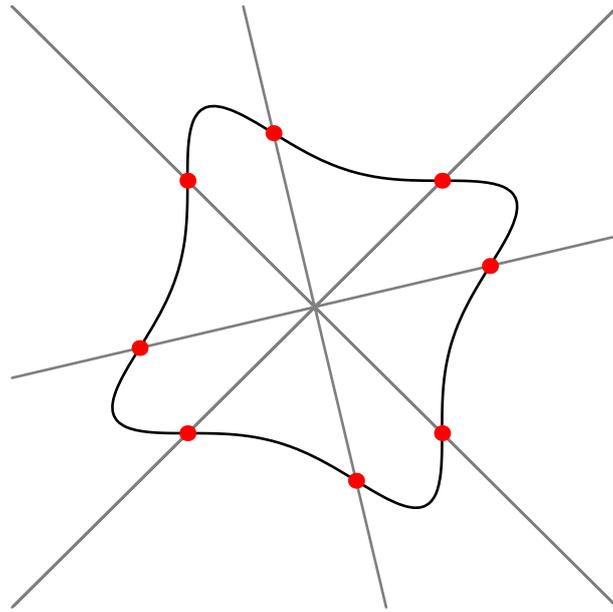


Figura 3.2: Curva del ejemplo 3.4.16.

# Capítulo 4

## Cálculo de Clebsch

En este capítulo se calcula la expresión de un polinomio que describe los puntos de inflexión de una superficie en términos de las parciales del polinomio que la define. El desarrollo que se va a realizar, y que es el objetivo principal de este trabajo, es una modernización del cálculo realizado por Clebsch [7] y recogido por Salmon en su libro [19]. El procedimiento se basa en el uso de las superficies polares, de manera similar a cómo se hizo cuando se dedujo una ecuación que describía los puntos de inflexión de una curva al final del capítulo anterior, y nos referiremos a él como el cálculo de Clebsch.

A lo largo de este capítulo consideraremos fijados  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_3]$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ , y una superficie  $V = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^3$ , tales que  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ .

### 4.1. Puntos singulares

Un requisito que ni Clebsch ni Salmon mencionan en sus trabajos es que algunos pasos del cálculo de Clebsch necesitan que la superficie sea no singular, como veremos más adelante. Sin embargo, vamos a demostrar que un punto singular es de inflexión. De esta forma, podemos aplicar el cálculo de Clebsch a los puntos no singulares de una superficie genérica y el conjunto de puntos de inflexión estará dado por la unión de los puntos que nos proporcione el cálculo y los puntos singulares.

**Proposición 4.1.1.** *Sea  $\mathbf{p} \in V$  un punto singular de la superficie, entonces es de inflexión.*

*Demostración.* Si  $\mathbf{p} \in V$  es un punto singular, entonces se tiene  $\Delta_{\mathbf{p}}^1 f = 0$ , por lo que  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^1 f, \Delta_{\mathbf{p}}^2 f, \Delta_{\mathbf{p}}^3 f) = \mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^2 f, \Delta_{\mathbf{p}}^3 f)$  es unión de rectas que pasan por  $\mathbf{p}$ . Para ver que  $\mathbf{p}$  es de inflexión, basta comprobar que este conjunto algebraico contiene una recta que pasa por  $\mathbf{p}$ , que sería entonces de inflexión. Fijemos un plano,  $\mathbb{V}(g)$ , con  $g \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  homogéneo de grado 1, que no contiene a  $\mathbf{p}$ , y consideremos la restricción a ese plano de  $\Delta_{\mathbf{p}}^2 f$  y  $\Delta_{\mathbf{p}}^3 f$ .  $\mathbf{p}$  será de inflexión si y solo si  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^2 f, \Delta_{\mathbf{p}}^3 f, g)$  es no vacío, puesto que la recta de inflexión tiene que cortar al plano  $\mathbb{V}(g)$ . Si alguna de las polares se anula en el plano, entonces hay algún punto en  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^2 f, \Delta_{\mathbf{p}}^3 f, g)$ , puesto que una curva tiene soporte no vacío. Si ninguna de las polares se anula en el plano, entonces la dimensión de las curvas que definen es 1, por la Proposición 3.3.5, y dos curvas de dimensión 1 en un plano, por el Teorema 3.3.6, tienen intersección no vacía. En cualquier caso,  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^2 f, \Delta_{\mathbf{p}}^3 f, g)$  es no vacío, está contenido en  $\mathbb{V}(\Delta_{\mathbf{p}}^2, \Delta_{\mathbf{p}}^3)$  y no contiene a  $\mathbf{p}$ , lo que prueba que es de inflexión.  $\square$

Para el resto del capítulo fijemos un punto  $\mathbf{p} \in V$  no singular.

## 4.2. Expresión cerrada

El primer paso del cálculo de Clebsch es obtener una expresión cerrada para la condición de ser de inflexión.  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si existe una recta de inflexión que pasa por  $\mathbf{p}$ , es decir, si y solo si  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, \Delta_p^3 f)$  contiene una recta. Puesto que ese conjunto es unión de rectas que pasan por  $\mathbf{p}$ , esto es equivalente a comprobar que, fijado un plano  $\mathbb{V}(g)$ , con  $g = g_0 X_0 + \cdots + g_3 X_3 \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_3]$ , que no contiene a  $\mathbf{p}$ , la intersección  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, \Delta_p^3 f, g)$  es no vacía. Para ello, vamos a encontrar primero la intersección  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, g)$  y comprobar que algún punto de este conjunto algebraico pertenece también a  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, \Delta_p^3 f, g)$ .

Sin embargo, encontrar una expresión cerrada para los puntos de corte entre dos planos y una cuádrica no resulta conveniente. Vamos a ver que podemos expresar esta intersección como la unión de intersecciones entre 3 planos.

**Notación 4.2.1.** Siguiendo la notación que usa Salmon en su libro [19], a lo largo de este capítulo nos referiremos a las parciales de  $f$  en  $\mathbf{p}$  de la siguiente forma

$$f_i(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(\mathbf{p}), \quad f_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}(\mathbf{p}), \quad y \quad f_{ijk}(\mathbf{p}) = \frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k}(\mathbf{p})$$

o directamente por  $f_i, f_{ij}$  y  $f_{ijk}$  si nos referimos al punto  $\mathbf{p}$  fijado para este capítulo. De este modo se pretende abreviar expresiones matriciales que de otro modo quedarían muy extensas.

**Lema 4.2.2.** *Existen dos planos  $\mathbb{V}(\alpha)$  y  $\mathbb{V}(\beta)$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_3]$  homogéneos de grado 1, tal que*

$$\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, g) = \mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \alpha, g) \cup \mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \beta, g).$$

*Demostración.* Denotemos por  $\mathcal{C}$  el conjunto de cuádricas proyectivas y consideremos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^3 &\rightarrow \mathcal{C} \cong \mathbb{P}^9 \\ [t_0 : \cdots : t_3] &\mapsto \Delta_p^2 f + (t_0 X_0 + \cdots + t_3 X_3) \Delta_p^1 f \\ y \\ \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 &\rightarrow \mathcal{C} \cong \mathbb{P}^9 \\ ([\alpha_0 : \cdots : \alpha_3], [\beta_0 : \cdots : \beta_3]) &\mapsto (\alpha_0 X_0 + \cdots + \alpha_3 X_3)(\beta_0 X_0 + \cdots + \beta_3 X_3) \end{aligned}$$

Sus imágenes son conjuntos algebraicos proyectivos en el espacio de cuádricas  $\mathcal{C}$ , de dimensiones 3 (porque  $\Delta_p^1 f \neq 0$ ) y 6 (por la Proposición 3.3.3), respectivamente. Por tanto, como el espacio ambiente es de dimensión 9, por el Teorema 3.3.6, existe un punto de intersección entre ambas imágenes.

Sean  $t_0, \dots, t_3, \alpha_0, \dots, \alpha_3, \beta_0, \dots, \beta_3 \in \mathbb{C}$  tal que sus imágenes por las aplicaciones anteriores coinciden. Tomemos  $\alpha = \alpha_0 X_0 + \cdots + \alpha_3 X_3$  y  $\beta = \beta_0 X_0 + \cdots + \beta_3 X_3$ . Entonces,

$$\Delta_p^2 f + (t_0 X_0 + \cdots + t_3 X_3) \Delta_p^1 f = \alpha \beta, \tag{4.1}$$

por lo que

$$\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, g) = \mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \alpha \beta, g) = \mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \alpha, g) \cup \mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \beta, g).$$

□

Los conjuntos algebraicos  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \alpha, g)$  y  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \beta, g)$  son intersección de planos y por tanto se trata de un subespacio lineal de  $\mathbb{P}^3$ . Además, puesto que hemos fijado  $g$  de modo que no contiene a  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(\Delta_p^1 f)$ , ninguno de esos conjuntos puede ser un plano. Entonces, vamos a distinguir dos casos. Puede ocurrir que ambos conjuntos algebraicos  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \alpha, g)$  y  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \beta, g)$  se limiten a un punto, o que alguno sea una recta.

Si se da el primer caso entonces  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \alpha, g)$  se reduce al punto  $\mathbf{p}_1$  de coordenadas homogéneas

$$\left[ \det \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} : -\det \begin{pmatrix} g_0 & g_2 & g_3 \\ f_0 & f_2 & f_3 \\ \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_3 \\ f_0 & f_1 & f_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{pmatrix} : -\det \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \\ f_0 & f_1 & f_2 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \right],$$

y  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \beta, g)$  se reduce al punto  $\mathbf{p}_2$  de coordenadas homogéneas

$$\left[ \det \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} : -\det \begin{pmatrix} g_0 & g_2 & g_3 \\ f_0 & f_2 & f_3 \\ \beta_0 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_3 \\ f_0 & f_1 & f_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_3 \end{pmatrix} : -\det \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \\ f_0 & f_1 & f_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \right],$$

Si se da el segundo caso, supongamos, sin pérdida de generalidad que  $L = \mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \alpha, g)$  es una recta, entonces  $L \subset \mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, g)$ . Además,  $L \subset \mathbb{V}(g)$ , por lo que no pasa por  $\mathbf{p}$ . La restricción de  $\Delta_p^3 f$  a esta recta tendrá algún punto donde se anule, luego  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, \Delta_p^3 f, g)$  es no vacía y el punto  $\mathbf{p}$  es de inflexión.

*Nota.* Acabamos de comprobar que  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, g)$  es siempre no vacía. Esto significa que todo punto de una superficie tiene una recta con multiplicidad de intersección al menos 3. De ahí que en dimensión 3 exijamos multiplicidad 4 para una recta de inflexión, de lo contrario, todo punto de la superficie sería de inflexión.

**Proposición 4.2.3.** *Si la superficie  $V = \mathbb{V}(f)$  fijada tiene grado 1 o 2, todo punto de esta es de inflexión.*

*Demostración.* Sea  $\mathbf{p} \in V$ , si  $\mathbf{p}$  es singular, hemos visto que es de inflexión. Supongamos entonces que no lo es, y sea  $d$  el grado de  $f$ . Si  $d = 1$  o  $d = 2$  entonces,  $\Delta_p^3 f = 0$  y  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, \Delta_p^3 f, g) = \mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, g)$ , que ya hemos visto que es siempre no vacía.  $\square$

En virtud de la Proposición 4.2.3, tenemos caracterizados los puntos de inflexión para superficies de grado 1 y 2. Por tanto, para el resto del capítulo supondremos  $d \geq 3$ .

Una vez que hemos estudiado la intersección  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, g)$  en detalle, estamos en condiciones de dar una expresión cerrada que caracterice los puntos de inflexión independientemente de los casos contemplados ahora.

Vamos a emplear el método simbólico que desarrollamos en el capítulo de preliminares para dar una condición necesaria y suficiente, para que  $\mathbf{p}$  sea de inflexión. Recordemos que según la Notación 4.2.1, los números complejos  $f_i$  y  $f_{ijk}$  que aparecerán en el siguiente teorema, dependen del punto  $\mathbf{p} \in V$  fijado y que al comienzo de la sección hemos fijado un polinomio homogéneo de grado 1,  $g$ , de modo que  $\mathbf{p} \notin \mathbb{V}(g)$ .

**Teorema 4.2.4.** *Para  $\mathbf{p} \in V \setminus \mathbb{V}(g)$ , ya fijados, existe una aplicación*

$$\Lambda_p: T^2(S^3(\mathbb{C}^4)) \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que para todo  $i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,

$$\Lambda_p(\mathbf{a}_{i_1} \mathbf{a}_{i_2} \mathbf{a}_{i_3} \mathbf{b}_{j_1} \mathbf{b}_{j_2} \mathbf{b}_{j_3}) = f_{i_1 i_2 i_3} f_{j_1 j_2 j_3} \quad (4.2)$$

y tal que si  $\mathbf{p}$  es no singular, entonces, es de inflexión si y solo si

$$\Lambda_p \left( \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}^3 \det \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}^3 \right) = 0. \quad (4.3)$$

*Demostración.* Tomemos  $\Lambda_p = \Lambda_{\Delta_p^3 f} \otimes \Lambda_{\Delta_p^3 f}$ . De acuerdo con la Proposición 2.3.1, se tiene que  $\Lambda_{\Delta_p^3 f}$  es una aplicación definida de  $S^3(\mathbb{C}^4)$  en  $\mathbb{C}$ , con lo que, por la Proposición 2.3.3,  $\Lambda_p$  está definida de  $T^2(S^3(\mathbb{C}^4))$  en  $\mathbb{C}$ . Además, dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^4$ , verifica que

$$\Delta_p^3 f(\mathbf{x}) \Delta_p^3 f(\mathbf{y}) = \Lambda_p \left( (\mathbf{a}_0 x_0 + \cdots + \mathbf{a}_3 x_3)^3 (\mathbf{b}_0 y_0 + \cdots + \mathbf{b}_3 y_3)^3 \right), \quad (4.4)$$

al igual que se explicó en el Ejemplo 2.3.5.

Vamos a ver ahora que se verifica la condición de la ecuación (4.2). Sea  $\tilde{f}$  la forma polar de  $f$ , entonces

$$\Delta_p^3 f(\mathbf{x}) = \frac{d!}{(d-3)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-3}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$$

y por la Proposición 2.1.10, se tiene que

$$\frac{\partial \Delta_p^3 f}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k}(\mathbf{p}) = \frac{d!}{(d-3)!} \tilde{f}(\overbrace{\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}}^{d-3}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$$

que es igual a  $f_{ijk}$  por el Corolario 2.1.11. Por tanto,

$$\Lambda_{\Delta_p^3 f}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) = \frac{\partial \Delta_p^3 f}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k}(\mathbf{p}) = f_{ijk},$$

con lo que, expresando esto usando la Notación 2.3.4, se tiene la propiedad de la ecuación (4.2).

Tenemos que ver ahora que la ecuación (4.3) es condición necesaria y suficiente para que  $\mathbf{p}$  sea de inflexión. Veamos el caso en que  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \alpha, g) = \{\mathbf{p}_1\}$  y  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \alpha, g) = \{\mathbf{p}_2\}$ . Entonces,  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si  $\Delta_p^3 f(\mathbf{p}_1) = 0$  o  $\Delta_p^3 f(\mathbf{p}_2) = 0$ , es decir, si y solo si  $\Delta_p^3 f(\mathbf{p}_1) \Delta_p^3 f(\mathbf{p}_2) = 0$ . Según la ecuación (4.4),  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si

$$\Delta_p^3 f(\mathbf{p}_1) \Delta_p^3 f(\mathbf{p}_2) = \Lambda_p \left( (\mathbf{a}_0 p_{1,0} + \cdots + \mathbf{a}_3 p_{1,3})^3 (\mathbf{b}_0 p_{2,0} + \cdots + \mathbf{b}_3 p_{2,3})^3 \right).$$

Esta ecuación es equivalente a (4.2). Se trata de la expansión por la primera fila de ambos determinantes, como se ve a partir de las coordenadas homogéneas de  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$ .

Consideremos el caso en que  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \alpha, g)$  es una recta. Entonces,  $\mathbf{p}$  es de inflexión, y tenemos que ver que la ecuación (4.2) se verifica. Puesto que los planos en  $\mathbb{C}^4$  definidos por  $\Delta_p^1 f$ ,  $\alpha$  y  $g$  se cortan en un plano, se tiene que la matriz

$$\begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

es de rango 2. Por tanto, sus menores de orden 3 son nulos. Desarrollando el determinante de la ecuación (4.2) por la primera fila, todos los coeficientes que acompañan a los  $\mathbf{a}_i$  son, entonces, nulos. Luego el determinante es nulo, y como  $\Lambda_p$  es lineal, la imagen del 0 es nula, y la ecuación se verifica. En el caso de que fuera  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \beta, g)$  una recta, se concluye de la misma manera.  $\square$

El Teorema 4.2.4 proporciona una expresión cerrada para la condición de que  $\mathbf{p}$  sea de inflexión. Expresión que podemos operar en  $\mathcal{A} = T^2(S(\mathbb{C}^4))$ . Además, la aplicación lineal  $\Lambda_p$  está perfectamente caracterizada por la ecuación (4.2), que da la imagen de una base de  $T^2(S^3(\mathbb{C}^4))$ . Observemos, en particular, que los papeles de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son intercambiables en el siguiente sentido

$$\Lambda_p(\mathbf{a}_{i_1} \mathbf{a}_{i_2} \mathbf{a}_{i_3} \mathbf{b}_{j_1} \mathbf{b}_{j_2} \mathbf{b}_{j_3}) = \Lambda_p(\mathbf{b}_{i_1} \mathbf{b}_{i_2} \mathbf{b}_{i_3} \mathbf{a}_{j_1} \mathbf{a}_{j_2} \mathbf{a}_{j_3}).$$

Por tanto, podemos expresar la condición (4.3) de una forma más simétrica.

**Notación 4.2.5.** Para abreviar las siguientes expresiones, denotaremos al vector columna  $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)^T$  por  $\bar{\mathbf{a}}$ , y análogamente para  $\bar{f}$ ,  $\bar{g}$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  y  $\bar{\beta}$ . Definimos  $F, G \in \mathcal{A}$ , como el producto de determinantes de matrices de vectores columna

$$F = \det(\bar{\mathbf{a}} \ \bar{g} \ \bar{f} \ \bar{\alpha}) \det(\bar{\mathbf{b}} \ \bar{g} \ \bar{f} \ \bar{\beta})$$

y

$$G = \det(\bar{\mathbf{b}} \ \bar{g} \ \bar{f} \ \bar{\alpha}) \det(\bar{\mathbf{a}} \ \bar{g} \ \bar{f} \ \bar{\beta}).$$

al igual que Salmon hace en [19]. Entonces, la condición (4.3) se traduce, usando esta notación, en  $\Lambda_p(F^3) = 0$ . La matriz está traspuesta con respecto a la condición del teorema, pero sabemos que esto no cambia el determinante.

**Corolario 4.2.6.** Para  $\mathbf{p} \in V \setminus \mathbb{V}(g)$ , no singular, ya fijados, y  $\Lambda_p$  definido según el Teorema 4.2.4, se verifica que  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si

$$\Lambda_p((F + G)^3 - 3FG(F + G)) = 0. \quad (4.5)$$

*Demostración.* Puesto que  $\Lambda_p(F^3) = \Lambda_p(G^3)$ , la condición (4.3) es equivalente a

$$\Lambda_p(F^3 + G^3) = 0.$$

Entonces, la ecuación (4.5) es consecuencia de que  $F^3 + G^3 = (F + G)^3 - 3FG(F + G)$ .  $\square$

### 4.3. Eliminación de los planos $\alpha$ y $\beta$

Tanto la condición de punto de inflexión del Teorema 4.2.4 como la del Corolario 4.2.6 dependen de los planos  $\alpha$  y  $\beta$  cuyos valores desconocemos. Por tanto, el siguiente paso es eliminar estos de la ecuación. Al hacer esto introduciremos los coeficientes de la segunda polar en las ecuaciones, que son las derivadas segundas de  $f$  en  $\mathbf{p}$ . Estos coeficientes están recogidos en la matriz Hessiana.

**Notación 4.3.1.** A lo largo de este capítulo, para abreviar la notación se usará  $H = H_f(\mathbf{p})$ .

**Lema 4.3.2.** Sean  $F$  y  $G$  definidos como en la Notación 4.2.5. Entonces,

$$F + G = -2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix}$$

*Demostración.* Sean  $m_0, \dots, m_3 \in \mathcal{A}$  dados por el desarrollo por el vector columna  $\bar{\alpha}$  del determinante

$$\det(\bar{\mathbf{a}} \quad \bar{g} \quad \bar{f} \quad \bar{\alpha}) = m_0\alpha_0 + \dots + m_3\alpha_3,$$

y sean  $n_0, \dots, n_3 \in \mathcal{A}$  dados por el desarrollo por el vector columna  $\bar{\beta}$  del determinante

$$\det(\bar{\mathbf{b}} \quad \bar{g} \quad \bar{f} \quad \bar{\beta}) = n_0\beta_0 + \dots + n_3\beta_3.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} F &= (m_0\alpha_0 + \dots + m_3\alpha_3)(n_0\beta_0 + \dots + n_3\beta_3) \\ G &= (n_0\alpha_0 + \dots + n_3\alpha_3)(m_0\beta_0 + \dots + m_3\beta_3). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por tanto,

$$F + G = \sum_{i,j=0}^3 m_i n_j (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i). \quad (4.7)$$

Sea  $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ . De la definición de la segunda polar se tiene que el coeficiente de  $\Delta_p^2 f$  de  $X_i X_j$  es  $2f_{ij}$  si  $i \neq j$  y  $f_{ij}$  si  $i = j$ . Por tanto, para todo  $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ , igualando coeficientes de los monomios  $X_i X_j$  en la ecuación (4.1), tenemos que se verifica

$$\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i = 2f_{ij} + (t_i f_j + t_j f_i). \quad (4.8)$$

Sustituyendo esta identidad en la ecuación (4.7), obtenemos

$$F + G = 2 \sum_{i,j=0}^3 m_i n_j f_{ij} + \sum_{i,j=0}^3 m_i n_j (t_i f_j + t_j f_i). \quad (4.9)$$

Vamos a estudiar estos dos sumandos de forma independiente. En primer lugar, vamos a estudiar el segundo sumando. Por la definición de  $m_0, \dots, m_3$  y  $n_0, \dots, n_3$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (m_0 f_0 + \dots + m_3 f_3) &= \det(\bar{\mathbf{a}} \quad \bar{g} \quad \bar{f} \quad \bar{f}) = 0 \\ (n_0 f_0 + \dots + n_3 f_3) &= \det(\bar{\mathbf{b}} \quad \bar{g} \quad \bar{f} \quad \bar{f}) = 0 \end{aligned}$$

ya que se trata de dos determinantes con dos columnas idénticas. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^3 m_i n_j (t_i f_j + t_j f_i) &= (m_0 t_0 + \dots + m_3 t_3)(n_0 f_0 + \dots + n_3 f_3) + \\ &+ (n_0 t_0 + \dots + n_3 t_3)(m_0 f_0 + \dots + m_3 f_3) = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

A continuación, vamos a estudiar el primer sumando. Consideremos el determinante

$$\det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} & \mathbf{a}_0 & g_0 & f_0 \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & \mathbf{a}_1 & g_1 & f_1 \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} & f_{23} & \mathbf{a}_2 & g_2 & f_2 \\ f_{30} & f_{31} & f_{32} & f_{33} & \mathbf{a}_3 & g_3 & f_3 \\ \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & 0 & 0 & 0 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Sean  $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ . El coeficiente que acompaña a  $f_{ij}$  en la expansión del determinante de la ecuación (4.11) es de la forma

$$(-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & 0 \end{pmatrix},$$

con  $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}_3(\mathcal{A})$  y tal que  $\det M_2 = (-1)^{i+1} m_i$  y  $\det M_3 = (-1)^{j+1} n_j$ .

Ahora bien, como demuestra Prasolov [18], se tiene la siguiente igualdad

$$\det \begin{pmatrix} M_2 & M_1 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} = \det M_2 \det M_3.$$

Por tanto, permutando 3 columnas, se tiene que el coeficiente que acompaña a  $f_{ij}$  en la ecuación (4.11) es

$$(-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} (-1)^3 \det \begin{pmatrix} M_2 & M_1 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} = -m_i n_j.$$

Por tanto,

$$\det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} = - \sum_{i,j=0}^3 m_i n_j f_{ij}, \quad (4.12)$$

que sustituido en la ecuación (4.9), prueba el lema.  $\square$

**Lema 4.3.3.** Sean  $F$  y  $G$  definidos como en la Notación 4.2.5. Entonces,

$$FG = \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix}$$

*Demostración.* Usando la ecuación (4.6) que se demostró en el lema previo, podemos escribir

$$FG = (m_0 \alpha_0 + \cdots + m_3 \alpha_3)(m_0 \beta_0 + \cdots + m_3 \beta_3)(n_0 \alpha_0 + \cdots + n_3 \alpha_3)(n_0 \beta_0 + \cdots + n_3 \beta_3).$$

Por tanto,

$$FG = \left( \sum_{i,j=0}^3 m_i m_j \alpha_i \beta_j \right) \left( \sum_{i,j=0}^3 n_i n_j \alpha_i \beta_j \right).$$

Ahora, vamos a desarrollar los términos entre paréntesis. Se tiene que

$$\sum_{i,j=0}^3 m_i m_j \alpha_i \beta_j = \sum_{i < j} m_i m_j (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) + \sum_{i=0}^3 m_i^2 \alpha_i \beta_i,$$

con lo que, empleando la ecuación (4.8), podemos escribir

$$\sum_{i,j=0}^3 m_i m_j \alpha_i \beta_j = \sum_{i < j} m_i m_j (2f_{ij} + t_i f_j + t_j f_i) + \sum_{i=0}^3 m_i^2 (f_{ii} + t_i f_i) = \sum_{i,j=0}^3 m_i m_j (f_{ij} + t_i f_j).$$

Además, por la ecuación (4.10), se tiene que

$$\sum_{i,j=0}^3 m_i m_j t_i f_j = (m_0 t_0 + \cdots + m_3 t_3)(m_0 f_0 + \cdots + m_3 f_3) = 0,$$

por lo que

$$\sum_{i,j=0}^3 m_i m_j \alpha_i \beta_j = \sum_{i,j=0}^3 m_i m_j f_{ij}.$$

De igual manera se prueba que

$$\sum_{i,j=0}^3 n_i n_j \alpha_i \beta_j = \sum_{i,j=0}^3 n_i n_j f_{ij}.$$

Por tanto, hemos demostrado que

$$FG = \left( \sum_{i,j=0}^3 m_i m_j f_{ij} \right) \left( \sum_{i,j=0}^3 n_i n_j f_{ij} \right).$$

Solo falta expresar estos sumatorios como determinantes orlados. Igual que en el lema previo se prueba la ecuación (4.12), se demuestra que

$$\det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \mathbf{a} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} = - \sum_{i,j=0}^3 m_i m_j f_{ij}, \quad \text{y} \quad \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \mathbf{b} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} = - \sum_{i,j=0}^3 n_i n_j f_{ij},$$

lo que prueba el lema □

Usando el Lema 4.3.2 y el Lema 4.3.3, podemos expresar la condición de que  $\mathbf{p}$  sea de inflexión del Corolario 4.2.6 de manera independiente de los planos que hemos estado empleando desde el Lema 4.2.2. Se tiene, entonces, el siguiente resultado.

**Teorema 4.3.4.** *Para  $\mathbf{p} \in V \setminus \mathbb{V}(g)$ , no singular, ya fijados, y  $\Lambda_p$  definido según el Teorema 4.2.4, se verifica que  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si*

$$\Lambda_p \left( \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \mathbf{b} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} \left( 4 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \mathbf{b} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix}^2 - 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \mathbf{a} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \mathbf{b} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} \right) \right) = 0.$$

## 4.4. Factorización del plano $g$

La condición del Teorema 4.3.4, al igual que la del Corolario 4.2.6 y la del Teorema 4.2.4, depende del plano  $\mathbb{V}(g)$  que fijamos anteriormente y que no contiene a  $\mathbf{p}$ . El siguiente paso del cálculo de Clebsch es factorizar este plano de la ecuación para conseguir una condición para todo punto de la superficie.

**Notación 4.4.1.** Denotaremos, por analogía a  $g(\mathbf{p}) = g_0 p_0 + \cdots + g_3 p_3$ ,

$$\mathbf{a}(\mathbf{p}) := \mathbf{a}_0 p_0 + \cdots + \mathbf{a}_3 p_3 \in \mathcal{A}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{p}) := \mathbf{b}_0 p_0 + \cdots + \mathbf{b}_3 p_3 \in \mathcal{A}$$

Vamos a empezar por desarrollar los determinantes orlados de orden 3 que aparecen en la expresión del Teorema 4.3.4.

Puesto que  $f$  es homogéneo de grado  $d$ , sus primeras parciales lo son de grado  $d - 1$ , con lo que, usando el teorema de Euler para polinomios homogéneos, tenemos que para cada  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,

$$f_{0i}p_0 + f_{1i}p_1 + f_{2i}p_2 + f_{3i}p_3 = f_{i0}p_0 + f_{i1}p_1 + f_{i2}p_2 + f_{i3}p_3 = (d - 1)f_i.$$

Podemos usar esta identidad para operar en (4.11) y eliminar las filas que contienen las primeras parciales de  $f$  en  $\mathbf{p}$ . Entonces, puesto que hemos supuesto  $d \geq 3$ , se tiene que  $d - 1 \neq 0$  y podemos escribir,

$$\det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} = \frac{1}{(d - 1)^2} \det \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} & \mathbf{a}_0 & g_0 & 0 \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & \mathbf{a}_1 & g_1 & 0 \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} & f_{23} & \mathbf{a}_2 & g_2 & 0 \\ f_{30} & f_{31} & f_{32} & f_{33} & \mathbf{a}_3 & g_3 & 0 \\ \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & 0 & 0 & -\mathbf{b}(\mathbf{p}) \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & -g(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{a}(\mathbf{p}) & -g(\mathbf{p}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Este determinante se puede desarrollar por la última fila y la última columna para obtener

$$\det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} = -\frac{1}{(d - 1)^2} \left( g(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} - \mathbf{a}(\mathbf{p})g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} - \right. \\ \left. -\mathbf{b}(\mathbf{p})g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} + \mathbf{a}(\mathbf{p})\mathbf{b}(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{g} \end{pmatrix} \right), \quad (4.13)$$

donde se ha usado que la matriz  $H$  es simétrica y la Proposición 2.5.15 para justificar que  $\det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{g} \end{pmatrix} = \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix}$ .

Análogamente, se demuestra que

$$\det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} = -\frac{1}{(d - 1)^2} \left( g(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} - \right. \\ \left. -2\mathbf{a}(\mathbf{p})g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} + \mathbf{a}(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{g} \end{pmatrix} \right) \quad (4.14)$$

y

$$\det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} = -\frac{1}{(d - 1)^2} \left( g(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} - \right. \\ \left. -2\mathbf{b}(\mathbf{p})g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} + \mathbf{b}(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{g} \end{pmatrix} \right). \quad (4.15)$$

**Notación 4.4.2.** Siguiendo a Salmon [19], para compactar algunas expresiones que aparecerán más adelante, dado  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , definimos

$$\mathbf{c}_i := g(\mathbf{p})\mathbf{b}_i - \mathbf{b}(\mathbf{p})g_i.$$

Podemos usar la bilinealidad del determinante orlado de primer orden, según el Corolario 2.5.14, para escribir las ecuaciones (4.13) y (4.15) de forma más compacta usando la Notación 4.4.2. La ecuación (4.13) se expresa entonces

$$\det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} = -\frac{1}{(d-1)^2} \left( g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} - \mathbf{a}(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right), \quad (4.16)$$

y la ecuación (4.15),

$$\det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \\ \bar{\mathbf{b}} & \bar{g} & \bar{f} \end{pmatrix} = -\frac{1}{(d-1)^2} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Usando las ecuaciones (4.14), (4.16) y (4.17), podemos expresar la condición del Teorema 4.3.4 como la imagen por  $\Lambda_p$  de una expresión en determinantes orlados de orden 1.

**Lema 4.4.3.** *Para  $\mathbf{p} \in V \setminus \mathbb{V}(g)$ , no singular, ya fijados, y  $\Lambda_p$  definido según el Teorema 4.2.4, se verifica que  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si*

$$\Lambda_p \left( 4 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix}^3 - 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right) = 0.$$

*Demostración.* Sea  $\mathbf{p} \in V \setminus \mathbb{V}(g)$  el punto fijado, no singular. Entonces, a partir del Teorema 4.3.4, y las ecuaciones (4.14), (4.16) y (4.17),  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si la imagen por  $\Lambda_p$  de

$$\begin{aligned} & \left( g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} - \mathbf{a}(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right) \left( 4 \left( g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} - \mathbf{a}(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \left( g(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} - 2\mathbf{a}(\mathbf{p})g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} + \mathbf{a}(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{g} \end{pmatrix} \right) \right) \end{aligned}$$

es nula. En virtud de la linealidad de  $\Lambda_p$ , podemos estudiar esta expresión sumando a sumando. Escribimos, entonces,

$$g(\mathbf{p})^3 \left( 4 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix}^3 - 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right) + \quad (4.18)$$

$$+ \mathbf{a}(\mathbf{p})^3 \left( 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{g} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} - 4 \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix}^3 \right) + \quad (4.19)$$

$$+ g(\mathbf{p})\mathbf{a}(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \left( 12 \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix}^2 - 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{g} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right) + \quad (4.20)$$

$$+ \mathbf{a}(\mathbf{p})g(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \left( 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} - 12 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix}^2 \right) + \quad (4.21)$$

$$+ 6 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \left( \mathbf{a}(\mathbf{p})g(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} - \mathbf{a}(\mathbf{p})^2 g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right) \quad (4.22)$$

Vamos a estudiar uno a uno los sumandos que aparecen.

El sumando (4.19) es de la forma  $\mathbf{a}(\mathbf{p})u$  donde  $u \in T^2(S^3(\mathbb{C}^4))$  es una expresión homogénea de grado 3 en las  $\mathbf{b}_i$ . Por tanto, ese sumando puede expresarse, de acuerdo con la Notación 2.3.4, como  $\mathbf{p}^3 \otimes \tilde{u} \in T^2(S^3(\mathbb{C}^4))$ , con  $\tilde{u} \in S^3(\mathbb{C}^4)$ . Por tanto, la imagen por  $\Lambda_p$  de este sumando es  $\Lambda_{\Delta_p^3 f}(\mathbf{p}^3)\Lambda_{\Delta_p^3 f}(\tilde{u})$ . Como  $\Lambda_{\Delta_p^3 f}(\mathbf{p}^3) = \Delta_p^3 f(\mathbf{p}) = 0$ , la imagen del sumando (4.19) es nula.

El sumando (4.20) tiene un factor homogéneo de grado 3 en los  $\mathbf{a}_i$  y de grado 1 en los  $\mathbf{b}_i$  y otro factor  $u$  homogéneo de grado 2 en los  $\mathbf{b}_i$ . Por tanto, podemos escribir

$$u\mathbf{a}(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = -u\mathbf{a}(\mathbf{p})^2 \sum_{i,j=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H)\mathbf{a}_i\mathbf{c}_j,$$

con lo que la imagen por  $\Lambda_p$  de este sumando es

$$-\sum_{i,j=0}^3 \left( \Lambda_p \left( -u\mathbf{a}(\mathbf{p})^2 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H)\mathbf{a}_i\mathbf{c}_j \right) \right) = -\sum_{i,j=0}^3 \left( \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H)\Lambda_{\Delta_p^3 f}(\mathbf{p}^2\mathbf{e}_i)\Lambda_{\Delta_p^3 f}(u\mathbf{c}_j) \right),$$

donde se ha cometido el abuso de notación de identificar  $u\mathbf{c}_j \in T^2(S^3(\mathbb{C}^4))$  con el vector  $\tilde{u} \in S^3(\mathbb{C}^4)$  tal que  $u\mathbf{c}_j = 1 \otimes \tilde{u}$ . Aplicando entonces la Proposición 2.3.1, se tiene que la imagen del sumando (4.20) es

$$\begin{aligned} & -\sum_{i,j=0}^3 \left( \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H)\Lambda_{\Delta_p^3 f}(\mathbf{p}^2\mathbf{e}_i)\Lambda_{\Delta_p^3 f}(u\mathbf{c}_j) \right) = \\ & = -\sum_{i,j=0}^3 \left( \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H)(d-1)(d-2)f_i\Lambda_{\Delta_p^3 f}(u\mathbf{c}_j) \right) = \\ & = (d-1)(d-2)\Lambda_{\Delta_p^3 f} \left( -u \sum_{i,j=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H)f_i\mathbf{c}_j \right) = \\ & = (d-1)(d-2)\Lambda_{\Delta_p^3 f} \left( -u \det_H \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right). \quad (4.23) \end{aligned}$$

Ahora bien, en el determinante orlado que resulta en la ecuación (4.23), la columna  $\bar{f}$  es combinación lineal de las otras, como se prueba usando el teorema de Euler para polinomios homogéneos y usando que  $\mathbf{c}_0p_0 + \dots + \mathbf{c}_3p_3 = 0$  por definición. Por lo tanto se tiene que el determinante es nulo, con lo que su imagen por  $\Lambda_{\Delta_p^3 f}$  es nula.

El sumando (4.21) podemos expresarlo como

$$u\mathbf{a}(\mathbf{p}) \left( \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} - 4 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix}^2 \right),$$

donde  $u$  es homogéneo de grado 1 en los  $\mathbf{b}_i$ . Entonces, su imagen por  $\Lambda_p$  es

$$\begin{aligned} \Lambda_p \left( u \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \right) - 4\Lambda_p \left( u \mathbf{a}(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right)^2 = \\ = \Lambda_{\Delta_p^3 f} \left( u \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right) \Lambda_{\Delta_p^3 f} \left( -\mathbf{p} \sum_{i,j=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) - \\ - 4\Lambda_p \left( u \mathbf{a}(\mathbf{p}) \left( \sum_{i,j=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \mathbf{a}_i \mathbf{c}_j \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que  $\Lambda_{\Delta_p^3 f}(\mathbf{p} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = (d-2)f_{ij}$  y dado que por el teorema de Euler para polinomios homogéneos

$$\sum_{i,j=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) f_{ij} = 4 \det H,$$

tenemos que la imagen del sumando (4.21) es

$$-4(d-2) \det H \Lambda_{\Delta_p^3 f} \left( u \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right) - 4\Lambda_p \left( u \mathbf{a}(\mathbf{p}) \left( \sum_{i,j=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \mathbf{a}_i \mathbf{c}_j \right)^2 \right) \quad (4.24)$$

Ahora, usando que  $\frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) = \frac{\partial \det}{\partial f_{ji}}(H)$  y el Corolario 2.5.11, tenemos que

$$\begin{aligned} \Lambda_p \left( u \mathbf{a}(\mathbf{p}) \left( \sum_{i,j=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \mathbf{a}_i \mathbf{c}_j \right)^2 \right) = \sum_{i,j,r,s=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{sr}}(H) \Lambda_p (u \mathbf{a}(\mathbf{p}) \mathbf{a}_i \mathbf{c}_j \mathbf{a}_r \mathbf{c}_s) = \\ = \sum_{i,j,r,s=0}^3 \left( \frac{\partial \det}{\partial f_{ir}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{sj}}(H) - \det H \frac{\partial^2 \det}{\partial f_{ir} \partial f_{sj}}(H) \right) (d-2) f_{ir} \Lambda_{\Delta_p^3 f} (u \mathbf{c}_j \mathbf{c}_s) \quad (4.25) \end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial \det}{\partial f_{sj}}$  es un polinomio homogéneo de grado 3, aplicando el teorema de Euler, la ecuación (4.25) queda

$$\begin{aligned} (d-2) \sum_{j,s=0}^3 \left( 4 \det H \frac{\partial \det}{\partial f_{sj}}(H) - \det H 3 \frac{\partial \det}{\partial f_{sj}}(H) \right) \Lambda_{\Delta_p^3 f} (u \mathbf{c}_j \mathbf{c}_s) = \\ = (d-2) \det H \sum_{j,s=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{sj}}(H) \Lambda_{\Delta_p^3 f} (u \mathbf{c}_j \mathbf{c}_s) = \\ = -(d-2) \det H \Lambda_{\Delta_p^3 f} \left( u \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right). \quad (4.26) \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (4.26) en (4.24) vemos que el sumando (4.21) también tiene imagen nula.

Comprobar que el sumando (4.22) también tiene imagen nula por  $\Lambda_p$  es un cálculo similar a los que se han hecho anteriormente, en el que, de nuevo, se tiene que aplicar el Corolario 2.5.11.

En consecuencia,  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si la imagen por  $\Lambda_p$  del sumando (4.18) es nula. Puesto que  $\mathbf{p} \notin \mathbb{V}(g)$ , se tiene que  $g(\mathbf{p}) \neq 0$ , por lo que la imagen del primer sumando es nula si y solo si se verifica la condición del lema.  $\square$

Con el lema hemos conseguido factorizar un término  $g(\mathbf{p})^3$ . Sin embargo, en la definición de los  $\mathbf{c}_i$  también aparecen los coeficientes de  $g$ . Por tanto, el siguiente paso es desarrollar la expresión del Lema 4.4.3. Con esto se consigue factorizar otro término  $g(\mathbf{p})^3$  y obtenemos una ecuación independiente del plano de partida.

**Teorema 4.4.4.** *Para  $\mathbf{p} \in V$ , no singular, ya fijados, y  $\Lambda_p$  definido según el Teorema 4.2.4, se verifica que  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si*

$$\Lambda_p \left( 4 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix}^3 - 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \right) = 0. \quad (4.27)$$

*Demostración.* Sea  $\mathbf{p} \in V \setminus \mathbb{V}(g)$  el punto fijado, no singular. Entonces, por el Lema 4.4.3,  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si

$$\Lambda_p \left( 4 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix}^3 - 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Desarrollando esta expresión por bilinealidad del determinante orlado de primer orden obtenemos que  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si la imagen por  $\Lambda_p$  de

$$\begin{aligned} & \left( g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} - \mathbf{b}(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{g}} \end{pmatrix} \right) \left( 4 \left( g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} - \mathbf{b}(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{g}} \end{pmatrix} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \left( g(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} - 2\mathbf{b}(\mathbf{p})g(\mathbf{p}) \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{g}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} + \mathbf{b}(\mathbf{p})^2 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{g}} \\ \bar{\mathbf{g}} \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

Esta expresión es la misma que tuvimos que desarrollar en la demostración del Lema 4.4.3, salvo porque escribimos  $\mathbf{b}_i$  donde antes teníamos  $\mathbf{a}_i$  y  $\mathbf{a}_i$  donde antes teníamos  $\mathbf{c}_i$ . Por tanto, el mismo desarrollo que hicimos en la demostración anterior podemos aplicarlo para obtener que  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si

$$g(\mathbf{p})^3 \Lambda_p \left( 4 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix}^3 - 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Como  $\mathbf{p} \notin \mathbb{V}(g)$ , entonces  $g(\mathbf{p}) \neq 0$  y podemos eliminar el factor de la ecuación. La expresión obtenida no depende del plano  $\mathbb{V}(g)$  fijado al inicio. Por tanto, para cada  $\mathbf{p} \in V$  podemos fijar un plano que no contenga a  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}$  será de inflexión si y solo si se verifica la ecuación (4.27). Hemos conseguido, por tanto, factorizar el plano de nuestra condición de punto de inflexión.  $\square$

## 4.5. Conjunto de puntos de inflexión

El Teorema 4.4.4 proporciona una condición necesaria y suficiente para cualquier punto no singular de una superficie algebraica. Sin embargo, esta condición sigue estando expresada usando el método simbólico. A continuación vamos a aplicar  $\Lambda_p$  para obtener una expresión polinómica que caracterice los puntos de inflexión.

**Teorema 4.5.1.** Sea  $\mathbf{p} \in V$ , no singular, ya fijado. Se verifica que  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si

$$\sum_{i,j,k,l,m,n=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) f_{ikm} f_{jln} \left( 4 \frac{\partial \det}{\partial f_{kl}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{mn}}(H) - 3 \frac{\partial \det}{\partial f_{nl}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{mk}}(H) \right) = 0$$

*Demostración.* Sea  $\mathbf{p} \in V$  no singular, entonces, por el Teorema 4.4.4,  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si se verifica (4.27). Esta expresión la podemos desarrollar usando la Proposición 2.5.16.

$$\begin{aligned} \Lambda_p \left( 4 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix}^3 - 3 \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \det_H \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \right) = \\ = \Lambda_p \left( -4 \sum_{i,j,k,l,m,n=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \mathbf{b}_i \mathbf{a}_j \frac{\partial \det}{\partial f_{kl}}(H) \mathbf{b}_k \mathbf{a}_l \frac{\partial \det}{\partial f_{mn}}(H) \mathbf{b}_m \mathbf{a}_n \right) - \\ - \Lambda_p \left( -3 \sum_{i,j,k,l,m,n=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \mathbf{b}_i \mathbf{a}_j \frac{\partial \det}{\partial f_{kl}}(H) \mathbf{a}_k \mathbf{a}_l \frac{\partial \det}{\partial f_{mn}}(H) \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n \right) = \\ = -4 \sum_{i,j,k,l,m,n=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{kl}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{mn}}(H) \Lambda_p(\mathbf{a}_j \mathbf{a}_l \mathbf{a}_n \mathbf{b}_i \mathbf{b}_k \mathbf{b}_m) - \\ + 3 \sum_{i,j,k,l,m,n=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{kl}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{mn}}(H) \Lambda_p(\mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \mathbf{a}_l \mathbf{b}_i \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n) \end{aligned}$$

Usando la ecuación (4.2), podemos calcular  $\Lambda_p(\mathbf{a}_j \mathbf{a}_l \mathbf{a}_n \mathbf{b}_i \mathbf{b}_k \mathbf{b}_m)$  y  $\Lambda_p(\mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \mathbf{a}_l \mathbf{b}_i \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n)$ . De este modo obtenemos que  $\mathbf{p}$  es de inflexión si y solo si

$$\begin{aligned} 0 = 4 \sum_{i,j,k,l,m,n=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{kl}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{mn}}(H) f_{jln} f_{ikm} - \\ - 3 \sum_{i,j,k,l,m,n=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{kl}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{mn}}(H) f_{jkl} f_{imn} = \\ = 4 \sum_{i,j,k,l,m,n=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{kl}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{mn}}(H) f_{jln} f_{ikm} - \\ - 3 \sum_{i,j,k,l,m,n=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{nl}}(H) \frac{\partial \det}{\partial f_{mk}}(H) f_{jnl} f_{imk}, \end{aligned}$$

y, como  $f_{jln} = f_{jnl}$  y  $f_{ikm} = f_{imk}$ , agrupando términos en un solo sumatorio llegamos a la condición que queríamos probar.  $\square$

Hasta ahora hemos venido fijando el punto de la superficie. Con esto, las parciales de  $f$  en el punto eran números complejos que son escalares en el espacio en que está definida la aplicación lineal  $\Lambda_p$ . Sin embargo, ahora estamos en condiciones de resumir los resultados del cálculo de Clebsch en un resultado que nos caracterice los puntos de inflexión de la superficie como un subconjunto algebraico de esta.

El Teorema 4.5.1 nos lleva de forma natural a definir el siguiente polinomio, que nos permitirá caracterizar los puntos de inflexión de una superficie algebraica.

**Definición 4.5.2.** Dado  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ , se define el polinomio  $\text{Flex}(f) \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  como

$$\text{Flex}(f) = \sum_{i,j,k,l,m,n=0}^3 \frac{\partial \det}{\partial f_{ij}}(H_f) \frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_k \partial X_m} \frac{\partial^3 f}{\partial X_j \partial X_l \partial X_n} \left( 4 \frac{\partial \det}{\partial f_{kl}}(H_f) \frac{\partial \det}{\partial f_{mn}}(H_f) - 3 \frac{\partial \det}{\partial f_{nl}}(H_f) \frac{\partial \det}{\partial f_{mk}}(H_f) \right)$$

**Proposición 4.5.3.** Sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ , con  $d \geq 3$ , entonces,  $\text{Flex}(f) \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  es un polinomio homogéneo de grado  $11d - 24$ .

*Demostración.* Si  $f$  es un polinomio homogéneo de grado  $d$ , entonces sus segundas parciales son polinomios homogéneos de grado  $d - 2$ , y sus terceras parciales, de grado  $d - 3$ . Puesto que  $H_f$  tiene como entradas las segundas parciales de  $f$ , entonces los menores de orden 3 de la matriz  $H_f$  son polinomios homogéneos de grado  $3(d - 2)$ .

En consecuencia, al ser un producto de polinomios homogéneos,  $\text{Flex}(f)$  es homogéneo, y su grado es

$$3(d - 2) + 2(d - 3) + 6(d - 2) = 11d - 24.$$

□

Usando esta definición podemos enunciar una caracterización de los puntos de inflexión de una superficie algebraica cualquiera. Resumiendo así los resultados de este capítulo y obteniendo el resultado principal de este trabajo.

**Teorema 4.5.4.** Sea  $V \subset \mathbb{P}^3$  una superficie, y sea  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_3]$  un polinomio homogéneo tal que  $\mathbb{I}(V) = \langle f \rangle$ . Entonces, el conjunto de puntos de inflexión de  $V$  es el subconjunto algebraico de  $V$  dado por  $\mathbb{V}(\partial f / \partial X_0, \dots, \partial f / \partial X_3) \cup \mathbb{V}(f, \text{Flex}(f))$ .

*Demostración.* En primer lugar, si  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(\partial f / \partial X_0, \dots, \partial f / \partial X_3)$ , como  $\partial f / \partial X_0(\mathbf{p}) = \dots = \partial f / \partial X_3(\mathbf{p}) = 0$ , entonces, por el teorema de Euler se tiene que  $f(\mathbf{p}) = 0$ . Por tanto, se tiene que,

$$\mathbb{V}(\partial f / \partial X_0, \dots, \partial f / \partial X_3) \cup \mathbb{V}(f, \text{Flex}(f)) \subset \mathbb{V}(f),$$

con lo que, efectivamente, es un subconjunto algebraico de  $V$ . Veamos ahora que se trata del conjunto de puntos de inflexión.

Si el grado de  $f$  es 1 o 2, por la Proposición 4.2.3, todos los puntos de  $V = \mathbb{V}(f)$  son de inflexión. Además, puesto que las terceras parciales de  $f$  son nulas, se tiene que, en este caso,  $\text{Flex}(f) = 0$ . Por tanto,

$$\mathbb{V}(\partial f / \partial X_0, \dots, \partial f / \partial X_3) \cup \mathbb{V}(f, \text{Flex}(f)) = \mathbb{V}(\partial f / \partial X_0, \dots, \partial f / \partial X_3) \cup \mathbb{V}(f) = \mathbb{V}(f),$$

con lo que el teorema se verifica en este caso.

Recordemos que  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(f)$  es singular si y solo si

$$\Delta_{\mathbf{p}}^1 f = \frac{\partial f}{\partial X_0}(\mathbf{p})X_0 + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_3}(\mathbf{p})X_3 = 0,$$

es decir,  $\mathbf{p}$  es singular si y solo si  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(\partial f/\partial X_0, \dots, \partial f/\partial X_3)$ .

Supongamos ahora que el grado de  $f$  es  $d$ , con  $d \geq 3$ , y sea  $\mathbf{p} \in V$ .

Si  $\mathbf{p}$  es de inflexión, entonces, o bien  $\mathbf{p}$  es singular y entonces  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(\partial f/\partial X_0, \dots, \partial f/\partial X_3)$ , o bien  $\mathbf{p}$  es no singular y podemos aplicar el Teorema 4.5.1, que afirma que  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(\text{Flex}(f))$ .

Entonces,  $\mathbf{p} \in \mathbb{V}(\partial f/\partial X_0, \dots, \partial f/\partial X_3) \cup \mathbb{V}(f, \text{Flex}(f))$ .

Si  $\mathbf{p}$  no es de inflexión, por la Proposición 4.1.1,  $\mathbf{p}$  no es singular, por tanto,

$$\mathbf{p} \notin \mathbb{V}(\partial f/\partial X_0, \dots, \partial f/\partial X_3).$$

Además, como  $\mathbf{p}$  no es singular, podemos aplicar el Teorema 4.5.1 para afirmar que

$$\mathbf{p} \notin \mathbb{V}(\text{Flex}(f)).$$

En consecuencia,  $\mathbf{p} \notin \mathbb{V}(\partial f/\partial X_0, \dots, \partial f/\partial X_3) \cup \mathbb{V}(f, \text{Flex}(f))$ . □

# Capítulo 5

## Implementación en Sage

En esta sección se va a usar SageMath [23], un potente sistema de software de matemáticas de código abierto basado en Python. Usando este lenguaje se va a proporcionar un código que, dado  $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ , permite calcular las polares de  $f$ . Se proporciona también una función que calcula el polinomio Flex ( $f$ ). Las gráficas que acompañarán los cálculos se han realizado con Asymptote [4].

### 5.1. Aplicación de polaridad

En primer lugar, definimos las variables con las que se va a trabajar. Aunque hasta ahora hemos empleado las variables  $X_0, \dots, X_n$ , para la implementación en Sage de la aplicación de polaridad nos interesa introducir otro conjunto de variables  $Y_0, \dots, Y_n$ . Entonces, lo primero que tenemos que hacer en nuestro código es declarar estos dos conjuntos de variables.

```
n = 3 # Dim del espacio ambiente
X = var(['X'+str(i) for i in range(n+1)])
Y = var(['Y'+str(i) for i in range(n+1)])
```

Con las variables declaradas podemos definir la aplicación de polaridad de grado 1 en Sage de la siguiente forma.

```
def P1(f):
    return sum(Y[i] * derivative(f, X[i]) for i in range(n+1))
```

Esta función actúa en un polinomio homogéneo de grado  $d$  en las variables  $X_0, \dots, X_n$ , produciendo un polinomio homogéneo de grado  $d - 1$  en las variables  $X_0, \dots, X_n$  y de grado 1 en las variables  $Y_0, \dots, Y_n$ . La primera polar de  $f$  en un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$ ,  $\Delta_{\mathbf{p}}^1 f$ , la obtenemos tras evaluar en  $\mathbf{p}$  el resultado de la función P1 en las variables  $X_0, \dots, X_n$ . El resultado de esto es  $\Delta_{\mathbf{p}}^1 f(Y_0, \dots, Y_n)$ .

La razón de trabajar con dos variables para la implementación en Sage, es que permite una definición recursiva de la aplicación de polaridad de grado  $k$ , con  $k > 1$ , en vez de tener que programar un sumatorio en  $k$  índices.

```

def P(F, k):
    if k==1:
        return P1(F)
    else:
        return P1(P(F, k-1))

```

Siguiendo el mismo procedimiento de evaluar en  $\mathbf{p}$  las variables  $X_0, \dots, X_n$ , se obtiene como resultado  $\Delta_p^k f(Y_0, \dots, Y_n)$ , como se comprueba de manera sencilla.

**Ejemplo 5.1.1.** Sea  $f = X_2 X_0^2 - X_1^3 \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ , como en el Ejemplo 3.4.12. Entonces, el resultado de aplicar la función P1 es el siguiente.

```

P1(X2*X0^2-X1^3)
# 2*X0*X2*Y0 - 3*X1^2*Y1 + X0^2*Y2

```

En el punto  $\mathbf{p} = (1, 0, 0) \in \mathbb{C}^3$ , sustituyendo  $X_0 = 1$ ,  $X_1 = 0$  y  $X_2 = 0$  esta ecuación se reduce a  $Y_2$ , de ahí que en el Ejemplo 3.4.12 se tenga que  $\Delta_p^1 f = X_2$ .

Ahora, para calcular la segunda polar aplicamos la función P.

```

P(X2*X0^2-X1^3, 2)
# -6*X1*Y1^2 + 2*X0*Y0*Y2 + 2*(X2*Y0 + X0*Y2)*Y0

```

En el punto  $\mathbf{p}$ , esta ecuación se reduce a  $4Y_0Y_2$ , por lo que la segunda polar es  $\Delta_p^2 f = 4X_0X_2$ .

**Ejemplo 5.1.2.** Sea  $f = X_1^4 - X_2^4 + X_1^3X_2 - X_0^2X_1^2 + X_0^2X_1X_2 - X_0^3X_3 + X_2X_3^3$  en  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_3]$ . Vamos a calcular sus polares en el punto  $\mathbf{p} = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^4$ .

```

P1f = P(X1^4-X2^4+X1^3*X2-X1^2*X0^2 +X2*X1*X0^2-X3*X0^3+X3^3*X2, 1)
P1f(X0=1,X1=0,X2=0,X3=0).expand()
# -Y3
P2f = P(X1^4-X2^4+X1^3*X2-X1^2*X0^2 +X2*X1*X0^2-X3*X0^3+X3^3*X2, 2)
P2f(X0=1,X1=0,X2=0,X3=0).expand()
# -2*Y1^2 + 2*Y1*Y2 - 6*Y0*Y3
P3f = P(X1^4-X2^4+X1^3*X2-X1^2*X0^2 +X2*X1*X0^2-X3*X0^3+X3^3*X2, 3)
P3f(X0=1,X1=0,X2=0,X3=0).expand()
# -12*Y0*Y1^2 + 12*Y0*Y1*Y2 - 18*Y0^2*Y3

```

Entonces, tenemos que las polares de  $f$  en el punto  $\mathbf{p} = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^4$  son

$$\begin{aligned} \Delta_p^1 f &= -X_3, & \Delta_p^2 f &= -2X_1^2 + 2X_1X_2 - 6X_0X_3 \\ \Delta_p^3 f &= -12X_0X_1^2 + 12X_0X_1X_2 - 18X_0^2X_3. \end{aligned}$$

La intersección de las 3 hipersuperficies polares  $\mathbb{V}(\Delta_p^1 f, \Delta_p^2 f, \Delta_p^3 f)$  se reduce a las dos rectas  $\mathbb{V}(X_1, X_3)$  y  $\mathbb{V}(X_1 - X_2, X_3)$ . Estas dos rectas son, por tanto, de inflexión, y el punto  $\mathbf{p}$  es un punto de inflexión de la superficie  $\mathbb{V}(f)$ .

La superficie  $\mathbb{V}(f)$ , así como las superficies polares en  $\mathbf{p}$  se han representado en la Figura 5.1 en la región  $[-1, 1]^3$  de la copia afín  $X_0 \neq 0$ , donde  $\mathbf{p}$  se corresponde con el punto afín  $(0, 0)$ .

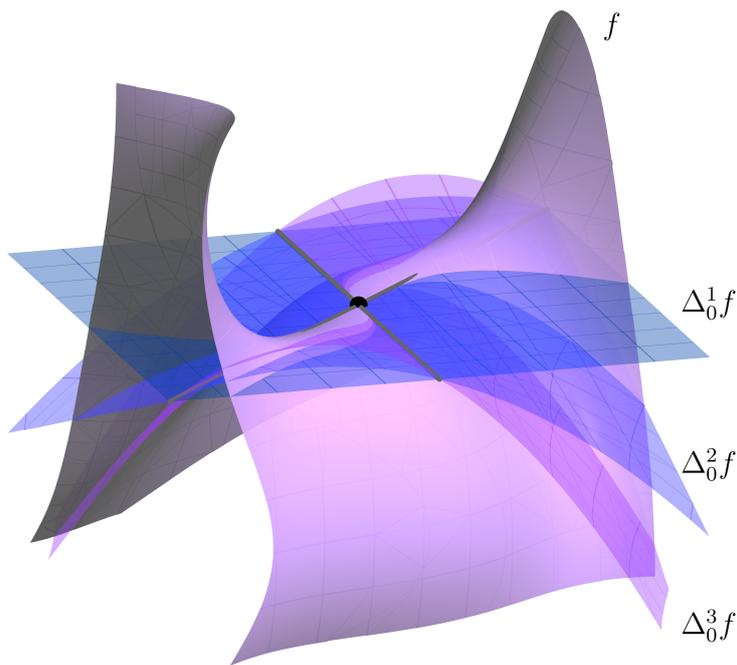


Figura 5.1: Superficie del Ejemplo 5.1.2

## 5.2. Puntos de inflexión

A continuación vamos a proporcionar una función que, dado  $f \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ , calcula el polinomio Flex( $f$ ). Para ello necesitamos unas funciones auxiliares que calculen la matriz Hessiana  $H_f$  y sus cofactores.

La siguiente función construye la matriz Hessiana. Primero se define una matriz en  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}[X_0, \dots, X_3])$  de ceros, y después con un bucle se identifica cada entrada con la derivada segunda de  $f$  correspondiente.

```
def H(f):
    MH = matrix(PolynomialRing(CC, X), n+1, n+1)
    for i in range(n+1):
        for j in range(n+1):
            MH[i,j] = derivative(derivative(f, X[i]), X[j])
    return MH
```

Para calcular la derivada del determinante en el sentido que se explicó en la sección de preliminares se proporciona el siguiente código. El código admite una matriz y una lista de índices como entrada. Si la lista de índices es de tamaño  $k$ , la función calcula la derivada de orden  $k$  del determinante a base de sustituir las entradas pertinentes por unos y anulando el resto de coeficientes de la fila y la columna. En particular, cuando la lista de índices se reduce a un par  $(i, j)$ , la función calcula el cofactor  $i, j$  de la matriz.

```
def derdet(M, arrind):
    MM = copy(M)
    rowind = []
    colind = []
    for ind in arrind:
```

```

i,j = ind
if i in rowind or j in colind:
    return 0
rowind.append(i)
colind.append(j)
for k in range(n+1):
    MM[i,k]=0
    MM[k,j]=0
MM[i,j]=1
return MM.det()

```

Con estas funciones auxiliares podemos calcular el polinomio Flex ( $f$ ) según su definición. La única particularidad del código que lo hace es que calcula previamente todos los cofactores y terceras parciales, almacena los resultados en diccionarios, y después los recupera de estos cuando se necesitan en el cálculo. Como la definición involucra un sumatorio en 6 índices, esto acelera considerablemente la ejecución del programa, evitando que recalculé elementos que ya ha calculado previamente.

```

def flex(f):
    Hf = H(f)
    Hf_cof = {}
    for i,j in itertools.product(range(n+1), repeat=2):
        Hf_cof[(i,j)] = derdet(Hf, [(i,j)])
    f_derivative = {}
    for i,j,k in itertools.product(range(n+1), repeat=3):
        f_derivative[(i,j,k)] = derivative(f, X[i], X[j], X[k])
    return sum(
        Hf_cof[(i,j)] * f_derivative[(i,k,m)] * f_derivative[(j,l,n)] *
        (4*Hf_cof[(k,l)]*Hf_cof[(m,n)] - 3*Hf_cof[(n,l)]*Hf_cof[(m,k)])
        for i,j,k,l,m,n in itertools.product(range(n+1), repeat=6)).expand()

```

**Ejemplo 5.2.1.** Sea  $f = X_1^4 - X_2^4 + X_1^3 X_2 - X_0^2 X_1^2 + X_0^2 X_1 X_2 - X_0^3 X_3 + X_2 X_3^3$  en  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_3]$ . Entonces,  $\text{Flex}(f) \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_3]$  es un polinomio de grado 20. Por su extensión, resulta inviable recogerlo en la memoria, ya que es una suma de 977 monomios.

Sin embargo, la superficie  $\mathbb{V}(f)$ , así como  $\mathbb{V}(\text{Flex}(f))$  se han representado en la Figura 5.2 en la región  $[-1, 1]^3$  de la copia afín  $X_0 \neq 0$ . Donde se aprecia que  $(0, 0, 0)$  es de inflexión.

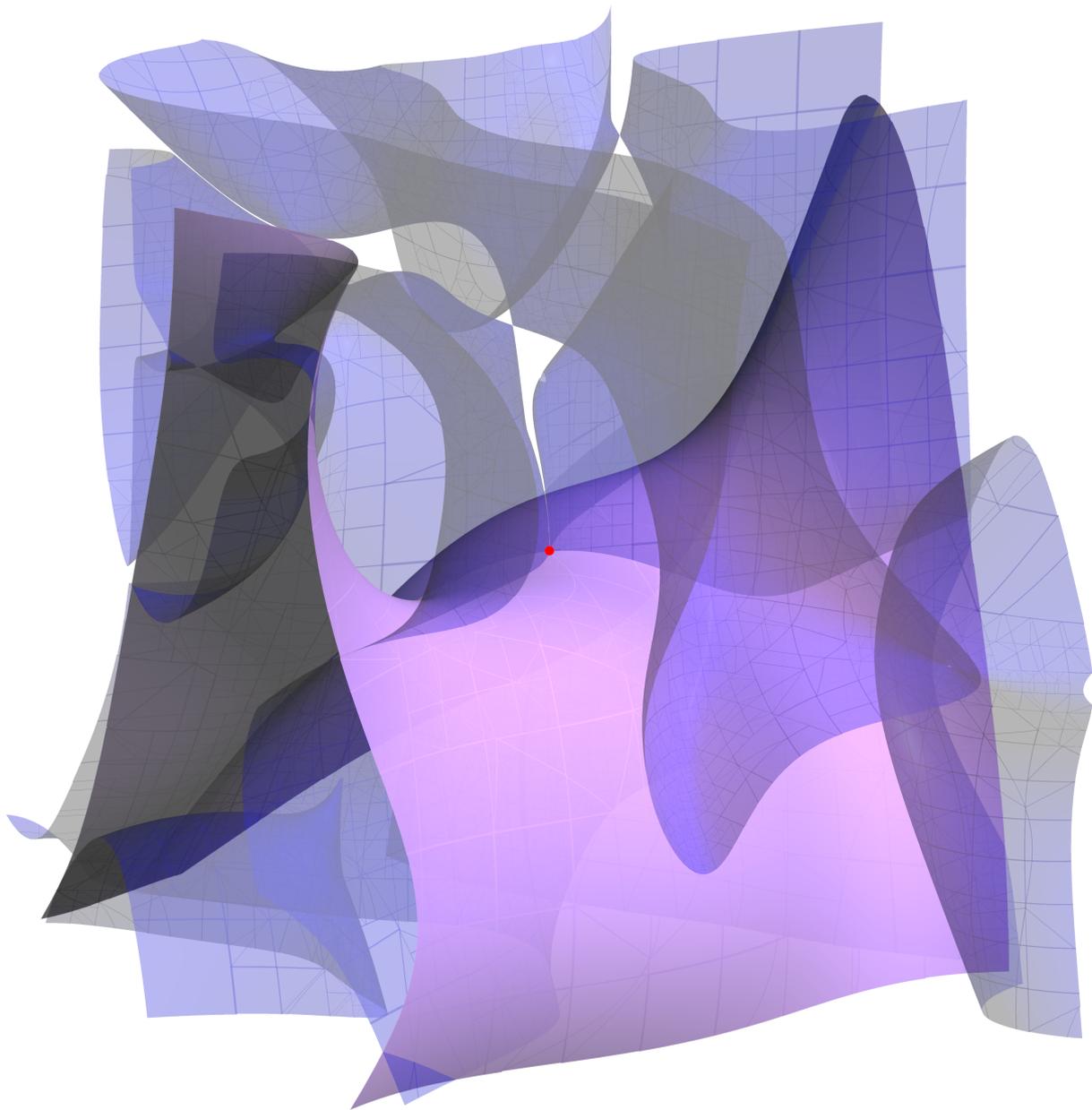


Figura 5.2: Superficie del Ejemplo 5.2.1

# Bibliografía

- [1] A. C. Aitken. *Determinants and Matrices*. Oliver & Boyd, 1956.
- [2] T. M. Apostol. *Análisis matemático*. Reverte Editorial, 2020. ISBN: 9788429150049.
- [3] J. Bochnak y J. Siciak. «Polynomials and multilinear mappings in topological vector-spaces». En: *Studia Mathematica* 39.1 (1971), págs. 59-76. DOI: 10.4064/sm-39-1-59-76.
- [4] J. C. Bowman y A. Hammerlindl. «Asymptote: A vector graphics language». En: *TUGboat: The Communications of the TEX Users Group* 29.2 (2008), págs. 288-294.
- [5] L. Busé et al. «The geometry of the flex locus of a hypersurface». En: *Pacific Journal of Mathematics* 304.2 (2020), págs. 419-437. DOI: <https://doi.org/10.2140/pjm.2020.304.419>.
- [6] L. Chiantini y F. Gesmundo. «Decompositions and Terracini loci of cubic forms of low rank». En: *arXiv* (2023). DOI: 10.48550/ARXIV.2302.03715.
- [7] A. Clebsch. «Zur Theorie der algebraischen Flächen.» En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 1861.58 (1861), págs. 93-108. DOI: 10.1515/crll.1861.58.93.
- [8] C. W. Curtis. *Linear Algebra. An Introductory Approach (Undergraduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1999. ISBN: 9780387909929.
- [9] I. Dolgachev. *Classical algebraic geometry. a modern view*. Cambridge University Press, 2012. ISBN: 9781107017658.
- [10] D. Eisenbud. *3264 and all that. A second course in algebraic geometry*. Ed. por J. Harris. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. ISBN: 9781139062046.
- [11] W. Fulton. *Algebraic curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. 2008. URL: <https://dept.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf>.
- [12] W. Greub. *Multilinear Algebra*. Springer New York, 1978. ISBN: 9781461394259.
- [13] J. Harris. *Algebraic Geometry. A First Course*. Springer eBook Collection. Springer, 1992. ISBN: 9781475721898.
- [14] J. Kollár. «Incidences of lines in  $P^3$  and the arithmetic genus of curves». En: *arXiv* (2014). DOI: 10.48550/ARXIV.1404.4613.
- [15] S. Lang. *Algebra*. Aguilar, 1977. ISBN: 8403202164.
- [16] A. Nerode y N. Greenberg. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces for Undergraduates: The Theory of the Donut*. Springer Cham, 2023. ISBN: 9783031116162.

- [17] J. Page, T. Ryan y K. E. Smith. «Smooth Surfaces with Maximal Lines». En: *arXiv* (2024). DOI: 10.48550/ARXIV.2406.15868.
- [18] V. Prasolov. *Problems and Theorems in Linear Algebra*. Ed. por D. Leites. American Mathematical Society, 1994. ISBN: 9781470445423.
- [19] G. Salmon. *A treatise on the analytic geometry of three dimensions*. Ed. por R. A. P. Rogers. 1915. URL: <https://archive.org/details/cu31924001521065>.
- [20] G. Salmon. *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*. Cambridge, 1885. URL: <https://archive.org/details/salmonalgebra00salmrich>.
- [21] I. R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 9783642379567.
- [22] K. E. Smith. *An Invitation To Algebraic Geometry*. Springer, 2010. ISBN: 978144193-1955.
- [23] The Sage Developers. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 10.3)*. <https://www.sagemath.org>. Mar. de 2024.
- [24] H. W. Turnbull. *The Theory Of Determinants, Matrices and Invariants*. Blackie y Son Limited, 1928. URL: <https://archive.org/details/dli.ernet.212171>.
- [25] S. Xambó Descamps, F. Delgado y C. Fuertes. *Introducción al álgebra*. Vol. 1. Editorial Complutense, 1993. ISBN: 8477628661.