



## **TRABAJO FIN DE MÁSTER**

Máster en Física

Mención en Física Matemática

**Caracterización del espectro de entrelazamiento de sistemas fotónicos**

***Autor:***

***Cristhian Ariel Vega Mernes***

***Tutores:***

***Fernando Javier Gómez-Ruiz***

***Luis Miguel Nieto Calzada***



# Índice general

Tabla de Contenidos	I
Lista de Figuras	III
Lista de Tablas	IV
Abstract	VII
<b>1. Introducción General</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción del contenido . . . . .	1
<b>2. Modelo de Dicke</b>	<b>3</b>
2.1. Simetrías del modelo de Dicke . . . . .	5
2.2. Transición de Fase en el Modelo de Dicke . . . . .	7
2.2.1. Fase Normal . . . . .	8
2.2.2. Fase Super-radiante . . . . .	10
2.3. Análisis del Espectro de Energía . . . . .	14
2.4. Distancia entre niveles . . . . .	18
2.5. Experimentos relacionados . . . . .	21
<b>3. Propiedades de Entrelazamiento</b>	<b>23</b>
3.1. Entropía de Von Neumann . . . . .	23
3.2. Espectro de Entrelazamiento . . . . .	25
3.2.1. Condición de resonancia . . . . .	26
3.2.2. Condiciones fuera de la resonancia . . . . .	34
<b>4. Consideraciones Finales</b>	<b>37</b>
Apéndices	40

# Índice de figuras

2.1. Energías de excitación del Hamiltoniano de Dicke en el límite termodinámico en función de $\lambda$ . . . . .	14
2.2. Energía del estado base y segunda derivada como función del parámetro $\lambda$ . . . . .	15
2.3. Parámetros de orden para el Modelo de Dicke . . . . .	16
2.4. Espectro total de energía para el modelo de Dicke por sectores de Paridad . . . . .	17
2.5. Distribución de espacios entre niveles de energía en el modelo de Dicke . . . . .	19
2.6. Parametro $\eta$ para el modelo de Dicke . . . . .	20
3.1. Entropía de Von Neumann para el modelo de Dicke y Scaling del máximo de entropía . . . . .	24
3.2. Probabilidades $P(m_z)$ en 3D, donde $m_z$ corresponde a cada uno de los estados de Dicke . . . . .	27
3.3. Probabilidades $P(n)$ en 3D, donde $n$ corresponde a cada uno de los estados de Fock . . . . .	27
3.4. Cortes de Probabilidades $P(n)$ , donde $n$ corresponde a cada uno de los estados de Fock . . . . .	28
3.5. Cortes de Probabilidades $P(m_z)$ , donde $m_z$ corresponde a cada uno de los estados de Dicke . . . . .	29
3.6. Espectros de Entrelazamiento en función de $\lambda/\lambda_c$ . . . . .	30
3.7. Diferencia entre el Espectro de Energías y la energía del estado base en función de $\lambda/\lambda_c$ . . . . .	30
3.8. Energías de entrelazamiento y diferencia entre las energías de los niveles 0 y 1 en función de $\lambda/\lambda_c$ . . . . .	31
3.9. $\ln(\lambda_{cL}^N/\lambda_c)$ en función de $1/N$ , para diversos valores de $L$ para el espectro de entrelazamiento . . . . .	32
3.10. $\ln(\lambda_{cL}^N/\lambda_c)$ en función de $1/N$ , para diversos valores de $L$ de las diferencia de niveles para el espectro de energías . . . . .	32
3.11. Pendiente $m$ de la aproximación en función del número de superposición $L$ para el espectro de entrelazamiento y el espectro de energías . . . . .	33
3.12. Espectros de Entrelazamiento en función de $\lambda/\lambda_c$ para $\frac{\omega}{\epsilon} = 0,1$ . . . . .	34

3.13. Diferencia entre el Espectro de Energías y la energía del estado base en función de $\lambda/\lambda_c$ , para $\frac{\omega}{\epsilon} = 0,1$ . . . . .	34
3.14. Espectros de Entrelazamiento en función de $\lambda/\lambda_c$ , para $\frac{\omega}{\epsilon} = 10,0$ . . . . .	35
3.15. Diferencia entre el Espectro de Energías y la energía del estado base en función de $\lambda/\lambda_c$ , para $\frac{\omega}{\epsilon} = 10,0$ . . . . .	36

# Índice de cuadros

2.1. La energía del estado base, la derivada segunda, la inversión atómica y el número medio de fotones del DH en el límite termodinámico. . . . .	16
--	----

# Agradecimientos

A mi tutor, Luis Miguel Nieto Calzada y a mi co-tutor, Fernando Javier Gómez-Ruiz, por su labor de guías y toda su ayuda. Al resto de profesores del máster en Física. Y a toda mi familia por su apoyo, paciencia y fé.

Además un agradecimiento especial al Plan Complementario en Comunicaciones Cuánticas, y en concreto al proyecto Q-CAYLE (Comunicaciones Cuánticas Seguras en Castilla y León), que ha hecho posible el desarrollo de este TFM dentro de sus actividades de fomento de la investigación en este campo.





# Abstract

In this work, we conduct a comprehensive theoretical review of the Dicke model from the perspective of quantum optics, complemented by simulations to analyze the entanglement properties of the system. Our primary objective is to characterize the entanglement spectrum and understand its relationship with the energy spectrum, aiming to establish a possible mapping between them.

To achieve this, we present a detailed examination of the features of both spectra and systematically compare them. Our analysis includes investigating the dependence of the entanglement spectrum on various system parameters, such as atom-field coupling strength and the number of atoms. By employing advanced numerical techniques, we generate simulations that provide insights into the behavior of the system under different conditions.

Our results reveal a significant relationship between the entanglement spectrum and the energy spectrum, highlighting how changes in one spectrum reflect corresponding changes in the other. This correlation not only provides a clearer and deeper understanding of the entanglement properties in the Dicke model but also suggests new avenues for exploring quantum phase transitions and collective phenomena in light-matter interactions.

Furthermore, the findings enhance our comprehension of how entanglement, a quintessential resource in quantum information science, manifests in the Dicke model. This understanding could potentially inform the development of new quantum technologies and improve the manipulation of quantum states in practical applications.

# Resumen

En este trabajo, realizamos una revisión teórica exhaustiva del modelo de Dicke desde la perspectiva de la óptica cuántica, complementada con simulaciones para analizar las propiedades de entrelazamiento del sistema. Nuestro objetivo principal es caracterizar el espectro de entrelazamiento y comprender su relación con el espectro de energía, con el fin de establecer un posible mapeo entre ambos.

Para lograr esto, presentamos un examen detallado de las características de ambos espectros y los comparamos sistemáticamente. Nuestro análisis incluye investigar la dependencia del espectro de entrelazamiento en varios parámetros del sistema, como la intensidad del acoplamiento átomo-campo y el número de átomos. Mediante el uso de técnicas numéricas avanzadas, generamos simulaciones que proporcionan información sobre el comportamiento del sistema en diferentes condiciones.

Nuestros resultados revelan una relación significativa entre el espectro de entrelazamiento y el espectro de energía, destacando cómo los cambios en un espectro reflejan cambios correspondientes en el otro. Esta correlación no solo proporciona una comprensión más clara y profunda de las propiedades de entrelazamiento en el modelo de Dicke, sino que también sugiere nuevas vías para explorar transiciones de fase cuántica y fenómenos colectivos en interacciones luz-materia.

Además, los hallazgos mejoran nuestra comprensión de cómo el entrelazamiento, un recurso esencial en la ciencia de la información cuántica, se manifiesta en el modelo de Dicke. Esta comprensión podría significar potencialmente el desarrollo de nuevas tecnologías cuánticas y mejorar la manipulación de estados cuánticos en aplicaciones prácticas.

# Capítulo 1

## Introducción General

A lo largo de la historia, la Física ha avanzado significativamente en la comprensión de los diversos fenómenos que ocurren en nuestro universo. Durante muchos años, se han estudiado las ondas electromagnéticas y su interacción con la materia, desarrollando teorías fundamentales que permiten entender una amplia gama de fenómenos asociados a estos sistemas. Entre los principales avances en esta área, destacan los trabajos que han contribuido al desarrollo de la Óptica Cuántica, proporcionando una comprensión más profunda de los fenómenos de entrelazamiento cuántico en sistemas fotónicos [1]. Estos avances han sido cruciales para una mejor comprensión de los fenómenos estudiados en este trabajo, en el cual, nos enfocamos en el estudio de los fenómenos de entrelazamiento en sistemas fotónicos con interacción radiación-materia. Utilizamos como base principal el modelo de Dicke [2], que permite una descripción detallada de la dinámica de estos sistemas. Exploraremos en detalle cómo las características del espectro de entrelazamiento se relacionan con el espectro de energías, proporcionando una visión integral de estos fenómenos en los capítulos siguientes.

Para ello, comenzaremos con una revisión teórica del modelo de Dicke, destacando sus principales características y su relevancia en el contexto de la óptica cuántica. Posteriormente, presentaremos los resultados de nuestras simulaciones numéricas, que nos permitirán visualizar y analizar las propiedades de entrelazamiento en diferentes condiciones de acoplamiento y número de átomos. Además, discutiremos las implicaciones de nuestros hallazgos en el contexto más amplio de la física cuántica, sugiriendo posibles aplicaciones en el desarrollo de tecnologías cuánticas avanzadas, como la computación y la comunicación cuántica. Finalmente, concluiremos con una síntesis de los resultados obtenidos y las perspectivas futuras de investigación en este apasionante campo de estudio.

### 1.1. Descripción del contenido

Este trabajo está estructurado en cuatro capítulos, cada uno de los cuales aborda un aspecto fundamental del tema investigado y ofrece una visión exhaustiva del mismo.

En el primer capítulo, se presenta una introducción general que establece el contexto del estudio realizado. Comienza con un recorrido histórico del área de estudio, proporcionando una perspectiva cronológica de los desarrollos clave que han dado forma al campo. A continuación, se mencionan los trabajos relacionados con el modelo de Dicke, destacando las contribuciones más significativas y su relevancia para la investigación actual. Además, se ofrece una breve descripción de los temas que se abordarán a lo largo del trabajo, proporcionando al lector una visión clara de la estructura y los objetivos del estudio.

El segundo capítulo presenta principalmente el marco teórico relacionado con el enfoque de la óptica cuántica. En este apartado, se detallan los conceptos fundamentales y los principios que subyacen al modelo de Dicke, proporcionando una base sólida para los análisis posteriores. Se examinan los trabajos previos más relevantes, describiendo en detalle los métodos y resultados que han sido utilizados como referencia para este trabajo. Es importante destacar que esta sección es crucial, ya que establece los fundamentos teóricos necesarios para comprender y realizar los análisis de los resultados obtenidos en esta investigación. Adicionalmente, se contrastan los resultados obtenidos en nuestras simulaciones con los resultados previos mencionados en la literatura de referencia.

En el tercer capítulo, se introduce otro marco teórico presentando un enfoque de la teoría de la información cuántica. Este capítulo comienza con una explicación detallada de la entropía de Von Neumann y el espectro de entrelazamiento, conceptos esenciales para entender el enfoque de la teoría de la información cuántica. Se proporcionan ejemplos, comparaciones y explicaciones detalladas para ilustrar estos conceptos. Además, dentro de este mismo capítulo, se realiza un análisis comparativo de los dos enfoques presentados previamente: la óptica cuántica y la teoría de la información cuántica. Este análisis comparativo permite identificar las similitudes y diferencias entre ambos enfoques, así como sus respectivas aplicaciones y limitaciones.

Finalmente, en el cuarto capítulo, se discuten las consideraciones finales del trabajo. En esta sección, se detallan las conclusiones extraídas de todos los análisis de resultados realizados. Se discuten las implicaciones de estos resultados, tanto en el contexto del campo de estudio específico como en términos más generales. Además, se mencionan las posibles direcciones para futuros trabajos, proponiendo nuevas áreas de exploración que podrían ampliar y profundizar los conocimientos obtenidos en esta investigación.

# Capítulo 2

## Modelo de Dicke

La interacción entre la luz y materia es uno de los fenómenos más cotidiano de nuestro diario vivir. A la fecha diversas teorías han sido desarrolladas para explicar los mecanismo por los cuales interaccionan estos dos sistemas: luz y materia. Desde el marco conceptual de la mecánica cuántica, los primeros modelos explicativos de como interaccionan estos sistemas desarrollaron una nueva rama de la física cuántica conocida como óptica cuántica.

Actualmente, contamos con diversos modelos físicos desarrollados para estudiar la interacción entre radiación y materia. Entre estos modelos, uno de los más importantes y significativos es el Modelo de Dicke. Este modelo nos permite simular la interacción entre un número arbitrario de modos de campo bosónico y  $N$  átomos a través de una interacción dipolar [2].

En su forma más general, el Hamiltoniano de Dicke (DH por sus siglas en inglés) considera la materia como  $N$  sistemas de dos niveles idénticos (átomos) pero distinguibles con una diferencia de energía de  $\hbar\epsilon$ . En adelante, es importante señalar que  $\hbar$  se fijará de tal forma que  $\hbar = 1$ , lo cual permite que la diferencia de energía entre los niveles del sistema atómico sea simplificada a  $\epsilon$ . Análogamente, los  $K$  modos bosónicos, caracterizados por las frecuencias  $\omega_k$ , se describen utilizando los operadores estándar de creación y aniquilación  $\hat{a}_k^\dagger$  y  $\hat{a}_k$  respectivamente, mientras que el parámetro de interacción o acoplamiento se denota por  $\lambda_k$ , debido a los diversos modos del campo bosónico. Así, el DH completo puede expresarse como:

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_z^j + \sum_{k=1}^K \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{\sqrt{N}} \left( \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k \right) \hat{\sigma}_x^j, \quad (2.1)$$

donde los  $\hat{\sigma}_\alpha^j$  son los operadores de espín-1/2 a lo largo de la dirección  $\alpha = \{x, y, z\}$  actuando sobre el  $j$ -ésimo átomo y en su conjunto representan el álgebra de qubits [3]. Además, cabe destacar que en lo que se denomina la parte de interacción del DH, aparece un factor  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ . Este factor surge debido al acoplamiento entre los sistemas de dos niveles y el modo bosónico, que es proporcional a  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  (donde  $V$  representa el volumen de la cavidad).

Nosotros restringiremos nuestro estudio a un único modo del campo electromagnético ( $K = 1$ ) y, debido a que en este caso realizamos el trabajo por medio de simulaciones computacionales, realizamos un cambio en la forma de expresar el Hamiltoniano mencionado anteriormente, lo cual permite reducir el consumo de recursos computacionales. Para esto, introducimos los operadores de momento angular total para el conjunto atómico, también conocidos como operadores atómicos colectivos. Por lo tanto, es posible eliminar todos los índices de los sumatorios, resultando en el siguiente Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \epsilon \hat{J}_z + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{2\lambda}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{J}_x, \quad (2.2)$$

donde

$$\hat{J}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_\alpha^j, \quad y \quad \alpha = (x, y, z). \quad (2.3)$$

Además, es importante mencionar que estos operadores obedecen las relaciones de conmutación de momento angular ya ampliamente conocidas

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z. \quad (2.4)$$

donde  $\hat{J}_\pm$  tienen el significado habitual.

Por otro lado, también debemos considerar que una vez introducidos los operadores de momento angular lo que sucede es que estamos aplicando un cambio de base para el Hamiltoniano. Consecuentemente, el espacio de Hilbert para la parte atómica donde definimos el Hamiltoniano estaría dado por los estados conocidos justamente como “Estados de Dicke”, donde  $|j, m_z\rangle$ , con  $m_z = \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$ , donde  $j$  representa el llamado número de cooperación de Dicke. Estos estados son auto-estados de  $\hat{J}^2$  y  $\hat{J}_z$ , los cuales satisfacen:

$$\begin{aligned} \hat{J}_z |j, m_z\rangle &= m_z |j, m_z\rangle, \\ \hat{J}^2 |j, m_z\rangle &= j(j+1) |j, m_z\rangle, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$  y los operadores escalera  $\hat{J}_+$  y  $\hat{J}_-$  de momento angular actúan sobre los estados de Dicke de la siguiente forma:

$$\hat{J}_\pm |j, m_z\rangle = \sqrt{j(j+1) - m_z(m_z \pm 1)} |j, m_z \pm 1\rangle. \quad (2.6)$$

Considerando el álgebra de estos operadores, se obtiene que los valores posibles para  $j$  dependen del número de sistemas de dos niveles considerados. Los mismos estarían divididos en dos casos. Por un lado, en el caso que  $N$  sea par serían  $0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ , y en caso de que  $N$  sea impar serían  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{N}{2}$ . En este caso específicamente el  $j$  fue fijado en el mayor valor, es decir  $\frac{N}{2}$ , considerando la llamada región de máximo momento angular, la cual está relacionada con las prácticas experimentales e incluye justamente el estado base del sistema.

En cuanto a la parte de los estados bosónicos, utilizamos directamente la ampliamente conocida base de Fock, donde debido a la imposibilidad de simular infinitos estados de Fock, utilizamos una base de Fock truncada para un dado valor. En este trabajo consideramos el número de truncamiento como una constante, a lo largo del mismo, siendo:  $n_{max} = 100$ .

El propósito de este capítulo es recopilar y reproducir los resultados fundamentales para entender la física del modelo de Dicke. Aunque el modelo de Dicke ha sido ampliamente estudiado en la literatura, aspectos fundamentales tales como una descripción de los efectos de tamaño finito no han sido analizados en profundidad en la literatura. Nosotros presentamos un resumen general de las principales características del modelo de Dicke en las próximas subsecciones.

## 2.1. Simetrías del modelo de Dicke

El Hamiltoniano de Dicke reescrito en términos de los operadores colectivos de momentum angular dado por la Ec. (2.2) permite evidenciar las simetrías de este modelo, las cuales son: Simetría global o conservación de la paridad, y conservación del momentum angular. A continuación se explicaran brevemente cada una de estas simetrías.

**Simetría Global:** El Hamiltoniano dado por la Ec. (2.2) posee una simetría global  $\hat{\Pi}$  dada por:

$$\hat{\Pi} : (\hat{a}, \hat{J}_{\pm}) \rightarrow (-\hat{a}, -\hat{J}_{\pm}). \quad (2.7)$$

Esta simetría esta asociada con la conservación de la paridad. El operador de paridad del número total de excitaciones  $\hat{N}_{ex}$  esta dado por  $\hat{\Pi} = \exp [i\pi \hat{N}_{ex}] = (-1)^{\hat{N}_{ex}}$ , donde el número total de excitaciones está dado por:

$$\hat{N}_{ex} = \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \hat{J}_z + J. \quad (2.8)$$

El operador paridad tiene valores propios  $+1$  y  $-1$ . La conservación de la paridad esta relacionada con el hecho que el Hamiltoniano de Dicke preserve el número de excitaciones excepto por los términos  $\hat{J}_- \hat{a}$  y  $\hat{J}_+ \hat{a}^{\dagger}$ , sin embargo estos términos solo pueden cambiar excitaciones en pares:  $\pm 2$ . La conservación de la paridad habitualmente se escribe de la forma  $[\hat{H}, \hat{\Pi}] = 0$ . Dependiendo de si el número de excitaciones es par o impar, el operador de paridad, al actuar sobre el DH, posee dos valores propios,  $\pm 1$ , dividiendo así el espacio de Hilbert en dos subespacios.

Esto podemos observarlo más claramente, considerando un pequeño ejemplo, donde  $N = 2$ , tal que  $J = 1$ , y un número pequeño de truncamiento  $n_{max} = 2$ . Por un lado, considerando lo expuesto anteriormente sabemos que para dicho caso existen tres valores posibles de  $m_z = \{-1, 0, 1\}$ , relacionados a los estados de Dicke:  $\{|1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$  y por otro lado los estados bosónicos posibles serían:  $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ .

De esta forma, los estados del sistema completo son:

$$\{|1, -1, 0\rangle, |1, 0, 0\rangle, |1, 1, 0\rangle, |1, -1, 1\rangle, |1, 0, 1\rangle, |1, 1, 1\rangle, |1, -1, 2\rangle, |1, 0, 2\rangle, |1, 1, 2\rangle\}.$$

Finalmente obtenemos un DH que puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\hat{H} = \begin{matrix} & \langle 1, -1, 0| \\ & \langle 1, 0, 0| \\ & \langle 1, 1, 0| \\ & \langle 1, -1, 1| \\ & \langle 1, 0, 1| \\ & \langle 1, 1, 1| \\ & \langle 1, -1, 2| \\ & \langle 1, 0, 2| \\ & \langle 1, 1, 2| \end{matrix} \begin{pmatrix} |1, -1, 0\rangle & |1, 0, 0\rangle & |1, 1, 0\rangle & |1, -1, 1\rangle & |1, 0, 1\rangle & |1, 1, 1\rangle & |1, -1, 2\rangle & |1, 0, 2\rangle & |1, 1, 2\rangle \\ -\epsilon & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\epsilon + \omega & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 & \omega & 0 & \sqrt{2}\lambda & 0 & \sqrt{2}\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \epsilon + \omega & 0 & \sqrt{2}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda & 0 & -\epsilon + 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda & 0 & \sqrt{2}\lambda & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda & 0 & 0 & 0 & \epsilon + 2\omega \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Luego, considerando el hecho de que la paridad puede ser calculada sumando el número total de excitaciones  $J + m_z + n$  para todos los estados, decimos que cuando el valor de la suma es par es de paridad par y cuando es impar de paridad impar. Por lo tanto separando los estados en “estados pares”:  $\{|1, -1, 0\rangle, |1, 1, 0\rangle, |1, 0, 1\rangle, |1, -1, 2\rangle, |1, 1, 2\rangle\}$  y “estados impares”:  $\{|1, 0, 0\rangle, |1, -1, 1\rangle, |1, 1, 1\rangle, |1, 0, 2\rangle\}$ , obtenemos lo siguiente:

$$\hat{H}_+ = \begin{matrix} & |1, -1, 0\rangle & |1, 1, 0\rangle & |1, 0, 1\rangle & |1, -1, 2\rangle & |1, 1, 2\rangle \\ \langle 1, -1, 0| \\ \langle 1, 1, 0| \\ \langle 1, 0, 1| \\ \langle 1, -1, 2| \\ \langle 1, 1, 2| \end{matrix} \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \omega & \sqrt{2}\lambda & \sqrt{2}\lambda \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda & -\epsilon + 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda & 0 & \epsilon + 2\omega \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\hat{H}_- = \begin{matrix} & |1, 0, 0\rangle & |1, -1, 1\rangle & |1, 1, 1\rangle & |1, 0, 2\rangle \\ \langle 1, 0, 0| \\ \langle 1, -1, 1| \\ \langle 1, 1, 1| \\ \langle 1, 0, 2| \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & -\epsilon + \omega & 0 & \sqrt{2}\lambda \\ \lambda & 0 & \epsilon + \omega & \sqrt{2}\lambda \\ 0 & \sqrt{2}\lambda & \sqrt{2}\lambda & 2\omega \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Donde  $\hat{H}_+$  y  $\hat{H}_-$  son los Hamiltonianos de paridad par e impar respectivamente.

**Conservación del momentum angular total:** El Hamiltoniano de Dicke dado por (2.2), permite ver fácilmente que el operador momentum angular total  $\hat{J}^2$  es una cantidad conservada, la cual puede escribirse como:

$$\left[ \hat{H}, \hat{J}^2 \right] = 0. \quad (2.12)$$

Lo que quiere decir que el Hamiltoniano de Dicke no mezcla subespacios de momentum angular. Sin pérdida de generalidad, de acá en adelante estamos interesados en las propiedades cuánticas del modelo de Dicke a temperatura cero. Nos restringiremos al subespacio de máximo momentum angular  $J = \frac{N}{2}$ , dado que el estado base habita en dicho subespacio. A continuación nosotros realizaremos un resumen de las principales propiedades del modelo de Dicke.



## 2.2. Transición de Fase en el Modelo de Dicke

Uno de los aspectos más intrigantes e interesantes del modelo de Dicke, reside en el hecho que presenta una transición de fase cuántica (QPT) de segundo orden. En esta sección nosotros presentaremos los aspectos más fundamentales de esta transición de fase. Históricamente Hepp y Lieb [4] estudiaron los aspectos fundamentales de dicha transición. Ahora bien, sin pérdida de generalidad, nosotros reproduciremos los trabajos desarrollados en [3].

Como hemos mencionado anteriormente, el DH sufre una QPT de una fase normal a una fase conocida como superradiante en el límite termodinámico [3]. Para entender mejor esto, comenzamos por considerar el DH en el límite termodinámico, en el cual haremos que el número de átomos del sistema tienda a infinito,  $N \rightarrow \infty$ , lo cual sería equivalente a decir que  $j \rightarrow \infty$ . Considerando este límite, es importante destacar que en equilibrio podemos calcular el acoplamiento crítico para el DH, minimizando la energía libre de campo medio [5].

Debido a estas consideraciones, podemos suponer que los fotones se encuentran en un estado coherente  $|\alpha\rangle$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . En dicho estado, consideramos que la energía de la cavidad es  $\omega\langle n \rangle = \omega\alpha^2$  y cada átomo experimenta el Hamiltoniano

$$\hat{h}(\alpha) = \frac{\epsilon}{2}\hat{\sigma}_z^i + \frac{2\lambda}{\sqrt{N}}\alpha\hat{\sigma}_x^i, \quad (2.13)$$

donde la función de partición viene dada entonces por

$$Z(\alpha) = \text{Tr}[e^{-\beta\hat{H}}] = e^{-\beta\omega\alpha^2} \left( \text{Tr} e^{-\beta\hat{h}} \right)^N, \quad (2.14)$$

siendo  $\beta = 1/T$  el inverso de la temperatura. Por definición, la energía libre es

$$F(\alpha) = -\frac{1}{\beta} \ln(Z(\alpha)) = \omega\alpha^2 - \frac{N}{\beta} \ln(2 \cosh \beta E), \quad (2.15)$$

donde  $E = \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{4\lambda^2}{N}\alpha^2}$  es el autovalor de  $\hat{h}(\alpha)$ .

Así, optimizando  $F(\alpha)$  como una función de  $\alpha$ , encontramos que si  $\lambda$  es menor que un cierto valor crítico,  $\lambda_c$ , el mínimo está en  $\alpha = 0$ , mientras que para  $\lambda > \lambda_c$  el mínimo está en  $\alpha \neq 0$ . Finalmente el valor crítico de  $\lambda_c$  se encuentra mediante la condición  $F''(\alpha = 0) = 0$ , la cual expresando de otra forma sería:

$$\lambda_c = \frac{1}{2} \sqrt{\omega\epsilon \coth\left(\frac{\beta\epsilon}{2}\right)}. \quad (2.16)$$

Podemos observar así que este acoplamiento crítico evoluciona suavemente hasta la temperatura cero ( $\beta \rightarrow \infty$ ), situación en la cual precisamente estamos interesados, y por lo tanto

obtenemos el valor crítico  $\lambda_c = \frac{\sqrt{\epsilon\omega}}{2}$ . Como consecuencia de esto, una vez que el parámetro de interacción o acoplamiento entre los átomos y la luz ( $\lambda$ ) alcanza este valor crítico, como veremos más adelante, la simetría de  $\hat{\Pi}$  se rompe y ocurre la ya mencionada QPT [5, 6].

Seguidamente, para describir esta QPT trabajaremos con dos Hamiltonianos efectivos, uno para describir el sistema en la fase normal  $\lambda < \lambda_c$  y otro para describirlo en la fase donde ocurre la ruptura de la simetría, conocida como fase superradiante donde  $\lambda > \lambda_c$ . Es importante señalar que los resultados que aquí se muestran en las sub-secciones 2.2.1 y 2.2.2 ya fueron obtenidos anteriormente en [3].

No obstante, considerando la relevancia de los mismos para este estudio y que posteriormente los utilizaremos para comprender mejor lo que ocurre con las propiedades de entrelazamiento en el Capítulo 3, hemos considerado oportuno volver a recorrer el paso a paso para la obtención de los Hamiltonianos efectivos. Además estos resultados son exactos en este límite, lo cual nos lleva a comprender con mayores detalles la naturaleza y ciertos fenómenos de este sistema [3].

Para iniciar dicho análisis, hacemos uso de la representación Holstein-Primakoff de los operadores de momento angular, donde los operadores pueden ser representados en términos de un único modo bosónico, lo cual permite expresarlos de la siguiente manera [7, 8]:

$$\hat{J}_+ = \hat{b}^\dagger \sqrt{2j - \hat{b}^\dagger \hat{b}}, \quad \hat{J}_- = \sqrt{2j - \hat{b}^\dagger \hat{b}} \hat{b}, \quad \hat{J}_z = (\hat{b}^\dagger \hat{b} - j), \quad (2.17)$$

donde los operadores de Bose introducidos obedecen a  $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ .

Una vez realizadas las sustituciones mencionadas arriba en el DH de la Ec. (2.2), podemos obtener justamente lo que se conoce como el Hamiltoniano bosónico de dos modos

$$\hat{H} = \epsilon (\hat{b}^\dagger \hat{b} - j) + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \lambda (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left( \hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} + \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \hat{b} \right). \quad (2.18)$$

Considerando esto, vemos que el operador de paridad  $\hat{\Pi}$  pasaría a convertirse en

$$\hat{\Pi} = \exp \left\{ i\pi \left[ \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b} \right] \right\}, \quad (2.19)$$

de tal forma que lo podemos comparar con el operador de paridad estándar de un oscilador armónico bidimensional [9]. En las siguientes subsecciones presentaremos una análisis detallado de las fases presentes en modelo de Dicke.

### 2.2.1. Fase Normal

Ahora vamos a describir un Hamiltoniano efectivo para el sistema en la fase normal simplemente despreciando términos en el Hamiltoniano de la Ec. (2.18) con  $j$  en el denominador.

Esto aproxima la raíz cuadrada en el mapeo de Holstein-Primakoff con la unidad, y obtenemos el Hamiltoniano efectivo  $H^{(1)}$  dado por:

$$\hat{H}^{(1)} = \epsilon \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \lambda (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) - j\epsilon, \quad (2.20)$$

que es bilineal en los operadores bosónicos y, por tanto, se puede diagonalizar de forma sencilla. Además, esto se puede facilitar mediante la introducción de operadores de posición y momento para los dos modos bosónicos:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), & \hat{p}_x &= i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \\ \hat{y} &= \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}), & \hat{p}_y &= i\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} (\hat{b}^\dagger - \hat{b}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Expresando así  $\hat{H}^{(1)}$  en términos de estos operadores, obtenemos:

$$\hat{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \{ \omega^2 x^2 + p_x^2 + \epsilon^2 y^2 + p_y^2 + 4\lambda\sqrt{\omega\epsilon} xy - \epsilon - \omega \} - j\epsilon, \quad (2.22)$$

que puede diagonalizarse girando el sistema de coordenadas de la siguiente manera:

$$\hat{x} = \hat{q}_1 \cos \gamma^{(1)} + \hat{q}_2 \sin \gamma^{(1)}, \quad \hat{y} = -\hat{q}_1 \sin \gamma^{(1)} + \hat{q}_2 \cos \gamma^{(1)}, \quad (2.23)$$

donde el ángulo  $\gamma^{(1)}$  viene dado por:

$$\tan(2\gamma^{(1)}) = \frac{4\lambda\sqrt{\omega\epsilon}}{\epsilon^2 - \omega^2}. \quad (2.24)$$

En la condición de resonancia,  $\omega = \epsilon$ ,  $\gamma^{(1)} = \pi/4$ , de modo que:

$$\hat{x} = (\hat{q}_1 + \hat{q}_2) / \sqrt{2}; \quad \hat{y} = (-\hat{q}_1 + \hat{q}_2) / \sqrt{2}. \quad (2.25)$$

Esta rotación elimina el término de interacción  $xy$  en el Hamiltoniano 2.22, que entonces asume la forma de dos osciladores desacoplados:

$$\hat{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_-^{(1)2} \hat{q}_1^2 + \hat{p}_1^2 + \varepsilon_+^{(1)2} \hat{q}_2^2 + \hat{p}_2^2 - \omega - \epsilon \right\} - j\epsilon. \quad (2.26)$$

Ahora volvemos a cuantizar  $\hat{H}^{(1)}$  con la introducción de dos nuevos modos bosónicos definidos por:

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_-^{(1)}}} (\hat{c}_1^\dagger + \hat{c}_1), & \hat{p}_1 &= i\sqrt{\frac{\varepsilon_-^{(1)}}{2}} (\hat{c}_1^\dagger - \hat{c}_1), \\ \hat{q}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_+^{(1)}}} (\hat{c}_2^\dagger + \hat{c}_2), & \hat{p}_2 &= i\sqrt{\frac{\varepsilon_+^{(1)}}{2}} (\hat{c}_2^\dagger - \hat{c}_2), \end{aligned} \quad (2.27)$$

y así finalmente llegamos a la forma diagonal final, la cual se expresa de la siguiente forma:

$$\hat{H}^{(1)} = \varepsilon_-^{(1)} \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + \varepsilon_+^{(1)} \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2 + \frac{1}{2} \left( \varepsilon_+^{(1)} + \varepsilon_-^{(1)} - \omega - \epsilon \right) - j\epsilon. \quad (2.28)$$

Los operadores bosónicos  $\{\hat{c}_1, \hat{c}_1^\dagger, \hat{c}_2, \hat{c}_2^\dagger\}$ , en términos de los cuales  $\hat{H}^{(1)}$  es diagonal, son combinaciones lineales de los operadores originales  $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}, \hat{b}^\dagger\}$ , y describen excitaciones colectivas del campo atómico. Las energías de los dos modos osciladores independientes  $\varepsilon_\pm^{(1)}$  vienen dadas por:

$$\varepsilon_\pm^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \omega^2 + \epsilon^2 \pm \sqrt{(\epsilon^2 - \omega^2)^2 + 16\lambda^2\omega\epsilon} \right). \quad (2.29)$$

Vemos que la energía de excitación  $\varepsilon_-^{(1)}$  es real solo cuando

$$\omega^2 + \epsilon^2 \geq \sqrt{(\epsilon^2 - \omega^2)^2 + 16\lambda^2\omega\epsilon}, \quad (2.30)$$

o equivalentemente  $\lambda \leq \sqrt{\omega\epsilon}/2 = \lambda_c$ . Así vemos que  $\hat{H}^{(1)}$  es válido para  $\lambda \leq \lambda_c$ , es decir, en la fase normal.

En esta fase, la energía del estado fundamental está dada por  $E_G^{(1)} = -j\epsilon$ , que es del orden de  $\mathcal{O}(j)$ , mientras que las energías de excitación  $\varepsilon_\pm^{(1)}$  son del orden de  $\mathcal{O}(1)$ . Esto implica que al escalar nuestras energías con  $j$ , el espectro de excitación por encima del estado fundamental se vuelve cuasi-continuo en el límite  $j \rightarrow \infty$ . Es decir, las energías de excitación difieren en una cantidad infinitesimal de  $E_G$ .

Hay que tener en cuenta que  $\hat{H}^{(1)}$  conmuta con el operador de paridad  $\hat{\Pi}$ , y por lo tanto los estados propios de  $\hat{H}^{(1)}$  tienen paridad definida, y el estado fundamental tiene paridad positiva. Esto puede verse en el hecho de que en  $\lambda = 0$ , el estado fundamental es  $|0\rangle |j, -j\rangle$  en la base original  $|n\rangle |j, m\rangle$ , que precisamente tiene un número de excitación par,  $n + m + j = 0$ . Consecuentemente, considerando que los niveles de energía en la fase normal son no degenerados, la continuidad del estado fundamental con el aumento  $\lambda$  permite que el mismo siempre tenga paridad positiva en esta fase.

### 2.2.2. Fase Super-radiante

Seguidamente, para describir el sistema por encima de la transición de fase, debemos incorporar el hecho de que tanto el campo como el conjunto atómico adquieren ocupaciones macroscópicas. Para ello, comenzamos con el Hamiltoniano transformado de Holstein-Primakoff de la Ec. (2.18) y desplazamos los modos bosónicos de cualquiera de las siguientes maneras:

$$\hat{a}^\dagger \rightarrow \hat{c}^\dagger + \sqrt{\alpha}, \quad \hat{b}^\dagger \rightarrow \hat{d}^\dagger - \sqrt{\beta}, \quad (2.31)$$

ó

$$\hat{a}^\dagger \rightarrow \hat{c}^\dagger - \sqrt{\alpha}, \quad \hat{b}^\dagger \rightarrow \hat{d}^\dagger + \sqrt{\beta}. \quad (2.32)$$

Fundamentalmente, suponemos que los parámetros aún no determinados  $\alpha$  y  $\beta$  son del tipo  $\mathcal{O}(j)$ , lo que equivale a suponer que ambos modos adquieren campos medios macroscópicos distintos de cero por encima de  $\lambda_c$ . A continuación sólo consideraremos los desplazamientos dados por la Ec. (2.31), ya que el cálculo con la otra opción es idéntico salvo por algunos cambios de signo. Haciendo estos desplazamientos, el Hamiltoniano de la Ec. (2.18) se convierte en:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(2)} = & \epsilon \left( \hat{d}^\dagger \hat{d} - \sqrt{\beta} (\hat{d}^\dagger + \hat{d}) + \beta - j \right) + \omega (\hat{c}^\dagger \hat{c} + \sqrt{\alpha} (\hat{c}^\dagger + \hat{c}) + \alpha) \\ & + \lambda \sqrt{\frac{k}{2j}} (\hat{c}^\dagger + \hat{c} + 2\sqrt{\alpha}) \left( \hat{d}^\dagger \sqrt{\xi} + \sqrt{\xi} \hat{d} - 2\sqrt{\beta} \sqrt{\xi} \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde por simplicidad en la realización de los cálculos se considera:

$$\sqrt{\xi} \equiv \sqrt{1 - \frac{\hat{d}^\dagger \hat{d} - \sqrt{\beta} (\hat{d}^\dagger + \hat{d})}{k}}, \quad (2.34)$$

con  $k \equiv 2j - \beta$ . Tomando el límite termodinámico mediante la expansión de la raíz cuadrada  $\sqrt{\xi}$  y, a continuación, estableciendo términos con potencias globales de  $j$  en el denominador a cero, obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(2)} = & \omega \hat{c}^\dagger \hat{c} + \left( \epsilon + \frac{2\lambda}{k} \sqrt{\frac{\alpha\beta k}{2j}} \right) \hat{d}^\dagger \hat{d} - \left( 2\lambda \sqrt{\frac{\beta k}{2j}} - \omega \sqrt{\alpha} \right) (\hat{c}^\dagger + \hat{d}) \\ & + \left( \frac{4\lambda}{k} \sqrt{\frac{\alpha k}{2j}} (j - \beta) - \epsilon \sqrt{\beta} \right) (\hat{d}^\dagger + \hat{d}) + \frac{\lambda}{2k^2} \sqrt{\frac{\alpha\beta k}{2j}} (2k + \beta) (\hat{d}^\dagger + \hat{d})^2 \\ & + \frac{2\lambda}{k} \sqrt{\frac{k}{2j}} (j - \beta) (\hat{c}^\dagger + \hat{c}) (\hat{d}^\dagger + \hat{d}) + \left( \epsilon (\beta - j) + \omega \alpha - \frac{\lambda}{k} \sqrt{\frac{\alpha\beta k}{2j}} (1 + 4k) \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ahora eliminamos los términos en  $\hat{H}^{(2)}$  que son lineales en los operadores bosónicos eligiendo los desplazamientos  $\alpha$  y  $\beta$  de forma que:

$$2\lambda \sqrt{\frac{\beta k}{2j}} - \omega \sqrt{\alpha} = 0, \quad (2.36)$$

y

$$\left( \frac{4\lambda^2}{\omega j} (j - \beta) - \epsilon \right) \sqrt{\beta} = 0. \quad (2.37)$$

La solución  $\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha} = 0$  de estas ecuaciones recupera el Hamiltoniano de fase normal  $H^{(1)}$ . Por otro lado, la solución no trivial da:

$$\sqrt{\alpha} = \frac{2\lambda}{\omega} \sqrt{\frac{j}{2}(1-\mu^2)}, \quad \sqrt{\beta} = \sqrt{j(1-\mu)}, \quad (2.38)$$

donde hemos definido

$$\mu \equiv \frac{\omega\epsilon}{4\lambda^2} = \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2}. \quad (2.39)$$

Con estas determinaciones, el Hamiltoniano de la Ec. (2.35) se convierte en:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(2)} = & \omega \hat{c}^\dagger \hat{c} + \frac{\epsilon}{2\mu} (1+\mu) \hat{d}^\dagger \hat{d} + \frac{\epsilon(1-\mu)(3+\mu)}{8\mu(1+\mu)} (\hat{d}^\dagger + \hat{d})^2 \\ & + \lambda\mu \sqrt{\frac{2}{1+\mu}} (\hat{c}^\dagger + \hat{c}) (\hat{d}^\dagger + \hat{d}) - j \left( \frac{2\lambda^2}{\omega} + \frac{\epsilon^2\omega}{8\lambda^2} \right) - \frac{\lambda^2}{\omega} (1-\mu). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Para facilitar la diagonalización de este Hamiltoniano bilineal pasamos a una representación posición-momento definida por:

$$\begin{aligned} \hat{X} & \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{c}^\dagger + \hat{c}), & \hat{P}_X & \equiv i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{c}^\dagger - \hat{c}), \\ \hat{Y} & \equiv \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}}} (\hat{d}^\dagger + \hat{d}), & \hat{P}_Y & \equiv i\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{2}} (\hat{d}^\dagger - \hat{d}), \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde  $\tilde{\omega} = \frac{\epsilon}{2\mu}(1+\mu)$ . Obsérvese que no es la misma representación que la definida en la Ec. (2.21). La diagonalización entonces procede de manera similar a antes, lo que implica una rotación en el plano  $X$ - $Y$  a las nuevas coordenadas:

$$\hat{X} = \hat{Q}_1 \cos \gamma^{(2)} + \hat{Q}_2 \sin \gamma^{(2)}, \quad \hat{Y} = -\hat{Q}_1 \sin \gamma^{(2)} + \hat{Q}_2 \cos \gamma^{(2)}, \quad (2.42)$$

con el ángulo  $\gamma^{(2)}$  dado por:

$$\tan(2\gamma^{(2)}) = \frac{2\omega\epsilon\mu^2}{\epsilon^2 - \mu^2\omega^2}. \quad (2.43)$$

Posteriormente, recuantizando en términos de dos nuevos modos,  $e_{\pm}^{(2)}$ , correspondientes a la rotación y los osciladores desacoplados, nos da la forma diagonal:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(2)} = & \varepsilon_-^{(2)} \hat{e}_1^\dagger \hat{e}_1 + \varepsilon_+^{(2)} \hat{e}_2^\dagger \hat{e}_2 - j \left( \frac{2\lambda^2}{\omega} + \frac{\epsilon^2\omega}{8\lambda^2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \varepsilon_+^{(2)} + \varepsilon_-^{(2)} - \frac{\epsilon}{2\mu} (1+\mu) - \omega - \frac{2\lambda^2}{\omega} (1-\mu) \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

siendo que las energías de los osciladores están dadas por:

$$\varepsilon_{\pm}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon^2}{\mu^2} + \omega^2 \pm \sqrt{\left[ \frac{\epsilon^2}{\mu^2} - \omega^2 \right]^2 + 4\omega^2\epsilon^2} \right). \quad (2.45)$$

La energía de excitación  $\varepsilon_-^{(2)}$ , y por tanto  $\hat{H}^{(2)}$ , sigue siendo real siempre que

$$\frac{\epsilon^2}{\mu^2} + \omega^2 \geq \sqrt{\left[ \frac{\epsilon^2}{\mu^2} - \omega^2 \right]^2 + 4\omega^2\epsilon^2}, \quad (2.46)$$

o equivalentemente  $\lambda \geq \sqrt{\omega\epsilon}/2 = \lambda_c$ . Así pues, vemos que  $H^{(2)}$  describe el sistema en la fase superradiante, donde  $\lambda \geq \lambda_c$ , en la que la energía escalada del estado base viene dada por  $E_G^{(2)}/j = -\left\{ \frac{2\lambda^2}{\omega} + \frac{\epsilon^2\omega}{8\lambda^2} \right\}$ .

Si elegimos los signos de los desplazamientos del operador según la Ec. (2.32), obtenemos exactamente los mismos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , y un Hamiltoniano efectivo idéntico al descrito por la Ec. (2.33). Esto claramente tiene el mismo espectro y por lo tanto, todos y cada uno de los niveles del espectro total están doblemente degenerados por encima de la transición de fase. Lo que ha ocurrido es que la simetría del estado fundamental, definida por el operador  $\hat{\Pi}$ , se ha roto espontáneamente en  $\lambda_c$ . El Hamiltoniano  $\hat{H}^{(2)}$ , para cualquier elección de desplazamiento, no conmuta con  $\hat{\Pi}$ , y por lo tanto sus funciones propias no poseen una buena simetría de paridad. Aunque la simetría global  $\hat{\Pi}$  se rompe en la transición de fase, aparecen dos nuevas simetrías locales, correspondientes al operador

$$\hat{\Pi}^{(2)} \equiv \exp \left\{ i\pi \left[ \hat{c}^\dagger \hat{c} + \hat{d}^\dagger \hat{d} \right] \right\}, \quad (2.47)$$

para las dos opciones diferentes de desplazamientos del campo medio. Este operador conmuta con el Hamiltoniano superradiante apropiado  $\left[ \hat{H}^{(2)}, \hat{\Pi}^{(2)} \right] = 0$ .

Una vez deducidos los dos Hamiltonianos efectivos que describen el sistema para todo  $\lambda$  en el límite  $j \rightarrow \infty$ , describimos ahora las propiedades del sistema en cada una de sus dos fases. Las excitaciones fundamentales del sistema vienen dadas por las energías  $\varepsilon_{\pm}$ , que describen modos colectivos, similares a lo que ocurre en el trabajo sobre los modos polaritones de la física del estado sólido presentado en [10]. El comportamiento de estas energías en función del parámetro de interacción  $\lambda/\lambda_c$  se muestra en la Figura 2.1, donde hemos etiquetado las dos ramas como “atómica” y “bosónica”, según la naturaleza de la excitación a acoplamiento cero. A partir de esta figura vemos que a medida que el acoplamiento se aproxima al valor crítico  $\lambda_c$ , la energía de excitación del modo bosónico desaparece,  $\varepsilon_- \rightarrow 0$ , a medida que  $\lambda \rightarrow \lambda_c$ , lo cual demuestra la existencia del QPT. Por el contrario,  $\varepsilon_+$  tiende hacia un valor de  $\sqrt{\epsilon^2 + \omega^2}$  a medida que  $\lambda \rightarrow \lambda_c$  desde cualquier dirección. En el límite asintótico de  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_- \rightarrow \omega$

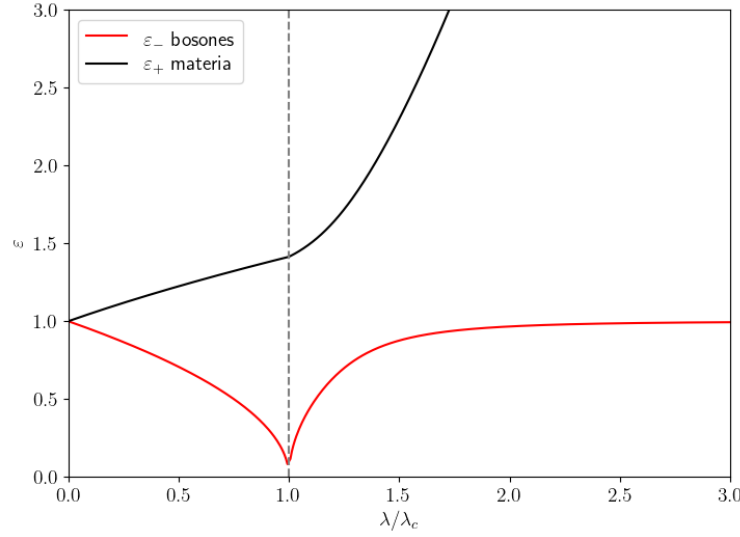


Figura 2.1: Las energías de excitación del Hamiltoniano de Dicke en el límite termodinámico en función de  $\lambda$ . El Hamiltoniano está en resonancia,  $\omega = \epsilon = 1$ .

(volviendo a su valor  $\lambda = 0$ ) mientras que  $\epsilon_+ \rightarrow 4\lambda^2/\omega$ , como también ya fue mostrado en [3]. Los exponentes críticos de esta QPT se manifiestan en el comportamiento de las energías de excitación [11]. Además, en [3] vemos que es posible demostrar que la energía  $\epsilon_-$  desaparece como:

$$\epsilon_-(\lambda \rightarrow \lambda_c) \sim \sqrt{\frac{32\lambda_c^3\omega^2}{16\lambda_c^4 + \omega^4}}|\lambda_c - \lambda|^{1/2}. \quad (2.48)$$

Donde justamente la desaparición de  $\epsilon_-$  para  $\lambda_c$  sería lo que nos permite comprender que esto se debe a la aparición de una transición de fase de segundo orden.

### 2.3. Análisis del Espectro de Energía

Una vez comprendido lo expuesto en la subsección anterior, pasamos a estudiar el espectro de energías del sistema con  $N$  finito. Utilizando los resultados de nuestras simulaciones y comparando con los resultados ya obtenidos del límite termodinámico [3]. Para esto, primeramente realizamos la diagonalización del Hamiltoniano:

$$\hat{H}(\lambda) |\psi_n(\lambda)\rangle = E_n(\lambda) |\psi_n(\lambda)\rangle. \quad (2.49)$$

donde  $\hat{H}(\lambda)$  es el DH,  $|\psi_n(\lambda)\rangle$  es el correspondiente autovector y  $E_n(\lambda)$  es el autovalor asociado a la energía de un nivel dado. Es importante mencionar que la dimensión de la matriz hamiltoniana a diagonalizar es  $\dim \hat{H}(\lambda) = ((n_{max} + 1)(N + 1))^2$ , donde  $n_{max}$  es el valor de



truncamiento de la base de los bosones y  $N$  es el número de sistemas de 2 niveles considerados para el modelo.

Una vez realizada la correspondiente diagonalización numérica de la matriz  $\hat{H}(\lambda)$ , procedimos a analizar los resultados obtenidos. Primeramente, analizamos la relación existente entre el estado base de energía  $E_{gs}$  y el parámetro de interacción  $\lambda$ , obteniendo el resultado que se muestra en la Figura 2.2. En la Figura 2.2(a), es posible visualizar un cambio en la

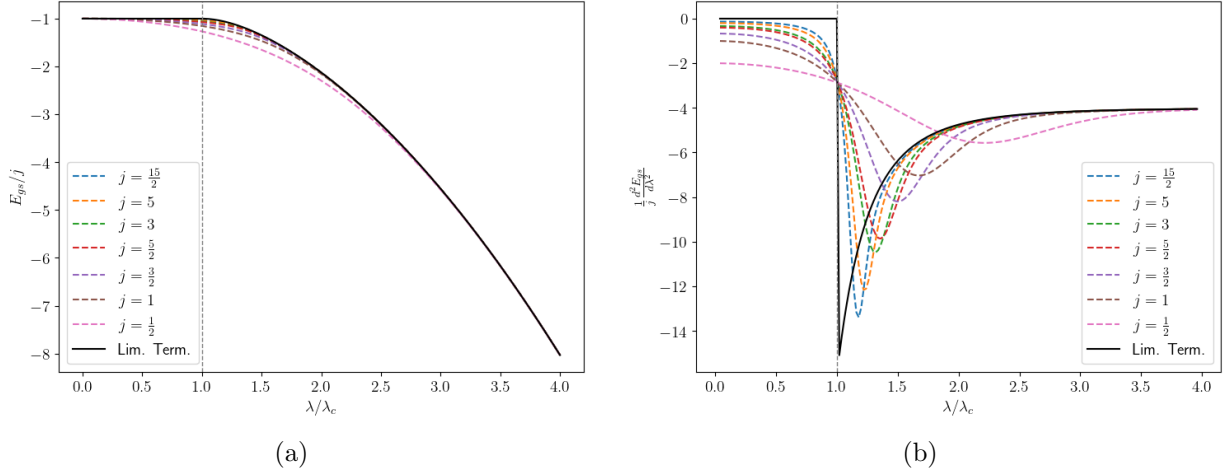


Figura 2.2: (a) Energía del estado base en función del parámetro de interacción  $\lambda$ , para los siguientes valores de  $N = \{15, 10, 6, 5, 3, 2, 1\}$ , con  $\omega = \epsilon = 1$ . (b) Derivada segunda de la Energía del estado base en función del parámetro de interacción  $\lambda$ , para los siguientes valores de  $N = \{15, 10, 6, 5, 3, 2, 1\}$ , con  $\omega = \epsilon = 1$ .

forma de la curva de la energía que ocurre a partir de valor  $\lambda$  cercanos al  $\lambda_c$ . Adicionalmente, observamos que dicho cambio ocurre de distinta manera en tanto que incrementamos el valor de  $N$ . Evidenciando claramente que no son necesarios grandes valores de  $N$  para observar como las curvas de la energía tienden rápidamente al comportamiento del límite termodinámico. Considerando esto, además de lo mencionado sobre la transición de fase de segunda orden, analizamos la segunda derivada de  $E_{gs}/j$  en función de  $\lambda/\lambda_c$ . Para esto, examinamos el resultado mostrado en la Figura 2.2(b), por medio del cual pudimos verificar que existe una discontinuidad en  $\lambda_c$ , localizando claramente la transición de fase. Lo cual se corresponde directamente con el hecho de que la QPT sea de segunda orden.

Continuando con los análisis, también analizamos el valor esperado de los operadores  $\hat{J}_z$  (también llamado inversión atómica) y el operador número de bosones  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . En ambos casos fueron calculados los valores para el estado base de energía  $E_{gs}$ , obteniendo los resultados mostrados en la Figura 2.3. En las Figuras 2.3(a) y 2.3(b) se ve un comportamiento análogo a lo que ocurre también en el caso de la energía del estado base. Podemos ver claramente

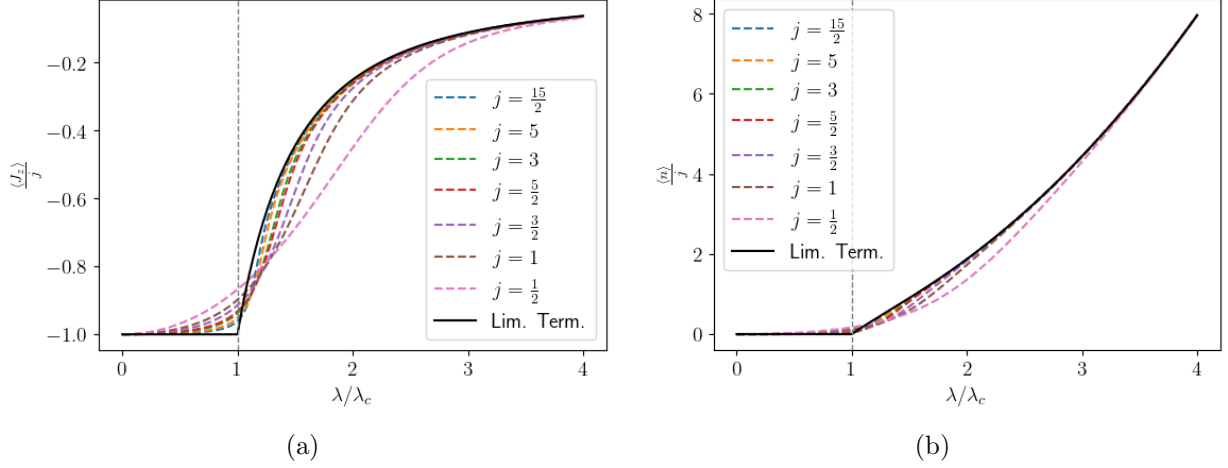


Figura 2.3: (a) Valor esperado del operador  $\hat{J}_z$ ,  $\frac{\langle \hat{J}_z \rangle}{j}$  (inversión atómica) en función del parámetro  $\lambda$ , para  $N = \{15, 10, 6, 5, 3, 2, 1\}$ , con  $\omega = \epsilon = 1$ . (b) Valor esperado del operador  $\hat{n}$ ,  $\frac{\langle \hat{n} \rangle}{j}$  en función del parámetro  $\lambda$ , para  $N = \{15, 10, 6, 5, 3, 2, 1\}$ , con  $\omega = \epsilon = 1$ .

como incrementando el valor de  $N$  también aquí muestran una rápida tendencia al valor calculado para el límite termodinámico. Sumado a esto, observamos que  $\frac{\langle \hat{n} \rangle}{j} \neq 0$  justamente a partir de  $\lambda_c$  lo cual está directamente relacionado con la existencia de la transición a una fase superradiante, como ya habíamos visto previamente. Considerando que en todos los gráficos

	$E_{gs}/j$	$\frac{1}{j} \frac{d^2 E_{gs}}{d\lambda^2}$	$\frac{\langle \hat{J}_z \rangle}{j}$	$\frac{\langle \hat{n} \rangle}{j}$
$\lambda < \lambda_c$	$-\omega$	0	-1	0
$\lambda > \lambda_c$	$-\frac{2\lambda^2}{\omega} - \frac{2\lambda_c^4}{\lambda^2 \omega}$	$-\frac{4}{\omega} - 12 \frac{\lambda_c^4}{\omega \lambda^4}$	$-\frac{\lambda_c^2}{\lambda^2}$	$2 \frac{(\lambda^4 - \lambda_c^4)}{(\omega \lambda)^2}$

Cuadro 2.1: La energía del estado base, la derivada segunda, la inversión atómica y el número medio de fotones del DH en el límite termodinámico.

fueron mostradas las curvas continuas negras correspondientes al límite termodinámico, presentamos el Cuadro 2.1 que contiene las expresiones de las funciones calculadas, utilizando la teoría de campo medio, para el límite termodinámico [3].

Posteriormente, una vez comprendido todo lo relacionado con el estado base del sistema, procedimos a realizar un análisis propiamente del espectro de energía del sistema. Para esto, examinamos el espectro del Hamiltoniano dividido por los sectores de paridad par e impar,

que se muestra en las Figuras 2.4(a) y 2.4(b). Esto nos permitió verificar que el espacio de Hilbert podría ser dividido en dos subespacios. Adicionalmente, podemos observar justamente el espectro de energía completo que se muestra en la Figura 2.4(c), comprobando como el espectro completo está compuesto de los niveles de energía de ambos sectores. Estos re-

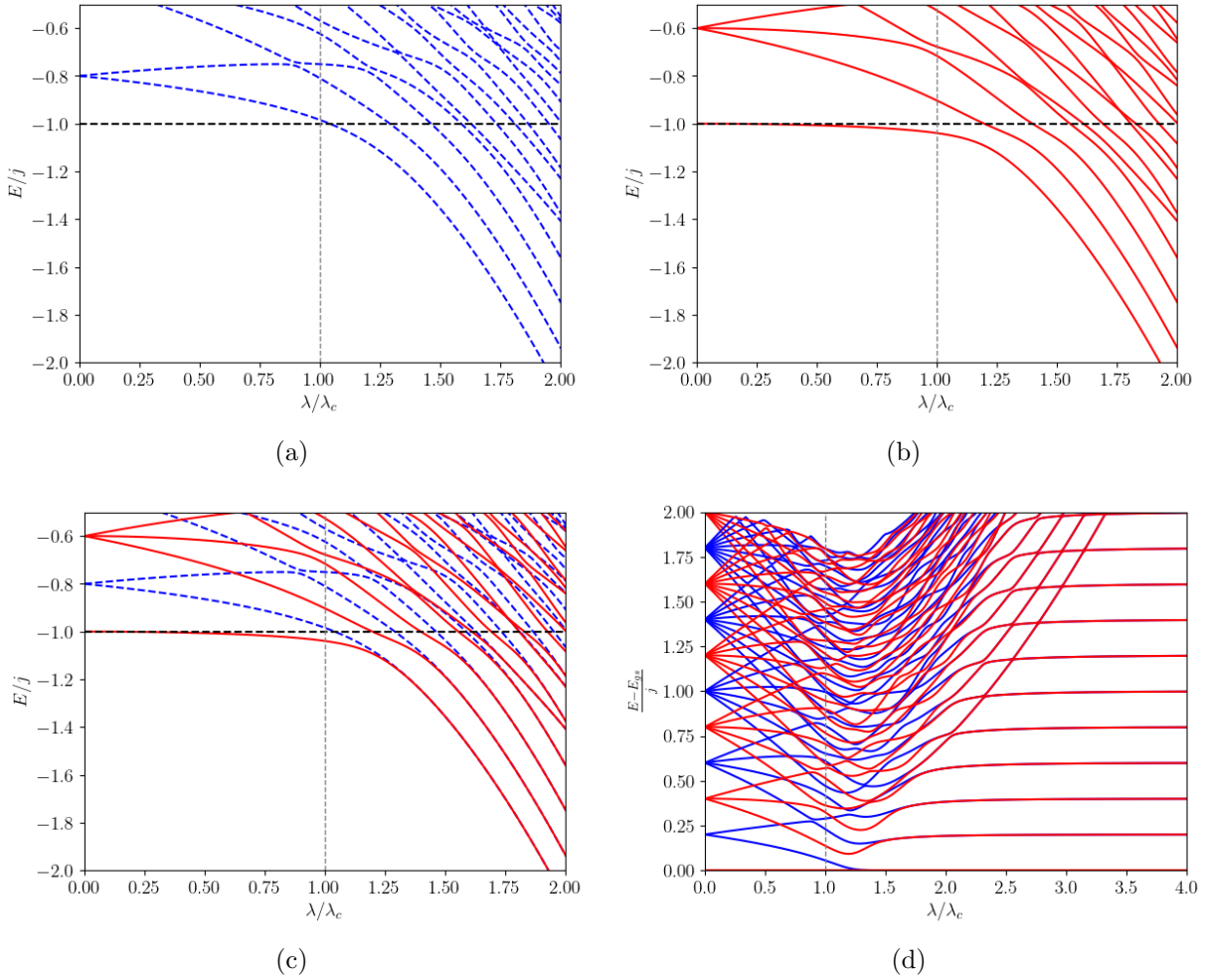


Figura 2.4: (a) Espectro de energía de DH de paridad impar en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = 10$ , con  $\omega = \epsilon = 1$ . (b) Espectro de energía de DH de paridad par en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = 10$ , con  $\omega = \epsilon = 1$ . (c) Espectro de energía completo de DH en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = 10$ , con  $\omega = \epsilon = 1$ . (d) Diferencia entre todo el espectro de energía de DH y la energía del estado base  $E_{gs}$  en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = 10$ , con  $\omega = \epsilon = 1$ .

sultados, también nos permiten resaltar nuevamente el cambio en el comportamiento de las energías que ocurre a partir del valor de  $\lambda_c$ . Otro detalle importante que podemos destacar

es que la ocurrencia del solapamiento de los niveles de energía tienden a ocurrir de una forma regular. Dicho detalle, nos llevó a analizar la diferencia entre todos los niveles de energía y la energía del estado base, obteniendo los resultados mostrados en la Figura 2.4(d). En este caso, podemos destacar el hecho de que para la región donde  $(\lambda/\lambda_c > 2,0)$  la diferencia de energía entre los diferentes niveles asumen valores constantes, lo que nos permite identificar que el modelo de Dicke en el régimen ultra fuerte es justamente un oscilador armónico cuántico. Es importante mencionar que esto será de suma importancia para los análisis realizados en el siguiente capítulo. Finalmente, debido al comportamiento observado en los resultados de este análisis del espectro completo hemos considerado importante analizar las distancias entre los niveles de energía. Lo cual, pasaremos a explorar justamente en la siguiente subsección.

## 2.4. Distancia entre niveles

Como vimos anteriormente, el DH es exactamente integrable en el límite termodinámico. Sin embargo, para  $j$  finito, este no es el caso y sigue existiendo la posibilidad de caos cuántico. La señal del caos cuántico que utilizamos para investigar esta posibilidad es el carácter del espectro de energía cuantificado por la distribución de niveles  $P(S_n)$  del vecino más próximo. Previamente ya sabemos que en [12] por primera vez comprendieron que el estudio de cantidades espectrales tales como  $P(S_n)$ , y su comparación con los resultados de la teoría de matrices aleatorias debería proporcionar un indicador importante de caos cuántico. Esto puede entenderse mediante la siguiente explicación. Los sistemas clásicamente integrables poseen altos grados de simetría y, por tanto, sus homólogos cuánticos tienen muchos números cuánticos conservados. Esto permite que se produzcan cruces de nivel en el espectro, dando lugar a un  $P(S_n)$  con un máximo para pequeñas distancias entre niveles,  $S_n \rightarrow 0$ , con un  $P(S_n)$  dado por la distribución poissoniana:

$$P_P(S_n) = \exp(-S_n), \quad (2.50)$$

y ahora vale la pena destacar que los espectros cuánticos con estadística poissoniana son conocidos como “cuasi-integrables”. A diferencia del sistema anterior, los sistemas caóticos clásicos no poseen integrales de movimiento. Por lo tanto, se espera que sus espectros de energía estén altamente correlacionados y carezcan de cruces, lo que implica que  $P(S_n) \rightarrow 0$  cuando  $S_n \rightarrow 0$ . Aunque se considera que la forma precisa de  $P(S_n)$  para sistemas caóticos depende de las simetrías del modelo, trabajos previos en este campo han encontrado que la distribución de Wigner-Dyson:

$$P_{W-D}(S_n) = \frac{\pi S_n}{2} \exp\left(-\frac{\pi S_n^2}{4}\right), \quad (2.51)$$

describe adecuadamente estos sistemas [13].

A pesar de que en varios trabajos previos esto haya quedado en evidencia, es importante destacar que dicha correspondencia entre la distribución  $P(S_n)$  y la integrabilidad o no del

sistema clásico no sería absoluta, puesto que existen excepciones como las presentadas en [14, 15]. Pero inclusive considerando esto, ha sido observado que la  $P(S_n)$  proporciona una señal conveniente y útil sobre la existencia de caos cuántico, y la conjetura se cumple en varios casos ya estudiados previamente. En este caso, veremos que esta señal resulta ser muy precisa, como se podrá observar una vez comparemos los resultados de  $P(S_n)$  numéricos obtenidos, con los resultados de las Ec. (2.50) y (2.51). Así, considerando lo mencionado previamente, y utilizando nuestras simulaciones numéricas, pasamos a analizar justamente la distancia existente entre los niveles de energía para el DH del sector de paridad par. Cabe destacar que hemos seleccionado este sector considerando que en él se encuentra el estado base. Además para este análisis, consideramos la teoría de matrices aleatorias [13], y calculamos el espacio entre los niveles de energía como

$$S_n = (E_{n+1} - E_n)/\bar{S}, \quad (2.52)$$

donde  $n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$  y  $\bar{S}$  es la media de todos los espacios entre los niveles de energía para el DH de paridad par. Finalmente, una vez calculadas la distribución de los espacios

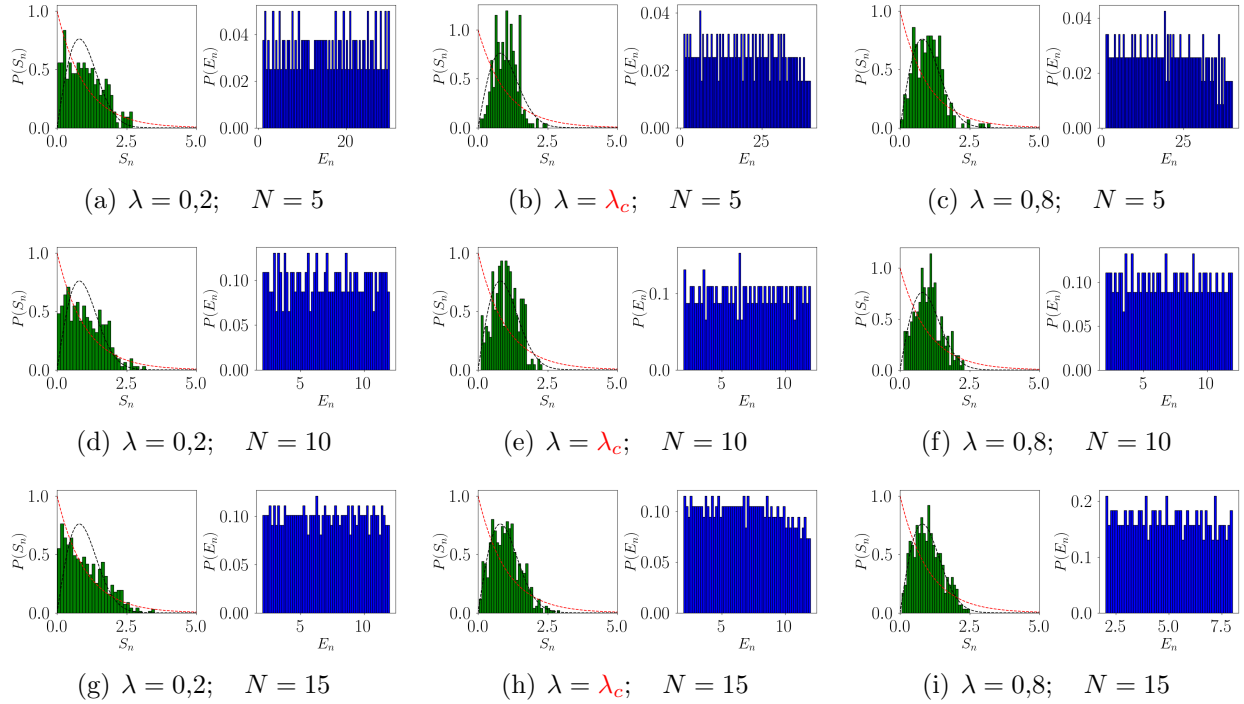


Figura 2.5: Distribución de espacios entre niveles de energía,  $P(S_n)$  y  $P(E_n)$  para el DH par con diferentes valores de  $\lambda$  y  $N$ ;  $\omega = \epsilon = 1$ . Se representan las distribuciones universales de Poisson ( $P_P$ , rojo) y Wigner-Dyson ( $P_{W-D}(S_n)$ , negro).

entre niveles de energía y la distribución de energías, normalizamos dichos resultados para

compararlos con los conjuntos universales de la teoría de matrices aleatorias y de esa forma obtuvimos los resultados mostrados en la Figura 2.5, donde las distribuciones de energía son mostradas para destacar la franja de energía utilizada para realizar la técnica ampliamente utilizada y conocida como “Unfolding” [13].

De esta forma, conforme a lo observado en la Figura 2.5, por un lado podemos resaltar el hecho de que para valores de  $\lambda < \lambda_c$  se puede observar como la distribución parece tener una convergencia para la distribución de Poisson a medida que aumentamos el valor de  $N$ . Por otro lado, para valores de  $\lambda > \lambda_c$  se puede observar como la distribución parece tener una convergencia para la distribución de Wigner-Dyson a medida que aumentamos el valor de  $N$ . Todo lo cual nos permite observar otro fenómeno asociado a la QPT mencionada ya anteriormente.

Por otro lado, vimos que la naturaleza del cambio en la distribución  $P(S_n)$  mencionado anteriormente se puede caracterizar por el parámetro  $\eta$ :

$$\eta = \left| \frac{\int_0^{S_0} P(S_n) - P_{W-D}(S_n) dS}{\int_0^{S_0} P_P(S_n) - P_{W-D}(S_n) dS} \right|, \quad (2.53)$$

donde  $S_0 = 0,472913\dots$  es el valor de  $S_n$  para el cual ambas distribuciones, la  $P_P(S_n)$  y la  $P_{W-D}$ , se intersectan por primera vez [16]. El parámetro  $\eta$  es una medida que representa el grado de similitud de la distribución  $P(S_n)$  y la distribución  $P_{W-D}$ , y está normalizada de tal forma que si  $P(S_n) = P_{W-D}(S_n)$ , entonces  $\eta = 0$ , y si  $P(S_n) = P_P(S_n)$ , entonces  $\eta = 1$ .

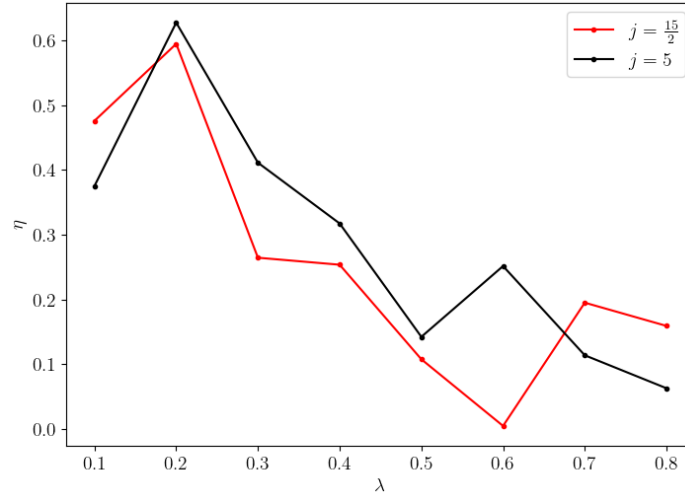


Figura 2.6: El módulo de  $\eta$  en función de  $\lambda$ , para  $N = 15$  y  $N = 10$ , con  $\omega = \epsilon = 1$ .

El comportamiento de  $\eta$  como función de  $\lambda$  para  $j = \frac{15}{2}$  y  $j = 5$  está mostrado en la Figura 2.6. Considerando ambos casos, fue posible observar que el parámetro  $\eta$  muestra

un comportamiento que se podría considerar bastante similar. Verificamos lo mencionado previamente solamente observando que los resultados de las distribuciones de la Figura 2.5 coinciden plenamente con esto, puesto que para bajos valores de  $\lambda$ , donde  $\lambda < \lambda_c$ , los valores de  $\eta$  sugieren una mayor similitud para con la distribución poissoniana, y a medida que aumenta el valor de  $\lambda$  se observa un decrecimiento en el valor de  $\eta$ , lo cual también sugiere una mayor similitud con la distribución de Wigner-Dyson.

Así pues, ha sido posible concluir que en nuestras simulaciones, como también está descrito en [3], la QPT en este modelo se da debido a un cruce de comportamiento cuasi-integrable, donde las distancias entre niveles no estarían correlacionadas, a un comportamiento cuántico-caótico, donde si existirían correlaciones entre los distintos niveles.

## 2.5. Experimentos relacionados

Debido a la gran importancia del modelo de Dicke en el área de la óptica cuántica, los sistemas descritos por este modelo están siendo ampliamente estudiados tanto a nivel teórico como experimental. Tal es el caso, que en las últimas dos décadas se han dado grandes avances en ambos campos, teóricos como experimentales, debido a la aparición de dos propuestas principales que permitieron comprender mejor el modelo [5]. Por un lado, tenemos la primera de ellas que fue presentada en el trabajo realizado por Dimer et al. [17], en el cual se han basado en un esquema de 4 niveles. Bajo esta consideración, el acoplamiento entre la materia y la radiación es inducido por emisión Raman estimulada, y podría hacerse arbitrariamente fuerte. Esta propuesta, ya fue realizada en uno de los trabajos efectuados por Zhiqiang et al. [18]. La segunda forma de estudiar el modelo de Dicke se inspiró en un experimento más antiguo, el cual ya fue propuesto por Domokos y Ritsch [19] en los inicios del siglo XXI, y fue experimentalmente ejecutado por Black et al. [20]. En dicho trabajo, se consideró un gas de átomos térmicos, los cuales estaban atrapados dentro de una cavidad. Dichos átomos fueron iluminados por un pulso de luz coherente externa, que dispersaban fotones en la cavidad. Debido a esto, unos años más tarde se descubrió que, para intensidades de pulsos suficientemente fuertes, podríamos decir que los átomos optarían por organizarse siguiendo un patrón conocido como tablero de ajedrez, en el cual los átomos están preferentemente separados por un múltiplo entero de la longitud de onda del fotón incidente, causando que los átomos dispersen la luz de forma coherente. Este caso de estudio, fue ampliado para el caso de un condensado de Bose-Einstein (BEC, por sus siglas en inglés) unos años más tarde, en un trabajo teórico realizado por Nagy et al. [21] y puesto a prueba en un experimento por Baumann et al. [22]. En un BEC, los átomos no están localizados y la fase de la luz dispersa es aleatoria. Considerando esta situación, los fotones dispersados no son coherentes y su número no crece con  $N$ . En cambio, en el estado autoorganizado, todos los átomos emiten fotones de forma coherente, dando lugar a una fase superradiante, en la que el número de fotones es proporcional a  $N$ . Siguiendo esta línea de razonamiento, las referencias [21, 22] presentan muestras de que el inicio de la autoorganización puede mapearse hasta la transición

superradiante del modelo de Dicke. Posteriormente, este estudio fue ampliado en los siguientes años también y fue cuando aparecieron los trabajos relacionados a las cavidades de ancho de línea estrecho [23] y también los relacionados a cavidades multimodo [24].

Las dos propuestas mencionadas previamente implican sistemas disipativos controlados. En ambos casos, el acoplamiento entre los átomos y los fotones es obtenido por medio de un pulso externo dependiente del tiempo. Lo cual permite que la intensidad del acoplamiento efectivo materia-radiación pueda ser arbitrariamente fuerte, dando así lugar a la transición de fase. Una consecuencia de que sean pulsos controlados, sería la imposibilidad de que estos sistemas sean descritos utilizando un modelo Dicke de equilibrio. Puesto que deben ser considerados tanto el pulso controlado como la presencia de disipación. No obstante, es importante mencionar que dicha diferenciación fue descartada inicialmente debido a que el acoplamiento crítico del modelo controlado-disipativo coincidía con el valor del caso de equilibrio, para el caso considerado en el límite de pérdidas decrecientes. Debido a que el modelo controlado-disipativo no está realizado considerando una temperatura bien definida, en una primera instancia los expertos del área fueron llevados a identificar el experimento con una transición de fase cuántica a temperatura cero. Por otra parte, estudios realizados algunos años más adelante como [25, 26, 27] han podido demostrar que la transición de fase tiene las mismas propiedades universales que la transición de equilibrio a temperatura nula. Por lo tanto, es importante mencionar que dicha equivalencia puede entenderse en términos de una termalización emergente de baja frecuencia. Estos enfoques pueden considerarse simuladores cuánticos analógicos del modelo de Dicke: el esquema de conducción está diseñado para construir un modelo de Dicke eficaz con parámetros sintonizables que permitan la exploración del diagrama de fases. También existen propuestas para la simulación cuántica digital o híbrida analógico-digital del modelo de Dicke utilizando qubits superconductores o iones atrapados [28, 29, 30].

Además podemos mencionar otros trabajos relacionados con los fenómenos de superradiancia y el modelo de Dicke. Primeramente mencionamos un trabajo un tanto más antiguo que los mencionados anteriormente aquí, pero no por eso menos importante, como es el trabajo de Gross y Haroche [31] donde analizaron la superradiancia transitoria que había sido justamente una predicción ya realizada por el propio Dicke. Otros trabajos importantes que consideramos deben ser mencionados aquí serían el trabajo de Garraway [32], (que presentó el modelo de Dicke y sus transiciones de fase ya desde un análisis y una perspectiva de la óptica cuántica) y el trabajo realizado por Ritsch et al. [33], donde analizaron justamente el patrón de autoorganización de los átomos en cavidades ópticas y redes ópticas dinámicas. De esta forma finalizamos la revisión teórica del modelo de Dicke desde la perspectiva de la óptica cuántica. A continuación, en el siguiente capítulo haremos una revisión teórica de las propiedades de entrelazamiento y pasaremos a estudiar el espectro de entrelazamiento y su posible relación con el espectro de energías.



# Capítulo 3

## Propiedades de Entrelazamiento

En este Capítulo, primeramente analizamos y estudiamos la entropía, considerando que este es un concepto crucial en la teoría de la información cuántica y en el estudio de las propiedades de entrelazamiento de los sistemas físicos, ya que la entropía nos proporciona una medida del nivel de incertidumbre presente en el estado de un sistema físico determinado [34]. Posteriormente, exploramos todo lo que respecta al espectro de entrelazamiento, tanto desde el punto de vista de la teoría de la información cuántica, como desde el punto de vista de la óptica cuántica.

### 3.1. Entropía de Von Neumann

Considerando que la entropía de Shannon es aquel parámetro que mide la incertidumbre asociada a una distribución de probabilidad clásica. También existe una entropía asociada a los estados cuánticos, que se describe de forma similar, con operadores de densidad que pasan a sustituir a las distribuciones de probabilidad. Por lo tanto, la definición de la entropía de Shannon para los estados cuánticos, sería justamente la que se conoce como la entropía de Von Neumann, y está dada por la siguiente fórmula:

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\text{tr}(\hat{\rho} \ln(\hat{\rho})), \quad (3.1)$$

donde  $\ln$  es el logaritmo neperiano. Si  $\lambda_i$  son los autovalores de la matriz densidad  $\hat{\rho}$ , entonces la definición anterior puede ser reexpresada de la siguiente manera:

$$S(\hat{\rho}) = - \sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i). \quad (3.2)$$

La última ecuación es la más utilizada para realizar los cálculos y es precisamente la que utilizamos en este Capítulo.

Ahora bien, para entender con más detalles la condición del límite termodinámico, analizamos la entropía  $S_L$ , considerando que la entropía lineal es una primera aproximación a la

entropía de Von Neumann, en la cual solamente se tiene en cuenta el primer término de la expansión en serie del término logarítmico. Esto lo hicimos utilizando los resultados previos obtenidos en [35], por los cuales sabemos que para la fase normal la entropía  $S_L$  puede ser expresada como:

$$S_L(\zeta) = [\zeta \coth \zeta - \ln(2 \sinh \zeta)], \quad \zeta \equiv W_{fn}/2, \quad (3.3)$$

donde

$$W_{fn} = \operatorname{arcosh} \left( 1 + 4 \frac{\varepsilon_- \varepsilon_+}{(\varepsilon_- - \varepsilon_+)^2} \right), \quad (3.4)$$

considerando que  $\varepsilon_{\pm}$  son las energías calculadas en las Ec. (2.29) para la fase normal. Además, para la fase super-radiante se expresa como:

$$S_L(\zeta) = [\zeta \coth \zeta - \ln(2 \sinh \zeta)] + \ln(2), \quad \zeta \equiv W_{fsr}/2, \quad (3.5)$$

donde

$$W_{fsr} = \operatorname{arcosh} \left( 1 + 2 \frac{\varepsilon_- \varepsilon_+}{(\varepsilon_- - \varepsilon_+)^2 c^2 s^2} \right), \quad (3.6)$$

considerando que  $\varepsilon_{\pm}$  son las energías calculadas en las Ec. (2.45) para la fase super-radiante. Adicionalmente, debemos considerar que  $c = \cos(\gamma)$  y  $s = \sin(\gamma)$  y  $\gamma = \gamma^{(2)}$  donde  $\gamma^{(2)}$  está dado por la Ec. (2.43).

En la Figura 3.1 podemos observar los resultados obtenidos para el cálculo de la entropía de Von Neumann para el estado base de sistemas con diferentes valores de  $N$ . Adicionalmente,

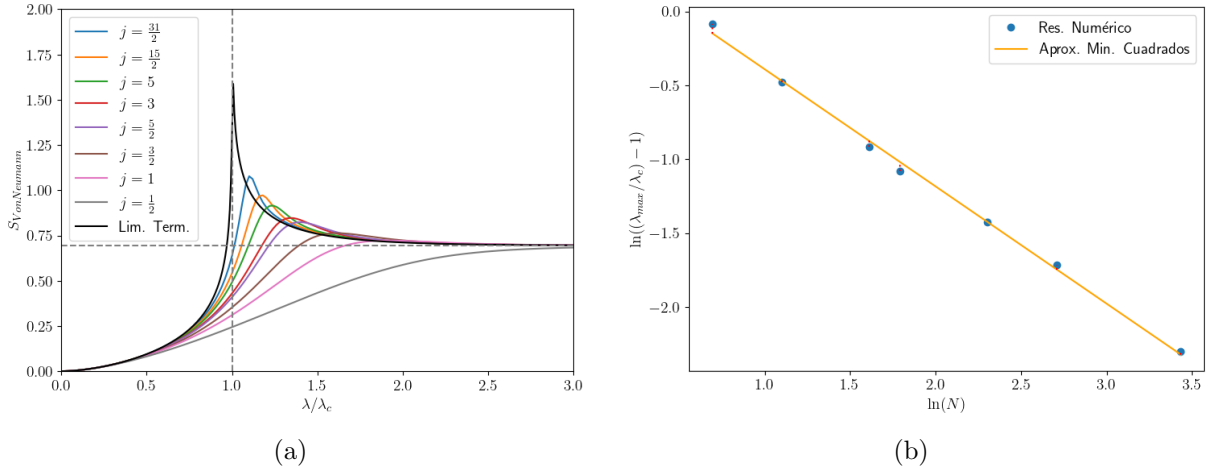


Figura 3.1: (a) Entropía de Von Neumann para  $N = \{31, 15, 10, 6, 5, 3, 2, 1\}$ , en función de  $\lambda/\lambda_c$ , junto con el resultado para el límite termodinámico en la condición de resonancia donde  $\omega = \varepsilon = 1$ . (b)  $\ln(\lambda_{\max}/\lambda_c - 1)$  en función de  $\ln(N)$ , con  $\omega = \varepsilon = 1$ .

en dicha Figura se muestran los resultados para el límite termodinámico donde  $j \rightarrow \infty$ . De esta forma, en la Figura 3.1(a) se puede advertir que existe un pico en la curva representada para cada  $N$ , los cuales dado que el sistema estudiado es finito, en rigor, sólo se produce en un punto cercano al punto donde  $\frac{\lambda}{\lambda_c} = 1$ . Podemos observar además que una vez que incrementamos el número  $N$ , el pico va aproximando su ocurrencia justamente al valor de  $\frac{\lambda}{\lambda_c} = 1$ . Ahora bien, en la Figura 3.1(b) podemos confirmar lo mencionado respecto al pico de las curvas. Considerando que tenemos el gráfico del valor de  $\ln(\lambda_{max}/\lambda_c)$  para los cuales ocurre el máximo de entropía en función de  $\ln(N)$ . Allí, se exhibe claramente un comportamiento lineal, como el mostrado por una aproximación, la cual está señalada como una línea amarilla también en la Figura 3.1(b). Todo lo cual nos permite identificar la siguiente proporcionalidad:

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_c} \propto N^{-\nu}, \quad (3.7)$$

donde  $\nu = 0,79 \pm 0,02$ . Es importante destacar que en la Figura 3.1(b) se muestra justamente la aproximación lineal realizada para la obtención de la Ec. (3.7).

## 3.2. Espectro de Entrelazamiento

Primeramente es necesario destacar el hecho de que el sistema que estamos estudiando es un sistema bipartito. Lo cual quiere decir que el espacio de Hilbert del sistema puede escribirse como un producto tensorial:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad (3.8)$$

donde el espacio de Hilbert se extiende por estados de la forma  $|a\rangle \otimes |b\rangle \equiv |a\rangle |b\rangle \equiv |ab\rangle$ , donde  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  son bases completas para  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  respectivamente.

Es importante destacar que los sistemas bipartitos son interesantes porque describen la composición de dos sistemas físicos independientes. Además, en este caso, como ya vimos en la descripción inicial del modelo de Dicke, el sistema  $A$  consideramos que sería la componente del sistema asociado a la materia y el sistema  $B$  el asociado a la radiación.

Otra característica importante de los sistemas bipartitos en la mecánica cuántica es que tienen la notable característica de que pueden estar entrelazados: las matrices de densidad reducida  $\rho_A$  y  $\rho_B$  pueden mezclarse aunque el estado conjunto  $\rho_{AB}$  sea puro. Dicho de otro modo, el conocimiento «completo» del estado de  $AB$  no implica necesariamente el conocimiento «completo» de los estados de  $A$  y  $B$ . Dicha situación se aclara introduciendo lo que se denomina la descomposición de Schmidt [36, 37, 38, 39, 40, 41].

Una vez conocidas dichas características de un sistema bipartito, definimos a lo que se conoce como Espectro de Entrelazamiento (conocido como ES, por sus siglas en inglés), el cual ha demostrado que sus propiedades señalan justamente una QPT en diversos modelos.

El ES es definido utilizando la descomposición de Schmidt, mencionada anteriormente, para el estado base  $|\psi\rangle_{gs}$ :

$$|\psi\rangle_{gs} = \sum_j \sqrt{\xi_j} |\psi_j^A\rangle \otimes |\psi_j^B\rangle, \quad (3.9)$$

donde  $\xi_j$  es conocido como el  $j$ -ésimo coeficiente de Schmidt, y  $|\psi_j^A\rangle, |\psi_j^B\rangle$  forman una base ortonormal de cada sistema. Por lo tanto, como sabemos la matriz densidad de una partición  $\hat{\rho}_A = \text{tr}_B |\psi\rangle_{gs} \langle\psi|_{gs}$  y esto se puede expresar en la forma térmica como:

$$\rho_A = \sum_j e^{\gamma_j} |\psi_j^A\rangle \langle\psi_j^A|, \quad (3.10)$$

donde los coeficientes  $\gamma_j = -\ln \xi_j$  son las energías de entrelazamiento [42]. A continuación presentamos en las siguientes subsecciones un análisis de los espectros de entrelazamiento para la condición de resonancia y fuera de la resonancia.

### 3.2.1. Condición de resonancia

Para este caso, primeramente procedimos a calcular la matriz de densidad de estados para el estado base  $\hat{\rho}_{\text{Total}} = |\psi\rangle_{gs} \langle\psi|_{gs}$  y calculamos la traza parcial para la partición atómica  $\hat{\rho}_{\text{atom}}$  y la bosónica  $\hat{\rho}_{\text{boson}}$ . Para esto, consideramos que podemos escribir  $|\psi_n^{\text{atom}}\rangle$  y  $|\psi_{m_z}^{\text{boson}}\rangle$  como:

$$|\psi_n^{\text{atom}}\rangle = |n\rangle \otimes \mathbb{1}_{\text{atom}}, \quad |\psi_{m_z}^{\text{boson}}\rangle = \mathbb{1}_{\text{boson}} \otimes |j, m_z\rangle, \quad (3.11)$$

lo cual nos permite expresar  $\hat{\rho}_{\text{atom}}$  y  $\hat{\rho}_{\text{boson}}$  de la siguiente manera:

$$\hat{\rho}_{\text{atom}} = \sum_n \langle\psi_n^{\text{atom}}| \hat{\rho}_{\text{Total}} |\psi_n^{\text{atom}}\rangle, \quad (3.12)$$

$$\hat{\rho}_{\text{boson}} = \sum_{m_z} \langle\psi_{m_z}^{\text{boson}}| \hat{\rho}_{\text{Total}} |\psi_{m_z}^{\text{boson}}\rangle. \quad (3.13)$$

De esta forma, una vez calculado todo lo mencionado anteriormente pudimos obtener los resultados mostrados en las Figuras 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5. Es importante notar que la diagonal de estas matrices representan las probabilidades de los estados para la partición atómica y bosónica.

Posteriormente, con los resultados obtenidos y mostrados en las Figuras 3.2 y 3.3 es posible advertir la existencia clara de un cambio en la forma que exhiben las distribuciones de probabilidades  $P(m_z)$  y  $P(n)$  conforme los valores de  $\lambda$  van aumentando. A su vez, podemos destacar que dicho cambio en el comportamiento de las distribuciones sucede precisamente en la región cercana al valor de  $\lambda_c$ . Esto sucede tanto para el caso de  $\hat{\rho}_{\text{atom}}$  como para  $\hat{\rho}_{\text{boson}}$ . Otro detalle que hay que destacar es la aparición de un posible estado de preferencia del sistema considerando los estados de Dicke para valores de  $\lambda$  cercanos a 1,0. En vista y consideración

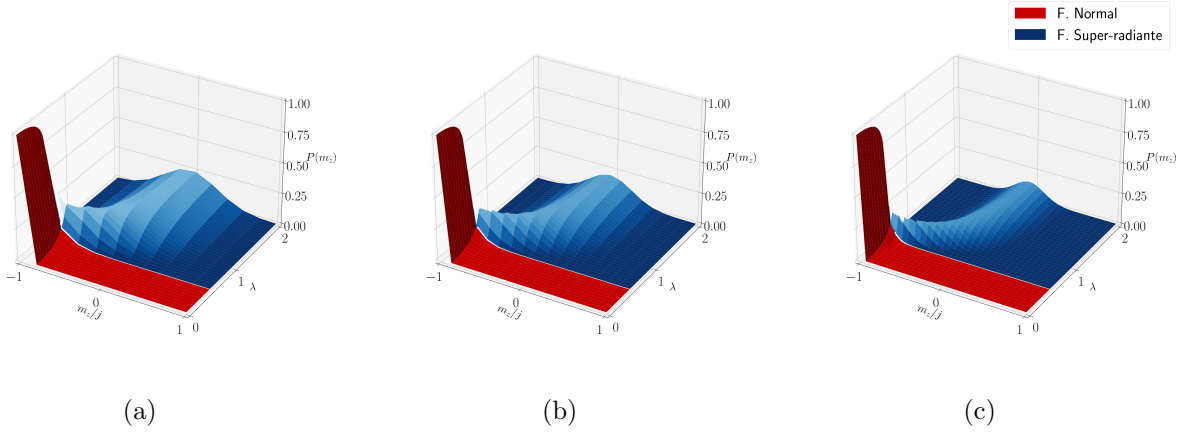


Figura 3.2: Probabilidades  $P(m_z)$ , donde  $m_z$  corresponde a cada uno de los estados de Dicke  $|j, m_z\rangle$ , y estas están calculadas para diferentes valores de  $\lambda$ , para la condición de resonancia,  $\omega = \epsilon = 1$  y  $N = 10$  (a),  $N = 15$  (b) y  $N = 31$  (c).

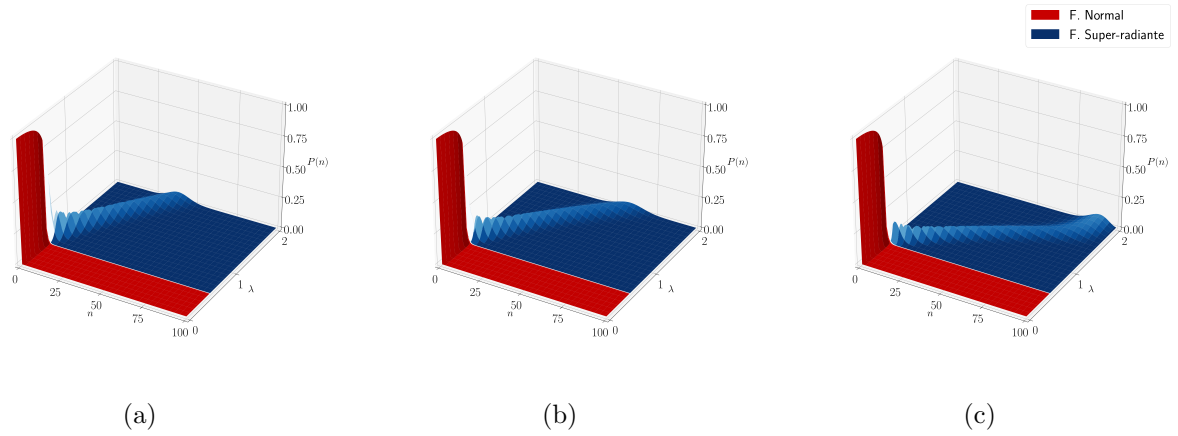


Figura 3.3: Probabilidades  $P(n)$ , donde  $n$  corresponde a cada uno de los estados de Fock  $|n\rangle$ , y estas están calculadas para diferentes valores de  $\lambda$ , para la condición de resonancia,  $\omega = \epsilon = 1$  y  $N = 10$  (a),  $N = 15$  (b) y  $N = 31$  (c).

que tanto en la Figura 3.2(a), como en las Figuras 3.2(b) y 3.2(c), a partir de un cierto  $\lambda$  se observa como el pico de la distribución ocurre para un valor de  $m_z$  constante. Dicho fenómeno no se advierte en las Figuras 3.3(a) y 3.3(b), donde pareciera que el pico todavía podría desplazarse aún más en cuanto sean incrementados los valores de  $\lambda$ . No obstante, en la Figura 3.3(c) pareciera que a partir de un valor de  $\lambda$  cercano a 1,75 el pico de la distribución también ocurriría para un valor de  $n$  constante. Pero, probablemente esto se deba nada más a la necesidad de un mayor número de fotones en la base de Fock.

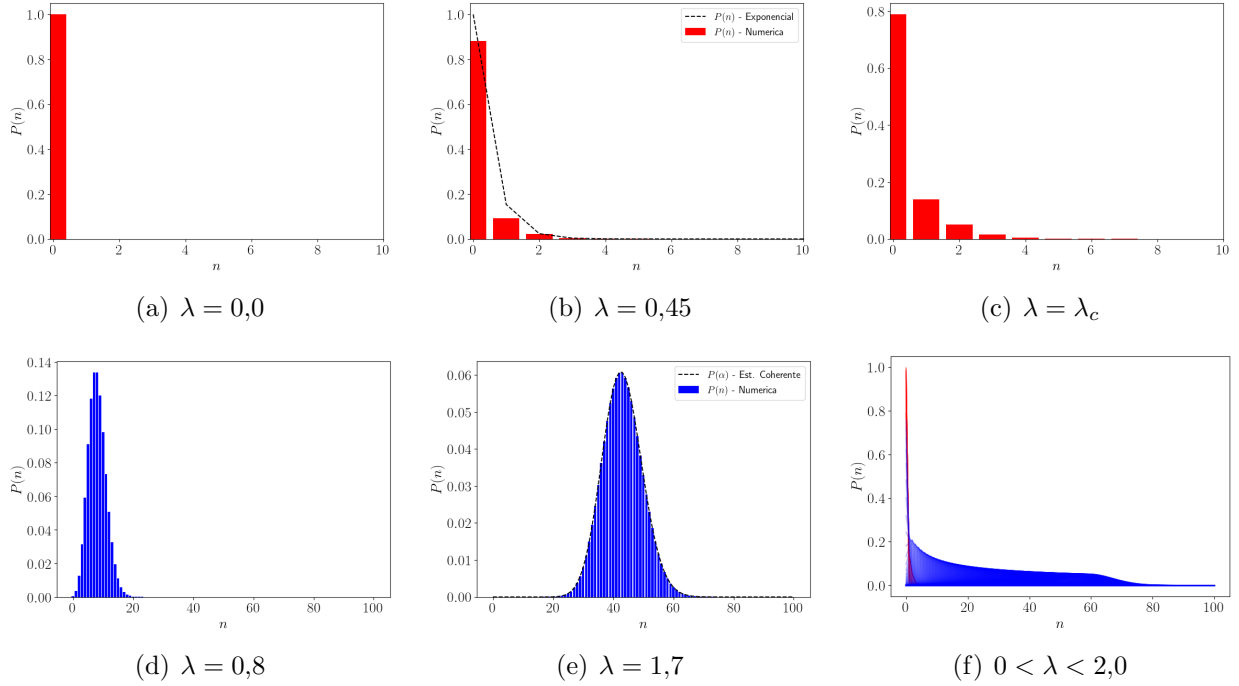


Figura 3.4: Probabilidades  $P(n)$ , para cada uno de los estados de Fock  $|n\rangle$ , para  $\lambda = 0,0$  (a),  $\lambda = 0,45$  (b),  $\lambda = \lambda_c$  (c),  $\lambda = 0,8$  (d),  $\lambda = 1,7$  (e) y  $0 < \lambda < 2,0$  (f). Los gráficos con las barras rojas corresponden a la fase normal y los de color azul a la fase super-radiante; todos fueron calculados para la condición de resonancia, con  $\omega = \epsilon = 1$  y para  $N = 15$ .

Consecuentemente, debido a lo que mencionamos sobre los resultados anteriores, analizamos con mayores detalles las variaciones presentadas en las distribuciones de probabilidades  $P(m_z)$  y  $P(n)$  para diferentes valores de  $\lambda = \{0,0, 0,45, 0,5, 0,8, 1,7\}$ , lo cual puede observarse en las Figuras 3.4 y 3.5. Para iniciar este análisis, por un lado consideramos las distribuciones que corresponden a valores de  $\lambda$  pertenecientes a la fase normal. Específicamente, nos enfocamos en los resultados mostrados en las Figuras 3.4(b) y 3.5(b), donde se aprecia claramente la similitud existente entre las distribución  $P(n)$  y  $P(m_z)$  con distribuciones exponenciales aproximadas expresadas de la siguiente forma:

$$P(n) \propto \exp(-N n), \quad P(m_z) \propto \exp(-N m_z). \quad (3.14)$$

Posteriormente, nos centramos en el análisis de las distribuciones que corresponde a valores de  $\lambda$  pertenecientes a la fase super-radiante. Específicamente, examinamos los resultados mostrados en las Figuras 3.4(e) y 3.5(e), en las cuales se aprecia claramente la similitud existente entre la distribución  $P(n)$  con una distribución asociada a un estado coherente. Por otro lado, se aprecia la similitud existente entre la distribución  $P(m_z)$  con una distribución

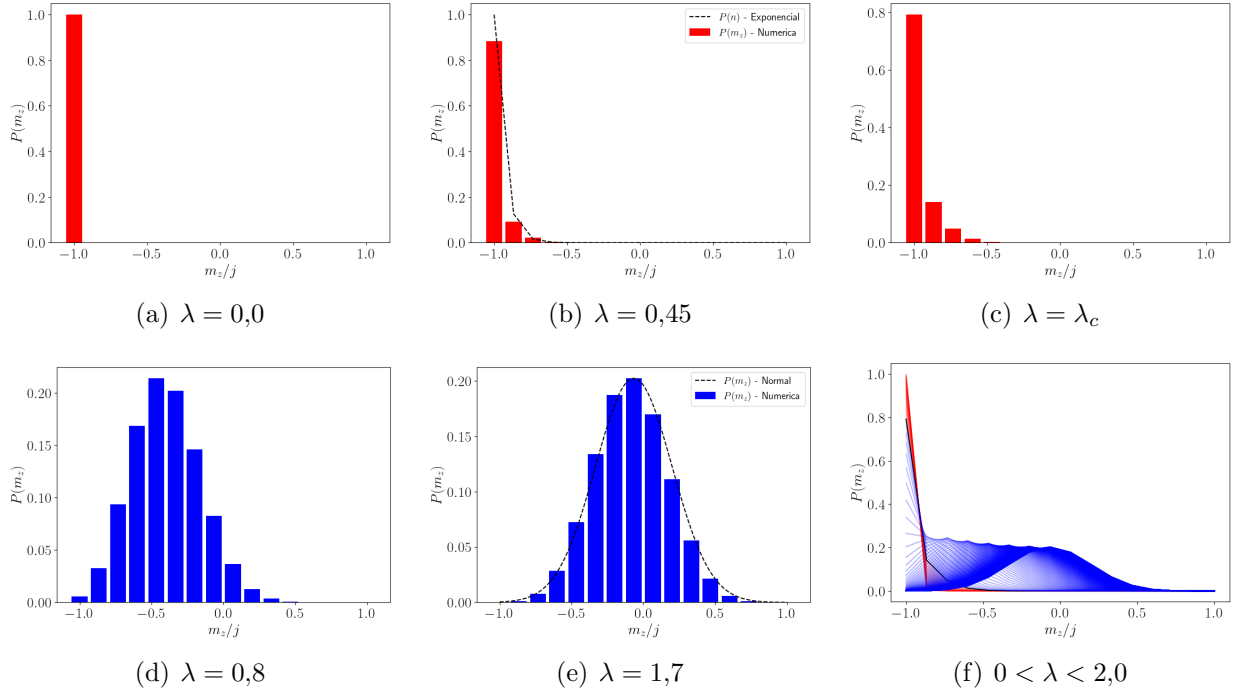


Figura 3.5: Probabilidades  $P(m_z)$ , para cada uno de los estados de Dicke  $|j, m_z\rangle$  para  $\lambda = 0,0$  (a),  $\lambda = 0,45$  (b),  $\lambda = \lambda_c$  (c),  $\lambda = 0,8$  (d),  $\lambda = 1,7$  (e) y  $0 < \lambda < 2,0$  (f). Los gráficos con las barras rojas corresponden a la fase normal y los de color azul a la fase super-radiante; todos fueron calculados para la condición de resonancia, con  $\omega = \epsilon = 1$  y para  $N = 15$ .

normal aproximada. Las distribuciones aproximadas pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$$P(n) \propto \frac{1}{n!} \exp(-|\alpha|^2) \alpha^{2n}, \quad P(m_z) \propto \exp\left(-\frac{(m_z - \bar{m}_z)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.15)$$

donde  $\alpha = 6 + 2,65i$ ,  $\bar{m}_z \approx -0,07$  y  $\sigma \approx 0,27$ . Debido a esta similitud podemos destacar que para el estado bósónico, tendríamos justamente estados coherentes y para el caso de la materia tendríamos estados con una distribución normal de probababilidades.

A continuación, analizamos los resultados obtenidos para el Espectro de Entrelazamiento. Iniciamos esto destacando que en la Figura 3.6 se observan los espectros de entrelazamiento para diferentes valores de  $N$ . Donde para la región cercana a  $\lambda_c$  pero considerando  $\lambda > \lambda_c$ , verificamos que las energías de entrelazamiento se superponen de a dos niveles. Este detalle es muy interesante puesto que algo muy similar notamos al analizar, el espectro de energías para los mismos valores de  $N$ , como se muestra en la Figura 3.7. Allí se puede apreciar como, análogamente, las diferencias entre los niveles de energías se superponen de forma muy similar

a la que ocurre al momento de examinar el espectro de entrelazamiento.

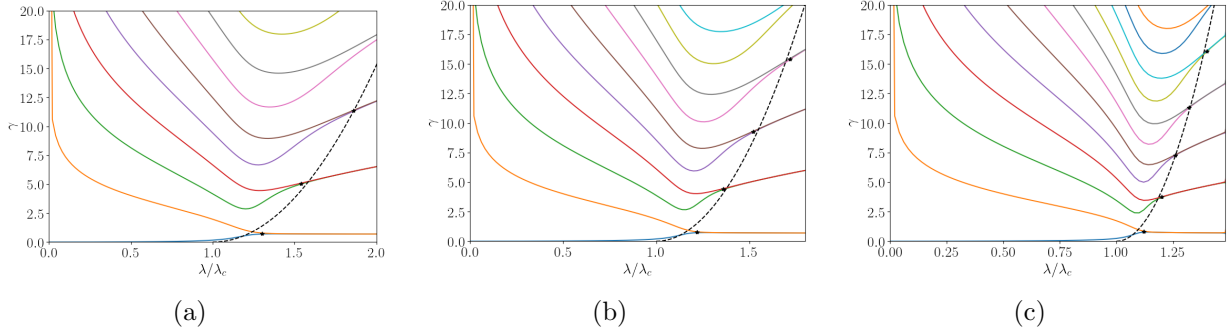


Figura 3.6: Espectro de Entrelazamiento en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = 10$  (a),  $N = 15$  (b) y  $N = 31$  (c).

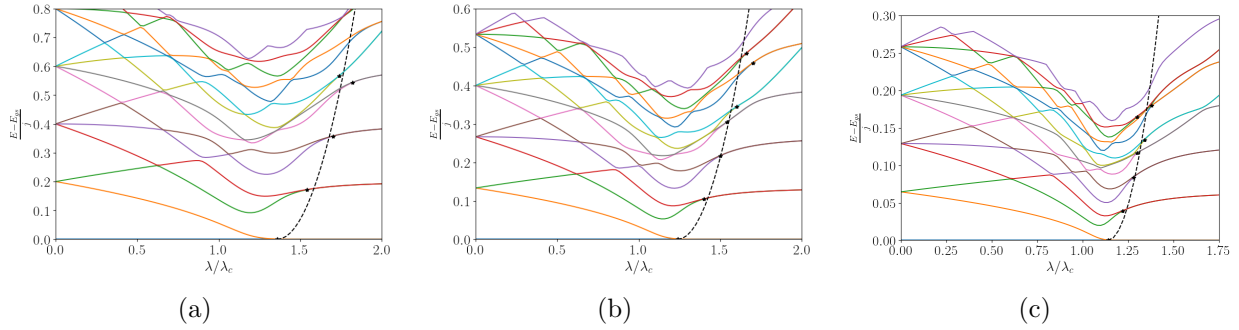


Figura 3.7: Diferencia entre el Espectro de Energías y la energía del estado base en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = 10$  (a),  $N = 15$  (b) y  $N = 31$  (c). Observación: para todos los valores de  $N$  solo se muestran los primeros 15 niveles de energías.

Considerando lo expuesto anteriormente, procedimos a realizar ciertas aproximaciones. Fue posible identificar un patrón en la forma en la que ocurre la superposición, tanto de los niveles de energía como del espectro de entrelazamiento. Dichas aproximaciones son las curvas negras con trazos mostradas en las Figuras 3.6 y 3.7. Las aproximaciones para el espectro de entrelazamiento podemos expresarlas de la siguiente forma:

$$\gamma \propto (N - 1)^2 \left( \frac{\lambda}{\lambda_c} - 1 \right)^2. \quad (3.16)$$

De la misma forma, expresamos las aproximaciones para el espectro de energías de la siguiente



forma:

$$\left(\frac{E - E_{gs}}{j}\right) \propto (N - 1)^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} - \lambda_{cL}^N\right)^2, \quad (3.17)$$

donde  $\lambda_{cL}^N$  es el valor de  $\lambda$  para el cual ocurre la superposición de los niveles de energía 0 y 1, para un dado valor de  $N$ .

Vale la pena destacar que los puntos negros mostrados en la Figura 3.6 corresponden a los primeros valores del espectro de entrelazamiento para los cuales la diferencia entre los niveles fue de  $\gamma_{dif} < 0,09$ . Análogamente, los puntos negros mostrados en la Figura 3.7 corresponden a los primeros valores del espectro de energía para los cuales la diferencia entre las líneas fue de  $E_{dif} < 0,001$ . Estos valores fueron fijados por medio de criterio visual, de forma que tengan coherencia con lo que se observa en las figuras.

Otro fenómeno que pudimos observar sería la similitud existente en la forma en la que se comportan los dos primeros niveles del espectro de entrelazamiento para diferentes valores de  $\lambda/\lambda_c$ , puesto que en la Figura 3.8(a) podemos apreciar como para valores de  $\lambda/\lambda_c < 0,5$  pareciera ser que independientemente del número de átomos  $N$  considerados, todos los dos primeros niveles se comportan de la misma manera. A su vez, notamos también como, en tanto que aumentamos el valor de  $N$ , la superposición entre los niveles ocurre para un valor cada vez más próximo a 1. Es muy importante destacar que esto ocurre tanto para el espectro de energías, como para el espectro de entrelazamiento, lo cual se puede ver en las Figuras 3.8(a) y 3.8(b).

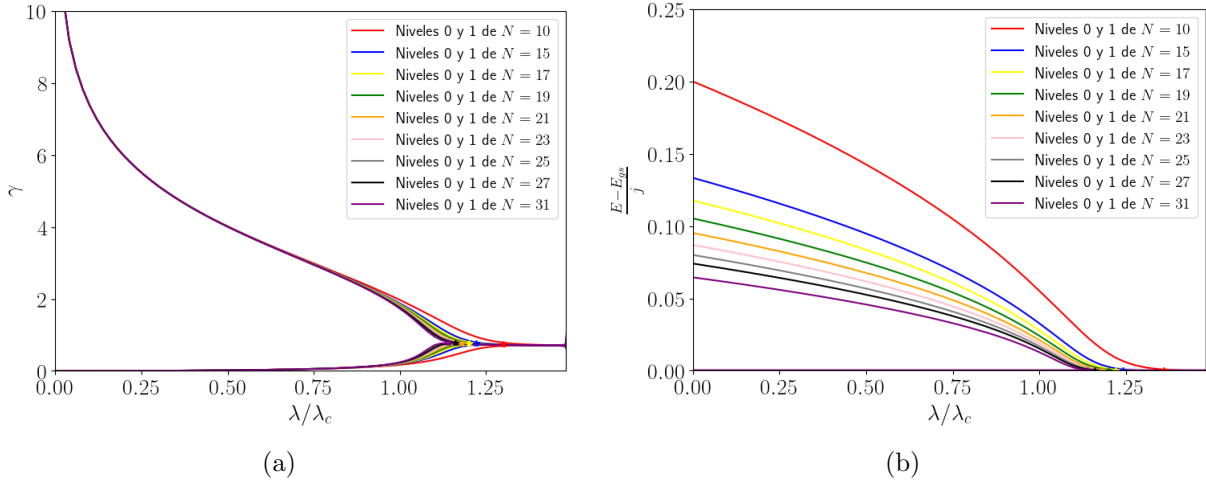


Figura 3.8: (a) Energías de entrelazamiento de los niveles 0 y 1 en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = \{31, 15, 10\}$ , con  $\omega = \epsilon = 1$ . (b) Diferencia entre las energías de los niveles 0 y 1 en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = \{10, 15, 31\}$ , con  $\omega = \epsilon = 1$ .

Debido a lo mencionado anteriormente, analizamos primeramente los valores de  $\lambda_{c_L}^N$ , donde llamaremos  $\lambda_{c_L}^N$  al punto a partir del cual consideramos que inicia la superposición. Esto sería tanto para niveles vecinos del espectro de entrelazamiento como de niveles vecinos de energías, tales como  $L = 1$  para los niveles (0-1),  $L = 2$  para los niveles (2-3) y así sucesivamente, en función de los valores de  $N$ . Obteniendo de esta forma lo que se muestra en la Figura 3.9. Donde se pueden apreciar las aproximaciones lineales calculadas para  $\ln(\lambda_{c_L}^N/\lambda_c)$  en función de  $1/N$ .

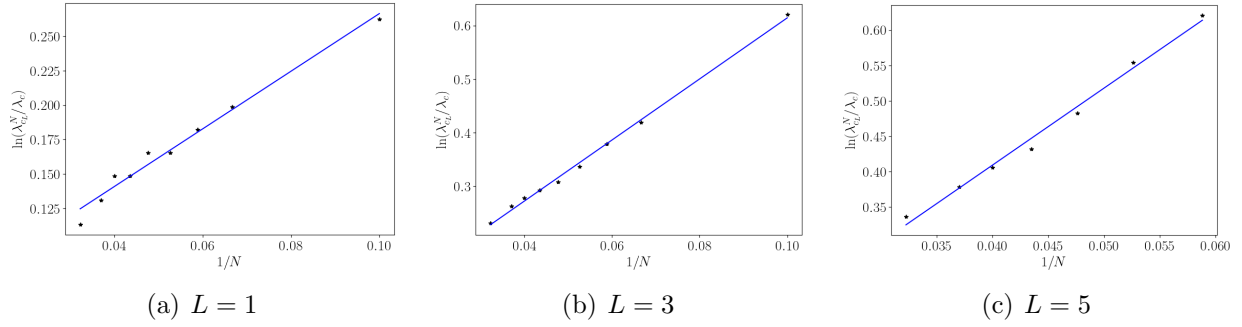


Figura 3.9:  $\ln(\lambda_{c_L}^N/\lambda_c)$  en función de  $1/N$ , para los niveles  $L = 1$  (a),  $L = 3$  (b) y  $L = 5$  (c). Observación: (1) las líneas azules representan las aproximaciones lineales calculadas para cada caso y (2) todos los casos son para las diferencias de niveles para el espectro de entrelazamiento en la condición  $\omega = \epsilon = 1$ .

Análogamente al caso anterior, fue realizado el mismo procedimiento, pero esta vez considerando el espectro de energías. En dicho caso, obtuvimos los siguientes resultados mostrados en la Figura 3.10.

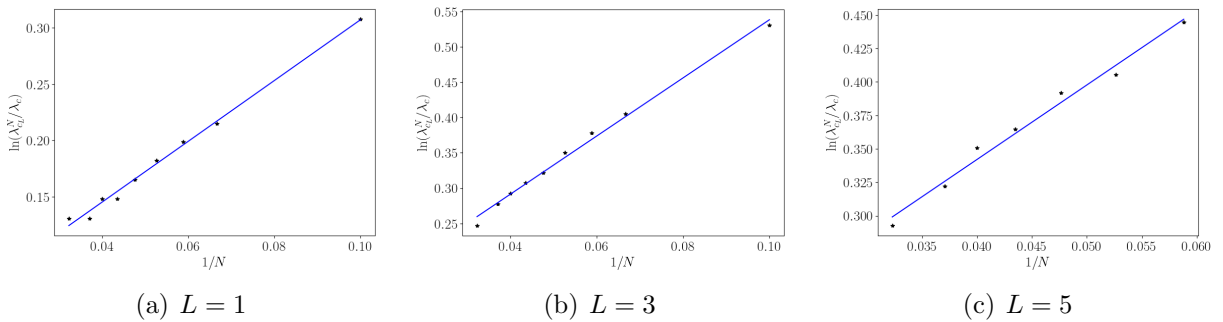


Figura 3.10:  $\ln(\lambda_{c_L}^N/\lambda_c)$  en función de  $1/N$ , para los niveles  $L = 1$  (a),  $L = 3$  (b) y  $L = 5$  (c). Observación: (1) las líneas azules representan las aproximaciones lineales calculadas para cada caso y (2) todos los casos son para las diferencia de niveles para el espectro de energías en la condición  $\omega = \epsilon = 1$ .

Seguidamente, analizamos los valores obtenidos para cada una de las pendientes de las

aproximaciones lineales realizadas tanto para el espectro de entrelazamiento, como para el de energías. De esta forma, obtuvimos los resultados mostrados en la Figura 3.11. Final-

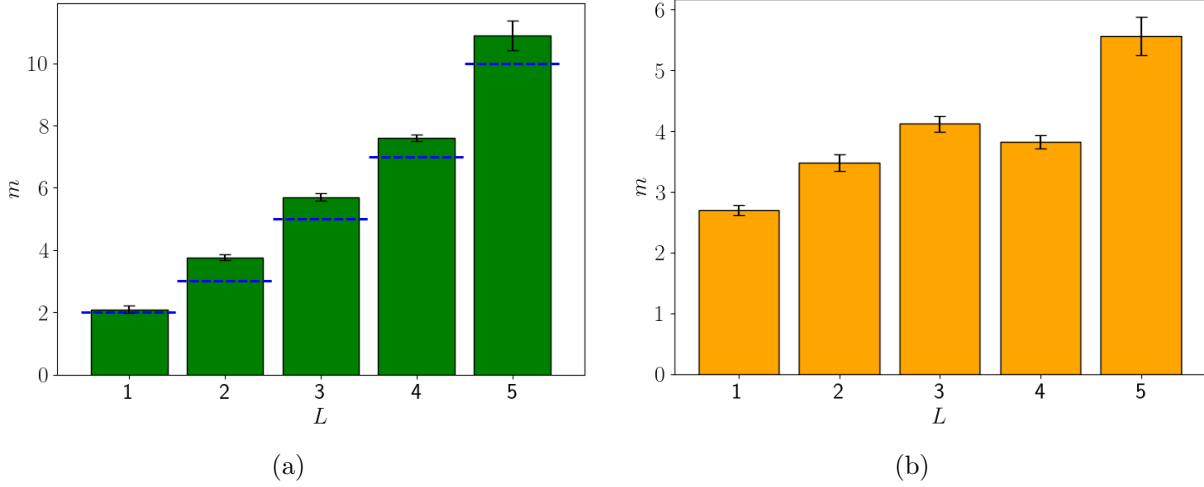


Figura 3.11: (a) Pendiente  $m$  de la aproximación en función del número de superposición  $L$  para el espectro de entrelazamiento, junto con la aproximación de tipo secuencial (línea con trazos azules). (b) Pendiente  $m$  de la aproximación en función del número de superposición  $L$  para el espectro de energías.

mente, observando los resultados expuestos en la Figura 3.11(a), apreciamos que es posible identificar la existencia de una relación de tipo secuencial entre el valor de la pendiente  $m$  de la aproximación para una dada superposición y el número de superposición analizado  $L$ . Considerando esto, calculamos la siguiente expresión que nos permite estimar la relación mencionada:

$$[m] = 2 + \sum_{n=1}^{L-1} \sigma_d(n), \quad (3.18)$$

donde  $\sigma_d(n)$  es una función que cuenta el número de divisores que posee  $n$  y  $[m]$  es la función que toma como entrada un número real  $m$ , y da como salida el mayor entero menor o igual que  $m$ . Esta aproximación está representada en la Figura 3.11(a) como la línea con trazos de color azul. Para el espectro de energías en la Figura 3.11(b) se observa un comportamiento levemente similar, pero debido a los valores intermedios como el caso de  $L = 4$ , no fue posible encontrar una secuencia aproximada que represente dichas pendientes. Lo cual está directamente relacionado con la forma que presentan los espectros de energías para la condición de resonancia. Lo que nos condujo a examinar también condiciones fuera de la resonancia. A continuación presentamos los resultados obtenidos para condiciones fuera de la resonancia donde  $\frac{\omega}{\epsilon} = 0,1$  y  $\frac{\omega}{\epsilon} = 10$ .

### 3.2.2. Condiciones fuera de la resonancia

#### Proporción cavidad-átomo menor que 1.0

Teniendo en cuenta lo mencionado en la subsección anterior, consideraremos primeramente el caso donde  $\frac{\omega}{\epsilon} = 0,1$ . Destacando que realizamos el mismo análisis hecho para la condición de resonancia en la subsección anterior. Para esto, presentamos las Figuras 3.12 y 3.13 donde se muestran los espectros de entrelazamiento y de diferencias de energías. Aquí

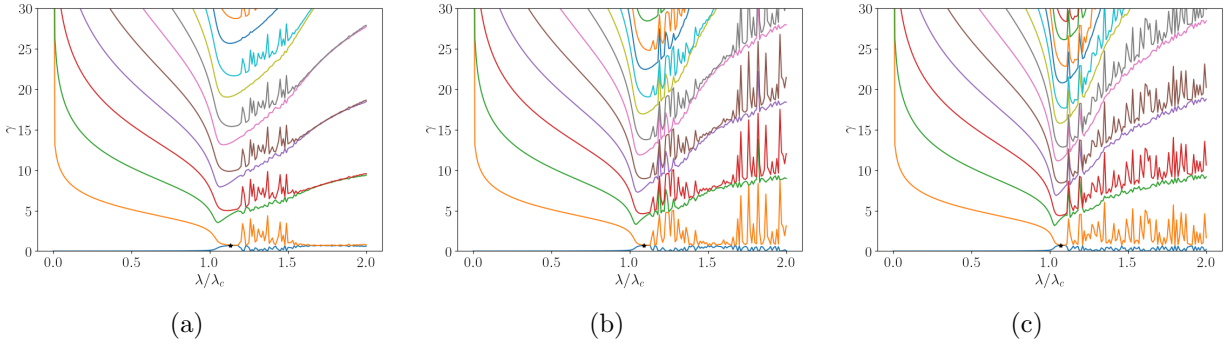


Figura 3.12: Espectro de Entrelazamiento en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = 15$  (a),  $N = 23$  (b) y  $N = 31$  (c). Observación: todos para la condición de  $\frac{\omega}{\epsilon} = 0,1$ .

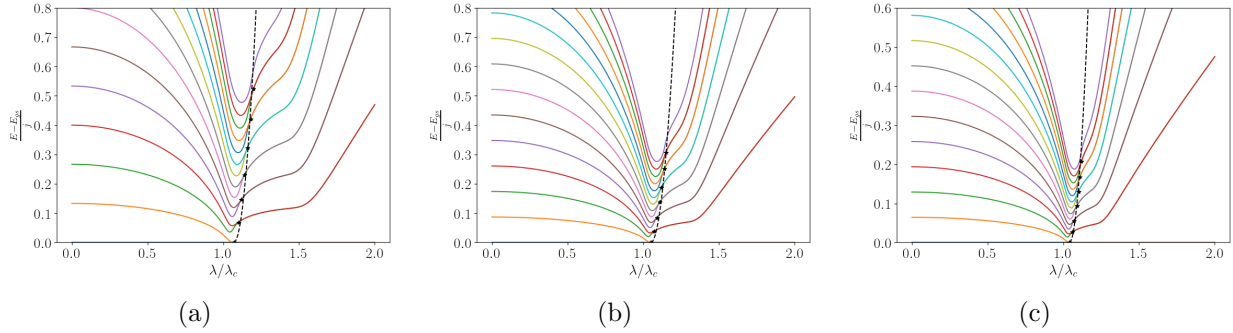


Figura 3.13: Diferencia entre el Espectro de Energías y la energía del estado base en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = 15$  (a),  $N = 23$  (b) y  $N = 31$  (c). Para todos los valores de  $N$  solo se muestran los primeros 15 niveles de energías y todos son para la condición de  $\frac{\omega}{\epsilon} = 0,1$ .

vemos como para el caso de las Figuras 3.13(a), 3.13(b) y 3.13(c) también serían válidas las aproximaciones presentadas en las Ec. (3.16) y (3.17).

No obstante, para el espectro de entrelazamiento en la fase super-radiante y  $\lambda/\lambda_c$  cercana a 1 se advierte una diferencia importante comparando con el caso de resonancia. Debido a la identificación de un cierto patrón observado en las Figuras 3.12(a), 3.12(b) y 3.12(c) para la fase mencionada previamente. Podemos suponer la ocurrencia de algún tipo de fenómeno que perturba el espectro de entrelazamiento a partir de un cierto valor de  $\lambda/\lambda_c$ . Es importante también mencionar que para esta condición no fue posible realizar el análisis de la superposición de los niveles debido a la forma presentada por el espectro de entrelazamiento.

### Proporción cavidad-átomo mayor que 1.0

Conforme lo detallado previamente, ahora estudiaremos el caso  $\frac{\omega}{\epsilon} = 10,0$ . Para esto presentamos las Figuras 3.14 y 3.15, para luego realizar el mismo análisis que antes. De

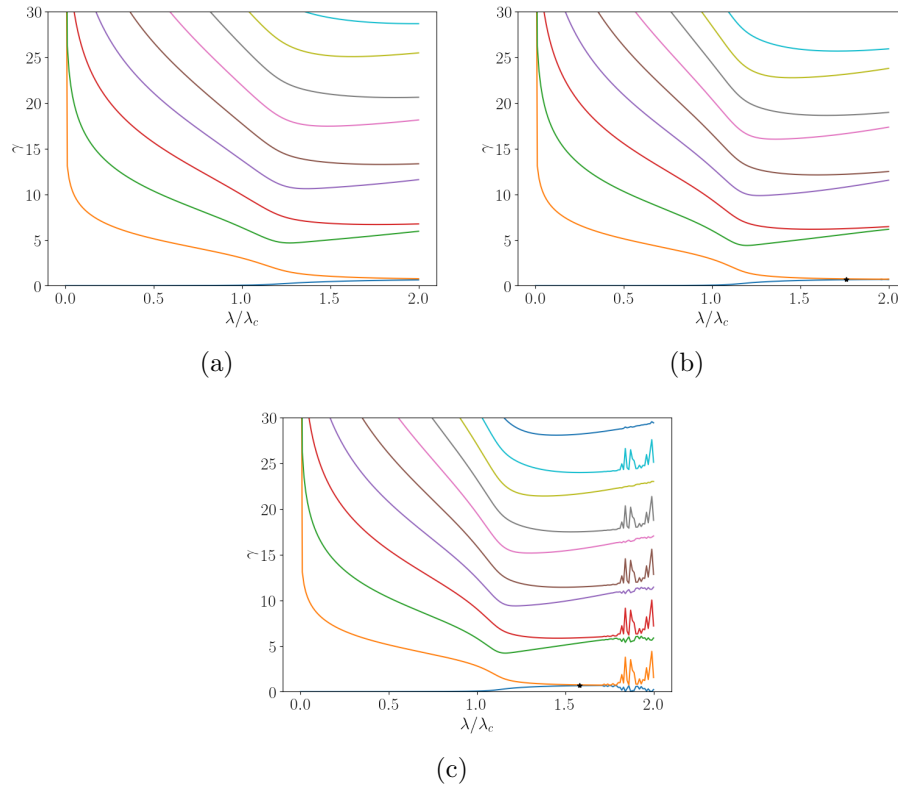


Figura 3.14: Espectro de Entrelazamiento en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = 15$  (a),  $N = 23$  (b) y  $N = 31$  (c). Observación: todos para la condición de  $\omega/\epsilon = 10,0$ .

manera similar a lo que ocurre para  $\frac{\omega}{\epsilon} = 0,1$ , aquí también se identifica un cierto patrón, como se muestra en las Figuras 3.14(a), 3.14(b) y 3.14(c) para la fase ya mencionada. Esto nos

permite suponer también en este caso la ocurrencia de algún tipo de fenómeno que perturba el espectro de entrelazamiento.

Aquí vemos como para el caso de las Figuras 3.15(a), 3.15(b) y 3.15(c) las aproximaciones presentadas en las Ec. (3.16) y (3.17) ya no serían muy buenas. Esto nos permite identificar una variación importante en cuanto al espectro de entrelazamiento presentado, puesto que esto no ocurrió en los casos anteriores. Sin embargo, para el espectro de entrelazamiento en la fase super-radiante y con  $\lambda/\lambda_c$  cercana a 1, también se observa una diferencia importante en comparación con el caso de resonancia.

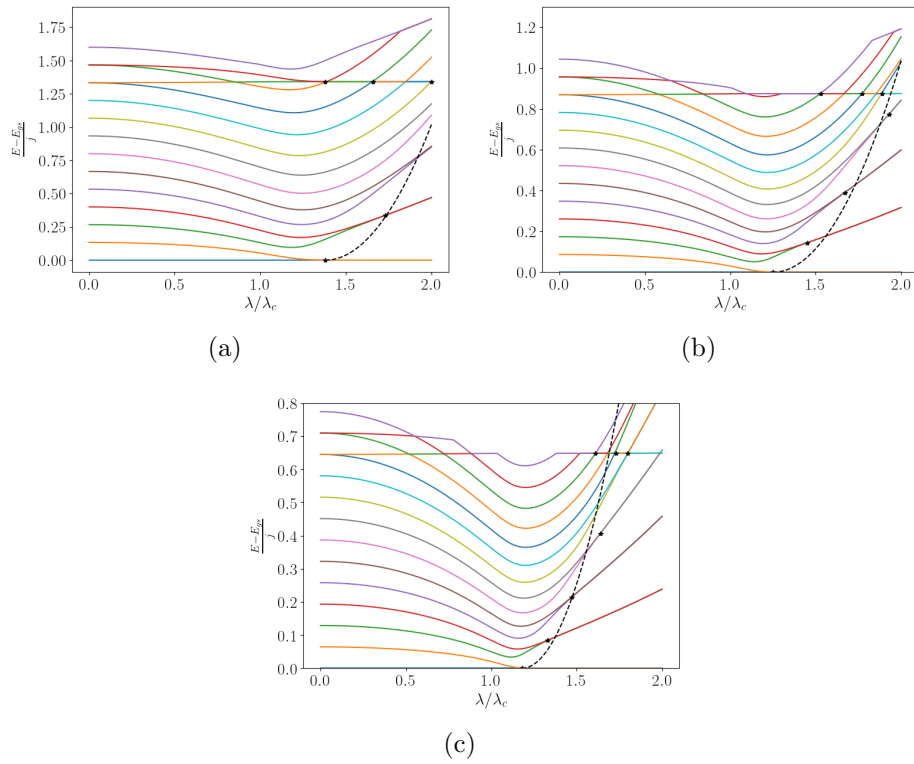


Figura 3.15: Diferencia entre el Espectro de Energías y la energía del estado base en función de  $\lambda/\lambda_c$ , para  $N = 15$  (a),  $N = 23$  (b) y  $N = 31$  (c). Para todos los valores de  $N$  solo se muestran los primeros 15 niveles de energías y todos son para la condición de  $\frac{\omega}{\epsilon} = 10,0$ .

Adicionalmente, como en el caso anterior, es importante destacar que para esta condición no fue posible realizar el análisis de la superposición de los niveles debido a la forma presentada por el espectro de entrelazamiento.

# Capítulo 4

## Consideraciones Finales

La interacción entre radiación y la materia es uno de los fenómenos naturales más intrigantes y estudiados a lo largo de la historia. En la primera parte de este trabajo de fin de máster, se realizó una recopilación y reproducción de los resultados tanto analíticos como numéricos de los últimos años sobre el modelo de Dicke. Esta reproducción y compendio de resultados componen el marco teórico del presente trabajo de fin de máster.

Por otro lado, el entrelazamiento entre sistemas cuánticos es uno de los fenómenos característicos que solo pueden ser descritos desde la perspectiva conceptual de la mecánica cuántica. En este trabajo de fin de máster proponemos una posible relación entre el espectro de energías del Hamiltoniano del sistema y el espectro de entrelazamiento. Para esto, hemos investigado el espectro de entrelazamiento de un sistema fotónico con interacción del tipo radiación-materia con el objetivo de caracterizarlo y comprender la relación entre el espectro de entrelazamiento y el espectro de energías. A través de varias simulaciones realizadas, hemos encontrado por medio de los resultados presentados en las secciones 3.2.1 y 3.2.2 algunas de las características que podrían potencialmente establecer un mapeo entre estos dos espectros. Estos resultados principalmente nos permiten identificar patrones y establecer aproximaciones que nos muestran la existencia de una relación entre características similares de cada espectro, que serían, por ejemplo, la forma que presentan los espectros para cada fase del sistema y el patrón observado en las superposiciones de los niveles para la región cercana al  $\lambda_c$  en la fase super-radiante.

Nuestros hallazgos tienen importantes implicaciones para el campo de la óptica cuántica y la teoría de la información cuántica, ya que abre caminos claros para establecer una conexión prácticamente directa entre ambas áreas considerando el caso estudiado. Sin embargo, es importante tener en cuenta algunas limitaciones de nuestro estudio, como el hecho de que aún no fue posible establecer un mapeo directo entre ambos espectros estudiados.

A pesar de estas limitaciones, nuestro trabajo abre nuevas direcciones para futuras investigaciones, que justamente puedan establecer ese mapeo directo entre ambos espectros. En particular, sería valioso explorar los mínimos observados en ambos espectros, lo cual podría

arrojar información importante para establecer el mapeo ya mencionado.





# Apéndices

## Apéndice A: Librerías, Paquetes y Código en Python

A continuación presentamos los paquetes y librerías del lenguaje de programación Python, junto con el código desarrollado para realizar las simulaciones en este trabajo.

Primeramente, presentamos el listado de las librerías de Python utilizadas para realizar ciertos cálculos y además generar todos los gráficos mostrados en este trabajo:

1. Numpy. En su versión 1.26.2
2. Pandas. En su versión 2.2.1
3. Matplotlib. En su versión 3.8.2
4. Scipy. En su versión 1.11.4

Finalmente, aquí se detalla el código utilizado para realizar las simulaciones del modelo de Dicke.

```
1 import numpy as np
2 import math
3
4 def density_distr(alpha, Nb):
5     """Funcion que recibe un numero complejo alpha y un numero de fotones
6     Nb de truncamiento de la base de Fock
7     y retorna una lista que contiene en el primer elemento un array de los
8     valores de N de la base de Fock posibles
9     hasta el Nb y en el segundo elemento contiene un array con los valores
10    de la probabilidad para cada estado.
11    Es decir, retorna la distribucion de probabilidad teorica para un dado
12    alpha y un numero de fotones Nb
13
14    Args:
15        alpha (_type_): un numero complejo
16        Nb (_type_): N de truncamiento de la base de Fock
17
18    Returns:
19        _type_: distribucion de probabilidad teorica para un dado alpha y
20        un numero de fotones Nb
```

```

16     """
17     nbs=np.arange(0,Nb+1, 1)
18     prob_n=[]
19
20     for ii in nbs:
21         prob_n.append(abs(np.exp(-abs(np.conjugate(alpha)*alpha))*(alpha
22         **(2.0*ii))*(1/float(np.math.factorial(ii))))))
23
24     return [nbs, np.array(prob_n)]
25 def derivative_order_1(x, y):
26     """Funcion que permite calcular la primera derivada dados un conjunto
27     de datos x e y
28
29     Args:
30         x (_type_): datos para la variable independiente
31         y (_type_): datos para la variable dependiente
32
33     Returns:
34         _type_: un array que contiene los datos de x y un array con los
35     correspondientes valores de y'
36     """
37     size_data = len(y) #number of data
38     h = x[1]-x[0]
39
40     deriv = np.zeros(size_data)
41     deriv[0]= (y[1]-y[0])/h
42
43     for i in range (1, size_data-1):
44         h = x[i+1]-x[i-1]
45         deriv[i]= (y[i+1]-y[i-1])/(h)
46
47     h = x[size_data-1]-x[size_data-2]
48     deriv[size_data-1]= (y[size_data-1]-y[size_data-2])/h
49     deriv=np.delete(deriv,(0,-1))
50     x=np.delete(x,(0,-1))
51     return x, deriv
52 def derivative_order_n(x, y, n_order):
53     """Funcion que permite calcular la derivada de orden n para un
54     conjunto de datos x e y
55
56     Args:
57         x (_type_): datos para la variable independiente
58         y (_type_): datos para la variable dependiente
59         n_order (_type_): orden de la derivada
60
61     Returns:
62         _type_: un array que contiene los datos de x y un array con los

```

```

correspondientes valores de y'
"""
61
62     n=1
63     while (n<=n_order):
64         x, y = derivative_order_1(x,y)
65         n=n+1
66     return x, y
67
68
69 def general_states (j_m, n):
70     """Funcion que genera un array de todos los estados posibles
71     considerando estados de la materia j_m y estados de fock n
72
73     Args:
74         j_m (_type_): estados de la materia
75         n (_type_): estados de fock
76
77     Returns:
78         _type_: un array con todos los estados posibles para los estados
79     de la materia j_m y estados de fock n dados
80     """
81     g_states = []
82     for ii in n:
83         for jj in j_m:
84             g= jj.copy()
85             g.append(ii)
86             g_states.append(g)
87             g = jj.copy()
88     return g_states
89
90 def extended_Jz(n_qubit,n_fock, parity):
91     """Funcion que permite construir el operador Jz extendido considerando
92     valores especificos de n_qubit, n_fock y de parity
93
94     Args:
95         n_qubit (_type_): numero de qubits considerados
96         n_fock (_type_): numero de truncamiento de la base de fock
97         parity (_type_): tipo de paridad seleccionada
98
99     Returns:
100         _type_: Un operados Jz extendido
101     """
102     j_m= j_m_state(n_qubit)
103     n= n_state(n_fock)
104
105     if (parity=='general'):
106         g_states = general_states(j_m,n)
107     elif(parity=='odd'):
108         g_states = odd_states(j_m,n)

```

```

106     elif(parity=='even'):
107         g_states = even_states(j_m,n)
108
109     Jz_general_state = []
110
111     g_aux= g_states.copy()
112
113     for ii in g_states:
114         row_h = []
115         for jj in g_aux:
116             if (ii[0]==jj[0]) and (ii[1]==jj[1]) and (ii[2]==jj[2]):
117                 jp_value= jj[1]
118             else:
119                 jp_value=0.0
120             row_h.append(jp_value)
121             jp_value=0.0
122         Jz_general_state.append(row_h)
123
124     Jz_general_state = np.array(Jz_general_state)
125     return Jz_general_state
126
127 def even_states (j_m, n):
128     """Funcion que genera un array de todos los estados de paridad par
129     posibles considerando estados de la materia j_m y estados de fock n
130     Args:
131         j_m (_type_): estados de la materia
132         n (_type_): estados de fock
133
134     Returns:
135         _type_: un array que contiene todos los estados de paridad par
136         para los estados de la materia j_m y estados de fock n dados
137     """
138     g_states = []
139     for ii in n:
140         for jj in j_m:
141             g= jj.copy()
142             g.append(ii)
143             if ((sum(g))%2==0):
144                 g_states.append(g)
145             g = jj.copy()
146     return g_states
147
148 def odd_states (j_m, n):
149     """Funcion que genera un array de todos los estados de paridad impar
150     posibles considerando estados de la materia j_m y estados de fock n
151
152     Args:
153         j_m (_type_): estados de la materia
154         n (_type_): estados de fock

```

```

152
153     Returns:
154         _type_: un array que contiene todos los estados de paridad impar
para los estados de la materia j_m y estados de fock n dados
155     """
156     g_states = []
157     for ii in n:
158         for jj in j_m:
159             g= jj.copy()
160             g.append(ii)
161             if ((sum(g))%2!=0):
162                 g_states.append(g)
163             g = jj.copy()
164     return g_states
165
166 def j_m_state(n_qubit):
167     """Funcion que genera todos los estados de la materia posibles para un
168     dado valor de numero de qubits
169
170     Args:
171         n_qubit (_type_): numero de qubits
172
173     Returns:
174         _type_: un array que contiene todos los estados de la materia j_m
175     """
176     j=n_qubit/2
177     m_z_states= []
178     j_m_z=[]
179
180     m_z_state= []
181
182     if j==0:
183         j_test = j
184     else:
185         j_test = (-j)
186
187     while(j_test<=j):
188         m_z_state.append(j_test)
189         j_m_z.append([j, j_test])
190         j_test= j_test + 1
191
192     m_z_states.append(m_z_state)
193
194     return j_m_z
195
196 def jm_basis(i,n_q):
197     """Funcion que un estado i especifico entre los estados de la materia
198     posibles para un dado valor de numero de qubits

```

```

198     Args:
199         i (_type_): estado especifico
200         n_q (_type_): numero de qubits
201
202     Returns:
203         _type_: un array que representa el estado i especifico de la
materia
204     """
205     j=n_q/2
206     basis_i = np.zeros(( int(2*j+1),1))
207     basis_i[i] = 1
208     return basis_i
209
210 def fock(i,N):
211     """Funcion que un estado i especifico entre los estados de la
radiacion posibles para un dado valor de truncamiento de la base de
fock
212
213     Args:
214         i (_type_): estado especifico
215         N (_type_): numero de truncamiento de la base de fock
216
217     Returns:
218         _type_: un array que representa el estado i especifico de la
radiacion
219     """
220     f_state = np.zeros((N+1,1))
221     f_state[i] = 1
222     return f_state
223
224 def n_state(n_fock):
225     """Funcion que devuelve un array con los estados de Fock posibles para
un dado numero de truncamiento de Fock
226
227     Args:
228         n_fock (_type_): numero de truncamiento de la base de fock
229
230     Returns:
231         _type_: un array con los estados de Fock posibles para un dado
numero de truncamiento de Fock
232     """
233     n_states=[*range(n_fock+1)]
234     return n_states
235
236
237 def identity_field_op(n_fock):
238     """Funcion que devuelve el operador identidad para la radiacion para
un dado numero de truncamiento de Fock
239

```

```

240     Args:
241         n_fock (_type_): numero de truncamiento de Fock
242
243     Returns:
244         _type_: Operador identidad de la radiacion
245     """
246     Id_f = np.identity(n_fock+1)
247     return Id_f
248
249 def identity_matter_op(n_qubit):
250     """Funcion que devuelve el operador identidad para la materia para un
251     dado numero de qubits
252
253     Args:
254         n_qubit (_type_): numero de qubits
255
256     Returns:
257         _type_: Operador identidad para la materia para un dado numero de
258         qubits
259     """
260     j_m = j_m_state(n_qubit)
261     Id_matt = np.identity( len(j_m) )
262     return Id_matt
263
264 def extended_n(n_qubit, n_fock, parity):
265     """Funcion que devuelve el operador n para un dado numero de qubits,
266     numero de truncamiento de Fock y un tipo de paridad
267
268     Args:
269         n_qubit (_type_): numero de qubits
270         n_fock (_type_): numero de truncamiento de Fock
271         parity (_type_): tipo de paridad
272
273     Returns:
274         _type_: Operador n
275     """
276     j_m= j_m_state(n_qubit)
277     n= n_state(n_fock)
278     l_n= []
279     if (parity=='general'):
280         g_states = general_states(j_m, n)
281     elif(parity=='odd'):
282         g_states = odd_states(j_m, n)
283     elif(parity=='even'):
284         g_states = even_states(j_m, n)
285
286     for v in g_states:
287         l_n.append(v[2])
288     extended_n_even = np.diag(np.array(l_n))

```



```

286     return extended_n_even
287
288
289 def def_gen_state(g_states, j_init, m_z_init, n_fock_init):
290     """Funcion que permite seleccionar un estado especifico de entre todos
291     los estados disponibles
292
293     Args:
294         g_states (_type_): estados disponibles
295         j_init (_type_): valor de j de interes
296         m_z_init (_type_): valor de m_z de interes
297         n_fock_init (_type_): numero del estado de Fock de interes
298
299     Returns:
300         _type_: estado seleccionado
301     """
302     for jj, ii in enumerate(g_states):
303         if (ii[0]==j_init) and (ii[1]==m_z_init) and (ii[2]==n_fock_init):
304             n_state_selected=jj
305     return n_state_selected
306
307 def H_DICKE_MATRIX(g_states, n_qubit, epsilon=1, lamb=1, w_c=1):
308     """Funcion que calcula todos los elementos del Hamiltoniano para los
309     estados especificos de interes
310
311     Args:
312         g_states (_type_): estados especificos de interes
313         n_qubit (_type_): numero de qubits
314         epsilon (int, optional): energia entre los niveles de la materia.
315         Por defecto: 1.
316         lamb (int, optional): Parametro de interaccion. Por defecto: 1.
317         w_c (int, optional): Frecuencia de la cavidad. Por defecto: 1.
318
319     Returns:
320         _type_: Hamiltoniano de Dicke
321     """
322     H_dicke = []
323
324     g_aux= g_states.copy()
325
326     for ii in g_states:
327         row_h = []
328         for jj in g_aux:
329             if (ii[0]==jj[0]) and (ii[1]==jj[1]) and (ii[2]==jj[2]):
330                 h_value = (epsilon)*jj[1] + jj[2]*w_c
331             elif (ii[0]==jj[0]) and (ii[1]==jj[1]-1) and (ii[2]==jj[2]-1):
332                 h_value = lamb*(math.sqrt(ii[2]+1)*math.sqrt((ii[0]*(ii
333 [0]+1))-(ii[1]*(ii[1]+1))))*(1/math.sqrt(n_qubit))
334             elif (ii[0]==jj[0]) and (ii[1]==jj[1]+1) and (ii[2]==jj[2]+1):

```

```

331         h_value = lamb*(math.sqrt(ii[2])*math.sqrt((ii[0]*(ii
[0]+1))-(ii[1]*(ii[1]-1))))*(1/math.sqrt(n_qubit))
332         elif (ii[0]==jj[0]) and (ii[1]==jj[1]-1) and (ii[2]==jj[2]+1):
333             h_value = lamb*(math.sqrt(ii[2])*math.sqrt((ii[0]*(ii
[0]+1))-(ii[1]*(ii[1]+1))))*(1/math.sqrt(n_qubit))
334             elif (ii[0]==jj[0]) and (ii[1]==jj[1]+1) and (ii[2]==jj[2]-1):
335                 h_value = lamb*(math.sqrt(ii[2]+1)*math.sqrt((ii[0]*(ii
[0]+1))-(ii[1]*(ii[1]-1))))*(1/math.sqrt(n_qubit))
336                 row_h.append(h_value)
337                 h_value=0.0
338
339             H_dicke.append(row_h)
340
341         H_dicke = np.array(H_dicke)
342         return H_dicke
343
344 #Dimension: (N_q +1)x(N_f+1)
345 def H_DICKE(n_qubit, n_fock, epsilon=1, lamb=1, w_c=1, parity='general'):
346     """Funcion que permite la construccion del Hamiltoniano de Dicke para
un dado valor de numero de qubits, numero de truncamiento de Fock,
347     parametros del sistema (epsilon, lambda, omega) y el tipo de paridad
348
349     Args:
350         n_qubit (_type_): numero de qubits
351         n_fock (_type_): numero de truncamiento de Fock
352         epsilon (int, optional): energia entre los niveles de la materia.
Por defecto: 1.
353         lamb (int, optional): Parametro de interaccion. Por defecto: 1.
354         w_c (int, optional): Frecuencia de la cavidad. Por defecto: 1.
355     """
356
357     j_m = j_m_state(n_qubit)
358
359     n= n_state(n_fock)
360
361     if (parity=='general'):
362         g_states = general_states(j_m, n)
363     elif(parity=='odd'):
364         g_states = odd_states(j_m, n)
365     elif(parity=='even'):
366         g_states = even_states(j_m, n)
367
368     H_dicke = H_DICKE_MATRIX(g_states, n_qubit,epsilon, lamb, w_c)
369
370     return H_dicke

```

# Bibliografía

- [1] J. Larson and T. Mavrogordatos, *The Jaynes–Cummings Model and Its Descendants: Modern research directions* (IOP Publishing, 2021).
- [2] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
- [3] C. Emary and T. Brandes, *Phys. Rev. E* **67**, 066203 (2003).
- [4] K. Hepp and E. H. Lieb, *Annals of Physics* **76**, 360 (1973).
- [5] P. Kirton, M. M. Roses, J. Keeling, and E. G. Dalla Torre, *Advanced Quantum Technologies* **2** (2018), 10.1002/qute.201800043.
- [6] Y. K. Wang and F. T. Hioe, *Phys. Rev. A* **7**, 831 (1973).
- [7] T. Holstein and H. Primakoff, *Phys. Rev.* **58**, 1098 (1940).
- [8] E. Ressayre and A. Tallet, *Phys. Rev. A* **11**, 981 (1975).
- [9] R. F. Bishop and A. Vourdas, *Phys. Rev. A* **50**, 4488 (1994).
- [10] P. R. Eastham and P. B. Littlewood, *Phys. Rev. B* **64**, 235101 (2001).
- [11] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 2011).
- [12] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
- [13] T. Guhr, A. Müller–Groeling, and H. A. Weidenmüller, *Physics Reports* **299**, 189–425 (1998).
- [14] G. Casati, B. V. Chirikov, and I. Guarneri, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1350 (1985).
- [15] H. Wu, M. Vallières, D. H. Feng, and D. W. L. Sprung, *Phys. Rev. A* **42**, 1027 (1990).
- [16] B. Georgeot and D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5129 (1998), arXiv:cond-mat/9807123 .

- [17] F. Dimer, B. Estienne, A. S. Parkins, and H. J. Carmichael, [Phys. Rev. A \*\*75\*\*, 013804 \(2007\)](#).
- [18] Z. Zhiqiang, C. H. Lee, R. Kumar, K. J. Arnold, S. J. Masson, A. S. Parkins, and M. D. Barrett, [Optica \*\*4\*\*, 424 \(2017\)](#).
- [19] P. Domokos and H. Ritsch, [Phys. Rev. Lett. \*\*89\*\*, 253003 \(2002\)](#).
- [20] A. T. Black, H. W. Chan, and V. Vuletić, [Phys. Rev. Lett. \*\*91\*\*, 203001 \(2003\)](#).
- [21] D. Nagy, G. Kónya, G. Szirmai, and P. Domokos, [Phys. Rev. Lett. \*\*104\*\*, 130401 \(2010\)](#).
- [22] K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke, and T. Esslinger, [Nature \*\*464\*\*, 1301 \(2010\)](#).
- [23] J. Klinder, H. Keßler, M. Wolke, L. Mathey, and A. Hemmerich, [Proceedings of the National Academy of Sciences \*\*112\*\*, 3290–3295 \(2015\)](#).
- [24] V. D. Vaidya, Y. Guo, R. M. Kroeze, K. E. Ballantine, A. J. Kollár, J. Keeling, and B. L. Lev, [Phys. Rev. X \*\*8\*\*, 011002 \(2018\)](#).
- [25] D. Nagy, G. Szirmai, and P. Domokos, [Phys. Rev. A \*\*84\*\*, 043637 \(2011\)](#).
- [26] B. Öztop, M. Bordyuh, Özgür E Müstecaplıoğlu, and H. E. Türeci, [New Journal of Physics \*\*14\*\*, 085011 \(2012\)](#).
- [27] E. G. D. Torre, S. Diehl, M. D. Lukin, S. Sachdev, and P. Strack, [Phys. Rev. A \*\*87\*\*, 023831 \(2013\)](#).
- [28] A. Mezzacapo, U. Las Heras, J. S. Pedernales, L. DiCarlo, E. Solano, and L. Lamata, [Scientific Reports \*\*4\*\* \(2014\), 10.1038/srep07482](#).
- [29] L. Lamata, [Scientific Reports \*\*7\*\* \(2017\), 10.1038/srep43768](#).
- [30] I. Aedo and L. Lamata, [Phys. Rev. A \*\*97\*\*, 042317 \(2018\)](#).
- [31] M. Gross and S. Haroche, [Physics Reports \*\*93\*\*, 301 \(1982\)](#).
- [32] B. Garraway, [Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences \*\*369\*\*, 1137 \(2011\)](#).
- [33] H. Ritsch, P. Domokos, F. Brennecke, and T. Esslinger, [Rev. Mod. Phys. \*\*85\*\*, 553 \(2013\)](#).
- [34] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* (Cambridge University Press, 2010).
- [35] N. Lambert, C. Emary, and T. Brandes, [Phys. Rev. Lett. \*\*92\*\*, 073602 \(2004\)](#).

- [36] D. Harlow, [Reviews of Modern Physics](#) **88** (2016), [10.1103/revmodphys.88.015002](#).
- [37] F. Javier Gómez-Ruiz, F. Rodríguez, L. Quiroga, and N. F. Johnson, «Vulnerability of quantum information systems to collective manipulation,» in *Quantum Information Science - Recent Advances and Computational Science Applications [Working Title]* (IntechOpen, 2024).
- [38] F. J. Gómez-Ruiz, O. L. Acevedo, F. J. Rodríguez, L. Quiroga, and N. F. Johnson, [Scientific Reports](#) **13** (2023), [10.1038/s41598-023-46256-z](#).
- [39] F. J. Gómez-Ruiz, O. L. Acevedo, F. J. Rodríguez, L. Quiroga, and N. F. Johnson, [Frontiers in Physics](#) **6** (2018), [10.3389/fphy.2018.00092](#).
- [40] F. J. Gómez-Ruiz, J. J. Mendoza-Arenas, O. L. Acevedo, F. J. Rodríguez, L. Quiroga, and N. F. Johnson, [Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics](#) **51**, [024001](#) (2017).
- [41] F. Gómez-Ruiz, O. Acevedo, L. Quiroga, F. Rodríguez, and N. Johnson, [Entropy](#) **18**, [319](#) (2016).
- [42] J. T. Schneider, S. J. Thomson, and L. Sanchez-Palencia, [Physical Review B](#) **106** (2022), [10.1103/physrevb.106.014306](#).