



Universidad de Valladolid

**Facultad de Ciencias Económicas
y Empresariales**

Trabajo de Fin de Grado

**Grado en Administración y Dirección
de Empresas**

**Teoría de Juegos y sus
Aplicaciones en las
Subastas**

Presentado por:

Adrián Hernández Cordero

Valladolid, a XX de julio de 2023

RESUMEN

La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas y la economía que se encarga de analizar situaciones estratégicas en las que los participantes (denominados “jugadores”) toman decisiones y los resultados no solo dependen de sus propias acciones sino también de las del resto de participantes. Esta teoría se aplica a distintas situaciones de la vida real, y las subastas son un ejemplo destacado de aplicación de Teoría de Juegos. A lo largo de la historia las subastas han sido utilizadas para facilitar la compraventa de una variedad de bienes y servicios. Estas subastas han evolucionado dando lugar a diferentes tipos de subastas, cada una con sus propias reglas. En este trabajo se analiza la evolución de dichas subastas, los tipos que existen, la teoría de las subastas, el Modelo de Referencia y se citan algunas de las aplicaciones de las subastas, destacando el ejemplo de las subastas de licencias de telefonía móvil de tercera y cuarta generación.

PALABRAS CLAVE: Teoría de Juegos, Teoría de las Subastas, Modelo de Referencia.

ABSTRACT

Game Theory is a mathematical and economic branch that is responsible for analyzing strategic situations in which the participants (called players) make decisions. The results depend not only on their own actions but also on the actions of the remaining participants. This theory is applied in several real-life situations, for instance, the auctions.

Throughout history, the auctions have been used to make easy the buying and selling of a goods and services variety. These auctions have evolved, and these have given rise to different types of auctions, each one with its own rules. It is analyzed the auctions evolution, the existing types, the Auction Theory, and the Reference Model. Also, this TFG makes reference to auction applications highlighting the example of fourth-generation mobile phone license auctions.

KEYWORDS: Game Theory, Auction Theory, Reference Model.

ÍNDICE

RESUMEN	1
ABSTRACT	1
ÍNDICE	3
INTRODUCCIÓN	5
OBJETIVOS DEL TRABAJO	5
ESTRUCTURA DEL PROYECTO	6
1. TEORÍA DE JUEGOS	7
1.1. Historia y evolución de la teoría de juegos	7
1.2. Elementos de un juego	8
1.3. Clasificación de los juegos	9
1. Juegos cooperativos	9
2. Los juegos no cooperativos	10
1.4. Conceptos de solución	12
1. Soluciones de un juego basados en argumentos de dominación	13
2. Solución de un juego basado en el equilibrio de Nash.....	14
2. APLICACIÓN DE LA TEORIA DE JUEGOS A LAS SUBASTAS	16
2.1. Tipos básicos de subastas	16
2.2. Teoría de la subasta	19
2.3. El Modelo de Referencia	20
2.4. Las estrategias de equilibrio	21
2.5. El Teorema del Ingreso Equivalente	24
3. APLICACIONES DE LAS SUBASTAS	25
3.1. Subastas de licencias de telefonía móvil de tercera generación	25
3.2. Subastas de licencias de telefonía móvil de cuarta generación	26
4. CONCLUSIONES	28
BIBLIOGRAFÍA	29

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ejemplo representación matriz de pagos	9
Tabla 2. Dilema del prisionero	12
Tabla 3. Ejemplo de eliminación restrictiva	13
Tabla 4. Ejemplo eliminación iterativa estricta	14
Tabla 5. Resultado 1 de eliminación iterativa estricta	14
Tabla 6. Resultado 2 de eliminación iterativa estricta	14

INTRODUCCIÓN

La Teoría de Juegos es un campo de estudio en las ciencias sociales, y de las matemáticas, que se centra en el análisis de las diferentes situaciones estratégicas en las que las decisiones de un individuo se van a ver afectadas por las decisiones del resto. Puede considerarse que *“Theory of Games and Economic Behavior”*, de John von Neumann y Oskar Morgenstern publicada en 1944, es una de las publicaciones relevantes que dio origen a esta disciplina.

La Teoría de Juegos tiene una gran variedad de aplicaciones en diferentes campos entre los que se encuentran: la economía, la política y la biología entre otros. Es una herramienta esencial y fundamental para entender el comportamiento humano y las diferentes interacciones que pueden tener los individuos.

Dentro de esta variedad de aplicaciones de la Teoría de Juegos, una de las más importantes es la Teoría de las Subastas. Las subastas son procesos de compraventa en los cuales, los compradores compiten entre ellos para adquirir un bien o un servicio. En este marco, la Teoría de Juegos permite estudiar estrategias, comportamientos y resultados en los diferentes tipos de subastas que existen y, gracias a esto, podremos ayudar a crear subastas más eficientes y justas, que beneficien tanto al comprador como al vendedor.

Las subastas más antiguas son las subastas de un único bien en las que el mencionado bien, se vende entre un gran número de compradores, con el objetivo de que el vendedor obtenga el precio más alto. Por otro lado, existen también las subastas de múltiples bienes que son aquellas cuyo objetivo es vender múltiples unidades de un bien homogéneo. Las subastas, en la actualidad, cobran gran importancia y es por eso uno de los métodos más eficientes en la compraventa de productos que utilizan tanto las empresas como los propios individuos.

OBJETIVOS DEL TRABAJO

Este trabajo tiene como objetivo resaltar la importancia que tiene la Teoría de Juegos para entender y modelar situaciones estratégicas en la vida real, así como explorar las aplicaciones prácticas en el contexto concreto de las subastas.

ESTRUCTURA DEL PROYECTO

El presente trabajo, se estructura en 3 capítulos.

En el capítulo 1 se define la teoría de juegos, su evolución histórica, los distintos elementos que tiene un juego y sus diferentes tipos. Así como los distintos conceptos de solución.

En el capítulo 2 se hace una breve introducción a las subastas y su evolución histórica. Se describen, además, los diferentes tipos de subastas, y se aborda la Teoría de las Subastas y el modelo más extendido de esta teoría, el Modelo de Referencia.

En el capítulo 3 se describen los diferentes usos que tienen las subastas y su aplicación a un caso real. Por último, en el capítulo 4, se indican las conclusiones más relevantes asociadas al trabajo realizado.

1. TEORÍA DE JUEGOS

Para empezar a explicar lo que es la Teoría de Juegos, primero tendremos que empezar por definir que es un juego. Un juego en lenguaje cotidiano hace referencia a una actividad en la que los participantes, sometidos a una serie de reglas vinculantes a cumplir, intentan conseguir una ganancia, aunque también se puede dar el caso de que se produzca una derrota. El resultado del juego no va a depender de un único jugador, sino que también va a depender de las acciones que realicen los demás jugadores. Esta es la característica más importante de los juegos y la que más valor tiene a la hora de su estudio. Muchos de los acontecimientos de las ciencias sociales o de la propia economía de un país o del mundo pueden ser descritos mediante modelos tomados de los juegos de estrategia. Por tanto, la Teoría de Juegos se ocupa del análisis riguroso y sistemático de estas diferentes situaciones.

1.1. Historia y evolución de la teoría de juegos

La Teoría de Juegos es una rama de la economía y de las matemáticas la cual se encarga de analizar las decisiones que toman los individuos en las diferentes situaciones planteadas.

La Teoría de juegos fue creada por el matemático John Von Neumann y el economista Oskar Morgenstern con la publicación de su libro "*Theory of Games and Economic Behaviour*" en 1944. Años antes de la publicación del mismo, concretamente en 1928, Neumann ya había expuesto los fundamentos en su artículo "*Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*", por lo que podemos decir que la Teoría de juegos nace realmente en 1928.

Esta fue la primera obra en la que explica de manera rigurosa y exhaustiva el concepto de juego, estrategia, resolución del propio juego y la forma en la que se representan las preferencias de los jugadores. Además, no solo se estudiaron los juegos en los que los intereses de los jugadores son opuestos, sino que también estudiaron aquellos juegos en la que la ganancia de un jugador no supone, necesariamente, la pérdida del resto.

Años más tarde, en 1950, Merrill M. Flood junto con Melvin Dresher plantearon el conocido modelo del dilema del prisionero. El nombre "dilema del prisionero" se

popularizó gracias a un artículo escrito por Albert W. Tucker en la revista “Annals of Mathematics”. Dicho modelo, es un problema de la Teoría de Juegos en el que dos o más jugadores intentan elegir de manera independiente la mejor alternativa a seguir, pero terminan en una posición peor que la que hubieran alcanzado si hubieran cooperado desde el principio (más adelante se explica con más detalle).

Para terminar, no podemos dejar de mencionar a Jonh Forbes Nash y su conocido teorema, “El teorema del equilibrio de Nash” que fue publicado en su artículo titulado “Equilibrium Points in n-Person Games”

Jonh Forbes Nash desarrolló muchos modelos matemáticos que se centraban principalmente en los equilibrios múltiples. También, desarrollo el célebre teorema conocido como el equilibrio de Nash, el cual, identifica distintos perfiles de estrategias en los que ningún jugador tiene incentivos para desviarse, dado las acciones del resto.

1.2. Elementos de un juego.

En este apartado vamos a explicar los diferentes elementos que intervienen en un juego:

- **Jugadores:** Son los diferentes participantes dentro del juego que lo que buscan es maximizar su utilidad con las diferentes tomas de decisiones.
- **La información:** Hay determinados juegos en los que lo jugadores disponen de toda la información (información completa), pero también existen juegos en los que la información es desconocida (información incompleta). También los jugadores pueden conocer todo el desarrollo del juego (información perfecta) o se puede desconocer alguna jugada (información imperfecta).
- **Acciones de cada jugador:** Son las diferentes decisiones que toma cada jugador en su turno, dichas acciones pueden ser finitas o infinitas, dependiendo del cardinal del conjunto de acciones.
- **Resultados del juego:** Son las diferentes formas en que puede finalizar el juego. Cada resultado lleva consigo una serie de consecuencias para cada jugador, que normalmente se explicitan en forma de pagos.
- **Pagos:** Es la utilidad que cada jugador atribuye al resultado obtenido.

- **Estrategia:** Son los planes completos de acciones que cada jugador tiene para participar en el juego.
- **Perfiles de estrategias:** Hace referencia al conjunto de estrategias de cada jugador.

Vamos a ver cuáles serían los diferentes elementos aplicados a un ejemplo.

Supongamos que dos jugadores, 1 y 2, están apostando en el resultado de lanzar una moneda. Ambos jugadores eligen de antemano si quieren apostar por cara o por cruz. Si la moneda cae del lado que eligieron, ganan, de lo contrario, pierden.

- **Jugadores:** Jugador 1 y jugador 2.
- **Información:** La información es completa.
- **Acciones:** Cara o cruz.
- **Resultados:** Los resultados de los juegos son que ambos jugadores elijan cara, que ambos elijan cruz o que un jugador elija cara y el otro cruz.
- **Pagos:** Los pagos son +5 o -5.

La matriz de pagos podríamos representarla de la siguiente forma:

	CARA	CRUZ
CARA	5, -5	-5, 5
CRUZ	-5, 5	5, -5

Tabla 1. Ejemplo representación matriz de pagos

1.3. Clasificación de los juegos

Los juegos se clasifican atendiendo a diferentes criterios teniendo en cuenta las características de las situaciones que se van a modelizar. Una primera clasificación va a ser diferenciar entre juegos cooperativos y juegos no cooperativos.

1. Juegos cooperativos

En el enfoque cooperativo se analizan las distintas posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo vinculante sobre qué decisiones va a tomar cada jugador, por ejemplo, que se realice un acuerdo en los pagos. De esta manera, al tener un acuerdo previo, conseguir el beneficio óptimo va a resultar mucho más

sencillo. Por tanto, se trata de estudiar tanto las decisiones, como la forma en que actúa un grupo de individuos sin que haga falta detenerse en las acciones individuales.

La forma de representación es la forma coalicional debido a que, como hemos explicado en apartados anteriores, en los juegos cooperativos se parte de que entre los jugadores pueden existir acuerdos (coalición), por tanto, se dará más importancia a los comportamientos colectivos que a las acciones individuales de cada jugador.

2. Los juegos no cooperativos

Entendemos por juegos no cooperativos aquellos en los cuales se van a analizar qué decisiones va a tomar cada jugador sin tener ese acuerdo previo citado anteriormente.

Los juegos no cooperativos pueden, a su vez, clasificarse en: juegos estáticos o juegos dinámicos, así como en juegos con o sin información completa.

- Juegos estáticos: cada jugador va a tomar las decisiones sin saber lo que han hecho los demás.
- Juegos dinámicos: se puede llegar a dar el caso de que un jugador conozca alguna decisión antes de decidir la suya propia.
- Juegos con información completa: hace referencia a un tipo específico de juego en el cual cada jugador posee conocimiento completo y perfecto sobre las acciones y preferencias de los demás jugadores.
- Juegos con información incompleta: existe algún jugador que no conoce alguna de estas consecuencias.

La representación hace referencia a las formas en las que se puede describir un juego pudiendo ser estratégica (forma normal) o extensiva.

- La representación de un juego en forma extensiva: En un juego en forma extensiva hay que detallar los siguientes aspectos:
 - Los jugadores que intervienen en el juego.

- Los nodos que corresponden a las diferentes situaciones de elección de los jugadores, los cuales dan lugar a nuevos nodos o al final del juego.
 - El conjunto de acciones, que son las que enlazan un nodo con otro y que hacen referencia a las elecciones de cada jugador.
 - Los pagos, o cantidades que recibe cada jugador por los diferentes resultados finales del juego.
- Por su parte, la representación de un juego en forma normal se centra en precisar quiénes son los jugadores, que estrategias tiene cada uno y los pagos finales.

En el caso que haya dos jugadores con un número finito de estrategias, la representación en forma normal se lleva a cabo con una doble matriz (bimatriz) donde se incluyen los elementos mencionados anteriormente.

Un ejemplo clásico de juego no cooperativo lo constituye el dilema del prisionero, este se basa en el hecho de que dos personas han cometido un delito, se les captura e interroga por separado y se les muestran diferentes alternativas sobre su circunstancia dependiendo de la posible contestación del compañero:

- Alternativa 1 – Ambos colaboren y confiesen: En ese caso, se les aplicara a ambos una condena de “5” años.
- Alternativa 2 – No colaboren y por tanto no confiesen el delito: En este supuesto, se les aplicara una pequeña condena de 1 año a ambos jugadores.
- Alternativa 3 – Uno confiese y el otro no: El que confiesa es puesto en libertad y el otro recibirá la totalidad de la condena que asciende a 20 años.

Parte fundamental de los que elijan los prisioneros pertenece al hecho de que a cada uno se les indica que su compañero ya confesó. Observémoslo con un ejemplo numérico:

- Dos jugadores: A y B.
- Estrategias:

- Cooperar entre ambos y confesar: condena de 5 años para cada uno.
- No cooperar y no confesar: condena de 1 año para cada uno.
- Uno confiesa y el otro no: El que confiesa queda libre y el otro recibirá 20 años de condena.

		Jugador B	
		Confesar	No confesar
Jugador A	Confesar	-5,-5	0,-20
	No confesar	-20,0	-1,-1

Tabla 2. Dilema del prisionero

1.4. Conceptos de solución

En matemáticas la palabra solución tiene un significado claro debido a que ésta trata de encontrar una decisión óptima para cada agente, es decir, aquella que más le conviene a cada uno de ellos con respecto al juego que enfrentan.

Pero en un juego esta situación no es tan sencilla, porque por lo general cada agente o individuo puede identificar cuáles son los resultados óptimos para él pero el resultado final del juego no solo depende de él, sino que también influyen las decisiones de los demás jugadores.

En conclusión, se trata de definir una solución como el conjunto de perfiles de estrategias tal que es razonable pensar que los jugadores tomarán decisiones que pertenezcan a dicho conjunto, y se le denomina concepto de solución de un juego a aquel procedimiento que permita obtener de manera clara y bien argumentada una solución o decisión final.

Existen distintos conceptos de solución basados en dos clases de argumentos:

- Argumentos de dominación.
- Argumentos de equilibrio.

1. Soluciones de un juego basados en argumentos de dominación

Decimos que una acción de un jugador en un juego domina a otra acción de dicho jugador si la primera le proporciona unos pagos mayores que la segunda, con independencia de las decisiones que tomen el resto de jugadores.

Teniendo en cuenta las posibilidades que posee un individuo en un juego, elegirán aquella estrategia que le proporcione los mayores pagos.

Existen básicamente, dos métodos de eliminación de estrategias dominadas:

a) Eliminación Iterativa Estricta (EIE)

Este concepto de solución tiene dos etapas:

- **Primera etapa:** Cada jugador elimina todas las estrategias estrictamente dominadas en el juego inicial, "G", y construirá una nueva matriz reducida de juego, G_1 . Una vez realizada la eliminación, esta nueva matriz se pasa a la segunda etapa.
- **Segunda etapa:** Se realiza el mismo proceso con G_1 , y se continúan eliminando estrategias estrictamente dominadas hasta que no se puedan eliminar más. El juego termina cuando ya no quedan para ningún jugador estrategias que eliminar.

El problema que tiene este proceso es que no siempre va a haber estrategias estrictamente dominadas que se puedan eliminar, lo que conduce a que no se pueda reducir por dominancia el juego original.

A continuación, se muestra un ejemplo con una tabla:

	a	b
A	2,3	5,6
B	4,8	1,3

Tabla 3. Ejemplo de eliminación restrictiva

b) Eliminación Iterativa Débil (EID)

Este concepto parte de la misma base que el anterior, pero aplicando una dominación débil (se permite el mayor o igual, en lugar del mayor estricto), lo que hará que el proceso de eliminación sea más efectivo, actuando en casos en el que el anterior proceso no hubiera podido aplicarse.

Se puede explicar este proceso como un complemento del anterior para poder cubrir más casos.

Tiene también dos etapas:

- **Primera etapa:** Cada jugador elimina todas las estrategias débilmente dominadas en el juego inicial, “G”, y construirá una nueva matriz reducida de juego que llamaremos G_1 . Una vez realizada la eliminación, esta nueva matriz se pasa a la segunda etapa.
- **Segunda etapa:** Se realiza el mismo proceso con G_1 y se continúa eliminando estrategias débilmente dominadas hasta que no se puedan eliminar más. El juego termina cuando ya no quedan para ningún jugador estrategias débilmente dominadas.

Si bien por Eliminación Iterativa Estricta, el resultado final no depende del proceso de eliminación seguido, en el caso de la Eliminación Iterativa Débil, se puede llegar a resultados distintos tras la eliminación. A continuación, se muestra un ejemplo:

	I	D
A	4,2	5,2
B	4,6	3,5

Tabla 4. Ejemplo eliminación iterativa estricta

En este ejemplo se ve claramente que podemos obtener el siguiente resultado final:

	I	D
A	4,2	5,2

Tabla 5. Resultado 1 de eliminación iterativa estricta

Pero también podemos obtener otro resultado diferente e igual de válido como es el siguiente:

	I	D
B	4,6	3,5

Tabla 6. Resultado 2 de eliminación iterativa estricta

2. Solución de un juego basado en el equilibrio de Nash

La teoría se desarrolla en el año 1951, cuando John Forbes Nash logró desarrollar una idea que proporciona una solución en los juegos en los cuales participan dos o más jugadores. De todos los conceptos de solución mencionados hasta ahora, el

equilibrio de Nash es el único que garantiza la existencia de solución para juegos finitos o infinitos.

Se entiende por equilibrio de Nash a aquel conjunto de estrategias en el que los individuos que participan en el juego tienen la mejor combinación de estrategias posibles, ya que se trata de la mejor decisión que cada jugador podría haber tomado, dadas las decisiones del resto de jugadores. Con el fin de obtener el equilibrio de Nash. Se suprimen previamente las estrategias dominadas de cada jugador, ya que este proceso, EIE, no elimina ningún equilibrio de Nash.

Nash propone soluciones tanto para juegos en forma estática como para juegos en forma dinámica.

a) Equilibrio de Nash en juegos en forma estática

Se trata de juegos en los cuales los jugadores toman decisiones simultáneamente, es decir, cada jugador decide sin tener en cuenta las decisiones del resto de participantes.

b) Equilibrio de Nash en juegos en forma dinámica

Este tipo de juegos implica la toma de decisiones en diferentes momentos. Los juegos dinámicos se dividen en juegos secuenciales y juegos repetitivos.

- En los juegos secuenciales el primer participante toma las decisiones y luego el/los demás toman la suya, de forma secuencial.
- Los juegos repetidos son aquellos en los cuales se repite el juego a lo largo del tiempo.

Para concluir con el equilibrio de Nash, es relevante mencionar el llamado "Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos", un refinamiento del concepto de Equilibrio de Nash, para juegos dinámicos.

2. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE JUEGOS A LAS SUBASTAS

El autor Pedro Durá Juez, en *“Teoría de Subastas y reputación del vendedor”*, explica que la referencia más temprana que se conoce como subastas se remonta a la antigua Babilonia, en la que cada pueblo celebraba un mercado anual de esposas. No se permitía que los padres eligieran con quien se iba a casar su hija, sino que se realizaba mediante una subasta. Más tarde en Grecia se empezaban a realizar subastas para la concesión de minas, y es con los romanos cuando la subasta como método de venta empieza a tener una amplia difusión y se empiezan a utilizar con cierta regularidad.

Una de las subastas más importantes y famosas de la época fue la venta del Imperio Romano en el año 193 según explica Leonora Millán en la *“Teoría de Subastas”*. Con la caída del Imperio Romano y el hecho de que en oriente no fueran muy bien aceptadas, las subastas empezaron a perder importancia.

A partir del siglo XVII las subastas vuelven a coger importancia y con ello la profesión del “subastador”. En el siglo XX la importancia de las transacciones realizadas por las subastas continuó teniendo una gran importancia y se empezó a expandir a nuevos bienes y servicios. En la actualidad, con el avance de los medios informáticos, las subastas se desarrollan principalmente a través de Internet.

2.1. Tipos básicos de subastas

Para hablar de los diferentes tipos de subastas que existen primero hay que definir el concepto de subasta.

McAfee and Mcmillan definen una subasta como “una institución de mercado que cuenta con un conjunto explícito de reglas que determinan la asignación de recursos y los precios basándose en las pujas presentadas por los participantes”. Explicado de otra manera equivalente, sería un mecanismo de asignación de bienes mediante el cual, el vendedor ofrece la oportunidad al pujador de conseguir recursos a un precio que el vendedor estipule conveniente.

Tipos de subastas:

1) Subastas de una unidad

Las subastas de una unidad se llaman así porque solo es uno el objeto el que se subasta. Pueden ser subastas de sobre abierto (los compradores realizan sus pujas públicamente) o subastas de sobre cerrado (los compradores realizan sus pujas de forma privada).

a) Las subastas de una unidad de sobre abierto más conocidas son:

- **Subasta ascendente o inglesa:** Es el tipo de subasta más común. La característica que la define es el hecho de que el precio va subiendo cada vez más hasta que solo queda un comprador, que es el que al final se queda con el bien que se está subastando.
- **Subasta holandesa o subasta descendente:** En este caso el subastador empieza con un precio inicial que va bajando hasta que un comprador lo acepta. Este modelo de subasta tiene su aplicación en la venta de productos perecederos (flores, pescado...), valores mobiliarios (acciones, bonos...) y para deshacerse de excesos de stock cuyo coste de mantenimiento no compensa el valor que tienen.

b) Las subastas de una unidad de sobre cerrado más conocidas son:

- **Subasta con sobre cerrado al primer precio:** Los compradores presentan sus pujas en un sobre cerrado; el bien que se está subastando se lo llevará el que mayor precio haya pujado. En este tipo de subastas destacan dos características: la primera es que los compradores desconocen lo que ha pujado el resto, y la segunda es que solo se puede realizar una única puja. Este modelo de subasta es muy utilizado en concursos públicos o en negociaciones de servicios.
- **Subasta con sobre cerrado al segundo precio o subasta Vickrey:** Esta subasta sería como la anterior pero la diferencia es que el precio que se pagaría por el bien subastado sería el segundo más alto. Este tipo de subasta fue descrita por primera vez por el economista William Spencer Vickrey el cual recibió el Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel en el año 1996.

2) Subastas de múltiple unidades y múltiples pujas

En dichas subastas se ponen a la venta varios objetos idénticos o similares en las cuales los compradores pueden realizar múltiples ofertas por diferentes cantidades.

Las subastas más usadas en la práctica son:

a) Las subastas de sobre cerrado de precio variable Uniforme y Discriminatoria.

- **Subasta uniforme:** En este tipo de subastas el comprador entrega al subastador un sobre cerrado en el cual especifica el número de unidades que desea comprar y el precio que está dispuesto a pagar por cada unidad. El subastador ordena los precios de mayor cantidad a menor cantidad fijando un precio de corte. Este precio de corte es el precio máximo en el cual la demanda es mayor o igual a la oferta.
- **Subasta Discriminatoria:** cada comprador paga el bien obtenido al precio que él ha pujado, sin embargo, en la subasta Uniforme se paga al precio de corte explicado anteriormente.

El objetivo de este tipo de subasta es conseguir que los compradores revelen sus verdaderas valoraciones para así evitar la llamada “estrategia de pujar conservadoramente” la cual significa ofrecer un precio menor al de su valoración real con el fin de pagar menos en el caso de que salga ganador.

Tanto la subasta de sobre cerrado de precio variable Uniforme como la Discriminatoria han sido utilizados en las subastas de deuda pública y en las subastas de dinero del Banco Central Europeo.

b) Subasta Vickrey con múltiples unidades

Es una variante de la subasta Vickrey, que es un tipo de subasta en la que los compradores presentan ofertas a sobre cerrado y el ganador de la subasta paga el segundo precio más alto en vez de su oferta real.

En la subasta Vickrey con múltiples unidades se aplican los mismos principios, pero en vez de subastar un único bien se subastan múltiples unidades de ese bien.

c) Subasta inglesa modificada

En este tipo de subastas se comienza fijando un precio inicial para los diferentes bienes que van a ser subastados y cada comprador indicará los productos que quiere comprar a dicho precio inicial. Una vez realizado este proceso, se calcula el total de bienes que se quieren comprar (la demanda). Si la demanda es menor o igual que la oferta (número de bienes disponibles) los bienes se venden a ese precio inicial. Pero en el caso de que la demanda sea mayor que la oferta, dicho precio inicial sube y este proceso se repite.

Esta modalidad de subasta continúa hasta que se logre el equilibrio y la oferta se iguale a la demanda.

d) Subasta holandesa modificada

Se denomina también subasta española y es el tipo de subasta que se utiliza para emitir las letras del Tesoro. Participan dos tipos de ofertantes:

- Los ofertantes que compiten: pujan un precio determinado.
- Los ofertantes que no compiten: aceptan el precio que otros ofertantes han puesto.

2.2. Teoría de la subasta

En 1956, Milton Friedman presentó un trabajo explicando la estrategia óptima para realizar pujas en una subasta. Sin embargo, en ese momento su enfoque no incluía la Teoría de Juegos, lo que quiere decir que su explicación estaba incompleta ya que se estudiaba cómo los compradores individuales deberían hacer sus pujas sin considerar las posibles interacciones entre ellos.

Más adelante, en el año 1961, Vickrey introdujo el concepto de subasta al segundo precio, que es un tipo de subastas que usa la Teoría de Juegos para determinar el precio final que paga el comprador.

A pesar de las aportaciones de Vickrey, el uso de la Teoría de Juegos en las subastas se desarrolló de una forma muy lenta y no fue hasta la década de los ochenta cuando empezó a crecer su interés, haciendo que el número de investigaciones y publicaciones relacionado con las subastas aumentara. También hay que hacer mención que, en las

subastas al segundo precio, el equilibrio de Nash se da cuando todos los jugadores pujan por el verdadero valor que cada uno considera sobre el objeto subastado.

2.3. El Modelo de Referencia

Es uno de los modelos más estudiados dentro de la teoría de subastas ya que de él se deducen resultados muy importantes como, por ejemplo, el Teorema del Ingreso Equivalente.

Este modelo se basa en que el comprador solo conoce su propia valoración y no la del resto de compradores. Por tanto, nos encontramos ante un ejemplo de juego de información incompleta (juegos bayesianos).

Debido a que se desconoce dicha información, el comprador realizará diferentes suposiciones intentando adivinar cuál será el precio que ofrecerán el resto. El comprador necesitará hacer estas suposiciones para tener una idea de cómo pronosticar las siguientes pujas.

A continuación, se enumeran los principales supuestos que definen el “Modelo de Referencia”:

1. Valoraciones independientes privadas

Este supuesto en realidad comprende dos. Por un lado, el comprador conoce con exactitud su valoración del objeto que se va a subastar. En segundo lugar, las variables de las que se derivan las valoraciones de los diferentes jugadores son independientes y, por tanto, no existe ninguna correlación entre ellos.

2. Compradores simétricos

Hace referencia a una situación en la cual todos los compradores que participan en la subasta poseen la misma información sobre el valor del artículo que se está subastando.

Esta idea de simetría significa que ninguno de los compradores posee una ventaja especial en términos de información, ya que todos parten de la misma base de conocimiento sobre el valor del artículo.

3. Compradores neutrales al riesgo

Este supuesto implica que los compradores tienen funciones de utilidad lineales (este tipo de función sirven para modelizar la neutralidad ante el riesgo) , por tanto, maximizar su utilidad esperada equivaldría a maximizar sus ganancias monetarias esperadas.

4. Los pagos son una función únicamente de las pujas

El modelo de referencia asume otros supuestos adicionales entre los que destacan los siguientes:

- No existen costes de preparación por parte de los compradores.
- No existen costes de análisis por parte del vendedor.
- No hay comportamientos colusivos entre los compradores, es decir, que los compradores no están estableciendo acuerdos vinculantes entre ellos para controlar el resultado de la subasta a su favor.
- El número de compradores es público, como también lo son las actitudes ante el riesgo y las diferentes distribuciones de probabilidad de todos los compradores.
- El vendedor siempre va a cumplir con las normas establecidas en la subasta, es decir, tiene capacidad de auto-compromiso.

2.4. Las estrategias de equilibrio

En este apartado se va a describir las estrategias de equilibrio que formarían un Equilibrio Bayesiano de Nash, otro refinamiento del concepto de Equilibrio de Nash, en juegos en los que participa el azar.

a) Subasta inglesa o ascendente

En este tipo de subastas los compradores tienen la mejor estrategia sin tener en cuenta las estrategias elegidas por el resto de compradores (estrategia dominante).

Esta estrategia consiste en mantenerse en la subasta hasta que el precio de la puja se iguale con la valoración que hace el comprador del objeto que está siendo subastado. En el caso de que no se llevara a cabo esta estrategia no se podría conseguir un resultado mejor, ya que estamos hablando de una estrategia dominante.

El jugador que mayor valoración haya dado al objeto subastado será el que se lo lleve.

Sin embargo, el ganador no pagará lo que cree que vale el objeto (v_1) sino que pagará el precio que es igual a la segunda valoración más alta (v_2). El vendedor no va a obtener el máximo beneficio, pero el ganador va a tener unas ganancias netas iguales a la diferencia entre su valoración y la segunda valoración más alta ($v_1 - v_2$).

b) Subasta holandesa

El comprador elegirá su puja sin conocer las decisiones de los demás compradores, si este resulta ganador de la puja deberá pagar la cantidad por la que ha pujado.

El resultado será independiente de las aptitudes ante el riesgo y del supuesto que se adopte sobre las diferentes correlaciones de las valoraciones del resto de compradores.

La situación en la que se encuentran los diferentes compradores es, desde un punto estratégico, muy similar, por no decir igual, que en una subasta de sobre cerrado al primer precio.

c) Subasta con sobre cerrado al primer precio

En este tipo de subasta a los compradores se les presenta el conocido dilema de que pujas mayores provocan mayores probabilidades de ganar, pero al mismo tiempo reducen el beneficio.

La estrategia que se va a llevar a cabo en este tipo de subastas ya no es un procedimiento tan directo, debido a que las estrategias dominantes ya no se encuentran disponibles y por tanto la estrategia que lleve a cabo cualquier

comprador no va a ser la mejor que se pueda obtener, con independencia de lo que hagan el resto de jugadores.

La solución a este problema consiste en suponer cual sería la valoración máxima que cada comprador haría, asumiendo que su propia valoración sería la más alta de todas, es decir, como si un comprador en el momento de calcular la valoración de su puja asume que va a ser el ganador y a partir de ahí calcula cual sería la valoración más alta del resto de compradores y presenta una puja igual a ese valor.

De esta forma, la función de puja de equilibrio basándose en el ejemplo de McAfee y McMillan de 1987 sería:

$$b_i = B(v_i) = v_i - \frac{\int_{v_{\min}}^{v_i} [F(v_i)]^{N-1} dv_i}{F(v_i)^{N-1}}$$

Donde, b_i y v_i son, respectivamente la puja y la valoración del comprador i , $F(v_i)$ es la distribución de las valoraciones y N es el número de participantes en la subasta.

Esta función de puja presenta tres características:

- Las pujas van a ser inferiores a las cantidades máximas que los compradores están dispuestos a pagar, es decir, que el vendedor conoce que en el equilibrio, el ganador de la puja estaría dispuesto a pagar una cantidad superior respecto a la cantidad que ha puesto en su puja.
- La función $B(v_i)$ es creciente en el número de compradores, es decir, cuantos más participantes haya y, por tanto, mayor sea la competencia, el valor de las pujas será más elevado.
- Cuando el número de compradores tiende a infinito, los beneficios tenderán a cero, debido a que las pujas de cada comprador tenderán al valor que los compradores han otorgado al objeto subastado y por tanto los excedentes serán nulos.

d) Subasta con sobre cerrado al segundo precio

En este tipo de subasta los compradores disponen de una estrategia dominante que se basa en realizar una puja por el objeto o bien que se va a subastar haciendo que

sea igual a la valoración que este mismo comprador da al bien subastado independientemente de lo que hagan el resto de compradores.

Esto fue demostrado por Vickrey en 1961 cuando afirmó que cualquier comprador en una subasta no conseguiría incrementar sus ganancias si este presentara una oferta distinta (tanto inferior como superior) a la de sus valoraciones.

En el caso de que se presente una puja inferior a la de su valoración, las posibilidades de obtener el bien subastado serían menores y en el caso en el que obtuviera dicho bien no lograría rebajar el precio pagado por él. Siempre se encontraría en situaciones iguales o inferiores a su valoración, pero nunca superiores por lo que no tendría sentido que un comprador realizara esto en una subasta.

En el caso que se presentara una puja superior a su valoración, las posibilidades de obtener el bien serían mayores, pero esto solo ocurriría en situaciones en la que el comprador no deseara ganar; porque en el caso de ganar la subasta pagaría el segundo precio más alto y esto superaría su valoración.

2.5. El Teorema del Ingreso Equivalente

Este teorema es una parte importante de la teoría de subastas y sostiene que, en ciertas condiciones, los ingresos esperados que puede tener el vendedor en diferentes tipos de subastas serán aproximadamente iguales.

Estas condiciones incluyen:

- En equilibrio, el objeto o bien que se subasta se asigna al comprador que más alto valora el artículo.
- El comprador con la valoración más baja tendrá una utilidad esperada igual a cero.

Otra parte importante de este teorema es que los cuatro tipos de subastas mencionadas en el apartado anterior pueden maximizar sus ingresos esperados desde el punto de vista del vendedor siempre que sean acompañados de una política de precios mínimos óptima.

3. APLICACIONES DE LAS SUBASTAS

En este apartado se analiza una de las aplicaciones que tienen las subastas: las subastas de licencias de telefonía móvil de diferentes generaciones, las cuales, con la liberalización de mercado de las telecomunicaciones, pasaron de asignarse a través de concesiones administrativas a la adjudicación a través de mecanismos competitivos que generaran ingresos.

3.1. Subastas de licencias de telefonía móvil de tercera generación

A inicios de los 2000, todos los países europeos realizaron procesos de adjudicación de espectros para operar con licencias de móviles 3G. Las expectativas eran muy altas, ya que dicha tecnología permitía extender el uso de internet a las redes móviles.

Para la adjudicación de las licencias España cometió un gran error. La administración española fijó de antemano el precio de las licencias de 3G y las adjudicó mediante un concurso de belleza o de méritos, en lugar de realizar una subasta como hicieron otros países europeos lo que la hizo perder entre 20.000 y 25.000 millones de euros. En términos de recaudación, los países que utilizaron subastas obtuvieron 266 euros per cápita mientras que los que utilizaron concurso de belleza (estos se basan en el anuncio de una regla de asignación de la licencia que depende de diversos parámetros de calidad) solo recaudaron 35 euros per cápita.

La diferencia en los resultados de la subasta se explica por los fallos cometidos por algunos países en su diseño, así como por el momento en el que realizaron la subasta. Alemania y Reino Unido eligieron buenos diseños y consiguieron que el precio se acercara al valor real de las licencias, por encima de los 600 euros per cápita. Otros países, como Italia u Holanda fallaron en sus diseños y consiguieron una tercera parte de la recaudación per cápita, 71 y 124 euros per cápita, respectivamente. Dinamarca, a pesar de utilizar el método correcto, adjudicó sus licencias cuando las expectativas sobre el valor del negocio habían caído mucho, por lo que su recaudación per cápita no fue muy elevada, 96 euros.

De tales diferencias de recaudación, se sacaron las siguientes conclusiones: el diseño de las subastas es crucial para su éxito y las subastas se convertirían en el método para adjudicar el espectro futuro.

3.2. Subastas de licencias de telefonía móvil de cuarta generación

Las subastas de licencias de cuarta generación (4G) son procesos de asignación de espectro radioeléctrico para poder implementar y operar con redes de cuarta generación de telefonía móvil. Estas subastas son fundamentales para las empresas de telecomunicaciones ya que gracias a esto pueden ofrecer servicios 4G.

Con la llegada de la red de cuarta generación (4G), se produjo una ola de subastas y adjudicaciones de espectro. En concreto, se adjudicaron seis licencias en la banda de 800MHz y dos en la banda de 900MHz. Tras mucho debate, la Administración Española determinó que el mejor método de adjudicación era utilizar la subasta a través del método de subastas inglesas con múltiples rondas, el cual, como se ha explicado con anterioridad, se basa en fijar un precio inicial y a partir de ahí los compradores interesados van realizando sus ofertas hasta que solo queda un único comprador, el cual es al que se le adjudica la licencia. Además, se fijaron unos precios de reserva de 170 y 169 millones de euros, respectivamente, y se impusieron limitaciones a los operadores entre los que destacan:

- El impedimento de no acumular más de 20MHz de espectro en cada una de las bandas.
- En las bandas de 900MHz, si alguna empresa obtenía más de 10MHz estaba obligada a permitir el uso de su red a operadores virtuales.

El diseño aplicado era muy similar a la subasta de espectro que se había realizado poco antes en Alemania con la particularidad de que en España solamente se recaudaron 1647 millones de euros en comparación con los 4300 millones de euros recaudados en la subasta alemana. Por no hablar de que en España no se llegó a recaudar el objetivo monetario de 2000 millones que se había marcado el gobierno.

A pesar de todo, el resultado obtenido no supuso ninguna sorpresa para el sector. Aunque las subastas española y alemana tenían un diseño muy similar, las condiciones de competencia eran muy diferentes. Alemania contaba con cuatro empresas

participantes muy bien establecidas (Telefónica, Vodafone, Deutsche Telekom y KPN) y subastaban seis licencias mientras que España solo existían tres empresas (Orange, Vodafone y Telefónica).

En el caso español, aunque las empresas pujaran por la máxima cantidad del espectro permitido en cada una de las bandas, las tres empresas podían alcanzar su objetivo. Es decir, las empresas no tenían incentivo a competir fuertemente entre ellas, la competencia, en el caso de existir, dependería de los potenciales entrantes al mercado. Cabe remarcar que la posibilidad de que nuevos potenciales participaran en la subasta era ínfima debido a que se trataba de compañías telefónicas muy pequeñas.

Finalmente, Vodafone y Telefónica alcanzaron el límite de 20MHz cada una, Vodafone consiguió adjudicarse 10MHz en la banda de 800 y Telefónica, 5MHz en la de 900, y 10MHz en la de 800. Por otro lado, Orange obtuvo 10MHz en la banda de 800 y renunció a pujar por el último bloque de la banda de 900, obteniendo así 15MHz. La Administración decidió realizar una segunda subasta eliminando la limitación de los 20MHz y adjudicó esta licencia a Telefónica por el precio de reserva.

Este caso nos enseña que en el diseño de una subasta es muy importante la competencia que se va a generar. En el caso español se tendría que haber elegido una subasta que favoreciera a los entrantes, como una subasta a sobre cerrado, y haber reducido el espectro que se ofrecía para que existiera competencia entre las empresas establecidas o haberse realizado una búsqueda activa de candidatos a participar en la subasta. Otra opción a considerar habría sido la de subastar una parte del espectro inicialmente y cuando las condiciones del mercado hubieran garantizado la presencia de nuevos participantes subastarse el espectro restante.

4. CONCLUSIONES

La teoría de juegos nos ayuda a analizar y comprender las diferentes decisiones estratégicas en situaciones en las que estas decisiones no dependen de un solo individuo, sino que también se ven afectadas por las decisiones del resto de individuos. Las subastas, hoy en día, han cobrado una gran importancia ya que se aplican en diversos campos y son utilizadas para la compraventa de bienes y servicios tanto para individuos como para empresas y organismos institucionales.

En este trabajo hemos explicado y analizado diferentes tipos de subastas diferenciándolas en subastas de un solo bien y subastas de múltiples bienes. Algunos tipos de subastas dentro de las dos categorías mencionadas anteriormente son la subasta inglesa o ascendente, la subasta holandesa, la subasta con sobre cerrado al primer precio y la subasta con sobre cerrado al segundo precio.

También se ha analizado la teoría de subastas explicando su modelo más extendido, denominado el modelo de referencia. Las subastas llevan con nosotros desde hace muchos años y con el paso del tiempo se han ido utilizando más y cobrando más importancia.

Podemos destacar que las subastas se han convertido en el mejor mecanismo para asignar el espectro radioeléctrico ya que permite asignar las licencias de manera transparente y eficiente garantizando que los compradores que participan cumplan los requisitos e intentando lograr que se maximice el bienestar social. No obstante, el diseño óptimo de las subastas es un problema complejo, ya que puede ocurrir algún tipo de error durante la fase de adjudicación y esto supondría un problema tanto para la Administración como para el futuro del mercado.

BIBLIOGRAFÍA

Millán, Leonora (2006): *“Teoría de Subastas”*. Notas de clase.

Durá Juez, Pedro (2003): *“Teoría de subastas y reputación del vendedor”*.

Usategui Díaz de Otalora, Jose Maria (2020): *“Diseño de subastas y licitaciones. Una introducción”*.

Usategui Díaz de Otalora, Jose Maria (2009): *“Economía de las subastas”*.

V. Neumann, J. " *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*". *Mathematische Annalen*. 100,295-320 (1928). <https://doi.org/10.1007/BF01448847>

Morgenstern, Oskar y V. Neumann, J. (2007): *“Theory of Games and Economic Behaviour”*. Ed: Princeton University Press.

McAfee R.P. and McMillan J. (1987): *“Auctions with entry”*. *Economics Letters* 23, pp. 343-347.

Tenorio Villalon, Angel F. y Caraballo Martin, Ana M. (2015). *“Un paseo por la historia de la teoría de juegos”*. *Boletín de Matemáticas Tomo 22(1)*, 77-95. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/51847>

Equilibrio de Nash. (5 de octubre 2023). <https://www.euroinnova.edu.es/blog/que-es-el-equilibrio-de-nash#:~:text=La%20teor%C3%ADa%20se%20desarrolla%20en,menos%20un%20equilibrio%20de%20Nash.>

Historia de las subastas. (7 de octubre 2023). *“Un recorrido por la historia de las subastas”* <http://www.surusin.com/un-recorrido-por-la-historia-de-las-subastas/>

Aplicaciones de la teoría de juegos. (12 de octubre de 2023). *Aplicaciones de la teoría de juegos a la economía industrial*.

<https://www.mincotur.gob.es/Publicaciones/Publicacionesperiodicas/EconomiaIndustrial/RevistaEconomiaIndustrial/393/JJ%20GANUZA%20y%20F%20VIECENS.pdf>.

