Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Trabajo Fin de Grado

Grado en Economía

Revisión de Ejemplos Clásicos de la Teoría de Juegos

Presentado por:

Miguel Ángel Fernández Rujas

Valladolid, 14 de diciembre de 2023

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN:

Este trabajo recoge algunos de los ejemplos más conocidos de la Teoría de juegos. En este sentido, se analizan juegos finitos y no cooperativos, donde los jugadores o participantes tienen un número limitado de estrategias y no pueden llegar a acuerdos.

El propósito es realizar una presentación general sobre la Teoría de juegos. En primer lugar se elabora una pequeña exposición sobre sus orígenes e historia, se presenta un pequeño marco teórico y formas de representación de los juegos. Finalmente, estudiando diversos conceptos de solución, siendo generalmente conocido el equilibrio de Nash (logrado a través de las respuestas óptimas de cada jugador), se aplica una solución de Nash para cada juego. Cada solución obtenida, nos presenta una interpretación aplicable a contextos reales.

Palabras clave: Teoría de juegos, Equilibrios de Nash, Juegos finitos, Juegos no cooperativos.

ABSTRACT:

This work collects some of the best-known examples of Game Theory. In this sense, finite and non-cooperative games are analyzed, where players or participants have a limited number of strategies and cannot reach agreements.

The purpose is to make a general presentation on Game Theory. Firstly, a small exposition is prepared about its origins and history, a small theoretical framework and forms of representation of the games are presented. Finally, studying various solution concepts, the Nash equilibrium being generally known (achieved through the optimal responses of each player), a Nash solution is applied for each game. Each solution obtained presents us with an interpretation applicable to real contexts.

Key words: Game Theory, Nash Equilibrium, Finite games, Non cooperative games.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo de fin de grado se exponen algunos de los ejemplos clásicos de juegos finitos más representativos de la teoría de juegos, con el objetivo de lograr su comprensión y buscar aplicaciones de los mismos en el mundo real (descubrir si los siguientes planteamientos son aplicables principalmente a contextos económicos y sociales).

En un primer lugar, se muestra un sencillo marco teórico de la propia teoría, mostrando su proceso histórico e orígenes, el principio de racionalidad y los tipos y elementos de un juego. El objetivo en este primer apartado es crear una idea genérica en el lector sobre teoría de juegos, permitiendo una lectura dinámica del trabajo.

Posteriormente se estudian los juegos estáticos y su forma de analizarlos-representarlos, así como algunos métodos de solución. Esto mismo se realiza con los juegos dinámicos, que posteriormente veremos en qué consiste cada uno de ellos.
Como referencia para este trabajo se ha utilizado principalmente el manual *Teoría de juegos* de Pérez, Jimeno y Cerdá del año 2013.

2. TEORÍA DE JUEGOS

A modo introductorio, se presenta brevemente la historia de la teoría de juego y sus autores más relevantes; se clasifican los llamados propiamente Juegos, en función de sus características y su forma asociada de representarlos, y finalmente se muestran algunos de los métodos de resolución (algoritmo) adecuado para cada uno de ellos.

2.1. Repaso histórico

A partir del manual de Pérez, Jimeno y Cerdá (2013) marcamos un punto de partida a la teoría de juegos como disciplina propiamente dicha, con la obra *Theory of Games and Economic Behaviour* de Von Neumann y Morgenstern en 1953. En esta obra se crea la base teórica y se resuelve los llamados juegos de suma cero, escenario que representa el máximo grado de competitividad.
El manual también nos menciona aportaciones anteriores extraíbles de los trabajos de Cournot y Edgeworth (estudiados y aplicados en la Economía) del siglo XIX. En los años

50 y segunda mitad se siglo se desarrolla la disciplina y aumenta su notoriedad con el Premio Nobel de Economía en 1994, por las aportaciones de Nash, Selten y Harsanyi (equilibrio de Nash y solución al problema de reparto de Nash, expansión a los juegos dinámicos y expansión hacia los juegos de información incompleta; en ese orden).
Este reconocimiento contribuyó a su desarrollo y expansión tanto en investigación, enseñanza en niveles (post) universitarios y divulgación en la esfera pública. En este último sentido, en 2001 se estrenaría la película llamada *Una mente maravillosa* (interpretada por Russell Crowe) basada en la vida de John Forbes Nash Jr. llevando a escena a uno de sus autores más importantes.

Esta teoría, es a día de hoy, aplicable principalmente en campos económico-sociales como la Economía (en sus diversas ramas como social, aplicada, …), Sociología y Ciencia Política, así como en otras ramas que estudian el comportamiento de otros seres (no es condición necesaria que los participantes sean personas) como la Biología.

2.2. Teoría de juegos y Racionalidad

"La Teoría de juegos estudia situaciones de conflicto y cooperación a las que denominamos juegos, dónde interactúan individuos racionales, analizando los comportamientos y resultados esperados, mediante decisiones individuales o por acuerdos entre los participantes" (Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013).
En otras palabras, estudia las relaciones de los individuos en situaciones de conflicto, con intereses contrarios a partir de analizar los posibles resultados.
El objetivo de la teoría es extraer pautas generales de comportamiento ante diferentes escenarios que intentan reflejar la realidad, y sean aplicables al mundo económico, sociopolítico y legal.

La palabra juego se refiere a una actividad, en la que los participantes sometidos a reglas intentan ganar, pero pueden perder. "La teoría se basa en el comportamiento racional de los individuos, la acción elegida debe ser tan buena como las demás de acuerdo con una relación de preferencia."(Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013). Siendo X las alternativas opciones o estrategias posibles de una acción, se denomina relación de preferencia, $\gtrsim$, $\subseteq XxX$, a toda relación binaria donde "$x \gtrsim y$", quiere decir que la alternativa x es preferida o indiferente a la alternativa $y, \forall x, y \in X$. Una función de utilidad U representa las relaciones de preferencia, mide las utilidades que el agente atribuye a las alternativas y asigna un número real, si se verifica:

$$x \gtrsim y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y).$$

Si el agente puede elegir entre varias alternativas en el conjunto $X = \{x1, x2, x3, \dots, xn\}$, una lotería es una distribución de probabilidad sobre X donde p_i es la probabilidad de que ocurra cada alternativa x_i. En este sentido, el conjunto de las loterías se describe formalmente como:

$$L = \{(p1, p2, p3, \dots, pn\} \in R^n : p_i \geq 0 \; para \; cada \; i, con \sum_{i=1}^{n} pi = 1\}.$$

Se supone además que, los agentes racionales maximizan su utilidad esperada a través de la función de utilidad esperada de Von Neumann- Morgenstern, es decir:

$$U(L) = u_1 p_1 + u_2 p_2 + \cdots + u_n p_n.$$

2.3. Elementos de un juego

Formalmente, un juego en forma normal, tiene los siguientes elementos:

- Jugadores (Participantes): Toman decisiones esperando maximizar su utilidad. J= {J1, J2, …}.
- Acciones de cada jugador: Decisiones que cada jugador puede realizar en el momento que le toque jugar; puede ser un número finito (realizar X o Y) o infinito (variedad infinita de acciones disponibles a realizar).
- Información: Conocimiento de cada jugador sobre el resto de las variables del juego (resultados, acciones del resto de jugadores, …).
- Resultados del juego: Distintas maneras de resolución del juego, acarrea determinadas consecuencias, o pagos, en función del desarrollo del juego.
- Pagos del juego: Utilidad que cada jugador obtiene en función del resultado final obtenido del juego (valoración de las consecuencias recibidas).
- Estrategias: Plan de acciones que el jugador podría realizar en cada momento del juego. Un perfil de estrategias es cada conjunto de acciones de todos los jugadores, que lleva a un resultado final concreto.
- Equilibrio: Perfil de estrategias que consiste en tomar la mejor táctica para el jugador, según algún criterio previo.

2.4. Tipos de juegos

Una primera distinción en el tipo de juegos sería su enfoque. En este sentido, un juego es Cooperativo si los jugadores pueden llegar a acuerdos y tomar decisiones en conjunto; y No cooperativo cuando los jugadores toman sus decisiones sin llegar a un acuerdo, llamado escenarios de conflicto. En este trabajo estudiaremos los segundos; una vez estamos en un escenario sin posibilidad de llegar a acuerdo, veamos la forma en la que toman decisiones los jugadores.

En los Juegos estáticos se decide las acciones de forma simultánea (sin saber que ha decidido "nuestro(s) contrincante/es"), mientras que en Juegos dinámicos uno juega a continuación del otro.
Los Juegos dinámicos se diferencian de los juegos estáticos debido a que los jugadores toman sus decisiones en momentos diferentes de tiempo y se desarrolla el juego de forma secuencial o dinámica.

Por el tipo de información que poseen los jugadores se dice que: Un juego es de Información completa si la estructura es de dominio público, todos los jugadores conocen la estrategia y acciones disponibles para cada jugador y los posibles resultados resultantes; y todos saben que todos lo conocen. "Por el contrario, siendo las características y estructuras de dominio público, si algunos jugadores conocen los resultados y otros no; el juego es de información Incompleta" (Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013).

A su vez, el juego es de Información perfecta si los jugadores, en cada momento, conocen el desarrollo del juego (saben cuál ha sido la anterior jugada). Resumimos los dos tipos de Información:

- Completa= conocen estructura, elementos y resultados del juego
- Perfecta= conocen desarrollo del juego

Por el número de estrategias que tienen los jugadores se distingue entre finito y no finito. En este trabajo sólo se tomarán en cuenta los juegos finitos, en los que el número de estrategias es finito. Algunos ejemplos de juegos no finitos son:

- Duopolio de Cournot: Ampliamente estudiado en economía, representa como dos empresas deciden cuánta cantidad de un bien producir, en función de la cantidad que produzca su otra competidora, para maximizar su beneficio propio.

- Duopolio de Bertrand: Dos empresas competidoras con producto homogéneo compiten en precios en un mismo mercado. Pueden llegar a acuerdos y repartirse el mercado, sin embargo al tener motivos de reducir precios para ganar cuota de mercado, el resultado acaba llevando al enfrentamiento poniendo precios a la altura del coste marginal.

- Duopolio de Stackelberg: En este caso, dos empresas que producen bien homogéneo en un mismo mercado, una tiene una posición dominante (Líder) que decide por su cuenta qué cantidad producir (q_1). La otra, o empresa seguidora, en función de la cantidad producida por la empresa líder, decidirá su cantidad (q_2) más adecuada de producción para lograr beneficios. Este juego se desarrolla de forma secuencial, puesto que la empresa seguidora juego en un turno posterior a la decisión de la primera, y es de Información perfecta puesto que conoce el completo desarrollo previo completo.

Tabla 2.1. Tipos de juegos

TIPOS DE JUEGOS		
Enfoque	Cooperativo	No cooperativo
Toma de decisiones	Estático	Dinámico
Número de estrategias	Finito	No finito
Información	Completa	Incompleta
	Perfecta	Imperfecta

Fuente: elaboración propia.

3. JUEGOS ESTÁTICOS EN FORMA ESTRATÉGICA O NORMAL

Como hemos dicho, en los juegos estáticos las decisiones se toman de forma simultánea, sin conocer en ese momento las decisiones de los demás jugadores.

Consideraremos juegos de Información completa (todos los jugadores conocen la estructura del juego) y No cooperativos (no pueden llegar a acuerdos en sus decisiones). La forma estratégica o normal es su manera natural de representarlos. Estos juegos se representan para el caso de dos jugadores mediante una bimatriz de pagos, que debe contener a los jugadores del juego, un conjunto de estrategias para cada jugador, y la función de pagos o ganancias u_i (recoge la utilidad asignada por el jugador para cada posible resultado).

Tabla 3.1 Juego estático, matriz de pagos

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	A	4,2	2,1
	B	2,2	2,1

Jugadores={J1,J2}. Conjunto de estrategias de cada jugador: S1= {A,B} S2={C,D}

Utilidades para cada jugador, según los distintos desarrollos del juego:

u_1(A,C)= 4, u_1(A,D)= 2, u_1(B,C)= 2, u_1(B,D)= 2

u_2(A,C)= 2, u_2(A,D)= 1, u_2(B,C)= 2, u_2(B,D)= 1

Fuente: elaboración propia.

Es necesario tener en cuenta que en este tipo de juegos no hay un único decisor, para resolverlo habrá que buscar la respuesta óptima a cada posible situación. "Se llama solución de un juego al conjunto de perfiles de estrategias que parece razonable tomar para cada jugador..., y se llama concepto de solución al proceso que permita obtener de manera precisa y argumentada dicha solución." (Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013)

3.1 Métodos de resolución

- **Dominación**

Partiendo de la idea de racionalidad, una estrategia de un juego es dominante respecto a otra, si para cualquier combinación de estrategias del otro jugador, es tan buena o igual que otra.

Se distingue entre dominación estricta (otorga un pago mayor para el jugador ante cualquier combinación de estrategias del otro jugador) o dominación débil (aporta mayor o igual pago).

En el ejemplo anterior, para J1, la estrategia A domina débilmente a B, mientras que para J2, la estrategia C domina débilmente a D.

- **Eliminación Itinerativa estricta, EIE**

La EIE es un proceso de solución según el cual se van eliminando del juego aquellas estrategias dominadas en sentido estricto. Repitiendo sucesivamente este proceso, los perfiles de estrategias que sobrevivan serán las soluciones del juego.

Si el juego es finito, el proceso EIE termina en un número finito de pasos y no importa el orden ni la forma de eliminación.

Tabla 3.2 Juego estático, resolución EIE

		Jugador 2
		C
Jugador 1	A	4,2
	B	2,2

		Jugador 2
		C
Jugador 1	A	4,2

Fuente: elaboración propia.

Por EIE eliminamos estrategias dominadas (estaba dominada D en el J2) y en el siguiente paso encontramos dominada B por parte del J1. (A,C) es el único perfil superviviente y por tanto solución del juego por EIE.

- **Eliminación Iterativa Débil, EID**

Proceso análogo al anterior basado en eliminar las estrategias débilmente dominadas.

"Un juego es resoluble por dominación si al proceso EID sobrevive un único perfil, o varios, pero al jugador le es indiferente puesto que le proporcionan los mismos pagos con indiferencia a lo que hagan los demás" (Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013).

Tabla 3.3 Juego estático, resolución EID

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	A	4,2	2,1

		Jugador 2
		C
Jugador 1	A	4,2

Fuente: elaboración propia.

Con este ejemplo, se verifica que si existe un perfil superviviente a EIE, es también el único perfil que sobrevive a EID.

En este proceso EID, **el orden de eliminación sí puede determinar diferentes soluciones** finales del juego, veámoslo con el siguiente ejemplo:

Tabla 3.4 Juego estático (ejemplo 2)

		Jugador 2	
		E	F
Jugador 1	A	4,2	5,2
	B	4,6	3,1

Jugadores={J1,J2}. Conjunto de estrategias de cada jugador: S1= {A,B} S2={E,F}

Fuente: Elaboración propia.

En este segundo ejemplo, vemos que para J1 la estrategia A domina débilmente a B, y en el caso del J2, la estrategia domina débilmente a F. Podemos aplicar EID por dos caminos diferentes: eliminando primero la fila B o eliminando primero la columna F.

Tabla 3.5 Juego estático (ejemplo 2), EID camino 1 eliminando fila J1 dominada

		Jugador 2	
		E	F
Jugador 1	A	4,2	5,2

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3.6 Juego estático (ejemplo 2), EID camino 2 eliminando columna J2 dominada

		Jugador 2
		E
Jugador 1	A	4,2
	B	4,6

Fuente: Elaboración propia.

Como vemos, este proceso de solución EID puede llevar a escenarios distintos. Incluso a veces (a continuación se presenta en qué consiste), puede eliminar Equilibrios de Nash: En el ejemplo sería E.N.:(B,E) dando unos pagos de (4,6), y ha sido eliminado en la primera manera de EID.

- **Equilibrio de Nash, E.N.**

En un Equilibrio de Nash no se trata de obtener el mejor resultado posible, sino que se busca la respuesta óptima; es decir, lograr el mejor resultado posible en función de las estrategias jugadas por los otros jugadores.

Se trata de una solución de equilibrio, en este sentido un E.N. se define como el perfil de estrategias, en el cual ningún jugador tiene incentivos para desviarse unilateralmente de su estrategia dadas las estrategias del resto de jugadores.

Para su cálculo basta con obtener las respuestas óptimas de cada jugador las estrategias del otro jugador, los perfiles que sean intersección serán pues los E.N. del juego.

Es reseñable apuntar que la EIE no elimina perfiles de estrategias que son E.N., por lo que si existe un único perfil de estrategias que sobrevive a EIE, entonces será un Equilibrio de Nash.

Tabla 3.7 Juego estático, resolución E.N.

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	A	**4*,2***	2*,1
	B	2,2*	2*,1

Fuente: elaboración propia.

En este ejemplo, el único E.N. es el perfil (A,C) dado que es el único perfil encontrado que cumple con la condición de ser respuesta óptima para ambos jugadores. Si el jugador 2 decide jugar C, J1 recibe mayor pago jugando A que B, siendo A correspondencia de respuesta óptima para J1 cuando J2 juega C. En el caso de J2, si jugador 1 juega su estrategia A, a J2 le reporta mayor pago jugar C que D.

$$u_1(A,C) = 4 > 2 = u_1(B,C)$$

$$u_2(A,C) = 4 > 2 = u_2(A,D)$$

- **Equilibrio de Nash en estrategias mixtas**

En los juegos finitos, no está demostrada la existencia de E.N., pero si la existencia de Equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

Se llama estrategias mixtas a la lotería (distribución de probabilidades) de cada conjunto de estrategias para cada jugador i cuyas probabilidades no son negativas y suman 1

Se denota por $\Delta(S_i)$ al conjunto de estrategias mixtas para el jugador $i, i = 1{,}2$.

Se denomina soporte del jugador i al subconjunto de estrategias mixtas a las que se le asigna probabilidad positiva. Puede considerarse a una estrategia pura una estrategia mixta de soporte unitario, así que de esta forma se puede observar, que cualquier estrategia pura es un caso particular de estrategia mixta.

- **Estrategia Maximin**

Con este método, los jugadores quieren asegurarse un resultado, independientemente de lo que jueguen los demás jugadores.

Se denomina estrategia prudente a aquel perfil de estrategias que maximiza el mínimo de los pagos (pago de seguridad) que un jugador puede recibir, en función de lo que juegue el otro jugador. En estos casos el jugador actúa de forma extremadamente desconfiada y sirve como resultado para casos de estricta competitividad (juegos de suma nula, aquellos en los que lo que uno gana, el otro lo pierde).

Si un perfil de estrategias recoge valor Maximin de ambos jugadores en un juego bipersonal finito de suma cero, se denomina punto de silla y es E.N. en estrategias puras. Además, el pago de seguridad que se atribuye al jugador 1 (valor positivo, en el caso de que coincidan) se denomina valor del juego.

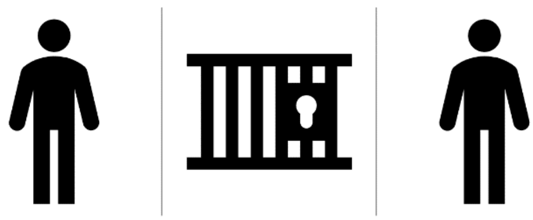
4. EJEMPLOS CLÁSICOS DE JUEGOS ESTÁTICOS

Una vez presentado las características de los juegos en forma estática, su forma de representarlos y los principales procesos de solución de los mismos (como E.N. en estrategias puras y mixtas), algunos de los ejemplos más ilustrativos son:

4.1. Dilema del prisionero (Prisoner´s Dilemma)

Es el juego más popularmente conocido de la teoría de juegos, y su planteamiento en principio es de lo más sencillo. El juego nos presenta la siguiente situación: dos criminales operan juntos y han cometido un delito grave. Ambos son detenidos por la policía y van a ser interrogados por separado de forma simultánea. Ninguno de los dos sabe qué va a hacer el otro, pero saben las consecuencias en función de lo que hagan. La policía sospecha que ambos son culpables de este delito mayor pero no tienen pruebas; sin embargo, tienen pruebas y les pueden acusar de un delito menor.

Figura 4.1 Dilema del prisionero



Fuente: Elaboración propia.

Cada uno tiene dos opciones (estrategias): Callar o Confesar.

Saben que, si ambos callan y son leales a su compañero, sólo les podrán culpar del delito menor (1 año de prisión). Si uno calla y el otro le delata confesando, al primero le encerrarán por el delito mayor (5 años) mientras que el otro, quedará libre por haber colaborado con la justicia. En el último caso, si ambos confiesan, ambos serán declarados culpable, pero obtendrán un trato de favor por haber confesado (cada uno ingresa 4 años en prisión).

Tabla 4.1 Dilema del Prisionero

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	-1, -1	-5, 0
	Confesar	0, -5	-4, -4

Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Como nos pone de ejemplo el manual de Pérez, Jimeno y Cerdá; en la búsqueda de interpretar los pagos en sentido positivo y como utilidades de Von Neumann-Morgenstern, sumamos 5 unidades a cada pago del juego.

Tabla 4.2 Dilema del prisionero, matriz de pagos

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

En ambos jugadores, encontramos Confesar como estrategia dominante.

Resolviendo por Equilibrio de Nash, el único perfil posible es {Confesar, Confesar} que le atribuye 4 años de cárcel a cada uno.

Tabla 4.3 Dilema del prisionero, E.N.

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	4, 4	0, 5*
	Confesar	5*, 0	**1*, 1***

Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

En el dilema del prisionero, el E.N. encontrado es ineficiente en el sentido de Pareto.

Un perfil sería eficiente en sentido de Pareto si moviéndose desde él, fuera inevitable que un jugador no recibiera mejores pagos a costa de que otro perdiera utilidad.

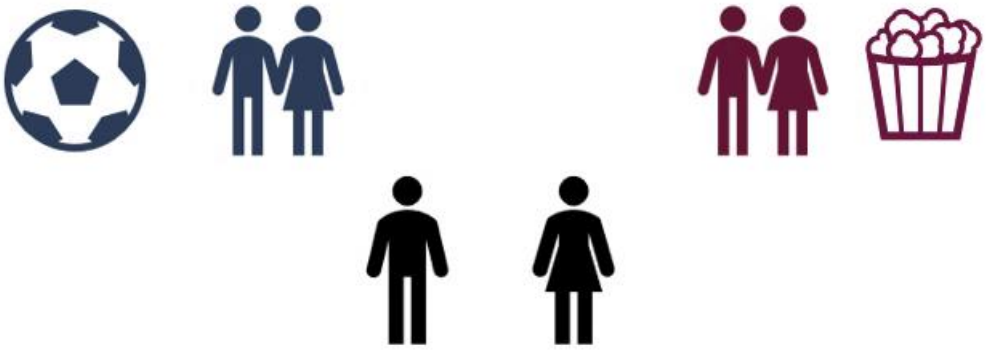
En el dilema del prisionero, el E.N. encontrado evidencia el óptimo individual (formado por las respuestas óptimas ante las estrategias de otros jugadores) en un ambiente de individualidad. Mientras que el óptimo de Pareto refleja el óptimo de la sociedad, en un contexto de colaboración. Así pues, el E.N. del dilema del prisionero no es óptimo en sentido de Pareto.

4.2. Batalla de los sexos (Batlle of the sexes)

En este juego, una pareja ha planeado pasar la tarde juntos al salir del trabajo. El problema nos plantea dos actividades diferentes para elegir, pero a la misma hora: pueden ir a ver un partido de fútbol, o pueden ir al cine.

Ambos prefieren permanecer juntos, pero él preferiría ver el fútbol y a ella le gustaría más ir al cine.

Figura 4.2 Batalla de los sexos



Fuente: elaboración propia.

El día de la cita no pueden comunicarse, por lo que deben acudir a uno de los lugares sin saber lo que va a hacer su pareja, por lo que la bimatriz de pagos quedaría:

Tabla 4.4 Batalla de los sexos, matriz de pagos

		Jugadora 2	
		Cine	Fútbol
Jugador 1	Cine	1, 2	0, 0
	Fútbol	0, 0	2, 1

Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Vemos que este juego es simétrico y no tiene ninguna estrategia dominada.

Analizando las respuestas óptimas, encontramos dos E.N. consistentes en que ambos acudan juntos, aunque reciben valores opuestos.

Ambos EN son eficientes en términos de Pareto: partiendo de que ambos van al cine, si van al fútbol inevitablemente uno gana utilidad a costa del otro

Tabla 4.5 Batalla de los sexos, E.N. en Estrategias Puras

		Jugadora 2	
		Cine	Fútbol
Jugador 1	Cine	**1*, 2***	0, 0
	Fútbol	0, 0	**2*, 1***

Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Ante la incertidumbre que genera el juego, analizaremos el juego en estrategias mixtas asignando una probabilidad al chico de ir al cine de p (1-p, ir al fútbol) y a ella una probabilidad de ir al cine de q. Así:

Tabla 4.6 Batalla de los sexos, E.N. en Estrategias mixtas

		Jugadora 2	
		Cine (q)	Fútbol (1-q)
Jugador 1	Cine (p)	1, 2	0, 0
	Fútbol (1-p)	0, 0	2, 1

Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Para calcular el E.N. en estrategias mixtas, realizamos un cálculo de matrices donde igualamos los pagos recibidos por cada jugador usando una estrategia pura diferente, en función de las probabilidades de cada estrategia del otro jugador:

- Jugador 1: igualamos pagos yendo a cine o fútbol, en función de las probabilidades (q, 1-q) del jugador 2

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ 1-q\end{pmatrix} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ 1-q\end{pmatrix}$$

$$q = 2\,(1-q)$$

$$q = 2/3$$

- Lo mismo para Jugador 2:

$$(p \quad 1-p)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = (p \quad 1-p)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$2p = 1-p$$

$$p = 1/3$$

El E.N. en Estrategias Mixtas, es por tanto**: ((1/3,2/3), (2/3,1/3))**

Los pagos esperados por cada jugador en estrategias mixtas son: **(2/3, 2/3)**

$$u_1 = (1/3 \quad 2/3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 2/3$$

$$u_2 = (1/3 \quad 2/3) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 2/3$$

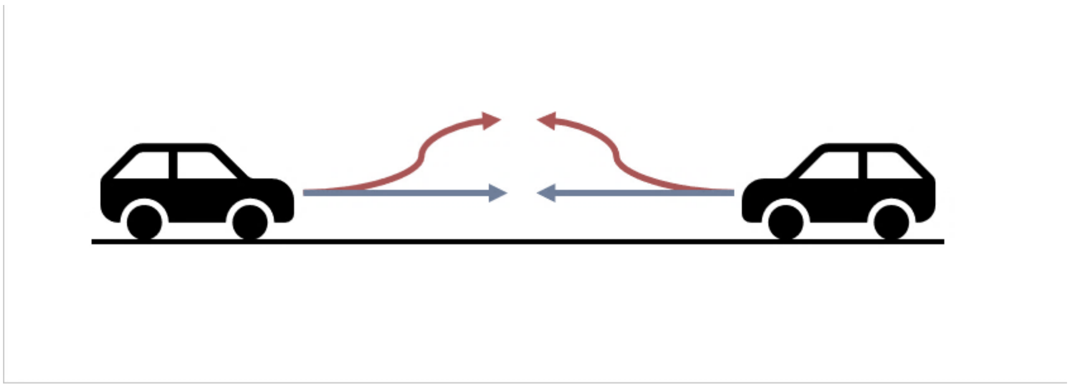
La solución del juego transmite la idea de que ambos, desconociendo dónde va a acudir su pareja, le reporta mayor utilidad esperada ir al sitio que ellos prefieren.

4.3. Juego del Gallina (Chicken Game)

Se dice que el juego fue jugado por primera vez por jóvenes en california durante el año 1950 (Marín Guerrero, 2017).

El planteamiento de este juego es muy sencillo: dos conductores se sitúan con sus vehículos uno enfrente de otro, en línea recta y ante la mirada de espectadores con los que guardan relación. A una determinada. señal aceleran a toda velocidad uno en dirección opuesta al otro, y justo en el momento previo a colisionar tienen que tomar una de las dos opciones: Seguir de frente o Virar. Si ambos continúan de frente, mueren (siendo el peor resultado para ambos por razones obvias). Si los dos cambian de dirección, esquivan el accidente y mantienen el mismo estatus social. Si sólo uno de los dos gira, el que haya girado queda señalado como "Gallina" mientras que el que se ha mantenido derecho logra vencer y es visto como "Valiente".

Figura 4.3 Juego del Gallina



Fuente: Elaboración propia.

La bimatriz de pagos resulta así:

Tabla 4.7 Juego del Gallina, matriz de pagos

		Jugador 2	
		Seguir de frente	Virar
Jugador 1	Seguir de frente	-1000, -1000	1, -1
	Virar	-1, 1	0,0

Fuente: Elaboración propia.

Cómo vemos en la obra de Sedano, 2017; en este juego comprobamos que:

- No existe ninguna estrategia dominante (en sentido estricto ni débil).
- Es un juego simétrico.
- No es un juego de suma cero

Este juego se considera de forma simultánea porque si fuera secuencial, cualquiera de los dos jugadores tomaría la decisión de seguir o virar, sólo si el otro siguiera recto.

Solución a través de E.N. de estrategias puras:

Tabla 4.8 Juego del Gallina, E.N. en Estrategias puras

		Jugador 2	
		Seguir de frente	Virar
Jugador 1	Seguir de frente	-1000, -1000	**1*, -1***
	Virar	**1*, -1***	0,0

Fuente: Elaboración propia.

Nos da perfiles de estrategias que son E.N. simétricos: (Virar, Seguir) y (Seguir, Virar). Estos E.N. son eficientes en término de Pareto, dado que si se desplazara el perfil de estrategias en alguno de los dos casos: es inevitable que un jugador ganara sin que el otro pierda: en el perfil por ejemplo (V, SF), si cambian a (V,V) el jugador 1 mejora su resultado, pero el jugador 2 empeora su pago.

Calculemos el equilibrio en estrategias mixtas. Como en el ejemplo anterior asignamos probabilidades (p, 1-p) al conjunto de estrategias del J1, y (q, 1-q) al conjunto de estrategias del J2. Posteriormente igualamos los pagos recibidos para cada jugador usando diferente estrategia en función de las probabilidades dadas al otro jugador, finalmente calculamos los pagos esperados.

Tabla 4.9 Juego del Gallina, E.N. en Estrategias mixtas

		Jugador 2	
		Seguir de frente (q)	Virar (1-q)
Jugador 1	Seguir de frente (p)	-1000, -1000	1, -1
	Virar (1-p)	-1, 1	0,0

Fuente: Elaboración propia.

- Jugador 1:

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix} -1000 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} -1000 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

$$-1000\,q + (1-q) = -q$$

$$q = 1/1000$$

- Jugador 2:

$$(p \quad 1-p)\begin{pmatrix} -1000 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (p \quad 1-p)\begin{pmatrix} -1000 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-1000\,p + (1-p) = -p$$

$$p = 1/1000$$

El E.N. en Estrategias Mixtas, es por tanto: **((1/1000, 999/1000), (1/1000, 999/1000))**

Los pagos esperados por cada jugador en estrategias mixtas son: **(-1/1000, -1/1000)**

$$u_1 = (1/1000 \quad 999/1000)\begin{pmatrix} -1000 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/1000 \\ 999/1000 \end{pmatrix} = -\,1/1000$$

$$u_2 = (1/1000 \quad 999/1000)\begin{pmatrix} -1000 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/1000 \\ 999/1000 \end{pmatrix} = -1/1000$$

Siendo el castigo tan grande (muerte), el E.N. en estrategias mixtas se corresponde prácticamente a Virar ambos jugadores, por ello el pago esperado tiende a cero. El juego deja la puerta abierta a tomar la decisión de continuar de frente en el caso el individuo ansíe tanto la victoria que esté dispuesto a asumir el riesgo de que el otro haga lo mismo.

4.4. Juego Halcón- Paloma (Hawk- Dove)

Este juego nos representa una metáfora natural ante el siguiente dilema: existe un objeto/premio/recompensa a repartir entre dos individuos (el juego le atribuye un valor "V").

Estos pueden comportarse de dos maneras: de forma agresiva, representada por el Halcón; o de forma pasiva y sumisa, representada por la Paloma).

Figura 4.4 Juego Halcón- Paloma

Fuente: elaboración propia.

Si ambos deciden comportarse de forma agresiva para conseguir el botín, esa lucha les genera a ambos unos costes (C). Si ambos, por el contrario, no pelean y adoptan un comportamiento pasivo, se reparten a medias dicho tesoro. Finalmente, si uno de ellos se comporta agresivo y el otro adopta una posición de sumisión, el primero se lleva el premio completo.

Tabla 4.10 Juego Halcón- Paloma, matriz de pagos

		Jugador 2	
		Paloma	Halcón
Jugador 1	Paloma	*V*/2, *V*/2	0, *V*
	Halcón	*V*, 0	*V/2-C/2, V/2-C/2*

(donde V >C >0)

Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Tomamos el caso donde: V>C>0

Halcón es estrategia dominante para ambos jugadores, por tanto, solo hay un E.N. = (Halcón, Halcón) que les otorga la mitad del valor restando los costes generados (V/2 - C/2, V/2- C/2)

Tabla 4.11 Juego Halcón- Paloma, E.N. en Estrategias puras

		Jugador 2	
		Paloma	Halcón
Jugador 1	Paloma	*V*/2, *V*/2	0, *V**
	Halcón	*V**, 0	***V/2- C/2*, V/2- C/2****

Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013. (donde V>C>0)

Como ocurre en el dilema del prisionero, este E.N. es ineficiente en el sentido de Pareto. Si ambos en vez de pelearse de forma agresiva por el tesoro, adoptaran una posición pasiva y repartieran a medias, obtendrían mejores resultados, (V/2,V/2), al ahorrarse los costes.

Ahora analizamos el juego en Estrategias mixtas, asignando probabilidades a cada conjunto de estrategias puras de cada jugador, igualando los pagos en función de las probabilidades del otro jugador y calculando su pago esperado:

Tabla 4.12 Juego Halcón- Paloma, E.N. en Estrategias mixtas

		Jugador 2	
		Paloma (q)	Halcón (1-q)
Jugador 1	Paloma (p)	*V*/2, *V*/2	0, *V*
	Halcón (1-p)	*V*, 0	*V*/2-*C*/2, *V*/2-*C*/2

(donde V>C>0)

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

- Jugador 1:

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix} V/2 & 0 \\ V & \frac{V}{2}-C/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} V/2 & 0 \\ V & \frac{V}{2}-C/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

$$q\left(\frac{V}{2}\right) = Vq + \left(\frac{V}{2}-\frac{C}{2}\right)(1-q)$$

$$\frac{V}{2}q = Vq + \frac{V}{2} - \frac{V}{2}q - \frac{C}{2} + \frac{C}{2}q$$

$$Vq - \frac{C}{2}q = Vq + \frac{V}{2} - \frac{C}{2}$$

$$-q = \frac{V-C}{2} * \frac{C}{2}$$

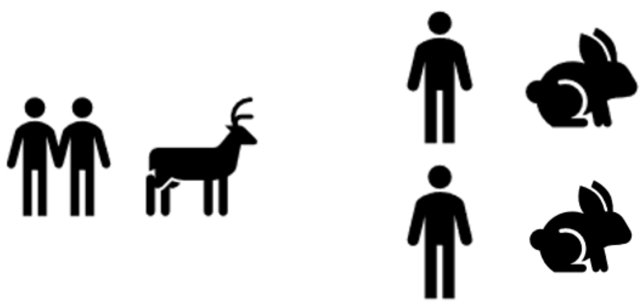
$$q = \frac{C-V}{2} * \frac{C}{2} < \mathbf{0}, (V > C > 0)$$

En este caso (V>C>0), dado que las probabilidades en Estrategias mixtas deben ser mayores o iguales que 0; **no existe ningún E.N. en Estrategias mixtas con soporte completo** en este juego, soporte donde ambos jugadores juegan ambas estrategias.

4.5. Juego "Caza del ciervo" (Stag Hunt)

En este juego dos individuos salen de caza juntos con la intención de cazar un ciervo o pieza mayor. Ambos están situados en un puesto de caza dentro de un coto donde pueden avistar ciervos y liebres. Para ambos tiene más valor cazar el ciervo que las liebres, y más valor cazar una liebre que irse de vacío: V> 2W>0.

Figura 4.5 Juego Caza del ciervo



Fuente: Elaboración propia.

Si ambos permanecen atentos únicamente a la aparición del ciervo (y dejan escapar las liebres de largo), podrán cazar al animal.

Si ambos, sin embargo. acuden a cazar las liebres, podrán repartirse las capturas. Y en última opción si uno de ellos dispara a las liebres y otro se queda esperando al ciervo, el primero obtendrá todas ellas y el segundo no logrará cazar nada.

Tabla 4.13 Juego Caza del ciervo, matriz de pagos

		Jugador 2	
		Cooperar	Buscar liebre
Jugador 1	Cooperar	V, V	$0, 2W$
	Buscar liebre	$2W, 0$	W, W

(donde $V > 2W > 0$)

Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

No existe ninguna estrategia dominada.

Encontramos dos E.N. simétricos: que ambos cooperen en el objetivo de cazar el ciervo, o que ambos se decidan a cazar las liebres que salen al paso.

Tabla 4.14 Juego Caza del ciervo, E.N. en Estrategias puras

		Jugador 2	
		Cooperar	Buscar liebre
Jugador 1	Cooperar	***V*, V****	0, 2W
	Buscar liebre	2W, 0	***W*, W****

(donde V>2W>0)

Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Analizamos si existe E.N. en estrategias mixtas:

Tabla 4.15 Juego Caza del ciervo, E.N. en Estrategias mixtas

		Jugador 2	
		Cooperar (q)	Buscar liebre (1-q)
Jugador 1	Cooperar (p)	V, V	0, 2W
	Buscar liebre (1-p)	2W, 0	W, W

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

- Jugador 1:

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix} V & 0 \\ 2W & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} V & 0 \\ 2W & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

$$V\,q = 2Wq + W\,(1-q)$$

$$Vq = W(1+q)$$

$$q = \frac{W}{V-W}$$

$$1-q = 1-\frac{W}{(V-W)} = \frac{(V-W)-W}{V-W} = \frac{V-2W}{V-W}$$

- Jugador 2:

$$(p \quad 1-p)\begin{pmatrix} V & 2W \\ 0 & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (p \quad 1-p)\begin{pmatrix} V & 2W \\ 0 & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$pV = p * 2W + (1 - p)W$$
$$pV = W(1 + p)$$
$$p = \frac{W}{V - W}$$
$$1 - p = 1 - \frac{W}{(V - W)} = \frac{(V - W) - W}{V - W} = \frac{V - 2W}{V - W}$$

El E.N. en Estrategias mixtas, es por tanto: $\boldsymbol{((\frac{W}{V-W}, \frac{V-2W}{V-W}), (\frac{W}{V-W}, \frac{V-2W}{V-W},))}$

- Caso (V> 2W>0). V=10, W=2: **((2/8, 6/8), (2/8, 6/8))**
- Caso (V> 2W>0): V=10, W=4: **((4/6, 2/6), (4/6, 2/6))**

La idea extraíble del resultado es que, cuánto más cercano sea el valor de las liebres al valor del ciervo (2W tienda a V), más incentivados se ven los individuos a cooperar en la búsqueda del ciervo.

4.6. Juego de Cara o Cruz (Matching Pennies)

Como ejemplo clásico de suma cero se presenta el siguiente juego muy sencillo: dos jugadores lanzan de manera simultánea dos monedas, cuyo resultado puede ser uno de los lados, cara o cruz.

Figura 4.6 Juego Cara o Cruz

Fuente: Elaboración propia.

Si en ambas monedas sale el mismo lado (ejemplo: 2 caras) el jugador 1 se lleva las dos, si salen diferentes lados (una cara y otra cruz) se las lleva el segundo jugador. La bimatriz de pagos queda:

Tabla 4.16 Juego Cara o cruz, matriz de pagos

		Jugadora 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	1, -1	-1, 1
	Cruz	-1, 1	1, -1

Fuente: Elaboración propia.

Es un juego de suma cero, la suma de los pagos para cada perfil de estrategias es igual a cero. No se encuentran estrategias dominadas ni E.N. en estrategias puras:

Tabla 4.17 Juego Cara o cruz, E.N. en estrategias puras

		Jugadora 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	1*, -1	-1, 1*
	Cruz	-1, 1*	1*, -1

Fuente: Elaboración propia.

Calculando por estrategias mixtas, asignando probabilidad p a la posibilidad de obtener cara por J1, y q a la posibilidad de obtenerla por J2:

Tabla 4.18 Juego Cara o cruz, E.N. en Estrategias mixtas

		Jugadora 2	
		Cara (q)	Cruz (1- q)
Jugador 1	Cara (p)	1, -1	-1, 1
	Cruz (1- p)	-1, 1	1, -1

Fuente: Elaboración propia.

- Jugador 1:

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

$$q-(1-q) = -q+1-q$$

$$q = 1/2$$

- Jugador 2:

$$(p \quad 1-p)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (p \quad 1-p)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-p+1-p = p-(1-p)$$

$$p = 1/2$$

El E.N. en Estrategias Mixtas, es por tanto: ((1/2, ½), (1/2, ½))
Los pagos esperados por cada jugador en estrategias mixtas son: (0, 0)

$$u_1 = (1/2 \quad 1/2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ½ \\ 1/2 \end{pmatrix} = 0$$

$$u_2 = (1/2 \quad 1/2)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ½ \\ 1/2 \end{pmatrix} = 0$$

Es un juego de suma cero, grado de máxima competitividad, las probabilidades se reparten uniformemente. Al ser el juego resultado del azar, y lo que uno gana el otro lo pierde, el pago esperado es de cero.

5. JUEGOS DINÁMICOS EN FORMA EXTENSIVA

Los juegos dinámicos se diferencian de los juegos estáticos debido a que los jugadores toman sus decisiones en momentos diferentes de tiempo y se desarrolla el juego de forma secuencial. Consideraremos Información completa, lo que significa que las funciones de pagos o ganancias son de dominio público.

Un Juego estático se considera un caso particular de juego dinámico (se toman las decisiones en un momento a la vez, o no se conoce en el mismo momento las decisiones de los demás jugadores).

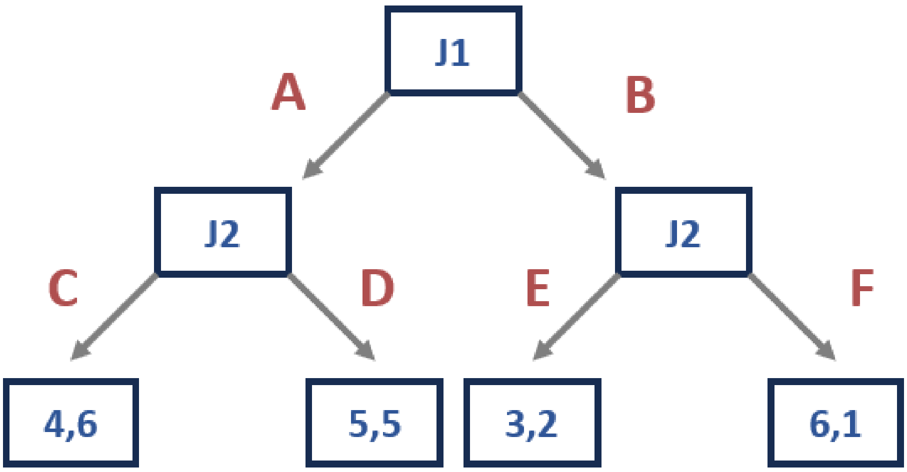
La manera natural de representar los juegos dinámicos/secuenciales es en forma extensiva, mediante un diagrama llamado árbol de decisión, formado por ramas y nodos. En el árbol se deben especificar:

- Los jugadores y cuando tiene que jugar cada uno de ellos, se incluye el llamado "Jugador 0, J0" en caso de que exista un factor de azar (normalmente al inicio del juego).
- Los nodos, que representan situaciones de decisión (pueden existir nodos de azar debido a la existencia de aleatoriedad dentro del juego).
- Existe un nodo inicial (comienzo del juego) y nodos terminales (posibles resultados del juego), los cuales llevan asociados unos pagos conocidos por los jugadores en los juegos de Información completa.
- Conjuntos de información (o conocimiento que el jugador tiene del desarrollo previo del juego). Si conoce el desarrollo previo, se dirá que los conjuntos de información son unitarios y el juego será de Información perfecta.

Un juego de Información completa; es de Información perfecta si cada conjunto de información es unitario. Un juego es de información imperfecta si algún conjunto de información no es unitario.

Explicaremos la teoría de juegos dinámicos a partir del siguiente ejemplo, donde tenemos 2 jugadores, 3 nodos de decisión y ningún nodo de azar, desembocando en 4 posibles resultados:

Figura 5.1 Juegos dinámicos ejemplo



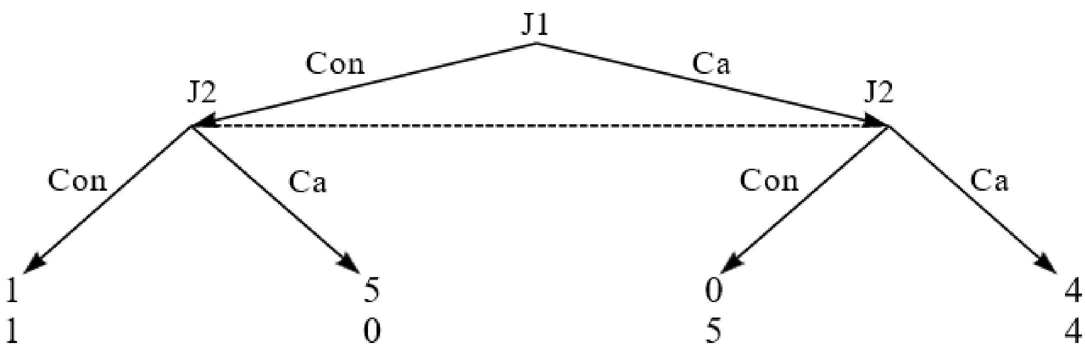
Jugadores: {J1, J2}. Estrategias S1= {A,B} Estrategias S2={C,D,E,F}

8 posibles ENPS (ejemplo {A; C,E}

Fuente: elaboración propia.

Los juegos estáticos pueden representarse en forma extensiva, en este caso el jugador no sabe el desarrollo de la jugada anterior (información no perfecta). Estos juegos tienen conjuntos de información no unitarios.

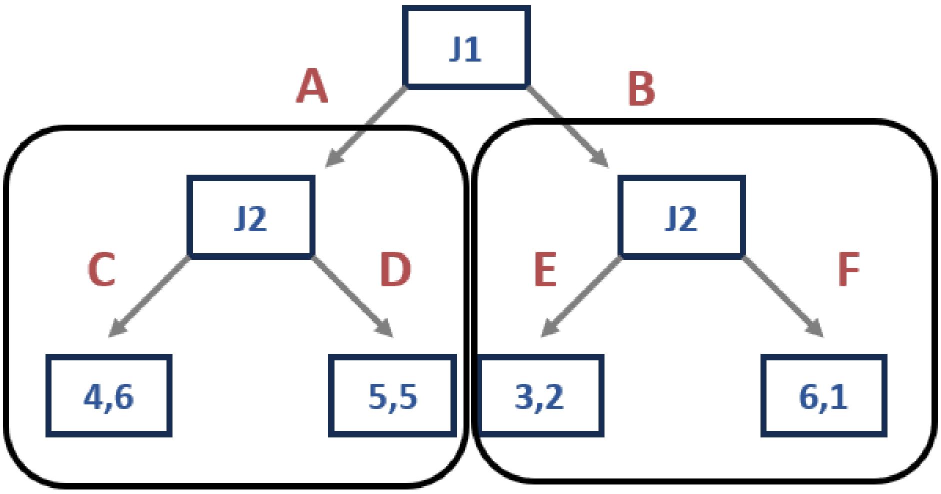
Figura 5.2 Dilema del prisionero, forma extensiva



Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

En algunos juegos dinámicos, al representarlos en forma estratégica o normal, encontramos E.N. que no tienen sentido desde el punto de vista de la dinámica del juego (puede comprobarse con el primer ejemplo clásico presentado a continuación, (6.1. Juego de Disuasión).Por este motivo, se genera un refinamiento del concepto de E.N. llamado **Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (ENPS)**. Antes de ello presentamos el concepto de **subjuego**. En un Juego en forma extensiva y con Información completa, un subjuego es una parte del juego de comienza en un nodo de decisión x, y es un conjunto de información unitario. En nuestro ejemplo podemos encontrar dos subjuegos:

Figura 5.3 Juegos dinámicos ejemplo, identificación de subjuegos

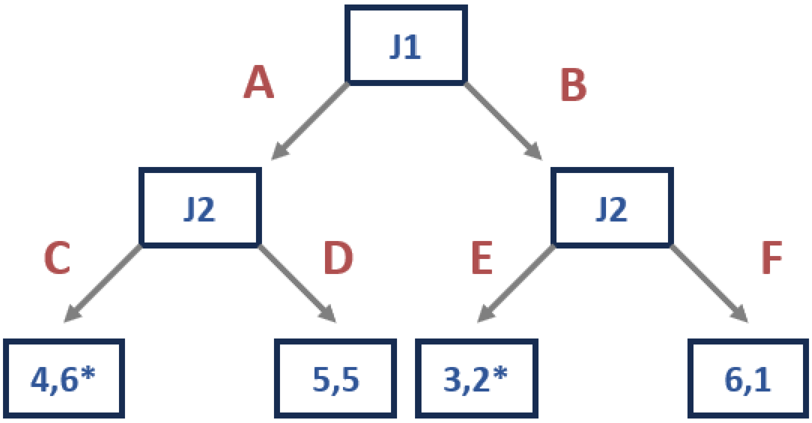


Fuente: Elaboración propia.

ENPS se corresponde a un perfil de estrategias que es respuesta óptima en todos los subjuegos del propio juego. Se considera una mejor solución al añadir credibilidad a las posibles respuestas y aplicar el principio de racionalidad secuencial (cada jugador toma su respuesta óptima en cada fase del juego ante la estrategia de los otros jugadores).

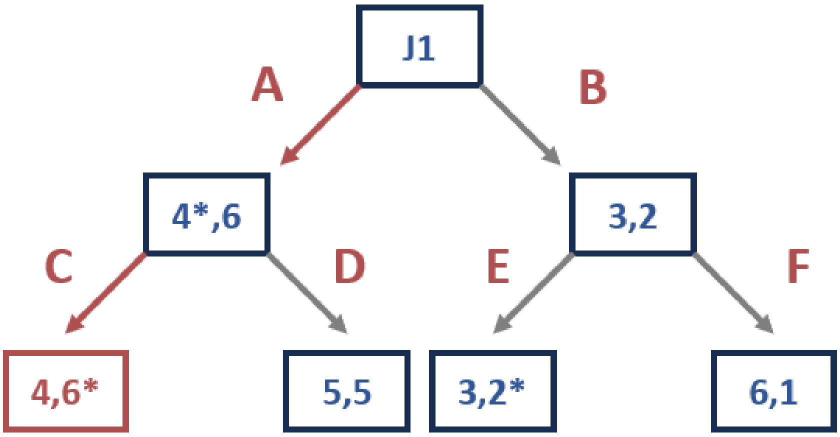
Para resolver este tipo de juegos se utiliza **el algoritmo de inducción hacia atrás (backward induction)**. Se comienza el juego resolviendo los subjuegos que terminan en nodos finales y se elige la respuesta óptima. A cada nodo inicial se le atribuyen los pagos de cada respuesta óptima y se eliminan los subjuegos. Se repite sucesivamente el proceso hasta llegar finalmente al nodo inicial del juego.

Figura 5.4 Juegos dinámicos ejemplo, Inducción hacia atrás



Fuente: Elaboración propia.

Figura 5.5 Juegos dinámicos ejemplo, resolución del juego



ENPS del juego: {A; (C,E)}. Pagos asociados: (4,6)

Fuente: Elaboración propia.

Aclarar que, en el caso de tener varias respuestas óptimas para un subjuego, en el paso siguiente tendríamos tantos árboles como respuestas óptimas hubiera a ese subjuego, teniendo en cuenta todas las posibilidades (si hubiera un subjuego con 2 soluciones, atribuimos dos pagos y realizamos 2 árboles diferentes).

Todo juego finito con Información completa y perfecta tiene al menos un ENPS (en estrategias puras) obtenido por inducción hacia atrás. Además, si ningún jugador tiene más de una respuesta óptima en cada nodo de decisión, el ENPS es único.

Si el juego es de Información completa e imperfecta, se asegura la existencia de algún ENPS, sea en estrategias puras o mixtas.

6. EJEMPLOS CLÁSICOS DE JUEGOS DINÁMICOS

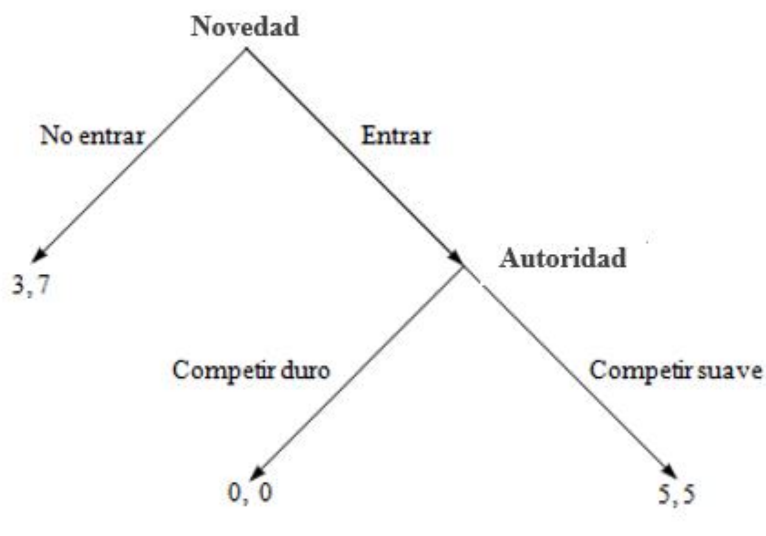
De la misma manera que en los juegos estáticos, tras presentar los juegos dinámicos, su forma de representar en forma extensiva y su modo se de solucionarlos, se estudian algunos ejemplos clásicos.

6.1. Juego de disuasión (Deterrence game)

Basado en el manual de Pérez, Jimeno y Cerdá (2013), el enunciado de este juego dice así: Una empresa monopolista "Autoridad" ejerce el control de un sector y le aporta unos beneficios de 7 u.m. La empresa "Novedad" se está planteando entrar a este sector que aumentaría sus beneficios de 3 u.m. a 5 u.m., esto considerando una buena relación (llamada competencia suave) con la empresa monopolista, la cual vería reducido su beneficio por la llegada de la nueva empresa a 5 u.m. Pero en el caso de que una vez entrada, se estableciera una competencia dura y llevara a guerra de precios entre ambas, ambas empresas perderían sus beneficios.

El juego representado de forma extensiva, o diagrama de árbol sería así: parte de un nodo Inicial, dos nodos de decisión (Novedad y su decisión de entrar, Autoridad y la decisión de qué competencia llevar a cabo), ningún nodo de azar (Información perfecta) y cuatro nodos finales.

Figura 6.1.1 Juego de disuasión



Jugadores: {Novedad, Autoridad}. Estrategias: S_1= {Entrar, no entrar}, S2= {competencia suave, competencia dura}

Fuente: elaboración propia a partir de Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Este juego, representando en forma normal, **representa la justificación del refinamiento de concepto de E.N en ENPS**. Existen dos E.N. en estrategias puras, aunque ambos de forma estática tienen sentido, el perfil (No entrar, competir duro) carece de sentido viendo la dinámica del juego. En este caso, se le considera **"una amenaza no creíble";** si la empresa Novedad toma la decisión de entrar pese a la amenaza de competencia, Autoridad entonces está avocada a establecer una competencia suave para seguir manteniendo beneficios. Si Novedad decidiera no entrar, creyendo la amenaza de competencia dura, entonces se ajusta la amenaza como respuesta óptima ante la decisión de no entrada.

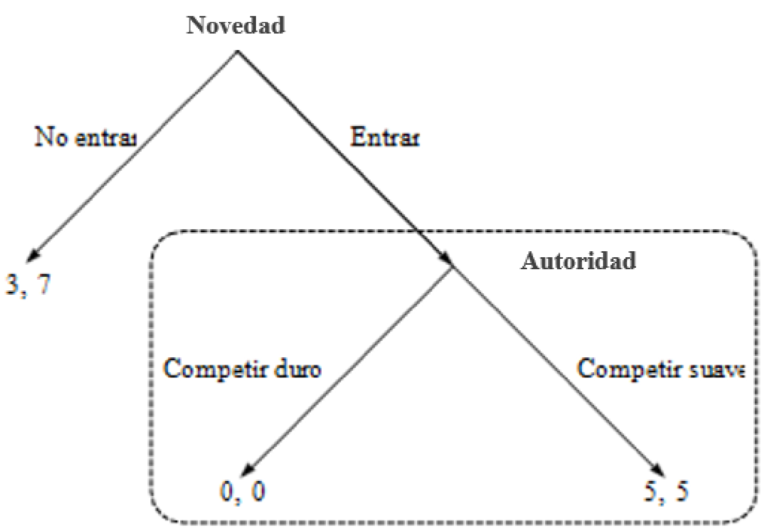
Tabla 6.1.1 Juego de disuasión, matriz de pagos

		Autoridad	
		Competir duro	Competir suave
Novedad	Entrar	0, 0	**5*, 5***
	No entrar	**3*, 7***	3, 7*

Fuente: elaboración propia a partir de datos de Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

En este ejemplo, solo es posible encontrar un subjuego.

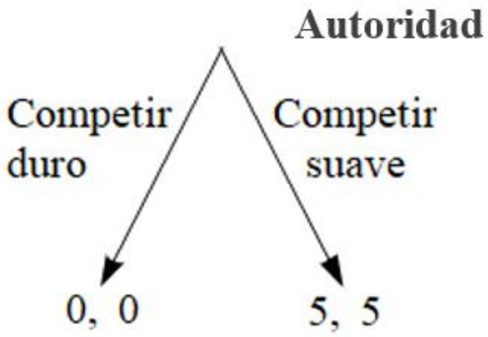
Figura 6.1.2 Juego de disuasión, identificación de subjuego



Fuente: elaboración propia a partir de datos de Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Así, en el juego de disuasión comenzamos resolviendo el subjuego. Encontramos como respuesta óptima competir suave: una vez tomada la decisión de entrar, una competencia suave de Novedad le atribuye unos beneficios de 5 frente a perderlo todo.

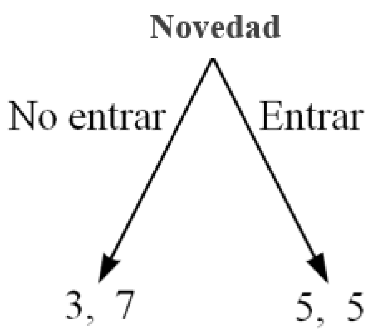
Figura 6.1.3 Juego de disuasión, subjuego



Fuente: elaboración propia a partir de datos de Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Eliminamos el subjuego y atribuimos el pago de respuesta óptima (5,5) al nodo de decisión inicial del subjuego.

Figura 6.1.4 Juego de disuasión, resolución del juego



Fuente: elaboración propia a partir de datos de Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

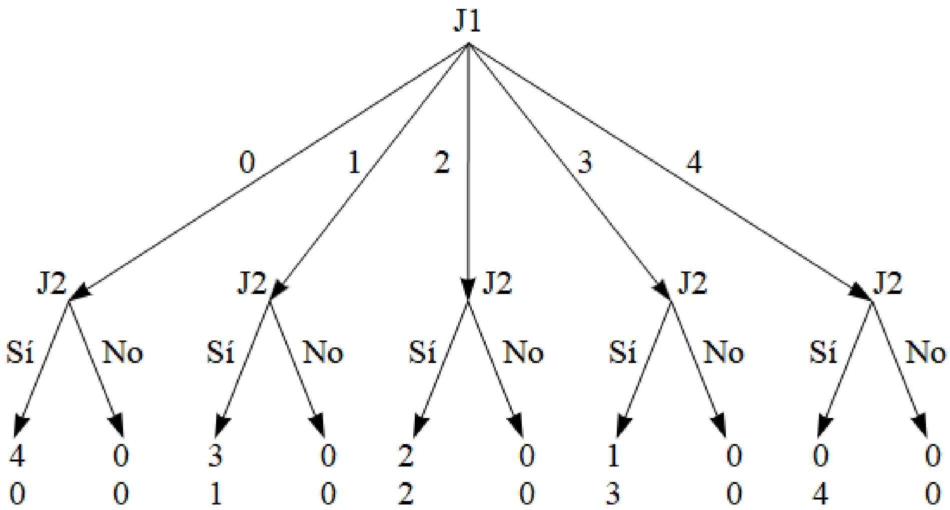
La respuesta óptima al juego es Entrar por parte de la empresa Entrón.
Ante los dos E.N. encontrados: {No entrar, competir duro}, {Entrar, Competir suave}.
El ENPS de este juego es (Entrar, Competir suave).

6.2. Juego del ultimátum (Ultimátum game)

En este juego se va a repartir una bolsa cargada de ($n \geq 1$) monedas entre dos personas. El jugador saca m número de monedas ($0 \leq m \leq n$) y se las ofrece al jugador 2. Este conoce el número de monedas ofrecidas y debe aceptar si recogerlas o no ("SÍ" o "NO").

En caso de aceptar, J2 recibe esas m monedas y el J1 recibe las restantes ($n - m$ monedas). En el caso de rechazar, ninguno recibe ninguna moneda. A continuación, se representa el juego para el caso de $n = 4$ monedas.

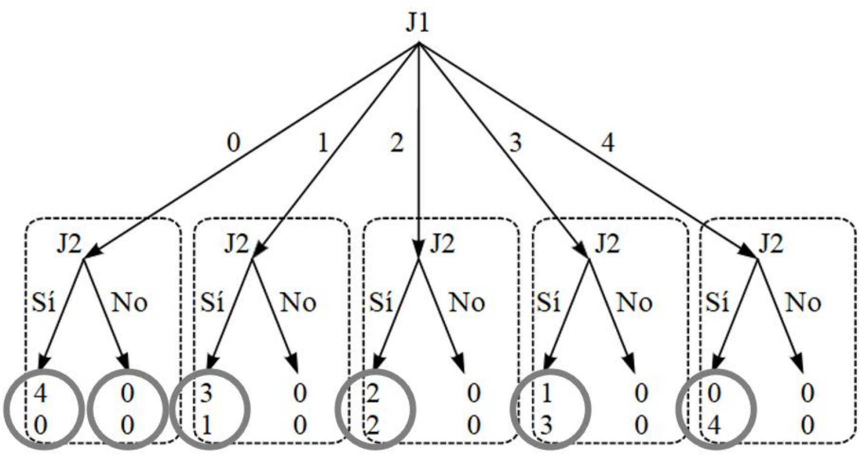
Figura 6.2.1 Juego del ultimátum



Fuente: Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Observamos los pagos para ambos jugadores. Al ser un juego dinámico con información completa y perfecta resolvemos mediante algoritmo de inducción hacia atrás. Encontramos 5 subjuegos, uno por cada valor de m ofrecido a J2, dónde debe decidir si tomar o no. Parece obvio que si J2 tiene en disposición recibir alguna moneda ($m \geq 0$), es preferible (le parezca equitativo o no) tomarla a quedarse sin nada.

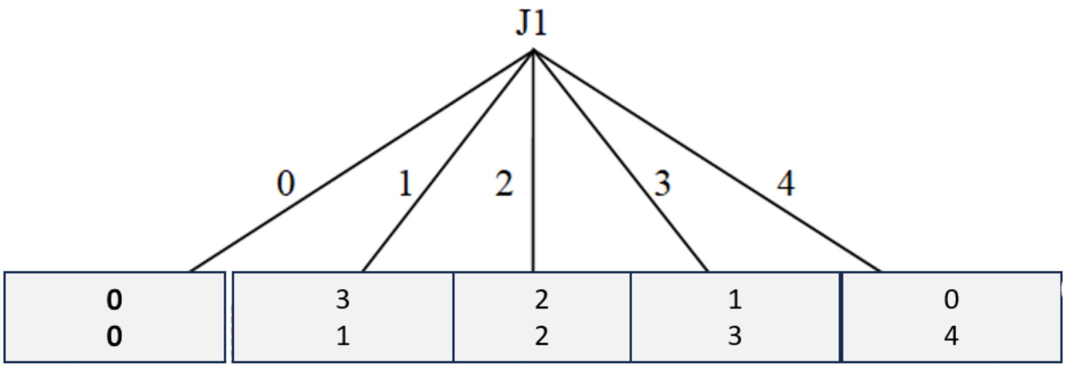
Figura 6.2.2 Juego del ultimátum, identificación de subjuegos



Fuente: elaboración propia a partir de Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

La respuesta óptima en el caso $1 \leq m \leq 4$ es "Sí". En el caso de $m = 0$, a J2 le es indiferente tomar o no, por lo tanto (como ya explicamos anteriormente) habrá dos respuestas a este subjuego. Como en este algoritmo se toman todas alternativas posibles, estudiaremos 2 árboles diferentes en el siguiente paso.

Figura 6.2.3 Juego del ultimátum, Inducción hacia atrás (I)

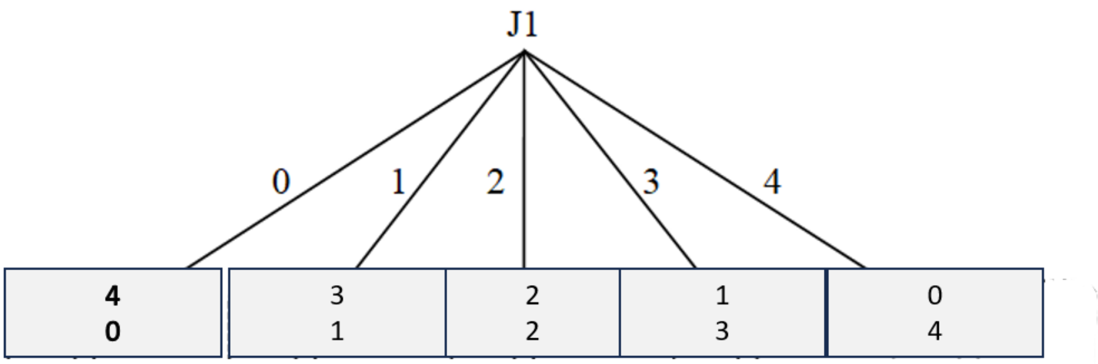


Fuente: elaboración propia a partir de Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Como vemos en el caso de $m = 0$, derivamos en 2 árboles. El primer árbol representa el escenario donde J2 rechaza no llevarse nada y ninguno obtiene rendimiento, nos da un ENPS1 donde J1 reparte una moneda y se lleva el resto.

En el segundo árbol, donde J2 "acepta" no levarse ninguna moneda nos da un segundo $ENPS_2$ dónde J1 se lleva todo el montante de monedas en la bolsa.

Figura 6.2.4 Juego del ultimátum, Inducción hacia atrás (II)



Fuente: elaboración propia a partir de Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

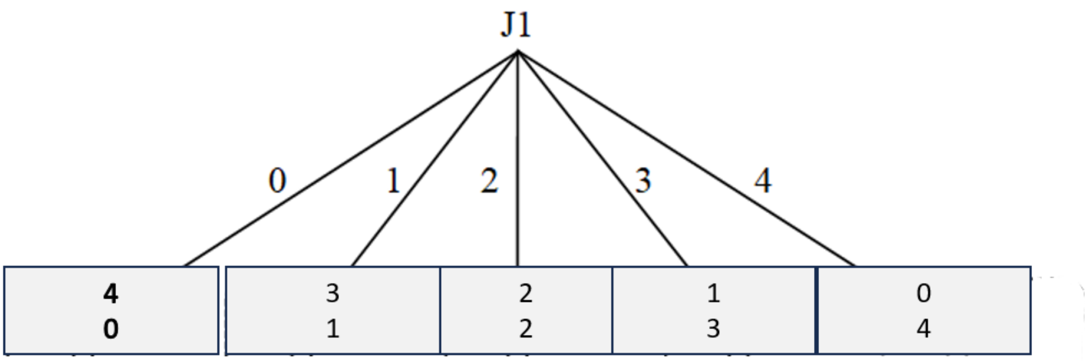
$ENPS_1$= {1, No Sí Sí Sí Sí}= (3,1)

$ENPS_2$= {0, (Sí Sí Sí Si Si)}= (4,0)

6.3. Juego del dictador (Dictator game)

Este juego es una variante del juego del ultimátum y ha sido utilizado especialmente en economía experimental. La diferencia con el juego anterior es que en esta ocasión el jugador 2, está supeditado a la entrega de sustento por parte de su "dictador". Sea cual sea la cantidad de monedas, no puede negarse a recogerlas. En el caso discreto para $n = 4$, la representación en forma extensiva coincidiría con la figura 6.2.4 (Juego del ultimátum, inducción hacia atrás (II))

Figura 6.3.1 Juego del dictador



Fuente: elaboración propia a partir de Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013.

Diversos estudios analizan experimentos realizados para estudiar la codicia o altruismo de los individuos (conducta de los decisores con pleno poder). En dichos experimentos se pone de manifiesto que, aunque presuponiendo que seres racionales deben maximizar su utilidad, se observan ciertos comportamientos solidarios. Una posible explicación radica en el deseo de querer mostrar una imagen benévola ante los demás, o la falta de esfuerzo para conseguir esa bolsa de dinero ("caída del cielo"). Cuando necesitamos hacer un esfuerzo o trabajo previo para obtener ese dinero o propiedad, somos más reticentes a compartirlo ("es fruto de mi propio esfuerzo") que si lo tenemos de modo predeterminado.

7. CONCLUSIONES

Durante la lectura de este trabajo, se espera haber podido presentar los aspectos más característicos de la Teoría de Juegos; mostrando sus planteamientos, estructura, categorías y métodos de resolverlos.

La Teoría de Juegos con el tiempo ha ampliado su campo de estudio, desde su origen hasta nuevos escenarios basados en la competencia y el turno según juegan los jugadores, así como la información del juego que poseen en cada momento. Las clasificaciones entre Juegos estáticos y dinámicos, considerando Información perfecta o no perfecta de los jugadores ha sido la estructura fundamental del trabajo.

Mediante soluciones basadas en la dominación y la respuesta óptima, analizamos los ejemplos encontrando Equilibrios de Nash en los diversos ejemplos, sea tanto en estrategias puras, o en estrategias mixtas. Por último, representamos algunos ejemplos dónde los jugadores operan de forma secuencial mediante árboles de decisión, y se presenta ese refinamiento del E.N. que evita soluciones no creíbles como es el ENPS.

La Teoría de Juegos mediante este tipo de ejemplos ficticios, plantea modelos de respuesta analítica a situaciones de cooperación o conflicto entre individuos, extrapolables a ámbitos económicos o sociales. Así, cuando cada uno de los involucrados debe decidir tomar cierta postura concreta frente a determinado planteamiento, o cuando tiene un abanico abierto de posibilidades (caso de juegos no finitos, como los duopolios presentados anteriormente), la Teoría de Juegos ofrece un análisis matemático de las alternativas y un camino lógico de respuesta.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Agirregabiria, M. (2023, 7 de diciembre). *Juego del ultimátum y variante del dictador*. Economía o justicia. Blog Mikel Agirregabiria. https://blog.agirregabiria.net/2022/05/juego-del-ultimatum-y-variante-del.html
- Bolton, G.E, Katok, E., Zwick, R. (1998*). Dictator game giving: Rules of fairness versus acts of kindness*. International Journal of Game Theory.
- Conthe, M.(2023, 4 de diciembre). *El juego del ultimátum*. El Expansión. https://www.expansion.com/blogs/conthe/2019/07/10/la-cultura-de-la-coercion.html
- Cournot, A. A. (1897). *Researches into the Mathematical Principles of the theory of Wealth*. Macmillan.
- Edgeworth, F.Y. (1881). *Mathematical Physics*. Londres, Kegan Paul.
- Henrich, J., Boyd, R., Bowles, S., Camerer, C., Fehr, E., Gintis, H. (2004*). Foundations of Human Sociality: Economic Experiments and Ethnographic Evidence from Fifteen Small-Scale Societies*. Oxford University Press.
- List, J.A. (2007). *On the interpretation of Giving in Dictator Games*. Journal of Political Economy, The University of Chicago Press.
- Marín Guerrero, J. D. (2017). *Toma de decisiones en el juego de la gallina: caso de estudio*. Proyecto de grado, Universidad de los Andes.
- Pérez, J., Jimeno, J.L., Cerdá, E. (2013). *Teoría de Juegos*. Editorial Gaceta, Madrid
- Sedano, J. (2012) *Teoría de juegos*. El Cedazo.
- Von Neumann, J., Morgenstern, O. (1953). *Game Theory and Economic Behavior*. Tercera edición. Princeton, New jersey, Princeton University Press.