



**Universidad de Valladolid**



**ESCUELA DE INGENIERÍAS  
INDUSTRIALES**

**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

**ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES**

**Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales**

# **Diseño de un surtidor de flujo laminar para alimentar una fuente ornamental**

**Autor:**

**Martín Martín, Guillermo**

**Tutor(es):**

**Méndez Bueno, César  
Ingeniería Energética y  
Fluidomecánica**

**Valladolid, diciembre, 2024.**



## RESUMEN Y PALABRAS CLAVE

En el presente trabajo, se ha diseñado y construido un prototipo de surtidor de flujo laminar para alimentar una fuente ornamental. Este surtidor, conectado a una fuente de alimentación de agua expulsa un chorro de flujo laminar que crea una impresión visual impactante y vistosa.

Apoyándose en los principios teóricos de la mecánica de fluidos y tras varios experimentos preliminares, se llega hasta el prototipo final. A lo largo del trabajo se describen las etapas seguidas y se evalúan los resultados obtenidos.

### Palabras clave:

- Surtidor
- Flujo laminar
- Chorro
- Reynolds
- Diseño

## ABSTRACT AND KEYWORDS

In this work, a prototype of a laminar flow pump has been designed and constructed to supply an ornamental fountain. This pump, connected to a water supply source, ejects a laminar flow jet that creates a striking and visually appealing effect.

Supported by the theoretical principles of fluid mechanics and after several preliminary experiments, the final prototype was achieved. The work details the steps followed and evaluates the results obtained.

### Keywords:

- Pump
- Laminar flow
- Jet
- Reynolds
- Design

## ÍNDICE

Capítulo 1. Introducción y objetivos.....	9
1.1. Aplicaciones del flujo laminar.....	9
1.2. Objetivos del trabajo .....	10
Capítulo 2. Principios teóricos.....	13
2.1. Hipótesis del medio continuo.....	13
2.2. Cinemática de los fluidos .....	14
2.2.1. Operador derivada sustancial .....	14
2.2.2. Movimiento en el entorno de un punto .....	16
2.3. Ecuaciones de conservación .....	20
2.3.1. Teorema del Transporte de Reynolds.....	20
2.3.2. Ecuación de la conservación de la masa .....	21
2.3.3. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.....	22
2.3.4. Ley de Navier Poisson.....	25
2.3.5. Ecuaciones de Navier Stokes.....	26
2.4. Experimento de Reynolds .....	28
2.5. Movimientos con viscosidad dominante, flujo laminar .....	30
2.5.1. Movimientos unidireccionales de líquidos .....	31
2.5.2. Simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes aplicadas al flujo laminar	31
2.5.3. Condiciones iniciales y de contorno .....	32
2.5.4. Movimiento laminar estacionario en conductos de sección circular	33
2.5.5. Condiciones de unidireccionalidad.....	35
2.5.6. Números adimensionales de interés de las ecuaciones de Navier-Stokes	37
2.6. Reflexión de la luz y reflexión interna total .....	38
Capítulo 3. Ensayos preliminares .....	41
3.1. Vaciado de un globo lleno de agua .....	41
3.2. Vaciado de un depósito a través de un tubo.....	42
3.3. Vaciado de un depósito a través de un orificio.....	46
3.4. Vaciado de un depósito a través de distintos tubos.....	47
3.5. Vaciado de un depósito a través de elementos direccionadores	51

3.6.	Experimentos estacionarios .....	53
Capítulo 4.	Prototipo final.....	63
4.1.	Versiones y añadidos agregados al prototipo .....	68
4.1.1.	Versión 2: Boca en forma de tronco de cono a la salida .....	68
4.1.2.	Versión 3: Arandela en la boca de salida.....	69
4.1.3.	Añadido: Láser con fibra óptica en el interior .....	70
Capítulo 5.	Resultados:.....	73
5.1.	Resultados de la Versión 2.....	77
5.2.	Resultados de la Versión 3.....	79
5.3.	Resultados del añadido .....	80
Capítulo 6.	Presupuesto .....	85
6.1.	Introducción y objetivos .....	85
6.2.	Coste de fabricación .....	85
6.2.1.	Coste del material .....	85
6.2.2.	Coste de la Mano de Obra Directa.....	87
6.2.3.	Coste del Puesto de Trabajo .....	89
6.3.	Mano de Obra Indirecta .....	91
6.4.	Cargas Sociales .....	92
6.5.	Gastos Generales.....	92
6.6.	Beneficio Industrial .....	92
6.7.	Resultado del presupuesto industrial.....	93
Capítulo 7.	Conclusiones y líneas de trabajo futuras.....	95
7.1.	Conclusiones .....	95
7.2.	Líneas de trabajo futuras.....	96
Capítulo 8.	Bibliografía .....	103
Anexos .....		107

## ÍNDICE DE FIGURAS:

FIGURA 2-1 DEFORMACIÓN ANGULAR [5] .....	18
FIGURA 2-2 VISUALIZACIÓN DEL EXPERIMENTO DE REYNOLDS [15].....	28
FIGURA 2-3 PERFIL DE VELOCIDADES EN UN CONDUCTO CIRCULAR [5] .....	34
FIGURA 2-4 DISTANCIAS Y VELOCIDADES TÍPICAS EN UN CONDUCTO [5].....	35
FIGURA 2-5 GEOMETRÍA DE LA LEY DE SNELL [20].....	39
FIGURA 3-1 VACIADO DE UN GLOBO DE AGUA.....	41
FIGURA 3-2 DEPÓSITO DE AGUA QUE SE VACÍA A TRAVÉS DE UN TUBO DE LONGITUD L.....	42
FIGURA 3-3 VELOCIDAD Y RE PARA L=0,7 M .....	43
FIGURA 3-4 VELOCIDAD Y RE PARA L=0,5 M .....	43
FIGURA 3-5 VELOCIDAD Y RE PARA L=0,15 M.....	43
FIGURA 3-6 REPRESENTACIÓN DE LA VELOCIDAD FRENTE A LA ALTURA .....	44
FIGURA 3-7 REPRESENTACIÓN DEL RE FRENTE A LA ALTURA .....	44
FIGURA 3-8 PERFIL DE VELOCIDADES EN EL CONDUCTO.....	45
FIGURA 3-9 VACIADO DE UN DEPÓSITO A TRAVÉS DE UN TUBO .....	46
FIGURA 3-10 VACIADO DE UN DEPÓSITO A TRAVÉS DE UN ORIFICIO CON D=4 MM.....	46
FIGURA 3-11 VELOCIDAD Y RE PARA D=8 MM Y L=50 MM .....	47
FIGURA 3-12 VACIADO DE UN DEPÓSITO A TRAVÉS DE UN TUBO CON D=8 MM Y L=50 MM.....	48
FIGURA 3-13 VELOCIDAD Y RE PARA D=8 MM Y L=400 MM .....	48
FIGURA 3-14 VELOCIDAD Y RE PARA D=12 MM Y L=300 MM.....	48
FIGURA 3-15 VELOCIDAD Y RE PARA D=6 MM Y L=300 MM .....	49
FIGURA 3-16 VELOCIDAD Y RE PARA D=5 MM Y L=500 MM .....	49
FIGURA 3-17 DEPÓSITO CON UN TUBO CON D=5 MM Y L=500 MM.....	50
FIGURA 3-18 ALAMBRE QUE SUJETA AL TUBO DE D=5 MM Y L=500 MM.....	50
FIGURA 3-19 SALIDA DEL AGUA A TRAVÉS DEL TUBO DE D=5 MM Y L=500 MM .....	50
FIGURA 3-20 TUBO CON ELEMENTOS DIRECCIONADORES MÁS CORTOS EN SU INTERIOR.....	52
FIGURA 3-21 TUBO CON ELEMENTOS DIRECCIONADORES MÁS LARGOS EN SU INTERIOR.....	52
FIGURA 3-22 REGULADOR DE PRESIÓN .....	54
FIGURA 3-23 ENTRADA DE AGUA AL DEPÓSITO.....	54
FIGURA 3-24 VACIADO DEL DEPÓSITO CERRADO A TRAVÉS DE UN TUBO CON D=8 MM Y L=40 MM .....	55
FIGURA 3-25 VISTA ANTERIOR DE LA BOCA.....	56
FIGURA 3-26 VISTA EN ALZADO DE LA BOCA .....	56
FIGURA 3-27 BOCA AJUSTADA COMO SALIDA DEL DEPÓSITO.....	57
FIGURA 3-28 POSICIÓN RELATIVA DE LOS PUNTOS 1 Y 2.....	57
FIGURA 3-29 VELOCIDAD A LA SALIDA Y NÚMERO DE RE EN FUNCIÓN DE LA PRESIÓN .....	58
FIGURA 3-30 REPRESENTACIÓN DE LA VELOCIDAD FRENTE A LA PRESIÓN .....	58
FIGURA 3-31 REPRESENTACIÓN DEL NÚMERO DE RE FRENTE A LA PRESIÓN .....	59
FIGURA 3-32 SALIDA DEL AGUA DEL DEPÓSITO CERRADO A TRAVÉS DE LA BOCA A UNA PRESIÓN ALTA.....	59
FIGURA 3-33 SALIDA DEL AGUA DEL DEPÓSITO CERRADO A TRAVÉS DE LA BOCA A UNA PRESIÓN BAJA.....	60
FIGURA 3-34 SEGUNDA BOCA DEL EXPERIMENTO.....	61
FIGURA 3-35 SALIDA DEL AGUA A TRAVÉS DE LA SEGUNDA BOCA .....	61

FIGURA 3-36 FLUJO LAMINAR EN LA SALIDA DE LA SEGUNDA BOCA .....	62
FIGURA 4-1 SURTIDOR DE FLUJO LAMINAR COMERCIAL.....	63
FIGURA 4-2 TUBO DE PVC CON L=450 MM.....	64
FIGURA 4-3 ANILLO DE PVC Y MALLA METÁLICA .....	64
FIGURA 4-4 MALLA METÁLICA CUBRIENDO AL ANILLO .....	65
FIGURA 4-5 TEJIDO POROSO EN EL INTERIOR DEL ANILLO Y DEL TUBO .....	65
FIGURA 4-6 TUBOS PEQUEÑOS EN EL INTERIOR DEL TUBO MAYOR.....	66
FIGURA 4-7 ENLACE DE PVC .....	67
FIGURA 4-8 BOCA UNIVERSAL .....	67
FIGURA 4-9 TAPA DE PVC .....	67
FIGURA 4-10 TAPA DE PVC TALADRADA .....	68
FIGURA 4-11 TAPA CON TALADRO DE D=3 CM .....	68
FIGURA 4-12 TAPA DE PVC CON BOCA PEGADA .....	69
FIGURA 4-13 TAPA DE PVC CON ARANDELA METÁLICA PEGADA .....	69
FIGURA 4-14 LUZ LED .....	70
FIGURA 4-15 FIBRA ÓPTICA INTRODUCIDA EN EL SURTIDOR .....	70
FIGURA 4-16 FIBRA ÓPTICA SUJETA A UN ALAMBRE .....	71
FIGURA 5-1 TAPA DE PVC TALADRADA CON UN PEQUEÑO CHAFLÁN.....	73
FIGURA 5-2 SALIDA DEL AGUA POR EL ORIFICIO DEL SURTIDOR .....	74
FIGURA 5-3 CHORRO LAMINAR ARQUEADO .....	74
FIGURA 5-4 CHORRO LAMINAR INCLINADO .....	75
FIGURA 5-5 CHORRO DE FLUJO LAMINAR QUE ACABA EN TURBULENTO.....	76
FIGURA 5-6 CHORRO LAMINAR PROVENIENTE DEL SURTIDOR .....	76
FIGURA 5-7 CHORRO SALIENDO DEL SURTIDOR A TRAVÉS DE LA BOCA .....	78
FIGURA 5-8 TURBULENCIAS DEL CHORRO.....	78
FIGURA 5-9 CHORRO TURBULENTO QUE PASA A TRAVÉS DE LA ARANDELA.....	79
FIGURA 5-10 CHORRO TURBULENTO SALIENDO DEL SURTIDOR.....	80
FIGURA 5-11 LUZ DEL LED REFLEJADA A LO LARGO DEL CHORRO LAMINAR .....	81
FIGURA 5-12 LUZ DEL LED ESCAPANDO DEL CHORRO TURBULENTO .....	81
FIGURA 5-13 FIBRA ÓPTICA NO CENTRADA EN EL INTERIOR DEL SURTIDOR.....	82
FIGURA 5-14 CHORRO LAMINAR PROVENIENTE DEL SURTIDOR DEL QUE NO ESCAPA LA LUZ DEL LED .....	82
FIGURA 6-1 TABLA COSTE DE MATERIAL .....	86
FIGURA 6-2 TABLA DÍAS REALES DE TRABAJO .....	87
FIGURA 6-3 TABLA SALARIO HORA POR CUALIFICACIÓN .....	87
FIGURA 6-4 TABLA SALARIO HORA .....	87
FIGURA 6-5 TABLA DE ASIGNACIÓN DE TAREAS.....	88
FIGURA 6-6 TABLA COSTE MANO DE OBRA DIRECTA .....	88
FIGURA 6-7 TABLA DE HIPÓTESIS .....	90
FIGURA 6-8 TABLA COSTE DEL PUESTO DE TRABAJO.....	90
FIGURA 6-9 TABLA COSTE DEL PUESTO DE TRABAJO SIMPLIFICADA.....	91
FIGURA 6-10 TABLA COSTE DE FABRICACIÓN .....	91
FIGURA 6-11 TABLA COSTE MANO DE OBRA INDIRECTA .....	91
FIGURA 6-12 TABLA CARGAS SOCIALES.....	92

FIGURA 6-13 TABLA GASTOS GENERALES .....	92
FIGURA 6-14 TABLA BENEFICIO INDUSTRIAL .....	92
FIGURA 6-15 TABLA PRECIO DE VENTA EN FÁBRICA .....	93
FIGURA 6-16 TABLA PRECIO DE VENTA AL PÚBLICO .....	93
FIGURA 6-17 TABLA DE CONSIDERACIONES .....	93
FIGURA 7-1 OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE [23] .....	96
FIGURA 7-2 .....	97
FIGURA 7-3 DIAGRAMA DE MOODY [25] .....	100
FIGURA 7-4 CURVA DE FUNCIONAMIENTO DE LA BOMBA [27] .....	102



# Capítulo 1. Introducción y objetivos

El estudio del comportamiento de los fluidos ha jugado un papel fundamental a lo largo de la historia, debido a su relevancia a la hora de desarrollar la tecnología y la ingeniería moderna. Sus múltiples aplicaciones involucran campos relacionados con la física y la ingeniería, como la hidráulica, la aeronáutica o los procesos industriales. Para poder llevar a cabo este desarrollo, ha sido vital conocer en profundidad los flujos de los fluidos y su comportamiento bajo distintas condiciones. Dentro de este ámbito, se enmarca el flujo laminar, caracterizado por ser un tipo de movimiento del fluido ordenado y estable, donde las partículas del fluido se mueven en trayectorias paralelas sin chocar entre sí. Es un tipo de movimiento que nada tiene que ver con el flujo turbulento, que es un movimiento caótico y desordenado.

## 1.1. Aplicaciones del flujo laminar

Como bien se ha explicado anteriormente, el flujo laminar se caracteriza por el movimiento ordenado y suave de un fluido. Estas características hacen que el flujo laminar tenga aplicaciones como:

**Cabinas de Flujo Laminar:** se trata de unas cabinas que están ventiladas mediante un sistema de aire de flujo laminar, que garantiza que el aire que entra en la cabina sea estéril y libre de contaminantes, además de posteriormente arrastrar partículas y microorganismos lejos del área de trabajo [1]. Las salas en las que se utilizan estos sistemas son conocidas como salas blancas. Por estas características, se pueden encontrar estos sistemas de ventilación en:

- Quirófanos: es importante mantener estos lugares limpios y libres de partículas que pudieran provocar una infección en los pacientes durante el proceso de la cirugía.
- Fabricación de microelectrónica: los meticulosos procesos de fabricación de semiconductores precisan de un ambiente limpio sin partículas que pudieran perjudicar o alterar las propiedades de los componentes que se estén fabricando.
  - Industria farmacéutica.
  - Industria alimentaria.
  - Áreas de pintura de la industria del automóvil.

**Túneles de viento:** se utilizan para estudiar el comportamiento del flujo del aire alrededor de aeronaves y vehículos [2]. En ellos se optimizan los diseños para mantener el flujo laminar en la mayor medida posible.

**Reactores químicos:** en ciertos reactores, mantener el flujo laminar puede ser crucial para controlar las reacciones químicas y obtener productos de alta

pureza. Un flujo uniforme y predecible permite una mejor gestión de las variables del proceso, como la temperatura y la concentración de reactivos [3].

**Lubricación hidrodinámica:** consiste en la separación de dos superficies sólidas por una película de lubricante de modo que no exista contacto entre ellas [4]. Así, se sustituye el contacto que existiría entre los dos sólidos por un contacto entre el sólido y un líquido, que tienen una fricción mucho menor y así se reduce el desgaste de dichas superficies [5]. Si estas dos superficies separadas por un fluido, pertenecieran a algún tipo de mecanismo y existiera un movimiento relativo entre ellas, el tipo de movimiento del lubricante entre ellas es de flujo laminar. El uso de la lubricación hidrodinámica se remonta a los antiguos egipcios, pero fue Reynolds en 1886 el primero en formular una teoría acerca de ella [6]. La importancia de la lubricación es tal, que la tercera parte de la energía generada en el mundo se dedica a vencer la fricción entre objetos. Entre el 2% y el 5% del PIB de los países industrializados se podría ahorrar mediante un mejor uso de los conocimientos actuales de la lubricación hidrodinámica [7]. Estos datos aportan una visión acerca de la importancia de la lubricación hidrodinámica y de la importancia sobre el conocimiento del flujo laminar para poder manejarla adecuadamente.

## 1.2. Objetivos del trabajo

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es profundizar en el conocimiento y la comprensión del flujo laminar, mediante el diseño un surtidor de agua que genere un chorro con un régimen de flujo laminar. Este surtidor, proporcionará un efecto visual atractivo e impactante que permitirá su uso como fuente ornamental. La principal dificultad del proyecto recae en llegar a este tipo de flujo usando agua como fluido de trabajo, debido a su baja viscosidad.

Por otro lado, este surtidor tendrá un valor añadido como herramienta práctica de aprendizaje sobre el flujo laminar, al poder utilizarse, por ejemplo, en laboratorios de mecánica de fluidos. Al contar con un dispositivo que permite la observación directa de este tipo de flujo, se facilitará la enseñanza a los estudiantes, promoviendo una comprensión más clara de las propiedades básicas del flujo laminar. Esto les permitirá distinguirlo fácilmente de un flujo turbulento, reforzando los conceptos teóricos a través de la experiencia práctica.

A lo largo del Capítulo 2, se llevará a cabo un análisis detallado del movimiento de los fluidos, comenzando desde el punto de vista más elemental, hasta llegar a un conjunto de ecuaciones que describen el flujo laminar. Además, se describirán las condiciones que se deben cumplir para lograr este tipo de flujo y se presentará un número adimensional, como el Reynolds, que permite identificarlo.



En el Capítulo 3, se describirán los experimentos y prototipos preliminares creados. Se describirán los pasos que llevaron a la concepción de estos experimentos preliminares, los resultados previstos teóricamente y su comparación con las observaciones y mediciones realizadas en el momento de su aplicación. Todos estos prototipos preliminares sirvieron como camino de aprendizaje hasta llegar al desarrollo del prototipo final.

Ya en el Capítulo 4, se describirá detalladamente el proceso de fabricación del prototipo final del surtidor, detallando los materiales y elementos necesarios, así como las operaciones a realizar hasta la construcción del mismo. Además, se explicarán diferentes modificaciones agregadas al prototipo para tratar de optimizar el efecto visual creado por este.

Tras realizar múltiples pruebas con el prototipo final y evaluar las modificaciones implementadas, en el Capítulo 5 se presentan y analizan los resultados obtenidos. En este capítulo se evaluará el grado de satisfacción con los resultados, considerando si tanto el diseño final del surtidor como las modificaciones añadidas lograron cumplir con los objetivos planteados. En los casos donde los resultados difirieron de las expectativas iniciales, se incluye una breve reflexión para identificar posibles causas y aprender de dichas desviaciones.

Una vez finalizadas las pruebas y evaluados los resultados obtenidos, en el Capítulo 6 se elaborará el presupuesto sobre el prototipo de surtidor fabricado. Esto permitirá hacer una aproximación de cuál sería el precio de venta al público de este surtidor en caso de comercializarse.

Como complemento al trabajo, en el Capítulo 7 se estudiará la viabilidad de crear un circuito cerrado. Esto permitiría que el surtidor fabricado pudiera funcionar en todo momento con el mismo volumen de agua, sin necesidad de estar conectado a una fuente de alimentación externa. Además, en este capítulo, se dará visibilidad y se destacará la importancia del agua como recurso natural en la línea de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) de la Agenda 2030.

Por último, en el Capítulo 8 se expondrán las conclusiones obtenidas a lo largo del desarrollo del trabajo. Este capítulo evaluará si este ha cumplido con los objetivos previamente propuestos.



## Capítulo 2. Principios teóricos

### 2.1. Hipótesis del medio continuo

Antes de empezar a hablar acerca del flujo laminar, es de utilidad presentar ciertas definiciones e hipótesis que hacen posible el estudio de los fluidos.

En primer lugar, para definir lo que es un fluido, se va a exponer un contraste con lo que es un sólido, ya que ambos estados de la materia presentan comportamientos claramente diferenciados.

A diferencia de los sólidos, los fluidos no tienen una forma definida, sino que adoptan la del recipiente en el que se encuentran. Por otra parte, si se aplica un esfuerzo cortante finito no nulo sobre un fluido, este tiene la capacidad de deformarse indefinidamente, con una determinada velocidad de deformación. Sin embargo, los sólidos responden a este esfuerzo cortante con una deformación finita [8]. Esta deformación de los sólidos es más compleja de explicar, pero no es objeto de este trabajo.

Existen fluidos que se pueden llegar a comportar como sólidos elásticos y otros como la brea que se comportan como sólidos, pero estos tipos de fluidos no son los del objeto de estudio de este trabajo. Los fluidos de estudio de este trabajo son los fluidos newtonianos. Un fluido newtoniano es aquel en el que la viscosidad puede ser considerada constante en el tiempo y en el que la velocidad de deformación lineal es linealmente proporcional al esfuerzo realizado sobre la partícula fluida [9].

Los fluidos se pueden dividir entre líquidos y gases, la diferencia radica en que los líquidos tienden a conservar su volumen, mientras los gases tienden a ocupar el mayor volumen posible, ya que las fuerzas cohesivas de sus moléculas son menores que las de los líquidos.

De este modo, los fluidos son agregaciones de moléculas muy dispersas. En los gases, el orden de la distancia entre moléculas es mayor al tamaño de éstas; y no tan dispersas en los líquidos, donde la distancia entre moléculas es del tamaño de éstas.

Debido a estos motivos, el estudio de ciertas propiedades de un fluido, para un determinado volumen, como por ejemplo la densidad, no da una idea real de la densidad del fluido, ya que el número de moléculas de este volumen está cambiando constantemente.

Para abordar la problemática anterior, surge la hipótesis del medio continuo. Esta establece que, si se toma un volumen de fluido infinitesimalmente pequeño pero lo suficientemente grande (denominado  $\delta V^*$ ) como para contener un número significativo de moléculas, se puede asumir que la materia está distribuida de manera continua en el espacio. Bajo este supuesto, cualquier

propiedad del fluido (como presión, densidad, temperatura o viscosidad) puede describirse como una función continua en el espacio. Esto permite la aplicación del cálculo diferencial para analizar dichas propiedades [10].

Se aproxima que, este volumen diferencial  $\delta V^*$ , es de alrededor de  $10^{-9} \text{ mm}^3$  para líquidos y gases a presión atmosférica [11].

## 2.2. Cinemática de los fluidos

Ahora que se conoce lo que es un fluido, se puede estudiar y analizar su movimiento y cómo se comporta.

La cinemática de los fluidos es una rama de la física, específicamente de la mecánica de fluidos, que estudia el movimiento de los fluidos, sin tener en cuenta la masa o las fuerzas que provocan este movimiento.

La hipótesis principal que siguen estos estudios es la hipótesis del medio continuo.

Así pues, se va a seguir una visión euleriana, en la que se estudia cada punto del campo fluido, frente a una versión lagrangiana en la que se sigue el movimiento de una porción del fluido. Cada punto del campo fluido está definido por un vector de posición  $\vec{x}(t)$ , dependiente de cada instante de tiempo; y cada punto tendrá una serie de propiedades fluidas [12].

### 2.2.1. Operador derivada sustancial

Sea  $\phi(x(t), y(t), z(t), t)$  una propiedad escalar del fluido, como por ejemplo la temperatura. La variación de dicha propiedad con respecto del tiempo es debida tanto al paso del tiempo como a su movimiento y se puede expresar como:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

*Ecuación 1*

Donde:

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

*Ecuación 2*

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

*Ecuación 3*

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

Ecuación 4

Así pues, se puede expresar la derivada como:

$$\frac{d\phi}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot (v_x \quad v_y \quad v_z) + \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\phi$$

Ecuación 5

A esta derivada, se la suele expresar como:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\phi$$

Ecuación 6

A este operador matemático, se le conoce como operador derivada sustancial, donde el primer término es la derivada local y expresa la variación de la propiedad a lo largo del tiempo y el segundo término es la derivada convectiva, que expresa la variación de la propiedad por moverse la partícula de un punto a otro. [5]

El uso de la derivada sustancial, ayuda a simplificar algunas de las ecuaciones relacionadas con los fluidos que se verán más adelante.

### Aplicación de la derivada sustancial al cálculo de la aceleración:

La aceleración es la derivada del vector velocidad siguiendo la partícula.

La velocidad es una propiedad vectorial del fluido, con tres componentes,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ . Cada una de estas es escalar y depende de la posición y el tiempo:

$$\vec{v}(x(t), y(t), z(t), t)$$

Ecuación 7

Así pues, el vector aceleración se obtiene derivando cada una de los componentes del vector velocidad, que son escalares. Por ejemplo, para la coordenada x:

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_x$$

Ecuación 8

Quedando el vector aceleración definido como:

$$\vec{a} = \left( \frac{Dv_x}{Dt}, \frac{Dv_y}{Dt}, \frac{Dv_z}{Dt} \right)$$

*Ecuación 9*

De este modo, se pueden deducir las siguientes conclusiones:

- Un fluido con un movimiento estacionario, que es aquel en el que la velocidad no depende del tiempo, sí puede experimentar una aceleración al cambiar de trayectoria.
- Un fluido uniforme, que es aquel en el que la velocidad no depende de la posición, sí puede experimentar una aceleración al cambiar el valor de la velocidad a lo largo del tiempo [5].

### 2.2.2. Movimiento en el entorno de un punto

A continuación, se van a expresar cada uno de los movimientos a los que se somete una partícula fluida, tratando de exponerlos en función de las variaciones del vector velocidad.

El movimiento de los sólidos (rígidos) se puede descomponer en movimientos más sencillos como una traslación y una rotación. Si un sólido está sometido únicamente a un movimiento de traslación, la velocidad de todos los puntos del sólido es la misma. Sin embargo, los fluidos pueden sufrir deformaciones y la velocidad de dos de sus puntos puede no ser la misma, aunque no experimente un giro. Por lo tanto, es muy interesante estudiar como es el movimiento de un fluido en el entorno de un punto y cómo se deformaría un volumen muy pequeño de este fluido.

Se van a tomar dos puntos A y B de un volumen diferencial del fluido, separados por una distancia caracterizada por un vector  $\delta\vec{x}$ . El punto A, está situado con un vector  $\vec{x}$  respecto a un punto origen O, de tal modo que el punto B está situado con un vector  $\vec{x} + \delta\vec{x}$  respecto a dicho punto O.

De este modo, se puede expresar la diferencia de velocidad de los puntos A y B del fluido  $\delta\vec{v}$  como:

$$\delta\vec{v} = \vec{v}(\vec{x} + \delta\vec{x}) - \vec{v}(\vec{x})$$

*Ecuación 10*

Aplicando la definición de derivada:

$$\delta\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}} \cdot \delta\vec{x} = \nabla\vec{v} \cdot \delta\vec{x}$$

*Ecuación 11*

Siendo  $\nabla\vec{v}$  el tensor gradiente de velocidad.



Aplicando la notación de subíndices, se puede expresar el tensor gradiente de velocidad de la siguiente forma:

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Ecuación 12

Así, se descompone el tensor gradiente de velocidad:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Ecuación 13

En otros dos tensores, el primero de ellos simétrico y el segundo anti simétrico:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación 14

Al tensor simétrico se le conoce como tensor de velocidades de deformación y se representa como  $e_{ij}$ .

Al tensor anti simétrico se le conoce como tensor de rotación y se representa como  $\xi_{ij}$ .

Se puede descomponer el movimiento del volumen fluido en 4 movimientos más sencillos:

- Traslación
- Deformación longitudinal
- Deformación angular
- Rotación como sólido rígido.

### Traslación

Es el movimiento que menos interés tiene en el estudio del movimiento del volumen fluido. El movimiento del fluido por traslación en la dirección  $i$  al cabo de un determinado tiempo  $\delta t$  sería:  $v_i \cdot \delta t$

### Deformación longitudinal

Por definición, la característica más importante de un fluido, bien sea un líquido o un gas, es que se puede deformar. Por ello, cuando un volumen fluido se mueve, puede sufrir fácilmente una deformación.

Los términos de la diagonal del tensor de velocidades de deformación, representan las velocidades de deformación longitudinal (elongación) del volumen fluido en cada una de las direcciones.

Sumando los componentes de la diagonal, se obtiene la velocidad de dilatación cúbica, instantánea e unitaria:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \text{div}(\vec{v})$$

Ecuación 15

Es decir, la suma de los elementos de la diagonal del tensor de velocidades de deformación, que es un invariante, es igual a la divergencia del vector velocidad. Esto significa que, si la divergencia del vector velocidad fuera nula, entonces el volumen del cubo que se está estudiando no variaría, por lo tanto el fluido sería un fluido incompresible [5].

### Deformación angular

Los elementos fuera de la diagonal principal del tensor de velocidades de deformación  $e_{ij}$  (con  $i \neq j$ ) representan la mitad de la velocidad con la que el ángulo recto que inicialmente formarían dos líneas de partículas que coinciden con los ejes  $x_i$  y  $x_j$ .

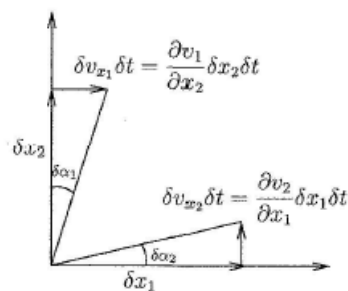


Figura 2-1 Deformación angular [5]

Se puede expresar a las tangentes de los ángulos como:

$$\tan(\delta\alpha_1) \cong \delta\alpha_1 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 \cdot \delta t$$

Ecuación 16

$$\tan(\delta\alpha_2) \cong \delta\alpha_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \cdot \delta x_2 \cdot \delta t$$

Ecuación 17

De ahí, se puede expresar a la velocidad instantánea de velocidad angular como:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \alpha_1 + \delta \alpha_2}{\delta t} = \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 2 \cdot e_{12}$$

Ecuación 18

De este modo, estos elementos del tensor anti simétrico representan la deformación angular que experimenta el fluido.

### Rotación como sólido rígido

Los elementos del tensor anti simétrico o tensor de rotación están relacionados con un vector de giro  $\vec{\Omega}$ , pudiéndose asociar los componentes de este vector con el tensor de rotación de la siguiente manera:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación 19

Donde, por ejemplo:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right)$$

Ecuación 20

Representa la velocidad de giro en la dirección 1.

El vector de giro  $\vec{\Omega}$ , se puede calcular como:

$$\vec{\Omega} = rot(\vec{v}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \vec{k}$$

Ecuación 21

Al vector  $rot(\vec{v})$  se le conoce como vorticidad y define la rotación de las partículas fluidas. Si este vector fuera nulo indicaría que la corriente fluida tiene un movimiento irrotacional y por lo tanto sus partículas no tendrían un movimiento de rotación como sólido rígido [5].

Ahora que se conoce como se mueve y deforma un fluido en el entorno de un punto, se utilizarán algunas de estas nociones para obtener las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos.

## 2.3. Ecuaciones de conservación

### 2.3.1. Teorema del Transporte de Reynolds

Un volumen fluido se refiere a una porción definida de fluido que se analiza en su conjunto mientras se mueve a través del espacio.

El Teorema del Transporte de Reynolds surge de la complejidad de analizar y comprender como cambian las propiedades físicas de un volumen fluido a lo largo del tiempo. De la hipótesis de medio continuo se extrae que las propiedades de un volumen fluido pueden variar no solo con el paso del tiempo, sino que también con su posición. Al estar las partículas individuales del fluido en constante movimiento, es realmente complejo estudiar sus propiedades.

El Teorema del Transporte de Reynolds proporciona unas herramientas matemáticas que relacionan el estudio del cambio de las propiedades de un volumen fluido con el estudio del cambio de estas propiedades en un volumen de control [11].

Un volumen de control es una abstracción matemática. Se trata de un volumen abstracto en el espacio o en movimiento a través del cual fluye el fluido. Las superficies que encierran el volumen de control se conocen como superficies de control [13].

De forma matemática se puede expresar como:

$$\left. \frac{dB_{sistema}}{dt} \right|_{VF} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \beta \cdot \rho \cdot dV + \iint_{SC} \beta \cdot \rho \cdot (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) \cdot dS$$

*Ecuación 22 [11]*

Donde:

B: propiedad extensiva del fluido

$\beta$ : propiedad intensiva del fluido

De modo que:

$$\beta = \frac{dB}{dm}$$

*Ecuación 23 [11]*

### 2.3.2. Ecuación de la conservación de la masa

Por definición, un volumen fluido es una porción del sistema fluido que está compuesto por las mismas partículas en todo momento, lo que quiere decir que su masa no varía con el tiempo:

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{VF} = 0$$

Ecuación 24

Al ser la masa una propiedad fluida, se puede aplicar el Teorema del Transporte de Reynolds para transformar la expresión de un volumen fluido a un Volumen de Control. Tomando:

$$B = m$$

Ecuación 25

$$\beta = \frac{dB}{dm} = \frac{dm}{dm} = 1$$

Ecuación 26

Se obtiene la siguiente expresión:

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{VF} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho \cdot dV + \iint_{SC} \rho \cdot (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) \cdot dS = 0$$

Ecuación 27

Esta es la ecuación de la conservación de la masa en forma integral, donde el primer término refleja la variación temporal de la masa en el Volumen de Control escogido y el segundo término representa el flujo neto de masa a través de las superficies del Volumen de Control. [11]

Si se desea estudiar lo que le ocurre a un volumen diferencial del sistema fluido, a partir de la expresión anterior se puede obtener una forma diferencial de esta. Para ello, en primer lugar, se aplica el Teorema de Gauss-Ostrogradski, que enuncia que la integral de superficie de un campo vectorial sobre una superficie cerrada es igual a la integral de volumen de la divergencia sobre la región dentro de la superficie, [14] al segundo término, obteniendo:

$$\iint_{SC} \rho \cdot (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) \cdot dS = \iiint_{VC} \text{div}(\rho \cdot \vec{v}_r) \cdot dV$$

Ecuación 28

Además, si se escoge un VC fijo, se tiene que  $\vec{v}_r = \vec{v}$ , por lo tanto, la expresión integral quedaría expresada como:

$$\iiint_{VC} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{v}) \right] dV = 0$$

Ecuación 29

Ahora, se va a adoptar la hipótesis de que este VC diferencial es lo suficientemente pequeño como para considerar que la integral es:

$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{v}) \right] \cdot \iiint_{VC} dV = 0$$

Ecuación 30

Puesto que el volumen no es nulo, entonces el primer término del producto sí lo es, entonces:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0$$

Ecuación 31

Siendo esta la ecuación de la conservación de la masa en forma diferencial. Aplicando el operador derivada sustancial, también se puede expresar como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla(\rho) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0$$

Ecuación 32

Si el fluido a estudio tuviera una densidad constante:

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

Ecuación 33

Como bien se obtuvo de otra manera, si la divergencia del vector velocidad es nula quiere decir que ese fluido es incompresible [5].

### 2.3.3. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La Segunda Ley de Newton o ley de la conservación de la cantidad de movimiento enuncia que la variación temporal de la cantidad de movimiento de una masa fluida es igual al sumatorio de las fuerzas exteriores que actúan sobre dicha masa fluida.

$$\left. \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \right|_{VF} = \sum \vec{F}$$

Ecuación 34

Tomando como:

$$B = m \cdot \vec{v}$$

Ecuación 35

$$\beta = \frac{dB}{dm} = \frac{dm \cdot \vec{v}}{dm} = \vec{v}$$

Ecuación 36

Al ser la cantidad de movimiento una propiedad fluida, se puede aplicar el Teorema del Transporte de Reynolds y expresar las 2ª Ley de Newton como:

$$\left. \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \right|_{VF} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho \cdot \vec{v} \cdot dV + \iint_{SC} \rho \cdot \vec{v} \cdot (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) \cdot dS = \Sigma \vec{F}$$

Ecuación 37

De este modo, esta es la ecuación de la conservación de movimiento en forma integral [11].

Las fuerzas que actúan sobre el fluido se pueden dividir en dos:

- Fuerzas de superficie: son las fuerzas que actúan sobre la superficie que delimita al fluido (por ejemplo, la presión).
- Fuerzas de volumen: son las que se ejercen sobre todo el volumen (por ejemplo, la gravedad).

Matemáticamente se pueden expresar como:

$$\Sigma \vec{F} = \iint_{SC} (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS + \iiint_{VC} \rho \cdot \vec{f}_m \cdot dV$$

Ecuación 38

En resumen, la expresión de la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento en forma integral se puede expresar como:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho \cdot \vec{v} \cdot dV + \iint_{SC} \rho \cdot \vec{v} \cdot (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) \cdot dS = \iint_{SC} (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS + \iiint_{VC} \rho \cdot \vec{f}_m \cdot dV$$

Ecuación 39

Para obtener esta ecuación en forma diferencial, en primer lugar, hay que aplicar el Teorema de Gauss-Ostrogradski para transformar las integrales de superficie en integrales de volumen. Además, aplicando la ecuación para una dirección  $i$  quedaría expresado como:

$$\iiint_{VC} \left[ \frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot v_i \cdot \vec{v}) - \text{div}(\tau_{ij}) - \rho \cdot f_{mi} \right] \cdot dV = 0$$

Ecuación 40

Se supone que el VC es lo suficientemente pequeño como para que no haya variación del integrando a lo largo de este volumen. Además, al tratarse de un volumen no nulo, aplicando la notación de subíndices se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_i \cdot v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho \cdot f_{mi}$$

Ecuación 41

Esta ecuación, sería por lo tanto la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento en forma diferencial aplicada en la dirección  $i$ . Desarrollando las derivadas de los productos se tiene:

$$\rho \cdot \frac{\partial(v_i)}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial(\rho)}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v_j)}{\partial x_j} + \rho \cdot v_j \cdot \frac{\partial(v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho \cdot f_{mi}$$

Ecuación 42

Agrupando algunos términos:

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial(v_i)}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial(v_i)}{\partial x_j} \right) + v_i \cdot \left( \frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_j)}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho \cdot f_{mi}$$

Ecuación 43

Donde el primer término corresponde a la derivada sustancial de  $v_i$  y el segundo término es el producto de la velocidad  $v_i$  por la ecuación de continuidad, que es igual a cero. De manera simplificada pues, la ecuación de la conservación de cantidad de movimiento en forma diferencial se puede expresar como [5]:

$$\rho \cdot \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho \cdot f_{mi}$$

Ecuación 44

Y en forma vectorial:

$$\rho \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \text{div}(\vec{\tau}) + \rho \cdot \vec{f}_m$$

Ecuación 45



### 2.3.4. Ley de Navier Poisson

Por la propia definición de fluido, como bien se ha explicado antes, un fluido en reposo no puede soportar esfuerzos cortantes. Si se aplica un esfuerzo cortante sobre un fluido este se deformaría y por lo tanto perdería la condición del estado de reposo. De este modo, el tensor de esfuerzos de un fluido en reposo tendría la siguiente forma:

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Ecuación 46 [8]

Donde  $p$  es la presión termodinámica. El signo menos hace referencia a que el esfuerzo normal es de compresión, ya que sobre un fluido no se puede ejercer un esfuerzo de tracción. También se puede expresar al tensor de esfuerzos como:

$$\tau_{ij} = -p \cdot \delta_{ij}$$

Ecuación 47

Esta expresión, es solo válida cuando el fluido está completamente en reposo, es decir, no se cumple para un fluido en movimiento [8]. Para un fluido en movimiento la expresión del tensor de esfuerzos es:

$$\tau_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + \tau'_{ij}$$

Ecuación 48 [8]

Como se comentó anteriormente, las velocidades del fluido en el entorno de un punto se podían descomponer en traslación, deformación longitudinal, deformación angular y rotación como sólido rígido. Con un sistema de referencia adecuado que siga el movimiento de la partícula como sólido rígido el movimiento queda reducido a una deformación longitudinal y a una deformación angular. La ley de Navier-Poisson establece una relación proporcional entre los esfuerzos viscosos  $\tau'_{ij}$  y los componentes del tensor de deformación  $e_{ij}$  [8]. De modo que:

$$\tau'_{ij} = A_{ijkl} \cdot e_{ij} = A_{ijkl} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)$$

Ecuación 49 [5]

Donde  $A_{ijkl}$  es un tensor de orden 4 con 81 elementos. Sin embargo, aplicado a un medio isótropo, sin direcciones privilegiadas, las componentes de este tensor se ven reducidas en número. Un tensor isótropo de orden par se puede escribir como la suma de todos los posibles productos de las deltas de Kronecker, y de este modo, para un tensor de orden 4 sería:

$$A_{ijkl} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \mu' \cdot \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \mu'' \cdot \delta_{il} \cdot \delta_{jk}$$

Ecuación 50 [5]

Donde  $\lambda$ ,  $\mu'$ , y  $\mu''$  son coeficientes escalares. Aplicando esto a la expresión que define a los esfuerzos viscosos  $\tau'_{ij}$ , se tiene:

$$\tau'_{ij} = \lambda \cdot \text{div}(\vec{v}) \cdot \delta_{ij} + \left( \frac{\mu'}{2} + \frac{\mu''}{2} \right) \cdot \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Ecuación 51 [5]

La ley de Navier-Poisson constituye que solo interviene el término de la suma  $\mu' + \mu''$  que se denomina como  $2 \cdot \mu$ , quedando la expresión anterior como:

$$\tau'_{ij} = \mu \cdot \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \cdot \text{div}(\vec{v}) \cdot \delta_{ij}$$

Ecuación 52 [5]

Siendo esta la ley de Navier-Poisson, que es la ley constitutiva de los fluidos [5].

Además, en el caso de aplicarse a líquidos el segundo término es nulo ya que  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ .

Sustituyendo, el tensor de esfuerzos sería:

$$\tau_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + \mu \cdot \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \cdot \text{div}(\vec{v}) \cdot \delta_{ij}$$

Ecuación 53

### 2.3.5. Ecuaciones de Navier Stokes

Si se sustituye la expresión obtenida de la Ley de Navier-Poisson en la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento en forma diferencial se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_i \cdot v_j)}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -p \cdot \delta_{ij} + \mu \cdot \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \cdot \text{div}(\vec{v}) \cdot \delta_{ij} \right) + \rho \cdot f_{mi} \end{aligned}$$

Ecuación 54

Además, como:

$$\frac{\partial p \cdot \delta_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Ecuación 55

Se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_i \cdot v_j)}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \cdot \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \cdot \text{div}(\vec{v}) \cdot \delta_{ij} \right) + \rho \cdot f_{mi} \end{aligned}$$

Ecuación 56

Tomando la viscosidad  $\mu$  como constante y aplicándolo para el caso de líquidos:

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

Ecuación 57

Se tiene pues:

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \cdot \Delta v_i + \rho \cdot f_{mi}$$

Ecuación 58

Escribiéndolo con notación vectorial:

$$\rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \cdot \Delta \vec{v} + \rho \cdot \vec{f}_m$$

Ecuación 59

Al primer término se le conoce como término local o temporal. Al segundo término, como término convectivo. El primer término al lado derecho de la igualdad corresponde a las fuerzas de presión. El segundo es el término viscoso. El último, corresponde con las fuerzas másicas [5].

Estas son las ecuaciones de Navier Stokes para flujos incompresibles. Tienen este nombre en honor al ingeniero y físico francés Claude-Louis Navier (1785-1836) y al físico y matemático irlandés George Gabriel Stokes (1819-1903). Son unas ecuaciones en derivadas parciales no lineales y de segundo orden. Estas ecuaciones determinan el comportamiento de los fluidos newtonianos. No existe una solución general para estas ecuaciones y en la actualidad existen premios con cuantías muy valiosas para quien sea capaz de resolverlas. Sin embargo, sí se han encontrado soluciones a estas ecuaciones para gran variedad de flujos viscosos de interés, lo cual es de gran importancia para el desarrollo de este trabajo.

Debido a la gran complejidad de estas ecuaciones, hoy en día para resolverlas se utilizan herramientas de software de CFD (Computational Fluid Dynamics) para obtener soluciones aproximadas, pero muy realistas de una gran variedad de flujos viscosos [10].

## 2.4. Experimento de Reynolds

En 1883 el ingeniero Osborne Reynolds (1842-1912) publicó los resultados de una serie de experimentos que ponían de manifiesto la existencia de dos tipos de movimiento de un fluido: el movimiento laminar y el turbulento [15].

La mayoría de los movimientos tanto de los líquidos como de los gases observados en la naturaleza son de carácter turbulento, como por ejemplo el flujo del agua en los ríos o el movimiento del aire cerca de la superficie de la Tierra. Este movimiento tiene una gran complejidad por las rápidas variaciones de la velocidad de sus partículas. Sin embargo, el flujo laminar se caracteriza por líneas de corriente suaves y movimiento sumamente ordenado, como por ejemplo el movimiento de la sangre en los capilares sanguíneos, lo que permite el transporte eficiente de nutrientes y oxígeno por todo el cuerpo [16].

Para verificar la existencia de dichos tipos de movimiento, O. Reynolds inyectó unas líneas de colorante en un flujo que discurría por una tubería de vidrio. Al final de ésta tubería había una válvula que le permitía variar la velocidad del agua por el tubo. Reynolds observó que cuando la velocidad del agua era baja, las líneas de colorante formaban una línea recta y suave. Por el contrario, cuando la velocidad del agua aumentaba, las líneas zigzagueaban rápida y aleatoriamente, rompiéndose y difundiéndose a lo largo de la sección transversal del fluido.

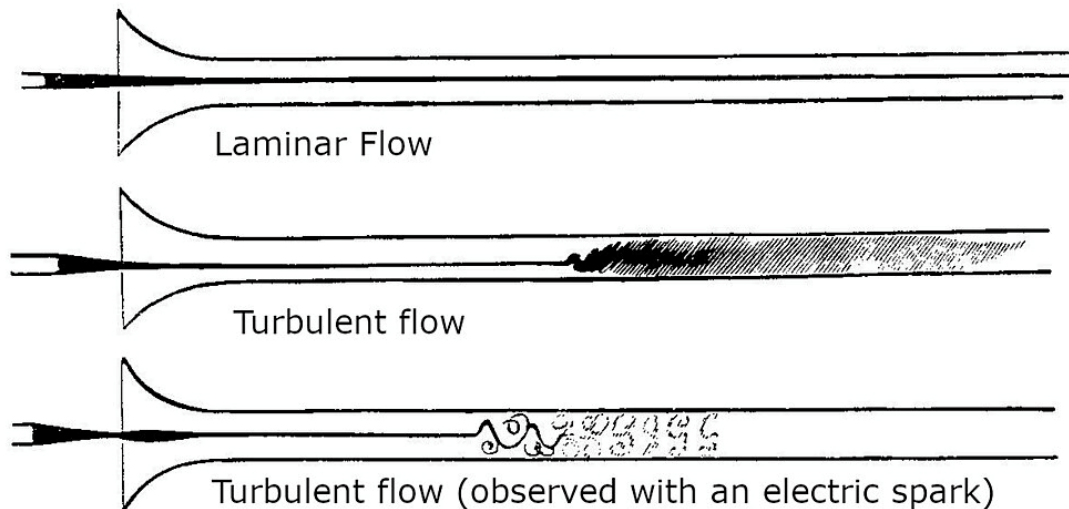


Figura 2-2 Visualización del experimento de Reynolds [15]

También observó mientras variaba la velocidad del agua que esta transición de flujo laminar a flujo turbulento no ocurría repentinamente, sino que existía cierta región en la que el flujo fluctuaba entre el flujo laminar y el turbulento antes de volverse totalmente turbulento. Esta transición, de flujo

laminar a flujo turbulento depende de la geometría, de la rugosidad de la superficie, de la velocidad del flujo, de la temperatura del fluido o del tipo de fluido entre otros factores. Tras muchos experimentos exhaustivos a lo largo de la década de 1880, Osborne Reynolds descubrió que el régimen de flujo dependía principalmente de la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas que actúan sobre el fluido [17]. De este modo, en homenaje a Reynolds, se ha definido a esta relación como el número de Reynolds, y para el flujo interno por una tubería circular se define como:

$$Re = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu}$$

Ecuación 60

Donde

$\rho$ : Densidad del fluido [kg/m<sup>3</sup>]

$u$ : Velocidad del fluido [m/s]

$D$ : Longitud característica de la geometría [m]

$\mu$ : Viscosidad dinámica del fluido [kg/(m·s)]

El número de Reynolds también se puede expresar como:

$$Re = \frac{u \cdot D}{\nu}$$

Ecuación 61

Donde

$\nu$ : Viscosidad cinemática del fluido [m<sup>2</sup>/s]

Si el número de Reynolds es elevado significa que las fuerzas inerciales, que son proporcionales a la densidad y a la velocidad del fluido, son grandes en comparación con las fuerzas viscosas, lo que significa que estas últimas no pueden evitar las fluctuaciones aleatorias y rápidas del fluido y por lo tanto el flujo será turbulento. Por el contrario, para números de Reynolds pequeños o moderados, las fuerzas viscosas son lo suficientemente grandes como para eliminar dichas fluctuaciones y mantener al fluido en un régimen laminar.

Al valor del número de Reynolds en el que el flujo pasa de ser laminar a turbulento se le conoce como número de Reynolds crítico,  $Re_{cr}$ . El valor de este número depende de la geometría y de las características del flujo, pero para tuberías circulares se ha adoptado generalmente como número de Reynolds crítico a  $Re_{cr} = 2300$  [16]. Pero como bien se ha dicho antes, la transición de flujo laminar a flujo turbulento no tiene lugar de forma repentina, sino que existe

una determinada zona de transición, de este modo, se adoptan los siguientes valores [16] para cada tipo de flujo:

$Re \leq 2300$	flujo laminar
$2300 \leq Re \leq 4000$	flujo de transición
$Re \geq 4000$	flujo turbulento

Estos valores adoptados no implican que el movimiento de un fluido no pueda ser turbulento con un número de Reynolds menor que 2300 o que no pueda ser laminar si el  $Re$  es mayor que 4000. De hecho, la dificultad de este proyecto radica en conseguir un chorro de carácter laminar a un número de Reynolds superior a 4000.

## 2.5. Movimientos con viscosidad dominante, flujo laminar

A día de hoy, no se conoce una solución general a las ecuaciones del movimiento de los fluidos. Sin embargo, sí existen varias soluciones particulares aplicadas a ciertos movimientos específicos de los fluidos, como puede ser el caso del movimiento de un líquido en régimen laminar a lo largo de un conducto [7].

Este movimiento singular de un fluido, está caracterizado por una disposición ordenada y paralela de las partículas de dicho fluido. En este tipo de régimen de flujo, las partículas del fluido se mueven en capas o laminas suaves, sin una mezcla transversal significativa entre ellas, de modo que los choques entre partículas no llegan a producirse. Este tipo de movimiento suele ocurrir a bajas velocidades, y es más típico de fluidos con alta viscosidad como el aceite o la mermelada. Sin embargo, se va a comprobar que también es posible lograr este tipo de movimientos con un fluido no tan viscoso como es el agua.

Por otro lado, al ser un movimiento que suele aparecer en flujos lentos y de fluidos con alta viscosidad, el flujo laminar suele estar relacionado con números de Reynolds bajos. Esto no quiere decir que a ciertos números de Reynolds superiores a 4000 no se pueda conseguir un movimiento laminar como se ha explicado en el apartado 2.4.

### 2.5.1. Movimientos unidireccionales de líquidos

El flujo laminar se caracteriza por el movimiento ordenado de las partículas del fluido, se trata de un movimiento unidireccional. Un movimiento unidireccional es aquel en el que todas las partículas del fluido se mueven únicamente en una sola dirección. Si el conducto por el que discurre el fluido es lo suficientemente largo, se puede considerar que el movimiento es unidireccional, lo cual simplifica las ecuaciones del movimiento. El vector velocidad tendría la forma:  $\vec{v} = (u, 0, 0)$  [18].

### 2.5.2. Simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes aplicadas al flujo laminar

Tomando como fluido de referencia un líquido y aplicando la ecuación de continuidad se tiene:

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

*Ecuación 62*

Lo cual quiere decir que el movimiento longitudinal del fluido a lo largo del conducto no depende de la coordenada  $x$ , de modo que la velocidad  $u$  se puede expresar como  $u(y, z, t)$  [5].

Partiendo de las ecuaciones de Navier Stokes:

$$\rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla(p + \rho \cdot \mathcal{U}) + \mu \cdot \Delta \vec{v}$$

*Ecuación 63*

Donde por lo visto anteriormente se cumple que:

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = 0$$

*Ecuación 64 [5]*

De este modo, la ecuación reducida a cada una de las coordenadas queda para el eje  $x$ :

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(p + \rho \cdot \mathcal{U})}{\partial x} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

*Ecuación 65 [5]*

Para el eje  $y$ :

$$\frac{\partial(p + \rho \cdot \mathcal{U})}{\partial y} = 0$$

*Ecuación 66 [5]*

Para el eje z:

$$\frac{\partial(p + \rho \cdot U)}{\partial z} = 0$$

Ecuación 67 [5]

Al término  $p + \rho \cdot U$ , donde  $p$  es la presión manométrica ( $p_{\text{absoluta}} - p_{\text{atm}}$ ), se le conoce también como presión reducida  $P$ . De las ecuaciones anteriores se deduce que esta presión reducida  $P$  no depende de las coordenadas transversales del movimiento  $y$  y  $z$ , sino que tan solo depende de la coordenada longitudinal  $x$  y del tiempo  $t$  [11]. De este modo, se puede expresar:

$$\frac{\partial(p + \rho \cdot U)}{\partial x} = -P_e(t)$$

Ecuación 68 [5]

De modo que la ecuación para el eje  $x$  queda como:

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = P_e(t) + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Ecuación 69

### 2.5.3. Condiciones iniciales y de contorno

Por ser estas ecuaciones en derivadas parciales y de segundo orden, al resolverlas, durante el periodo de integración, aparecerán las constantes de integración. Para poder asignarle un valor a estas constantes, será necesario establecer unas condiciones apropiadas.

En el caso de que el flujo fuera no estacionario, y por lo tanto el valor de la velocidad variara con el tiempo, es necesario conocer el valor de la velocidad para un instante de tiempo determinado. Normalmente, se define el valor de la velocidad para el instante inicial  $t=0$ , siendo esta la condición inicial del problema [7].

Por otro lado, son necesarias dos condiciones de contorno por cada coordenada de la que dependa el problema, ya que se está trabajando con ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden [7]. Normalmente, se toma como punto para estas condiciones de contorno a aquel en el que el fluido está en contacto con otro sólido y es conocida la velocidad de dicho sólido o puntos de una interfase en los que se juntan dos fluidos no inmiscibles entre sí.

Una vez conocidas estas condiciones, será posible obtener una solución exacta a cada problema que se desee estudiar.



## 2.5.4. Movimiento laminar estacionario en conductos de sección circular

Se parte de la suposición de que la tubería por la que discurre el flujo es lo suficientemente larga en comparación con el diámetro de esta para garantizar la unidireccionalidad, además de que el flujo está completamente desarrollado y por lo tanto los efectos de la entrada son despreciables.

En un flujo laminar completamente desarrollado, cada partícula de fluido se desplaza a una velocidad axial constante a lo largo de una línea de corriente, y el perfil de velocidad permanece invariable en la dirección del flujo. No hay movimiento en la dirección radial y por lo tanto la componente de la velocidad en la dirección normal al flujo es cero en todas partes. No hay aceleración porque el flujo es estacionario y totalmente desarrollado [16].

Partiendo de un conducto de sección circular de radio  $R$  y de la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$0 = P_e + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

*Ecuación 70*

Transformando la ecuación a coordenadas cilíndricas:

$$-P_e = \mu \cdot \left( \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} \right) = \mu \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{du}{dr} \right)$$

*Ecuación 71*

Con la condición de contorno de que en las paredes del tubo la velocidad del fluido es nula:

$$u = 0; \quad y = z = R$$

*Ecuación 72*

Además, como se trata de una sección circular:

$$y^2 + z^2 = R^2$$

*Ecuación 73*

Es decir, para  $r = R$ ,  $u = 0$ .

Se trata de una ecuación diferencial de orden 2 fácilmente resoluble. Integrando una vez:

$$r \cdot \frac{du}{dr} = \frac{-P_e}{\mu} \cdot \frac{r^2}{2} + cte_1$$

*Ecuación 74*

$$\frac{du}{dr} = \frac{-P_e}{2\mu} \cdot r + \frac{cte_1}{r}$$

Ecuación 75

Si se aplicara dicha ecuación al eje de la tubería es decir, para  $r = 0$ , se tendría que:

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=0} = \frac{cte_1}{0} \rightarrow \infty$$

Ecuación 76

Físicamente es imposible que el valor de  $\frac{du}{dr}$  en el eje de la tubería tienda a infinito, lo cual implica que el valor de esta primera constante de integración es cero.

Integrando de nuevo:

$$u = \frac{-P_e}{4\mu} \cdot r^2 + cte_2$$

Ecuación 77

Para obtener el valor de la segunda constante de integración se aplica la condición de contorno, obteniendo:

$$cte_2 = \frac{P_e}{4\mu} \cdot R^2$$

Ecuación 78

Así pues, el perfil de velocidades es:

$$u(r) = \frac{-P_e}{4\mu} \cdot r^2 + \frac{P_e}{4\mu} \cdot R^2 = \frac{P_e}{4\mu} (R^2 - r^2)$$

Ecuación 79

Se observa que el perfil de velocidades tiene una forma parabólica, con un máximo en el eje central y un mínimo en las paredes del tubo, donde la velocidad de las partículas es nula debido a la condición de adherencia.

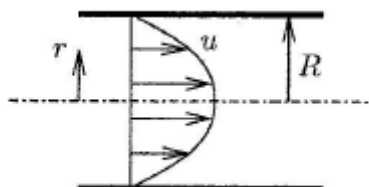


Figura 2-3 Perfil de velocidades en un conducto circular [5]

Integrando la velocidad con respecto a la superficie, se puede determinar el caudal que atraviesa una sección transversal del conducto:

$$Q = \int_S u(r) dS = \int_0^R u(r) 2\pi r dr$$

$$= \int_0^R \frac{P_e}{4\mu} (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{P_e}{4\mu} \cdot 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

Ecuación 80

$$Q = \frac{P_e}{8\mu} \pi R^4$$

Ecuación 81

### 2.5.5. Condiciones de unidireccionalidad

Para obtener las ecuaciones anteriores, que describen el movimiento de los fluidos bajo ciertas condiciones, se ha partido de las ecuaciones de Navier Stokes. Para poder resolver dichas ecuaciones, ha sido necesario hacer alguna simplificación. Se ha partido de la hipótesis de que el movimiento del fluido era unidireccional, lo que ha desembocado en que en las ecuaciones de Navier Stokes desaparezca el término convectivo [5].

Por lo tanto, es necesario determinar bajo qué condiciones se puede aplicar la hipótesis de que el movimiento es unidireccional para que realmente estas ecuaciones se puedan aplicar.

Si la longitud del conducto no es lo suficientemente grande en comparación con el diámetro de este, es probable que el fluido tenga cierta velocidad transversal, perpendicular al eje longitudinal de este, como se puede apreciar en la siguiente imagen:

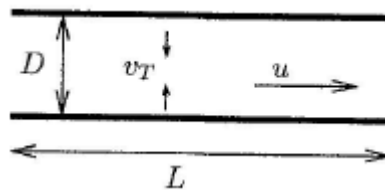


Figura 2-4 Distancias y velocidades típicas en un conducto [5]

De este modo, el flujo no sería del todo unidireccional, y el vector velocidad tendría esta forma:

$$\vec{v} = (u, v_T, 0)$$

Ecuación 82

Donde \$u\$ es el orden de magnitud de la componente longitudinal de la velocidad y \$v\_T\$ es el orden de magnitud de la velocidad en la componente

transversal. El eje x correspondería con la dimensión longitudinal del conducto y los ejes y, z corresponderían con las dimensiones transversales.

Así pues, se pueden expresar las dimensiones del conducto y las componentes de la velocidad en función de su orden de magnitud:

$$O(x) \sim L$$

*Ecuación 83*

$$O(y) = O(z) \sim D$$

*Ecuación 84*

$$O(v_x) \sim u$$

*Ecuación 85*

$$O(v_y) = O(v_z) \sim v_T$$

*Ecuación 86*

Ahora, calculando el orden de magnitud de los términos de la ecuación de continuidad aplicada al caso de líquidos:

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

*Ecuación 87*

$$O\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + O\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + O\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0$$

*Ecuación 88*

$$\left(\frac{u}{L}\right) + \left(\frac{v_T}{D}\right) + \left(\frac{v_T}{D}\right) = 0$$

*Ecuación 89*

Se extrae la conclusión de que para que la suma de los tres términos de como resultado 0, todos los términos deben de ser del mismo orden de magnitud. Por lo tanto:

$$\left(\frac{u}{L}\right) \sim \left(\frac{v_T}{D}\right)$$

*Ecuación 90*

Para poder despreciar la componente transversal de la velocidad y afirmar que el movimiento del fluido es unidireccional:

$$u \gg v_T$$

*Ecuación 91*

De donde se extrae que:

$$L \gg D$$

$$\frac{L}{D} \gg 1$$

Ecuación 92

Que sería la condición de unidireccionalidad.

## 2.5.6. Números adimensionales de interés de las ecuaciones de Navier-Stokes

Si todos los términos de una ecuación tienen las mismas unidades, se puede convertir en una ecuación adimensional. El análisis dimensional, permite comparar la influencia física que un determinado término de una ecuación tiene sobre un proceso en comparación con otro término [5].

Aplicado al caso del movimiento del fluido en régimen laminar, este análisis dimensional permitirá conocer si las suposiciones realizadas para obtener las ecuaciones que describen dicho movimiento son correctas o no, a la hora de aplicarlas a un experimento real.

Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \cdot \Delta \vec{v} + \rho \cdot \vec{f}_m$$

Ecuación 93

Tomando las variables adimensionales de las que depende el problema:

$$x' = \frac{x}{l_0} ; y' = \frac{y}{l_0} ; z' = \frac{z}{l_0} ; t' = \frac{t}{t_0} ; \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{v_0} ; \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$P' = \frac{P}{P_0} ; \vec{f}_m' = \frac{\vec{f}_m}{g} ; \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Ecuación 94

Donde  $l_0, t_0, v_0, \rho_0, P_0, g, \mu_0$  son variables de referencia del orden de magnitud de las variables implicadas en un determinado problema.

Se puede convertir las ecuaciones de Navier-Stokes en adimensionales de este modo:

$$\begin{aligned} & \left( \rho_0 \frac{v_0}{t_0} \right) \cdot \rho' \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \left( \frac{\rho_0 v_0^2}{l_0} \right) \cdot \rho' \vec{v}' \nabla' \vec{v}' \\ & = - \left( \frac{P_0}{l_0} \right) \cdot \nabla' P' + \left( \frac{\mu_0 v_0^2}{l_0} \right) \cdot \mu' \Delta' \vec{v}' + (\rho_0 g) \cdot \rho' \vec{f}_m' \end{aligned}$$

Ecuación 95

Como bien se explicó antes, al suponer que un fluido seguía un movimiento unidireccional, el término convectivo ( $\rho \cdot \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ ) se hacía despreciable en comparación con el término viscoso ( $\mu \cdot \Delta \vec{v}$ ). Como ambos términos tienen las mismas unidades, se puede hacer el cociente de las variables de referencia de ambos términos, y el resultado será el número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho_0 v_0 l_0}{\mu_0}$$

*Ecuación 96*

Si el Re es muy alto, significa que la viscosidad del fluido es despreciable. Sin embargo, para Re pequeños la viscosidad del fluido es importante y por lo tanto se puede considerar que el movimiento es laminar [18].

Ahora, si se compara de igual manera el término local y el término convectivo, mediante el cociente de sus variables de referencia se obtiene el número de Strouhal:

$$St = \frac{l_0/v_0}{t_0}$$

*Ecuación 97*

El número de Strouhal aporta una referencia del orden de magnitud de los efectos transitorios. Para St altos, el proceso es no estacionario, mientras que para números de St bajos, el proceso puede ser considerado estacionario o cuasiestacionario, pudiendo así de nuevo despreciar el término convectivo de las ecuaciones [7].

## 2.6. Reflexión de la luz y reflexión interna total

La propagación de la luz está gobernada por las ecuaciones de Maxwell, que fueron publicadas en 1865, sin embargo, la reflexión de la luz es un fenómeno óptico que ha sido analizado desde la Grecia Clásica. Fue Euclides quien en el siglo III a.C. publicó las Leyes de la Reflexión. Además, incluso antes, el fenómeno de la refracción de la luz ya era algo conocido por Aristóteles [19].

Pero no fue hasta 1621 que el astrónomo y matemático Willebrord Snell van Royen publicó las leyes de la reflexión y la refracción de la luz que llevan su nombre, Leyes de Snell. Demostró pues que cuando una onda llega a la superficie de separación de dos medios transparentes (en los que se desprecia la absorción), parte de la energía que transporta la onda pasa al otro medio (onda refractada) y la energía restante es devuelta al medio inicial (onda reflejada) [20].

En la siguiente figura se muestra el rayo incidente, el rayo reflejado y el rayo refractado, además de la recta perpendicular a la superficie de separación de los dos medios que se la conoce como normal N.

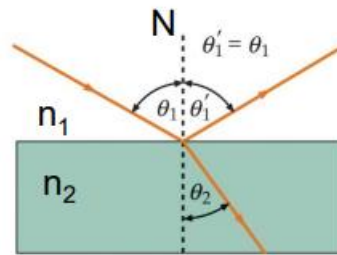


Figura 2-5 Geometría de la Ley de Snell [20]

Donde:

$\theta_1$  = ángulo de incidencia

$\theta_1'$  = ángulo de reflexión

$\theta_2$  = ángulo de refracción

Además, Snell descubrió que el ángulo de incidencia de una onda y su ángulo de reflexión son iguales ( $\theta_1 = \theta_1'$ ).

Así pues, la ley de Snell definida en función de los índices de refracción de los dos medios es:

$$n_1 \cdot \text{sen}(\theta_1) = n_2 \cdot \text{sen}(\theta_2)$$

Ecuación 98 [20]

Cuando la luz parte de un medio con un índice de refracción mayor al otro medio al que va dirigida, existe un fenómeno denominada reflexión interna total, por el cual, para un determinado ángulo de incidencia, la onda refractada lo hace de forma perpendicular a la normal. Para lograr este efecto, es necesario que el ángulo de incidencia sea superior a un ángulo denominado ángulo crítico, que se deduce de la ley de Snell.

$$n_1 \cdot \text{sen}(\theta_1) = n_2 \cdot \text{sen}(\theta_2)$$

Ecuación 99

Como  $\theta_2 = 90^\circ$ :

$$n_1 \cdot \text{sen}(\theta_1) = n_2 \cdot \text{sen}(90^\circ)$$

Ecuación 100

De ahí se obtiene que el ángulo crítico será:

$$\text{sen}(\theta_c) = \frac{n_2}{n_1} ; \theta_c = \text{arcsen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Ecuación 101



Para el caso de que el rayo de luz incidente provenga del agua y el segundo medio sea el aire, el ángulo crítico es:

$$n_1 = 1.33432$$

$$n_2 = 1.002924$$

$$\theta_c = 48.56^\circ$$

Es decir, para cualquier ángulo de incidencia superior a este ángulo crítico, la luz no puede escapar del agua y se refleja completamente en la interfaz entre el agua y el aire.

La reflexión total interna es el principio de funcionamiento de la fibra óptica. Basándose en este funcionamiento, se pretende hacer pasar por el chorro de agua de flujo laminar un haz de luz, de modo que este se refleje por completo a lo largo del chorro, comportándose, así como un cable de fibra óptica más.



## Capítulo 3. Ensayos preliminares

### 3.1. Vaciado de un globo lleno de agua

Con el objetivo de observar un chorro de flujo laminar, se comienza reproduciendo un experimento bastante popular en las redes sociales. Este experimento consiste en lograr este tipo de flujo utilizando un globo de plástico.

En primer lugar, se llena este globo elástico de agua, procurando que no quede nada de aire dentro. Seguidamente, se ata cuidadosamente para evitar que se rompa. En un lateral del globo, se pegan varios trozos de cinta aislante de modo que solo quede a la vista un cuadrado de aproximadamente 1 cm de lado del globo. Por último, con el objetivo de conseguir una salida del chorro lo más regular posible, se pincha en este cuadrado con una broca circular de un taladro. De este modo, el globo empieza a vaciarse por este punto, siendo el chorro de salida un chorro de flujo laminar. La cinta aislante ayuda a que, al pinchar el globo, el agujero no se extienda y así el globo no reviente y únicamente salga el agua por el agujero realizado.



*Figura 3-1 Vaciado de un globo de agua*

Se consigue de este modo, un chorro de flujo laminar con una longitud laminar de unos 30 cm. Las condiciones de presión del interior del globo, unidas a que el agujero realizado no tiene un diámetro muy elevado, provocan que las partículas de agua salgan del globo siguiendo las líneas de corriente de manera ordenada, sin chocar las unas con las otras.

Como modo de ver lo que es el flujo laminar este experimento es idóneo, porque es muy sencillo de realizar y muestra una imagen muy precisa de lo que se quería obtener.

Sin embargo, no es un experimento que se pueda mantener de forma estacionaria en el tiempo, sino que solo dura unos segundos, que son los que tarda el globo en vaciarse. Además, es un proceso muy complicado seguir

alimentando con agua el globo a la vez que se está vaciando, en primer lugar, porque la alimentación debería tener una presión muy alta y en segundo lugar porque quizás alimentando al globo con unas partículas en movimiento, el efecto de salida de flujo laminar no se conseguiría.

Es por ello, que los siguientes experimentos van encaminados a conseguir este mismo efecto de flujo laminar, pero en vez de utilizando un globo de plástico, utilizando un depósito que se puede rellenar fácilmente.

### 3.2. Vaciado de un depósito a través de un tubo

Para tratar de lograr un efecto más duradero en el tiempo, se utiliza un pequeño depósito de 50x20x30 cm, que se podrá ir rellenando de agua fácilmente.

Con el objetivo de que la velocidad del chorro fuera lo más baja posible para así tener un número de Reynolds bajo, se le hace un agujero de  $d=4$  mm en un depósito con la ayuda de un taladro y una pequeña fresa de mano, y se le conecta, mediante el uso de una pistola de silicona caliente, un tubo de plástico de unos 70 cm de longitud, con el objetivo de lograr una gran pérdida de carga del chorro a lo largo de este tubo.

Teóricamente se puede determinar la velocidad del chorro realizando un balance de energía mecánica entre la superficie libre del agua y la salida del tubo y suponiendo un comportamiento cuasiestacionario:

$$\rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot g \cdot (H_t + H_L) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

*Ecuación 102 [21]*



*Figura 3-2 Depósito de agua que se vacía a través de un tubo de longitud L*

Donde  $h$  es la altura del nivel del agua con respecto al orificio de salida,  $v$  es la velocidad del chorro en la salida del depósito (en la superficie libre se

considera nula),  $H_l$  se corresponde con las pérdidas de carga locales y  $H_L$  con las pérdidas de carga por fricción a lo largo del tubo en régimen laminar, con:

$$H_l = k \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Ecuación 103 [21]

$$H_L = \frac{32 \cdot \mu \cdot L}{\rho \cdot g \cdot D^2} \cdot v$$

Ecuación 104 [21]

Así pues, se puede determinar la velocidad del chorro de agua y por lo tanto cada uno de sus números de Reynolds para cada longitud de tubo utilizado en función de la altura del agua del depósito.

Tomando una pérdida de carga local a la salida del depósito de  $k=1$ , se puede calcular el número de Reynolds para distintas longitudes de tubo y alturas de agua del depósito:

- $L=0,7$  m

h (m)	v (m/s)	Re
0,20	0,87	3460,99
0,15	0,70	2800,00
0,10	0,51	2049,74
0,05	0,29	1159,80
0,01	0,07	267,25

Figura 3-3 Velocidad y Re para  $L=0,7$  m

- $L=0,5$  m

h (m)	v (m/s)	Re
0,20	0,99	3946,43
0,15	0,81	3245,95
0,10	0,61	2436,21
0,05	0,36	1440,93
0,01	0,09	359,66

Figura 3-4 Velocidad y Re para  $L=0,5$  m

- $L=0,15$  m

h (m)	v (m/s)	Re
0,20	1,26	5032,05
0,15	1,07	4286,72
0,10	0,85	3405,00
0,05	0,57	2263,56
0,01	0,20	788,52

Figura 3-5 Velocidad y Re para  $L=0,15$  m

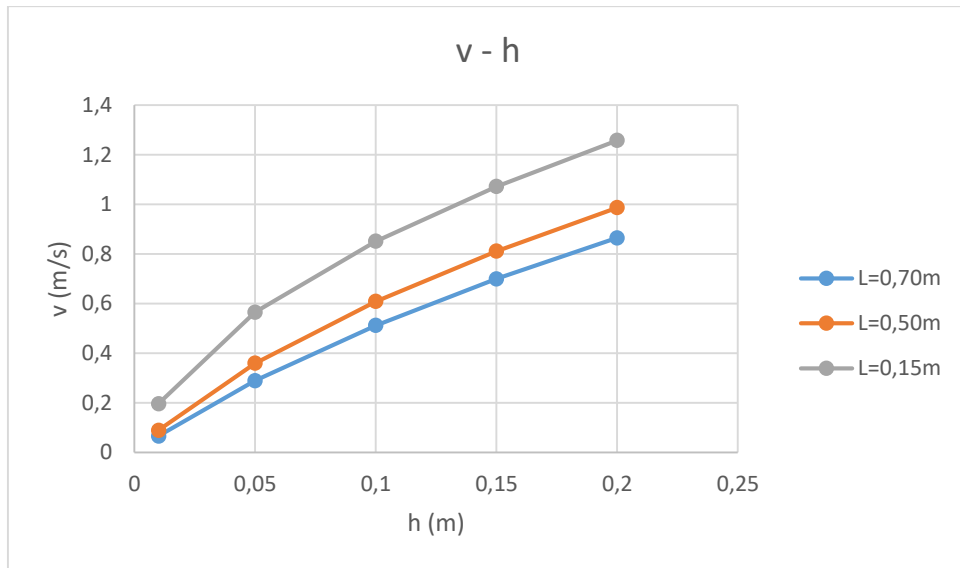


Figura 3-6 Representación de la velocidad frente a la altura

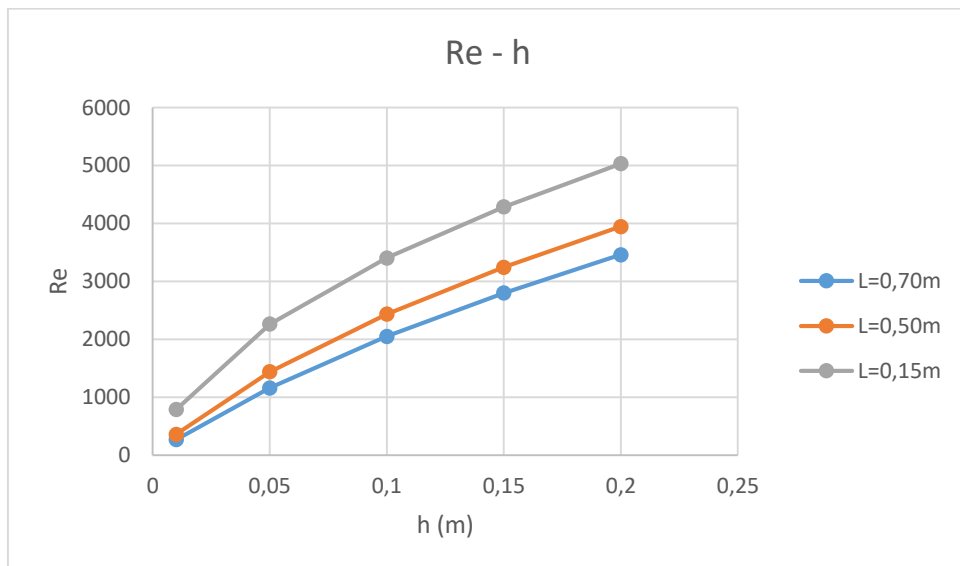


Figura 3-7 Representación del Re frente a la altura

Teóricamente, con la longitud de partida del tubo de 70 cm, se podría obtener un chorro de agua con un número de Reynolds inferior a 2300 y, por lo tanto, laminar, con una altura de agua de algo más de 10 cm. De la Ecuación 102, se puede extraer que cuanto menor sea la longitud del tubo, para la misma altura de agua, menor será la pérdida de carga del agua a lo largo de él y así mayor será la velocidad de salida del chorro por el tubo, lo que implicará un aumento del número de Reynolds y la aparición de la turbulencia. Sin embargo, como se ha explicado antes, para esta ecuación el cálculo de la pérdida de carga por fricción a lo largo del tubo a partir de la Ecuación 104 solo es válida para flujo laminar, por lo que los valores con un número de Reynolds superior a 2300 no serían muy fiables.

De esta misma ecuación, se extrae que cuanto menor sea la altura de agua en el depósito, menor será la velocidad del agua a la salida de este, por lo

que se observa que, para todas las longitudes del tubo, cuanto menor es la altura de agua disminuye lo suficiente la velocidad a la salida del depósito como para ser un chorro de flujo laminar.

Con los datos teóricos, se ha observado que para el caso de  $L=0,15$  m y  $h=0,05$  m, el número de Reynolds es inferior a 2300 y por lo tanto el flujo en teoría es laminar. A modo de ejemplo, para poner en práctica las ecuaciones de flujo laminar obtenidas en el capítulo 2, se va a calcular el perfil de velocidades a través del tubo para este caso. Como no se conoce el gradiente de presión reducida, se puede deducir de la Ecuación 81, que es la que relaciona este gradiente de presión con el caudal. Sustituyendo en la ecuación del perfil de velocidades se obtiene que:

$$u(r) = \frac{2 \cdot u}{R^2} \cdot (R^2 - r^2)$$

Ecuación 105

Aplicado a este caso en particular, el perfil sería:

$$u(r) = \frac{1,14}{0,002^2} \cdot (0,002 - r^2)$$

Y representándolo gráficamente a lo largo de la sección:

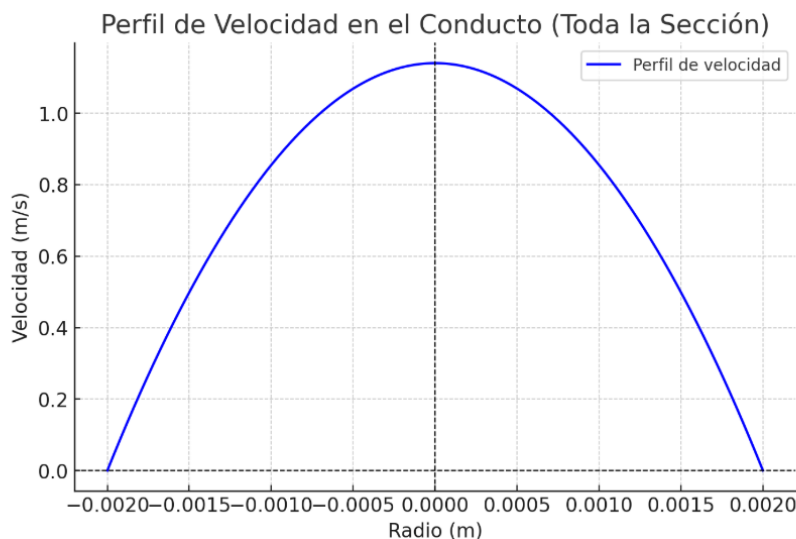


Figura 3-8 Perfil de velocidades en el conducto

Sin embargo, a la hora de llevar a cabo la prueba, se observa que el agua no tiene la suficiente velocidad como para llegar al final del tubo y formar un chorro, y en vez de ello se produce un goteo. A continuación, se comienza a recortar poco a poco la longitud del tubo para que se forme un verdadero chorro de agua. Cuando se reduce la longitud a unos 15 cm el chorro sale del depósito, pero con una velocidad tan pequeña que no permite ver un efecto como el que se generaba con el globo, solamente se ve salir el agua muy lentamente del depósito. Además, cuando la altura del agua en el depósito era menor de 5 cm,

que es la altura a la que aproximadamente el chorro debería ser laminar, este se empieza a cortar y vuelve a aparecer el goteo.



Figura 3-9 Vaciado de un depósito a través de un tubo

### 3.3. Vaciado de un depósito a través de un orificio

A continuación, se decide eliminar el tubo y dejar que el chorro salga al exterior directamente desde el depósito a través del orificio de 4 mm de diámetro, para que así este salga con más velocidad, aunque ello conlleve un número de Reynolds mayor. Para que la salida de este sea lo más suave posible, con la ayuda de la fresa, se le hace una especie de avellanado al agujero y se lija bien para que este sea lo más suave posible. Se vuelve a llenar el depósito y se observa como el chorro sale con una velocidad mayor, haciendo un efecto más parecido al que se producía con el globo, pero no siendo ni mucho menos laminar y sin dar esa sensación de agua congelada.



Figura 3-10 Vaciado de un depósito a través de un orificio con  $D=4$  mm

Haciendo uso de la ecuación de Torricelli para el vaciado del depósito y buscando un número de Reynolds menor de 2300, para que el flujo sea laminar, se puede calcular el nivel de agua necesario para ello:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Ecuación 106 [11]

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} = 2300 ; v \approx 0,58 \text{ m/s}$$

Ecuación 107

$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0,017 \text{ m} \approx 2 \text{ cm}$$

Ecuación 108

Así pues, cuando el depósito se estaba vaciando y el agua alcanzara una altura de unos 2 cm con respecto al orificio, el agua debería salir con un régimen laminar. Sin embargo, al ser una velocidad tan pequeña, el chorro era muy débil y no se podía apreciar la laminaridad de este.

### 3.4. Vaciado de un depósito a través de distintos tubos

A continuación, con el objetivo de probar distintas salidas del depósito a presión atmosférica, se prueba a poner a la salida del depósito distintos tubos de distintos diámetros y longitudes. Haciendo uso de nuevo de la Ecuación 102, se puede tratar de predecir la velocidad del agua a la salida de los distintos tubos y por lo tanto su número de Reynolds, para después compararlo con lo que ocurre en la realidad.

Mediante este sistema de prueba y error se pretende encontrar la mejor manera de obtener un chorro de flujo laminar.

- $d=8 \text{ mm}$  y  $L=50 \text{ mm}$ :

h (m)	v (m/s)	Re
0,20	1,28	5122,28
0,15	1,09	4375,45
0,10	0,87	3491,24
0,05	0,59	2344,29
0,01	0,21	848,33

Figura 3-11 Velocidad y Re para  $d=8 \text{ mm}$  y  $L=50 \text{ mm}$

En teoría, cuando la altura del agua se encuentre entre 1 y 5 cm sobre el orificio de salida se debería producir el cambio de flujo turbulento o de transición a flujo laminar.





Figura 3-12 Vaciado de un depósito a través de un tubo con  $d=8\text{ mm}$  y  $L=50\text{ mm}$

Sin embargo, se dejó el tubo un poco por dentro del depósito. Esto provoca que el agua salga con aire que entra del exterior del depósito, además de salir con mucha velocidad, siendo así muy turbulento.

- $d=8\text{ mm}$  y  $L=400\text{ mm}$ :

$h\text{ (m)}$	$v\text{ (m/s)}$	$Re$
0,20	1,30	5214,27
0,15	1,12	4466,21
0,10	0,89	3579,95
0,05	0,61	2428,43
0,01	0,23	914,53

Figura 3-13 Velocidad y  $Re$  para  $d=8\text{ mm}$  y  $L=400\text{ mm}$

Se pega este tubo de modo que la salida sea mucho más suave. La mayor longitud del tubo hace que el chorro pierda velocidad a lo largo de este y así la velocidad de la salida es más reducida. Sin embargo, se logra un efecto algo laminar de solo 2 cm a la salida del tubo cuando la altura del agua ronda los 5 cm, pero el resto del chorro es completamente turbulento.

- $d=12\text{ mm}$  y  $L=300\text{ mm}$ :

$h\text{ (m)}$	$v\text{ (m/s)}$	$Re$
0,20	1,37	5468,25
0,15	1,18	4718,24
0,10	0,96	3828,71
0,05	0,67	2669,84
0,01	0,28	1125,94

Figura 3-14 Velocidad y  $Re$  para  $d=12\text{ mm}$  y  $L=300\text{ mm}$

Con el objetivo de ir descartando hipótesis, se prueba con un tubo de un diámetro mayor para observar el efecto a la salida. Como cabría esperar, el chorro sale con mucha velocidad y una gran turbulencia al final de este tubo. Se determina que para conseguir un chorro más laminar hay que utilizar tubos de un diámetro menor.



- $d=6$  mm y  $L=300$  mm:

h (m)	v (m/s)	Re
0,20	1,27	5092,01
0,15	1,09	4345,65
0,10	0,87	3462,22
0,05	0,58	2317,01
0,01	0,21	827,71

Figura 3-15 Velocidad y Re para  $d=6$  mm y  $L=300$  mm

A priori, el número de Reynolds a la salida es menor que en alguno de los anteriores experimentos por lo que cabría esperar un flujo laminar. Por el contrario, un mal sellado en la unión del tubo y el depósito provocó que entrara aire a este y el chorro fuera completamente turbulento.

- $d= 5$  mm y  $L= 500$  mm:

h (m)	v (m/s)	Re
0,20	1,12	4464,42
0,15	0,93	3735,81
0,10	0,72	2881,54
0,05	0,45	1798,70
0,01	0,13	510,64

Figura 3-16 Velocidad y Re para  $d=5$  mm y  $L=500$  mm

Con el fin de reducir todavía más el diámetro a la salida, para que salga con una velocidad pequeña, se conecta bien sellado dentro del tubo anterior uno más pequeño, de 5 mm de diámetro. Así pues, como resultado se obtiene un tubo con un diámetro de 5 mm y una longitud de 500 mm. Este tubo es de PVC flexible y transparente, por lo que se sujeta con un alambre para tratar de que quede lo más recto y firme posible. Tras hacer unos pequeños ensayos y utilizando este alambre, se inclina un poco hacia abajo para conseguir que el chorro salga con más velocidad. La diferencia de altura entre la entrada y la salida del tubo es algo inferior a los 3 cm, de este modo el chorro no tendrá demasiada velocidad.



Figura 3-17 Depósito con un tubo con  $D=5\text{ mm}$  y  $L=500\text{ mm}$

Con el alambre, se trata de conseguir que el tubo vaya en una dirección completamente recta, aunque la flexibilidad del tubo provoque pequeñas curvaturas.



Figura 3-18 Alambre que sujeta al tubo de  $D=5\text{ mm}$  y  $L=500\text{ mm}$



Figura 3-19 Salida del agua a través del tubo de  $D=5\text{ mm}$  y  $L=500\text{ mm}$

Como resultado, se obtiene un chorro muy limpio, estrecho pues el tubo solo tiene 5 mm de diámetro, pero durante unos 10 o 15 cm desde la salida del tubo el chorro es completamente laminar y se logra ese efecto de que parezca que está congelado. Sin embargo, al llevar poca velocidad, este efecto se rompe a los 15 cm aproximadamente, bien sea por el rozamiento con el aire o por el pequeño efecto del viento.

Este chorro es el laminar con mayor longitud conseguido hasta el momento sin tener en cuenta el primer visto con el globo. El apartado negativo es que la longitud de este no era muy grande y además tenía una sección pequeña, por lo que es necesario estar cerca del chorro para observarlo.

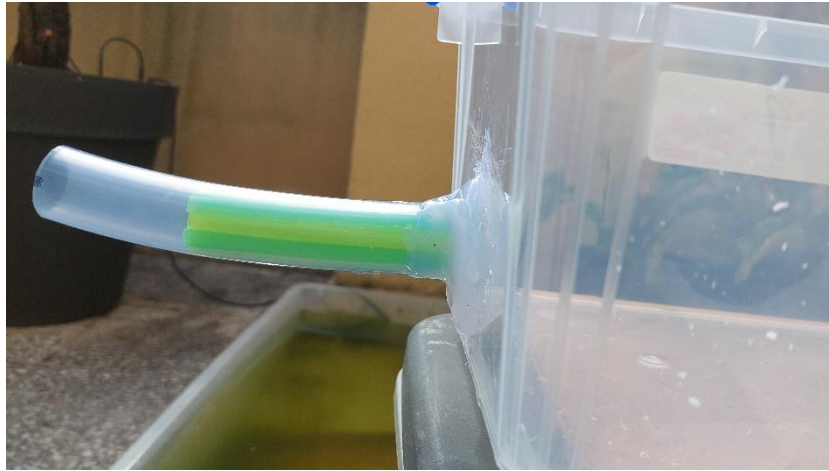
Cabe mencionar de nuevo, que los números de Reynolds calculados anteriormente superiores a 2300 no son del todo exactos, ya que como se explica anteriormente, el cálculo de la pérdida de carga por fricción a lo largo del tubo se hace suponiendo flujo laminar, por ello no es válido para flujo turbulento. Desde luego si es válido para conocer aproximadamente la altura o zona a la que el flujo pasará de turbulento a laminar según se vaya vaciando el depósito.

### **3.5. Vaciado de un depósito a través de elementos direccionadores**

Después de esto, con el objetivo de conseguir un caudal mayor, pero manteniendo el flujo laminar, se conecta un tubo de un grosor más ancho, con un diámetro de 16 mm. En el experimento anterior se vio que el efecto conseguido con un tubo de un diámetro casi tan ancho era completamente turbulento. Sin embargo, en este caso, se introdujeron una serie de tubos de pequeño diámetro en el interior a modo de elementos direccionadores para tratar de guiar al agua en una sola dirección, logrando de este modo el flujo unidireccional y laminar.

Como se ha visto en alguno de los experimentos anteriores, el flujo a través de un tubo de 5 mm de diámetro teóricamente puede tener un número de Reynolds inferior a 2300. Además, como bien se demostró, a través de un tubo con un diámetro tan grande (16 mm) el chorro de agua a su salida siempre era turbulento. Con estos tubos más pequeños, que tienen un diámetro mucho menor a su longitud ( $100 \text{ mm} \gg 5 \text{ mm}$ ) y por lo tanto se cumple la condición de unidireccionalidad, se pretende que el flujo de agua por su interior sea laminar, y que la suma de todos los chorros que saldrán a través de estos tubos pequeños, sea también laminar. De este modo se lograría un chorro de flujo laminar y con un tamaño mayor al visto anteriormente.

Con este objetivo en mente, en primer lugar, se introducen los tubos desde la salida del depósito, pero sin llegar al final del tubo más ancho:



*Figura 3-20 Tubo con elementos direccionadores más cortos en su interior*

Como resultado, el agua al salir de los elementos direccionadores se mezclaba provocando turbulencias y no logrando así el objetivo deseado.

Es por ello, que en para la siguiente prueba se hace justo lo contrario, probar con los elementos direccionadores sobresaliendo después del tubo, de modo que al final fueran varios tubos pequeños conectados entre sí:



*Figura 3-21 Tubo con elementos direccionadores más largos en su interior*

Pero de este modo, al salir los chorros por cada una de los tubos se volvían a mezclar provocando turbulencias y el chorro resultante no era ni mucho menos laminar.

A la vista de los resultados insatisfactorios, se terminó por abandonar la idea por el momento.

### 3.6. Experimentos estacionarios

Todos los experimentos anteriores se basaron en intentar generar un chorro de agua con flujo laminar a partir del vaciado de un depósito a presión atmosférica. Para ello, se probaron distintos tipos de salidas, diámetros y alturas del nivel del agua. En cada caso, la velocidad del agua a través de las diferentes salidas se puede calcular aplicando el principio de Bernoulli o la ecuación de Torricelli.

Algunas de estas pruebas arrojaron resultados bastante satisfactorios, logrando observar un flujo laminar incluso a escala muy pequeña. Sin embargo, el efecto obtenido resultaba poco vistoso y estaba lejos de parecerse al logrado con el globo, donde un tramo mayor del chorro parece estar congelado.

No obstante, las condiciones de estos experimentos no se podían mantener en el tiempo. A medida que el depósito se vaciaba, el nivel del agua descendía, y con ello variaba la velocidad de salida. Además, una vez el depósito se vaciaba por completo, era necesario volver a llenarlo manualmente.

Por ello, los siguientes experimentos se centrarán en buscar una solución que permita mantener el efecto del agua durante un período más prolongado, logrando así condiciones más estables y cercanas a un estado estacionario. Para lograrlo, será necesario contar con un sistema que reabastezca el depósito con la misma cantidad de agua que se utiliza.

Además, se buscó reproducir las condiciones de presión generadas por el globo, pero aplicadas a un depósito de agua. Con esto se esperaba obtener un chorro de agua con mayor velocidad, manteniendo el flujo laminar y logrando un efecto visual mucho más llamativo.

Para aplicar presión al depósito, se consideraron varias ideas:

- **Uso de una tapa como pistón:** Se planteó cubrir el depósito con una tapa cuyas dimensiones fueran casi idénticas a las de la superficie del depósito. Al aplicar una fuerza vertical hacia abajo, esta tapa ejercería presión sobre el agua, forzándola a salir a una presión superior a la atmosférica. Sin embargo, esta opción fue descartada debido a la dificultad de conseguir un cierre hermético entre la tapa y el depósito, lo que provocaba fugas de agua por los laterales.

- **Empleo de un regulador de presión conectado a una toma de riego:** Esta solución permitiría alimentar el depósito de forma continua y, al mismo tiempo, regular la presión con la que se llena.





Figura 3-22 Regulador de presión

Esta última opción fue la elegida para aumentar la presión de dicho depósito para lograr una salida de este del agua con más velocidad. La versatilidad que ofrece este aparato para regular la presión junto a la facilidad de montaje no hizo que la decisión fuera complicada. Además, el hecho de que este regulador vaya conectado a una toma de agua permite que el depósito esté rellenándose constantemente pudiendo lograr así un proceso estacionario.

Este regulador de presión se conectó a la toma del agua, y a continuación de este se conectó una manguera para llevar el agua al depósito.

Una vez listos, era necesario conectar la manguera al depósito. Para ello, se realizó un agujero circular al depósito y se le enroscó una boca metálica que se conectaba a su vez al extremo de la manguera ajustándola por medio de una abrazadera incorporada a esta boca.



Figura 3-23 Entrada de agua al depósito

Siguiendo una metodología de trabajo semejante a la anterior, se probó a conectar distintas salidas a este depósito a modo de comprobar cuál era la idónea para conseguir este chorro de flujo laminar.

En primer lugar, se hizo un agujero a este depósito haciendo uso de una fresa de mano, y se pegó un tubo de diámetro  $d=8$  mm y una longitud de unos 40 mm haciendo uso de una silicona caliente. Una vez se secó la silicona, se cerró el depósito con una tapa. La única dificultad recaía en cerrar el depósito junto a una tapa con la suficiente fuerza como para que al aumentar la presión no se soltase. Haciendo uso de bridas y de cinta aislante alrededor de esta tapa se logró que el depósito quedara estanco y cerrado con la suficiente fuerza para evitar que con el aumento de presión en su interior la tapa se pudiera soltar.

A continuación, se abrió el grifo de la toma de agua y se fue variando la llave del regulador de presión para lograr el efecto deseado.



*Figura 3-24 Vaciado del depósito cerrado a través de un tubo con  $D=8$  mm y  $L=40$  mm*

Sin embargo, este chorro seguía un régimen turbulento, lejos de ser laminar.

Con el objetivo de que las partículas del depósito salieran de manera ordenada de éste para lograr el flujo laminar, se creó una salida de este en forma de tronco de cono convergente, tratando de conseguir que la superficie fuera lo más lisa posible, de modo que se consiguiera que el chorro de agua fuera unidireccional, y, por lo tanto, con la posibilidad de que fuera laminar. Esta boca, tiene una longitud de 40 mm y un diámetro de salida de 5 mm.



*Figura 3-25 Vista anterior de la boca*



*Figura 3-26 Vista en alzado de la boca*

Una vez lijada para que estuviera lo más lisa posible, se pegó haciendo uso de nuevo, de la silicona caliente, al mismo agujero al que se había conectado anteriormente el tubo. También, se volvió a cerrar el depósito con una tapa y se hizo uso de bridas y de cinta aislante para mantenerlo cerrado.





Figura 3-27 Boca ajustada como salida del depósito

Una vez preparado esto, se llenó de agua y se fue variando la presión del depósito haciendo uso del regulador de presión para observar cómo se comportaba el chorro en el vaciado de este depósito.

A partir de la ecuación de Bernoulli para un fluido ideal sin pérdidas, se puede prever la velocidad del chorro a la salida en función de la presión del depósito. Por ser el elemento a la salida un tronco de cono abocinado, se desprecia el efecto de las pérdidas en el mismo o el coeficiente de descarga que pudiera tener, para facilitar los cálculos.

$$\left( \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot z_1 \right) = \left( \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g \cdot z_2 \right)$$

Ecuación 109

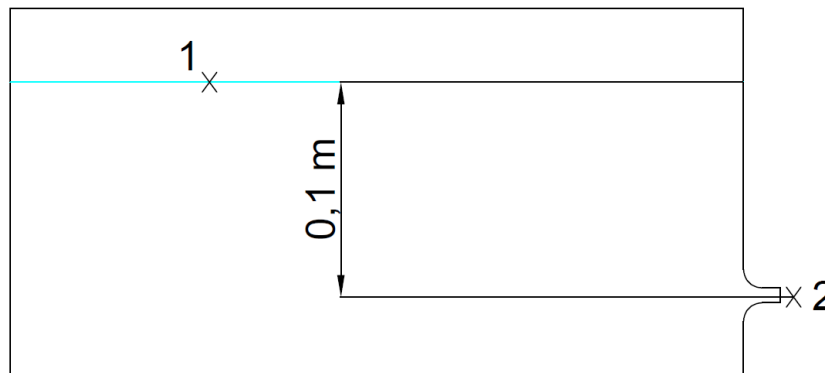


Figura 3-28 Posición relativa de los puntos 1 y 2

La presión a la salida del depósito es la atmosférica, la velocidad en el interior del depósito se supone nula y la diferencia de cotas entre la superficie libre y la salida del depósito es aproximadamente 10 cm. Ahora, en función de la

presión  $P_1$ , se puede calcular la velocidad del chorro y su correspondiente número de Reynolds:

$P_1$ (Pa)	$v_2$ (m/s)	Re
100345	0,00	0,00
100590	0,70	3500,00
100835	0,99	4949,75
101080	1,21	6062,18
101325	1,4	7000
102325	1,99	9949,87
103325	2,44	12206,56
104325	2,82	14106,74
105325	3,16	15779,73
106325	3,46	17291,62
107325	3,74	18681,54
108325	3,99	19974,98

Figura 3-29 Velocidad a la salida y número de Re en función de la presión

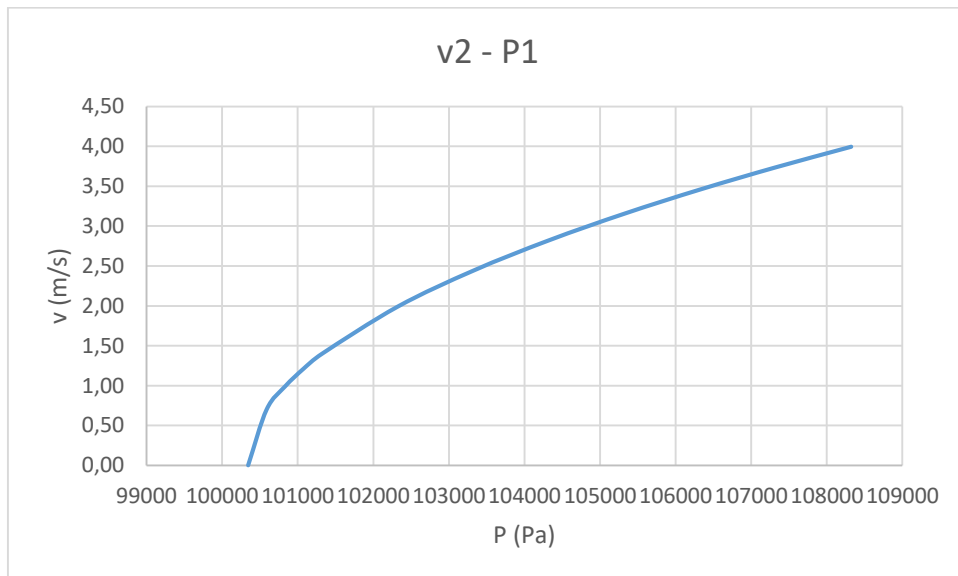


Figura 3-30 Representación de la velocidad frente a la presión

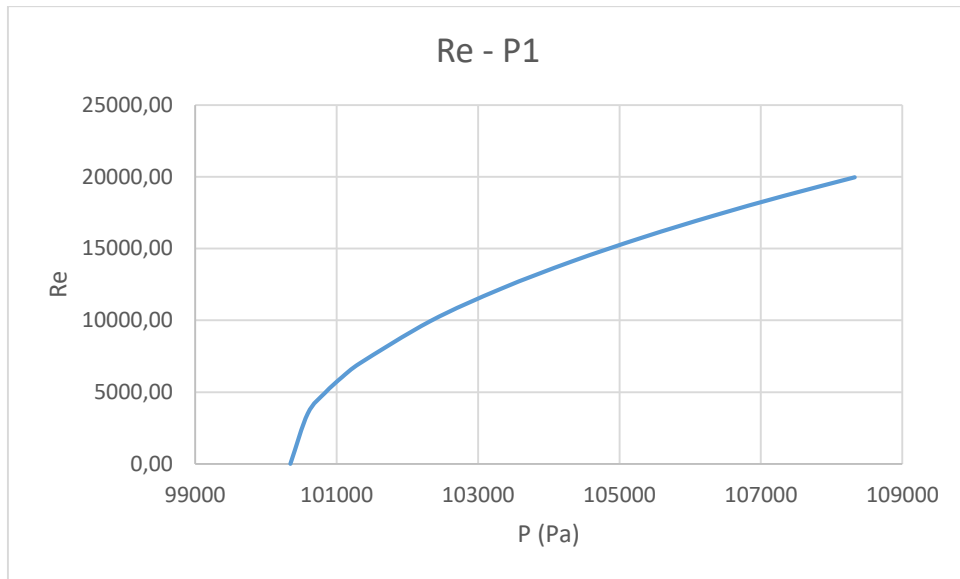


Figura 3-31 Representación del número de Re frente a la presión

A priori, para que el flujo sea en teoría laminar, la presión en el interior del depósito debería ser muy baja.

Cuando se empieza a experimentar, a una presión relativamente alta, el chorro de agua salía con una gran velocidad y siendo turbulento.



Figura 3-32 Salida del agua del depósito cerrado a través de la boca a una presión alta

A partir de este momento, se comenzó a variar esta presión, de modo que cuando la presión del depósito fue lo suficientemente baja, el chorro que salía del depósito en efecto parecía estar congelado, lográndose de este modo el flujo laminar.



Figura 3-33 Salida del agua del depósito cerrado a través de la boca a una presión baja

Además, este chorro laminar tenía un efecto a lo largo de una longitud mucho mayor que en los primeros experimentos, prolongándose este efecto hasta aproximadamente a los 50 cm.

El chorro no tenía mucha velocidad y por lo tanto no llegaba a una longitud transversal muy elevada, cayendo a pocos centímetros de la salida. Sin embargo, por pequeño que fuera el chorro se observaba laminar.

De este experimento, se extrae la conclusión de que, para lograr un chorro de flujo laminar a la salida de un depósito, es necesario que la salida del agua de éste se realice de forma suave, evitando los agujeros con aristas vivas o los tubos rectos. Parece necesario que para lograr dicho régimen de flujo es necesario que las partículas salgan de forma ordenada del depósito, y guiándolas de este modo con una boca cónica, sin aristas abruptas y con una superficie lisa, esto se consigue. Por otra parte, se ha observado que, trabajando a presiones por encima de la atmosférica, permanece este efecto y permite que el salto del chorro sea mayor y por lo tanto se puede observar con mayor facilidad este efecto.

Siguiendo con la idea extraída del experimento anterior, se sustituye ahora la boca que había por una de un tamaño y longitudes mayor, para comprobar si este efecto se puede probar a mayor escala. De nuevo haciendo uso de la fresa se amplía el agujero existente hasta tener uno de un diámetro – y se le pega haciendo uso de la silicona caliente un embudo de radio de salida – y de longitud-. Se cierra herméticamente de nuevo y se vuelve a observar los resultados.



Figura 3-34 Segunda boca del experimento

Nuevamente, se fue variando la presión del depósito, desde una superior a la atmosférica se iba bajando poco a poco la presión de este. Sin embargo, los resultados no han sido tan satisfactorios como los del experimento anterior. Se podía observar claramente que el agua salía del depósito de manera turbulenta, estabilizándose poco a poco mientras se bajaba la presión del depósito y por lo tanto según disminuía la velocidad de salida, pero sin llegar a tener un efecto laminar como el anterior.



Figura 3-35 Salida del agua a través de la segunda boca

Una de las causas de la turbulencia de este chorro es probable que radicara en que la boca en este caso no tiene una forma suave como en el anterior. En la mitad del embudo se puede apreciar cómo cambia bruscamente el ángulo de la generatriz del cono, haciendo que partir de este punto el tubo final tenga una sección más uniforme. Esta discontinuidad, provoca que en el interior del embudo exista una arista que sea la causante de perturbar a las partículas de agua en su camino hacia la salida y por ello no se logra el efecto de régimen laminar.

Finalmente, cuando se estaba desmontando la tapa de este depósito y se inclinó para vaciarle, estando destapado y por lo tanto a presión atmosférica, fue cuando el chorro a la salida pareció realmente laminar.



*Figura 3-36 Flujo laminar en la salida de la segunda boca*

Fue un efecto inesperado, ya que únicamente se buscaba vaciar el depósito, pero el hecho de que este tuviera una presión menor (la atmosférica) junto a que se inclinara hacia abajo ligeramente favorecería que las partículas de agua abandonaran el depósito de una forma más ordenada, de forma unidireccional, sin chocar las unas con las otras y por lo tanto se alcanzara este régimen de flujo laminar.

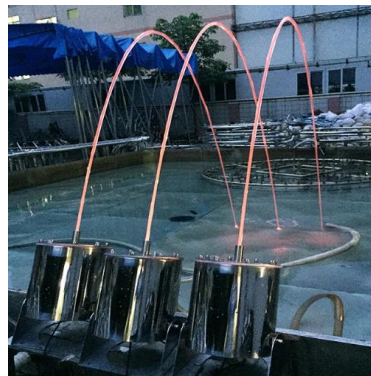
## Capítulo 4. Prototipo final

Con todas las pruebas y experimentos realizados hasta este momento, se ha conseguido en efecto, lograr un chorro de agua a la salida de un depósito de modo que este chorro siga un régimen de flujo laminar. Además, se ha conseguido que este efecto se logre no solo de forma transitoria como podría ser el caso del globo, sino que se ha obtenido la forma de hacer que dicho efecto permanezca en el tiempo conectando el depósito en cuestión a una toma de agua y con un regulador de presión entre medias.

Sin embargo, el efecto conseguido en el mejor de los casos podía llegar a tener una longitud de unos 50 cm, pero tan solo un salto de unos 10 cm, por venir el chorro con muy poca velocidad.

Es por ello, que se trató de buscar la forma de lograr este mismo efecto, pero de modo que se pudiera prolongar a lo largo de una distancia mayor y consiguiendo que tuviera un salto mayor para poder apreciar mejor el efecto que causa el flujo laminar.

Con esta idea, se comenzó a examinar surtidores comerciales ya existentes y a estudiar de qué modo conseguían expulsar un chorro de flujo laminar de hasta unos pocos metros de longitud.



*Figura 4-1 Surtidor de flujo laminar comercial*

Tras observar estos surtidores comerciales en funcionamiento y ver como otras personas habían realizado experimentos caseros con el mismo fin, se tomaron ideas de ambos y se comenzó a trabajar en uno.

Este surtidor, en esencia será un tubo ancho, que en su interior estará relleno de unos tubos de un diámetro mucho menor (en este caso pajitas de plástico), de modo que estos tubos pequeños tengan una gran relación longitud/diámetro. De este modo, el flujo por cada uno de estos tubos se podrá considerar unidireccional y consecuentemente, laminar. Estos tubos actuarán de elementos direccionadores como ya se intentó en un experimento anterior. El resultado esperado es que la suma de cada uno de estos chorros laminares, siga siendo laminar.



Para la construcción de dicho surtidor se requiere de los siguientes elementos:

- Tubo ancho de  $L=450$  mm y  $\varnothing_{\text{int}}=102$  mm
- Aproximadamente 300 tubos pequeños de  $L=210$  mm y  $\varnothing=5$  mm
- 2 mallas metálicas
- 2 superficies de tejido poroso
- 2 tapas del mismo diámetro interior que el tubo
- Boquilla para conectar la fuente de agua
- Manguera
- Regulador de presión

### Proceso de construcción:

Se parte de un tubo de PVC con una longitud de 550 mm y un  $\varnothing_{\text{ext}}=110$  mm. A partir de este tubo inicial, haciendo uso de un serrucho, se recortan dos trozos, uno con una longitud de 130 mm y otro con una longitud de 20 mm; que serán útiles más adelante, quedando así un tubo de 400 mm de longitud.



Figura 4-2 Tubo de PVC con  $L=450$  mm

A continuación, al anillo de 20 mm, se le recorta un trozo de arco, de 20 mm aproximadamente usando de nuevo el serrucho, de modo que el anillo restante sea capaz de introducirse dentro del tubo de 400 mm de longitud y quede apretado en su interior.



Figura 4-3 Anillo de PVC y malla metálica



Alrededor de este anillo, se enrolla la malla metálica, que será la encargada de sujetar los tubos más pequeños que se introducirán más adelante.



*Figura 4-4 Malla metálica cubriendo al anillo*

Ahora, con la malla sujeta al anillo, se introduce este dentro del tubo, a unos 5 cm del orificio del tubo y con la parte “hueca” de la malla mirando hacia fuera, para que en su interior se pueda introducir el tejido poroso. De este modo, el agua que entre al surtidor se encontrará con esta malla que en cierto modo la frenará, evitando que golpee con mucha fuerza sobre los tubos estrechos y así no llegue a deformarlos.



*Figura 4-5 Tejido poroso en el interior del anillo y del tubo*

Esta parte del tubo, corresponderá a la región de entrada del agua a este.

Una vez se tiene preparada la base que sujetará a los tubos más pequeños, se empiezan a introducir los tubos más pequeños en el interior del tubo, de modo que queden los mínimos huecos entre estos y también de modo que ninguno de los tubos quede doblado u obstruido. Con este fin, se logra introducir aproximadamente 300 de estos tubos. Finalmente tiene un aspecto como el que se muestra en la siguiente fotografía:



*Figura 4-6 Tubos pequeños en el interior del tubo mayor*

De igual modo que en la parte inferior se utilizó la malla metálica junto al anillo de PVC y la superficie adiposa para sujetar los tubos, hay que repetirlo para sujetarlos desde el otro lado también, esta vez sin superficie adiposa. Para ello se utiliza el anillo de 130 mm de largo, al que se le recorta un arco de aproximadamente 20 mm como al anterior. El motivo de ser de la medida de 130 mm es porque el hueco resultante entre los tubos pequeños y la boca del tubo es de 130 mm.

Una vez finalizada la parte interior, es necesario cerrar el surtido por ambas partes.

En la parte inferior, por donde entrará el agua, se acopla un manguito de PVC de evacuación con diámetro interior de 110 mm. A este manguito, se le pega haciendo uso de un adhesivo para PVC un tapón reducido de 110 mm con un hueco de 40 mm. En este hueco, de nuevo haciendo uso del adhesivo para PVC, se pega un enlace para PVC de 40 mm y 3/4". Dentro de este enlace se introduce una boca universal RACOR de 3/4", a la cual se conectará la toma del agua.

A continuación, en la parte interior, por estar la boca desplazada hacia un lado y para evitar que la malla con el anillo introducida en primer lugar se pueda mover, se rellena este hueco de tejidos porosos, de modo que la malla quede apoyada en ellos.



Figura 4-7 Enlace de PVC



Figura 4-8 Boca universal

Para la parte por la que saldrá el chorro de agua, se utiliza una tapa plana, a la que se le realizará un taladro que será por donde saldrá el agua. Con el fin de poder probar distintos taladros y salidas, esta parte se sujetará con cinta aislante, de modo que pueda ser fácil retirarla y poder probar distintas opciones.

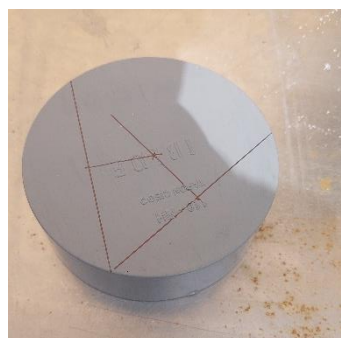


Figura 4-9 Tapa de PVC



Figura 4-10 Tapa de PVC taladrada

Ya estaría pues conformado el surtidor. A continuación, se conecta a la toma de agua y se examina cómo funciona con el agua a distintas presiones y con distintos tamaños y formas para la salida del surtidor.

## 4.1. Versiones y añadidos agregados al prototipo

### 4.1.1. Versión 2: Boca en forma de tronco de cono a la salida

Cuando se hicieron los experimentos estacionarios con el depósito sometido a cierta presión y conectado a una manguera, el que mejor resultados arrojó fue en el que la salida era una boca con forma de tronco de cono, convergente y con cierta curvatura.

Por ese motivo, se quiere examinar cual sería el chorro resultante al añadir esta boca a la salida del surtidor final fabricado.

Para ello, en primer lugar, se tomó una tapa del surtidor y se le hizo un taladro de unos 3 cm de diámetro, que es el diámetro inicial de la boca que se iba a utilizar.

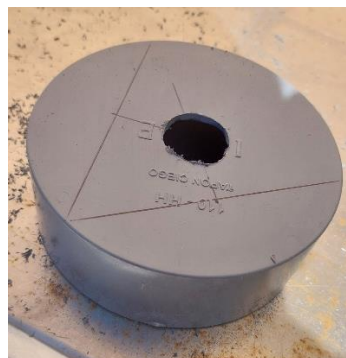


Figura 4-11 Tapa con taladro de  $D=3$  cm

Se tomó la misma boca que se había usado para el depósito y se pegó a la salida de la tapa del surtidor, utilizando silicona caliente.



Figura 4-12 Tapa de PVC con boca pegada

#### 4.1.2. Versión 3: Arandela en la boca de salida

Al hacer el taladro con el orificio de salida, es probable que alguna zona de dicho agujero no quede regular y existan pequeños valles que modifiquen la trayectoria del fluido. Es por ello que, con una lija, se trata de dejar la superficie interior del taladro lo más lisa posible.

Pese a todos estos intentos por hacer que sea un cilindro perfecto, siempre quedará alguna pequeña irregularidad.

Con la finalidad de que la salida sea completamente lisa, se hace un taladro con un diámetro de 5 mm y se lija y se perfila para que quede liso. A continuación, en el extremo del agujero se pega con un adhesivo fuerte una arandela del mismo diámetro interior. De este modo, aunque a lo largo del agujero haya alguna pequeña irregularidad, la salida será tan lisa y regular como lo sea la superficie interior de la arandela metálica.



Figura 4-13 Tapa de PVC con arandela metálica pegada

### 4.1.3. Añadido: Láser con fibra óptica en el interior

Con el fin de conseguir un efecto aún más vistoso en el chorro que sale por el surtidor, se trató de proyectar un haz de luz a lo largo de este para observar si se cumplía el principio de la reflexión total explicado anteriormente. De este modo, el haz de luz debería quedar encarcelado a lo largo del chorro, reflejándose totalmente sin abandonar el chorro, como si de un cable de fibra óptica se tratara.

Para poder hacer pasar un haz de luz por el chorro, se sopesó añadir algún tipo de láser que pudiera proyectarse externamente en el chorro.

Sin embargo, se decidió usar un LED, que se conectó a un cable de fibra óptica y éste fue el que se introdujo en el surtidor para guiar el haz de luz hasta el interior del chorro.

Este LED, funciona a 12 V, por lo que se debe conectar a una fuente de tensión utilizando un adaptador adecuado. El cable de fibra óptica se conecta al led a través de un hueco que este trae preparado para ello específicamente.



Figura 4-14 Luz LED

Para introducir la fibra óptica en el surtidor, se realizó un taladro en un lateral de este, a la altura de donde están apoyados los tubos estrechos en la parte inferior de este. Una vez introducida, se sella el agujero con silicona caliente.

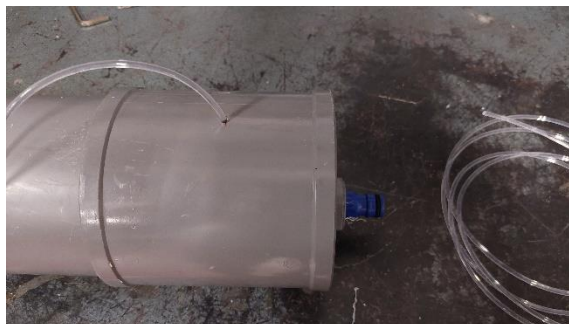


Figura 4-15 Fibra óptica introducida en el surtidor



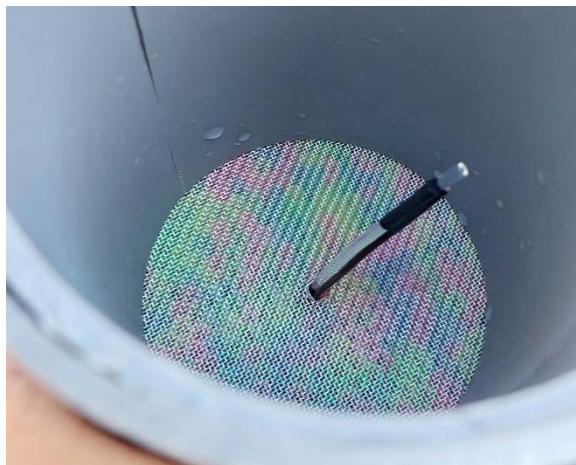
Ahora, la dificultad recaía en guiar la fibra óptica a través desde los tubos estrechos hasta el final de ellos y que quedara centrada, a la altura del agujero de salida del agua. Esto último se hace debido a que se parte de la hipótesis de que para que la luz se reflejara a lo largo de todo el chorro, la fuente de luz debe estar incidiendo en él de manera alineada, para que llegue la mayor cantidad de luz a este.

Para lograrlo, en primer lugar, se metió la fibra por el taladro realizado y se introdujo por uno de los tubos estrechos que estaban más centrados. A continuación, se realizó un agujero a la malla metálica que mantiene los tubos estrechos quietos para sacar por ahí la fibra.

Para que la fibra quedara verdaderamente centrada, a la altura del agujero de salida del agua, se usó la boca de salida del agua para hacer el agujero de la malla exactamente a la misma altura.

Ahora bien, se podía tener la fibra centrada, pero por su propia forma, si se sacaba mucho hacia el agujero de salida, la fibra se doblaba hacia un lado.

Para mantenerla centrada y permitir acercarla al agujero de salida, se la sujetó con un alambre metálico recto, que se sujetó a la fibra con cinta aislante. Se utilizó un alambre de unos 20 cm, de modo que la parte inferior de este quedara introducida también por el agujero de la malla y por uno de los tubos estrechos al igual que la fibra. De este modo se consigue que la fibra óptica este centrada y a la vez firmemente sujeta para poder colocarla a la altura que se desee dentro de un margen.



*Figura 4-16 Fibra óptica sujeta a un alambre*

Este margen de movimiento de la fibra, permite acercarlo o alejarlo del orificio de salida, ya que, si está muy cerca de la salida es probable que perturbe el chorro y se pierda el efecto de flujo laminar, pero por el otro lado, si está muy alejado es posible que la luz no llegase con la suficiente intensidad al chorro y no se apreciase. Es por lo tanto necesario encontrar un equilibrio.





## Capítulo 5. Resultados:

En primer lugar, se probó el surtidor con la tapa ya mencionada antes, en la que se hizo un taladro de unos 5 mm de diámetro. Además, se utilizó otra broca avellanada de modo que el taladro tuviera un pequeño chaflán, siendo un agujero divergente, más ancho en la parte interior del tubo y estrechándose en la salida. Para evitar irregularidades, se frotó con una lija por su interior para tratar de dejarlo lo más liso posible.



*Figura 5-1 Tapa de PVC taladrada con un pequeño chaflán*

Ahora, se fijó la tapa al surtidor empleando cinta aislante. El hecho de utilizar cinta aislante es por la fácil capacidad de montaje y desmontaje a la hora de probar cosas distintas. Una vez se tuvo el modelo definitivo se utilizó adhesivo de PVC para fijarlo.

Para poder mantener el tubo fijo, se sujetó con un alambre a un poste, y así se pudo permitir que el chorro tuviera una salida casi vertical del tubo.

A continuación, se abrió la toma de agua y se fue jugando con distintas presiones para observar cuál era a la que el efecto del flujo laminar era más apreciable. Cuando la presión era baja, salía junto al agua algo de aire causando irregularidades en el chorro. Para evitar esto fue necesario por lo tanto ir aumentando la presión. A grandes presiones, el agua salía con demasiada velocidad, alcanzando hasta unos 4 metros de altura, y aunque el chorro no era muy turbulento sí se observaban irregularidades. Tras seguir probando se alcanzó una presión a la que el chorro llegaba a subir en torno 1,5 metros de altura y en el que todo el chorro que subía, era laminar.



Figura 5-2 Salida del agua por el orificio del surtidor

Una vez llegaba el chorro a la altura máxima, el efecto del flujo laminar desaparecía. Pese a ello, este era hasta el momento el chorro de flujo laminar con mayor longitud conseguido.

Para evitar que el efecto laminar desapareciera en la parte superior del chorro, lo que se hizo fue inclinar más el surtidor, de modo que el chorro no saliera tan vertical. De este modo, y reduciendo un poco la presión, se logró que aunque el chorro no tuviera tanta longitud, fuera laminar en la subida y un poco en la caída.



Figura 5-3 Chorro laminar arqueado

Al principio, al estar el surtidor tan en vertical, cuando llega el chorro a la parte superior, se produce un cambio brusco cuando empieza a caer el agua. Inclinando el surtidor, se consigue que el cambio desde que sube el agua hasta que empieza a caer tenga una transición más suave, consiguiendo así que se preserve la laminaridad del chorro.



Figura 5-4 Chorro laminar inclinado

Para poder cuantificar el caudal del chorro y así poder calcular su número de Reynolds, se usó un vaso medidor y se midió el tiempo que tardaba en llenarse.

Las primeras mediciones que se hicieron fueron con la presión más alta, cuando el chorro es completamente laminar hasta que el agua empieza a caer y se vuelve turbulento. Se hicieron varias mediciones y se cuantificó el caudal en 0,10 L/s. Teniendo en cuenta que el orificio de salida es de 5 mm de diámetro, la velocidad del agua es:

$$u = \frac{Q}{A} = \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot \frac{(0,005)^2}{4}} = 5,09 \text{ m/s}$$

Siendo el número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} = \frac{10^3 \cdot 5,09 \cdot 0,005}{10^{-3}} = 25450$$

Se observa que el número de Reynolds es superior a 2300, por lo que el chorro debería ser turbulento. En efecto, la segunda mitad del chorro (unos 70 cm) es turbulenta, pero la primera parte es completamente laminar. Esto se explica con la condición de unidireccionalidad. El número de Reynolds es muy elevado, pero como a lo largo de los tubos estrechos del surtidor la longitud es mucho mayor que el diámetro (210 mm  $\gg$  5 mm) se consigue que el chorro sea unidireccional, provocando un movimiento estratificado de las partículas del agua, favoreciendo la laminaridad del chorro. Como el número de Reynolds es muy elevado, este efecto no se puede prolongar a la totalidad del chorro.



Figura 5-5 Chorro de flujo laminar que acaba en turbulento

De este modo, se ha conseguido lograr un chorro de flujo laminar con un fluido no muy viscoso como es el agua y a unos altos números de Reynolds.

Por otro lado, se hicieron mediciones del caudal cuando el chorro era completamente laminar, desde la salida del surtidor hasta que chocara con el suelo.



Figura 5-6 Chorro laminar proveniente del surtidor

La presión del agua en este caso era mucho menor y el caudal medido fue de 0,06L/s. De este modo la velocidad del agua era:

$$u = \frac{Q}{A} = \frac{0,06 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot \frac{(0,005)^2}{4}} = 3,06 \text{ m/s}$$

Y el número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} = \frac{10^3 \cdot 3,06 \cdot 0,005}{10^{-3}} = 15300$$

Se observa que el número de Reynolds es casi la mitad que, en el caso anterior, pero sin embargo sigue siendo superior a 2300, donde teóricamente pasaría a ser turbulento. Pese a ello, en este caso el flujo es laminar en toda la longitud del chorro. De nuevo, el hecho de que los tubos estrechos favorezcan la unidireccionalidad del chorro y que la velocidad de las partículas de agua sea menor, favorece el que no haya choques entre ellas y que el movimiento laminar se mantenga.

Estos resultados están en la línea con los obtenidos por A. Reshmin, A. Sudarikova, S. Teplovodskii y J. Zayko, del Instituto de Mecánica de la Universidad Estatal de Moscú. En su artículo, citaban que con un dispositivo de carácter similar al prototipo de este trabajo, habían obtenido chorros de agua de flujo laminar con números de Reynolds elevados. Declaraban, que habían logrado una longitud de chorro laminar de hasta más de 6 veces el diámetro del dispositivo con un número de Reynolds de alrededor de 10000 [22].

## 5.1. Resultados de la Versión 2

Con la misma presión de alimentación con la que se logró el efecto en el experimento anterior, se alimenta de nuevo el surtidor para probarlo ahora con una salida distinta.

De manera similar al caso anterior, la forma del chorro a la salida del surtidor a través de la boquilla, se observa aparentemente en régimen laminar. Las partículas de agua salen de forma ordenada, sin chocar unas con otras y provocan este efecto visual en el que parece que el agua esté congelada.





Figura 5-7 Chorro saliendo del surtidor a través de la boca

Sin embargo, en torno a unos 30 cm de la salida, el chorro se enturbia, y se observa claramente que el régimen de flujo es turbulento, las partículas de agua ya no siguen una trayectoria lineal y ordenada.



Figura 5-8 Turbulencias del chorro

En el experimento del surtidor original, la salida únicamente era un pequeño orificio, bien limado, con alguna pequeña irregularidad en la superficie, pero despreciable en su conjunto. Ahora, al agujero del taladro, hay que sumar a la salida la boca en forma de tronco de cono y además la silicona de unión entre la taba y esta. En la longitud del taladro, aunque pocas, hay irregularidades. Sumadas a las irregularidades internas del tronco de cono junto a la silicona que se podría haber desplazado en el proceso de unión, la cantidad de irregularidades a lo largo de la salida del surtidor es sustancialmente mayor a las originales.

Esta cantidad de irregularidades, provoca desvíos de las trayectorias de las moléculas de agua, lo que hace que estas choquen entre sí y el chorro pase de un régimen laminar a turbulento.

Esto explica el resultado obtenido, a la salida del surtidor, las partículas se están desviando de una trayectoria lineal, sin embargo, los choques entre partículas todavía no se producen con mucha intensidad, dando la sensación de que el flujo todavía es laminar. A pesar de esto, los choques entre partículas se siguen produciendo hasta llegar a un punto, en este caso a unos 30 cm de la salida, en el que se puede apreciar fácilmente que el régimen es turbulento.

## 5.2. Resultados de la Versión 3

Utilizando de nuevo, una presión similar a la del experimento original, se pone a prueba el chorro que sale a través de la arandela. El objetivo de esta, era tener una salida completamente regular y que esto favoreciera que el régimen del chorro a la salida fuera laminar. Pese a ello, con el surtidor en marcha el resultado no fue ni mucho menos el esperado.



*Figura 5-9 Chorro turbulento que pasa a través de la arandela*

En contra del resultado que se pretendía obtener, el chorro tenía un régimen con una forma claramente turbulenta. El motivo de que no se obtuviera un chorro de flujo laminar es similar al del caso anterior.

En este caso, la salida por la arandela tiene un diámetro completamente regular y una superficie interior bastante lisa. Sin embargo, la mínima falta de concentricidad entre la arandela y el taladro de la tapa, provoca un cambio brusco en la forma de la salida, lo que origina choques entre las partículas de agua a la salida y por lo tanto la rotura del régimen laminar, al no seguir dichas partículas una trayectoria recta.

Además, la unión de la arandela a la tapa se realizó utilizando un adhesivo. Esta unión se realizó tratando de depositar el adhesivo en torno a la parte exterior de la arandela, para que no pudiera traspasarse al interior de esta

y por lo tanto interponerse en la trayectoria del agua. Sin embargo, debido a la delicadeza de la unión, es probable que una pequeña parte del pegamento llegará al interior de la arandela y supusiera una traba más al paso del agua, favoreciendo que a su paso por ahí provocara turbulencias.



*Figura 5-10 Chorro turbulento saliendo del surtidor*

Conforme se desarrolla el chorro, como cabía esperar, el chorro se vuelve cada vez más turbulento, conforme aumentan dichas colisiones entre partículas, hasta llegar al punto de salpicar en distintas direcciones, perdiendo toda linealidad.

### 5.3. Resultados del añadido

En primer lugar, con el objetivo de comprobar que verdaderamente el fenómeno de la reflexión total tenía lugar dentro del chorro de flujo laminar, se colocó la fibra de manera conservadora a aproximadamente 10 cm del orificio de salida.

Se puso en funcionamiento y se comprobó que, en efecto, cuando el chorro era totalmente laminar desde el principio hasta el fin, con un caudal de aproximadamente 0,06 L/s, la luz se reflejaba en él y se observaba en el punto donde el chorro chocaba con el suelo. Como toda la luz se reflejaba, el chorro queda inalterado y no se refracta nada de luz, pero al final de este se observa el punto de luz en el suelo. Únicamente al final del chorro, donde aparece un poco de turbulencia, la luz escapa de él y se le ve “iluminado”.





Figura 5-11 Luz del LED reflejada a lo largo del chorro laminar

Queda comprobado por lo tanto que a través del chorro de flujo laminar, se produce el fenómeno de la reflexión total de la luz, al igual que en la fibra óptica.

Para tratar de lograr una mayor intensidad lumínica, se probó a acercar la fibra más al orificio de salida, a unos 3 cm y se observó a ver si lucía más.

Bajo las mismas condiciones que en el primer experimento, se encuentra que el chorro sale más perturbado y turbulento en comparación con el anterior, por lo tanto la luz no llega al suelo, si no que se refracta en la parte final del chorro.



Figura 5-12 Luz del LED escapando del chorro turbulento

Ahora bien, es preciso encontrar un punto de equilibrio, donde el chorro no se perturbe, pero la intensidad lumínica sea suficiente para ver la luz de una manera aceptable.

Tras hacer varios intentos, se determinó que la fibra debe situarse al menos a 7 cm del orificio de salida para que no perturbe al chorro en exceso.

Una vez comprobada la distancia respecto a la que había que colocar la fibra del orificio de salida para no perturbar el chorro, pero a la vez garantizar cierta intensidad lumínica, se quiso comprobar si verdaderamente era necesario que la fibra estuviera alineada con este orificio o si podría estar desalineada, apuntando en otra dirección.

Para ello, con la fibra situada en la misma posición que en el último experimento, se desvió ligeramente hacia un lado, unos  $10^\circ$ , de modo que ya no apuntaba directamente al orificio de salida.

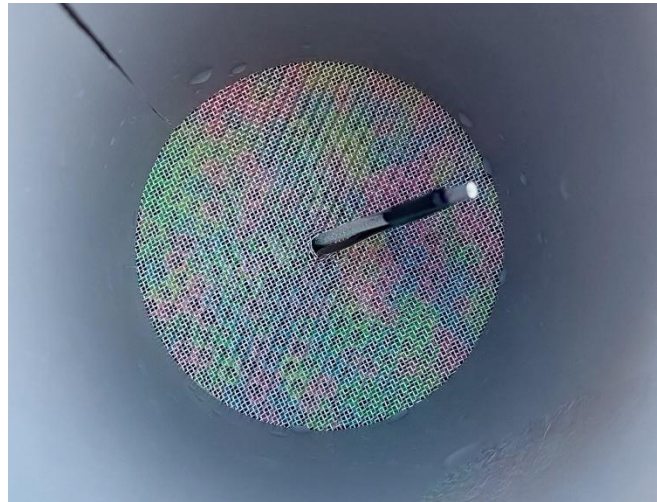


Figura 5-13 Fibra óptica no centrada en el interior del surtidor

A continuación, se cerró y se montó y se experimentó lo que ocurría.



Figura 5-14 Chorro laminar proveniente del surtidor del que no escapa la luz del LED

Se observó que el chorro permanecía laminar, sin perturbaciones. Sin embargo, la luz no escapaba del interior del surtidor. Se extrajo la conclusión de



que para que la luz se reflejara el chorro, la fibra óptica debía de estar alineada con el agujero de salida del agua.

Debido al éxito de la prueba con la fibra óptica centrada en el centro del surtidor y a unos 7 cm de la boca de salida, la modificación 3 se adopta como parte del surtidor.



## Capítulo 6. Presupuesto

### 6.1. Introducción y objetivos

Este capítulo tiene como propósito principal presentar el presupuesto industrial detallado para el Surtidor de flujo laminar. Este producto, como bien se explica a lo largo del trabajo, tiene el objetivo de lograr generar un chorro de flujo laminar con un líquido no muy viscoso como es el agua y a altos números de Reynolds, con fines experimentales y de ornamentación.

La finalidad de este presupuesto es calcular el coste asociado a la fabricación del prototipo final y tratar de extrapolarlo a cuál sería el precio de venta al público de un surtidor similar al elaborado.

En la elaboración del mismo, se ha tratado de ser lo más exhaustivo posible, teniendo en cuenta todos los tipos de costes asociados a la fabricación del producto, tanto directa como indirectamente.

### 6.2. Coste de fabricación

La base del presupuesto es el coste de fabricación, que representa el gasto directo en la fabricación y montaje del producto. Se compone de tres conceptos:

- Coste del Material
- Coste de la Mano de Obra Directa
- Coste del Puesto de Trabajo

En este presupuesto se ha considerado que los tres son variables, es decir, dependerán de la cantidad de surtidores a fabricar.

#### 6.2.1. Coste del material

El coste del material se refiere al total de gastos asociados con la adquisición de todas las materias primas y componentes necesarios para la fabricación del producto.

Para el cálculo de este coste se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones:

- Salvo para los componentes o materiales que se adquieren por unidades, es decir, para los que se compran por mililitros o metros, por ejemplo, se ha añadido un 10% de material en bruto a mayores de material neto, para tener en cuenta el material desechado en el proceso de fabricación, así como el coste por almacenamiento pérdidas o roturas.

- Los precios unitarios de cada materia se han obtenido mediante la comparación de los precios que ofertaban distintos vendedores, tratando de elegir siempre la opción más barata o en su defecto la que mejor se adhiera al producto.
- El Coste del Material se calcula referido al coste de una unidad.

Teniendo todo esto en cuenta, se procede al cálculo del Coste del Material.

Conociendo:

- Las dimensiones de cada uno de los componentes que integran el surtidor, así como otros componentes necesarios para el montaje y el embalaje.
- El material del que se componen cada uno de los componentes.
- El número de componentes por cada unidad de surtidor.
- El precio de cada parte referido a cada unidad de obra asociada a estos.

Aparte de los materiales ya explicados a lo largo del trabajo, se añaden los materiales de embalaje que se utilizarían para la venta y distribución del producto. Estos serían una caja de cartón de 60x40x40cm además de 85L de relleno de poliestireno expandido para garantizar la seguridad durante el transporte. La caja tiene 96L de capacidad, y el surtidor ocupa aproximadamente unos 6L, por eso se escogen aproximadamente 85L de este material para protegerlo. Se escoge este material porque está fabricado de materias primas renovables y completamente biodegradables y además porque puede encajar más fácilmente en los huecos que otros tipos de materiales de protección.

Se calcula el coste de cada uno de los componentes, multiplicando su precio por la cantidad necesaria de cada uno de ellos.

COMPONENTE	MARCA	MATERIAL	Nº PIEZAS	UD. OBRA	DIM. BRUTO	NETO (+10%)	TOTAL	PRECIO (€/UO)	TOTAL (€)
Tubo PVC Ø110mm	1	PVC	1	m	0,55	0,605	0,605	3,5	2,12
Tubos	2	Plástico	300	ud	-	-	300	0,03	9,00
Tejido poroso	3	Fibra sintética	4	ud	-	-	4	0,75	3,00
Malla metálica	4	Acero inoxidable	2	ud	-	-	2	1,2	2,40
Manguito PVC evac. 110-40	p	PVC	1	ud	-	-	1	7,15	7,15
Tapon reducido PVC evac. 110-40	6	PVC	1	ud	-	-	1	4,65	4,65
Tapón ciego PVC evac. Ø110	7	PVC	1	ud	-	-	1	4,14	4,14
Enlace PVC RH 40-32 3/4"	8	PVC	1	ud	-	-	1	1,55	1,55
Racor macho 3/4"	9	Plástico	1	ud	-	-	1	1,43	1,43
Uneplas PVC	10	Adhesivo	1	ml	125	137,5	137,5	0,03	4,13
Adaptador manguera	11	Plástico	1	ud	-	-	1	0,99	0,99
Manguera	12	Plástico	1	m	4	4,4	4,4	0,96	4,2328
Regulador de presión	13	-	1	ud	-	-	1	14,02	14,02
Fibra óptica	14	Vidrio	1	m	2	2,2	2,2	7,00	15,39
Fuente luz LED	15	-	1	ud	-	-	1	4,54	4,54
Alambre	16	Acero	1	m	0,2	0,22	0,22	0,23	0,05
Silicona caliente	17	Silicona	1	ud	-	-	1	0,32	0,32
Cinta aislante	18	PVC	1	m	0,1	0,11	0,11	0,05	0,01
Embalaje	14	Cartón	1	ud	-	-	1	3,2	3,20
Protección	15	Poliestireno expandido	1	L	85	93,5	93,5	0,07	6,55
<b>Coste Material/ud</b>									<b>88,86 €</b>

Figura 6-1 Tabla Coste de Material

Se determina que el Coste de Material por cada unidad de surtidor es de 88,86 €.

## 6.2.2. Coste de la Mano de Obra Directa

El coste de mano de obra directa se refiere a los gastos asociados con el trabajo humano directamente involucrado en la producción de un producto y con responsabilidad sobre un puesto de trabajo.

Los datos necesarios para el cálculo de este coste son, en primer lugar, el tipo de cualificación profesional requerida para cada tarea, y por otro lado el salario de cada uno de estos tipos de trabajo. Para calcular el salario/h de cada trabajador, se tiene que calcular:

1. Días reales de trabajo/año, Dr. Se van a calcular los días reales de trabajo de Valladolid en 2024, que se trata de un año bisiesto. Se restan a estos 366 días del año los días de vacaciones, fines de semana y festivos, que este año son 14 en Valladolid.

<b>Días Naturales</b>	Dn		366
<b>Deducciones</b>	D		138
<b>Domingos</b>		52	
<b>Sábados</b>		52	
<b>Vacaciones</b>		20	
<b>Fiestas</b>		14	
<b>Días Reales</b>	Dr = Dn - D		<b>228</b>

Figura 6-2 Tabla días reales de trabajo

2. Ahora, conociendo los días reales de trabajo se puede calcular el salario de cada tipo de trabajador. Se va a partir de la base de que cada trabajador trabajará 1800 horas efectivas al año, de ahí se calcula la jornada efectiva diaria. A continuación, sumando el salario base por día más el plus por día, se obtiene el salario por día. Multiplicando por los 366 días y añadiendo las pagas extras, se puede calcular la remuneración anual. Por último, dividiendo la remuneración anual de cada empleado entre las horas efectivas, se obtiene el salario/h de cada uno de ellos:

<b>Horas trabajo efectivas/año</b>	He	1800
<b>Jornada efectiva/día</b>	Jd = He / Dr	7,89
<b>Salario día</b>	Sd = Sbd + Pd	
<b>Paga extraordinaria</b>	2Pe = 60Sd	
<b>Remuneración anual</b>	Ra = 366Sd + 60Sd	
<b>Salario / hora</b>	S = Ra/He	

Figura 6-4 Tabla Salario hora

Concepto	Of. 1ª	Of. 2ª	Of. 3ª	Especialista	Peón	Aprendiz	Pinche
<b>Salario base día Sbd</b>	19,38	18,08	16,96	15,84	15,1	11,18	10,25
<b>Plus día Pd</b>	24,67	23	21,58	20,16	19,21	14,23	13,04
<b>Salario día Sd</b>	44,05	41,08	38,54	36	34,31	25,41	23,29
<b>Remuneración anual Ra</b>	18765	17500	16418,04	15336	14616	10824,7	9922
<b>Salario/hora</b>	10,43	9,72	9,12	8,52	8,12	6,01	5,51

Figura 6-3 Tabla salario hora por cualificación



Se va a partir de la hipótesis de que solo va a estar involucrada en la fabricación una persona, con la cualificación de oficial de primera.

OPERACIÓN	Of. 1ª	Of. 2ª	Of. 3ª	Especialista	Peón
Cortar					
Cortar					
Cortar					
Colocar					
Cortar					
Agujerear y colocar					
Introducir y colocar					
Introducir y colocar					
Unir y pegar					
Unir y pegar					
Unir					
Introducir y pegar					
Taladrar					
Introducir, colocar y sellar					
Sujetar y unir					
Introducir y colocar					
Taladrar y lijar					
Colocar y pegar					
Inspección					
Embalaje					

Figura 6-5 Tabla de asignación de tareas

Conocido todo esto se puede calcular el Coste de Mano de Obra Directa de la fabricación del surtidor:

Nº Operación	OPERACIÓN	Cantidad	Tiempo (min/ud.)	Tiempo total (min)	Tiempo total (h)	Salario (€/h)	Coste (€)
1	Cortar	1	3	3	0,05	10,43 €	0,52
2	Cortar	1	2	2	0,03	10,43 €	0,35
3	Cortar	1	2	2	0,03	10,43 €	0,35
4	Colocar	1	0,5	0,5	0,01	10,43 €	0,09
5	Cortar	1	2	2	0,03	10,43 €	0,35
6	Agujerear y colocar	1	3	3	0,05	10,43 €	0,52
7	Introducir y colocar	1	3	3	0,05	10,43 €	0,52
8	Introducir y colocar	1	10	10	0,17	10,43 €	1,74
9	Unir y pegar	1	6	6	0,10	10,43 €	1,04
10	Unir y pegar	1	6	6	0,10	10,43 €	1,04
11	Unir	1	0,5	0,5	0,01	10,43 €	0,09
12	Introducir y pegar	1	7,5	7,5	0,13	10,43 €	1,30
13	Taladrar	1	1,5	1,5	0,03	10,43 €	0,26
14	Introducir, colocar y sellar	1	15	15	0,25	10,43 €	2,61
15	Sujetar y unir	1	3	3	0,05	10,43 €	0,52
16	Introducir y colocar	1	2	2	0,03	10,43 €	0,35
17	Taladrar y lijar	1	4	4	0,07	10,43 €	0,70
18	Colocar y pegar	1	6	6	0,10	10,43 €	1,04
19	Inspección	1	3	3	0,05	10,43 €	0,52
20	Embalaje	1	2	2	0,03	10,43 €	0,35
						<b>Coste MOD/ud</b>	<b>13,38 €</b>

Figura 6-6 Tabla Coste Mano de Obra Directa

El Coste de Mano de Obra Directa por surtidor asciende a 13,38 €.



Se observa que el tiempo de elaboración de un surtidor es de 1 hora y 22 minutos, que se corresponde con la suma de la duración de cada una de las actividades.

### 6.2.3. Coste del Puesto de Trabajo

El coste del puesto de trabajo se refiere a los costes asociados con el equipamiento necesario para la fabricación del producto, desde el coste de adquisición hasta el coste de funcionamiento.

Los conceptos asociados al Coste del Puesto de Trabajo son:

- Interés de la inversión
- Amortización
- Mantenimiento
- Energía consumida

Para calcular el Coste del puesto de trabajo es necesario tener en cuenta varias partidas:

1. Precio de adquisición. Es el precio de cada uno de los equipamientos que es necesario adquirir. Para su obtención, se ha comparado diversos fabricantes tratando de escoger la opción más económica y que fuera más acorde con lo que se requiere.
2. Periodo de amortización en años. Es el tiempo durante el cual se distribuye el coste de un activo fijo a lo largo de su vida útil. Para todas las máquinas se ha considerado el mismo periodo, 15 años.
3. Horas anuales de funcionamiento. Se ha hecho la hipótesis de que cada una de las herramientas se va a utilizar un 10% del tiempo, es decir 180 horas anuales. Los elementos que no están involucrados directamente en la elaboración del surtidor se considera que se utilizan todo el tiempo, 1800 horas al año.
4. Vida prevista en horas. Es el producto de multiplicar el periodo de amortización por las horas de trabajo anuales.
5. Interés de la inversión. Es el interés que se hubiera obtenido si el capital invertido se hubiera empleado en otra clase de inversión. Ello conlleva considerar como un coste el interés dejado de percibir. Para ello se ha considerado un porcentaje de interés  $r$  del 10%.
6. Amortización. Es el coste anual para recuperar la inversión de capital inicial a lo largo de los años del periodo de amortización.
7. Mantenimiento. Es el coste asociado a las reparaciones, sustitución de piezas o revisión de cada una de las máquinas. Este coste contempla el coste de los elementos a sustituir, así como el coste de la mano de obra del personal de mantenimiento. Se ha considerado una tasa de mantenibilidad  $m$  del 4%.
8. Energía consumida. Es la cantidad de energía eléctrica requerida por cada una de las máquinas durante su periodo de funcionamiento. Se ha

considerado un coste de la luz de 0,13235 €/kWh. En este caso, las únicas máquinas que precisan de energía eléctrica son el taladro, la fresa de mano y la pistola de silicona.

r	0,1
m	0,04
Coste energía (€/kwh)	0,13235

Figura 6-7 Tabla de hipótesis

Se puede dividir el inventario del puesto de trabajo en dos grandes grupos:

- Herramientas directamente involucradas en el proceso de fabricación: estarían englobadas todas las herramientas o maquinaria necesarias para la fabricación del producto que se especifican en el proceso de fabricación. Son: una sierra, un taladro, una fresa de mano, las brocas, el papel de lija, la pistola de silicona y el martillo.
- Objetos auxiliares: son objetos que no están involucrados directamente en el proceso de fabricación. Se trata de la mesa de trabajo donde se va a elaborar el producto, los guantes, las gafas y el casco de protección y el alargador eléctrico.

Sumando los cuatro costes asociados al puesto de trabajo (interés de la inversión, amortización, mantenimiento, energía consumida) se obtiene el coste por hora del puesto de trabajo. Conociendo la producción horaria de, se puede extrapolar al Coste del Puesto de Trabajo por unidad de surtidor.

MÁQUINA	Precio (€)	Cantidad	Coste (€)	Amortización (años)	Funcionamiento (h/año)	Vida prevista	Interés	Amortización	Mantenimiento	Energía	Total (€/h)
Mesa de trabajo	103,73	1	58,99	15	1800	27000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
Sierra	35,99	1	35,99	15	180	2700	0,02	0,01	0,01	0,00	0,04
Taladro	39,99	1	39,99	15	180	2700	0,02	0,01	0,01	16,91	16,96
Fresa de mano	47,95	1	47,95	15	180	2700	0,03	0,02	0,01	3,10	3,15
Broca 5mm	1,55	1	1,55	15	180	2700	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Broca avellanada 5mm	0,99	1	0,99	15	180	2700	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Papel de lija	0,69	1	0,69	15	180	2700	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Pistola de silicona	7,66	1	7,66	15	180	2700	0,00	0,00	0,00	0,60	0,60
Martillo	10,15	1	10,15	15	180	2700	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01
Guantes	13,99	1	13,99	15	1800	27000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Gafas de protección	16,99	1	16,99	15	1800	27000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Casco de protección	8,53	1	8,53	15	1800	27000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Alargador eléctrico	35,99	1	35,99	15	180	2700	0,02	0,01	0,01	0,00	0,04
<b>Coste PT/h</b>											<b>20,83 €</b>
<b>Coste PT/ud</b>											<b>28,49 €</b>

Figura 6-8 Tabla Coste del Puesto de Trabajo

Simplificando la tabla:

MÁQUINA	Coste (€)	Interés	Amortización	Mantenimiento	Energía	Total (€/h)
Mesa de trabajo	58,99	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
Sierra	35,99	0,02	0,01	0,01	0,00	0,04
Taladro	39,99	0,02	0,01	0,01	16,91	16,96
Fresa de mano	47,95	0,03	0,02	0,01	3,10	3,15
Broca 5mm	1,55	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Broca avellanada 5mm	0,99	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Papel de lija	0,69	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Pistola de silicona	7,66	0,00	0,00	0,00	0,60	0,60
Martillo	10,15	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01
Guantes	13,99	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Gafas de protección	16,99	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Casco de protección	8,53	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Alargador eléctrico	35,99	0,02	0,01	0,01	0,00	0,04
<b>Coste PT/h</b>						<b>20,83 €</b>
<b>Coste PT/ud</b>						<b>28,49 €</b>

Figura 6-9 Tabla Coste del Puesto de Trabajo simplificada

Así pues, agrupando los tres costes (Material, MOD y Puesto de Trabajo), se tiene el Coste de Fabricación de una unidad de surtidor, siendo este coste la base del presupuesto.

88,86 €	<b>Costo Material/ud</b>
13,38 €	<b>Costo MOD/ud</b>
28,49 €	<b>Costo PT/ud</b>
<b>130,73 €</b>	<b>Costo de Fabricación</b>

Figura 6-10 Tabla Coste de Fabricación

### 6.3. Mano de Obra Indirecta

La mano de obra indirecta se refiere a los gastos asociados con el trabajo humano del conjunto de operarios relacionados directamente con la producción, pero sin responsabilidad sobre el puesto de trabajo (supervisores, personal de mantenimiento, personal de transporte, personal de seguridad...).

Para el cálculo de este coste, se ha determinado que la mano de obra indirecta representa un 25% respecto a la mano de obra directa.

Coste M.O.D	13,38 €
<b>Mano de obra indirecta M.O.I</b>	<b>3,34 €</b>

Figura 6-11 Tabla Coste Mano de Obra Indirecta

## 6.4. Cargas Sociales

Las Cargas Sociales representan el conjunto de aportaciones de la empresa a diversos Departamentos y Organismos Oficiales, para cubrir las prestaciones del personal en materia de Seguridad Social (28,14%), Accidentes de Trabajo (7,60%), Formación Profesional (0,60%), Seguro de desempleo (2,35%), Fondo de Garantía Salarial (0,20%), Responsabilidad civil (1,00%), etc.

Se ha determinado que las cargas sociales representan un 40% respecto a la mano de obra directa y la mano de obra indirecta.

Coste M.O.D	13,38 €
Mano de obra indirecta M.O.I	3,34 €
<b>Cargas sociales C.S.</b>	<b>6,69 €</b>

Figura 6-12 Tabla Cargas Sociales

## 6.5. Gastos Generales

Los Gastos Generales se les define como el coste total necesario para el funcionamiento de una empresa, excluyendo los costes ya definidos. Son el coste asociado al alquiler del establecimiento de trabajo, el pago de los servicios públicos (luz, gas, agua...), el salario del personal administrativo, etc.

Se ha determinado que los gastos generales representan un 23% respecto a la mano de obra directa.

Coste M.O.D	13,38 €
<b>Gastos generales G.G.</b>	<b>3,08 €</b>

Figura 6-13 Tabla Gastos Generales

Si al coste de fabricación, se suman tanto la mano de obra indirecta, como las cargas sociales y los gastos generales, se obtiene el coste total en fábrica.

## 6.6. Beneficio Industrial

El Beneficio Industrial se refiere a la ganancia que la empresa espera obtener mediante la comercialización del producto fabricado.

Se ha determinado que el Beneficio Industrial será de un 18% sobre el coste total en fábrica.

Coste total en fábrica Ct	143,84 €
<b>Beneficio Industrial 18%</b>	<b>25,89 €</b>

Figura 6-14 Tabla Beneficio Industrial

Sumando el coste total en fábrica y el beneficio industrial esperado, se obtiene el precio de venta en fábrica del producto:

Coste total en fábrica Ct	143,84 €
Beneficio Industrial 18%	25,89 €
Precio de venta en fábrica Pv	169,73 €

Figura 6-15 Tabla Precio de venta en fábrica

Aplicando el 21% de IVA sobre el precio de venta en fábrica, se obtendrá finalmente el precio de venta al público del producto.

## 6.7. Resultado del presupuesto industrial

Aglutinando todos los costes asociado al producto ya mencionados, se pueden resumir en la siguiente tabla, de la que se extrae el precio de venta al público final del producto:

CONCEPTO	PRECIO (€)
Coste Material	88,86 €
Coste M.O.D	13,38 €
Coste P.T.	28,49 €
Mano de obra indirecta M.O.I	3,34 €
Cargas sociales C.S.	6,69 €
Gastos generales G.G.	3,08 €
Coste total en fábrica Ct	143,84 €
Beneficio Industrial 18%	25,89 €
Precio de venta en fábrica Pv	169,73 €
<b>Precio de venta al público I.V.A. 21%</b>	<b>205,37 €</b>

Figura 6-16 Tabla Precio de venta al público

Se obtiene pues, que el hipotético precio de venta al público del Surtidor de flujo laminar sería de 205,37 € teniendo en cuenta las consideraciones ya mencionadas:

M.O.I	25% M.O.D.
C.S.	40% (M.O.D. + M.O.I.)
G.G.	23% M.O.D.

Figura 6-17 Tabla de consideraciones



## Capítulo 7. Conclusiones y líneas de trabajo futuras

### 7.1. Conclusiones

Una vez explicados los principios teóricos acerca del flujo laminar, narrados los diferentes experimentos previos al desarrollo del prototipo final de surtidor y explicado el proceso de fabricación y ensayo sobre el prototipo final, se puede proceder a realizar un análisis para comprobar en qué medida se han satisfecho los objetivos principales del trabajo.

En primer lugar, se ha realizado un exhaustivo desarrollo de las ecuaciones del movimiento de los fluidos, obteniéndolas desde el punto de vista más elemental. Una vez explicado detalladamente la obtención de las ecuaciones de Navier Stokes, que son las que rigen el movimiento de los fluidos, se realizaron las simplificaciones oportunas para poder obtener una solución de estas que explicara el flujo laminar. Parte de estas simplificaciones eran aplicar estas ecuaciones al caso particular de líquidos incompresibles y con un movimiento unidireccional. En este sentido, se puede considerar que la explicación de este proceso se ha hecho con el suficiente detalle como para decir que se ha profundizado lo suficiente como para comprender los principios acerca del flujo laminar. Todo este desarrollo ha ayudado al alumno a entender los principales conceptos teóricos y matemáticos sobre el flujo laminar, siendo de gran ayuda para la comprensión de la asignatura de Mecánica de fluidos.

Por otro lado, se consiguió de manera satisfactoria:

- Diseñar un prototipo de surtidor de flujo laminar. A través de una gran cantidad de ensayos preliminares se llevó a la concepción de la idea para el surtidor de flujo laminar. Las conclusiones extraídas tanto de los éxitos como de los fracasos de estos experimentos fueron de gran importancia a la hora de diseñar el prototipo final.
- Construir el prototipo del surtidor de flujo laminar. Esto conllevó una destreza que hubo que adquirir con ciertas herramientas para poder elaborarlo.
- Ensayar el surtidor de flujo laminar. Una vez construido el prototipo, fue necesario una etapa de experimentación para encontrar las condiciones de trabajo más favorables del surtidor y revisar si cumplía su propósito. Se ensayó con el prototipo original, con dos versiones que no llegaron a los resultados esperados y con un agregado que mejoraba su efecto visual.

Se podría afirmar que este dispositivo cumple con su propósito principal, ya que podría ser utilizado para alimentar una fuente ornamental, generando un chorro de agua con un efecto estético agradable e impactante. Además, este prototipo se podrá utilizar en laboratorios de mecánica de fluidos con la finalidad de poder estudiar y seguir profundizando en el conocimiento del flujo laminar.

También puede ser utilizado como herramienta de aprendizaje como parte de una práctica de laboratorio para facilitar a los alumnos una comprensión sencilla de lo que es el flujo laminar y sus diferencias con el flujo laminar.

## 7.2. Líneas de trabajo futuras

Hasta el momento, se había conseguido un régimen de flujo estacionario manteniendo el surtidor conectado a una toma de agua, garantizando así una alimentación en todo momento. Sin embargo, el agua que abandonaba el surtidor, no se recirculaba para ser reutilizada de nuevo, lo que implicaba un uso no sostenible del agua.

Por esta razón, se va a diseñar un circuito cerrado, que permita recircular el agua utilizada en el surtidor. De este modo, el mismo agua que abandona el surtidor será utilizada para alimentarlo de nuevo. Mediante este circuito, además de reducir considerablemente el consumo de agua se eliminará la dependencia de una fuente de alimentación de agua externa.

El diseño de este circuito va en línea con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) de la Agenda 2030, especialmente con el ODS 6: Agua limpia y saneamiento. Este Objetivo, promueve la gestión de forma sostenible del agua, para lograr un acceso universal y equitativo al agua potable y a servicios de saneamiento e higiene adecuados, así como mejorar la calidad del agua a nivel global. El diseño planteado para el circuito contribuiría a las metas 6.4, que busca aumentar el uso eficiente los recursos hídricos en todos los sectores, y 6.a, que fomenta la creación de capacidades y la transferencia de tecnologías innovadoras relacionadas con el agua.



Figura 7-1 Objetivos de Desarrollo Sostenible [23]

Con esta medida, se pretende reflejar los principios de la gestión sostenible y respetuosa del agua y de los recursos naturales. Así, en un contexto mundial de escasez de agua, con este proyecto se pretende también representar los pasos a dar hacia una economía circular del agua, promovida por la Agenda



2030, con el fin de minimizar el desperdicio y maximizar la reutilización de recursos.

El diseño del circuito cerrado propuesto es el siguiente:

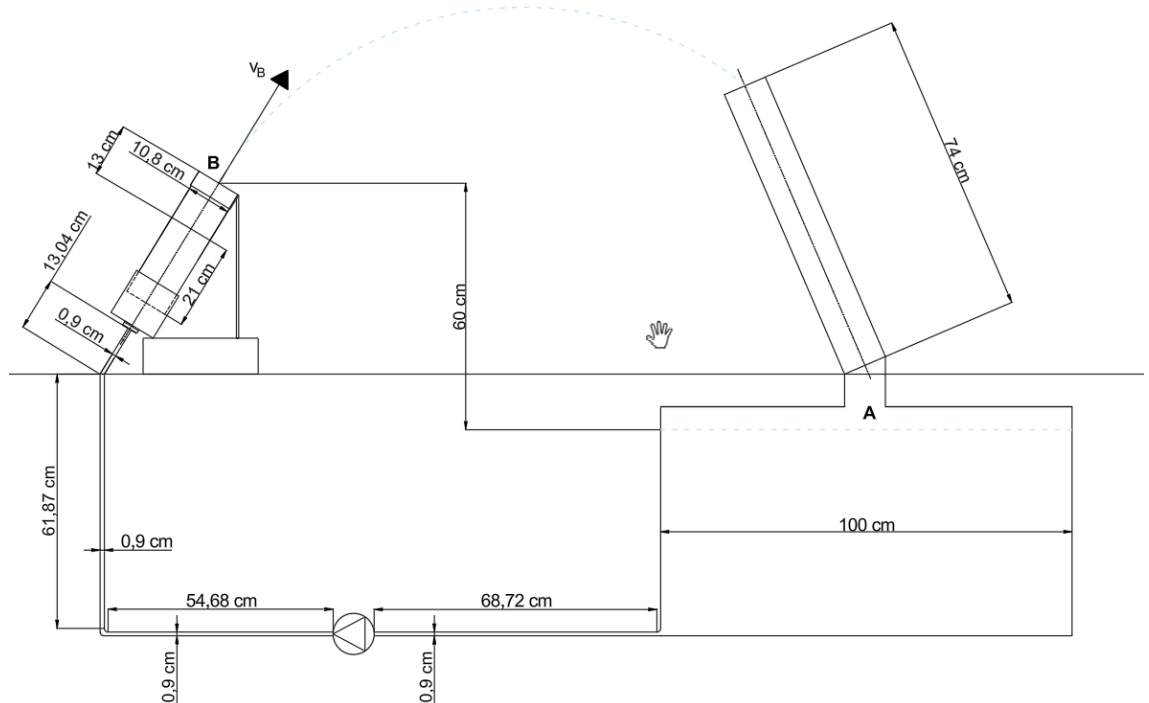


Figura 7-2

El surtidor, expulsará el agua, y un tubo cilíndrico lo recogerá, a la altura justa en la que desaparece el efecto del flujo laminar, quedando al aire únicamente la parte del chorro que sigue un régimen laminar.

El agua caería a través de este tubo vertical hasta un sumidero que recogería el agua. Este sumidero estaría conectado a una tubería inclinada respecto a la vertical, que conduciría el agua hasta un depósito. A dicho depósito, estaría conectada una bomba, que impulsaría el agua de nuevo hasta el surtidor. El depósito se podría rellenar fácilmente a través de este tubo inclinado, tanto en el instante inicial de su instalación, como en a lo largo del tiempo por posibles fugas que pudiera tener el circuito o por la evaporación del agua con el paso del tiempo.

Se ha presupuesto un depósito con un tamaño considerable, con unas dimensiones de 100x50x50 cm. Tendría este tamaño tan elevado para evitar que las fugas de agua del circuito pudieran perturbar el funcionamiento del mismo. Sin embargo, como bien se ha explicado, sería fácil de rellenar de agua.

## Cálculo de la bomba requerida

En primer lugar, se realiza un balance de energía entre los puntos A y B (despreciando los términos de transferencia de calor), para calcular la altura manométrica de la instalación:

$$H = \left( \frac{P_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B \right) - \left( \frac{P_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A \right) = H_i - H_{P_{A-B}}$$

Ecuación 110 [11]

Donde:

$H_i$ : altura suministrada por la bomba

$H_{P_{A-B}}$ : pérdida de carga

Los términos de presiones se anulan porque es la misma para los puntos A (superficie libre) y B, la atmosférica.

Se va a suponer que la velocidad en el punto A es nula, ya que se considera que el circuito va a tener un funcionamiento estacionario puro y por lo tanto el nivel del agua se va a mantener en todo momento a la misma altura.

Teniendo esto en cuenta, se simplifica el balance de energía:

$$\left( \frac{v_B^2}{2g} + z_B \right) - (z_A) = H_i - H_{P_{A-B}}$$

Ecuación 111

Donde:

$$\Delta z = z_B - z_A = 0,6 \text{ m}$$

Las pérdidas de carga se pueden expresar como:

$$H_{P_{A-B}} = \frac{8Q^2}{\pi^2 g} \cdot \sum_i \left( \frac{1}{D_i^5} \cdot f_i \cdot L_i \right) + \frac{8Q^2}{\pi^2 g} \cdot \sum_j \left( \frac{k_j}{D_j^4} \right)$$

Ecuación 112 [11]

El primer sumatorio se corresponde con las pérdidas de carga por fricción a lo largo del circuito, y el segundo con las pérdidas de carga locales.

Para el cálculo de las pérdidas de carga por fricción se van a considerar tres tramos del circuito:

- **Tramo 1:** desde la salida del depósito hasta la entrada del surtidor. ( $L_1=1,981 \text{ m}$ ,  $D_1=0,009 \text{ m}$ ).
- **Tramo 2:** desde la entrada al surtidor, donde directamente entra por los tubos estrechos o pajitas hasta la salida de estas. ( $L_2=0,21 \text{ m}$ ,  $D_2=0,005 \text{ m}$ ). En este tramo, al atravesar el agua 300 pajitas, el caudal que pasa por cada una de ellas es  $Q/300$ .

- **Tramo 3:** desde la salida de los tubos estrechos hasta la salida del surtidor ( $L_1=0,13$  m,  $D_3=0,108$  m).

Todos los tramos son de plástico o PVC, por lo se puede considerar una rugosidad absoluta  $\varepsilon=0,0015$  mm [24].

Esto se utiliza para calcular el factor de fricción  $\lambda$  de cada uno de los tramos, haciendo uso del diagrama de Moody.

Conocida la rugosidad absoluta  $\varepsilon$  de cada uno de los tramos, y el diámetro de cada uno, se calcula la rugosidad relativa de cada uno ellos:

$$\frac{\varepsilon}{D_1} = \frac{0,0015 \text{ mm}}{9 \text{ mm}} = 0,000166$$

$$\frac{\varepsilon}{D_2} = \frac{0,0015 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} = 0,0003$$

$$\frac{\varepsilon}{D_3} = \frac{0,0015 \text{ mm}}{108 \text{ mm}} = 0,0000138$$

Conocido el caudal y el diámetro de cada sección, se puede calcular el valor del número de Reynolds para cada uno de los tramos:

$$Re_1 = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q}{\pi \cdot D_1 \cdot \mu} = \frac{4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \cdot 0,009 \text{ m} \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})} = 11317$$

$$Re_2 = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q}{\pi \cdot D_2 \cdot \mu} = \frac{4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{0,08 \cdot 10^{-3}}{300} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \cdot 0,005 \text{ m} \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})} = 68$$

$$Re_3 = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q}{\pi \cdot D_3 \cdot \mu} = \frac{4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \cdot 0,108 \text{ m} \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})} = 943$$

Ahora, conociendo el número de Reynolds y la rugosidad relativa se puede acudir al Diagrama de Moody para obtener  $\lambda$ .

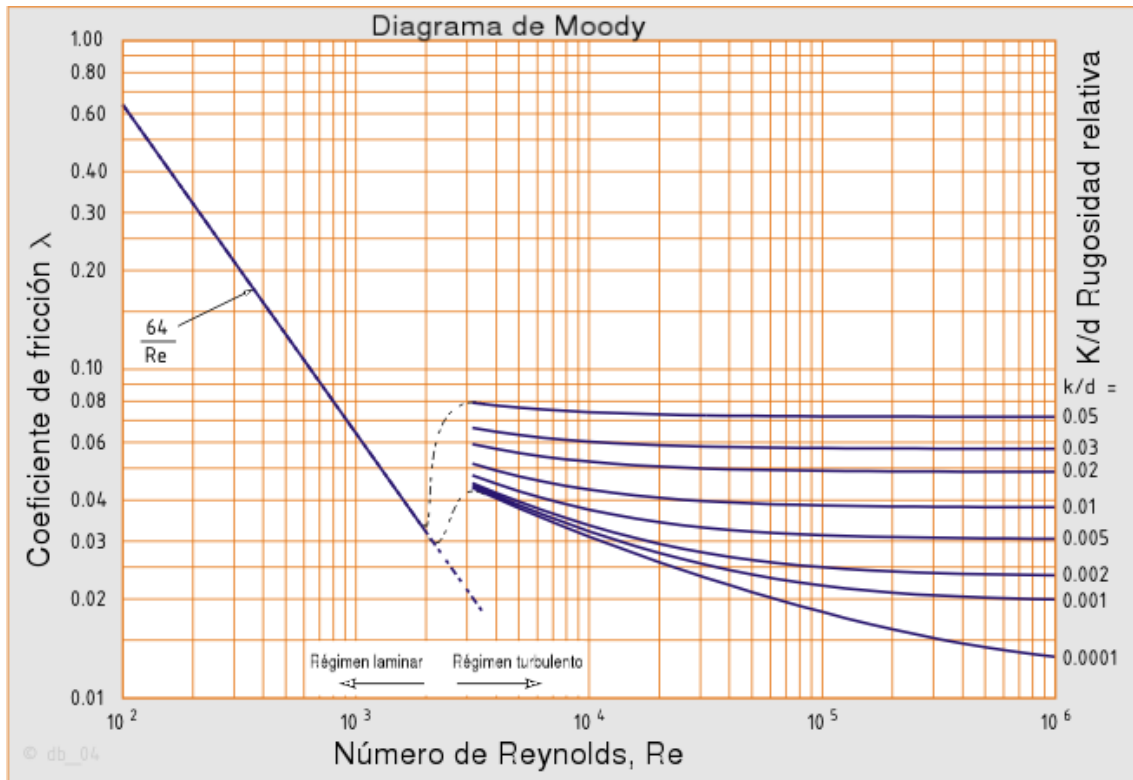


Figura 7-3 Diagrama de Moody [25]

Para el tramo 1:

$$Re_1 = 11317; \frac{\varepsilon}{D_1} = 0,000166 \rightarrow \lambda_1 = \mathbf{0,03}$$

Para el tramo 2:

$$Re_2 = 68; \lambda_2 = \frac{64}{Re} \rightarrow \lambda_2 = \mathbf{0,94}$$

Para el tramo 3:

$$Re_3 = 943; \frac{\varepsilon}{D_3} = 0,0000138 \rightarrow \lambda_3 = \mathbf{0,066}$$

Por otro lado, se han considerado las siguientes pérdidas locales:

- Codo de radio corto a ( $k_a=0,9$ ;  $D_a=0,009m$ ) [26]
- Entrada al surtidor b ( $k_b=1$ ;  $D_b=0,009m$ ) [26]
- Superficie porosa de entrada c. Se va a asemejar su comportamiento al de una válvula de retención totalmente abierta. ( $k_c=2$ ;  $D_c=0,108m$ ) [26]
- Descarga de los tubos estrechos o pajitas d. ( $k_d=1$ ;  $D_d=0,005m$ ) [26]
- Salida del depósito de agua. Se presupone que la salida del depósito va a ser redondeada, por lo que la pérdida de carga en ese punto se puede considerar despreciable.

En las mediciones realizadas con el surtidor en funcionamiento, se extrajo que el caudal del chorro cuando este era de flujo laminar y con unas dimensiones aceptables rondaba entre 0,06-0,10 L/s. Por ello se va a calcular la potencia de la bomba para un punto intermedio,  $Q=0,08$  L/s.

Conociendo estos datos, ya se puede comenzar a calcular la pérdida de carga entre los puntos A y B.

$$H_{P_{A-B}} = \frac{8Q^2}{\pi^2 g} \cdot \left( \frac{1}{D_1^5} \cdot f_1 \cdot L_1 + \frac{1}{D_2^5} \cdot f_2 \cdot L_2 + \frac{k_a}{D_a^4} + \frac{k_b}{D_b^4} + \frac{k_c}{D_c^4} + \frac{k_d}{D_d^4} \right) + \frac{8(Q/300)^2}{\pi^2 g} \cdot \frac{1}{D_3^5} \cdot f_3 \cdot L_3$$

*Ecuación 113*

$$H_{P_{A-B}} = \frac{8Q^2}{\pi^2 g} \cdot \left( \frac{1}{0,009^5} \cdot 0,03 \cdot 1,981 + \frac{1}{0,108^5} \cdot 0,066 \cdot 0,13 + \frac{0,9}{0,009^4} + \frac{1}{0,009^4} + \frac{2}{0,108^4} + \frac{1}{0,005^4} \right) + \frac{8(Q/300)^2}{\pi^2 g} \cdot \frac{1}{0,005^5} \cdot 0,94 \cdot 0,21$$

Con  $Q=0,08$ L/s:

$$H_{P_{A-B}} = 1,53 \text{ m}$$

La velocidad del chorro a la salida del surtidor es:

$$v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{0,08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \cdot \frac{(0,005 \text{ m})^2}{4}} = 4,07 \text{ m/s}$$

Volviendo al balance de energía entre los puntos A y B:

$$H_i = \frac{v_B^2}{2g} + \Delta Z + H_{P_{A-B}}$$

$$H_i = \frac{4,07^2}{2g} + 0,6 + 1,53 = \mathbf{2,98 \text{ m}}$$

Se calcula que la bomba que moverá el agua a lo largo del circuito debe tener una altura de la instalación de aproximadamente 3 metros.

Ahora, conocidas la altura de funcionamiento que debería tener la bomba, junto con el caudal de diseño que son 0,8 l/s o aproximadamente 0,3 m<sup>3</sup>/h, se acude al catálogo del fabricante de bombas 'Grundfos'.

Con estos datos, el fabricante indica que la mejor opción sería la bomba TP 32-40/4 A-F-A-BQQE-CW3. El punto de trabajo de la bomba sería con un rendimiento del 86% y a un régimen de giro de 1267 rpm [27].

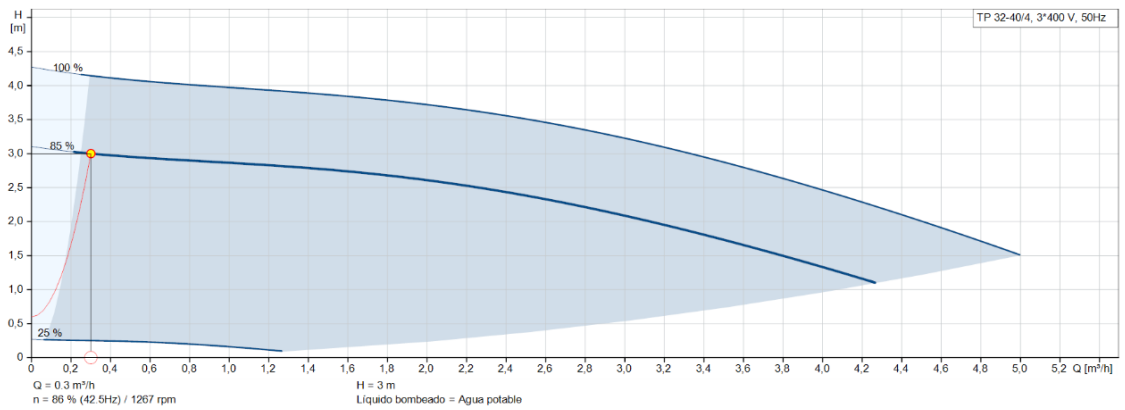


Figura 7-4 Curva de funcionamiento de la bomba [27]

Además, el fabricante nos indica que la potencia que requiere la bomba en el punto de trabajo es de 0,035 kW.

Lamentablemente, por falta de tiempo y de medios (ya que la mayoría de los experimentos y pruebas se han llevado a cabo en la terraza de la casa del alumno), no se pudo llegar a implementar dicho circuito cerrado. Por ello, este trabajo queda abierto a quien quiera continuarlo para tratar de llevar a cabo este circuito reduciendo así el impacto de su funcionamiento.



## Capítulo 8. Bibliografía

- [1] «Flujo laminar: Navegación tranquila: Dominar el flujo laminar,» FasterCapital, [En línea]. Available: <https://fastercapital.com/es/contenido/Flujo-laminar--Navegacion-tranquila--Dominar-el-flujo-laminar-continuo.html#Aplicaciones-exitosas-del-flujo-laminar>. [Último acceso: 27 09 2024].
- [2] B. J. Barlow, W. H. Rae y A. Pope, Low Speed Wind Tunnel Testing, John Wiley & Sons, 1999.
- [3] J. M. Coulson, J. F. Richardson y D. G. Peacock, Ingeniería Química: diseño de reactores químicos, Reverté SA, 2004.
- [4] «¿Qué es la lubricación hidrodinámica?,» Repsol, [En línea]. Available: <https://lubricants.repsol.com/es/te-ayudamos/que-es-la-lubricacion-hidrodinamica/>. [Último acceso: 27 09 2024].
- [5] A. Crespo Martínez, Mecánica de Fluidos, Parainfo, 2006.
- [6] Y. Hori, Hydrodynamic Lubrication, Springer, 2006.
- [7] V. N. Constantinescu, Laminar Viscous Flow, Springer, 1995.
- [8] F. López Peña, Mecánica de Fluidos, Universidad de la Coruña, 2004.
- [9] R. L. Mott y J. Untener, Mecánica de Fluidos, Pearson, 2015.
- [10] F. M. White, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, 2006.
- [11] F. M. White, Fluid Mechanics, McGraw-Hill, Inc, 2004.
- [12] R. Mott, Mecánica de fluidos aplicada, Pearson Education, 1995.
- [13] G. J. Van Wylen y R. E. Sonntag, Fundamentals of Classical Thermodynamics, John Wiley & Sons Inc., 1985.
- [14] R. G. Lerner y G. L. Trigg, Encyclopaedia of Physics, VHC, 1994.



- [15] O. Reynolds, «An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels.,» Proc. R. Soc. , London, 1883.
- [16] Y. A. Çengel y J. M. Cimbala, Mecánica de fluidos: fundamentos y aplicaciones, McGraw Hill Education, 2018.
- [17] «Número de Reynolds,» Wikipedia, [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_de\\_Reynolds](https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Reynolds). [Último acceso: 27 09 2024].
- [18] D. F. Rogers, Laminar Flow Analysis, Cambridge University Press, 1992.
- [19] J. L. Font, «Óptica geométrica,» EUETIT, 2003, 2003.
- [20] J. Rodríguez García y J. M. Virgós Rovia, Fundamentos de óptica ondulatoria, Universidad de Oviedo, 1998.
- [21] R. Digilov, Gravity discharge vessel revisited: An explicit Lambert W function solution, American Association of Physics Teachers, 2017.
- [22] A. Reshim, A. Sudarikova, S. Teplovodskii y J. Zayko, «Technology for formation of axisymmetric free jets with long laminar region,» *Journal of Physics: Conference Series*, 2017.
- [23] «Objetivos y metas de desarrollo sostenible,» Naciones Unidas, [En línea]. Available: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/>. [Último acceso: 20 11 2024].
- [24] Computer Applications in Hydraulic Engineering, Haestad Methods, 2002.
- [25] «Diagrama de Moody,» Wikipedia, [En línea]. Available: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Diagrama\\_de\\_Moody](https://pt.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Moody). [Último acceso: 20 11 2024].
- [26] «Cálculo de pérdidas de carga,» Pirabloc, [En línea]. Available: <https://www.pirabloc.com/blog-es/calculo-perdidas-carga/>. [Último acceso: 25 11 2024].





- [27] «Modelo TP 32-40/4 A-F-A-BQQE-CW3,» Grundfos, [En línea]. Available: <https://product-selection.grundfos.com/es/products/tp-tpe/tp/tp-32-404-98958179?pumpsystemid=2521599664&tab=variant-sizing-results>. [Último acceso: 20 11 2024].





## Anexos

- Diagrama sinóptico de fabricación y montaje
- Plano