UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

TITULO SOBRE LA EVOLUCION DE LA PRACTICA DE LA REALIZACIÓN DE DEMOSTRACIONES DE RESULTADOS EN GEOMETRIA EN ENSEÑANZA SECUNDARIA Y BACHILLERATO

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Vidal Vegas Manchado

Tutor: Fernando Sanz Sánchez

Valladolid, julio del 2024

Tabla de contenido

1. PREFACIO

Los conocimientos adquiridos durante el Máster de Profesorado especialidad matemáticas, han sido aplicados en la realización de este trabajo de obligado cumplimiento impartido por parte de la Universidad de Valladolid durante el curso 2023-24. Tiene una carga de 6 créditos del total que suponen el Máster.

En su elaboración, se ha contado con la dirección del Profesor Dr. Fernando Sanz Sánchez, perteneciente al departamento de Dpto. de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología.

Los conocimientos impartidos en este Máster de Profesorado van dirigidos a licenciados, ingenieros, arquitectos o graduados que deseen formarse para ser profesores de Educación Secundaria, Bachillerato y Formación Profesional y esta formación avanzada orientada a la especialización profesional les habilite como profesor de los niveles educativos mencionados anteriormente.

Por esta razón el TFM está orientado como aplicación de los conocimientos adquiridos durante el curso de este máster. Para ello entre las posibilidades sugeridas por el coordinador de este Máster, se ha optado por un estudio-investigación sobre el nivel académico de los alumnos en el campo de la geometría ya que parte del profesorado de matemáticas está notando una bajada del nivel de conocimientos del alumnado en este campo. Estas carencias se están llegando a detectar en carreras de ciencias, ingeniería y arquitectura en los primeros años de universidad. A sugerencia del tutor, se ha optado por esta línea de trabajo en el que intentaremos ver si existen carencias de conocimientos en matemáticas aplicadas a la geometría entre los alumnos de secundaria, ver qué nivel de conocimientos y que vocabulario matemático aplicado a la geometría tiene el alumno, averiguar las causas de estas carencias y poder realizar un adecuado diagnóstico con el que poder ayudarle.

Por esta razón hemos decidido dividir este trabajo en 4 partes, Programación didáctica del curso, temario docente del profesor, conocimientos del alumno (nivel académico) y Análisis de un libro de refuerzo de materia, en este caso de geometría.

1.1 Notas.

¿Cómo, que técnicas y razonamientos dan para impartir la geometría como base de docencia de principios algebraicos?

¿Qué contenido debería impartirse?

¿Psicología del alumno, edad de abstracción?

Cuestionario ¿Qué datos son eficaces?

Consultar a profesores distintos puntos de vista de docencia de geometría matemática

Fomentar el aprendizaje la curiosidad y el pensamiento y razonamiento geométrico.

Docencia y argumentación de conceptos geométricos.

2. INTRODUCCIÓN

Uno de los principales problemas que se encuentran algunos profesores de Universidad, de instituto y padres con respecto a alumnos e hijos es el bajo nivel de lenguaje matemático aplicado a la geometría y al algebra. Esas carencias parece que son arrastradas a lo largo de toda su vida académica, lo que supone un esfuerzo extra para el alumno que decide cursar una carrera técnica. Incluso esa incapacidad de comunicarse con un lenguaje matemático aplicado a la geometría podría convertirse en un “hándicap” a la hora de evaluar las verdaderas capacidades matemáticas que realmente posee el alumno, por ejemplo, que un alumno sepa resolver tanto problemas matemáticos como geométricos pero que a la hora de describirlo con un lenguaje matemático tanto oral como escrito se vea limitado o con carencias a la hora de transmitir esa información. Esto frustra al alumno como a su entorno acomplejando al primero, así como minusvalorando al alumno por parte de los segundos.

Para esta encrucijada necesitamos una base educativa que nos permita un profundo análisis de esta situación con el fin de poder establecer una serie de hipótesis que podamos poner a prueba mediante la experimentación y una vez obtenidos los resultados, establecer las verdaderas razones de las carencias de lenguaje Matemático-Geométrico. Una vez realizado el “diagnostico” se podría, al menos, establecer un tratamiento con el fin de que el alumno mejore esta faceta académica tan importante.

Como Marco Teórico, estudiaremos este fenómeno o problema del alumnado desde los PRINCIPIOS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS DE DIENDES, y usaremos como metodología para el aprendizaje a los famosos NIVELES DE VAN HIELE lo que nos permitirá realizar una posible hipótesis de la casuística de estos problemas del alumnado e incluso su origen.

Palabras claves
Lenguaje, lenguaje matemático, conocimiento, aprendizaje, didáctica, metodología Van Hiele, currículo, competencias clave y específicas, contenidos.

3. PROBLEMAS DEL ALUMNADO CON LAS MATEMÁTICAS

Pero antes de empezar con este análisis, primero debemos saber cuál es la situación actual del alumnado y del profesorado con respecto a las matemáticas y para ello nos basaremos en el programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes, Informe Pisa 2022 para España y del informe TALLIS 2018 Estudio internacional de la enseñanza y el aprendizaje. Con este informe nos haremos una idea que cual es la situación del alumnado español y de sus profesores.

3.1 INFORME PISA 2022

Recordemos que el informe PISA 2022 es realizado por alumnos de entre 15 y 16 años y que estas evaluaciones se hacen sobre una muestra de 690000 estudiantes a lo largo de 80 países. Nos centraremos en la evaluación en matemáticas ya que es en la que focalizamos nuestro interés. Según PISA la competencia matemática es la capacidad de razonar matemáticamente y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas en una variedad de contextos de la vida real. Según el Marco de evaluación de matemáticas, se definen 4 procesos: **razonar**, <u>formular</u>, <u>emplear</u> e <u>interpretar y evaluar</u>. Sobre esta escala de rendimiento global, se elaboran cuatro subescalas, una por cada proceso. En el proceso de razonamiento subyacen los tres procesos restantes.

- <u>Formular</u>, los estudiantes identifican los conceptos e ideas matemáticas presentes en problemas reales y elaboran una estructura matemática.
- <u>Emplear</u> conceptos, hechos y procedimientos matemáticos, donde los estudiantes demuestran su capacidad de aplicar las herramientas precisas para resolver problemas formulados y dar conclusiones matemáticas.
- <u>Interpretar y evaluar</u> resultados matemáticos donde los alumnos demuestran su capacidad de reflexión sobre posibles soluciones e interpretarlas en el contexto del problema real, lo que implica determinar si los resultados son razonables matemáticamente.

Dentro de cada proceso tenemos a su vez una **subescala de rendimiento en matemáticas** compuesta de:

- **Cantidad**, se refiere a números y estimaciones, cuantificación, comprensión de diversas representaciones de la cuantificación, interpretaciones y argumentaciones con respecto la cantidad.

- **Incertidumbre y datos**, que reconoce el lugar de la variación en el mundo real, dando un sentido cuantificable de esa variación y reconociendo la incertidumbre y el error.
- **Cambio y relaciones**, comprende tipos fundamentales de cambio y reconocimiento de los mismos para aplicar modelos matemáticos relevantes para describir y predecir el cambio, además de la creación e interpretación de las relaciones matemáticas
- **Espacio y forma**, área de la geometría que incluye modelos, propiedades de objetos, visualizaciones espaciales, representaciones de objetos, interacción dinámica con formas reales y con representaciones, movimiento, desplazamiento y la habilidad de anticipar acciones en el espacio.

Los procesos matemáticos en PISA tienen lugar en contextos que tratan de reflejar el mundo real y para ello usamos los contextos;

- Personal (individual, familiar, grupo de amistades)
- Ocupacional (relativo al mundo laboral)
- Social (referido a la comunidad a distintos niveles, local, nacional o global)
- Científico (aplicación de las matemáticas al mundo natural y al técnico)

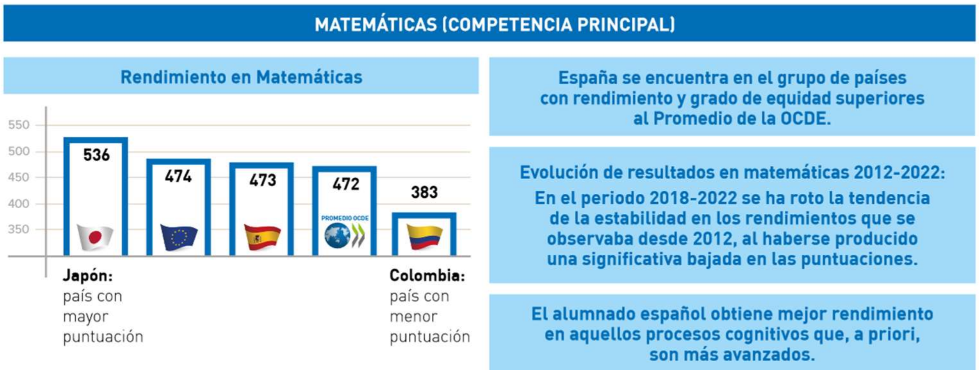
Ilustración 1 Relación entre los procesos, contenido y contextos del marco de las matemáticas

Para no dar más detalles de los necesarios solo diremos que los resultados de las pruebas se representan sobre una escala numérica de una puntuación que permite la comparación entre los países y, a escala temporal, entre los ciclos anteriores del estudio y el actual de 2022.

Como observaremos en las siguientes tablas, en la tabla de rendimientos medios estimados en dominio de contenido de ESPACIO Y FORMA (figuras 2.13.a y 2.13.b, siete páginas más adelante), España cae por debajo de la media promedio de la UE y de la OCDE, lo que nos hace sospechar que tal vez sí que haya un problema relevante en ese campo de las matemáticas aplicadas a la geometría. Para orientarnos, si observamos como referencia las calificaciones de Portugal, por ejemplo, no se desvían mucho de la media, incluso si tenemos en cuenta sus calificaciones en **espacio y forma.**

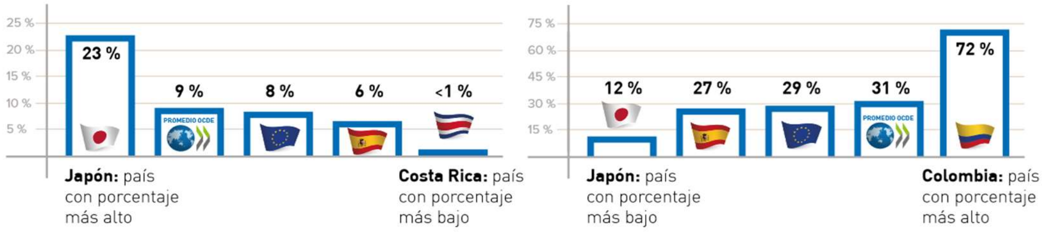
Recordemos que los resultados de las pruebas se presentan sobre una escala numérica de una puntuación que permite la comparación entre países y, a escala temporal, entre los ciclos anteriores del estudio y el actual de 2022. PISA documenta la dificultad de las preguntas, el conocimiento y destrezas de los estudiantes en una escala continua de rendimiento basado en el modelo de la teoría de respuestas al Ítem. Es decir, es una escala de 6 niveles de dificultad donde las preguntas de primer nivel son de una dificultad baja con un alto porcentaje de estudiantes que son capaces de llevar a cabo tareas de dicho nivel o por encima. Según el porcentaje de alumnos que son capaces de contestar adecuadamente las preguntas de este nivel, se les adjudica un nivel de rendimiento. Por ejemplo, solo el 8,7% de los alumnos son capaces de resolver las tareas de nivel 5, por lo que el límite inferior de puntuación es de 607 que será la puntuación que se le otorgue. os estudiantes pueden elaborar y trabajar con modelos para problemas complejos, identificando e imponiendo límites y especificando presuposiciones. Pueden aplicar estrategias sistemáticas y bien configuradas de resolución de problemas para emprender tareas más difíciles, como decidir cómo acometer un experimento, diseñando el procedimiento óptimo, o trabajando con visualizaciones más complejas que no aparecen en la tarea. Demuestran una destreza creciente para resolver problemas cuyas soluciones requieran incorporar un conocimiento matemático que no se recoge explícitamente en la tarea. Reflexionan sobre su actividad y consideran los resultados matemáticos respecto al contexto del mundo real.

La Puntuación se escala según una distribución normal.



Porcentaje de alumnado por niveles de rendimiento

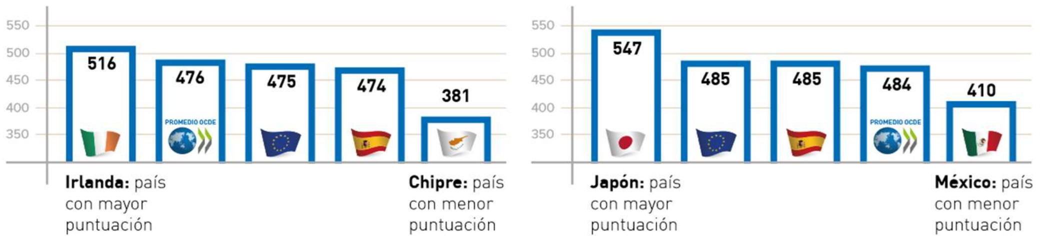
En los niveles superiores | **En los niveles bajos**



El porcentaje de alumnado en el nivel superior de rendimiento en España es más bajo del que cabría esperar por su rendimiento medio y por el porcentaje de alumnado en los niveles inferiores.

LECTURA Y CIENCIAS

Rendimiento en Lectura | **Rendimiento en Ciencias**



Evolución de resultados en lectura y ciencias: En el periodo 2018-2022 no se observan cambios significativos en la tendencia a la baja que se da desde 2012.

Figura 2.1.a. Rendimientos medios estimados en competencia matemática e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022

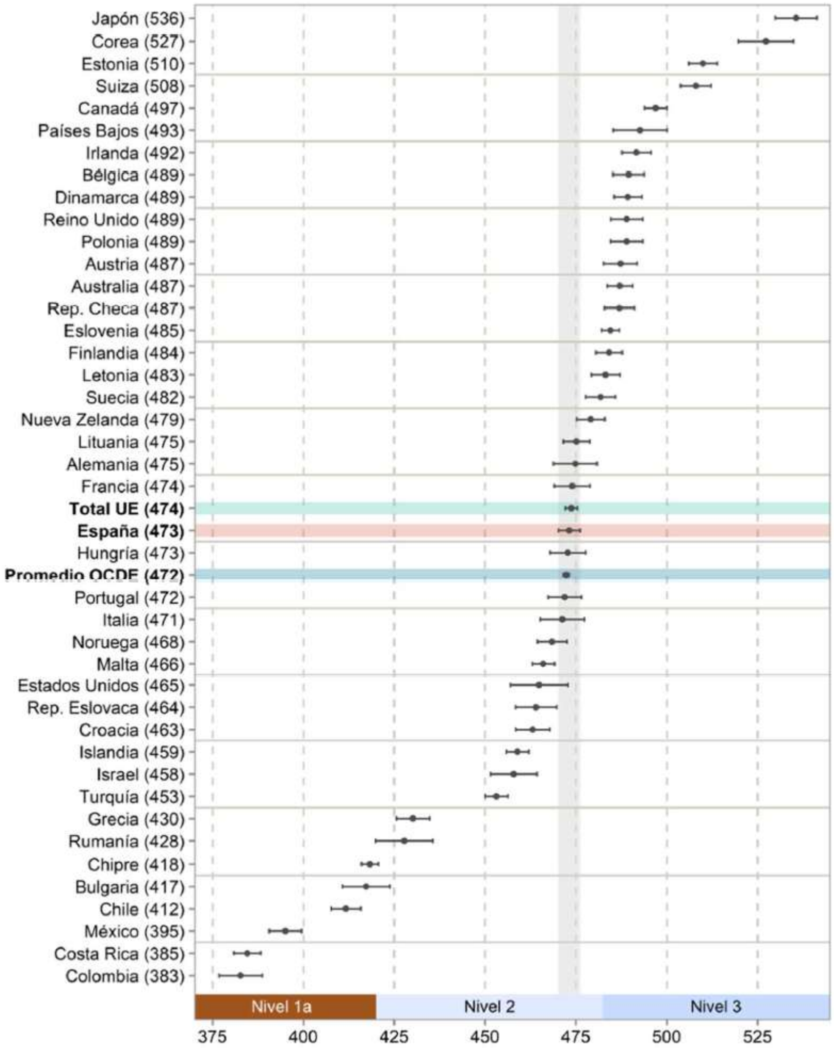


Figura 2.1.b. Rendimientos medios estimados en competencia matemática e intervalos de confianza al 95 % de las comunidades y ciudades autónomas participantes en PISA 2022

Figura 2.1.b. Rendimientos medios estimados en competencia matemática e intervalos de confianza al 95 % de las comunidades y ciudades autónomas participantes en PISA 2022

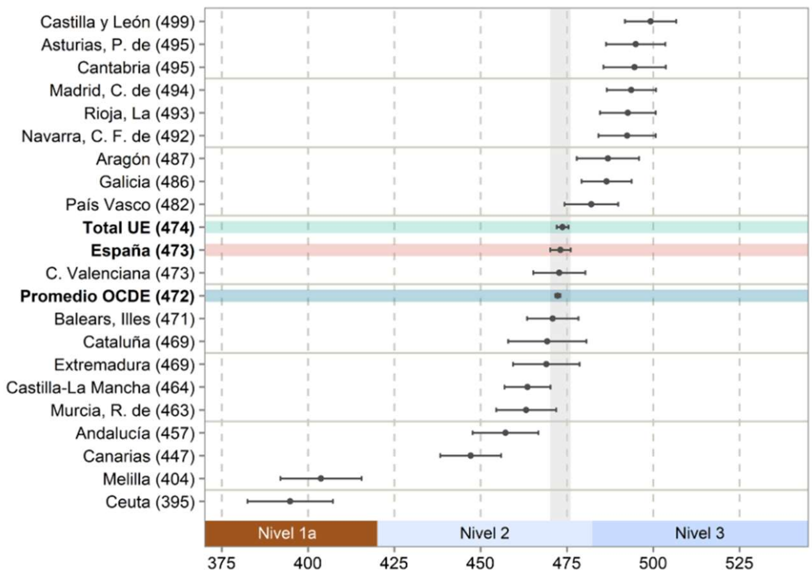


Figura 2.7.a. Rendimientos medios estimados en el proceso de Formular situaciones matemáticamente, e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022

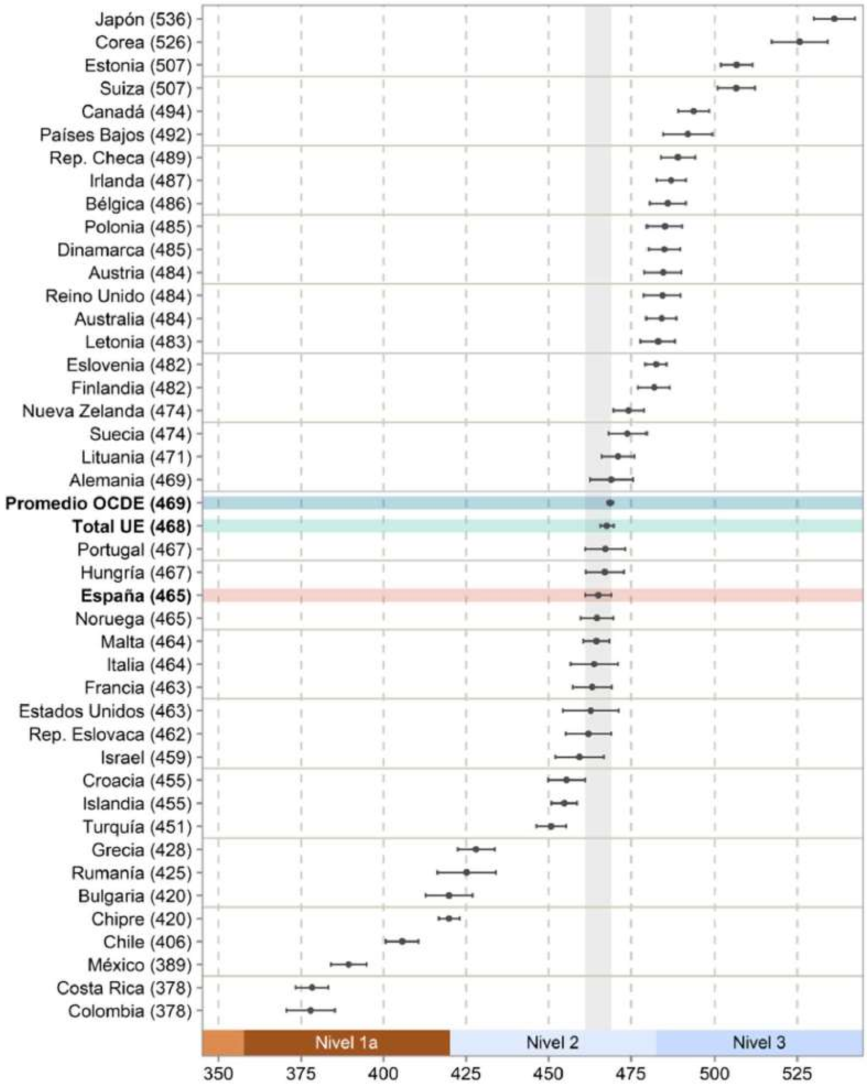


Figura 2.7.b. Rendimientos medios estimados en el proceso de Formular situaciones matemáticamente, e intervalos de confianza al 95 % de las comunidades y ciudades autónomas participantes en PISA 2022

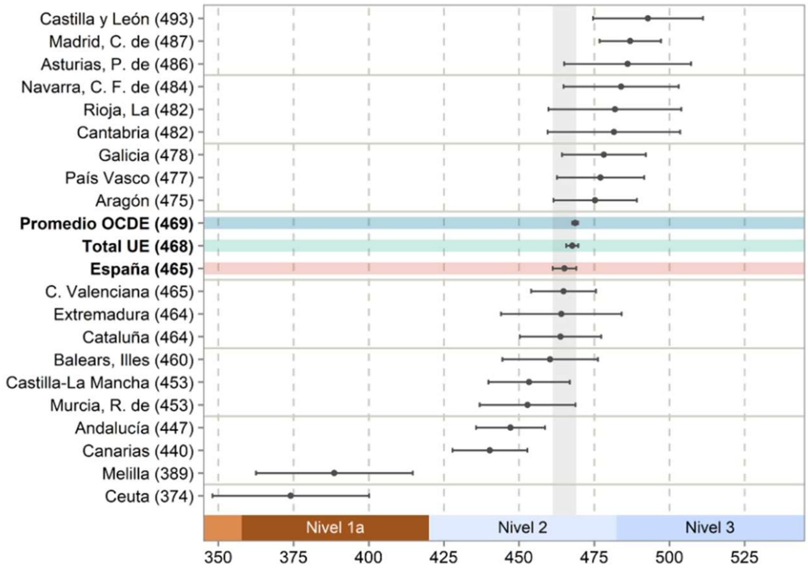


Figura 2.8.a. Rendimientos medios estimados en el proceso de Emplear conceptos, hechos y procedimientos matemáticos, e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022

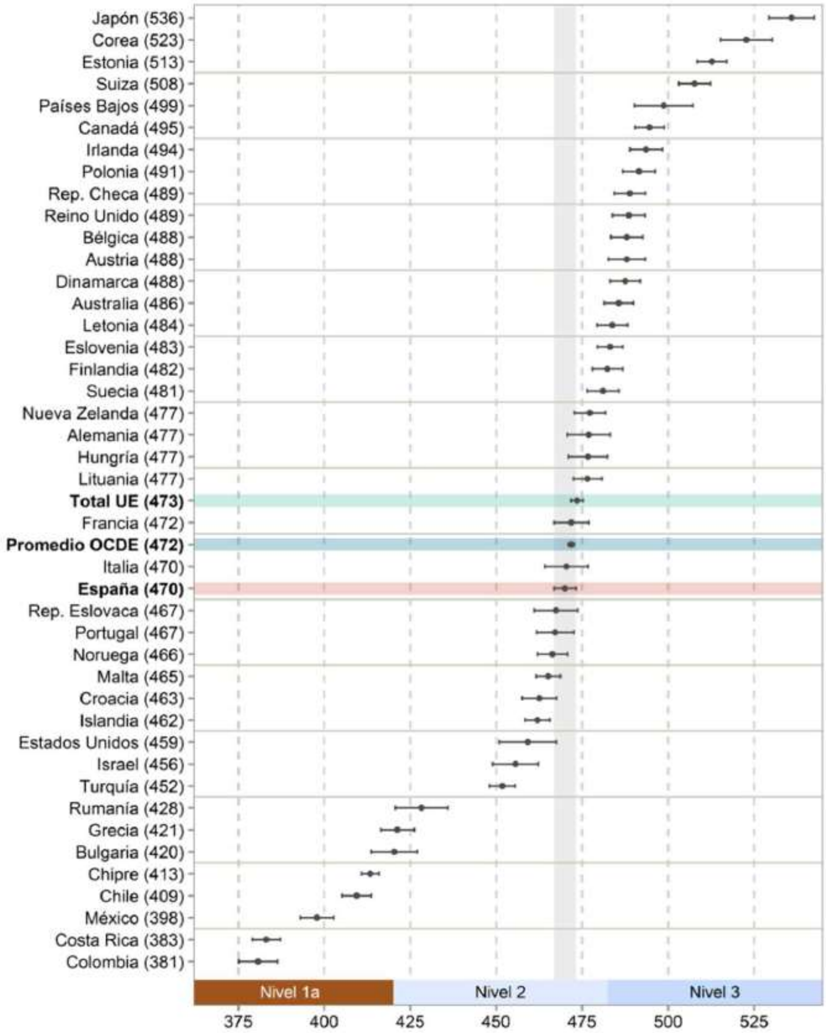


Figura 2.8.b. Rendimientos medios estimados en el proceso de Emplear conceptos, hechos y procedimientos matemáticos, e intervalos de confianza al 95 % de las comunidades y ciudades autónomas participantes en PISA 2022

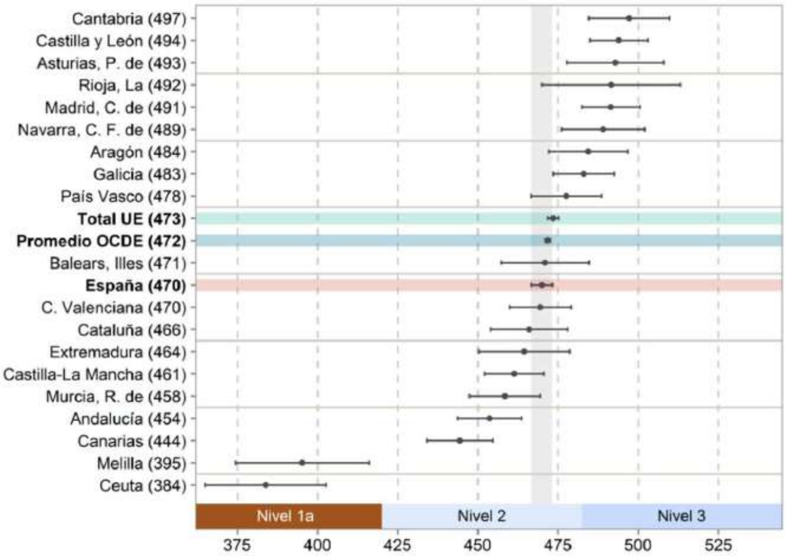


Figura 2.9.a. Rendimientos medios estimados en el proceso de Interpretar y evaluar resultados matemáticos, e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022

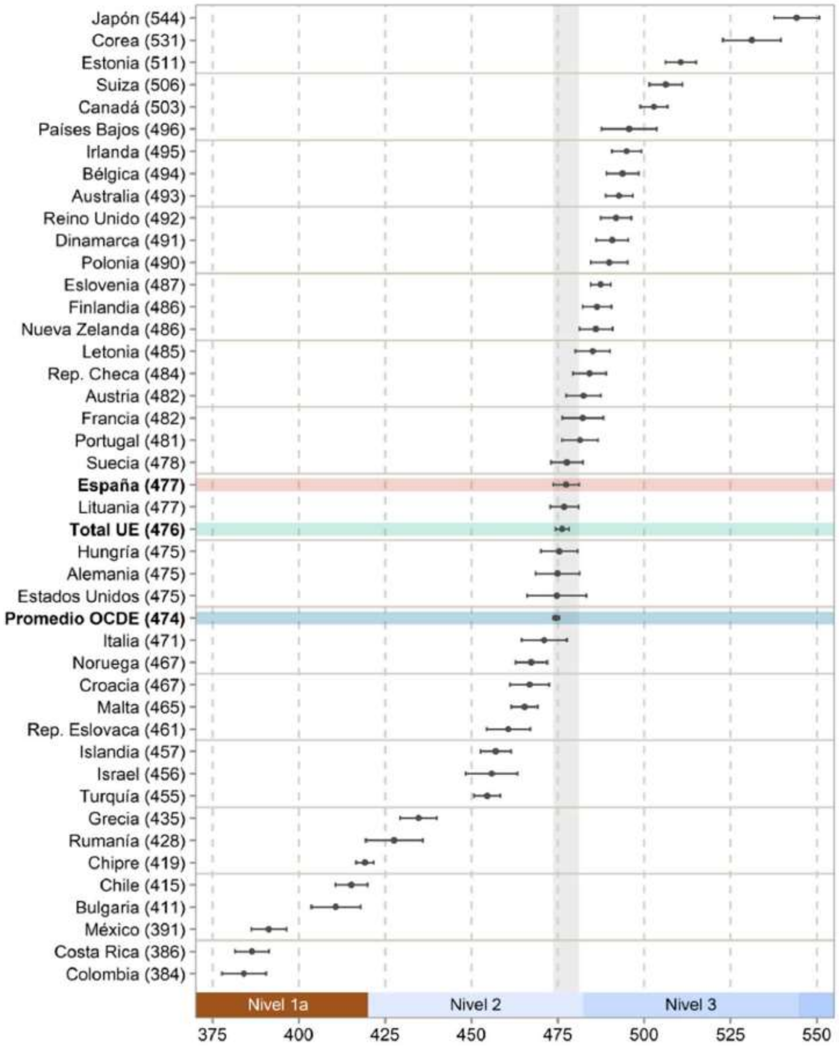


Figura 2.9.b. Rendimientos medios estimados en el proceso de Interpretar y evaluar resultados matemáticos, e intervalos de confianza al 95 % de las comunidades y ciudades autónomas participantes en PISA 2022

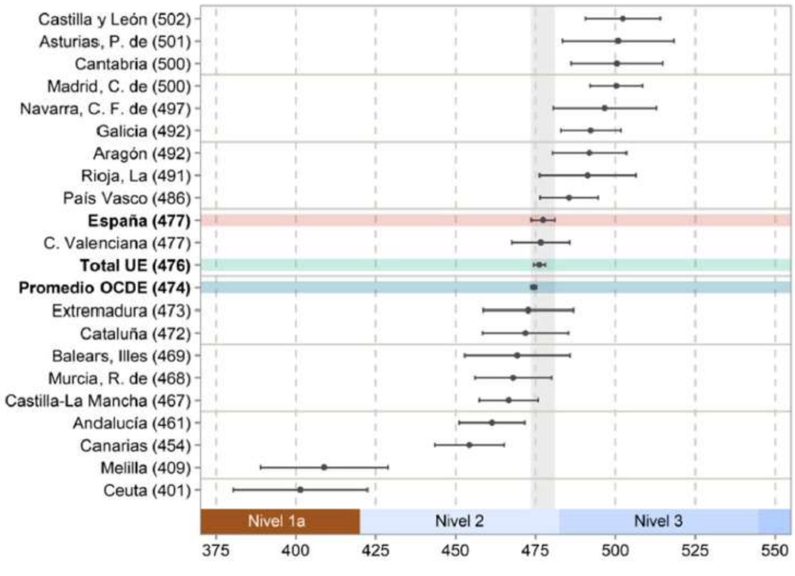


Figura 2.10.a. Rendimientos medios estimados en el proceso de Razonamiento matemático, e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022

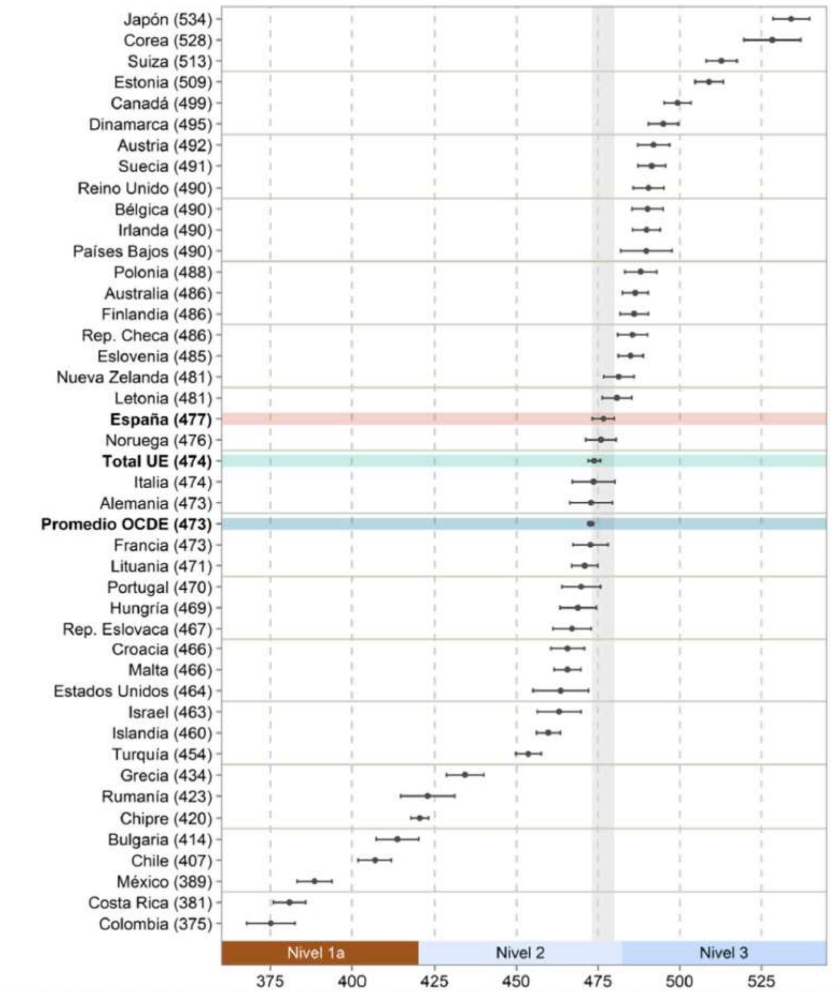


Figura 2.10.b. Rendimientos medios estimados en el proceso de Razonamiento matemático, e intervalos de confianza al 95 % de las comunidades y ciudades autónomas participantes en PISA 2022

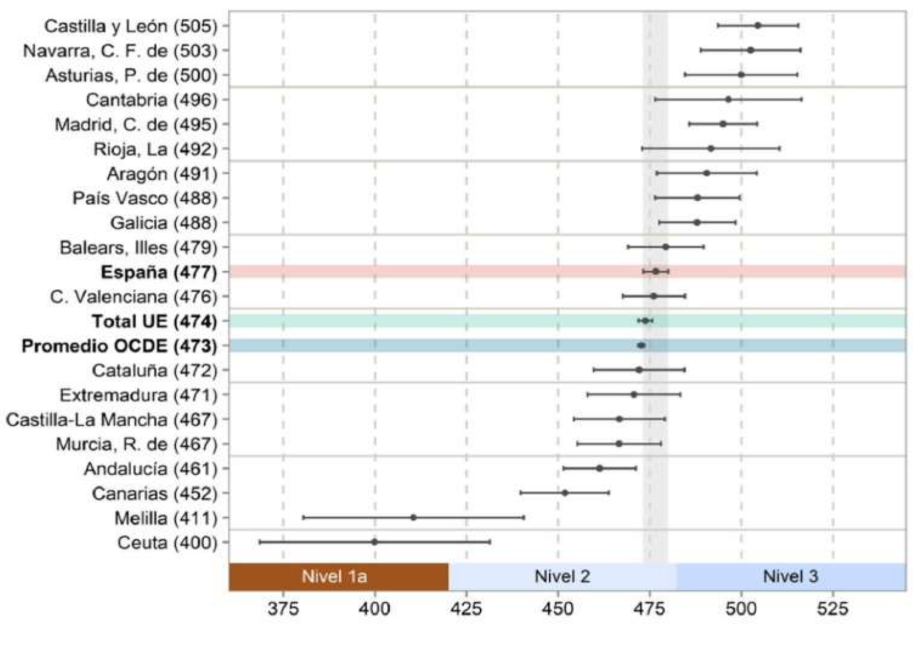


Figura 2.11.a. Rendimientos medios estimados en dominio de contenido de Cambio y relaciones, e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022

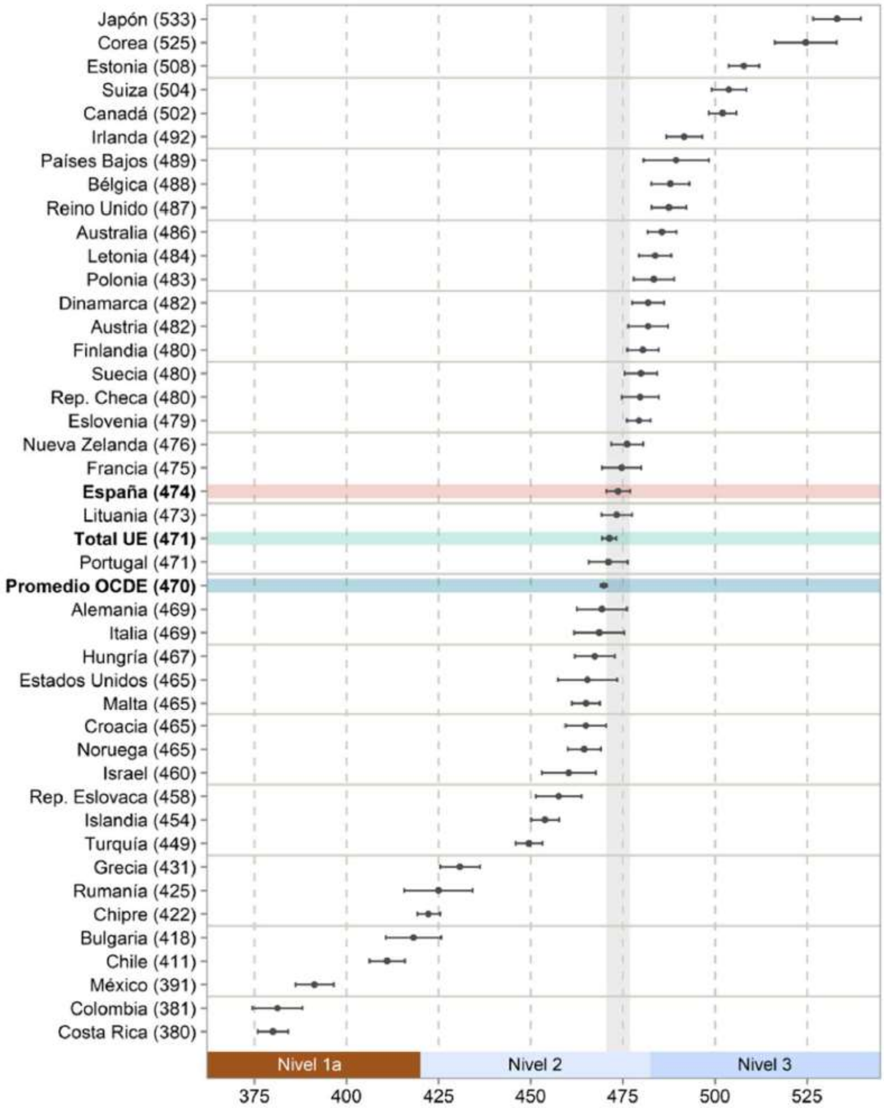


Figura 2.11.b. Rendimientos medios estimados en dominio de contenido de Cambio y relaciones, e intervalos de confianza al 95 % de las comunidades y ciudades autónomas participantes en PISA 2022

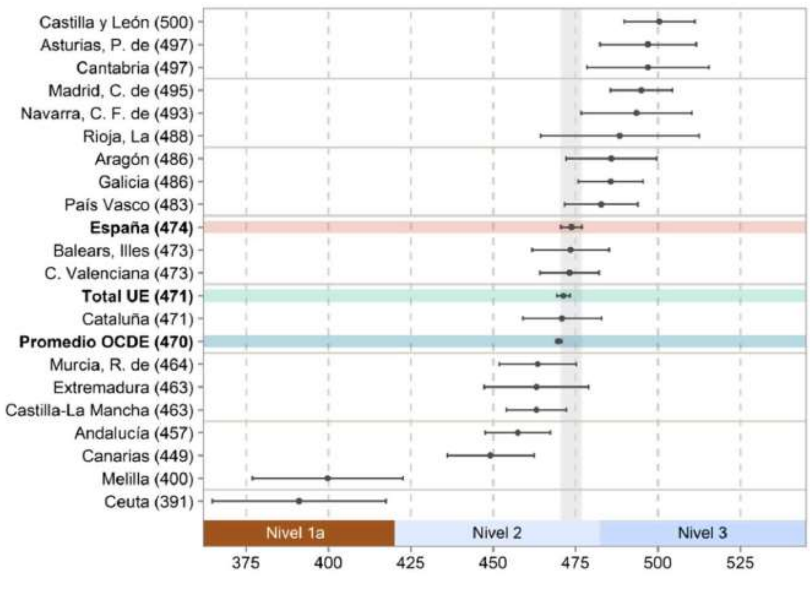


Figura 2.13.a. Rendimientos medios estimados en dominio de contenido de Espacio y forma, e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022

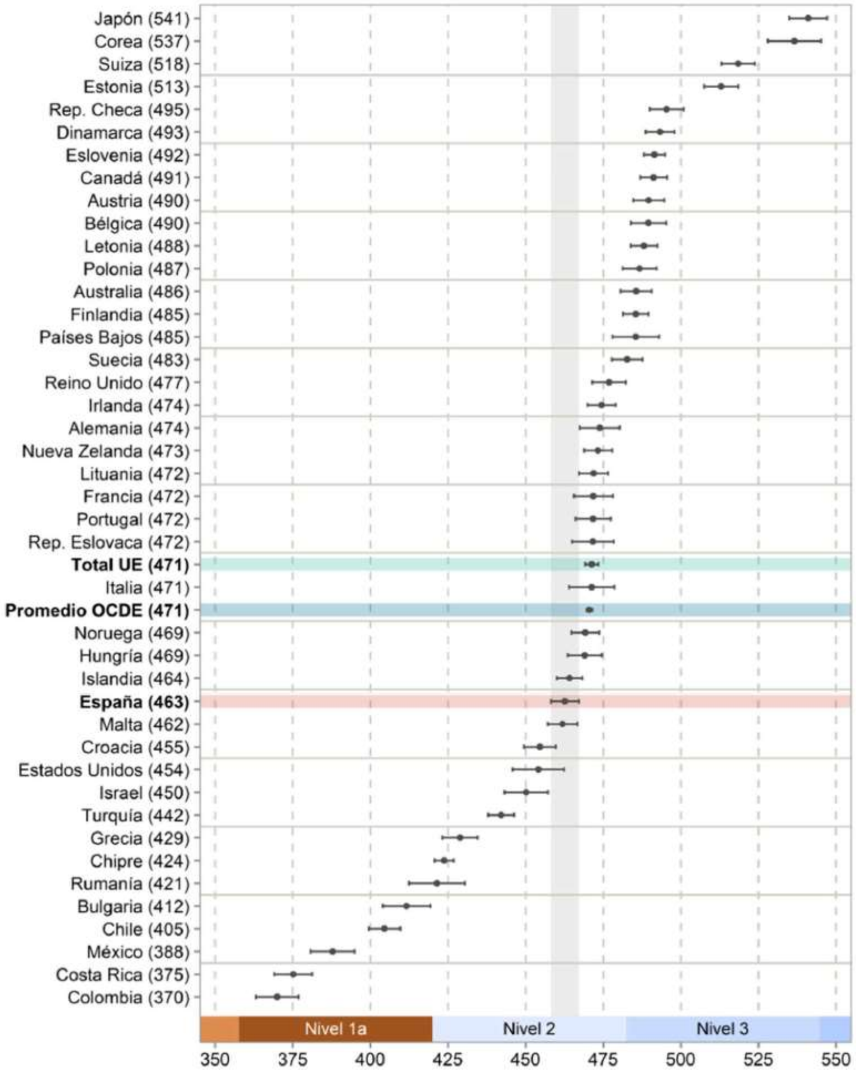


Figura 2.13.b. Rendimientos medios estimados en dominio de contenido de Espacio y forma, e intervalos de confianza al 95 % de las comunidades y ciudades autónomas participantes en PISA 2022

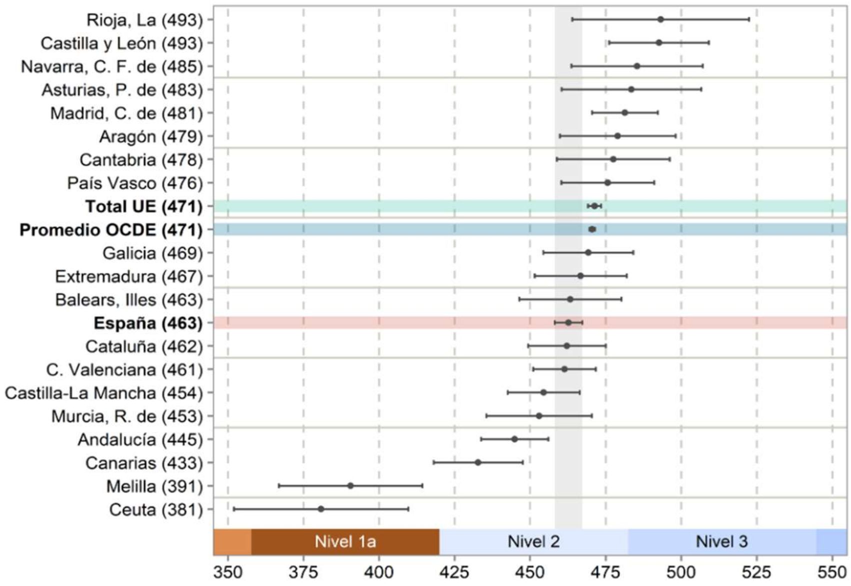


Figura 2.14.a. Rendimientos medios estimados en dominio de contenido de Incertidumbre y datos, e intervalos de confianza al 95 % de los países de la OCDE y/o UE participantes en PISA 2022

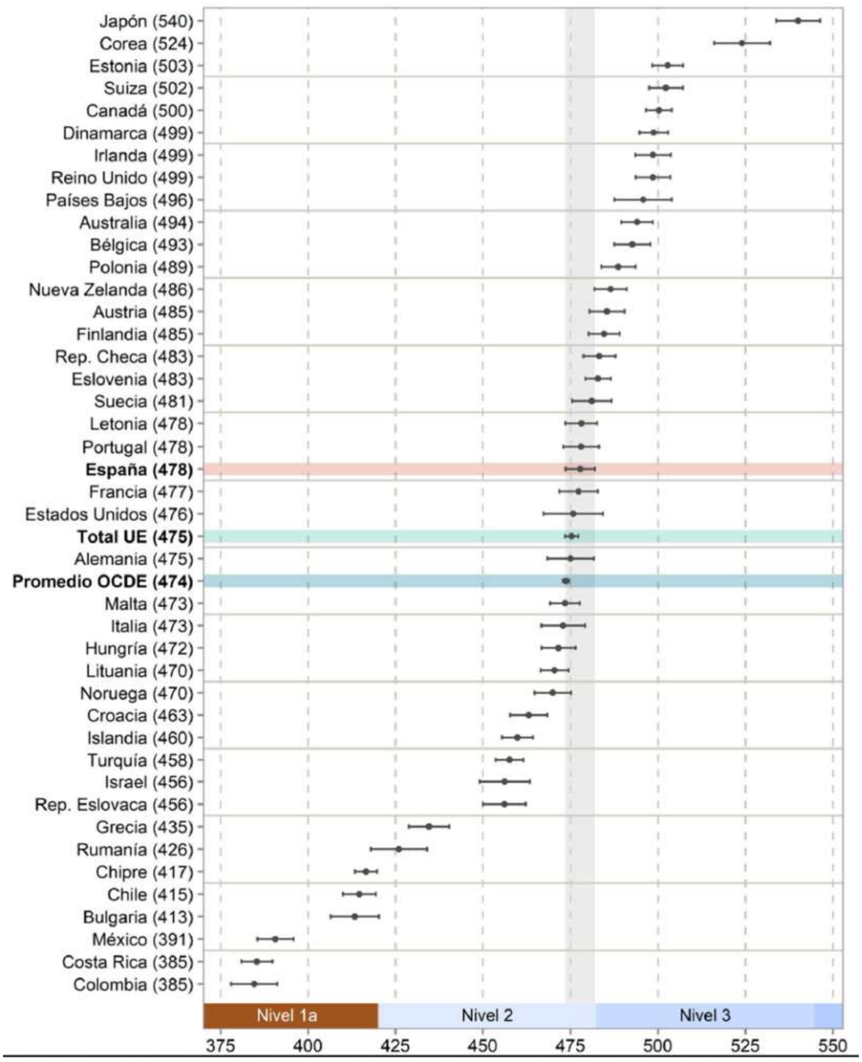
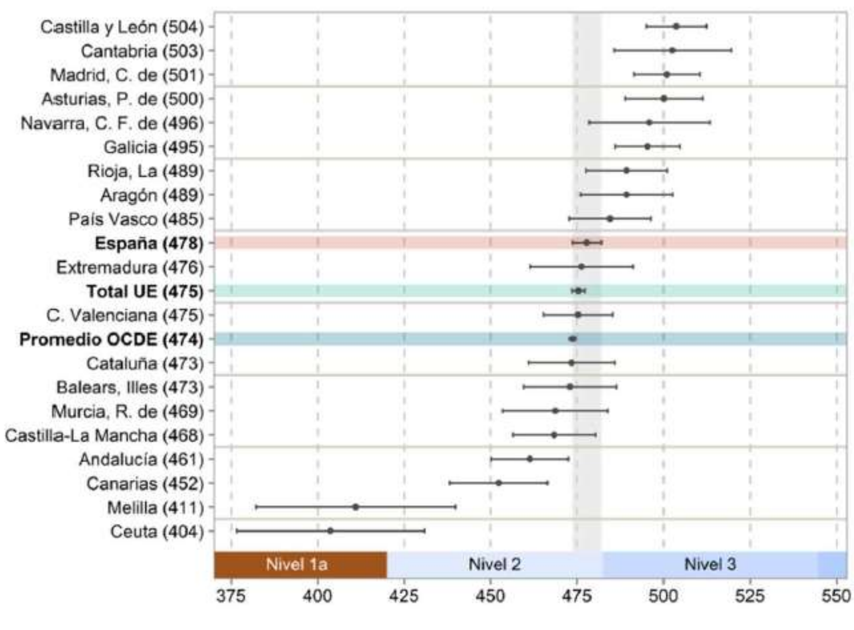


Figura 2.14.b. Rendimientos medios estimados en dominio de contenido de Incertidumbre y datos, e intervalos de confianza al 95 % de las comunidades y ciudades autónomas participantes en PISA 2022



3.2 INFORME TALIS 2018

Con respecto a la situación del profesorado, dentro de las limitaciones a la hora de abarcar todos los factores que intervienen dentro del proceso de enseñanza, para este apartado solo tendremos en cuenta una serie de factores que, a nuestra consideración nos resultan más determinantes a la hora de influir dentro de la educación matemática y son;

- Problemas que obstaculizan la calidad de la enseñanza.
- Experiencia del docente.
- Formación del docente
- Distribución de los tiempos dentro del ámbito de la docencia.
- Ratio de Profesores/personal de apoyo en la docencia
- Ratios estudiantes/profesor

Cuadro 3.4. Problemas que pueden obstaculizar la calidad de la enseñanza. TALIS 2018

¿En qué medida, en la actualidad, son los siguientes factores un impedimento para proporcionar una enseñanza de buena calidad en su centro?

- Escasez de profesores cualificados.
- Escasez de profesores capacitados para enseñar a alumnos con necesidades educativas especiales.
- Escasez de personal de apoyo.
- Escasez de profesores capacitados para enseñar a alumnos en un entorno multicultural o plurilingüe.
- Escasez de profesores capacitados para enseñar a alumnos de hogares desfavorecidos socioeconómicamente.
- Escasez o inadecuación de material docente (p. ej., libros de texto).
- Escasez o inadecuación de espacio para la práctica docente (p. ej., aulas).

Educación Primaria

En España el problema más común de falta de recursos humanos en Educación Primaria es la **escasez de personal de apoyo**, declarada como que afecta "bastante" o "mucho" a la calidad de la enseñanza por más de la mitad de los directores (53 %), siendo este porcentaje uno de los más altos de los países participantes. Esto concuerda con lo ya expuesto anteriormente en este informe en la Figura 3.1b, que mostraba que en España existe una menor proporción de profesores de apoyo que en otros países analizados.

Cuadro del informe Talis (2018) 1

De primaria a secundaria. Posibles obstáculos a la calidad de la enseñanza

En España, la **escasez de personal de apoyo** es el problema que, en opinión de los directores, afecta a una mayor proporción de centros educativos, y más a centros de Educación Primaria (53 %) que de secundaria (42 %). También perjudica a más centros de primaria que de secundaria la **escasez de profesores cualificados,** 14 % y 6 % respectivamente, y la **escasez de profesores capacitados para enseñar a alumnos en un entorno multicultural**, 29 % en primaria y 17 % en secundaria.

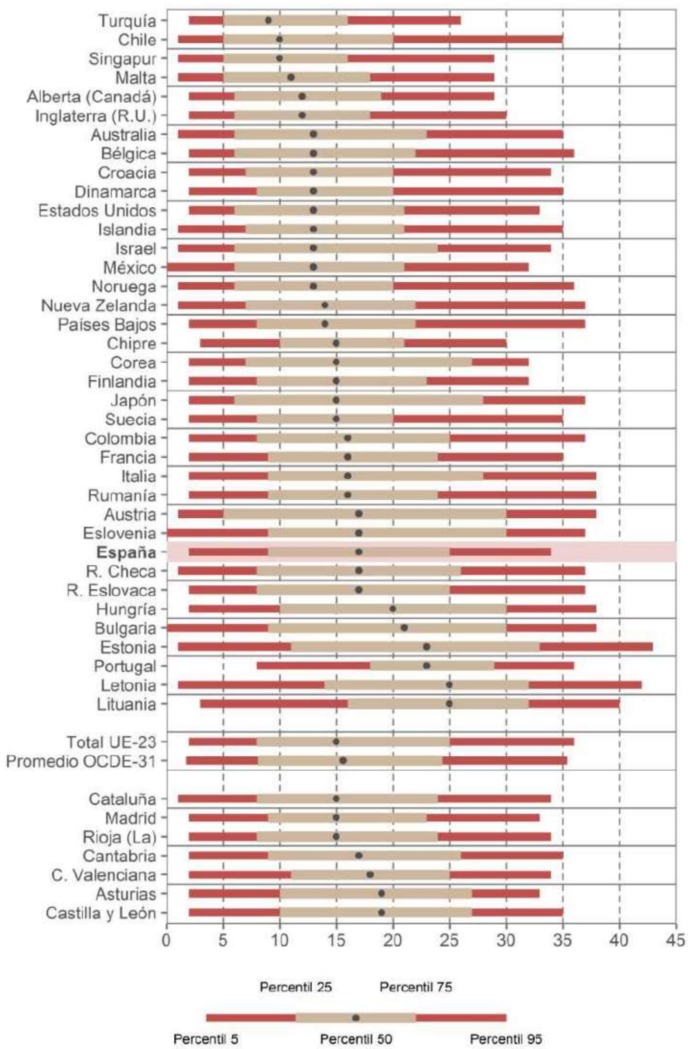
Aproximadamente la cuarta parte de los centros de primaria y secundaria se ven afectados por la **escasez de profesores capacitados para enseñar a alumnos con necesidades educativas especiales**. Y también es similar en ambas etapas la **escasez de profesores capacitados para enseñar a alumnos de hogares desfavorecidos socioeconómicamente** (14 %).

Por último, no se observan diferencias entre primaria y secundaria en cuanto a la falta de recursos materiales, ya sea de espacio o de material docente.

Cuadro del informe Talis (2018) 2

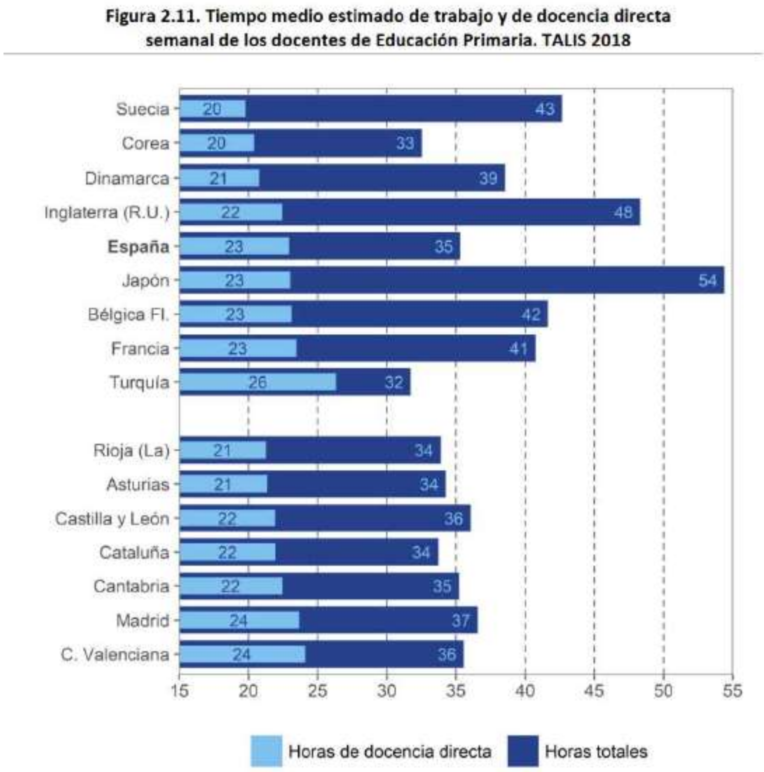
La experiencia del profesorado está por encima de la media europea y de la OCDE, estando por encima de países punteros como Japón, pero también debido a un funcionariado de docentes envejecidos. Lo que nos queda en resumen es que en España el 50% de los docentes de primaria tienen más de 15 años de experiencia docente, mientras que el 50% de secundaria tiene más de 17 años de experiencia. Como veremos más adelante, los ratios de profesor/alumno tanto en España como en los países punteros en el informe PISA 2022 son iguales pero lo cierto es que en muchos centros de España no se suelen cumplir, las horas lectivas de los profesores españoles son mayores, los medios con los que cuenta el profesorado español son menores, en Asia y parte de Europa la figura del profesor es respetada mientras que en España hay precariedad y los sueldos por comparación son bajos y recientemente los cursos de capacitación desde carreras técnicas, licenciaturas, diplomaturas y demás se acaban de profesionalizar a través de un Master de un año por lo que en el aspecto de la docencia el profesional recién incorporado necesitará más formación y experiencia.

Figura 2.9. Distribución del tiempo de experiencia,
en años, del profesorado de Educación Secundaria. TALIS 2018

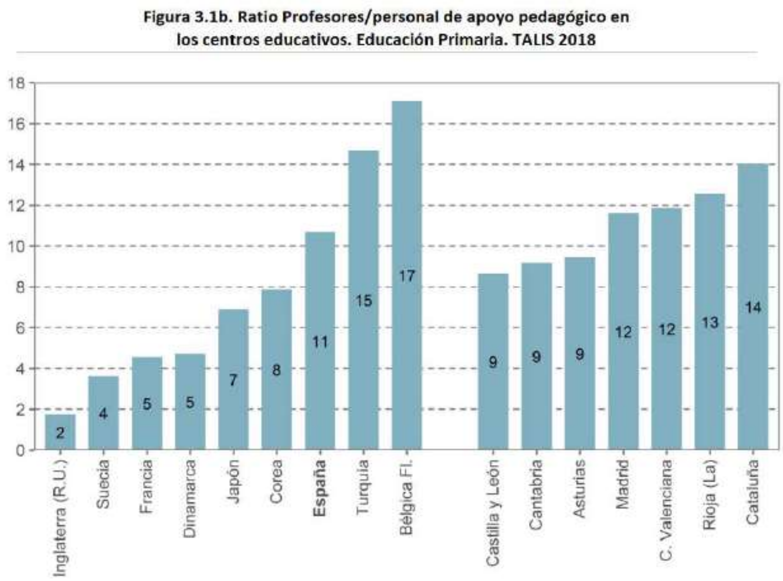


Cuadro del informe Talis (2018) 3

Otro factor para tener en cuenta es la distribución de los tiempos en la docencia directa y en lo que no es docencia directa, véase en la preparación de las clases, reuniones y tareas administrativas, tareas relacionadas con el currículo y la actividad docente, relación con el alumnado, con las familias....



Cuadro del informe Talis (2018) 4

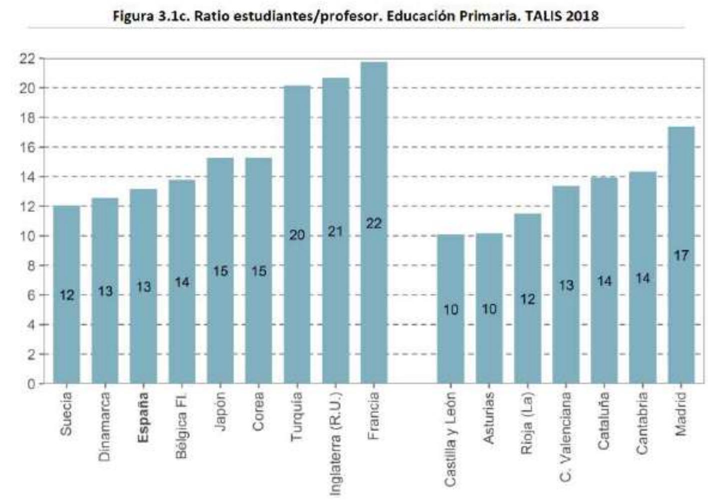


Cuadro del informe Talis (2018) 5

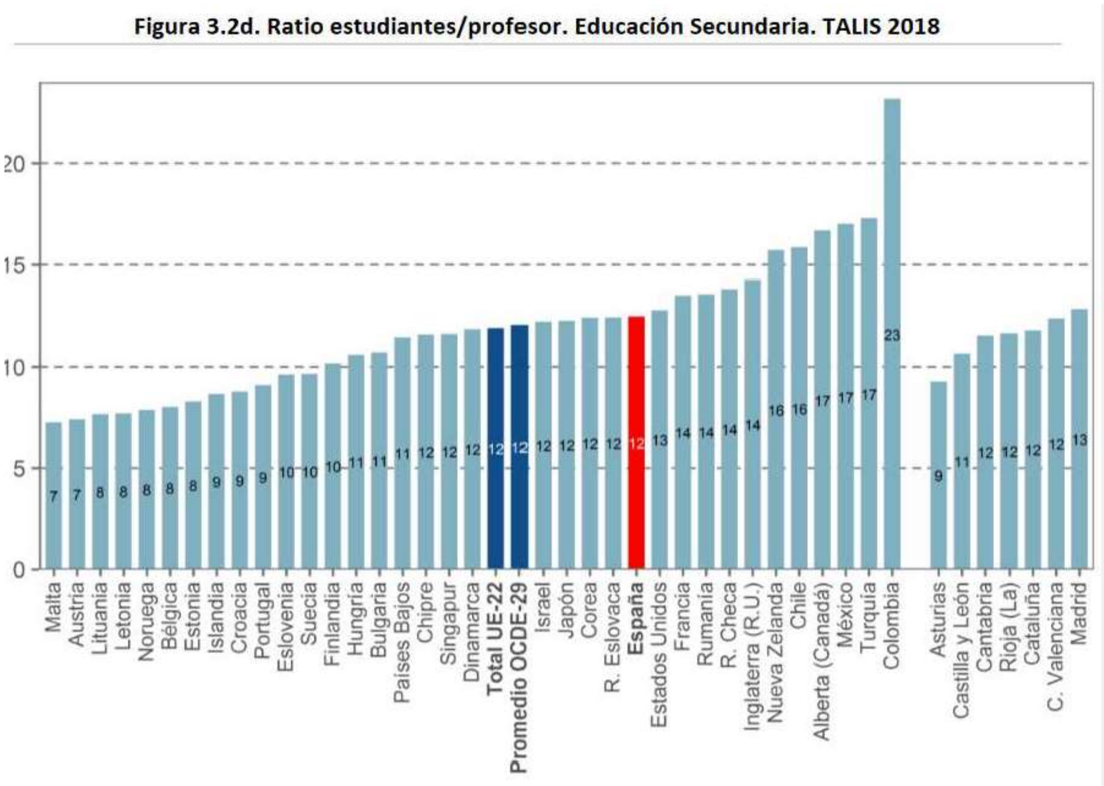
Antes de proseguir con el siguiente factor a tener en cuenta que es la ratio estudiante/profesor hay que recalcar que es un elemento de alta controversia con respecto a la calidad de la educación. En la educación primaria no se agrupan a los alumnos por capacidades por lo que se tratan de grupos homogéneos. En las tablas de a continuación veremos grandes diferencias por países. Incluso entre comunidades autónomas veremos ratios muy bajas tanto en Castilla y León, así como en el Principado de Asturias, debido a la dispersión rural pero donde se obtienen altas cualificaciones en el informe PISA, aunque también vemos muy buenas calificaciones en Japón y Corea y sus ratios alumno/profesor son peores. Tal vez al tratarse de sociedades con un mayor nivel de bienestar y donde impera la cultura del respeto al docente, a los compañeros, a la sociedad en general y con clases extraescolares y de refuerzo donde el alumno se acostumbra a la convivencia con compañeros desde pequeño, esto permite aumentar las ratios de alumnos/profesor sin que la educación se vea muy comprometida, aunque la conflictividad en el aula puede ser mayor.

Debo matizar que las evaluaciones de las relaciones estudiantes-docentes tanto en primaria como en secundaria, según los datos recogidos en el informe TALIS 2018 son tan buenas en España como en los países con mejores puntuaciones por ejemplo Japón o Corea.
Lo que también hay que valorar es que una de las características más notables de países que lideran los rankings de educación como el informe PISA , países asiáticos como Singapur, Japón, Corea del Sur y China, suelen concurrir a instituciones complementarias fuera del horario escolar, de hecho como se recoge en un reportaje de Infobae <<*Los estudiantes asiáticos son los que más horas dedican al estudio y logran mejores resultados*>> citando la respuesta que le dio un alumno de 17 años de la escuela de Robótica de Seúl al escritor Andrés Oppenheimer " Me levanto a las 6:30 de la mañana, desayuno y a las 8:00 empiezan las clases. Estudio en la escuela hasta las 4:00 de la tarde, y de lunes a jueves entre las 4:10 y las 20:00 voy a un instituto privado. Por lo general, en la noche hago mis tareas escolares, hasta las 11:00 de la noche. Pero a veces hasta la 1:00 de la madrugada. Eso es muy normal aquí. Todos estudiamos así. Yo estudio un promedio de 16 horas por día". Hay una cultura de horas extracurriculares, sobre todo en Japón donde la dedicación se le considera una virtud. Aun así, muchos países están cambiando esa filosofía por ejemplo en Singapur donde se ha implantado la máxima "Enseñar menos, aprender más" donde se ha planteado una reducción del currículum formal y quitarles carga a los alumnos que aun así siguen yendo a escuelas complementarias. De esta manera se enseña con mayor profundidad. En estos países predomina la cultura del estudio y del esfuerzo generalizado lo que se traduce en docentes muy bien pagados y con una alta formación, en Corea la profesión de maestro es una de las más prestigiosas de todas".

Pero también encontramos datos discrepantes en el informe PISA pues en países como Estonia el año escolar consta de 175 días, nada que ver con los 201 días que tienen en Japón, pero en Estonia como en Japón también tienen clases extraescolares solo que en Estonia se imparten en el mismo centro donde van a clase, lo que posibilita la conciliación familiar como hecho vinculador entre familias, trabajo y escuela. Aun así, reducir la eficacia de un sistema educativo a un solo factor o unos pocos factores no garantiza ningún nivel de aprendizaje ya que en la educación intervienen múltiples factores, muchos de ellos ocurren fuera del espacio escolar, como el nivel educativo de los padres, el clima familiar y social, la situación socioeconómica de la familia, el nivel de nutrición y salud del estudiante, los hábitos sociales de los alumnos, etc… Nota; En estos países, al igual que en España según el informe Talis, España tiene un nivel de segregación con respecto a factores socioeconómicos relativamente bajo.



Cuadro del informe Talis (2018) 6



Cuadro del informe Talis (2018) 7

Desde 2013 las ratios de Profesor/personal de apoyo y alumno/profesor apenas han variado.

4. REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN PRIMARIA Y SECUNDARIA

También nos basaremos en el informe “Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria” por Ángel Gutierrez y Adela Jaime

Este informe se basa en la necesidad por parte del profesorado que imparte enseñanzas en geometría y algebra de usar metodologías que faciliten este proceso de aprendizaje mediante la exploración y descubrimiento. Aquí se presentan reflexiones sobre algunos modelos teóricos y las estrechas relaciones que existen entre ellos y se usan como base general “Las fases de aprendizaje de Van Hiele”. Para resumir pues lo que nos interesa son los resultados obtenidos por los investigadores tras someter al alumnado a una serie de actividades o test de evaluación y propuestas para la enseñanza basados en el modelo de Van Hiele, y las conclusiones de esta experiencia.

El aprendizaje de conceptos geométricos elementales, sus propiedades y relaciones, debido a que hay un importante soporte gráfico y visual, los procesos de aprendizaje están muy condicionados por el uso de objetos físicos, figuras, diagramas, etc… por lo que se observa un desajuste entre los componentes gráficos y verbales de las actividades y respuestas de los estudiantes. Estos resultados se han obtenido a raíz de las Investigaciones del didacta S. Vinner donde recalca la necesidad de estimular la memoria del alumno a través de la lectura y escuchando , pues tras esta estimulación se "evoca algo que no suele ser la definición del concepto" si no "un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias" , lo que Vinner llama *imagen del concepto* que para esta situación suele tratarse de figuras geométricas, dibujos o representaciones como ejemplos asociados al concepto. El profesorado suele recurrir como método de enseñanza a dos estrategias;

1. Enunciar una definición matemática de dicho concepto y después plantear ejercicios de memorización y reconocimiento de figuras concretas
2. Presentar ejemplos de figuras representativas del concepto describiendo sus propiedades y a continuación darles la definición matemática formal y ejercicios de memorización.

En ambos casos se pone más énfasis en las definiciones que en los ejemplos sin ver que son precisamente los ejemplos los que producen un mayor impacto o efecto mental más duradero y profundo.

El alumnado se encuentra a veces en la circunstancia que memoriza definiciones y propiedades que apenas entiende o que no saben cuándo aplicar, o identifica conceptos o propiedades geométricas de manera errónea a pesar de saber identificar correctamente figuras geométricas.

Según Vinner (1983, 1991) existe por parte de los profesores la creencia muy extendida de que los alumnos basan sus razonamientos en las definiciones verbales de los conceptos y que las imágenes que acompañan a la definición son un elemento de apoyo. Esta creencia es errónea. El alumno olvida o nunca aprendió la definición que les enseñó su profesor.

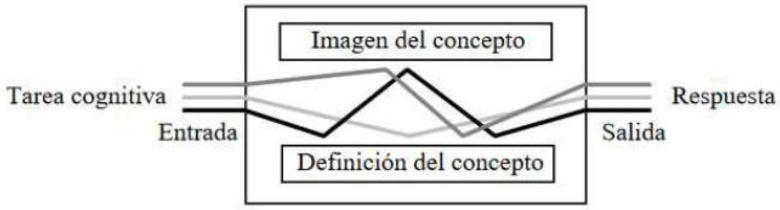


Figura 1. Modelos de actividad mental de los estudiantes esperados por muchos profesores.

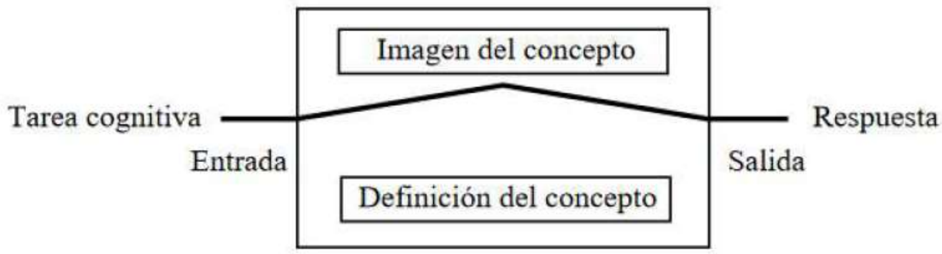


Figura 2. Modelo real de actividad mental de numerosos estudiantes.

Según Hershkowitz (1990) a través de experimentos e investigaciones realizadas con Vinner (Se elaboraron una serie de pruebas a grupos de estudiantes entre 10 y 14 años desde 5º de Primaria hasta 2º de ESO sobre una muestra de 350 alumnos aproximadamente) llego a la conclusión de que casi todos los estudiantes suelen usar imágenes de los conceptos implicados en vez de usar las definiciones formales a la hora de resolver problemas de geometría. Solo usan las definiciones formales cuando deben contestar las preguntas del profesor o cuando no tienen más remedio. Se recomienda una mayor participación del alumnado que debata o que tenga las habilidades para mantener un debate constructivo y respetuoso donde se enfoque en los errores mayoritarios, se detenga a analizarlos y corregirlos, se planteen objeciones, contraejemplos y discusiones con los compañeros.

También Hershkowitz analizó el efecto que posee en el aprendizaje de un concepto matemático la cantidad de elementos que componen su definición formal. Dichos elementos son, principalmente, conceptos previos en los que se basa, si bien también están presentes a veces reglas de construcción, adjetivos comparativos, etc…También tendremos en cuenta en este análisis las partículas lógicas que unen o cuantifican los atributos. Los resultados obtenidos por Hershkowitz (1989) al analizar diez definiciones de conceptos geométricos es que existe una relación directa entre el número de elementos que componen una definición y la dificultad de aprendizaje de ese concepto por parte de los estudiantes.
La experiencia del docente nos dice que el fallo de los estudiantes es la incapacidad del manejo correcto de la estructura lógica de las definiciones.
Otro de los fallos frecuentes es cuando el estudiante debe encontrar contraejemplos basándose en la negación de una definición, ya que esto exige la negación de todas las propiedades que forman la definición.
O peor aun cuando abordamos los convenios implícitos, que se ven con las distinciones entre las definiciones inclusivas y exclusivas de un mismo concepto (Jaime, Chapa, Gutiérrez, 1992 han estudiado este problema).

La hipótesis es que no es la estructura lógica la única ni la principal causa de los errores estudiantiles cuando se usan las definiciones formales en Matemáticas, sino también el desconocimiento de los conceptos previos usados en una definición por los estudiantes. Las pruebas y test realizados confirman esta segunda hipótesis lo que indica que conviene informar y formar al profesorado para que refuerce las clases que repaso del alumnado de conocimientos olvidades y perfeccionar las imágenes que tienen los estudiantes de conceptos que deberían conocer bien pero que, realmente no es así.

Basándose en las pruebas que diseñaron Vinner y Hershkowitz (1983) para evaluar a profesores y estudiantes de magisterio sobre definiciones formales que implementaron para sus investigaciones sobre la manera de entender conceptos geométricos elementales, llegaron a las siguientes conclusiones;

- Incidir en la mejora de los propios conocimientos matemáticos de los futuros profesores para que estén en condiciones de presentar a sus alumnos situaciones adecuadas a su nivel y capacidad.
- Los repasos previos de los profesores a las clases diarias de los conocimientos matemáticos a impartir se deberían acompañar con un análisis y estudio durante la propia clase, ya que implica averiguar las dificultades y errores específicos que suelen tener los estudiantes y una manera es plantearles actividades enfocadas a provocarles conflictos y contradicciones lo que genera una discusión en la que se ven distintos puntos de vista, correctos e incorrectos, lo que lleva a un análisis y a la comprensión de la raíz de los problemas.
- Los errores típicos detectados en los alumnos de ESO tienen como origen en unas imágenes conceptuales pobres de ejemplos prototípicos con carencias de elementos importantes y en el desconocimiento de conceptos básicos que no fueron repasados en los cursos anteriores.
- Como sugerencias para la docencia en este estudio proponen;
  - Que el profesorado este formado en Didáctica de las Matemáticas, sobre todo aquellos con bases matemáticas pobres que se dispongan a impartir clases de primaria.
  - El Profesor de matemáticas debe ser capaz de interpretar y analizar correctamente definiciones y enunciados matemáticos, fundamentalmente a los que se refiere a conceptos y situaciones de las matemáticas del nivel educativo correspondiente.
  - Los test de Autoevaluación suponen una herramienta ideal para que el docente comprenda las razones de los errores, dificultades, diferentes concepciones, lo

que nos permite que un análisis didáctico resulte más rico, comprensible y provechoso.

- Muchos conceptos de geometría elemental llevan asociados otros conceptos más elementales y construcciones geométricas. Los profesores universitarios suelen dar por sentados estos conceptos básicos o subconceptos y construcciones relacionadas son recordados y comprendidos correctamente por los futuros profesores. Pero la realidad no es esa pues por la falta de aplicación diaria o repaso hace que muchos estudiantes de magisterio o futuros profesores tengan carencias de estos conocimientos. Por lo que se plantea que en la formación didáctica de los futuros profesores (o estudiantes de Master) se debe plantear la necesidad de que en la preparación de una clase, se realice un análisis matemático de las definiciones de los diferentes conceptos donde se incluya una descomposición en sus elementos básicos junto a un análisis didáctico del grado de comprensión de estos conceptos y subconceptos por parte de los niños o alumnos adolescentes junto con unas instrucciones con el fin de que estos niños puedan interpretar correctamente los subconceptos y comprender la definición del concepto principal.

4.1 MARCO TEÓRICO PRINCIPIOS DEL APRENDIZAJE DE LA MATÉMATICA DE DIENES

Según estos principios, el aprendizaje del niño se va desarrollando según una serie de etapas que le permite la comprensión de conceptos desde los más sencillos hasta los más complejos. Estas etapas se clasifican según este orden;

- Manipulativo. El alumno experimenta directamente con los objetos.
- Oral. Verbaliza la experiencia.
- Gráfica. Representa las situaciones experimentadas.
- Abstracta. Etapa de conceptualización de las ideas y conocimientos trabajados, uso y manejo de símbolos matemáticos.

Basado en la obra de Piaget, una serie de experiencias le llevaron a enunciar una teoría sobre el aprendizaje de las matemáticas basados en estos principios:

- **Principio dinámico**. Todo lo abstracto y, por lo tanto, toda matemática se origina desde la experiencia. La experiencia forma los conceptos, se les propone a los niños juegos de manipulación libre, después estructurados con los que acumularan muchas experiencias, que los lleven al mismo concepto. Los juegos de práctica consolidaran estos conceptos.
- **Principio de constructividad**. Recoge 2 facetas que son;

- Pensamiento analítico, en el que el alumno detecta todas las relaciones lógicas posibles y así es como los conceptos son explicita y exactamente formulados antes de usarse
- Pensamiento constructivo, los conceptos se estructuran en una forma general amplia, sin que el alumno tenga conciencia de todas las posibles relaciones. *El aprendizaje para los niños conviene hacerlo desde este tipo de pensamiento. Debido a que vamos a analizar a estudiantes de Primaria y ESO, tendremos muy en cuenta esta línea de pensamiento a la hora de investigar las posibles causas de las limitaciones del lenguaje matemático-geométrico.*

- **Principio de la variabilidad perceptiva.** Durante el proceso educativo se debe mostrar un mismo concepto desde diferentes situaciones ya que los individuos (alumnos) poseen diferentes capacidades de percepción de los conceptos.
- **Principio de la variabilidad matemática.** En los ejercicios y actividades, los profesores deberán mostrar o enseñar las distintas variables matemáticas que forman parte de un concepto. Así el alumno fijará su atención en las variables de un ejercicio, pues los conceptos matemáticos poseen cierto número de variables y de la constancia de la relación entre estas variables surge el concepto.

4.2 DEFINICION METODOLOGIA DE NIVELES DE VAN HIELE PARA ANALIZAR EL CONTENIDO EDUCATIVO.

Para poder aplicar estos principios tenemos una metodología del aprendizaje aplicada en general a las matemáticas y en particular a la geometría, denominada *Metodología de los niveles de Van Hiele* de 1958 la cual está basada en las siguientes premisas:

1. El desarrollo del razonamiento de los alumnos de geometría se basa en una serie de *niveles secuenciados*.
2. El estudiante solo comprenderá realmente los conceptos nuevos del *nivel actual* si antes ha alcanzado un nivel de razonamiento matemático adecuado del *nivel anterior.*
3. Esto implica que, si el alumno no ha alcanzado el nivel adecuado, deberá esperar a que lo alcance.
4. Con la enseñanza adecuada podremos ayudar a que los alumnos adquieran un nivel de razonamiento superior.

Normalmente según este modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría, suele formarse de 5 niveles, pero como vamos a evaluar enseñanzas preuniversitarias solo consideraremos los 4 primeros niveles, los cuales nos aportaran orientaciones didácticas para secuenciar la docencia, desde niveles de menor abstracción y dificultad para los alumnos, hasta aquellos que exigen un pensamiento matemático más avanzado. Estos niveles de aprendizaje deben estar en consonancia con sus estadios de desarrollo, es decir, hay alumnos que demuestran capacidades precoces a la hora de aprender determinados conceptos y otros que necesitan mas tiempo con respecto la media de alumnos. Aun así, actualmente el sistema educativo debe tener un plan o programa educativo para los alumnos que se encuentran más allá de los estadios de desarrollo que consideramos habituales, ya sea alumnos de altas capacidades académicas, así como alumnos con problemas de aprendizaje que necesitaran clases adaptadas y de refuerzo o apoyo.

La clave de este proceso es que el avance en estos niveles y en concreto, el avance del aprendizaje de la geometría va unido al aprendizaje del lenguaje geométrico de cada nivel y al aprendizaje significativo de los conceptos propios de cada nivel. En el aprendizaje del lenguaje geométrico está el foco de nuestra atención para así poder determinar dónde está la anomalía de nuestra investigación. Recordemos que según la teoría de esta metodología de niveles de Van Hiele, "mientras los aprendizajes pertinentes a un determinado nivel no se hayan producido, los alumnos no podrán aprender el nivel posterior."
Aun así, la aplicación de esta metodología en general no garantiza su eficacia a la hora de que el alumnado adquiera los conocimientos matemáticos necesarios. La cultura del esfuerzo, el concepto de comunidad con valores basados en el respeto, la socialización, la tolerancia, la colaboración, la integración y en resumen la armonía cultural, serán determinantes a la hora de que los alumnos comprendan y aprendan geometría. Esta guía esta orientada con el fin de;

- Mejorar los aprendizajes
- Mejorar las actitudes de los alumnos
- Guía de comunicación para el profesorado
- Fomentar la comprensión, el aprendizaje y la Capacidad de razonamiento.

4.3 NIVELES DE VAN HIELE

Para poder comprender la naturaleza del proceso analítico que vamos a usar a la hora de poder comprender las carencias del alumnado en lenguaje geométrico, debemos conocer las herramientas y conceptos que vamos a usar para poder realizar dicha labor, es decir, conocer los niveles de Van Hiele que sostienen esta metodología y son los siguientes (Estos conceptos se trataran de manera resumida);

1. NIVEL. **RECONOCIMIENTO**
2. NIVEL. **ANALISIS**

3. NIVEL. **CLASIFICACIÓN Y FORMULACIONES**
4. NIVEL. **DEDUCCIONES FORMALES.**

4.3.1 PRIMER NIVEL. RECONOCIMIENTO

Se trata de una recopilación descriptiva de propiedades que caracterizan al alumnado de este nivel.

a) Percepción global-sensorial de las figuras; descripción con atributos irrelevantes respecto forma, tamaño, posición, color de figuras especificas o sus elementos destacados.
b) Percepción individual de las figuras; cada figura se considera un objeto, independientemente de otras de igual clase. No se generalizan las características de una sobre otra de la misma clase.
c) Uso de Propiedades imprecisas; en identificación, comparación, ordenación o caracterización de figuras.
d) Aprendizaje de un vocabulario matemático básico; para hablar de figuras, describirlas, etc… este vocabulario básico será acompañado con términos de uso común que sustituyen a los matemáticos.
e) No se suelen reconocer explícitamente las partes que componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

<u>Caracterización del nivel Reconocimiento</u>

- Se da en los primeros cursos de infantil y primaria.
- Reconocimiento de la forma del objeto, color, tamaño, distancia.
- Asociación nombre-forma.
- Coordinación de representaciones gráfica y verbal-nombre.
- Descripción del objeto como un todo según forma y con propiedades irrelevantes como color, tamaño, textura…
- Predominan descripciones por comparación con objetos de la vida real.
- Acaba este nivel reconociendo componentes de la figura (vértices, lados, ángulos, alturas, diagonales…) lo que lo dota de cierto vocabulario matemático básico.

4.3.2 SEGUNDO NIVEL. ANÁLISIS

En este nivel, los alumnos reconocen propiedades elementales que aparecen reflejadas en la forma de las figuras de forma aislada.

Pueden dar una definición descriptiva del concepto basada en la representación de las figuras. Todavía los alumnos no perciben las posibles relaciones entre propiedades que están implícitas ni que algunas figuras tienen las mismas propiedades.

Características de este nivel;

a) Reconocimiento de que las figuras geométricas están formadas por partes.
   - Descripción de partes de una figura y enuncian sus cualidades
   - Capacidad de análisis de propiedades de la figura
b) La "definición" de un concepto consiste en el recitado de una lista de propiedades lo más exhaustiva, en que podría llegar a omitirse alguna característica necesaria.
c) No se relacionan diferentes propiedades de una figura entre si o con las otras figuras. No se establecen clasificaciones a partir de posibles relaciones entre propiedades.
d) La deducción de propiedades se hace por experimentación. Todavía se generaliza las propiedades a toda figura de la misma familia.
e) La demostración de una propiedad se hace comprobándolo en unos pocos casos.

Caracterización del nivel Análisis

- Se da en 2º y 3º ciclo de Primaria (3º, 4º, 5º, y 6º curso, desde los 8 años a los 12.)
- Observa y comprueba experimentalmente propiedades relativas a la forma. El alumno no ve necesarias las definiciones, le basta una lista de propiedades necesarias para identificar el objeto.
- Clasifica en función de propiedades relativas a la forma.
- Razonamiento inductivo con el que justifica, no demuestra.
- Generalización inductiva desde la experiencia.

4.3.3 TERCER NIVEL. CLASIFICACIÓN

Comienza el razonamiento formal (abstracto) de los alumnos y estos descubren el aspecto deductivo de las matemáticas.

Los estudiantes pueden abstraer las propiedades implícitas en la descripción de una figura y dar una definición correcta de la misma a partir de sus propiedades, pudiendo apreciar la diferencia entre definición y descripción, y valorar la importancia del uso de definiciones conceptuales y de las formulaciones.

Pueden establecer clasificaciones inclusivas a partir de sus definiciones, establecer definiciones sin recurrir a descripciones de características, deducciones simples y darse cuenta de propiedades a través de visualizaciones, aunque no sean capaces de deducirlas.

a) Capacidad para relacionar propiedades de una figura entre si o con las de otras figuras.
b) Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos.

c) La demostración de una propiedad se basa en la justificación general de su veracidad, para lo cual se usan razonamientos deductivos informales
d) Comprensión y realización de implicaciones simples en un razonamiento formal. Comprensión de los pasos de una demostración realizada por el profesor. Capacidad para repetir tal demostración y adaptarla a otra situación análoga.
e) Incapacidad para hacer demostraciones formales completas. No se logra una visión global de las demostraciones y no se comprende su estructura.

Caracterización del nivel Clasificación (ejemplo)

- Se ve a partir de E.S.O. a lo largo de toda la vida académica.
- Reconoce propiedades del objeto asociadas a la posición relativa de los elementos básicos que lo configuran, como paralelismo, perpendicularidad, …
- Clasifica los objetos según las propiedades de paralelismo y perpendicularidad.
- Define a partir de las propiedades de paralelismo y perpendicularidad.
- Comprende demostraciones con cadenas deductivas cortas (demostraciones puntuales sencillas) pero le cuesta reproducirlas
- Usa razonamiento deductivo, cadenas deductivas cortas.
- Relaciona propiedades de una figura entre sí, o con las de otras figuras.

4.3.4 CUARTO NIVEL. DEDUCCIONES FORMALES

Los alumnos podrían entender y realizar demostraciones de varios pasos, dar definiciones precisas tras un proceso de síntesis.

- Escribir con precisión el enunciado de una propiedad que se ha demostrado sin que previamente se hubiese formulado.
- Comprenden la estructura axiomática de la geometría, la importancia y finalidad de los procesos deductivos
- Están en condiciones de explicar conceptos y resultados generales o particulares en procesos de contextos diferentes

Caracterización del nivel Deducción formal

- Se ve en bachillerato y niveles universitarios.
- Relaciones deductivas entre las propiedades del objeto.
- Definiciones precisas, con vocabulario formal, que se puede usar en contextos diversos.
- Razonamiento lógico formal.
- Demostraciones formales y globales que permiten entender la geometría como un cuerpo axiomático. Razonamiento axiomático.

4.4 DEPENDENCIA DE LOS NIVELES

Muy importante, en el tránsito de los niveles de Van Hiele es la mejora del lenguaje matemático necesario para cada nivel. En esta fase de transición es necesaria la adquisición de este lenguaje.

NIVEL	Procesos de razonamiento propios del nivel (elementos explícitos)	Procesos de razonamiento de transición (elementos implícitos)
1	FIGURAS	Partes y propiedades de las FIGURAS
2	Partes y propiedades de las FIGURAS	Relaciones entre propiedades, DEFINICIONES
3	Relaciones entre propiedades, DEFINICIONES	DEDUCCIONES Y DEFINICIONES FORMALES
4	DEDUCCIONES FORMALES	

Recordemos que este proceso de razonamiento de transición entre 2 niveles consecutivos solo sucede si se supera el nivel anterior, y que este paso se produce de forma continua.
Van hiele sugiere que el estado de transición en los esquemas anteriores y el estado de transición sugieren que, a veces, es mejor abstraer desde un caso singular, donde se vean las relaciones y propiedades adecuadas, combinado con una definición del concepto abstracto.

Según Van Hiele, este progreso depende más de las instrucciones recibidas que de la edad o madurez. Por lo que el método y la organización de la instrucción, contenidos y material usado son importantes pedagógicamente, y para ello los Van Hiele Proponen 5 fases de aprendizaje.

1. PREGUNTAS: Cuestiones sobre el Objeto de Estudio por parte del profesor para conocer de los alumnos;
   - Lo que saben
   - Su nivel
   - Dominio del vocabulario (Tema a tratar)

   El alumno recibirá información sobre el objeto de estudio
1. ORIENTACION RECIBIDA: Los alumnos investigan a través de los materiales que el profesor selecciona y secuencia. La labor del profesor aquí es vital para obtener el aprendizaje deseado (es un guía de este proceso)
2. EXPLICACIÓN. Desde experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus opiniones e ideas de las observaciones.
   - Importancia del dominio del leguaje matemático

- Interacción entre alumnos. El profesor solo debe ejercer de moderador y corregir el nivel de lenguaje.

1. ORIENTACIÓN LIBRE. Los estudiantes se enfrentan a tareas mas complejas, abiertas cuyo objetivo es aplicar lo aprendido.
2. INTEGRACIÓN. El estudiante sistematiza y resume lo aprendido con el objeto de formarse una visión estructurada de objetos y relaciones. El profesor puede ayudar en esta síntesis, pero sin aportar información que los alumnos no hayan descubierto.

5. GEOMETRIA EN EL CURRICULO DE LA LEY VIGENTE (LOMLOE)

En este capítulo analizaremos los contenidos mínimos de geometría acordados en la normativa vigente para los ciclos de secundaria.
Los textos consultados han sido;

- Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, que establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.
- Real Decreto 243/2022 de 5 de abril, que establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.

Los contenidos, que se han organizado en base a cinco descriptores se indican en las siguientes tablas.

Contenidos en E.S.O. (Nota; con la nueva ley LOMLOE los antes conocidos *Contenidos* pasan a definirse como *Saberes Básicos,* aunque en la tabla aparezcan con la denominación Contenido*)*

	Contenido 1º de E.S.O.
A. Sentido Numérico	1. Conteo – Adaptación del conteo al tamaño de los números en problemas de la vida cotidiana 2. Cantidad – Números naturales, enteros, fracciones, decimales y potencias de exponente natural en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana

	– Diferentes formas de representación de números naturales, enteros y racionales, incluida la recta numérica. 5. Razonamiento proporcional – Razones y proporciones: comprensión y representación de relaciones cuantitativas. – Situaciones de proporcionalidad directa en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas. Igualdad entre razones
B. Sentido de la medida	1. Magnitud – Atributos mesurables de los objetos físicos y matemáticos en el plano: investigación y relación entre los mismos. – Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida en el plano. 2. Medición – Longitudes, ángulos y áreas en formas planas: deducción, interpretación y aplicación. – Representaciones de objetos geométricos planos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos. 3. Estimación y relaciones – Formulación de conjeturas sobre medidas en el plano o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones. – Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida en el plano.
C. Sentido espacial	1. Figuras geométricas de dos dimensiones – Figuras geométricas planas: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características. – Elementos característicos de las figuras geométricas planas. – Relación entre las posiciones relativas de circunferencias y/o rectas. – Relaciones de congruencia y semejanza en figuras planas: identificación y aplicación. Teorema de Tales. Criterios de semejanza de triángulos y su aplicación a la resolución de problemas. Razón de proporcionalidad y escalas. – Relación pitagórica en figuras planas: identificación y aplicación. – Construcción de figuras geométricas planas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada…). 2. Localización y sistemas de representación

	– Representación de puntos en el plano. Coordenadas cartesianas. – Comprensión del uso de coordenadas como un avance en la historia y el desarrollo de las matemáticas, en particular para la representación gráfica de funciones. 3. Visualizaciones, razonamiento y modelización geométrica. – Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas en el plano.
D. Sentido algebraico	1. Patrones – Patrones, pautas y regularidades: observación, dando el elemento siguiente o el elemento anterior y explicando de forma verbal cómo se generan patrones numéricos y geométricos. 2. Modelo matemático – Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando material manipulativo y representaciones matemáticas para llegar al lenguaje algebraico con expresiones sencillas. – Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico con expresiones sencillas. – Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de una situación de la vida cotidiana una vez modelizada. 3. Variable – Variable: comprensión del concepto como incógnita en ecuaciones lineales con coeficientes enteros y como cantidades variables en fórmulas. – Comprensión del significado del lenguaje algebraico como un avance en la historia y el desarrollo de las matemáticas frente al lenguaje retórico sin símbolos matemáticos de la antigüedad. 4. Igualdad y desigualdad – Equivalencia de expresiones algebraicas involucradas en ecuaciones lineales con coeficientes enteros, utilizando representaciones concretas (balanzas, discos algebraicos, etc.…), matemáticas y simbólicas. – Ecuaciones lineales con coeficientes enteros: resolución mediante cálculo mental o métodos manuales apoyados por material manipulativo si es necesario. 5. Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana: identificación e interpretación a través d representaciones verbales, tabulares y gráficas. 6. Pensamiento computacional

	– Estrategias útiles en la interpretación y/o modificación de algoritmos sencillos.
E. Sentido socioafectivo	1. Creencias actitudes y emociones – Esfuerzo y motivación: reconocimiento de su importancia en el aprendizaje de las matemáticas. – Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación. – Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas. – Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje. 2. Trabajo en equipo y toma de decisiones – Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático. – Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos. 3. Inclusión, respeto y diversidad.

	Contenido 2º de E.S.O.
A. Sentido Numérico	3. Relaciones – Comparación Adaptación del conteo al tamaño de los números en problemas de la vida cotidiana 4. Razonamiento proporcional – Porcentajes: comprensión y resolución de problemas. – Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas. (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, escalas, cambio de divisas, cálculos geométricos, repartos, velocidad y tiempo, etc.) Igualdad entre razones
B. Sentido de la medida	1. Magnitud – Atributos mesurables de los objetos físicos y matemáticos en el plano: investigación y relación entre los mismos. – Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida en el espacio. 2. Estimación y relaciones

	– Formulación de conjeturas sobre sobre medidas en el espacio o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones. – Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida en el espacio. 3. Medición – Longitudes, áreas y volúmenes en figuras tridimensionales: deducción, interpretación y aplicación. – Representaciones planas de objetos tridimensionales en la visualización y resolución de problemas de áreas. – Representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos.
C. Sentido espacial	1. Figuras geométricas de tres dimensiones – Figuras geométricas tridimensionales: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características. – Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras tridimensionales: identificación y aplicación. – Construcción de figuras geométricas tridimensionales con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada…). 2. Localización y sistemas de representación – Relaciones espaciales: localización y descripción mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación. 3. Visualizaciones, razonamiento y modelización geométrica. – Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas.
D. Sentido algebraico	1. Patrones – Patrones, pautas y regularidades: observación, dando el elemento siguiente o el elemento anterior y explicando de forma verbal cómo se generan patrones numéricos y geométricos. 2. Modelo matemático – Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando material manipulativo y representaciones matemáticas para llegar al lenguaje algebraico. – Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.

	– Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático. 3. Variable – Variable: Comprensión del concepto como incógnita en ecuaciones lineales con coeficientes racionales, como indeterminadas en expresiones de patrones o identidades y como cantidades variables en fórmulas y funciones afines. – Monomios. Operaciones básicas. 4. Igualdad y desigualdad – Relaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica. – Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas, especialmente aquellos basados en relaciones lineales. – Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales con coeficientes racionales y sistemas de ecuaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana. – Ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el usa de la tecnología según el grado de dificultad. 5. Relaciones y funciones – Función como relación unívoca entre magnitudes. – Relaciones funcionales: identificación y comparación de diferentes modos de representación, enunciados verbales, tablas gráficas o expresiones algebraicas. – Funciones afines: traducción de unas formas de representación a otras y estudio de sus propiedades. 6. Pensamiento computacional – Estrategias útiles en la interpretación y/o modificación de algoritmos. – Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.
E. Sentido estocástico	X
F. Sentido socioafectivo	1. Creencias actitudes y emociones 2. Trabajo en equipo y toma de decisiones 3. Inclusión, respeto y diversidad

	Contenido 3º de E.S.O.
A. Sentido Numérico	1. Conteo – Estrategias variadas de recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana (diagramas de árbol, técnicas de combinatoria, etc.) llegando solo si es necesario al uso de fórmulas. 2. Cantidad – Conjuntos numéricos como respuesta a diferentes necesidades: contar, medir, comparar, resolver ecuaciones… – Números racionales en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana. 3. Sentido de las operaciones – Potencias de exponente racional. Propiedades. – Relaciones inversas entre las operaciones: comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas. 4. Relaciones – Selección de la representación más adecuada de una misma cantidad en cada situación o problema. – Conexiones entre las diferentes representaciones del número racional. – Patrones y regularidades numéricas. Reconocimiento, aplicación y uso de las sucesiones numéricas.
B. Sentido espacial	5. Localización y sistemas de representación 6. Vectores: coordenadas, operaciones. 7. Movimientos y transformaciones 8. Elementos básicos de las transformaciones: vectores, rectas, puntos y ángulos de giro. 9. Transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas tecnológicas o manipulativas. 10. Visualización, razonamiento y modelización geométrica 11. Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria…).
C. Sentido algebraico	1. Patrones

	– Patrones, pautas y regularidades: observación, predicción, búsqueda de términos que faltan y determinación de la regla de formación en casos sencillos mediante palabras, gráficas, tablas o reglas simbólicas. – Formulas y términos generales: obtención mediante la observación de pautas y regularidades sencillas y su generalización. 2. Modelo matemático – Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando, representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico. – Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. – Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático. 3. Variable – Variable: Comprensión del concepto como incógnita en ecuaciones cuadráticas, como indeterminadas en expresión de patrones o identidades notables y como cantidades variables en fórmulas y funciones cuadráticas. – Polinomios en una variable, operaciones básicas y factorización. – Igualdad y desigualdad – Relaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica. – Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas, especialmente aquellos basados en relaciones cuadráticas. Identidades notables. – Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana. – Ecuaciones cuadráticas: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el usa de la tecnología según el grado de dificultad. – Relaciones y funciones – Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan. – Propiedades de las funciones a través de la representación gráfica (dominio y recorrido, monotonía y extremos, periodicidad, simetrías, puntos de corte, concavidad y convexidad). – Funciones cuadráticas: traducción de unas formas de representación a otras y estudio de sus propiedades. – Estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas.

	4. Pensamiento computacional – Generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas (como abstracción, pensamiento algorítmico y descomposición en partes) a otras situaciones, como pueden ser prácticas con datos, modelización y prácticas de simulación y de resolución de problemas computacionales. – Estrategias útiles en la interpretación y/o modificación de algoritmos incluyendo los que se usan para operar con expresiones algebraicas (Ruffini), resolver ecuaciones y representar funciones. – Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.
E. Sentido estocástico	X
F. Sentido socioafectivo	4. Creencias actitudes y emociones 5. Trabajo en equipo y toma de decisiones 6. Inclusión, respeto y diversidad

	Contenido 4º de E.S.O. OPCIÓN A
A. Sentido Numérico	1. Conteo – Estrategias variadas de recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana (diagramas de árbol, técnicas de combinatoria, etc.) 2. Cantidad – Realización de estimaciones en diversos contextos, analizando y acotando el error cometido. – Expresión de cantidades mediante números reales con la precisión requerida. – Los conjuntos numéricos como forma de responder a diferentes necesidades: contar, medir, comparar, resolver ecuaciones… 3. Sentido de las operaciones – Operaciones con números reales en la resolución de situaciones contextualizadas. – Propiedades de las operaciones aritméticas: cálculos con números reales, incluyendo herramientas digitales. – Algunos números irracionales en situación de la vida cotidiana. 4. Relaciones – Patrones y regularidades numéricas en las que intervengan números reales.

	– Orden en la recta numérica. Intervalos. 5. Razonamiento Proporcional – Situaciones de proporcionalidad directa e Inversa en diferentes contextos: desarrollo, y análisis de métodos para la resolución de problemas.
B. Sentido de la medida	– medición – La pendiente y su relación con un ángulo en situaciones sencillas: deducción y aplicación. 1. Cambio – Estudio gráfico del crecimiento y decrecimiento de funciones en contextos de la vida cotidiana con el apoyo de herramientas tecnológicas: tasas de variación absoluta, relativa y media.
C. Sentido espacial	1. Formas geométricas de dos y tres dimensiones – Propiedades geométricas de objetos de la vida cotidiana: investigación con programas de geometría dinámica, modelización e impresión 3D o mediante modelos físicos. 2. Movimientos y transformaciones – Transformaciones elementales en la vida cotidiana (giros, traslaciones, simetrías y homotecias): investigación con herramientas tecnológicas como programas de geometría dinámica, realidad aumentada, impresión 3D o mediante modelos físicos. 3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica – Modelos geométricos: representación y explicación de relaciones numéricas y algebraicas en situaciones diversas. – Modelización de elementos geométricos de la vida cotidiana con herramientas tecnológicas como programas de geometría dinámica u otras herramientas.
D. Sentido algebraico	1. Patrones – Patrones, pautas y regularidades: observación, generalización y término general en casos sencillos haciendo predicciones y encontrando términos que faltan o el lugar que ocupa un determinado término y determinando la regla de formación de diversas estructuras en casos sencillos mediante palabras, gráficas, tablas o reglas simbólicas. 2. Modelo matemático – Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones elementales.

	– Estrategias de deducción y análisis de conclusiones razonables de una situación de la vida cotidiana a partir de un modelo. 3. Variable – Variable: Asociación de expresiones simbólicas al contexto del problema y diferentes usos (como incógnita en ecuaciones, inecuaciones y sistemas, indeterminada en patrones e identidades, para expresar cantidades que varían en fórmulas y funciones elementales y como constantes o parámetros en modelos funcionales). – Características del cambio en la representación gráfica de relaciones lineales y cuadráticas. 4. Igualdad y desigualdad – Relaciones lineales, cuadráticas y de proporcionalidad inversa en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica. – Formas equivalentes de expresiones algebraicas (incluyendo la factorización) en la resolución de ecuaciones polinómicas y sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales. – Estrategias de discusión y búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales y cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana. – Ecuaciones polinómicas, sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el usa de la tecnología según el grado de dificultad. 5. Relaciones y funciones – Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan. – Relaciones lineales y no lineales: identificación y comparación de diferentes modos de representación (verbal, gráfica, tabular y algebraica), y sus propiedades a través de ellas. – Representación de funciones elementales, incluyendo polinómicas, exponenciales y de proporcionalidad inversa: Interpretación de sus propiedades en situaciones de la vida cotidiana. 6. Pensamiento computacional – Resolución de problemas mediante la descomposición en partes, la automatización y el pensamiento algorítmico a partir de otras situaciones

	como pueden ser prácticas con datos, modelización y prácticas de simulación y de resolución de problemas computacionales.
E. Sentido estocástico	X
F. Sentido socioafectivo	7. Creencias actitudes y emociones 8. Trabajo en equipo y toma de decisiones 9. Inclusión, respeto y diversidad

	Contenido 4º de E.S.O. OPCIÓN B
A. Sentido Numérico	1. Cantidad – Realización de estimaciones en diversos contextos, analizando y acotando el error cometido. – Expresión de cantidades mediante números reales con la precisión requerida. – Diferentes representaciones de una misma cantidad. 2. Sentido de las operaciones – Operaciones con números reales en la resolución de situaciones contextualizadas. – Propiedades de las operaciones aritméticas: cálculos con números reales, incluyendo herramientas digitales. – Logaritmos: uso para simplificar expresiones y para comparar magnitudes de órdenes dispersos. Aplicación para el estudio y comprensión de diferentes fenómenos naturales. 3. Relaciones – Los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales y reales); relaciones entre ellos y propiedades. – Orden en la recta numérica. Intervalos. 4. Razonamiento Proporcional – Situaciones de proporcionalidad directa e Inversa en diferentes contextos: desarrollo, y análisis de métodos para la resolución de problemas.
B. Sentido de la medida	1. Medición – Medición de ángulos usando distintos sistemas de unidades. Transformación de un sistema a otro.

	– Razones trigonométricas de un ángulo agudo y sus relaciones: aplicación a la resolución de problemas. – Generalización a la circunferencia goniométrica. – Deducción y aplicación de la pendiente y su relación con un ángulo en situaciones sencillas. 2. Cambio – Estudio gráfico del crecimiento y decrecimiento de funciones en contextos de la vida cotidiana con el apoyo de herramientas tecnológicas: tasas de variación absoluta, relativa y media.
C. Sentido espacial	1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones – Propiedades geométricas de objetos de la vida cotidiana: investigación con programas de geometría dinámica. 2. Localización y sistemas de representación – Figuras y objetos geométricos de dos dimensiones: representación y análisis de sus propiedades utilizando la geometría analítica. – Expresiones algebraicas de una recta: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver. – Incidencia paralelismo y perpendicularidad. 3. Movimientos y transformaciones – Transformaciones elementales en la vida cotidiana: investigación con herramientas tecnológicas como programas de geometría dinámica, realidad aumentada, impresión 3D o mediante modelos físicos y manuales mediante el uso de la geometría analítica. 4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica – Modelos geométricos: representación y explicación de relaciones numéricas y algebraicas en situaciones diversas. – Modelización de elementos geométricos con herramientas tecnológicas como programas de geometría dinámica, impresión 3D, realidad aumentada... – Elaboración y comprobación de conjeturas sobre propiedades geométricas mediante programas de geometría dinámica u otras herramientas.
D. Sentido algebraico	1. Patrones – Patrones, pautas y regularidades: observación, generalización y término general en casos sencillos haciendo predicciones y encontrando términos que faltan o el lugar que ocupa un determinado término y determinando la

	regla de formación de diversas estructuras en casos sencillos mediante palabras, gráficas, tablas o reglas simbólicas. 2. Modelo matemático – Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones elementales. – Estrategias de deducción y análisis de conclusiones razonables de una situación de la vida cotidiana a partir de un modelo. 3. Variable – Variable: Asociación de expresiones simbólicas al contexto del problema y diferentes usos (como incógnita en ecuaciones, inecuaciones y sistemas, indeterminada en patrones e identidades, para expresar cantidades que varían en fórmulas y funciones elementales y como constantes o parámetros en modelos funcionales). – Relaciones entre cantidades y sus tasas de cambio. 4. Igualdad y desigualdad – Algebra simbólica: representación de relaciones funcionales en contextos diversos. – Formas equivalentes de expresiones algebraicas (incluyendo la factorización y fracciones algebraicas sencillas) en la resolución de ecuaciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas sencillas e irracionales, inecuaciones lineales y cuadráticas sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. – Estrategias de discusión y búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales y no lineales sencillas en contextos diversos. – Ecuaciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas sencillas e irracionales, inecuaciones lineales y cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el usa de la tecnología según el grado de dificultad. 5. Relaciones y funciones – Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan. – Relaciones lineales y no lineales (incluyendo polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y racionales sencillas): identificación y comparación de diferentes modos de representación, enunciados verbales,

	tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas. – Representación de funciones: interpretación de sus propiedades en situaciones de la vida cotidiana y otros contextos. 6. Pensamiento computacional – Resolución de problemas mediante la descomposición en partes, la automatización, el pensamiento algorítmico y la generalización a partir de otras situaciones como pueden ser prácticas con datos, modelización y prácticas de simulación y de resolución de problemas computacionales. – Estrategias en la interpretación, modificación y creación de algoritmos. – Formulación y análisis de problemas de la vida cotidiana mediante programas y otras herramientas.
E. Sentido estocástico	X (ELEMENTOS DE ESTADISTICA, Organización y análisis de datos, Incertidumbre, Inferencia…)
F. Sentido socioafectivo	10. Creencias actitudes y emociones 11. Trabajo en equipo y toma de decisiones 12. Inclusión, respeto y diversidad

6. RELACIÓN ENTRE VAN HIELE Y EL CONTENIDO DEL PROGRAMA EDUCATIVO CON RESPECTO A LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

NOTA IMPORTANTE: RESPONDIENDO A LA CUESTION DE (¿Cómo, que técnicas y razonamientos dan para impartir la geometría como base de docencia de principios algebraicos? ¿Qué contenido debería impartirse?) lo primero es que el programa educativo parece lo suficientemente completo como para pensar en excluir contenidos y es más, se le podrían añadir más contenidos siempre y cuando el alumnado estuviese lo suficientemente formado como para demostrar las competencias específicas mínimas como para superar el curso. Por iniciativa del gobierno actual, tras oír opiniones diversas de distintos agentes sociales e institucionales del sistema educativo, se realizó un debate con respecto al currículo con el fin de encontrar un marco común que encuentre las mejores prácticas tanto docentes como institucionales con el fin de ofrecer la mejor educación posible al alumno. La charla denominada “El currículo a debate” hablaba precisamente de los cambios disruptivos actuales y que se establecen con cada cambio de gobierno, de la formación de los docentes y en la valoración de las opiniones de estos a la hora de tomar decisiones legislativas con respecto a la educación actual. El debate se estableció bajo 4 premisas:

- ¿Necesita un nuevo currículum el sistema Educativo?
- Cambios que necesita incorporar el actual currículum
- ¿Por qué un currículum competitivo?
- ¿Qué podemos aprender de nuestro entorno?

Con respecto al primer apartado, la conclusión es clara en cuanto la necesidad de cambio en el currículo del Sistema Educativo, y es que si la sociedad cambia obviamente el currículo ha de cambiar a su vez. En palabras del catedrático Cesar Coll "Se ha de renunciar a la pretensión de satisfacer todas las necesidades básicas de aprendizaje durante el periodo de formación inicial" ya que actualmente nos encontramos con currículos sobrecargados y sobredimensionados. Y, aun así, dentro de la actual LOMLOE se marcan unos *saberes básicos,* que antes se denominaban contenidos, dentro de los elementos del currículo que expondremos a continuación y que según el currículo son saberes imprescindibles. Según la actual LOMLOE un mismo saber puede utilizarse en varias competencias, por lo que será necesario conectarlas. La idea es enfocarse en Aprendizajes esenciales, competencias implicadas en la capacidad de aprender, de adquirir conocimientos y recursos documentales. Todo ello enfocado en una reforma sustancial y profunda que afectará a la estructura del sistema educativo, cuyo objetivo sea incorporar nuevos enfoques y maneras de garantizar un aprendizaje interdisciplinar, globalizado y competencial. Aun así, nos encontramos con el dilema de determinar que saberes o contenidos básicos debe tener un alumno tanto para la vida actual como para su desarrollo personal. Es evidente que en el marco actual donde las TICs (Tecnologías de la Información y Comunicación) son básicas para el desempeño profesional y social de los individuos, que el alumno adquiera las habilidades suficientes para su autoformación es fundamental. Por ello en la LOMLOE ya no se evaluarán y calificaran conocimientos, lo que se evaluaran serán las competencias, la capacidad que tenga el alumno de adquirir conocimientos y aplicarlos adecuadamente ante problemas de la vida diaria.

Este trabajo se planteó desde la premisa de las carencias del alumnado con respecto al lenguaje matemático aplicado a la geometría y al algebra. Para saber a qué nos referimos, estudiaremos el currículo actual, en concreto sus contenidos, y evaluaremos si la carencia se basa en la falta de contenidos o es más bien un problema de docencia, ya sea por falta de recursos por parte de los profesores, así como la falta de compromiso por parte de los alumnos. Y para ello nos basaremos en estudios llevados a cabo por parte de docentes de distintos centros del mundo. Bajo la metodología de Van Hiele analizaremos estos contenidos.

6.1 1º, 2º, 3º y 4º ESO

Recordemos que los programas educativos que contempla la actual ley de educación LOMLOE se enfoca más en las competencias específicas de los alumnos y menos en los conocimientos por lo que el alumno deberá ser capaz de comprender y saber aplicar los saberes básicos que aparecen en la LOMLOE. Los saberes básicos (o contenidos que era como se denominaban en la anterior ley) para 1º de la ESO son:

- Dentro del sentido de la medida; la Magnitud con tributos mesurables de los objetos y sus estrategias de elección de unidades y operaciones adecuadas a los problemas planteados en el plano, medición con longitudes, ángulos y áreas de formas planas, Estimaciones y relaciones con formulación de conjeturas sobre medidas en el plano y estrategias para la toma de decisión.
- Dentro del sentido espacial; Figuras geométricas de dos dimensiones, con figuras geométricas planas descripción y clasificación en función de sus características o propiedades, Elementos característicos de las figuras geométricas planas, relación entre circunferencias y/o rectas, Relaciones de congruencia y semejanza en figuras planas con identificación y aplicaciones, Teorema de Tales, Criterios de semejanza de triángulos y su aplicación a la resolución de problemas, razón de proporcionalidad y escalas, relaciones pitagóricas de figuras planas e identificación, construcción de figuras geométricas planas, dentro de la localización y sistemas de representación tenemos las coordenadas cartesianas, representación por puntos en el plano y su comprensión del uso de coordenadas, y ya por ultimo tenemos las visualizaciones, razonamiento y modelización geométrica.
- Dentro del sentido algebraico se le enseñaran Patrones y regularidades de tipo numérico y geométrico, modelo matemático con modelización de situaciones de la vida cotidiana con materiales manipulativos y expresiones sencillas como representaciones matemáticas del lenguaje algebraico, traducción del lenguaje cotidiano al algebraico y estrategias de deducción y conclusiones razonables, Variables, concepto de incógnita en ecuaciones lineales, comprensión del lenguaje algebraico, Igualdad y desigualdad con equivalencia de expresiones algebraicas involucradas en ecuaciones lineales con coeficientes enteros, relaciones cuantitativas en situaciones de la vida y pensamiento computacional con algoritmos sencillos.

En el saber básico de sentido de la medida, Magnitud, Atributos mesurables de los objetos: investigación y relación entre los mismos, medición, Longitudes, ángulos y áreas, representaciones de objetos geométricos planos con propiedades fijadas, Estimaciones y relaciones, etc.… cumplen con las 3 fases de Van Hiele.
En los saberes básicos de los contenidos no se aprecia ninguna carencia y utilizando el libro del centro y sus recursos sería suficiente como para poder establecer para el alumno un plan formativo adecuado.

6.2 COMPETENCIAS ESPECIFICAS COMO SISTEMA DE EVALUACION DE LA LOMLOE

Respecto al nuevo sistema de evaluación que viene estipulado en la LOMLOE, lo que el profesor ha de tener en cuenta son las denominadas *Competencias específicas* que pasamos a enumerar a continuación;

Competencia específica 1: Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.
Competencia específica 2: Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.
Competencia específica 3: Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.
Competencia específica 4: Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.
Competencia específica 5: Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.
Competencia específica 6: Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.
Competencia específica 7: Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.

Competencia específica 8: Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.
Competencia específica 9: Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.
Competencia específica 10: Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.

Recordemos que las *competencias específicas* son "desempeños que el alumnado debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los saberes básicos de cada materia o ámbito". Si observamos detenidamente las definiciones dadas para las *competencias específicas*, veremos que es un compendio de los principios de Van Hiele con respecto a lo que se espera que el alumno, una vez ha adquirido ciertos conocimientos, sepa aplicar y comunicar esos conocimientos de la manera más adecuada.

Los problemas que tienen los alumnos españoles en concepto de carencias en el contenido de Espacio y Forma se deben a otras causas o hipótesis que enunciaremos a continuación.

7. DIFICULTADES Y ERRORES MANIFESTADOS POR ESTUDIANTES DE ESO (Por María Pérez Prados, Universidad de Navarra)

7.1 1º DE ESO Resumen

Tomaremos como referencia el TFM de María Pérez Prados realizado en el 2013, estudio realizado entre los alumnos de 1º, 2º, 3º, y 4º de ESO con respecto al sentido del espacio y forma en donde viene la geometría y elementos básicos de algebra junto a un vocabulario nuevo para la descripción de estos elementos. Para ello se basa en la evaluación a través de actividades de los libros de texto de Primaria seleccionados por el centro MATEMATICAS de la Editorial SM y que son muy coherentes con los contenidos y criterios de evaluación marcados por la normativa. La autora clasificara las actividades propuestas por los libros de clase en;

- Ejercicios
- Problemas
- Cuestiones

- Situaciones

Uno de los primeros hechos que observamos al observar el análisis que se realiza es que la mayoría de las actividades propuestas por estos libros de clase es que se enfocan a la realización de ejercicios y problemas, muy pocas o nulas cuestiones y no se plantea ninguna situación. La autora informa que todos los conceptos reflejados en la normativa de 2013 y esta editorial se ciñe a las normativas vigentes para poderse adecuar a los programas educativos de los centros escolares. En general, el hecho de que en un libro solo predominen ejercicios y problemas hace que únicamente se pueda evaluar el aprendizaje de los conceptos y su aplicación teórica, los problemas permite evaluar la capacidad de resolución de situaciones y examinar los métodos usados por los estudiantes y las herramientas de que disponen pero no permiten evaluar la utilización de vocabulario matemático ni el uso del lenguaje matemático, por lo que habría que fomentar más ejercicios con cuestiones teóricas y con un uso mayor de vocabulario a imagen y semejanza de los ejercicios de vocabulario de lengua e inglés.

7.2 PROPUESTA DE TEMA. CONTENIDO GEOMÉTRICO EN EL LIBRO DE TEXTO DE REFERENCIA.

Para esta parte del TFM analizaremos un proceso de estudio, que será llevado a cabo por un grupo de alumnos de 1º de ESO sobre contenidos de geometría plana.

El análisis lo realizaremos a lo largo de 2 partes. En la primera parte analizaremos un libro de texto utilizado en este proceso: los objetos matemáticos presentes en él, así como la estructura de sus contenidos y actividades. En la segunda parte se hace una previsión de las dificultades relacionadas con geometría y el posible origen de estas en un ejemplo.

7.3 CONTENIDO GEOMETRICO EN EL LIBRO DE TEXTO DE REFERENCIA

El material de referencia para el análisis de un proceso de estudio de geometría en secundaria ha sido el libro

Geometría para la clase (Geometry for the classroom) de C. Herbert Clemens y Michael A. Clemens, ed. Springer-Verlag. Se trata de un libro diseñado para dar una amplia preparación en geometría elemental, así como temas estrechamente relacionados de carácter un poco más avanzado. A usar tanto por estudiantes de secundaria y bachiller, así como libro de clase de profesores de geometría elemental.

El libro Geometría para la clase está dividido en dos cuadernos.

El primer cuaderno a su vez está dividido en 4 apartados;

a) INTUICIÓN

b) CONSTRUCCIÓN

c) PRUEBA

d) PROGRAMAS DE ORDENADOR

Aunque solo haremos un análisis de los apartados **intuición y construcción.**
Temas a estudiar en el apartado **intuición**

1. **Formas Geométricas**
2. **Mas formas**
3. **Polígonos en el plano**
4. **Ángulos en el plano**
5. **Posición en el plano. "Caminando por el plano"**
6. **Áreas de rectángulos**
7. **Área de un triángulo sombreado**
8. **Añadir ángulos a un triangulo**
9. **Teorema de Pitágoras**
10. **Propiedades en función de los lados del triángulo**
11. **Líneas paralelas**
12. **Teorema de ángulos entre paralelas o Teorema Z.**
13. **Áreas, principio de rectas paralelas.**
14. **Dos rectas que no se cortan en el plano son paralelas.**
15. **El Principio del primer aumento; forma preliminar**
16. **El Principio del primer aumento; forma final**
17. **Área interior de un círculo de radio 1**
18. **Cuando son los triángulos congruentes**
19. **Los aumentos preservan el paralelismo y los ángulos**
20. **Principio de similitud**
21. **Proporcionalidad de segmentos cortados por paralelas**
22. **Encontrar el centro de un triangulo**
23. **Teorema de concurrencia para altitudes de un triangulo**
24. **inscripción de ángulos en círculos**
25. **Datos curiosos sobre los círculos y los casos límite**
26. **Grados y radianes**
27. **Trigonometría. Seno y coseno α**
28. **Tangente de α**
29. **Todo lo que siempre quisiste saber de trigonometría, pero no te atreviste a preguntar.**
30. **Ley de los senos y ley de los cosenos**
31. **Áreas de calculo**

32. **El segundo principio de aumento**
33. **Volumen de una pirámide**
34. **De conos y collares**
35. **Mundoesfera**

El apartado Intuición recopila los temas más importantes sobre geometría plana.
Para el análisis de estos temas se ha tomado como texto de referencia el artículo *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta* publicado en la Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa por J. Godino, V. Font y M. R. Wilhelmi en 2006. Este texto analiza una lección de un libro de 5º grado de educación primaria a través del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática.

7.4 OBJETOS MATEMÁTICOS INVOLUCRADOS

Para examinar este contenido se han analizado los principales objetos y relaciones implicadas en la resolución de problemas de geometría plana tomando como referencia el análisis realizado en el artículo *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta* antes citado.

Elementos estudiados: <u>el lenguaje (verbal, gráfico y simbólico) utilizado</u>, <u>las situaciones</u> o problemas planteadas, <u>los procedimientos</u> o acciones realizados en relación con estos problemas, <u>los conceptos</u> o nociones presentes, <u>las propiedades relevantes</u> para el desarrollo del tema y <u>los argumentos</u> o razonamientos para la resolución de actividades.

Para este análisis solo tendremos en cuenta <u>el lenguaje</u> y <u>los problemas planteados</u> y trataremos de ver los vínculos con respecto a los saberes básicos especificados en los últimos cursos de Primaria y toda Secundaria del actual programa educativo especificado en la nueva ley de educación LOMLOE.

7.5 LENGUAJE			
Tema	Verbal	Grafico	Simbolico
Formas geométricas	Línea o recta, Rayo o Flecha o semirrecta, Segmento, punto, punto final.	Líneas, rectas, semirrectas, segmentos	Punto A, Punto B, flechas, Segmento AB, Rayo o semirrecta AB, Rayo o semirrecta BA,
Mas formas	Triangulo, vértice, lado del triángulo, plano, infinitas líneas, circulo, punto, centro, radio	Triangulo, plano representado por un trapecio y un ovalo sombreado, circulo con un punto como centro.	***Puntos*** en vértices, Punto ***O*** centro, segmento ***r*** representando un radio
Poligonos en el plano	Cuadrilátero, Pentágono, Hexágono, Eneágono o N-gono, vértice, lado, segmento, punto final o punto	Cuadriláteros irregulares o Trapezoides uno cóncavo y otro convexo, pentágono irregular cóncavo, Hexágono irregular convexo	
Ángulos en el plano	Angulo, Vértice, punto final o extremo, ángulo interior, ángulo interior de las flechas o rayos que parten de un mismo punto, óvalos, congruencia, ángulo plano, ángulo recto, dirección opuesta	Dos flechas que salen del mismo punto con direcciones distintas	Figura A, Figura B, ≈→ Congruencia A ≈ B → Congruencia entre las figuras A y B, 180º, 90º, 1º. |AC| → longitud del segmento AC
Posición en el plano, Caminando por el plano	Widget (palabra inglesa compuesta que significa “artilugio o dispositivo”) unidad de medida, segmento	Punto de partida, segmentos que representan una dirección y forman un rectángulo	a→ segmento b→ segmento puntos (vértices) A, B, C, D. ∠ CDA=∠ DAB =90º ∠ → Angulo ∠ CDA-→ ángulo formado por los segmentos CD y DA con vértice en D
Áreas de rectángulos	Rectángulo, área de un rectángulo, cuadrilátero, ángulos de los vértices, igual longitud, propiedades de un rectángulo, propiedad distributiva, área	Rectángulos, cuadrado	A x B = Area
Área de un triángulo sombreado	Área sombreada de un triángulo, congruente, área, altura vertical, base, altura del triángulo, propiedad distributiva, paralelogramo	Triángulos rectángulos, acutángulos, obtusángulos, triángulos inscritos en un rectángulo	A segmento (altura) B, B`, B`` segmento (base), 1/2(BxA) área triangulo, b → base triangulo h → altura triangulo ½ (b x h) área de cualquier triangulo
Añadir los ángulos de un triangulo	Suma de ángulos de un triangulo	Triángulos rectángulos,	∠ BAC = ∠ A → nombre del angulo de vértice A,

		acutángulos, obtusángulos, triángulos inscritos en un rectángulo	∠ DBA ≈ ∠ BAC, ángulos ∠ DBA, ∠ ABC, ∠ BAC, ∠ ACB.
Teorema de Pitágoras	Triangulo rectángulo, (las letras griegas se usan para nombrar ángulos)	Cuadrados inscritos dentro de cuadrados y triángulos rectángulos inscritos en rectángulos a su vez inscritos en cuadrados, los triángulos vienen en pares congruentes formando rectángulos	$a^2 + b^2 = c^2$ a, b, c, lados de un triángulo. α, β, γ, δ, ángulos
Propiedades en función de los lados de un triangulo	Congruente a, triangulo, lados, propiedades de los tres lados, coincidir	Triángulos obtusángulos, circunferencias.	ΔABC= triangulo ABC ΔDEF, vértices A, B, C, D, E, F. Segmentos AB, BC, CA, DE, EF, FD. AB ≈ DE → AB congruente con DE ΔABC ≈ ΔDEF, d (A, B)= distancia entre A y B
líneas paralelas, Postulado de las paralelas o líneas paralelas cortadas por una secante o “Principio Z”	Rectángulo, infinito, líneas paralelas,	Dos líneas paralelas segmentadas por líneas perpendiculares de longitud igual a la distancia mínima entre las dos líneas paralelas formando rectángulos colindantes	‖ → líneas paralelas L ‖ M → L es paralela a M, α, 90º
Rectángulos entre paralelas, postulado de las paralelas o Principio Z	Paralelas, rectángulos, ángulos, rectas, flechas	Rectas, paralelas, perpendiculares, rectángulos, secantes	|AD|=|EF| longitud de AD es igual a la de EF α, β, γ, δ, A, B, C, D, L, M, N. ∠ABC, ∠ BAC, ∠ ACB. ∠ α, ∠ β,
Áreas, el principio de rectas paralelas	Área, figura, plano, paralelas, trapezoide	Triangulo acutángulo, triangulo rectángulo, rectángulo	h
Dos rectas en el plano que no se cortan son paralelas	Líneas secantes, supuesto de líneas paralelas, vértices, rectángulos, puntos de una recta, cálculo de distancias verticales, cero, perpendicular, Principio de ángulos correspondientes,	líneas secantes, triángulos rectángulos, rectángulos	L, M, R, X, Y, Z, P, P_1, P_2, P_3, P_4,... Q_1, Q_2, Q_3, S, S_1 , S_2, S_3, d(P_1 , R), d(P , S), d(Q_1 , P2),… α, β, γ, ...
Principio de primer Aumento; forma preliminar.	Cuadrado, aumento por 3, Área, área de un cuadrado, factor de multiplicación	Cuadrado	$r·r = r^2$, “·” → “veces”
Principio de primer Aumento; forma final.	Magnificación tridimensional, cubo, poder de magnificación	Cilindros, minicubos, minicuadrados, figuras	r ,r^2, r^3, r^n ,

	r, volumen multiplicado por r, direcciones, figura, factor de r, factor multiplicador, figura N-dimensional, factor de r^n, ley distributiva.	o polígonos irregulares de n lados,	
Área dentro de un círculo de radio 1	Área, circulo, radio, Teorema de Pitágoras, principio de magnificación o aumento, método de estimación	Cuadrados, minicuadrados, circunferencia inscrita en un cuadrado, cuadrado inscrito en una circunferencia	π, 2 x 2, $2 < \pi < 4$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$, $2{,}617 < \pi < 3{,}407$ $3{,}13 < \pi < 3{,}15$ $C=2\pi r$, C/2, C= (longitud de perímetro circunferencia de radio 1) = 2π
Cuando son los triángulos congruentes	Principio de los 3 lados, principio de los dos lados y un ángulo, principio de los dos ángulos y un lado, congruencia, emparejamiento de vértices o segmentos (lados), ángulos de un triángulo, ángulos congruentes, vértices correspondientes, segmentos paralelos, diagonales de un paralelogramo se diseccionan mutuamente	Triángulos obtusángulos, segmentos de triángulos congruentes, diagonales bisecadas de un paralelogramo,	A, A`, B, B`, C, C´, ΔABC, ΔA´B´C´, ΔABC ≈ ΔA´B´C´ ∠ABC ≈ ∠A´B´C´ AB ≈ A´B´ BC ≈ B´C´ AC ≈ A´C´
Los aumentos preservan los paralelismos y los ángulos	Punto 0, factor, factor r, teorema de Pitágoras, aumentos, paralelas, plano, rectángulos, punto de referencia de aumentos, lados	Triángulos, rectángulos, triángulos de distintas proporciones insertados dentro de otros triángulos	a, b, c, a´, b´, c´, r, P, P´, L, L´,0 ,α, β, δ,α´,β´,δ´ a´=ra b´=rb c´=rc $c=\sqrt{(a')^2+(b')^2}$ $c=r\cdot(\sqrt{(a)^2+(b)^2})$ d(P, P´)= $\sqrt{(ra-a)^2+(rb-b)^2}$ L´‖ L, L´‖ M´
Principio de similitud	Similar, similitud, vértice, congruencia, proporcionales, implicación, condiciones, poder de aumento r o factor de aumento r , ángulos, paralelas, preservación de ángulos, perpendicularidad.	Triángulos proporcionales con un mismo vértice, ángulos similares con distintos tamaños, ángulos iguales y lados proporcionales	d(A´, B´) $r=\frac{d(A',B')}{d(A,B)}$ ∠A ≈ ∠ A´, ∠E ≈ ∠ B´, ΔA´B´C´ ≈ ΔDEF d(E, F)=d(B´, C´) d(E, F) = r·d(B, C) ‖ → Paralelismo ⊥ → Perpendicularidad ~ → Similitud ΔA´B´C´ ~ ΔABC ΔABC ~ ΔDEF

Proporcionalidad de segmentos cortados por paralelas. TEOREMA DE TALES	Lineas paralelas, lineas transversales, triángulos proporcionales, segmentos proporcionales, ecuaciones algebraicas, Principios de correspondencia de ángulos, argumentos, teoremas.	Tres rectas paralelas que cortan dos secantes, las 2 secantes tienen el punto común X y las denominan "transversales", las líneas L, M y N son paralelas	X, A, B, C, A´, B´, C´, L, M, N, ΔXAA´ ~ ΔXBB´~ ΔXCC´ ∠XAA´ ≈ ∠XBB´ $\frac{\lvert XB\rvert}{\lvert XA\rvert}=\frac{\lvert XB'\rvert}{\lvert XA'\rvert}$ $\lvert AB\rvert$= d (A, B)
Encontrar el centro de un triángulo. *Centros de gravedad.*	Centro de un triángulo, punto medio, baricentro, mediana, Teorema de las medianas (Teorema de concurrencia de medianas)	Triángulos cuyas áreas son cortadas en rebanadas finas de rectángulos, líneas medianas que se conectan en un punto central o baricentro	A partir de un ejercicio, se explica como hallar el centro de gravedad de un segmento respecto los ejes de coordenadas en un plano con la fórmula; punto medio= $(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2})$
Teorema de concurrencia para altitudes de un triangulo	Altura de un triángulo, punto común, indirectamente, propiedades, ortocentro	Triángulos en los que se dibujan sus alturas, en uno de ellos se dibuja mal su altura a propósito para demostrar por que las tres alturas coinciden en un mismo punto u ortocentro	X, A, B, C, A´, B´, C´, L, M, N, ΔAXF ~ ΔBXE ∠AXF ≈ ∠BXE $\frac{\lvert AX\rvert}{\lvert BX\rvert}=\frac{\lvert XF\rvert}{\lvert XE\rvert}$
Ángulos inscritos en círculos	Ángulos, radio, medidas, diámetros, inscrito, ángulo central, ángulo inscrito, arco, cuerda.	Círculos con triángulos, deltoides cóncavos acutángulos y trapezoides asimétricos cruzados, todos ellos inscritos dentro en circunferencias distintas. La medida de un ángulo inscrito en una circulo es siempre la mitad de la medida del ángulo cuyo vértice está en el centro y cuyos lados cortan en el mismo arco del circulo	O, X, Y, α, β, γ, $\lvert OX\rvert = \lvert OY\rvert$ 2 β = α
Datos curiosos sobre círculos y casos limite	Productos de longitudes de una cuerda, cuerda, segmentos, posición de un punto, arco, ángulo medida, tangente, recta tangente a una circunferencia	Circunferencias con diámetros, cuerdas con respecto a un punto del diámetro, líneas con respecto a un punto exterior de la circunferencia que atraviesan el perímetro de la circunferencia	X, A, B, C, D, A´, B´, C´, D´, α $\lvert AX\rvert \cdot \lvert XA'\rvert = \lvert BX\rvert \cdot \lvert XB'\rvert$

		por dos puntos, arcos de una circunferencia cuyos puntos extremos forman cuerdas cruzadas dando un punto de corte	
Grados y radianes	Perímetro de una circunferencia, longitud de un arco, cálculo de la longitud de un arco, fórmulas de cálculo de un arco, grados, radianes, unidades de medida, plano, arco	Circunferencias, arcos, unidades de medidas, radios,	π, r, 2πr $\frac{medidasenrad}{2\pi}=\frac{medidasengrados}{360º}$
Trigonometría	Triángulos rectángulos, triángulos similares, paralelos, lados paralelos, lado opuesto, lado adyacente, hipotenusa, ángulo, principios de ángulos internos entre paralelas, radio, seno, coseno tangente, secante, cosecante, cotangente, apotema	Líneas secantes con un vértice, triángulos similares	A, B, C, D, E, α |AB|/|AD|=|AC|/|AE|
Tangente de α	Triángulos similares, similar, triángulo, tangente, relación	Triángulos similares, lados paralelos, dibujos de árboles, distancia a los árboles, ángulo de visión desde la base de los árboles hasta la copa.	Tangente de α, $\tan \alpha=\frac{ladoopuesto}{ladoadyacente}$
Todo lo que quisiste saber de trigonometría pero que temías preguntar	Radio, circunferencia, teorema de Pitágoras, radio de 1, seno α, coseno α, tangente α, secante α cosecante α, cotangente α, ángulo, ángulos complementarios,	Circunferencia con dos rectas atravesando el centro en horizontal y vertical, flecha o semirrecta que parte del centro en diagonal hacia la derecha. Las rectas simulan unos ejes de coordenadas con los mismos criterios de signos, positivos hacia la derecha y hacia arriba	90º = π/2 rad 180º = π rad 270º = 3π/2 rad seno α, coseno α, tangente α, secante α cosecante α, cotangente α, sinα, cosα, tanα
Ley o teorema del seno y ley o teorema del coseno	Ley de los senos, ley de los cosenos, álgebra	Triángulos obtusángulos, un triángulo con la altura marcada perpendicular respecto al segmento de mayor longitud como base	a, b, c, α, β, γ, $\frac{sine\alpha}{a}=\frac{sine\beta}{b}=\frac{sine\gamma}{c}$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$
Áreas de calculo	Teoremas de los tres lados, dos lados y un	Triángulos obtusángulos,	a, b, c, α

	ángulo, dos ángulos y un lado, lados, ángulos, cuadrados, cálculo de área de un triangulo		Área = ½ ab sen α Área con solo lados= ¼ ((a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c))$^{1/2}$
Segundo principio de aumento	Figura N-dimensional, aumentada o ampliada, factor de multiplicación r, Teorema de Pitágoras, rectangulares, cuadradas	Ejes de coordenadas, figura semiesférica irregular cuya área esta cuadriculada o dividida en minicuadrados. Diagonales dibujadas sobre ejes de coordenadas formando Triángulos rectángulos, flechas o rayos que marcan la dirección de aumento .	$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \ldots \cdot r_n$ $\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$ $\sqrt{13}=\sqrt{3^2+2^2}$
Volumen de una pirámide	Figura, plano, pirámide, volumen de una pirámide tridimensional, rellenar volumen de pirámide con minicubos, esquina, volumen, unidad cúbica.	Figura en el plano, líneas que se cruzan en un punto exterior al plano y que parten de puntos del perímetro de la figura,	$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot (1/3)$ Volumen de pirámide = (1/3)·área base ·altura vertical
De conos y collares	Circulo, centro 0, plano tumbado, vértice, superficie cónica, generatriz, vértice, directriz, semicono o tronco de cono, área de generatriz.	Circunferencia sobre un plano horizontal, cono cuya base es la circunferencia, cono segmentado en micro triángulos, semicono (cono sin punta)	$(1/2)b_1 \cdot s+(1/2)b_2 \cdot s+(1/2)b_3 \cdot s+ \ldots$ ***s***= slant height (generatriz o altura inclinada) área de superficie cónica= (½) ·perímetro base ·***s*** área de generatriz tronco=(1/2)·[(perímetro circunf. base) + (perim. circunf. Superior)]·***generatriz***
MundoEsfera	Radio, tridimensional, Esfera, centro, plano, superficie		r= radio 0= centro

7.6 SITUACIONES		
TEMA	Problemas descontextualizados	Problemas contextualizados
Formas geométricas	Identificar rectas, construir segmentos, cuantas maneras hay de se intersecciones dos flechas	
Mas formas	Identificar un triángulo. Pregunta teórica de la existencia de 2 segmentos en un plano, dibujar dos segmentos que se cruzan y dos que no. Intersecciones posibles entre	

	una circunferencia y un plano por 2 puntos y por un punto, y si es posible que se corten por 3 puntos. Pregunta si es posible que un triángulo corte a un plano por 2, 1 y 3 puntos	
Poligonos en el plano	Definir figuras que no son cuadriláteros o hexágonos razonadamente, aunque se parezcan. Dibujar triángulos a partir de un trapezoide asimétrico, un hexágono irregular y un eneágono de N=5,6, 7... (aunque este último no define si es regular o irregular)	
Ángulos en el plano	Con regla y compás, construir a partir de un segmento en una línea con distinta dirección otro segmento congruente y explica que pasos has seguido. Calculo algebraico de la medida de un ángulo. Construcción de ángulos a partir de la suma de otros ángulos de manera algebraica. Comprobación mediante regla y compás o justificación del teorema de 2 lados y un ángulo	
Posición en el plano, Caminando por el plano		Cálculo del área de un cuadrado para saber con cuanta pintura es necesaria cubrirla. Construcción de un recorrido a partir de las instrucciones dadas. Cálculo del área de un triángulo recto segmentado
Áreas de rectángulos		Cálculo del área de un rectángulo recto segmentado. Y de unos triángulos
Área de un triángulo sombreado	Cálculo de áreas de figuras, usando triángulos. Definición no formal de segmentos que forman un ángulo y que son congruentes	
Añadir los ángulos de un triangulo	Suma de los ángulos de un cuadrilátero, pentágono, hexágono y eneágono. Explicar propiedades de la composición de dos triángulos. Definición y razonamiento de ángulos suplementarios	
Teorema de Pitágoras	Definición de la fórmula de Pitágoras a partir del dibujo de las áreas en un cuadrado. Cálculo de áreas a partir de la fórmula de Pitágoras. Cálculo de la hipotenusa de un triángulo a partir del Teorema de Pitágoras	

Propiedades en función de los lados de un triangulo	Comprobación geométrica del teorema de los tres lados a partir de unas figuras de triángulos. Propiedades de un triángulo equilátero a partir de la comprobación geométrica del teorema de los tres lados y cálculo de sus ángulos.	
Líneas paralelas	Sin ejercicios	Sin ejercicios
Rectángulos entre paralelas, teorema del ángulo entre paralelas o teorema Z	Comprobación del postulado de las paralelas a partir de líneas paralelas y otras figuras como triángulos.	
Áreas, el principio de rectas paralelas	Cálculo de áreas de triángulos y trapezoides a partir del postulado de las paralelas, también en casos con ejes de coordenadas.	
Dos rectas en el plano que no se cortan son paralelas	Comprobación mediante ejercicios del postulado de ángulos de dos secantes y del postulado de las paralelas	
Principio de primer Aumento; forma preliminar.	Aplicación del factor de ampliación a diversas figuras y volúmenes	
Principio de primer Aumento; forma final.	Aplicación del factor de ampliación a diversas figuras y volúmenes. Uso del principio de ampliación para definir la formula del cálculo del área de una circunferencia a partir del dato dado de Pi con radio r. Cálculo de la superficie de una esfera de radio r a partir del resultado de una esfera de radio 1.	
Área dentro de un círculo de radio 1	Cálculo del área de una circunferencia a partir de una división en cuadriculas del área interior al perímetro de la circunferencia y el área con las cuadriculas que sobrepasan el perímetro de la circunferencia. Cálculo del perímetro a partir de seccionar la circunferencia en secciones o “quesitos” y rejuntarlos de forma que se asemeje a un trapecio. Cuanto más fina sean las porciones más aproximado será el cálculo hasta que se asemeje a un rectángulo y, por lo tanto, al calcular el perímetro, más nos aproximaremos a Pi.	
Cuando son los triángulos congruentes	A partir del postulado de las paralelas, teorema de los dos lados y el ángulo o principio de ángulos verticales, tenemos unos ejemplos de dos triángulos colindantes (Un trapecio con una diagonal o	

	diagonales que simula dos triángulos). Explicar por qué son congruentes si cuatro de sus segmentos son congruentes dos a dos y otras propiedades. A partir del teorema de los tres lados comprobar que los ángulos de un triángulo isósceles son iguales y viceversa.	
Los aumentos preservan los paralelismos y los ángulos	Suma de segmentos de una recta, ampliación de esos segmentos de manera individual y suma de estos nuevos segmentos ampliados.	Cálculo de un rectángulo y su diagonal a partir de unas medidas dadas (p.e. 2x3) y de un factor de ampliación (p.e. 5)
Principio de similitud	Aplicación del teorema de tales junto con el principio de similitud en una serie de ejercicios, algunos con datos previos, donde se ha de demostrar que los dos triángulos del ejemplo son similares, algunos distribuidos de maneras diversas, o con figuras distintas como triángulos inscritos en triángulos o trapezoides asimétricos convexos con diagonales que parten de los centros de cada segmento formando triángulos en los extremos. Demostración de un triángulo rectángulo cuya base es la hipotenusa, si trazamos la altura (que será perpendicular a la base) el nuevo triangulo grande que nos da sera similar al triangulo original.	
Proporcionalidad de segmentos cortados por paralelas. TEOREMA DE TALES	A partir de un ejercicio con 3 líneas paralelas y dos secantes cuyo punto común de las secantes esta fuera del área delimitada por las líneas paralelas, completar unas tablas con datos y relación de proporciones, ejercicios de triángulos similares en el que se pide la explicación de paralelismos de segmentos, proporciones de ciertos segmentos, construcción de ortocentros e inscripción de dicho triangulo en otro más grande y similar.	
Encontrar el centro de un triángulo. *Centros de gravedad.*	A partir de unos ejes de coordenadas dados, encuentra los puntos que marquen el centro de gravedad de un segmento en un plano (x,y) y de varios segmentos que componen un polígono irregular y de varios triángulos obtusángulos. Aparte, encuentra para uno de los triángulos, la ecuación de la línea que contenga una mediana sabiendo el hecho de	

	que conoces dos puntos de una recta. Ejercicios de demostración de distintos postulados o principios como el de paralelismo o el de dos segmentos y un ángulo.	
Teorema de concurrencia para altitudes de un triangulo	Usar la técnica de construcción de “perpendicular a una recta que pasa por un punto arbitrario exterior a esa recta”, dibujar las tres alturas de varios triángulos de tipo acutángulo y obtusángulos, y ver que coinciden las tres alturas en un punto. También construir las medianas. Razonar algunas de las propiedades de las áreas de una mediana y su relación con respecto a los segmentos que los componen. Comprobación del teorema de Ceva’s, el teorema de las alturas y el teorema de las medianas a partir de ejemplos.	
Ángulos inscritos en círculos	A partir del postulado que dice que un triángulo inscrito en una circunferencia con dos lados iguales y correspondientes a la distancia del radio y cuyo vértice es el ángulo que forman estos dos lados y coincide con el centro de la circunferencia, el ángulo adyacente (α) al ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia es igual a los dos ángulos que se repiten (β) del triángulo. Es decir, $\alpha=2\beta$. Comprobación de este postulado con varios ejemplos y situaciones particulares.	
Datos curiosos sobre círculos y casos limite	Propiedades, aplicaciones y ejemplos de los postulados enunciados anteriormente con círculos cortados por líneas formando distintas cuerdas, arcos y tangentes y que coinciden en un punto exterior a ese círculo.	
Grados y radianes	Ejercicios de cambio de unidades de grados a radianes cuyo centro del círculo de ejemplo sea el origen de unos ejes de coordenadas	
Trigonometría	Uso de las propiedades de sen, cos, tan, sec, cosec y ctg para el cálculo de diversos ángulos a partir de las medidas de diversos triángulos rectángulos y comprobación mediante el teorema de Pitágoras	
Tangente de α	Cálculo de tangentes a partir de	Uso de la Tangente de α para el

	ángulos en grados y radianes, practica con calculadoras, y obtención de los ángulos tanto en grados como en radianes a partir de los resultados adimensionales dados por el libro.	cálculo de distancias y alturas desde el observante a un objeto edificio
Todo lo que quisiste saber de trigonometría pero que temías preguntar	A partir del diseño de un dibujo en el que se aplica el teorema de Pitágoras y en el que se dibujan las relaciones de los senos cosenos, tangentes, cotangentes y secantes a partir de una circunferencia donde su centro es el origen de coordenadas, se pide la explicación en varios dibujos de ciertas propiedades trigonométricas, resultados, etc., como, por ejemplo, $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$, etc.…	
Ley o teorema del seno y ley o teorema del coseno	Aplicación de las leyes de senos y cosenos para diversos ejemplos de triángulos expuestos en el libro y utilización de la calculadora y de principios vistos anteriormente como Principio de los dos ángulos y un lado o principio de dos lados y un ángulo. Cálculo de segmentos a partir de un diagrama y la aplicación de datos proporcionados, senos y cosenos.	
Áreas de calculo	Aplicación de diversas fórmulas de cálculo de áreas para triángulos a partir de datos dados, explicación algebraica de las fórmulas dadas usando el principio de los 3 lados, comprobación de ciertas formulas algebraicas dadas a partir del dibujo de un cuadrilátero irregular y de las diagonales que forma. Demostración de una formula algebraica a partir del diagrama de un cuadrilátero circunscrito en un círculo y dividido en dos triángulos a partir de una diagonal. Demostración de una formula algebraica a partir del diagrama de un cuadrilátero circunscrito en un círculo y dividido en dos triángulos a partir de una diagonal de cuyo cuadrilátero se extienden dos de los lados y la diagonal hasta que se cortan con una línea exterior a la circunferencia.	
Segundo principio de aumento	Aplicación del principio de magnificación de una elipse, una circunferencia y diversas figuras	

	segmentadas en cuadrados muy pequeños a partir de unos datos dados sobre unos ejes de coordenadas en un plano. Aplicación del principio de magnificación de una pirámide cuadrangular.	
Volumen de una pirámide	Cálculo del volumen de una serie de pirámides cuadrangulares acopladas que comparten el mismo vértice usando la formula d cálculo del volumen de una pirámide. Principios y leyes aplicados para el cálculo de dichos volúmenes. Cálculo del volumen de una pirámide de base irregular y explicación de porque la formula dada para el cálculo del volumen de una pirámide no tiene en cuenta si la base es regular o irregular. Comprobación y aplicación en cubos del segundo principio de magnificación de una figura N-dimensional de cuanto es el factor de multiplicación. (Es decir $r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n$)	
De conos y collares	Cálculo del área del lateral del cono a partir de los datos de radio base, de longitud de generatriz y de altura de la base al vértice. Hallar el área de tronco de cono a partir de los datos de circunferencias dados. Cálculo del volumen de un cono a partir de los datos dados. Cálculo del área de superficie de un cono seccionado por la mitad por una superficie paralela a la base.	
Mundoesfera	A partir de dos puntos P y Q en la superficie averiguar y razonar si hay más de una línea que pase por P y Q. Usando un globo terráqueo, dar un ejemplo de línea perpendicular.	

La parte de construcción de diversas figuras regulares (Segundo libro de apoyo) se basan en el aprendizaje de diversas técnicas de dibujo con escuadra y compás, pero siguen tratándose de ejercicios descontextualizados en los que no se da ninguna aplicación o uso en la vida real, por lo que por ahora no lo tendremos en cuenta.

8. ANALISIS GLOBAL DEL LIBRO DE REFERENCIA. CONTENIDO GEOMÉTRICO Y ALGEBRAICO

Como material de referencia usado para este análisis de proceso de estudio de geometría en secundaria, ha sido el libro "Geometry for the classroom" de C. Herbert Clemens y Michael A. Clemens . Recordemos que los saberes básicos de un alumno de 1º de ESO son los siguientes:

- Sentido numérico
  - Conteo
  - Cantidad
  - Razonamiento proporcional
- Sentido de la medida
  - Magnitud
  - Medición

TEMAS; Ángulos en el plano, Áreas de Rectángulos, Áreas de un triángulo sombreado, Añadir los ángulos de un triángulo

  - Estimación y relaciones

TEMAS; Principio de similitud, Proporcionalidad de segmentos cortados por paralelas (Teorema de Tales), Teorema de concurrencia para altitudes de un triangulo

- Sentido Espacial
  - Figuras Geométricas de dos dimensiones

TEMAS; Formas geométricas, Mas Formas, Polígonos en el plano, Ángulos en el plano, Áreas de Rectángulos, Áreas de un triángulo sombreado, Añadir los ángulos de un triángulo, Teorema de Pitágoras, Propiedades en función de los lados de un triángulo, líneas paralelas, Postulado de las paralelas (Principio de Z), Principio de similitud, Proporcionalidad de segmentos cortados por paralelas (Teorema de Tales), Teorema de concurrencia para altitudes de un triangulo

  - Localización y sistemas de representación

TEMAS; Posición en el plano,

  - Visualizaciones, razonamiento y modelización geométrica

TEMAS;

- Sentido Algebraico
  - Patrones
  - Modelo matemático
  - Variable
  - Igualdad y desigualdad

    - Realizaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana; Identificación e interpretación a través de representaciones verbales, tabulares y gráficas
    - Pensamiento computacional
- Sentido socioafectivo
    - Creencias, actitudes y emociones
    - Trabajo en equipo y toma de decisiones
    - Inclusión, respeto y diversidad

8.1 Objetos matemáticos involucrados

Cada tema del libro viene con una página de introducción teórica en el que se trabajan los conocimientos puros con un lenguaje ciertamente accesible, pero sin atractivo visual, seguramente carente de los medios propios a una editorial o destinado exclusivamente para uso del profesorado el cual tendrá que usarlo de apoyo en clase y del que tendrá que hacerlo mas atractivo para el alumnado. El resto de las actividades que acompaña al tema se puede dividir con la tipología de Ejercicios, Problemas y Cuestiones con la siguiente proporción;

- Ejercicios 45%
- Problemas 25%
- Cuestiones 30%

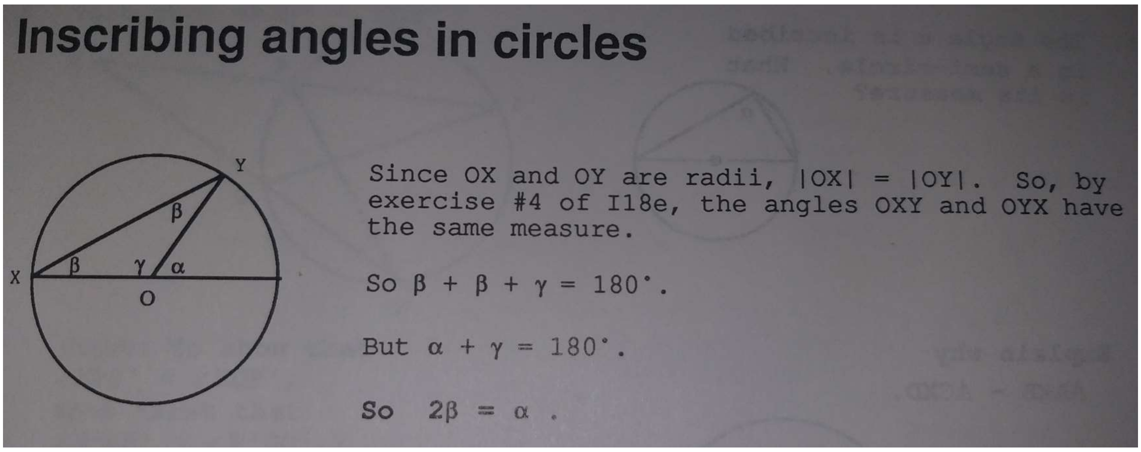
Para calcular esta proporción nos hemos limitado a evaluar la actividad y catalogarla según esta tipología, de la que hemos hecho una media de todos los problemas evaluados del libro. Aunque la distribución de actividades es homogénea, esta carente de contextualización. Apenas hay actividades que tengan aplicación en la vida real y no son nada intuitivos. A nivel de lenguaje es rigurosa y relativamente coloquial, con un amplísimo vocabulario, pero precisamente, esa falta de contexto y de imágenes visuales no permite al alumno el uso de intuición y no permite el uso de la lógica para poder comprobar si los resultados entran en el campo de la razón. El libro cubre bastantes de los saberes básicos, aunque presenta carencias con respecto a, por ejemplo, magnitudes, ya que solo presenta un cambio de unidades a una unidad imaginaria o patrón “widget”, elemento muy poco intuitivo. El libro tiene carencias propias de los tiempos actuales y se basa en el aprendizaje por asimilación de conocimientos y no explota la capacidad del alumno de buscar herramientas y conocimientos para la resolución de problemas vinculados a desempeños en la realidad. Como libro para el aprendizaje teórico y como apoyo es una excelente herramienta para la adquisición de conocimientos, pero no muy adecuada como base para cumplir las actuales exigencias educativas de un aprendizaje por Competencias.

9. ANALISIS DE UN PROBLEMA DEL LIBRO DE CLASE

Para analizar las posibles causas que provocan errores en los alumnos , usaremos el modelo de razonamiento de Van Hiele usando los 4 primeros niveles ya que el ejercicio es de un tema de 3º de ESO .

Teoría “INSCRIBIENDO ANGULOS EN CIRCULOS”.

Aunque no viene definido en el libro de clase, la dificultad de este tema seria apropiada para los alumnos de 3º de la ESO.



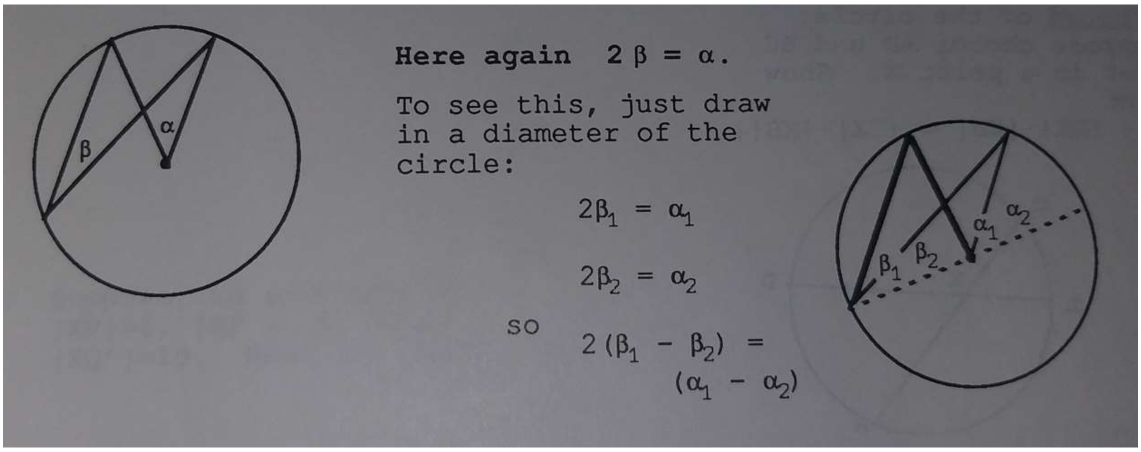
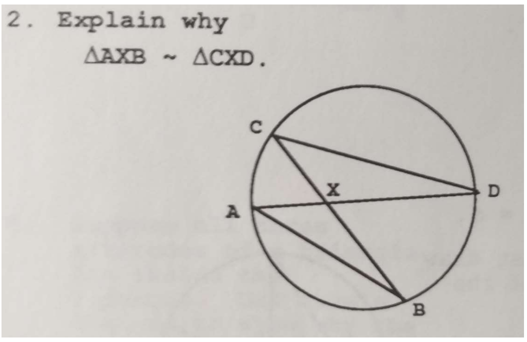


Ilustración 1 del libro “Geometry for the Classroom” de Clemens

Como podemos ver en el ejemplo de teoría, aparece descontextualizado, los vértices no vienen definidos por lo que implica que el alumno se siente desangelado al ver el ejercicio pues piensa que al no tener nombres los vértices son porque es muy sencillo y si no lo entiende es por su falta de conocimientos. Los ángulos no están bien indicados, lo cual puede llevar a confusión solo se entregan conclusiones sin que el alumno pueda comprobar que efectivamente $2\beta_1 = \alpha_1$ lo que aumenta el grado de dificultad para tratarse de un concepto nuevo



Como podemos ver en el problema practico, tenemos que dar una respuesta algebraica a este ejercicio. Se trata de un problema sin contexto con un alto grado de dificultad en el que habrá que ir aplicando los conocimientos de formación de triángulos anteriormente vistos donde no se ve la incorporación del centro de la circunferencia por lo que no sabemos si el segmento $\overline{AB}$ pasa por el centro y, por lo tanto, el alumno puede llegar a dudar si debe aplicar los ejemplos de teoría antes citados con respecto al ángulo central. Aquí los niveles de Clasificación y Formulación y por lo tanto la fase de Deducciones Formales se pueden ver excesivamente difíciles. Recomendaría ejemplificar con algún paso intermedio el proceso para que fuese mas visual e incluso con ciertas medidas de ángulos para que el propio alumno pueda verificar de manera empírica determinados ángulos.

10. CONCLUSIONES

Una vez recopilados todos los datos obtenidos con respecto a las hipótesis principales en las que planteábamos inquietudes sobre las carencias de conocimientos geométricos en el alumnado y que se arrastran hasta la universidad, conviene desglosar las conclusiones y pensamientos recogidos.

- La importancia de estar al día con respecto a los informes de evaluación educativa, congresos e innovación educativos, medios de información y de divulgación como herramientas de mejora y análisis de la situación educativa y la importancia de compartir y comunicar entre los profesionales de la educación las deficiencias y anomalías que se detectan regularmente para poder realizar un adecuado diagnóstico de la problemática y poder remediarlo lo antes posible.
- La validez del modelo Teórico de las fases de aprendizaje de Van Hiele como herramienta de investigación educativa que nos permite evaluar directamente a los estudiantes con el fin de que a partir de una serie de pruebas basadas en una hipótesis podamos

diagnosticar un problema educativo y como este modelo teórico se acomoda perfectamente a la situación actual de 2024 en el que se esta realizando una transición educativa de importantes consecuencias tanto para el profesorado como para el alumnado.

- La necesidad de hacer una reflexión sobre la educación actual planteada por el ministerio de Educación de España y mis experiencias como alumno. La educación actual trata de adaptarse a la nueva era de la información e internet donde los conocimientos y herramientas para el desarrollo profesional de los alumnos son tan bastos que exigen una profesionalización desde edades muy tempranas y la necesidad de formación continua de los individuos a lo largo de su vida. Por ello y tras los resultados de informes evaluadores como el informe PISA, las directivas europeas plantearon una reforma educativa que se ha de orientar mas hacia las habilidades y competencias de los alumnos más que hacia los conocimientos. La idea es que el alumno adquiera las capacidades y herramientas personales que le permitan tanto resolver problemas a los que se enfrente como las habilidades y disciplinas para si no tiene conocimientos, sea autosuficiente a la hora de buscar información y formarse de manera autónoma. Estos cambios legislativos no tienen ni deberán afectar a una serie de conocimientos, destrezas y actitudes básicos que son el contenido propio de un área, y que son vitales para el aprendizaje de cualquier conocimiento futuro y mas complejo. Esto se mantiene en la actual ley LOMLOE y se denominan ***Saberes Básicos***, en la anterior ley LOMCE se les denominaban ***Contenidos,*** y son los saberes imprescindibles que marca el currículo. El problema, a parte del cambio de definición es que un mismo *saber básico* se puede usar en varias *competencias* por lo que es necesario conectarlas y complica la labor del docente pues ahí entra la interpretación del profesor a la hora de relacionar un saber básico con la Competencia Especifica burocratizando en exceso la labor de docencia y alargando la jornada laboral para poder documentar simplemente una situación de aprendizaje, complicándolo todo en exceso. Si dentro de los saberes básicos se incluye un tema o conocimiento que no aparece en la legislación y que el profesor ve que debe impartir porque es necesaria, el profesor deberá buscar bajo su propio criterio las conexiones con las competencias especificas que el crea mas adecuadas, lo que podría llevar a discrepancias con la inspección educativa.
- Al estudiar los *saberes básicos* estipulados en la ley y relacionados con las competencias especificas podemos ver una relación implícita con los niveles de Van Hiele de RECONOCIMIENTO, ANALISIS Y CLASIFICACION, FORMULACIÓN. El planteamiento tanto de las clases como de los ejercicios, problemas o trabajos por parte del profesor serán relevantes a la hora de cumplir el nivel de DEDUCCIONES FORMALES en los alumnos y de mejorar su educación y por tanto sus competencias.

- Como he indicado en este trabajo, las Investigaciones del didacta S. Vinner , las ayudas visuales y los ejemplos gráficos pueden no ayudar a la hora de que el alumno obtenga las capacidades de abstracción necesaria a la hora de comprender determinados conceptos. Es vital que el alumno aprenda, comprenda e interiorice a través del uso habitual del lenguaje matemático de la misma manera que se aprende un idioma y las nuevas tecnologías que en teoría son un apoyo, mas que ayudar solo disimulan un problema pues al final el alumno no sabe comunicar ideas o conceptos y solo se quedan con la imagen visual que es mas efectista y no con definiciones ni con razonamientos.
- Otro detalle a tener en cuenta son los altos rendimientos académicos donde la situación tanto social como cultural es favorable. El hecho de que, como pasa en Asia, la buena valoración del funcionariado docente, la cultura del respeto, la conciliación familiar y el seguimiento continuo de los resultados académicos del alumno, los esfuerzos familiares en la formación de los hijos y el apoyo de los estados resultan determinantes.
- Los libros antiguos son una excelente herramienta en el uso de un lenguaje matemático y para el razonamiento del alumno y la formalización de este lenguaje matemático pero sus ejercicios descontextualizados y abstractos en exceso pueden abrumar al alumnado y desmotivarlo aun en tareas sencillas. Para el caso del libro de ejemplo propongo la elaboración de unos ejercicios con contextos de la realidad basados en los conceptos que se explican en los susodichos temas, lo que los hace mas atractivos y mas accesibles a los alumnos.
- Otra propuesta para las clases de geometría es explicar las partes del lenguaje matemático aplicado como si se tratase del aprendizaje de cualquier otro idioma, contextualizando su uso y en el que los propios alumnos usen e incorporen a su léxico definiciones matemáticas.

11. BIBLIOGRAFIA

Puga Peña, Luis Alberto, Rodríguez Orozco, Jhony Mauro, & Toledo Delgado, Alba Marlene
(2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. Sophia, colección de Filosofía de la Educación, 20(1), pp. 195-218.

Infobae "los estudiantes asiáticos son los que mas horas dedican al estudio y logran mejores resultados"
https://www.infobae.com/educacion/2018/09/04/los-estudiantes-asiaticos-son-los-que-mas-horas-dedican-al-estudio-y-logran-mejores-resultados/

Competencias Especificas Matemáticas. Educagob
https://educagob.educacionfpydeportes.gob.es/curriculo/curriculo-lomloe/menu-curriculos-basicos/ed-secundaria-obligatoria/materias/matematicas/competencias-especificas.html

Informe Talis 2018
file:///C:/Users/Usuario/Downloads/TALIS_2018._Estudio_internacional_de_la_ensenanza.pdf

Informe PISA en España un análisis al detalle
https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/30018/rev172COL2.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Desigualdad en el rendimiento en matemáticas entre centros educativos públicos y privados
en España
https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/30240/Desigualdad%20en%20el%20rendimiento%20en%20matematicas%20entre%20centros%20educativos%20publicos%20y%20privados%20en%20Espana.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Influencia de los entornos tecnológicos móviles en los procesos de aprendizaje de las matemáticas
https://revistas.unicordoba.edu.co/index.php/assensus/article/view/1608/1967

Uso de Definiciones e Imágenes de Conceptos Geométricos por los Estudiantes de Magisterio. Por Ángel Gutiérrez y Adela Jaime. Universidad de Valencia
https://www.researchgate.net/profile/Angel-Gutierrez-20/publication/242084285_Uso_de_Definiciones_e_Imagenes_de_Conceptos_Geometricos_por_los_Estudiantes_de_Magisterio/links/00b7d53403c6cd3149000000/Uso-de-

Definiciones-e-Imagenes-de-Conceptos-Geometricos-por-los-Estudiantes-de-Magisterio.pdf

Informe PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes
file:///C:/Users/Usuario/Downloads/PISA_2022._Programa_para_la_Evaluacion_Internacion.pdf

Didáctica de la matemática
https://es.wikipedia.org/wiki/Did%C3%A1ctica_de_la_matem%C3%A1tica