Universidad de Valladolid

Dpto. de Matemática Aplicada

Estudio para hacer una programación dinámica en orden a impartir Matemáticas en Bachillerato haciendo un estudio de diversas metodologías dependiendo de los conceptos a impartir.

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: César Ramos Matilla
Tutor: Cesáreo Jesús González Fernández

Valladolid, junio, 2024

Resumen

El trabajo consistirá en el diseño de una programación didáctica para la asignatura de Matemáticas en primero de Bachillerato de Ciencias Sociales que incorporará varias situaciones de aprendizaje para la parte de sentido estocástico elaboradas bajo los marcos teóricos de la Didáctica Matemática, los marcos metodológicos vinculados al método de aprendizaje basado en problemas y las propuestas pedagógicas para la enseñanza en Bachillerato, dirigidas a todo tipo de alumnado. Para cada tema se hará un tratamiento profundo de alguno de los métodos de exposición posible y su idoneidad para los conceptos que se expliquen.

Palabras clave

Matemáticas, Bachillerato, Situación de aprendizaje, Competencias, Programación dinámica, Evaluaciones, Actividades, Aprendizaje basado en Problemas.

Abstract

The work will consist of the design of a didactic programming for the Mathematics in First of "Bachillerato" of Social Sciences that will incorporate several learning situations for the stochastic sense part developed under the theoretical frameworks of Mathematical Didactics, the methodological frameworks linked to the problem-based learning method and the pedagogical proposals for teaching in Bachelor, addressed to all types of students. For each topic, a thorough examination will be made of some of the possible exposure methods and their suitability for the concepts to be explained.

Key words

Mathematics, High School, Learning Situation, Competences, Dynamic Programming, Evaluations, Activities, Problem-based Learning.

ÍNDICE

Capítulo 1: Introducción

1.1. Contextualización

El objetivo de este Trabajo Fin de Máster es la realización de una programación didáctica, mostrando especial énfasis en el apartado de la metodología, aplicada a las situaciones de aprendizaje que se van a construir mediante los conocimientos obtenidos a lo largo del Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Dicha programación debe ser dinámica, es decir, será flexible y se tratará de adaptar adecuadamente a las necesidades y cambios del grupo de estudiantes. En el contexto de secundaria o bachillerato, esto implica que el plan de estudios no está fijo e inmutable, sino que se ajusta según el progreso y la participación de los estudiantes. Otro aspecto importante es que partirá de un contexto concreto, vinculado con el periodo de prácticas de dicho máster, para implementar una serie de situaciones de aprendizaje utilizando diferentes metodologías y actividades orientadas a estos alumnos específicamente.

El propósito de este trabajo no se limitará a la simple transmisión del temario establecidos por la ley, sino que se busca lograr un aprendizaje significativo mediante la estimulación del interés y la motivación de los estudiantes.

Como se ha dicho antes, para la realización de este TFM se van a utilizar los conocimientos adquiridos a lo largo de este último curso, cada asignatura ha contribuido a algo diferente:

- *Sociedad, familia y educación:* En esta asignatura se han tratado los aspectos más teóricos de la educación y su evolución a lo largo del tiempo, ayudándonos a entender el contexto actual y la raíz de sus fortalezas y debilidades.

- *Procesos y contextos educativos:* Aquí se explicaron los conceptos básicos de la estructura de una institución escolar y toda la documentación correspondiente a esta, además de otros conceptos como el de situación de aprendizaje o competencias.

- *Aprendizaje y desarrollo de la personalidad:* Durante estas sesiones se trabajó la parte más psicológica de la educación, es decir, la naturaleza, tanto del alumnado como del profesorado y la intención de estos tras sus comportamientos.

- *Diseño curricular en matemáticas:* Durante estas lecciones se nos ha mostrado como manejar la ley actual a través del BOCYL y la estructura de las situaciones de aprendizaje.

- *Didáctica de las matemáticas:* Se nos han mostrado distintas maneras de enseñar conocimientos de la materia, con la idea de facilitar el aprendizaje significativo y duradero en el tiempo de los alumnos.

- *Complementos de matemáticas:* Aquí se han repasado los contenidos básicos de las principales ramas de las matemáticas: Álgebra, estadística, geometría y cálculo.

- *Metodología y evaluación en matemáticas:* Tal y como dice el nombre, se nos han mostrado las metodologías más utilizadas en la enseñanza de la asignatura, de forma que se nos ha abierto la mente ya que no todo se puede resumir en realizar problemas mecánicos y dar todas las clases mediante la técnica de clase magistral.

- *Prácticum:* Como se ha dicho previamente, la experiencia vivida durante la estancia en el instituto va a servir como base para la realización del trabajo, tratando de que lo que se va a escribir a continuación sea lo más verídico posible.

1.1.1. Centro

Esta programación didáctica se impartirá para primero de Bachillerato de Ciencias Sociales del curso 2023/2024. Se adaptará, obviamente, a lo que mande la ley educativa vigente en la Comunidad de Castilla y León, la cual se expondrá en apartados posteriores. Los cambios que vayan surgiendo a lo largo del curso en los distintos grupos de estudiantes se irán anotando en las reuniones del departamento y si son importantes se anotarán en la memoria al final de curso.

La institución educativa para la cual se realizará la programación será el Instituto de Educación Secundaria Emilio Ferrari. El instituto se funda en 1969, para atender a la demanda de centros educativos en esta zona de la ciudad, en relación con el crecimiento demográfico. Es un centro público, lo cual significa que es una institución financiada y gestionada por el gobierno (Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes), el cual ofrece una educación gratuita a los estudiantes. Está sujeto a las regulaciones gubernamentales y cuenta con personal docente que pertenece al sistema público.

El centro se encuentra en Valladolid, aunque recibe con transporte escolar alumnado de localidades próximas (Zaratán, Villanubla y La Overuela). Estos municipios están lo suficientemente próximos a la capital de la provincia como para que no se vea afectada la calidad de los servicios ofrecidos por las compañías de telecomunicaciones y, aunque están en zona rural, su cercanía a la ciudad permite que el alumnado disfrute de las ventajas de acceso a las nuevas tecnológicas que ofrece la capital.

Desde que existe el distrito único de escolarización, el perfil social, económico y educativo del alumnado que solicita plaza en nuestro centro se ha ido homogeneizando. En su mayoría tienen un nivel socioeconómico medio-alto y están respaldados por familias con buen nivel cultural y que están muy implicadas en los estudios de sus hijos.

Suele haber unos veinte grupos de alumnado de la ESO (el número de alumnos que constituye cada grupo casi siempre ronda la ratio máxima permitida por la ley). La mitad del alumnado cursa el currículo bilingüe British Council y dentro de los que cursan el currículo en español, un pequeño porcentaje (8-10%) elige el alemán o el francés como primer idioma y el inglés como segundo idioma. También hay entre seis y siete grupos de Bachillerato con una ratio algo menor que en la ESO. El curso 2022-2023 son 732 alumnos. Solemos tener unos 15-20 alumnos de PMAR y Diversificación en el conjunto de ambos programas y en torno a diez alumnos en 1º ESO que necesitan apoyo fuera del aula.

Por otra parte, ocho grupos de Ciclos Formativos de Grado Superior presenciales de la familia de Servicios Socioculturales a la Comunidad y un máximo de 300 alumnos distribuidos en dos grupos a distancia de Educación Infantil, también de grado superior. Nuestro centro carece de FP Básica y de ciclos de grado medio. Por tanto, el alumnado de nuestros ciclos está constituido por adultos jóvenes interesados en trabajar con nuevas tecnologías, sobre todo en la medida en que faciliten su acceso al mundo laboral.

La mayoría de las familias (88%) cuentan con equipos informáticos domésticos y conexión a internet (98%) que permiten al alumnado realizar las tareas relacionadas con las TIC propuestas y seguir las clases de forma telemática en caso de necesidad.

Para trabajar la inclusividad en ESO, tenemos dos programas. Tradicionalmente, el alumnado con necesidades educativas específicas que presenta divergencias con el perfil descrito anteriormente es apoyado por el profesorado de Educación Compensatoria. Por otra parte, el alumnado que presenta divergencias por ser de altas capacidades ha empezado a trabajar dentro de un nuevo proyecto de atención a la diversidad (proyecto DiBerso) en el que se presta especial atención al trabajo de la competencia digital.

El claustro está integrado por unos noventa profesores, donde cada año al menos un treinta por ciento son nuevos en el centro. Esto ha hecho necesario poner en marcha un plan de acogida para el nuevo profesorado que tenga en cuenta, entre otras, las informaciones y formaciones relativas a la competencia digital docente.

En cuanto a las estrategias de trabajo se encuentra dentro de un proceso de profunda renovación a todos los niveles. Unos procesos vienen determinados por actuaciones externas originadas desde la Consejería de Educación (por ejemplo, la nueva matriculación online desde la plataforma Stilus), otros por necesidades internas de carácter pedagógico, didáctico y metodológico y un último tipo de procesos, por necesidades organizativas. Todos ellos los describiremos a lo largo del Plan.

1.1.2. Curso

Asignaturas troncales Generales	**Asignaturas troncales Opcionales**	**Asignaturas específicas** (Oferta regulada por las adm. Educativas)	**Asignaturas de libre configuración autonómica** (Competencia exclusiva de las adm. Educativas)
Filosofía **Lengua Castellana y Literatura I** **Primera Lengua Extranjera I** **Latín I (Itinerario humanidades)** **Matemáticas Aplicadas a las CCSS I (Itinerario Ciencias Sociales)**	Elegir dos entre: **Economía** **Griego I** **Historia del Mundo Contemporáneo** **Literatura Universal**	**Ed. Física** Elegir un mínimo de dos y un máximo de tres entre: **Análisis Musical I** **Anatomía Aplicada** **Cultura Científica** **Dibujo Artístico I** **Dibujo Técnico I** **Lengua y Práctica Musical** **Religión** **Segunda Lenga Extranjera I** **Tecnología Industrial I** **TIC I** **Volumen** **Una materia del bloque de asignaturas troncales no elegida**	**Lengua Cooficial y Literatura** **Materias específicas no cursadas** **Materias de ampliación de las materias troncales o específicas** **Otras materias a determinar**

Como su nombre indica, el bachillerato en ciencias sociales es una modalidad dirigida a estudiantes que se sientan atraídos por temáticas **sociales, políticas, económicas, históricas o humanísticas**.

Los perfiles de los estudiantes suelen ser personas observadoras que sienten curiosidad por la sociedad que les rodea, comunicativos y con habilidades sociales, con alta capacidad de comprensión y de abstracción e imaginativos. También acostumbran a ser personas con buena memoria y capacidad de persuasión, expresión y síntesis.

Tras el bachillerato, tenemos dos caminos para elegir: **ir a la universidad o cursar un FP de Grado Superior.**

Si elegimos la universidad, el bachillerato en ciencias sociales nos facilitará la entrada a **carreras universitarias de humanidades y ciencias sociales**. Los grados universitarios relacionados con esta rama y que tienen actualmente más salidas profesionales son Administración y Dirección de Empresas, Derecho, Economía, Turismo, Educación Infantil o Primaria, Publicidad y RR.PP, Periodismo y Traducción e Interpretación.

Por otro lado, si elegimos tirar por la **formación profesional**, tenemos a nuestro alcance una gran variedad de grados superiores de diferentes familias profesionales vinculadas a las ciencias sociales que nos permitirán un acceso más directo al mundo laboral.

Las principales familias profesionales son:

- **Administración y Gestión**

Esta familia profesional se caracteriza por su gran **carácter transversal**, ya que suele estar presente en todos los sectores productivos.

- **Comercio y Marketing**

Abarca todas las actividades y compañías vinculadas con la distribución comercial, así como servicios en el ámbito del marketing y la publicidad. Los ciclos comprendidos quedan englobados en dos grandes ramas: **la comercialización y la logística.**

- **Hostelería y Turismo**

Los grados superiores enmarcados en esta familia profesional se dividen en tres grupos básicos: el **alojamiento, la restauración y el turismo**. Además, incluye también las diferentes actividades recreativas, las actividades de información y animación turística y la atención al público en medios de transporte.

- **Servicios Socioculturales y a la Comunidad**

Los ciclos de Servicios Socioculturales y a la Comunidad se engloban en el campo de la **intervención social**, tanto la socioeducativa y sociocultural como la socioasistencial y socioeconómica.

1.1.3. Objetivos generales de bachillerato

Tomando el BOCYL y el BOE, se sabe que los objetivos del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León son:

Los establecidos en el artículo 33 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo y en el artículo 7 del Real Decreto 243/2022, de 5 de abril:

a) Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española, así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.

b) Consolidar una madurez personal, afectivo-sexual y social que les permita actuar de forma respetuosa, responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever, detectar y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales, así como las posibles situaciones de violencia.

c) Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades de mujeres y hombres, analizar y valorar críticamente las desigualdades existentes, así como el reconocimiento y enseñanza del papel de las mujeres en la historia e impulsar la igualdad real y la no discriminación por razón de nacimiento, sexo, origen racial o étnico, discapacidad, edad, enfermedad, religión o creencias, orientación sexual o identidad de género o cualquier otra condición o circunstancia personal o social.

d) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.

e) Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.

f) Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.

g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.

h) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.

i) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.

j) Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.

k) Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.

l) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.

m) Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Afianzar los hábitos de actividades físico-deportivas para favorecer el bienestar físico y mental, así como medio de desarrollo personal y social.

n) Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la movilidad segura y saludable.

o) Fomentar una actitud responsable y comprometida en la lucha contra el cambio climático y en la defensa del desarrollo sostenible.

Y además los siguientes, pertenecientes, específicamente al Boletín Oficial de la Comunidad de Castilla y León:

a) Investigar y valorar los aspectos de la cultura, tradiciones y valores de la sociedad de Castilla y León.

b) Reconocer el patrimonio natural de la Comunidad de Castilla y León como fuente de riqueza y oportunidad de desarrollo para el medio rural, protegiéndolo y mejorándolo, y apreciando su valor y diversidad.

c) Reconocer y valorar el desarrollo de la cultura científica en la Comunidad de Castilla y León indagando sobre los avances en matemáticas, ciencia, ingeniería y tecnología y su valor en la transformación, mejora y evolución de su sociedad, de manera que fomente la investigación, eficiencia, responsabilidad, cuidado y respeto por el entorno.

1.1.4. Objetivos específicos de las matemáticas

Contribución de la materia al logro de los objetivos de etapa

Esta materia permite desarrollar en los estudiantes las capacidades necesarias para lograr todos los objetivos de la etapa de bachillerato, aportando en mayor medida a alguno de ellos, en los siguientes términos:

Resolver problemas y ejercicios matemáticos implica la necesidad de discutir y aportar desde diversas perspectivas, lo cual enseña a los estudiantes a valorar y respetar las opiniones de los demás, así como a expresar las suyas, fomentando actitudes de tolerancia, colaboración y apoyo mutuo.

En esta fase del aprendizaje, las matemáticas demandan dedicación, trabajo constante y determinación para encontrar soluciones, lo que ayuda a fortalecer y desarrollar los hábitos de estudio y disciplina del estudiante.

Durante el bachillerato, es fundamental que los estudiantes se comuniquen con exactitud utilizando el vocabulario científico apropiado en el contexto de las matemáticas. Esto requiere habilidades sólidas en expresión oral y escrita, así como una comprensión detallada de lo que leen.

En la era de la información, es crucial elegir cuidadosamente las fuentes para asegurar su confiabilidad. La asignatura de Matemáticas proporciona a los estudiantes un sentido crítico a través de la necesidad de conectar ideas y comparar resultados, así como de utilizar herramientas de análisis de datos. Esto les capacita para seleccionar y emplear las herramientas digitales más adecuadas según la situación, identificando interpretaciones erróneas o manipuladas de los datos y justificando la interpretación correcta.

Explorar en el ámbito de las matemáticas implica cultivar la creatividad y la capacidad de adaptarse en el razonamiento. Además, fortalece la perseverancia, la habilidad para trabajar duro y la capacidad de abstracción a través de la resolución de problemas, enseñando tanto a trabajar de forma independiente como en equipo. Estas habilidades son fundamentales para el crecimiento personal y profesional de un individuo en la sociedad.

En conclusión, el razonamiento matemático fomenta una comprensión más precisa de la realidad entre los estudiantes de bachillerato, permitiéndoles abordar desafíos que pueden tener un impacto positivo en su bienestar físico y mental, así como en su interacción con el entorno natural.

Contribución de la materia al desarrollo de las competencias clave

Competencia en comunicación lingüística (CCL): El lenguaje es el medio para comprender e interpretar las situaciones que implican el uso de las matemáticas, argumentar y transmitir resultados y sus implicaciones, interactuar en los trabajos grupales y definir conceptos propios de la materia.

Competencia plurilingüe (CP): Las matemáticas son un lenguaje universal, que requiere conseguir las habilidades de traducción con el lenguaje ordinario que debe ser transmitido con precisión, facilitando la comunicación global.

Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM): Es a la que más aporta ya que propicia herramientas de análisis, abstracción y síntesis. Permitirá a los estudiantes construir modelos que permitan dar soluciones a los problemas tanto científicos como tecnológicos.

Competencia digital (CD): Relacionado con el uso de herramientas digitales en el tratamiento de la información y la resolución de problemas, así como el desarrollo del pensamiento computacional.

Competencia personal, social y aprender a aprender (CPSAA): Especialmente a la hora de abordar los problemas. El desarrollo de la fortaleza al aceptar el propio error y la empatía al valorar el avance de los compañeros son propios de los procesos del pensamiento matemático.

Competencia ciudadana (CC): Debido a que las matemáticas están conectadas con casi todas la áreas, es una materia clave a la hora de adoptar un comportamiento dialogante que permita avanzar a través del respeto.

Competencia emprendedora (CE): La necesidad de creatividad y flexibilidad en la toma de decisiones a la hora de utilizar los conocimientos específicos para resolver de forma eficaz los problemas contribuye a esta competencia.

Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC): Ver y entender la relación de esta materia con el proceso de creación de expresiones culturales y con los elementos tecnológicos que han ayudado a desarrollarlas, facilita el análisis de estas en relación con la transformación que provocan en el mundo que nos rodea.

1.2. Marco legal

Un marco legal es necesario a la hora de elaborar una programación docente, ya que es donde se establecerán las directrices, normativas y principios que se deben seguir al diseñar el plan de enseñanzas de una asignatura. Este marco puede incluir leyes educativas nacionales o regionales, currículos oficiales o incluso normativas específicas del centro educativo entre otros aspectos jurídicos.

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (BOE 82, 2022).

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE 340, 2020).

Decreto 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

Orden EDU/1152/2010, de 3 de agosto, por la que se regula la respuesta educativa al alumnado con necesidad específica de apoyo educativo modificada por ORDEN EDU/371/2018, de 2 de abril.

1.3. LOMLOE

La Ley Orgánica 3/2020, conocida como LOMLOE o Ley Celaá, representa la más reciente regulación en el ámbito educativo. Su implementación ha generado importantes transformaciones en todos los niveles del sistema educativo nacional, generando tanto seguidores como opositores. Esta normativa suprime la LOMCE del 2013 y, como su título sugiere, revisa, ajusta y amplía la LOE del 2006, la cual sigue en vigor en la actualidad.

La actualización de las leyes educativas responde a una necesidad actual y constante en el contexto educativo europeo. Su objetivo es introducir nuevas dinámicas en el sistema educativo para adecuarse a las demandas y requerimientos del estudiantado en la actualidad.

Esta ley plantea la necesidad de conceder importancia a determinados enfoques clave para adaptar el sistema educativo al contexto actual, entre los que se encuentra, por ejemplo, el plantear un enfoque transversal, tener en consideración el cambio digital o propinar un aprendizaje competencial, autónomo, significativo y reflexivo. Estos enfoques se encuentran orientados a conseguir los siguientes objetivos generales:

1. Modernizar el sistema educativo.
2. Recuperar la equidad y la capacidad inclusiva del sistema personalizando el tratamiento educativo.
3. Mejorar los resultados, reduciendo el abandono y el fracaso escolar.
4. Estabilizar el sistema e incorporarlo como pilar básico de las políticas de conocimiento.

De esta manera, la Ley se organiza en un único artículo destinado a modificar la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE). Este artículo consta de noventa y nueve apartados, en los cuales se realizan cambios parciales o se reformulan setenta y siete artículos de la LOE. Además, se alteran o reformulan diecinueve disposiciones adicionales y tres disposiciones finales, una de las cuales modifica varios artículos de la Ley Orgánica 8/1985, de 3 de julio, que regula el Derecho a la Educación. Asimismo, la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, destinada a la mejora de la calidad educativa, queda derogada.

Capítulo 2: Programación

La Consejería de Educación define programación didáctica como el instrumento específico de planificación, desarrollo y evaluación de cada materia en cada uno de los niveles de la etapa, y en ella se concretan los distintos elementos del currículo para el desarrollo de la actividad docente durante cada curso escolar. Forman parte de la propuesta curricular de cada etapa. Como parte de la propuesta curricular, será evaluada por el profesorado.

La programación didáctica de cada materia y nivel educativo será elaborada por el docente o conjunto de docentes que tengan encomendada su enseñanza. Es decir, que, si en el centro hubiera varios profesores que impartieran la misma materia en un mismo nivel, y dado que la programación didáctica será única para todo el nivel, su elaboración correrá a cargo de todos los profesores que la imparten.

Las programaciones didácticas se elaborarán al inicio de cada curso escolar. Se tendrán en cuenta las directrices generales, orientaciones y criterios establecidos en la propuesta curricular. El jefe de departamento asegurará la coordinación entre todos los profesores que imparten la materia en los diferentes cursos de la etapa. En los centros públicos, se aprobarán por el claustro de profesores, y en los centros privados según su normativa de aplicación y distribución interna de competencias.

2.1. Justificación

Esta programación didáctica del curso de primero de Bachillerato, de la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, tiene como finalidad que los estudiantes continúen desarrollando el razonamiento lógico y crítico que empezó en la Educación Secundaria Obligatoria y promover el interés por la materia y la investigación científica. También se procurará aportar herramientas para resolver los problemas que puedan surgir en la vida cotidiana de manera activa y autónoma. Por otro lado, se impulsará la recopilación de información, su tratamiento, la comprobación de resultados y por último se tratará de extraer conclusiones a partir de realizar distintas predicciones y contrastes.

La idea, a lo largo del curso académico, será utilizar una metodología docente basada en la aplicación práctica de conocimientos con el objetivo de enseñar los contenidos desde distintas perspectivas, buscando la motivación del alumnado y su participación a lo largo del proceso de aprendizaje. Posteriormente se explicarán las formas de trabajo que se realizarán, aunque, debido al tipo de conocimientos que se van a impartir, se puede ir adelantado que la programación se enfocará especialmente hacia el trabajo colaborativo y el aprendizaje basado en problemas.

Cabe destacar que en esta PDA hará especial hincapié en la evaluación a través del grado de adquisición de la competencias básicas, las cuales, pese a que la legislación hace mucho énfasis en utilizarlas, la realidad muestra como gran cantidad de docentes las dejan de lado debido a la falta de claridad a la hora de evaluarlas y trabajarlas.

Por último, hay que mencionar que las calificaciones que se obtengan en Bachillerato son muy importantes si se desea continúan con estudios superiores, por lo que los alumnos tendrán bastante más presión que durante la ESO. Por ello, la flexibilidad a la hora de realizar las situaciones de aprendizaje e impartir los distintos contenidos no será muy grande, aunque menor que la que tendrán en el curso siguiente, cuyos contenidos estarán directamente relacionados con los que tendrán en la EBAU.

2.2. Aspectos importantes

La planificación de una programación didáctica en el área de matemáticas requiere una cuidadosa consideración de diversos aspectos fundamentales que garantizan un proceso de enseñanza-aprendizaje efectivo y significativo. Entre estos aspectos se encuentran los contenidos, que abarcan tanto conceptos numéricos como geométricos, algebraicos, estadísticos y probabilísticos, fundamentales para el desarrollo de competencias matemáticas.

Los criterios de evaluación, por otro lado, establecen los estándares para valorar el dominio de dichos contenidos y el desarrollo de habilidades matemáticas, permitiendo una retroalimentación precisa sobre el progreso del alumnado.

Las metodologías pedagógicas, por su parte, son el vehículo a través del cual se facilita la comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos, promoviendo la participación activa y el trabajo colaborativo entre los estudiantes. Además, las situaciones de aprendizaje, que incluyen problemas, ejercicios y actividades prácticas, son clave para contextualizar los contenidos y fomentar la transferencia de conocimientos a situaciones reales. En conjunto, estos elementos conforman una programación didáctica integral que busca potenciar el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes, preparándolos para enfrentar con éxito los retos del mundo actual.

2.2.1. Contenidos

Se pueden clasificar los distintos contenidos en cuatro bloques (También aparece el **socioafectivo**, aunque este lo podemos aplicar dentro de todos los demás):

BLOQUE 1: SENTIDO NUMÉRICO

- **Conteo:** Estrategias y técnicas de recuento sistemático.
- **Cantidad:** Trabajar con los números reales.
- **Sentido de las operaciones:** Potencias, raíces y logaritmos.
- **Educación financiera:** Resolución de problemas relacionados con las finanzas.

BLOQUE 2: SENTIDO DE LA MEDIDA

- **Medición:** Probabilidad como medida de incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios.
- **Cambio:** Límites, continuidad de funciones y derivadas elementales.

BLOQUE 3: SENTIDO ALGEBRAICO

- **Patrones:** Generalización de patrones en situaciones sencillas.
- **Modelo matemático:** Relaciones cuantitativas esenciales en situaciones sencillas. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas.
- **Igualdad y desigualdad:** Resolución de ecuaciones, inecuaciones, sistemas de ecuaciones no lineales y sistemas de inecuaciones lineales en diferentes contextos. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas mediante el método de Gauss.
- **Relaciones y funciones:** Representación gráfica y transformaciones lineales sencillas. Propiedades de las distintas clases de funciones. Operaciones con funciones. Uso de la interpolación y extrapolación para aproximar el valor de una función.
- **Pensamiento computacional:** Formulación, resolución y análisis de problemas. Comparación de algoritmos alternativos para el mismo problema.

BLOQUE 4: SENTIDO ESTOCÁSTICO

- **Organización y análisis de datos:** Variable estadística unidimensional. Medidas de localización y dispersión en variables cuantitativas. Organización de los datos procedentes de variables bidimensionales. Estudio de la relación entre dos variables mediante la regresión lineal y cuadrática. Coeficientes de correlación lineal y de determinación. Calculadora, hoja de cálculo o software específico en el análisis de datos.
- **Incertidumbre:** Estimación de la probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa. Cálculo de probabilidades en experimentos simples.
- **Distribuciones de probabilidad:** Variables aleatorias discretas y continuas. Parámetros de la distribución. Modelización de fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal. Estimación de probabilidades mediante la aproximación de la binomial por la normal.
- **Inferencia:** Diseño de estudios estadísticos relacionados con las CCSS utilizando herramientas digitales. Técnicas de muestreo sencillas. Análisis de muestras unidimensionales y bidimensionales con herramientas tecnológicas con el fin de emitir juicios y tomar decisiones: estimación puntual.

2.2.2. Relación con los temas transversales

En el **Bloque 1**: Sentido Numérico, se abordan estrategias y técnicas de conteo sistemático, manejo de números reales, y operaciones como potencias, raíces y logaritmos, fundamentales para el desarrollo del pensamiento lógico y crítico. Además, la educación financiera incluida en este bloque promueve la alfabetización financiera, esencial para la toma de decisiones económicas responsables y la comprensión de conceptos financieros básicos que son vitales en la vida diaria.

En el **Bloque 2**: Sentido de la Medida se centra en la probabilidad como medida de incertidumbre y el estudio de límites, continuidad de funciones y derivadas elementales. Estos temas desarrollan la capacidad de manejar la incertidumbre y comprender fenómenos aleatorios, habilidades cruciales en múltiples disciplinas y en la vida cotidiana. El estudio del cambio a través de las derivadas fomenta el entendimiento de la variabilidad y el cambio constante en distintos contextos, preparando a los estudiantes para analizar y predecir comportamientos en diversos campos, desde las ciencias hasta la economía.

En el **Bloque 3**: Sentido Algebraico, la generalización de patrones y el modelado matemático mediante ecuaciones, inecuaciones y sistemas, junto con la resolución de sistemas de ecuaciones, potencian el pensamiento analítico y la capacidad de abstraer y generalizar problemas reales a modelos matemáticos. Las relaciones y funciones, y su representación gráfica, permiten una mejor comprensión de cómo las variables interactúan en diferentes contextos. El pensamiento computacional fomenta la capacidad de formular, resolver y analizar problemas de manera eficiente, así como la comparación de algoritmos, lo que es vital en la era digital para el desarrollo de habilidades tecnológicas y de programación.

En el **Bloque 4**: Sentido Estocástico incluye la organización y análisis de datos, el estudio de variables estadísticas, y el uso de herramientas digitales para el análisis de datos, lo cual es esencial para desarrollar la competencia en el manejo e interpretación de información cuantitativa. El cálculo de probabilidades y la modelización de fenómenos estocásticos mediante distribuciones de probabilidad como la binomial y la normal, así como la inferencia estadística, son fundamentales para la toma de decisiones informadas basadas en datos.
Estas habilidades son cruciales en un mundo cada vez más orientado hacia los datos y la toma de decisiones basada en evidencia.

En general, estos bloques no solo cubren los aspectos técnicos y teóricos de las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, sino que también desarrollan competencias transversales como el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la toma de decisiones basada en datos, y la alfabetización financiera y tecnológica. Estas competencias son esenciales para formar ciudadanos informados y capaces de enfrentar los retos del mundo moderno con una comprensión profunda y práctica de los fenómenos sociales, económicos y científicos.

2.2.3. Competencias clave y específicas

Competencias clave

El Bachillerato tiene como finalidad proporcionar al alumnado formación, madurez intelectual y humana, conocimientos, habilidades y actitudes que le permitan desarrollar funciones sociales e incorporarse a la vida activa con responsabilidad y aptitud. Debe, asimismo, facilitar la adquisición y el logro de las competencias indispensables para su futuro formativo y profesional, y capacitarlo para el acceso a la educación superior. Para cumplir estos fines, es preciso que esta etapa contribuya a que el alumnado progrese en el grado de desarrollo de las competencias que, de acuerdo con el **Perfil de salida** del alumnado al término de la enseñanza básica, debe haberse alcanzado al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria.

Las competencias clave que se recogen en dicho Perfil de salida son las siguientes:

- *Competencia en comunicación lingüística.*
- *Competencia plurilingüe.*
- *Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería.*
- *Competencia digital.*
- *Competencia personal, social y de aprender a aprender.*
- *Competencia ciudadana.*
- *Competencia emprendedora.*
- *Competencia en conciencia y expresión culturales.*

Estas competencias clave son la adaptación al sistema educativo español de las establecidas en la Recomendación del Consejo de la Unión Europea, de 22 de mayo de 2018, relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente. Esta adaptación responde a la necesidad de vincular dichas competencias a los retos y desafíos del siglo XXI, así como al contexto de la educación formal y, más concretamente, a los principios y fines del sistema educativo establecidos en la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Si bien la Recomendación se refiere al aprendizaje permanente, que debe producirse a lo largo de toda la vida, el Perfil de salida remite al momento preciso del final de la enseñanza básica. Del mismo modo, y dado que las competencias clave se adquieren necesariamente de forma secuencial y progresiva a lo largo de toda la vida, resulta necesario adecuar las mismas a ese otro momento del desarrollo personal, social y formativo del alumnado que supone el final del Bachillerato.

Para cada una de las competencias clave se definen un conjunto de **descriptores operativos**, que dan continuidad, profundizan y amplían los niveles de desempeño previstos al final de la enseñanza básica, con el fin de adaptarlos a las necesidades y fines de esta etapa postobligatoria.

De la misma manera, en el diseño de las enseñanzas mínimas de las materias de Bachillerato, se mantiene y adapta a las especificidades de la etapa la necesaria vinculación entre dichas competencias clave y los principales retos y desafíos globales del siglo XXI a los que el alumnado va a verse confrontado. Esta vinculación seguirá dando sentido a los aprendizajes y proporcionará el punto de partida para favorecer situaciones de aprendizaje relevantes y significativas, tanto para el alumnado como para el personal docente.

Competencias específicas

En el marco de la LOMLOE, las competencias específicas son "desempeños que el alumnado debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los saberes básicos de cada materia o ámbito. Las competencias específicas constituyen un elemento de conexión entre, por una parte, el Perfil de salida del alumnado, y por otra, los saberes básicos de las materias o ámbitos y los criterios de evaluación" (Artículo 2 del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria). Estas competencias son comunes para los dos cursos de bachillerato, aunque como se verá en el siguiente apartado, en cada curso se evalúan de una manera diferente. Son las siguientes:

1. *Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de las ciencias sociales, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones.*

2. Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.

3. Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.

4. Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz, modificando, creando y generalizando algoritmos que resuelvan problemas mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de las ciencias sociales.

5. Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.

6. Descubrir los vínculos de las matemáticas con otras áreas de conocimiento y profundizar en sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.

7. Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.

8. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.

9. Utilizar destrezas personales y sociales, identificando y gestionando las propias emociones, respetando las de los demás y organizando activamente el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje y afrontando situaciones de incertidumbre, para perseverar en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas.

2.2.4. Criterios de evaluación

Según la LOMLOE, los criterios de evaluación son “referentes que indican los niveles de desempeño esperados en el alumnado en las situaciones o actividades a las que se refieren las competencias específicas de cada área en un momento determinado de su proceso de aprendizaje”. Los criterios en este curso son:

Competencia específica 1

1.1 *Emplear algunas estrategias y herramientas, incluidas las digitales, en la resolución de problemas de la vida cotidiana y de las ciencias sociales, valorando su eficiencia en cada caso.* (CCL2, STEM1, STEM3, CD2, CPSAA4, CE3)

1.2 *Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de problemas de la vida cotidiana y de las ciencias sociales, describiendo el procedimiento realizado.* (CCL2, STEM2, CPSAA4, CPSAA5, CE3)

Competencia específica 2

2.1 *Comprobar la validez matemática de las posibles soluciones de un problema, utilizando el razonamiento y la argumentación.* (STEM1, STEM2, CE3)

2.2 *Seleccionar la solución más adecuada de un problema en función del contexto (de sostenibilidad, de consumo responsable, equidad...), usando el razonamiento y la argumentación.* (STEM1, STEM2, CD3, CPSAA4, CC3, CE3)

Competencia específica 3

3.1 *Adquirir nuevo conocimiento matemático mediante la formulación de conjeturas y problemas de forma guiada.* (CCL1, STEM1, STEM2)

3.2 *Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la formulación o investigación de conjeturas o problemas.* (STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD3)

Competencia específica 4

4.1 *Interpretar, modelizar y resolver situaciones problematizadas de la vida cotidiana y de las ciencias sociales, utilizando el pensamiento computacional, modificando y creando algoritmos.* (STEM1, STEM2, CD2, CD3)

Competencia específica 5

5.1 *Manifestar una visión matemática integrada, investigando y conectando las diferentes ideas matemáticas.* (STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1)

5.2 *Resolver problemas estableciendo y aplicando conexiones entre las diferentes ideas matemáticas.* (STEM1, STEM3, CD2, CD3)

Competencia específica 6

6.1 *Resolver problemas en situaciones diversas, utilizando procesos matemáticos, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real, otras áreas de conocimiento y las matemáticas.* (STEM1, STEM2, CD2, CPSAA5, CE3)

6.2 *Analizar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad reflexionando sobre su contribución en la propuesta de soluciones a situaciones complejas y a los retos en las ciencias sociales que se planteen.* (CC4, CE2, CCEC1)

Competencia específica 7

7.1 *Representar ideas matemáticas, estructurando diferentes razonamientos matemáticos y seleccionando las tecnologías más adecuadas.* (CCL1, STEM3, CE3, CCEC4.1, CCEC4.2)

7.2 *Seleccionar y utilizar diversas formas de representación, valorando su utilidad para compartir información.* (CCL1, CE3)

Competencia específica 8

8.1 *Mostrar organización al comunicar las ideas matemáticas, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados.* (CCL1, CCL3, CP1, STEM 2, STEM 4, CD2, CD3, CCEC3.2)

8.2 *Reconocer y emplear el lenguaje matemático en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor.* (CCL1, CP1, STEM2, STEM 4)

Competencia específica 9

9.1 *Afrontar las situaciones de incertidumbre, identificando y gestionando emociones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas.* (STEM5, CPSAA1.1, CPSAA1.2, CC2, CE2)

9.2 *Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando y aprendiendo de la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.* (STEM5, CPSAA1.1, CPSAA1.2, CPSAA3.1, CE2)

9.3 *Participar en tareas matemáticas de forma activa en equipos heterogéneos, respetando las emociones y experiencias de los demás, escuchando su razonamiento, identificando las habilidades sociales más propicias y fomentando el bienestar grupal y las relaciones saludables.* (CP3, STEM5, CPSAA3.1, CPSAA3.2, CC2, CC3, CE2)

2.2.5. Metodología

Como se ha ido adelantando, la propuesta para esta programación dinámica será utilizar varias metodologías según los conocimientos que se vayan a impartir. En este trabajo se ha desarrollado la parte del sentido estocástico, y se han implementado las siguientes, que se van a ir mezclando y utilizando simultáneamente según las circunstancias de la clase:

Aprendizaje basado en problemas, ABP (Problemas sin conocer teoría o recién estudiada)

Es un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos, de manera que se potencie el autoaprendizaje y el desarrollo del pensamiento crítico, cuyo objetivo es que los estudiantes analicen y resuelvan un problema planteado en forma de escenario para el logro de ciertos objetivos de aprendizaje. Se espera que estos puedan elaborar un diagnóstico de sus necesidades de aprendizaje, así como que comprendan la importancia del trabajo colaborativo y que desarrollen habilidades de búsqueda de información y de análisis y síntesis.

La metodología ABP es una colección de problemas cuidadosamente elegidos por grupos de profesores de materias afines que se presentan a pequeños grupos de estudiantes con la ayuda de un tutor. Los problemas, consisten en una descripción en lenguaje muy sencillo y poco técnico de conjuntos de hechos o fenómenos observables que plantean un reto o una cuestión, es decir, requieren explicación. Así, la tarea del grupo de estudiantes es discutir estos problemas y aportar las explicaciones necesarias en términos fundados de procesos, principios o mecanismos relevantes. Se concede así similar importancia tanto a los conocimientos que se deben adquirir como el proceso de aprendizaje.

El material de aprendizaje básico lo constituyen las descripciones de los problemas y una biblioteca de recursos, las clases ocasionales y el contacto con expertos a los que los estudiantes pueden preguntar para hacerles consultas puntuales.

Aprendizaje cooperativo y colaborativo, ACC (Problemas una vez se interioriza la teoría)

Es una metodología pedagógica en la que se explotan las relaciones sociales y las interacciones colectivas, para convertirlas en experiencias de aprendizaje, mediante la realización de tareas en grupo. El aprendizaje, en este enfoque, va a depender del intercambio de información entre los estudiantes, quienes se motivan tanto para lograr su propio aprendizaje como para acrecentar los logros de los demás.

Basado en grupos heterogéneos se desarrollan diversas actividades que puede realizarse a través de diferentes instrumentos de trabajo, ya que las interacciones en el aula se dan de forma espontánea. Un ejemplo lo constituyen aquellos casos en los que pares se llegan a entender mejor (zona de desarrollo próximo - ZDP) que con la misma explicación presentada por el docente.

Esta metodología defiende que “La suma de las partes interactuando es mejor que la suma de las partes solas".

Se debe añadir que el trabajo cooperativo contribuye en el desarrollo de habilidades comunicativas, trabajo en grupo y flexibilidad en el pensamiento. El dar o recibir ayuda no sólo mejora al aprendizaje en grupo, sino el tener la conciencia de necesitarla, comunicar esta necesidad e integrar la ayuda ofrecida en el propio trabajo.

Aprendizaje basado en tareas, ABT (Presentaciones orales en grupos de problemas)

El aprendizaje basado en tareas es un modelo que logra transformar la enseñanza basada en el profesor a una enseñanza basada en el estudiante. Aunque no existe un consenso claro en la definición de tarea, se podría definir como una secuencia organizada de tal forma que ayude a los estudiantes a lograr la realización de una actividad compleja relacionada con diferentes áreas de conocimiento y con la experiencia vital de los propios estudiantes. Durante el proceso, se intenta que el alumno gane de manera progresiva responsabilidad con su aprendizaje a partir de la solución de problemas propios, lo que facilita la motivación y permite un aprendizaje significativo.

Fases del enfoque por tareas: Willis (1996) propone que dentro de la metodología del aprendizaje basado en tareas existen tres fases:

Primera Fase: La tarea previa

El docente introduce y explica a los alumnos el tema que se va a tratar, y realiza algunas actividades para que los estudiantes tomen de ejemplo y puedan recordar o repasar algunos conceptos claves. Se recomienda al docente utilizar material audiovisual, transparencias, etc. para asegurar que el alumnado comprende lo que se le está pidiendo. Se formulan las instrucciones de la tarea propuesta y es tiempo de que los estudiantes pregunten cualquier duda que tengan sobre esta o sobre los contenidos relacionados con ella.

Segunda Fase: El ciclo de la tarea

En la segunda fase, se realiza la tarea en sí. Se distinguen tres momentos:

Realización de la tarea. Los alumnos, en parejas o grupos, deben realizar la tarea asignada, ya sea una lectura, una presentación o, en el caso de las matemáticas, un problema o un ejercicio. El profesor debe monitorizar a sus alumnos y guiarlos en este proceso, en caso de que fuera necesario.

Preparación de la exposición. Los estudiantes deben prepararse para exponer el trabajo realizado en el aula. Deben explicar el proceso que han seguido para su realización, los hallazgos que hayan encontrado, las dificultades, etc. Deberán preparar un pequeño borrador sobre lo que quieren exponer a sus compañeros. El profesor también los atiende en este momento, asegurándose de que las exposiciones serán claras.

La exposición. Este momento es la conclusión de la tarea. Los alumnos exponen sus ejercicios a sus compañeros de la forma que mejor piensen que se adapte a lo que quieren enseñar, puede ser una presentación, un vídeo, etc. El docente en este momento actúa como facilitador y observador, procurando que no se realcen los fallos de los ponentes, sino que se resalte su trabajo y se muestre interés por él. Tras la exposición se realiza "feedback" a los alumnos.

Tercera Fase: Focalización del lenguaje

Esta última fase se refiere al tratamiento de estructuras gramaticales, por tanto, en matemáticas se centraría en los conocimientos subyacentes que han tenido que utilizar para realizar la tarea. Consta de dos momentos:

Análisis. Los estudiantes identifican y procesan las estructuras lingüísticas que previamente han utilizado o necesitado y se hacen preguntas sobre lo que no haya quedado claro. El papel del docente en este periodo es repasar lo analizado por sus estudiantes y seleccionar otros aspectos que considere interesantes y haya visto en la etapa de exposición.

Práctica. En esta fase los estudiantes consolidan lo aprendido. El profesor dirige las actividades prácticas cuando crea conveniente para que los estudiantes adquieran confianza.

Lección magistral (Explicación básica de los contenidos teóricos)

El método expositivo consiste en la retransmisión del docente de un tema o lección a partir del cual el alumnado tratará de tomar notas para su posterior estudio.

Se trata de un método muy empleado a través del cual se pretende aportar información de manera ordenada y proveniente de distintas fuentes. Pretende arrojar nuevos conocimientos, actitudes y valores a los que el alumno no tiene por qué tener un acceso directo o sencillo.

Es trabajo del docente seleccionar, sintetizar y organizar los contenidos para transmitírselos al alum nado de manera que puedan recibir la información y además entenderla. Por tanto, la función del profesor es crucial en este método y su labor es el foco de la materia. Esto implica, por parte del maestro, ser capaz de crear un contenido crítico y actualizado donde el alumnado pueda discernir cuales son los contenidos de estudio y que requisitos se le piden a la hora de ser evaluado

Si bien el alumnado puede intervenir durante la lección magistral con comentarios o preguntas, es habitual que se dediquen únicamente a la escucha y a la elaboración de apuntes donde recogen la información que imparte el docente. Sin embargo, el alumnado tendrá que desplegar distintas estrategias para comprender e interiorizar esos contenidos sin depender del profesor.

Algunos de los errores que pueden cometerse en la impartición de la lección magistral son la intención crítica que ha de aportar el profesor y la enseñanza de un método de aprendizaje con independencia de la figura del docente, acabando así por convertirse en una lección que imparte el docente mientras que los alumnos toman notas para luego memorizarlo sin interiorizarlo o entenderlo previamente.

Otra crítica a este sistema es el desconocimiento del docente del avance del alumno y de si realmente está adquiriendo los conocimientos necesarios hasta la llegada de un examen que será la única prueba que ayudará al docente a saber si el aula ha adquirido los objetivos propuestos. Sin embargo, y ante lo que se pueda pensar, la lección magistral también puede tener sus ventajas si se realiza de manera adecuada. Esto es a través de la síntesis de contenidos que no son asumibles para el alumnado puesto que existen numerosas fuentes y no siempre los estudiantes son capaces de recoger y resumir esa información. También puede ser favorecedor para una primera toma de contacto con la materia que, a través de la organización y selección y conocimiento del contenido, el docente puede llegar a provocar que el alumnado se sienta motivado para comprender y explorar un tema.

Es por todo esto, que no se debe dejar atrás este método sin analizarlo previamente puesto que existe una tendencia a generalizar que pertenece a la Escuela Tradicional y, por tanto, no tiene cabida en la situación actual en la que se encuentra el sistema educativo, sin pensar que puede funcionar en ciertos casos y que, incluso, puede combinarse con otros métodos, lo que dará riqueza a nuestras aportaciones en el aula.

2.2.6. Materiales y recursos

Las salas generales del IES Emilio Ferrari están equipadas con pupitres individuales para los estudiantes y uno más grande para el profesor. Además, cuentan con un proyector, una pizarra y un ordenador de sobremesa con acceso a Internet a través de WIFI. Además de estas instalaciones, el centro cuenta con un gimnasio, dos canchas, un taller de Tecnología, aulas de Informática, un salón de actos y una sala de usos múltiples, una biblioteca, varios laboratorios, y un Aula Medusa, la cual será utilizada en la mayoría de las Situaciones de Aprendizaje. Para reservar el Aula Medusa, es necesario realizar una reserva virtual, dándole prioridad a las asignaturas que la utilizan, con el objetivo de mantener organizados tanto al grupo como al profesorado. En caso de decisiones de último momento, también se requiere inscribirse siguiendo el mismo procedimiento.

Los recursos y materiales que se utilizarán a lo largo del curso se detallan en la descripción de cada Situación de Aprendizaje, incluyendo enlaces web, videos didácticos, actividades y material escolar para elaborar las actividades.

2.2.7. Medidas de atención a la diversidad

Con el propósito de convertir la diversidad en un elemento enriquecedor y propiciar una relación constructiva entre los estudiantes, se implementará un método de aprendizaje colaborativo que permita aprovechar la diversidad, fortaleciendo la autoestima y la autonomía adecuadas, y generando expectativas positivas. Esto se llevará a cabo con el fin de ofrecer una educación de calidad, adaptada a las particularidades y necesidades individuales de cada estudiante, promoviendo el éxito académico y la excelencia para todos. Para lograrlo, se seguirán una serie de medidas de atención a la diversidad en el primer curso de Bachillerato, dirigidas a satisfacer las necesidades educativas y alcanzar las competencias clave y los objetivos establecidos en la Programación Didáctica Anual, dado que los estudiantes aprenden de manera diversa en términos de método, formato y ritmo.

Durante el año escolar, se buscará vincular los nuevos contenidos con los conocimientos previos de los estudiantes, relacionándolos con situaciones reales en su entorno. Esto implicará un equilibrio entre las explicaciones del profesor y el trabajo autónomo de los estudiantes, involucrándolos en la preparación de informes, videos y exposiciones sobre temas relacionados con los contenidos del curso. Ajustando la complejidad y el ritmo de las actividades según las necesidades individuales, se prestará atención especial a aquellos estudiantes que enfrenten dificultades o muestren facilidades en el aprendizaje. Además, se promoverá el desarrollo de la competencia de aprender a aprender, incentivando a los estudiantes a buscar y procesar información de diversas fuentes, no limitándose exclusivamente al uso de un libro de texto.

En esta Programación Didáctica Anual se busca establecer una serie de principios que se promoverán a lo largo del año académico con el propósito de cultivar en los estudiantes un modelo de convivencia basado en valores como el respeto, la tolerancia, la civismo, la igualdad y la empatía. Para lograrlo, se llevarán a cabo actividades en grupos colaborativos rotativos, donde se fomentará el establecimiento de relaciones sociales fundamentadas en el respeto mutuo y la igualdad entre todos los miembros del grupo.

Es crucial destacar la importancia de adoptar hábitos de vida saludables, como una dieta equilibrada y la práctica regular de actividad física. Por ende, se procurará promover un estilo de vida activo y saludable mediante actividades físicas, con el objetivo de combatir el sedentarismo.

Se hará especial hincapié en promover la igualdad de género, con el propósito de prevenir actitudes, comportamientos y contenidos sexistas, así como en garantizar la igualdad sin importar la orientación o identidad sexual.

Además, se enfatizará la concienciación sobre la importancia del reciclaje, la reutilización y el uso responsable de los recursos. Se fomentará su práctica tanto dentro del centro educativo como en otros aspectos de la vida diaria, extendiendo así el respeto al medio ambiente.

Por último, se aspira a que los estudiantes desarrollen un conjunto de habilidades que les permitan abordar los desafíos sociales contemporáneos y futuros. Esto se logrará mediante el cultivo de aptitudes como la iniciativa, la creatividad, el trabajo en equipo, la autonomía, la confianza en sí mismos y el pensamiento crítico.

2.2.8. Temporalización

Dado que la ley establece que la enseñanza de Matemáticas en 1º de Bachillerato de CCSS cuenta con 4 horas semanales, el curso académico 2023-2024 comprende un total aproximado de 140-144 sesiones de 55 minutos cada una aproximadamente. Por razones evidentes, es más prudente realizar una planificación que permita cierta flexibilidad y pueda ajustarse si es necesario alargarla hacia el final del curso, en lugar de una planificación demasiado detallada. Por esta razón, se ha diseñado el curso académico con 130 sesiones. No obstante, esta distribución puede sufrir modificaciones a lo largo del año debido a posibles imprevistos.

En esta trabajo se van a explicar las distintas situaciones de aprendizaje que se realizarán a lo largo del curso. La idea es desarrollar aquellas del bloque de probabilidad y estadística (sentido estocástico). Obviamente no se puede realizar una programación cuyo objetivo sea que en todo momento nos encontremos en una situación de aprendizaje ya no sería realista, por lo que el proyecto no se centrará en lo que se va a hacer sesión a sesión a lo largo del año escolar (lo cual sería un trabajo interminable) sino que se enfocará el trabajo hacia aquellas clases que van a pertenecer a una de estas situaciones. Posteriormente vamos a explicar todas las que se van a realizar, y en el último capítulo se expondrá una de estas de forma muy detallada.

Para simplificar los contenidos se van a subdividir los bloques en varios temas:

Tema 1: Números Reales; Tema 2: Matemática Financiera; Tema 3: Álgebra; Tema 4: Funciones; Tema 5: Límites y continuidad; Tema 6: Derivadas; Tema 7: Estadística; Tema 8: Probabilidad; Tema 9: Distribuciones binomial y normal.

Como se ha indicado, se tomará como referencia el calendario del curso escolar 2023-2024:

1er trimestre: Inicio el 13 de Septiembre y fin el 22 de Diciembre (16 semanas)

2º trimestre: Inicio el 8 de Enero y fin el 22 de Marzo (11 semanas)

3er trimestre: Inicio el 3 de Abril y fin el 21 de Junio (12 semanas)

En los anexos aparecerá un calendario del curso escolar completo Todas esas fechas son aplicables para los primeros de Bacillerato de régimen ordinario.

En la siguiente tabla se expondrá la temporalización (de manera orientativa) de los distintos temas a lo largo del curso:

Temario y su distribución temporal			
Tema	**Título**	**Semanas**	**Evaluación**
1	**Números Reales**	**3**	**1ª**
2	**Matemáticas Financieras**	**3**	**1ª**
3	**Polinomios, ecuaciones e inecuaciones**	**4**	**1ª**
3	**Sistemas de ecuaciones e inecuaciones**	**3**	**1ª**
4	**Funciones**	**4**	**2ª**
5	**Límites y Continuidad**	**3**	**2ª**
6	**Derivadas**	**3**	**2ª**
7	**Estadística**	**5**	**3ª**
8	**Probabilidad y Combinatoria**	**3**	**3ª**
9	**Distribuciones de Probabilidad**	**3**	**3ª**
Nº total de semanas:		**35**	

Para calcular el número aproximado de semanas se han consultado diversos libros de matemáticas para este curso y se ha preguntado a varios profesores que llevan impartiendo la asignatura durante varios años. Como se ha indicado en el apartado previo a la tabla, podemos ver que el primer trimestre tendría varias semanas libres, esto se debe a que el ritmo al empezar el curso suele ser más lento, y, además, a esto se le suma que durante estos primeros meses hay un número importante de días no lectivos.

2.3. Situaciones de aprendizaje

El BOCYL define situación de aprendizaje como una herramienta imprescindible para que el alumnado adquiera en primer término las competencias específicas del área correspondiente, y en definitiva las competencias clave del Perfil de salida, en el nivel de desempeño correspondiente, así como los objetivos de etapa.

Deben reunir unas características definidas: resultar motivadoras para el alumnado y atractivas para poder aplicar y desarrollar adecuadamente las competencias clave, permitir un aprendizaje significativo y contextualizado, ser transferible a otras situaciones de la vida cotidiana, seguir los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje, implicar la producción y la interacción oral e incluir el uso de recursos auténticos en distintos soportes y formatos, y fomentar aspectos relacionados con el interés común, la sostenibilidad o la convivencia democrática, esenciales para que el alumnado se prepare para responder con eficacia a los retos del siglo XXI.

En el caso de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, las situaciones de aprendizaje deben proponer problemas reales cercanos a situaciones concretas en las que el alumnado se pueda sentir implicado e incluso identificado, cuyas tareas implican las capacidades y las actuaciones referidas en las competencias específicas de la materia, investigando, formulando y generalizando conjeturas y propiedades matemáticas, haciendo demostraciones sencillas sobre simulaciones y modelizaciones de fenómenos relevantes del ámbito social, implementando algoritmos y métodos del pensamiento computacional. Comunicar e intercambiar ideas mostrando el conocimiento que el avance de las matemáticas ha supuesto en el progreso de la sociedad debe formar parte de estas situaciones de aprendizaje.

En este proyecto se expondrán los temas relacionados con el sentido estocástico, explicándose como se van a realizar las clases y que tipo de actividades se llevarán a cabo. Los dos próximos capítulos se van a desarrollar como si fuese cada uno una situación de aprendizaje, es decir, para cada uno se va a tomar una cuestión particular y todas las tareas que se van a ir utilizando para enseñar a los alumnos van a girar en torno a dicha cuestión.

Nombre de la Situación de Aprendizaje: **"Evaluando la Empresa Castellana 'Torres': Un Análisis Estadístico"**

Desde su fundación en 1991, la empresa castellana "Torres" ha experimentado un crecimiento notable en el sector de la fabricación y distribución de productos agroalimentarios. Esta situación de aprendizaje tiene como objetivo que los estudiantes de primero de bachillerato de ciencias sociales comprendan y apliquen los conceptos básicos de la estadística a través del análisis de datos reales y ficticios relacionados con la evolución de la empresa.

Los alumnos se sumergirán en el análisis de diversos aspectos del negocio, como las ventas anuales, el crecimiento de la plantilla, la distribución geográfica de sus clientes y la satisfacción del cliente. Utilizando técnicas estadísticas fundamentales, como la representación gráfica de datos, el cálculo de medidas de tendencia central y la dispersión, los estudiantes desarrollarán habilidades para interpretar datos y extraer conclusiones útiles para la toma de decisiones en el ámbito empresarial.

Esta actividad no solo les proporcionará una comprensión práctica de la estadística, sino que también les permitirá conocer más sobre una empresa local, comprendiendo su impacto económico y social en la región.

Nombre de la Situación de Aprendizaje: **"Diversión Matemática en vacaciones"**

Durante las vacaciones de verano, un grupo de amigos decide pasar unas semanas en el pueblo, donde buscan formas creativas de entretenerse utilizando cartas, dados, monedas y otros elementos sencillos. Esta situación de aprendizaje tiene como objetivo que los estudiantes de primero de bachillerato de ciencias sociales apliquen conceptos de probabilidad y distribuciones probabilísticas en situaciones cotidianas y lúdicas.

Los alumnos explorarán diferentes juegos y actividades que los amigos pueden realizar para pasar el rato, analizando la probabilidad de ciertos resultados y eventos. A través de juegos de cartas, calcularán la probabilidad de sacar una carta específica de un mazo estándar. En los juegos de dados, determinarán las probabilidades de obtener ciertas combinaciones en una tirada. Con monedas, modelarán la probabilidad de obtener cara o cruz en múltiples lanzamientos… Además, utilizarán herramientas matemáticas como la distribución binomial y la distribución normal para modelar y analizar estos juegos.

Esta actividad permitirá a los estudiantes desarrollar una comprensión práctica de los conceptos de probabilidad y distribuciones.

La mayor parte de los gráficos de las explicaciones teóricas se han realizado mediante el **software libre y gratuito R**.

2.4. Evaluación

En este apartado se expondrán varias partes relacionadas con la evaluación de la asignatura:

Características de la evaluación

- **Integradora**: se deben evaluar las capacidades a través de los objetivos generales del curso.
- **Formativa**: es un elemento más del aprendizaje que informa y perfecciona la acción educativa.
- **Continua**: debe estar inscrita en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de detectar las dificultades en el instante en el que se producen.
- **Variada**: debe utilizar diferentes técnicas e instrumentos.

Instrumentos de evaluación

- **Pruebas con bolígrafo y papel** (serán lo más objetivas posible y constarán de una serie de problemas y ejercicios donde los alumnos tendrán que demostrar los conocimientos adquiridos).
- **La realización y exposición de trabajos** (permite saber cómo se desenvuelven los chicos a la hora de exponer ideas y conceptos matemáticos, además de comprobar que tal trabajan tanto dentro como fuera del aula con sus compañeros).
- **La observación sistemática** (posibilita ver cómo trabajan y se relacionan los alumnos en el día a día).
- **La entrega de tareas** (permite comprobar si el alumno presta atención durante las clases y sigue las explicaciones).
- **Autoevaluación** (permite la valoración propia del trabajo realizado de forma que el alumno tome consciencia del proceso seguido y el trabajo realizado).
- **Coevaluación** (consiste en evaluar el desempeño de un estudiante a través de sus propios compañeros. Su uso anima a que los alumnos/as se sientan parte de una comunidad de aprendizaje e invita a que participen en los aspectos claves del proceso educativo haciendo juicios críticos del trabajo de sus compañeros).

¿Qué evaluar?

El **aprendizaje de los alumnos**: El profesorado realizará la evaluación de la evolución del proceso de aprendizaje del alumnado y de su maduración personal, utilizando las pruebas, registros e instrumentos variados, que crea oportunos, aunque siempre los criterios de evaluación de las materias serán el referente fundamental para valorar tanto el grado de adquisición de las competencias clave como el de consecución de los objetivos.

El **proceso de enseñanza**: Constituye uno de los elementos más importantes de cara a mejorar la práctica docente en el aula. El Proyecto Curricular de Centro debe establecer una doble vertiente de evaluación de la enseñanza: La evaluación, revisión y propuestas de mejora correspondiente a la programación didáctica del Departamento de Matemáticas a partir del análisis de los resultados obtenidos por los alumnos y la evaluación de la práctica docente en el aula.

¿Cómo y cuándo evaluar?

El proceso de evaluación será **continuo** y, cuando el progreso de un estudiante no sea el adecuado, se implementarán medidas de apoyo educativo que se informarán a sus familias. Estas acciones se tomarán en cualquier momento del curso, tan pronto se identifiquen las dificultades, prestando especial atención a los estudiantes con necesidades educativas especiales. El objetivo es asegurar que todos los estudiantes adquieran el nivel de competencia necesario para continuar su educación, recibiendo el apoyo que cada uno necesite.

En **cada trimestre** se realizará un proceso similar para obtener una calificación:

De acuerdo a la LOMLOE se va a utilizar la evaluación por competencias. En el caso de la asignatura de matemáticas, hay una ventaja, ya que se pueden agrupar las competencias específicas en cinco grandes grupos (Comunicación y representación, Conexiones, Razonamiento y prueba, Resolución de problemas, y Socioemocional). En la programación anual del departamento, realizada a principio de curso, se habrán redactado unos indicadores de logro asociados a los criterios de evaluación de las competencias específicas, y, por tanto, a estos grupos, mediante los cuales podremos averiguar si los alumnos han obtenido las competencias básicas del curso (perfil de salida). Cabe mencionar que cada una de estas agrupaciones ponderará de una manera distinta de cara a poner una nota final que irán en el boletín.

La elección de estos pesos recae sobre el profesional docente, que en función de la materia y curso que vaya a impartir, decidirá cuál es más relevante y cual menos. En el caso de primero de bachillerato de sociales se utilizarán los siguientes: Un 30% para Resolución de problemas, un 25% para Razonamiento y prueba, un 20% para Conexiones, un 20% para Representación y comunicación, y por último un 5% para Socioafectivo.

En el caso de esta programación, para cada tema se van a utilizar cuatro **puntos fundamentales**, los cuales serán en los que se basará el profesor para poner las notas. Estos serán los siguientes:

- **Pruebas escritas (50%)**: Se realizará una por tema.

  Cada cuestión de cada prueba tendrá asociado una nota (entre todos las cuestiones sumarán diez).

  En cada prueba habrá cuatro notas del uno al diez, una por cada uno de los primeros grupos de competencias específicas. Estas se hallarán sumando la puntuación obtenida en cada uno y dividiendo ese resultado entre el total que se podría obtener. Para las cuestiones con varios indicadores se tomarán por separado como si solo tuviesen uno solo.

  Al final de trimestre se hará la media de las notas en cada prueba, obteniendo una clasificación final para las notas de cada grupo de competencias en la parte de pruebas escritas. Las llamaremos *notaC1ex, notaC2ex, notaC3ex y notaC4ex*.

- **Presentación oral (25%)**: En cada tema, se propondrán ciertos problemas de un nivel un poco superior a los vistos en clase para que los alumnos, por parejas (se tratará de que sean lo más equitativas posible) los resuelvan y preparen una pequeña exposición de cómo lo han llevado a cabo.

Existirán unas rúbricas de donde se obtendrá una nota para cada grupo de competencias. En esta prueba los alumnos puntuarán a sus compañeros y a sí mismos. Al final, la nota en cada grupo para cada estudiante será la media de las notas puestas por los alumnos, el profesor y el propio estudiante. Se llamarán *notaC1or, notaC2or, notaC3or y notaC4or*.

- **Problemas / Ejercicios de clase (25%)**: Un día a la semana (elegido aleatoriamente por el profesor) se recogerá alguno de los ejercicios o problemas realizados durante la clase.

Al final de trimestre el profesor tomará todos los ejercicios recogidos, asignará unos indicadores de logro a cada uno y los evaluará como si fuesen exámenes de una sola pregunta. Hará la media de todos y se obtendrá entonces *notaC1ej, notaC2ej, notaC3ej y notaC4ej*.

- **Observación sistemática**: El docente tomará anotaciones cada semana acerca del comportamiento y la actitud de los distintos alumnos y a final de trimestre pondrá una nota que concuerde con lo que ha ido viendo durante ese periodo de tiempo. Esta nota se llamará *notaC5*.

Para obtener las notas finales en cada uno de los grupos de competencias específicas tendremos lo siguiente:

Resolución de problemas: $notaC1 = 0.5(notaC1ex) + 0.25(notaC1or) + 0.25(notaC1ej)$

Razonamiento y prueba: $notaC2 = 0.5(notaC2ex) + 0.25(notaC2or) + 0.25(notaC2ej)$

Conexiones: $notaC3 = 0.5(notaC3ex) + 0.25(notaC3or) + 0.25(notaC3ej)$

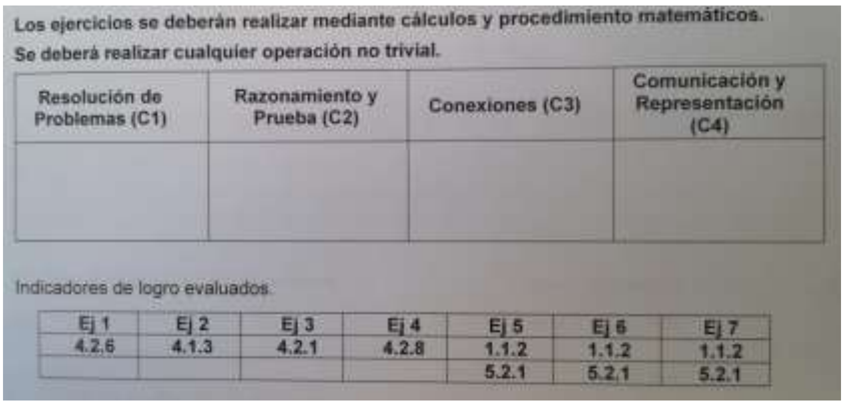
Representación: $notaC4 = 0.5(notaC4ex) + 0.25(notaC4or) + 0.25(notaC4ej)$

Socioafectivo: $notaC5$ (esta ya se ha obtenido)

Por último, tendremos que la nota que aparecerá en el boletín del trimestre correspondiente la cual será la media ponderada de las calificaciones para cada grupo de competencias específicas:

$$nota\ final = 0.3(notaC1) + 0.25(notaC2) + 0.2(notaC3) + 0.2(notaC4) + 0.05(notaC5)$$

En la siguiente imagen hay un ejemplo de cómo sería la primera parte de una prueba escrita (en este caso es de 1º de la ESO, aunque para bachillerato se seguirá el mismo criterio), y en los anexos se muestra otra en la que se resumen muy bien los distintos grupos de competencias específicas de los que se ha estado hablando.


Los ejercicios se deberán realizar mediante cálculos y procedimiento matemáticos.

Se deberá realizar cualquier operación no trivial.

Resolución de Problemas (C1)	Razonamiento y Prueba (C2)	Conexiones (C3)	Comunicación y Representación (C4)

Indicadores de logro evaluados

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7
4.2.6	4.1.3	4.2.1	4.2.8	1.1.2	1.1.2	1.1.2
				5.2.1	5.2.1	5.2.1

Capítulo 3: “Estadística”

Primera sesión: Se dará un contexto para el temario y se expondrá la situación de aprendizaje a los alumnos y la dinámica que se va a seguir en las siguientes semanas.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Introducción Estadística	40	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador
Organización del tema	15	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador

Introducción

Se comenzará definiendo el tema y sus principales utilidades: En el campo del análisis funcional, se encuentran constantemente ejemplos en los que unas magnitudes **dependen** de otras. Pero ¿siempre la dependencia es de tipo funcional?

- ¿Depende el estado de ánimo de la velocidad del viento?
- La estatura de una persona, ¿Depende de su peso?
- ¿Son más caros los cines dependiendo del nivel de vida de la población?

Se puede estar seguro de que las respuestas a estas cuestiones hace pensar que no siempre la relación que existe entre dos magnitudes es funcional; pero, entonces ¿de qué tipo es?

En el bloque que se va a trabajar , Estadística, se va a intentar dar respuestas a cuestiones como las anteriores y muchas otras más.

Ya se ha trabajado anteriormente con situaciones de tipo estadístico; conceptos como:

- Frecuencia absoluta.
- Gráficos estadísticos.
- Parámetros centrales y de dispersión de una distribución.

Los cuales deben de resultar familiares, pero otros como:

- Regresión.
- Correlación.
- Nube de puntos.

no deben de resultar conocidos en absoluto. Se intentará que al finalizar este tema resulten tan "familiares" como los mencionados previamente.

La primera parte del tema va a consistir en recordar el trabajo en el campo de la Estadística Unidimensional (en la que solo se estudia una variable) para ir evolucionando y llegar a un objetivo prioritario, la Estadística Bidimensional (en la que se estudiarán dos variables)

Segunda sesión: <u>Se realizarán una serie de problemas con el objetivo de que los alumnos reflexionen y repasen conceptos básicos.</u>

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Empresa y Recompensa	30	ACC	Parejas	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador Cuaderno
¿Igualdad de sexos?	10	ABP	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador Cuaderno
Una y Dos variables	15	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra

Empresa y recompensa

La Unión Europea ha convocado un premio para la empresa europea (que no sea una multinacional) más competitiva. La empresa "Torres" se quiere presentar al premio y para ello presenta un informe en el que se mencionan diferentes apartados de la actividad de dicha empresa.

Los empleados

A lo largo de los siete años que lleva funcionando la empresa el número de empleados fijos ha ido evolucionando según la siguiente tabla:

Año	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Número de Empleados	50	62	74	86	98	110	122	134

Si sigue con esta dinámica ¿Cuántos empleados es previsible que tenga la empresa en 1999? ¿Y en el año 2005?

Producción

Antes de decidir de forma definitiva cuál va a ser el precio de un determinado producto, se hace un estudio exhaustivo del siguiente tipo: se vende el mismo producto durante varias semanas a diferente precio; se observan las ventas que se obtienen para después analizar cuál es el precio más apropiado. Los resultados de algunas semanas están en la siguiente tabla:

Precio (euros)	100	120	140	160	180	200	220	240
Demanda (unidades)	2000	1915	1900	1850	1800	1775	1600	1500

La dirección ha decidido que el precio va a ser 175 euros ¿Cuántas unidades es previsible que se vendan del producto?

Preocupación por el personal

La salud y problemas personales son una de las preocupaciones de la dirección de la empresa; por eso, se ha hecho un estudio sobre los familiares que dependen económicamente de cada empleado. Los resultados del año 1.998 son los siguientes:

Nº de elementos de la unidad familiar	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº de empleados	15	20	50	20	16	8	2	1

¿Qué número de elementos de la unidad familiar es el más representativo?

Perspectivas económicas

Durante estos años la empresa ha funcionado de forma curiosa: cada año que transcurre la producción aumenta un 5%; y eso durante todos estos años. Como no parece muy creíble, han de presentar un cuadro de resultados económicos:

Años transcurridos desde 1991	0	1	2	3	4	5	6	7
Facturación (en millones)	100	105	110.2	115.7	121.5	127.6	134	140.7

¿Igualdad de sexos?

En el diario El País de fecha 4 de abril de 1998, aparecían los siguientes datos facilitados por el Ministerio de Economía:

Debido a que la tabla es muy extensa simplemente se va a describir. Tendrá una columna con cada comunidad autónoma, una con la ganancia media en 1997, una con la ganancia de hombres y otra con la ganancia de mujeres en ese mismo año. En la última fila habrá una media de la columna ganancia media, la ganancia de los hombres y la ganancia de las mujeres.

Analiza la tabla e intenta contestar a la pregunta que da título a la actividad: ¿Realmente hay igualdad de sexos?

En el año 1.998, el euro como unidad monetaria estaba a punto de generalizarse en la Unión Europea. Convierte la tabla en euros y comprueba si los datos referentes a la media son correctos.

Una y dos variables

En las dos actividades iniciales se han encontrado distintas tablas para presentar diferentes informaciones; alguna ha sido una tabla estadística con una sola variable, otras han sido tablas con dos variables; pero ¿existe algún tipo de relación entre ambas variables?

A lo largo de esta Unidad Didáctica (situación de aprendizaje) se va a trabajar fundamentalmente con dos variables y se va a trabajar con Estadística Bidimensional. Como parece lógico, mal se puede trabajar la Estadística Bidimensional sin dominar antes la Unidimensional. En la primera parte de esta unidad se van a trabajar algunas actividades que deberían permitir recordar conceptos y estrategias ya conocidos.

Aprovechando esta explicación, se puede introducir algo de contexto histórico:

Sir Francis **Galton** (1.822-1.911) fue un médico inglés que estudió la teoría de la correlación y la regresión.

Karl **Pearson** (1.857-1.936) fue el principal artífice de la teoría moderna de la estadística. Estudió entre otras cosas la bondad del ajuste de una distribución empírica a otra teórica.

Carlos **Dienlefait** (1.901-1.982) fue un estadístico de origen argentino que continuó la obra de Pearson, a la que aportó consideraciones de gran aplicación en las Ciencias Sociales.

Pafnuti Lvovich **Chebycheff** (1.821-1.894) fue un matemático ruso que estudió la búsqueda de algoritmos que proporcionaran soluciones numéricas o aproximaciones para utilizarse en la resolución de problemas prácticos.

Tercera sesión**:** Se realizará una introducción a la Estadística Unidimensional.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Población y muestra	30	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Pizarra Digital Ordenador
La cocina	25	ABP	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador Cuaderno

Población y Muestra

La Estadística estudia siempre grupos de personas o cosas. A estos grupos se les llama **poblaciones**. Las fases más habituales que se llevan a cabo en un trabajo estadístico son:

Sondeo: Nos sirve para conocer las opiniones, gustos, características de la población.

Elección de la muestra: Preguntar opiniones, gustos o características de toda una población, ni es efectivo, ni a menudo posible, por lo que se hace necesario escoger una MUESTRA, que habrá de ser representativa de la población.

Previsiones o emisión de Hipótesis: A partir de la muestra, podemos extraer conclusiones y prever posibles resultados de elecciones, conocer los gustos aproximados de la población, ...

La cocina

En una Escuela Europea, donde se forman los futuros trabajadores de “Torres”, conviven 2.500 alumnos de diferentes nacionalidades: alemanes, belgas, españoles, daneses, holandeses, franceses y británicos. Como es de suponer, la comida de cada una de las nacionalidades es ligeramente distinta y, por tanto, el régimen es de buffet libre.

Pero ha sucedido un terrible problema. La cocina se ha estropeado y claro, de un día para otro es muy difícil encargar a un "catering" (comida por encargo) el número exacto de comidas diferentes, ya que además la cocina se ha estropeado a las 15 horas y la empresa de "catering" necesita tener los datos como muy tarde a las 17 horas.

¿Se te ocurre algún procedimiento para que la directora de la escuela averigüe cuántas comidas de cada tipo encargar?

¿Sería suficiente con conocer las preferencias de algunos alumnos solamente? ¿Qué condiciones debería cumplir este grupo de alumnos?

¿Serían aceptables los datos si la directora sólo pide opinión a los alumnos franceses? ¿Por qué?

Si preguntamos a los diez primeros alumnos por orden alfabético de cada país, ¿mostrarán los resultados las preferencias de todos los alumnos?

Hemos preguntado a 100 estudiantes de forma aleatoria, teniendo en cuenta su nacionalidad. Sus gustos vienen dados por la tabla:

Comida	Paella	Puding	Verduras	Salchichas	Queso	Tortilla	Huevos	Pizza
Nº de alumnos que la eligen	15	10	20	25	8	6	2	14

¿Cuántas comidas de cada tipo debe pedir la directora? (Los datos da la directora son bastante fiables porque ha elegido una MUESTRA de 100 estudiantes, y a partir de ella ha deducido los gustos alimenticios de toda la POBLACIÓN de alumnos de la Escuela)

Cuarta sesión: <u>Se explicarán lo que son las variables discretas y sus parámetros estadísticos dentro de la Estadística Unidimensional.</u>

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Distribuciones de variable discreta. Los parámetros estadísticos	30	Lección magistral	Individual	Sala de ordenadores	Pizarra Digital Ordenador
Mercado de trabajo	25	ABP	Parejas	Sala de ordenadores	Ordenadores Cuaderno

Distribuciones de variable discreta. Los parámetros estadísticos

Medidas de Centralización:

Media

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Mediana: La mediana, Me, es el valor que está en el centro de la distribución estadística, siempre que esté ordenada; es decir, tiene tantos datos por encima de él como por debajo. Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos valores centrales.

Moda: La moda, Mo, es el dato con mayor frecuencia, el que más se repite.

Una pregunta interesante que se puede lanzar a la clase en este punto sería: ¿Puede, en un caso concreto haber varias medias? ¿Y medianas? ¿Y modas?

Se llaman medidas de centralización, porque alrededor de ellas se distribuyen los valores. Las medidas de dispersión nos miden el grado de separación (dispersión) respecto a la media de la distribución.

Medidas de Dispersión:

Desviación media: Es el promedio de las "distancias" de los datos a la media (en valores absolutos).

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{X}|}{n}$$

Varianza: Es el promedio de los cuadrados de las "distancias" de los datos a la media.

$$Var = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{X}^2$$

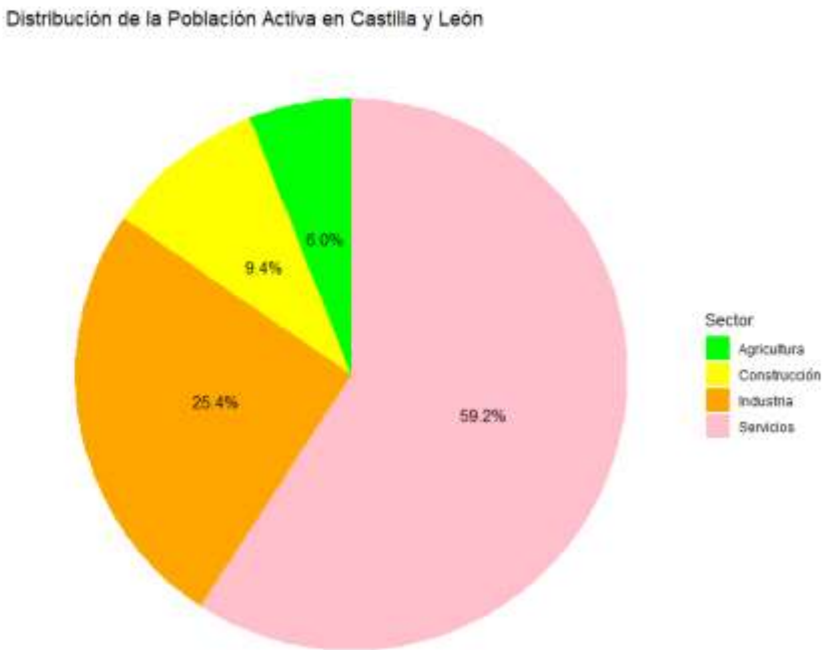
Desviación típica: Es la raíz cuadrada de la varianza.

Recorrido: Es la diferencia entre el mayor dato y el menor.

Un comentario habitual de alumnos es ¿Para qué sirve la desviación típica si ya tenemos la varianza?

En este caso se le podría responder mediante un ejemplo: Imagina que se está trabajando con una distribución de alturas; cada dato vendría dado en cm. La media también la daríamos en cm, pero la varianza vendría dada en cm^2. La desviación típica sí sería una longitud medida en cm.

Mercado de trabajo



La población en Castilla y León según el padrón municipal de 1996 es de 2.512.000 habitantes y la población activa (población en edad de trabajar, 16-65 años) era de 1.235.000 personas, siendo la tasa de paro del 20% (% de personas paradas tomando como total la población activa).

¿Cuántos empleos proporciona el sector agrícola?¿Y el sector servicios?

Se aprovechará este ejercicio para enseñar a los alumnos a construir gráficos sencillos en R.

Quinta sesión: Se continuará con la aplicación práctica de los contenidos de la sesión anterior dentro de la Estadística Unidimensional.

Cronograma	Tiempo (min)	Metodología	Organización alumnos	Espacio	Recursos
¿Quién es más regular	10	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
¿Hemos crecido?	15	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
¿Un verano caluroso?	15	ACC	Parejas	Aula habitual	Cuaderno Ordenadores
¿Saben lo necesario?	15	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno

¿Quién es más regular?

Dos empleadas, Josefa y Paula, han presentado a lo largo del año 20 trabajos de cursos de formación y han obtenido las siguientes calificaciones:

Josefa: 2; 5; 7; 3; 9; 2; 7; 9; 3; 7; 3; 10; 5; 2; 7; 9; 4; 8; 4; 8

Paula: 7; 4; 7; 4; 5; 7; 4; 5; 7; 7; 4; 8; 7; 4; 7; 5; 7; 7; 4; 4

a) Busca valores representativos de cada tabla.

b) ¿Cuál de las dos empleadas ha sido más regular?

¿Hemos crecido?

Durante una cena de la empresa, en la que la mayoría de los trabajadores son españoles al ser una empresa castellana, surge el siguiente tema de debate: ¿somos ya tan altos como los europeos? Y es que durante muchos años se ha etiquetado a los españoles como un poco "bajitos", pero según los últimos datos, ya están a "nivel europeo".

¿Quién es más alto, un español que mide 177 cm o un alemán que mide 181 cm? En un estudio estadístico sobre las alturas de españoles y alemanes aparecían en 1995 los siguientes resultados:

	ESPAÑOLES	ALEMANES
MEDIA	172.2 cm	175.4 cm
DESVIACIÓN TÍPICA	4.4 cm	6.5 cm

¿Un verano caluroso?

Los empleados, cada vez se quejan más del calor durante la temporada de verano, lo cual hace plantearse a la directiva de "Torres" si de verdad se estará recalentando la Tierra. Con el fin de aclarar esto deciden comprobarlo tomando las temperaturas durante una determinada época y compararla con otros años.

Durante el verano de 1.997 se tomaron 50 medidas de la temperatura en grados centígrados, obteniendo la siguiente tabla:

Grados	32	35	40	38	31	25
Nº de días	6	7	5	11	12	9

a) Dibuja un gráfico que creas apropiado.

b) ¿Qué porcentaje de datos hay desde la media menos la desviación típica hasta la media más la desviación típica?

c) Aunque ya se están adaptando al sistema métrico decimal, en los países anglosajones no utilizan los grados centígrados como unidad de temperatura, sino los grados Fahrenheit. Si mandamos los datos anteriores a una Universidad canadiense, deberíamos escribir los resultados obtenidos en este nueva medida. La fórmula de conversión es $F = 1'8C + 32$. ¿Qué tabla de datos enviarías?

¿Saben lo necesario?

Se ha decidido hacer una prueba de ingreso a todos los estudiantes de prácticas, los cuales se dividen a dos grupos. Los que vienen de carreras de ciencias y los que vienen de ingenierías.

Las notas de los de ciencias han sido: 5, 6, 4, 5, 6, 5, 5, 8, 6, 3, 2, 1, 5, 5, 7, 6, 7, 3, 2, 3, 8, 9, 4, 4, 8, 9, 1, 5, 5, 4, 7, 6, 3, 4, 5, 5.

Las notas de los de ingenierías han sido: 1, 5, 7, 4, 3, 8, 6, 5, 4, 7, 3, 7, 1, 2, 4, 8, 9, 7, 8, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 2, 3, 2, 8, 4, 5, 6, 5, 6, 8.

¿Qué grupo obtuvo mejores resultados?

Sexta sesión: Se explicarán lo que son las variables continuas y sus parámetros estadísticos dentro de la Estadística Unidimensional.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Distribuciones de variable continua. Histograma	25	Lección magistral	Individual	Salsa de ordenadores	Pizarra Digital Ordenador
Tabla de edades	20	ABP	Individual	Salsa de ordenadores	Cuaderno
¿Qué marca interesa?	10	ABT	Parejas	Salsa de ordenadores	Ordenadores

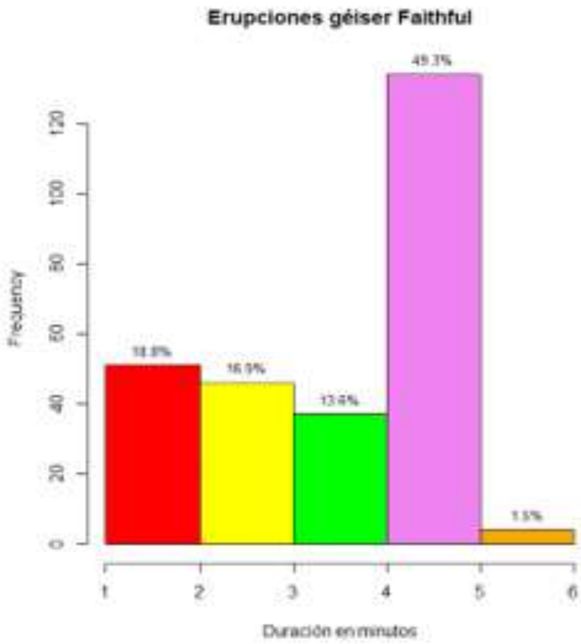
Distribuciones de variable continua. Los parámetros estadísticos

En una distribución de variable continua los datos se suelen agrupar en intervalos y el gráfico adecuado para presentarlos es el **histograma**. Este es un gráfico de rectángulos cuyas bases son los intervalos de la distribución y que tienen como área la frecuencia. La altura de cada rectángulo será llamada **densidad de frecuencia**.

Para el cálculo de promedios (media y desviaciones) cada intervalo o clase está representado por un número, llamado marca de clase, que es precisamente el valor que ocupa el centro del intervalo.

$$\frac{frecuencia}{longitud\ del\ intervalo}$$

X	Fr
1-2	18.8
2-3	16.9
3-4	13.6
4-5	49.3
5-6	1.5



Si para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ representamos por $a_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ su marca de clase y por n_i su frecuencia absoluta siendo el número total de datos: $N = \sum_{i=1}^{n} n_i$

Media: $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} n_i a_i$

Varianza: $Var = \sum_{i=1}^{n} n_i (a_i - \bar{X})^2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{Var}$

La **mediana** se puede calcular geométricamente ya que coincide con el valor que divide al histograma en dos regiones de igual área.

Tabla de edades

Aquí se tiene una tabla en la que se han recogido datos de una muestra de 1000 trabajadores de la fábrica:

Edades (Años)	Nº de Personas
[16, 21)	50
[21, 36)	200
[36, 51)	350
[51, 66)	400

a) ¿Cómo presentarías gráficamente los datos de esta tabla?

b) ¿Cuál es la media de edad?

c) ¿Entre qué edades se agrupa el 50% más joven?

d) ¿Qué edad considerarías más representativa de esta población?

e) ¿Será representativa esta tabla de toda la población?

¿Qué marca interesa más?

La junta directiva está realizando un estudio sobre la calidad de las pilas alcalinas fabricadas por las marcas "Duramucho" y "Vidalarga" que tienen un precio de venta al público similar, ya que son las que se utilizan en algunos aparatos de la maquinaria. Para ello realiza una prueba con 100 recambios de cada una, obteniendo los siguientes resultados:

Duración (horas)	6	7	8	9	10	11
Pilas “Duramucho”	4	10	31	35	14	6
Pilas “Vidalarga”	0	6	39	42	12	1

a) Dibuja el histograma correspondiente a cada marca.

b) Calcula la moda, media y mediana de cada marca.

c) ¿Qué marca crees que resulta más interesante para la empresa?

Séptima sesión: Se continuará con la aplicación práctica de los contenidos de la sesión anterior dentro de la Estadística Unidimensional. Aunque no entra específicamente en los contenidos, se explicará también la desigualdad de Chebycheff.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
¿Altos o bajos?	10	ABP	Individual	Salsa de ordenadores	Cuaderno
Rentabilidad	25	ABT	Parejas	Salsa de ordenadores	Ordenadores
Desigualdad Chebycheff	20	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador Pizarra

¿Altos o bajos?

El debate en la cena del otro día ha llevado a preguntarse a los trabajadores más jóvenes si dentro de su propia empresa son altos, bajos o normales. Para analizarlo, se ha cogido una muestra de 40 de los chicos, todos ellos nacidos el mismo año. La tabla es la siguiente:

Estatura	151	156	161	166	171	176
Nº de Individuos	2	4	11	14	5	4

Clasifica los 40 individuos, de una forma razonada, en altos, normales y bajos.

Rentabilidad

Se está haciendo un estudio para decidir si se instala o no una nueva sucursal de una cadena de productos congelados en un determinado barrio de una gran ciudad.

Para ello, se pasa una encuesta a 150 familias, residentes en el barrio y elegidas al azar, sobre el gasto, expresado en euros, realizado la semana anterior en este tipo de productos. Los datos obtenidos se detallan en la tabla que sigue:

(La tabla contendrá 150 valores, que irán desde 0 hasta 20 como máximo. No se va a poner específicamente ya que ocupa mucho y no es el objetivo de este trabajo).

a) Agrupa los datos por intervalos y dibuja el histograma.

b) Halla los valores centrales.

c) Calcula los parámetros de dispersión y analiza su significado.

d) ¿Entre que valores consideras que estará el gasto "normal" de una familia del barrio en productos congelados?

e) Los gastos de mantenimiento de la tienda suponen unos 600 euros mensuales y se podría conseguir el 60% de las compras de los residentes. ¿Cuántas familias deben residir en el barrio para esperar conseguir unos beneficios mínimos de 900 euros?

Desigualdad de Chebycheff

En una distribución de frecuencias de media $\bar{X}$ y desviación típica σ, Chebycheff puso de manifiesto que el porcentaje de resultados comprendidos en intervalos, centrados en $\bar{X}$ y radios múltiplos de σ, venía dado por la relación:

$$P(|\bar{x} - x| \leq n\sigma) > 1 - \frac{1}{n^2}$$

Esto significa que, por ejemplo, dándole a n el valor dos, en el intervalo $[\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma]$ estará comprendido como mínimo el 75% de la población, ya que:

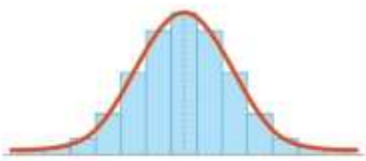
$$1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Octava sesión: Se trabajará con la desviación típica como medida de normalidad dentro de la Estadística Unidimensional.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Desviación típica como medida de normalidad	25	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador
Intervalos normalidad	15	ABT	Individual	Aula habitual	Calculadora Cuaderno
Lámparas	15	ABP	Individual	Aula habitual	Calculadora Cuaderno

Desviación típica como medida de normalidad

Se observará que, en algunos casos, el porcentaje obtenido es superior al que predice la desigualdad de Chebycheff. De forma bastante general, si la distribución presenta simetría respecto a un "pico" central, estos porcentajes se incrementan notablemente. Si el histograma tiene forma de campana, llamada campana de Gauss, se dice que la variable aleatoria se distribuye normalmente. En una distribución normal (que estudiaremos con detalle más adelante) la probabilidad de que un valor observado esté en el intervalo es:



$$68\%\ en\ [\bar{X} - \sigma , \bar{X} + \sigma]$$

$$95\%\ en\ [\bar{X} - 2\sigma , \bar{X} + 2\sigma]$$

$$99\%\ en\ [\bar{X} - 3\sigma , \bar{X} + 3\sigma]$$

Y se puede establecer una clasificación de una población utilizando estos intervalos:

$[-\infty , \bar{X} - 2\,\sigma]$ Valores muy bajos

$[\bar{X} - 2\,\sigma , \bar{X} - \sigma]$ Valores bajos

$[\bar{X} - \sigma , \bar{X} + \sigma]$ Valores normales

$[\bar{X} + \sigma , \bar{X} + 2\sigma]$ Valores altos

$[\bar{X} + 2\,\sigma , +\infty]$ Valores muy altos

Intervalos de normalidad

Como se ha dicho previamente, la empresa "Torres" fabrica productos alimenticios. Entre otras cosas produce y reparte zanahorias. Se quiere analizar las longitudes de estas por lo que se toma una muestra (en mm) de 40 de estas hortalizas:

149, 154, 156, 158, 158, 158, 159, 160, 160, 160,

161, 162, 162, 163, 163, 163, 163, 164, 165, 165,

165, 165, 165, 166, 167, 168, 168, 168, 168, 168,

168, 169, 170, 170, 171, 172, 173, 175, 175, 178.

a) Calcula la media aritmética y la desviación típica.

b) ¿Qué longitudes se pueden considerar normales?

c) Calcula el intervalo de normalidad. ¿Cuántas zanahorias hay en él?

Lámparas

El 80% de las lámparas que se utilizan en las fábricas de "Torres" son de buena calidad (vida media superior a 500 horas), según se ha comprobado después de repetidas estadísticas. Se sabe también que, en cada partida de 200, la desviación típica con respecto a la media de lámparas de buena calidad es de 6 unidades.

Tomamos al azar 200 lámparas de dicha marca. ¿Te parece poco o muy probable que el número de lámparas de buena calidad que haya entre los 200, esté comprendido entre 150 y 170?

Novena sesión: <u>Se introducirá la Estadística Bidimensional, explicando que son las nubes de puntos y los elementos que la componen.</u>

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Trabajando con dos variables. Diagramas de dispersión	25	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador
Horas de trabajo	10	ABP	Individual	Salsa de ordenadores	Ordenadores
La escritura de la hipoteca	20	ACC	Parejas	Salsa de ordenadores	Ordenadores Cuaderno

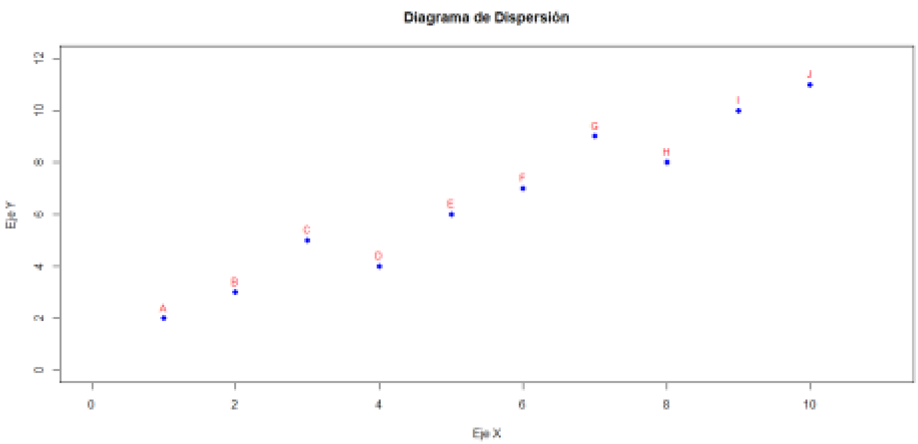
Trabajando con dos variables. Diagramas de dispersión

En muchas ocasiones existe la preocupación de estudiar, de representar gráficamente y de procesar numéricamente los datos relativas a una variable de un conjunto de personas o cosas. Interesaba, por ejemplo, conocer la distribución de las notas de dos alumnas en matemáticas. Se trataba de estudiar distribuciones unidimensionales, ya que sólo se estudia una variable (la nota). Pero cada miembro de un colectivo presenta diversos aspectos por los que esto puede interesar. En el caso de los jugadores de un equipo de baloncesto interesa no solamente la altura sino también el peso (un jugador muy alto, pero muy delgado tendrá problemas de musculatura). Por eso, se va a intentar analizar si hay o no relación entre diferentes características de un mismo individuo.

¿Será verdad que las mujeres conducen mejor? ¿Influye la luna en el comportamiento de las personas? ¿Las personas más altas tienen el pie más grande?

En una población amplia de personas se puede establecer una medida de la altura y de la medida del pie. A cada elemento de la población se le puede asignar dos números (variables) y así, en un plano cartesiano asignando a la altura el eje horizontal y a la medida del pie el eje vertical, se puede asignar a cada persona un punto.

Siempre que se estudie cualquier par de variables, una primera manera de hacerlo es mediante una gráfica. Cada par de valores obtenido en una muestra se puede representar en el plano, obteniendo una nube de puntos que se conoce con el nombre de **Diagrama de dispersión** o Nube de puntos.



A las variables estadísticas resultantes del análisis de dos variables o fenómenos diferentes se las llama **variables estadísticas bidimensionales**.

Se va a intentar ver cómo, mediante la exploración de esa nube de puntos, se pueden aceptar o rechazar afirmaciones como las expuestas anteriormente. Y lo más importante, se sabrá medir de alguna manera la fiabilidad de esas afirmaciones.

Horas de trabajo

Horas semanales	Nota
5	5.5
2	3
7	5.5
7.5	5
4	4.5
1	3
8	7.5
3	4
10	8
7	6

Para ascender a mejores puestos (lo cual conlleva un retribución mayor, más estabilidad etc.) se da la opción de realizar a los trabajadores un examen al final del año. Los que obtengan mayores calificaciones podrán optar a mejores puestos. Se quiere analizar qué tan relacionado está el tiempo dedicado a esta prueba y las clasificaciones obtenidas para comprobar si de verdad en este examen se está valorando bien el tiempo dedicado a formarse por parte de los empleados. Se ha elegido una muestra de 10 empleados y los datos recogidos son los siguientes:

a) ¿Cómo representarías gráficamente los datos?

b) ¿Consideras que existe relación entre las horas de estudio y las calificaciones?

La escritura de la hipoteca

Cuantía del crédito (euros)	Gastos de Notario (euros)	Gastos de Registro (euros)
30000	380	126
42000	400	150
60000	440	190
90000	470	250
120000	500	310
150000	530	340

Cuando se tiene una empresa, está tiene cantidad de propiedades y activos, por lo que se tendrán que manejar este tipo de cosas.

a) En este caso, ¿cuántas variables intervienen?

b) Parece claro que, si el crédito es mayor, los gastos de registro son mayores, pero ¿podremos prever qué cantidad habrá que pagar en gastos de registro por un crédito de 360.000 euros para comprar una nueva sucursal?

c) Seguramente dirás que sí, pero ¿puedes asegurarlo?

d) ¿Y si hablamos de los gastos de notario?

e) ¿Existe alguna relación entre la cuantía del crédito y los gastos de notario? ¿Y con los de registro?

Décima sesión: Se expondrán las relaciones entre variables dentro de la Estadística Bidimensional.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Distintas relaciones entre variables	20	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador
Tribunal constitucional	20	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Países en desarrollo	15	ACC	Parejas	Aula habitual	Cuaderno Ordenadores

Distintas relaciones entre variables

Si un coche va muy rápido, llegará antes a su destino; si se compran 15 barras de pan se pagará quince veces más que si se compra sólo una. Y existe una fórmula que permite calcular, exactamente, el espacio recorrido en función del tiempo (siempre que sea uniforme o uniformemente acelerado) o el precio que habrá que pagar en función del número de barras de pan. Se tiene una función que relaciona ambas variables. Se dirá, por tanto, que entre las dos variables hay una **relación funcional**.

En un anuario de un año cualquiera, por ejemplo, el de 1998 de "El País", se pueden encontrar, sin embargo, muchas otras variables que están relacionadas en cierta forma, pero no existe una relación funcional entre ellas, es decir, no hay una fórmula que permita obtener una a partir de la otra:

- Turistas nacionales y extranjeros en las islas Baleares.
- Años y audiencia de las cadenas de radio.
- Años y ventas de CD y LP.
- Días de la semana y audiencias en TV.
- Gastos en educación de un país y número de licenciados.

- Precio de los pisos y ventas.

En los casos anteriores no se puede predecir lo que va a ocurrir, no hay una fórmula que permita saber cuántos CD se venderán el año 1999, pero sí que se puede aventurar que cada año se venden más CD y menos LP, o que si los pisos bajan de precio se venderán más. En cualquier caso, para poder aventurar alguna hipótesis, se necesita tener datos estadísticos que permitan analizar los datos y extraer conclusiones. En todos los casos anteriores **la relación que hay entre las variables es estadística** y diremos que entre ellas hay una **cierta correlación**.

Siempre hay que preguntarse qué tipo de estudio se va a hacer ya que muchas parejas de variables, aunque no pueden ser relacionadas mediante una fórmula matemática, sí pueden relacionarse de una forma estadística. El desarrollo que se va a seguir va a consistir en analizar este tipo de relaciones. Para ello será importante repasar el reconocimiento de funciones, trabajo en el que ya se debería tener una cierta soltura.

El tribunal constitucional

Ante algunas dudas que han surgido dentro de "Torres" cuestionando la efectividad del tribunal constitucional a la hora de resolver casos, se ha realizado un estudio para comprobarlo, ya que en el caso de que no esté funcionando correctamente, la entidad estaría dispuesta a poner reclamaciones. Se tienen los siguiente datos:

AÑOS	1991-1992	1993-1994	1995-1996	1997-1998
Nº ASUNTOS INGRESADOS	655	1436	2157	2847
Nº ASUNTOS RESUELTOS	298	1278	2062	2197

a) Considera las variables nº asuntos ingresados y nº de asuntos resueltos. Dibuja en unos ejes cartesianos los puntos que tienen como coordenadas las dos variables.

b) Has obtenidos la nube de puntos que se mencionaba anteriormente. ¿Observas alguna regularidad?

c) Hemos encontrado en un informe del Tribunal Constitucional que en el año judicial 1999-2000 se presentaron 4.000 casos, ¿cuántos piensas que se resolvieron? ¿En qué te basas?

d) La **correlación** (una cierta relación entre ambas variables) que has obtenido en este caso entre las dos variables, ¿la calificarías de **positiva** o de **negativa**?

Países en desarrollo

La empresa ha empezado a pensar en deslocalizar parte de su producción a un país en el que los gastos sean mucho menores. Estos países suelen ser subdesarrollados o en vías de desarrollo en los que incluso se pueden llegar a explotar a menores. Ante la mirada negativa de la población, antes de llevar a cabo cualquier movimiento se quiere analizar, entre otras cosas, cuál es la mortalidad infantil en dichos lugares y cómo funciona la sanidad allí. La cosa es que no existe una fórmula que nos permita saber cuántos niños fallecerán en función de los gastos en sanidad de cada país, pero ¿crees que habrá una relación estadística?

Supongamos que estamos de acuerdo en que hay un cierto grado de correlación entre las variables gastos en sanidad-mortalidad infantil; pero, en este caso, ¿la calificarías de positiva? ¿de negativa? (con un planteamiento de tipo estadístico, no de tipo social). Intenta buscar una información sobre los datos que se mencionan.

Décimo primera sesión: Se expondrán que son las relaciones funcionales experimentales dentro de la Estadística Bidimensional.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Relación funcional experimental	10	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador
Los empleados	15	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Planetas	30 + trabajo fuera del aula	ABT	Parejas	Aula habitual	Ordenadores

Relación funcional experimental

Aquí se tienen una serie de actividades en las que hay que encontrar "la mejor" aproximación a la relación funcional existente entre dos variables, disponiendo de una tabla de valores obtenida experimentalmente. (Conviene que se pregunte a los alumnos tras su realización lo siguiente: ¿Entiendes por "la mejor" lo mismo que tus compañeros?)

Se trata de identificar la función buscada a partir de la nube de puntos. Una vez hecho, que cada uno construya la función que mejor se adapte a los puntos, para luego discutir los criterios seguidos y concluir cuál parece "la mejor aproximación".

Se puede utilizar una calculadora gráfica o un ordenador para corroborar o rechazar hipótesis de forma intuitiva, representando gráficamente la nube de puntos y superponiendo las gráficas de las funciones propuestas (y de paso se aplicaría también la competencia digital).

Los empleados

A lo largo de los primeros años que ha funcionado la empresa, el número de empleados fijos ha ido evolucionando según la siguiente tabla:

Año	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Nº de Empleados	50	62	74	86	98	110	122	134

a) La relación entre las dos variables ¿de qué tipo es?

b) Si sigue con esta dinámica, ¿Cuántos empleados es previsible que tenga la empresa en 1999?¿Y en 2005?

Planetas (ejercicio extraordinario)

Se realizará este ejercicio, que tiene que ver con el temario y además está estrechamente relacionado con el campo de la física y la geología.

Kepler (1571-1630) Anunció su tercera ley sobre el movimiento de los planetas observando los datos de Tycho Brahe concernientes a la distancia media al Sol y los períodos de rotación alrededor del mismo. No disponía de ninguna teoría para explicar dicha ley y tardó diez años en enunciarla: fue un gran momento de la historia del análisis de datos.

Johann Titius formuló en 1.776 una regla empírica para las distancias entre el Sol y cada uno de los planetas conocidos hasta ese momento: dio la serie numérica: 0,3,6, 12, 24, 48, 96 en la que todos los términos, a partir del tercero, son doble del anterior. A continuación, sumó 4 a cada uno de dichos términos, obteniendo: 4,7, 10, 13, 28, 52, 100 resultando que estos números daban de una forma muy aproximada la distancia de los planetas Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno al Sol, en millones de km, considerando un factor de escala de 14'9. Salvo para el número 28, para el que no había ningún planeta conocido.

Esta ley se conoce como **Ley de Bode**, por habérsela apropiado éste sin mencionar a su autor, y no hubiera pasado de ser una mera curiosidad, de no ser porque en 1781 **Herschel** descubrió el planeta Urano, a una distancia del Sol de 192 unidades, muy próximas a las $2 \cdot 96 + 4 = 196$ que sería el siguiente número en la serie, lo que provocó que los esfuerzos de los astrónomos se encaminaran a la búsqueda del planeta a la distancia de $2 \cdot 28$ unidades.

Piazzi descubrió en la nochevieja de 1800 el que hoy sabemos que es el asteroide Ceres; con los pocos datos disponibles, al ser un cuerpo muy pequeño y difícil de observar, **Gauss** (1777-1855) preparó una precisa técnica de cálculo con que se pudo localizar nuevamente el finales de 1802.

Parte de dicha técnica, publicada en 1809, consistió en demostrar que los errores inherentes a informaciones de tipo experimental se aproximan a una curva, la hoy llamada campana de Gauss; por otra parte, diseñó el método hoy conocido como de mínimos cuadrados.

Sin embargo, las posiciones de los planetas descubiertos más recientemente, Neptuno (1.846) y Plutón (1.930), se desvían mucho de las pronosticadas por la ley de Bode, y dado que la ley no tiene una base teórica, los astrónomos creen hoy que esta relación es una pura coincidencia matemática.

Se va a intentar deducir con los medios de que disponemos ahora una ley algo más ajustada que la de Titius-Bode y la tercera ley de Kepler:

El siguiente cuadro da, para cada planeta del sistema solar, su distancia media al Sol, considerando como 10 la distancia de la Tierra al Sol, así como la duración de un giro completo alrededor del mismo.

Planeta	**Núm. (n)**	**Dist. (dn)**	**Tiempo de Revolución (Tn)**
Mercurio	1	3.87	88 días
Venus	2	7.23	224.7 días
Tierra	3	10	1 año
Marte	4	15.24	1.88 años
Júpiter	5	952.03	11.9 años
Saturno	6	95.46	29.5 años
Urano	7	192	84 años
Neptuno	8	300.9	164.8 años
Plutón	9	395	247.7 años

a) Representa gráficamente la relación entre el número del planeta y su distancia al Sol (n y dn).

b) ¿Qué tipo de relación te parece que puede existir entre ambas variables? Busca un modelo funcional apropiado.

c) ¿A qué distancia sería de esperar que se encontrase un eventual decimotercer planeta?

d) Representa gráficamente la relación entre la distancia al Sol y el período de rotación (dn y Tn).

e) ¿Qué relación funcional encuentras entre ambas? Si lo consigues, acabarás de deducir la tercera ley de Kepler. Búscala en alguna enciclopedia y compara encontrado.

***Décimo segunda sesión*:** Ya introducidas las relaciones funcionales experimentales ahora se explicarán y se trabajará con las relaciones estadísticas, comenzando a explicar el concepto de correlación. Dentro de la Estadística Bidimensional.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Publicidad	10	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Distribuciones marginales	10	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador
Buscando distribuciones bidimensionales	10	ACC	Grupos de tres	Aula habitual	Cuaderno Consultar ordenador
La correlación	25	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador

Publicidad

La empresa ha realizado un seguimiento durante ocho meses de las cifras gastadas en publicidad y las cifras de ventas. Se obtienen los siguientes pares de valores relativos a gastos en publicidad (X) y a cifra de ventas (Y):

(6,2)	(6.5,6)	(7,6)	(7.5,8)	(8,9)	(8.5,6)	(9,10)	(9.5,9)

a) Representa gráficamente la nube de puntos de las observaciones conjuntas. ¿Observas alguna relación entre las dos variables?

b) ¿Qué opinas sobre la política comercial de la empresa?

Distribuciones marginales

Al analizar una distribución bidimensional, uno puede centrar su estudio en el comportamiento de una de las variables, con independencia de cómo se comporta la otra. Estaríamos así en el análisis de una distribución marginal.

En una variable bidimensional (X,Y), cada una de las variables por separado (X) e (Y) constituyen variables unidimensionales estadísticas. A estas variables se les conoce como marginales. Las distribuciones marginales de las variables estadísticas X e Y se obtienen a partir de la tabla de doble entrada considerando una sola variable.

Por ejemplo: Supónganse los siguientes datos sobre estudiantes y sus preferencias por materias. La tabla de contingencia será:

	Matemáticas	Física	**Total**
Masculino	20	15	35
Femenino	25	30	55
Total	45	45	90

Las tablas marginales para género (variable Y) y para materia (variable X) serán:

Género	**Total**
Masculino	35
Femenino	55

Materia	**Total**
Matemáticas	45
Física	45

En busca de distribuciones bidimensionales

Hasta ahora se te han dado habitualmente tablas o información en la que aparecían normalmente dos variables con sus correspondientes distribuciones estadísticas. ¿Y si cambiamos de planteamiento? Busca e investiga sobre las distribuciones estadísticas al analizar estas parejas de variables relacionadas con la empresa:

- Producción Mensual y Número de Empleados
- Precio del Producto y Cantidad Vendida
- Costes de Producción y Beneficio Neto
- Coste de Materia Prima y Precio de Venta
- Coste de Transporte y Tiempo de Entrega

Intenta encontrar otras variables que, a tu juicio, puedan tener algún tipo de relación.

Relación estadística. La Correlación

En la actividad "la cocina" se obtenía una muestra de la población y se estudiaba una característica de la Escuela Europea mediante la muestra obtenida.

En otras actividades se han estudiado dos características de algún sector (muestra) de la población. Pero ¿siempre están relacionadas?

Suponer que se estudia la relación entre la estatura y el número de pie en los adolescentes de una ciudad. La ficha estadística sería la siguiente:

Población: Adolescentes de 14 a 18 años en la ciudad; Muestra: 100 encuestas aleatorias; Variable X: Estatura; Variable Y: Número de pie.

¿Qué tipo de relación se diría que tienen? Parece lógico contestar algo como lo siguiente: **Si se mide más, el número de pie será mayor**. Pero ¿Ocurrirá siempre así? Parece bastante evidente que se podrían relacionar de alguna otra forma, pero ¿cómo?

Unas líneas más arriba se preguntaba si siempre estaban relacionadas las dos características que se estudiaban en una muestra. Si se estudia la relación entre las variables:

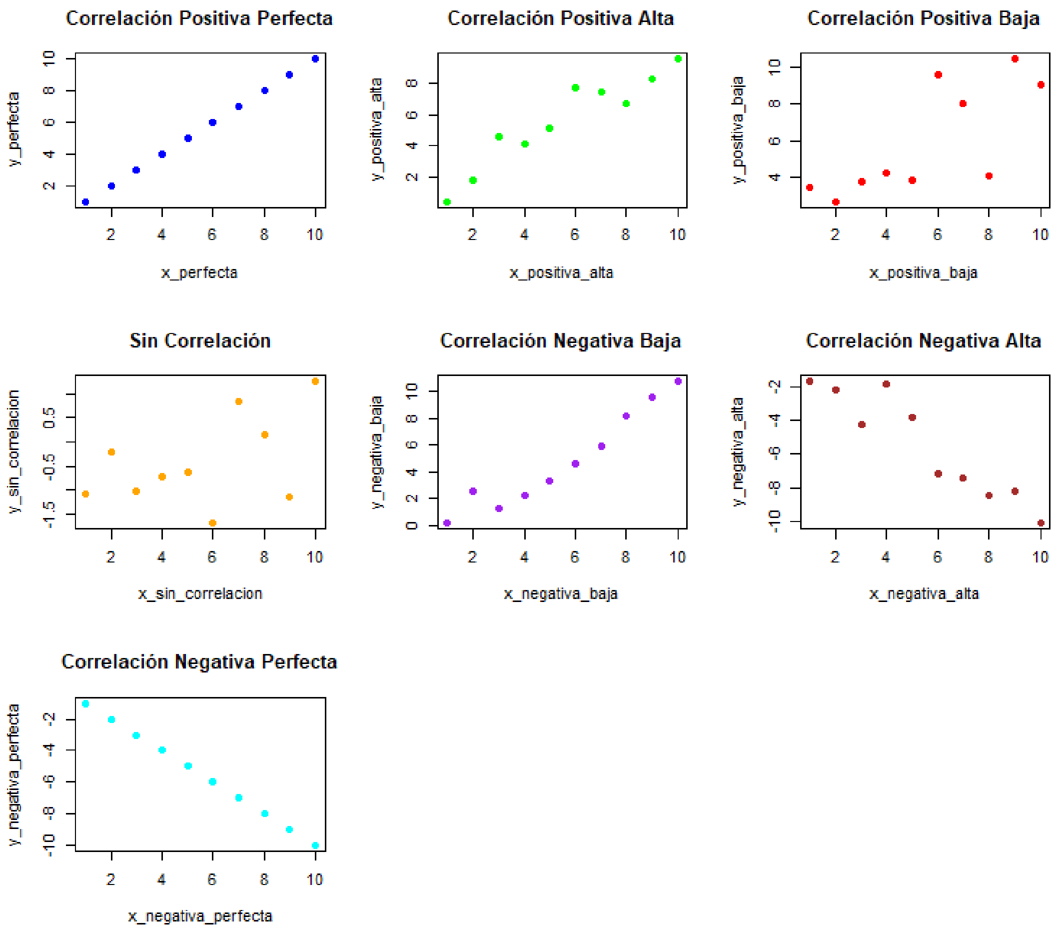
Variable X: Asignación semanal; Variable Y: Gastos en cine a la semana.

No parece ya tan clara la relación. Evidentemente habrá alguna mínima relación (si sólo se tienen 6 euros de asignación, resulta complicado gastarse 4 euros en el cine)

A la relación estadística entre dos variables hay que ponerle algún nombre para diferenciarla de una relación estrictamente funcional. Esta **relación** entre variables estadísticas se llama **correlación** y el grado de esta correlación se cuantifica mediante el **Coeficiente de correlación**.

Ya se ha visto anteriormente que, al estudiar cualquier par de variables, una primera manera de hacerlo es mediante una gráfica, obteniendo una nube de puntos que se conoce con el nombre de Diagrama de dispersión. Los diagramas de dispersión o nubes de puntos nos indican:

- Si existe o no correlación entre dichas variables.
- Si existe, ¿de qué tipo es? (lineal, cuadrática, cúbica, exponencial...)
- Si hay correlación lineal, si es positiva o negativa (observar ejemplos de la gráfica)



Décimo tercera sesión: <u>En esta clase se aplicará el concepto de correlación y se introducirá lo que es la regresión. Dentro de la Estadística Bidimensional.</u>

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Puntos negros	10	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
La sencillez de la ciencia	20	Curiosidades (ACC)	Debate de toda la clase	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador
Regresión lineal y recta de regresión	25	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador

Puntos negros

"Torres" distribuye mercancías por casi toda la península, y la mayoría de los transportes es a través de camiones por las carreteras, autovías autopistas etc. Últimamente se han detectado varios siniestros, y se piensa que principalmente se deben al mal estado de la infraestructura. Por ello, se ha abierto una investigación en las principales provincias donde distribuye la empresa acerca de los puntos negros en las carreteras, los accidentes y los muertos. En el año 1998 se recogieron estos datos:

	A Coruña	Cantabria	Navarra	Ávila	Soria	Barcelona	Madrid	Zaragoza	Granada	Alicante
Nº puntos negros	59	24	24	13	2	263	92	21	9	36
Nº accidentes	298	81	130	112	12	1157	357	91	33	192
Nº muertos	13	1	4	2	0	24	14	5	1	9

a) ¿Hay correlación entre el nº de puntos negros y el nº de accidentes?¿De qué tipo?

b) ¿Y entre el nº de puntos negros y el nº de muertos por accidente?

c) Si sabemos que en la provincia de Burgos hay 17 puntos negros ¿podremos prever, aproximadamente, el nº de accidentes que se producirán?

La sencillez de la ciencia (teoría extraordinaria)

En un libro titulado **Circo Matemático** de Martín Gardner, se encuentra el siguiente párrafo:

Fijémonos en un ejemplo "sencillo" de investigación científica. Un físico que está buscando una relación funcional entre dos variables va registrando sus observaciones como puntos de un gráfico. No sólo dibujará la línea más sencilla que se ajuste mejor a los datos observados, sino que llega a anteponer el postulado de simplicidad a los valores realmente observados. Cuando los puntos de la gráfica caen en la cercanía de una recta, nuestro físico no traza una línea sinuosa que contenga a todos los puntos. Supondrá, por el contrario, que sus observaciones han sufrido sesgos por una u otra causa, y trazará una línea recta, que posiblemente no pase por ninguno de los puntos observados, y conjeturará que la función es una sencilla proporcionalidad, ejemplo $x = 2y$. *Si esta aproximación no diese predicciones suficientemente exactas de nuevas observaciones, el científico ensayaría leyes de grado superior; ajustaría, pongamos por caso, una parábola o una hipérbola a la nube de puntos. El meollo de la cuestión es que, a igualdad de las restantes circunstancias, cuanto más sencilla sea la curva mayor es su probabilidad de ser correcta.*

El número de leyes fundamentales expresables mediante ecuaciones de grados pequeños es verdaderamente sorprendentes no menos conocida es la preferencia que la Naturaleza parece mostrar por los extremos (valores máximos o mínimos), quizás porque en tales casos la derivada es nula.

En ocasiones, incluso al evaluar teorías de máxima complejidad y nivel científico, como las teorías de la relatividad o de partículas elementales, se antepone la presunción de simplicidad a los datos.

Tras la reflexión de este texto, se plantearía a los alumnos lo siguiente: “Si los grandes físicos buscan la sencillez en los fenómenos, ¿por qué no hacerlo también nosotros?”

Regresión Lineal y Recta de Regresión

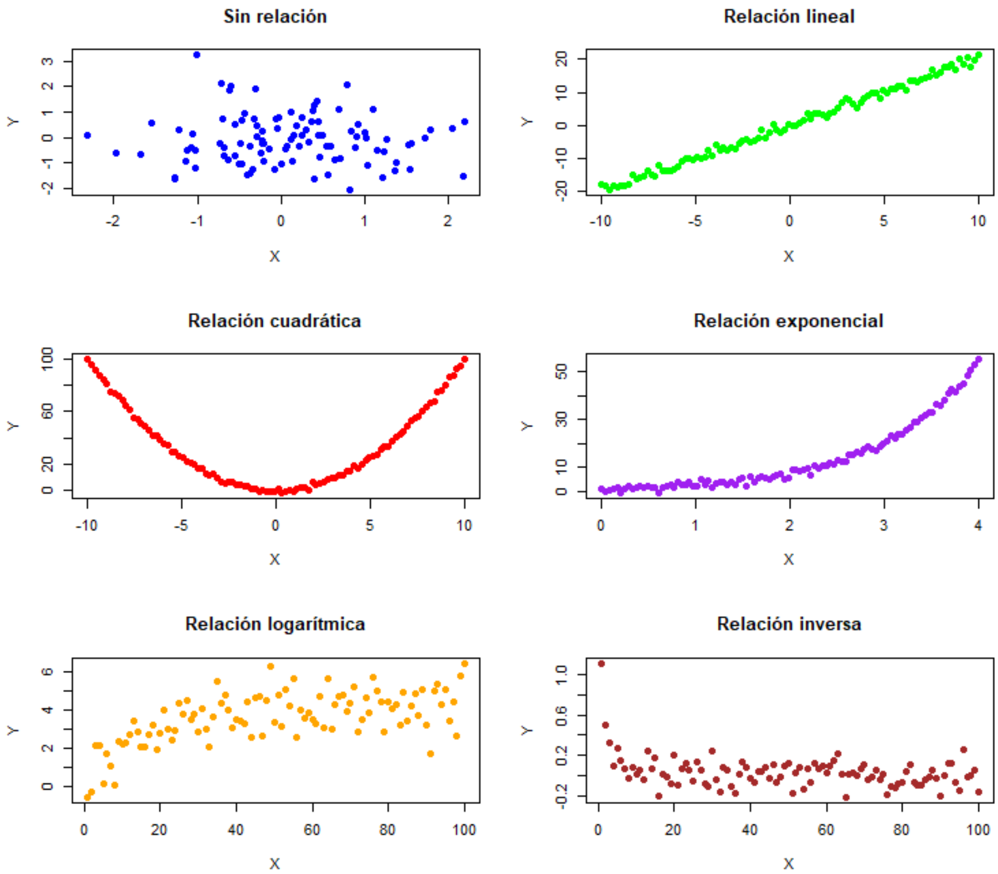
Al trabajar con una variable bidimensional (X,Y) interesa conocer cómo influye la variación de una variable en la otra. En la última pregunta de la actividad Puntos negros, ocurría lo mismo: ¿Influyen los puntos negros en el número de accidentes? ¿En qué medida?

Esto se puede averiguar mediante:

- La **Correlación**, que trata de medir la mayor o menor interdependencia estadística entre las variables. Pero no permite cuantificar el valor de una variable conociendo el valor de la otra.

- La **Regresión**, cuyo objetivo es encontrar una función que permita predecir los valores de una de las variables conocida la otra. Dada una variable estadística bidimensional (X, Y), se trata de encontrar una línea que se ajuste lo mejor posible a su nube de puntos y permita estimar los valores de Y conocidos los valores de X y viceversa.

El determinar la línea apropiada dependerá de la forma que tenga la nube de puntos. La regresión es lineal cuando la línea es recta y no lineal en caso contrario.



Aunque en ninguno de los casos se puede encontrar una recta que se amolde bien a la nube de puntos, es evidente que, en cada uno de ellos hay una curva a la que se aproximan. A esa curva se le llama línea de regresión. La ecuación de la curva (ecuación de regresión) permite hallar los valores de una variable en función de los de la otra, si bien dichos valores sólo pueden obtenerse de forma aproximada y con un cierto margen de error. También puede suceder que tal línea no exista.

Cuando la nube de puntos sugiere regresión lineal, se ha trazado la recta correspondiente a ojo. ¿Hay algún modo de obtenerla sin ambigüedad, de llegar a su ecuación sin recurrir al tanteo? Ahora se buscará un método más preciso, que permita obtener, sin ninguna duda, una única recta que cumpla la condición requerida. Para ello se suele utilizar el método de los mínimos cuadrados. La recta de regresión pasará siempre por el punto llamado centro de gravedad de la distribución.

Si se quiere predecir el valor de y dado un valor conocido de x, se tendrá que utilizar la Recta de Regresión de Y sobre X que tiene por ecuación:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$$

Donde σ_x y σ_y son las desviaciones típicas respectivas de las distribuciones marginales de X e Y; y σ_{xy} es la **covarianza** de (X,Y) definida así:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

Se debe tener en cuenta que la recta de regresión no siempre sirve. Por ejemplo, si se comparase el número del DNI de varias personas con su número de teléfono, o el número de hermanos con el número de teléfono nos da lugar a rectas de regresión, pero totalmente absurdas.

A partir de este momento se van a plantear las condiciones que deben cumplir las distribuciones bidimensionales para que la recta de regresión realmente nos sirva para formular hipótesis que sean bastante fiables.

***Décimo cuarta sesión*:** En esta clase se aplicará la teoría de la regresión, la definición de covarianza y el método de mínimos cuadrados para construir la recta de regresión. Dentro de la Estadística Bidimensional.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
El concursante	15	ABP	Individual	Sala de ordenadores	Cuaderno
La contaminación por ozono	40	ABT	Individual y parejas	Sala de ordenadores	Ordenadores y cuaderno

El concursante

Para celebrar el gran crecimiento de la empresa, se ha organizado un concurso en el que participarán los 10 empleados mejor valorados. Este concurso se llamará “Números y Palabras”. Estos candidatos han obtenido sobre un máximo de 100 puntos las siguientes puntuaciones:

Números	90	85	75	60	86	92	100	70		90
Palabras	87	85	74	61	80	90		69	70	91

a) ¿Qué puntuación crees que habrá obtenido en "Palabras" la trabajadora que obtuvo 100 en "Números"

b) ¿Qué puntuación crees que habrá obtenido en "Números" el empleado que obtuvo 70 en "Palabras"

c) Si tuvieses que elegir un trabajador "standard", "modelo" o "tipo" para tu empresa, ¿qué criterio seguirías?

Para intentar contestar a las preguntas anteriores, conviene trazar la recta de regresión que recoja los datos con un poco más de precisión de lo que lo que se ha hecho hasta ahora.

¿Habrá algún punto importante del plano por el que deba pasar la recta de regresión? Se trataría de encontrar un punto que se encontrara en el "centro" de la nube, que en cierta forma pudiera resumir y representar a todos los demás puntos, es decir, un concursante modelo que hubiera tenido en ambas partes del concurso una puntuación media que representara a la de todos los concursantes. ¿Qué punto se te ocurre?

La contaminación por ozono

Desde el Ministerio de Medio Ambiente se ha proporcionado la siguiente tabla:

CIUDADES ESPAÑOLAS CON ALERTA POR CONTAMINACIÓN EN 1996		
Ciudad	**Nº de alertas**	**Concentración máxima alcanzada (grs/m3)**
Valladolid	40	335
Badalona	18	323
Vic	13	222
Veciana	11	239
Martorell	10	253
Manlleu	9	242
Montcada	7	220
Manresa	7	220
Palencia	6	214

Desde la empresa “Torres” se quieren analizar bien los datos, ya que busca ser una empresa sostenible y verde, debido a que sus cargos directivos están muy concienciados y saben que es posible que esta contaminación afecte a las vías respiratorias de los ciudadanos (* Los efectos en la salud aparecen cuando se superan los 240 grs/m3). Si se relacionasen a lo largo de cuatro años en una población castellanoleonesa el número de alertas con el número de muertes producidas por enfermedades respiratorias en las mismas fechas obtendríamos los siguientes resultados:

Año	**Nº de alertas**	**Nº de muertes**
1994	6	3
1995	7	6
1996	6	2
1997	9	9

¿Qué número de muertes se preverán si el número de alertas llega a 15?

Para intentar contestar a esta pregunta vamos a seguir los siguientes pasos, que recogen lo que se denomina **método de mínimos cuadrados**:

1. Representa la nube de puntos y ajusta una recta de regresión "a ojo".

- ¿Por qué punto debe pasar necesariamente la recta de regresión?
- Representa este punto y dibuja una recta que pase por él y que, según tu criterio, se aproxime a los cuatro puntos.
- Escribe la ecuación de la recta.
- Responde a la cuestión planteada a partir de tu recta.

Compara los resultados obtenidos con los de tus compañeros. ¿Coinciden?

2. Ahora vamos a buscar la "mejor" recta de todas las posibles. Vamos a llamarla:

$$y_r = a \cdot x + b$$

(Ya sabes calcular la ecuación de una recta conociendo dos puntos, pero no es éste el objetivo de esta actividad)

Ya conoces las coordenadas de un punto por el que debe pasar la recta (Centro de gravedad), pero no conocemos su pendiente (a) que es precisamente lo que queremos averiguar.

- Impón la condición de que la recta anterior pase por dicho punto y transforma la ecuación anterior en otra que sólo contenga el parámetro "a".
- Sustituye en la ecuación de esa recta el valor de la contaminación del primer año que aparece en la tabla, ¿cuántas muertes hubo en el primer año? (sale en función de "a").
- ¿Cuántas muertes hubo en ese año, en realidad, según la tabla?
- Calcula la diferencia entre el número de muertes según la recta y en la realidad (también sale en función de "a") y elévala al cuadrado.

Con ello habrás completado la tercera fila de esta tabla:

Año	**Índice de contaminación**	**Muertes reales**	**Muertes según la recta**	**Diferencia**	**Desarrollo de diferencias al cuadrado**
	x_i	y_i	$y_r = a \cdot x + b$	$y_r - y_i$	$(y_r - y_i)^2$
1994	6	3	$-a + 5$	$-a + 2$	$a^2 - 4a + 4$
1995	7	6			
1996	6	2			
1997	9	9			
				SUMA:	

- Haz lo mismo con los otros tres años y suma los cuatro resultados (obtendrás un polinomio en la variable a). Para organizarte mejor, escríbelo en la tabla.

En realidad, este polinomio de 2º grado en "a" que hemos obtenido no nos dice si los errores cometidos al tomar una recta u otra son grandes o pequeños. Si recuerdas nuestro objetivo, hay que reconocer que la pendiente no la sabemos todavía, pero ya casi lo hemos logrado. La clave es hallar el valor de "a" que haga mínimo ese polinomio.

- Considera el polinomio como una función polinómica de 2º grado; su gráfica es una parábola. Halla su vértice, ¿cuál será el valor de "a" que hace mínima esa función?
- ¿Cuánto vale la pendiente que buscábamos?
- Escribe la ecuación de la recta de regresión (recuerda que conoces el centro de gravedad). Represéntala.

- Responde a la pregunta que se planteó y compárala con la que diste con anterioridad en el apartado 1.

Décimo quinta sesión: <u>En esta clase se aplicará y explicará a fondo el coeficiente de correlación. Dentro de la Estadística Bidimensional.</u>

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
El Coeficiente de Correlación	25	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador
IPC	20	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Explicación y creación de grupos para el trabajo	10	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra

El Coeficiente de Correlación

Para medir de una forma más concreta la correlación entre dos variables, se define el Coeficiente de Correlación, parámetro cuyo valor viene dado por la expresión:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

donde σ_x y σ_y son las desviaciones típicas de las distribuciones de las variables x e y; σ_{xy} es la covarianza, parámetro especifico de la distribución bidimensional del que ya se ha hablado.

Algunas propiedades del coeficiente de correlación son:

- No tiene unidades.
- Su valor está comprendido entre -1 y 1.

Al hallar los posibles valores del Coeficiente se pueden encontrar estas situaciones:

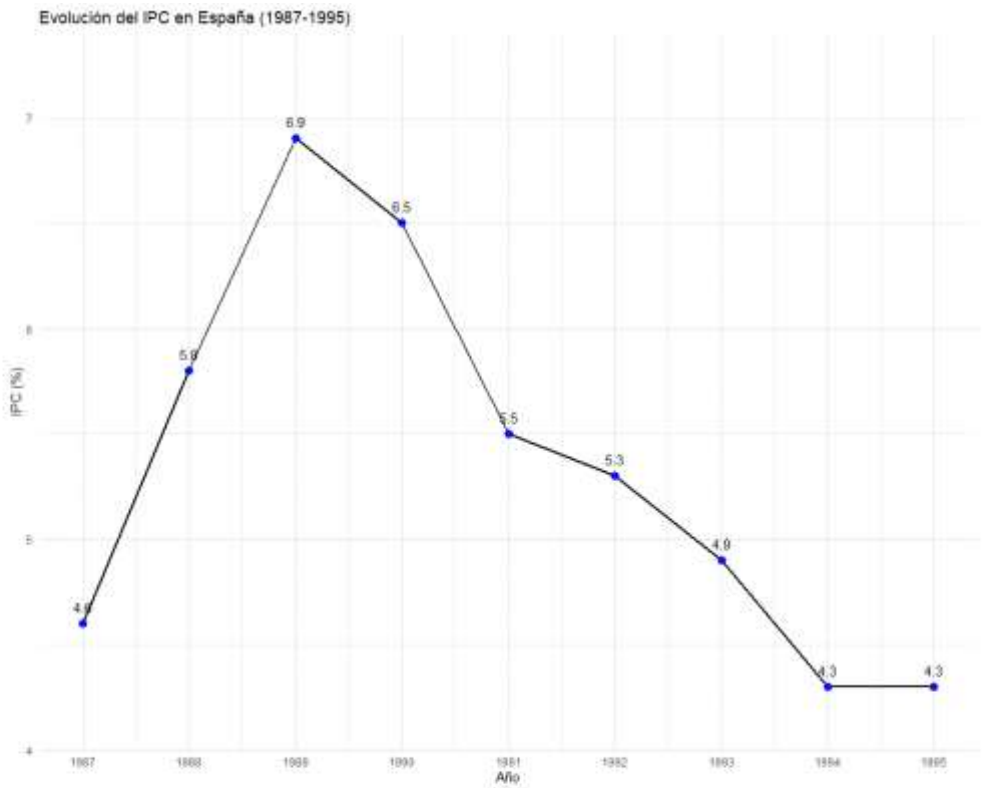
1. Si r = 1, la correlación es perfecta. Existe una dependencia funcional positiva entre ambas variables (podremos encontrar una fórmula que nos dé exactamente el valor de una de las variables conociendo el valor de la otra).
2. Si r = -1, la situación es la misma que en el caso anterior, pero con dependencia funcional negativa.
3. Si r = 0 no existe correlación entre ambas variables (cualquier predicción es totalmente aleatoria; no existe ningún soporte que la justifique).

En general, cuanto más próximo a cero está el valor de r, menor es la correlación y, por tanto, mayor será el error cometido en la previsión. Al contrario, cuanto más próximo a 1 o a-1 está el valor de r, mayor es la correlación (sea positiva o negativa) y, por tanto, menor será el error cometido en la previsión.

IPC

Las subidas y bajadas del IPC (Índice de Precios al Consumidor) son muy importantes ya que mide la variación de los precios de una cesta de bienes y servicios representativa del consumo de los hogares. Es importante para una empresa de productos agroalimentarios porque influye en los costes de producción y en los precios de venta. Además, afecta el poder adquisitivo de los consumidores, influyendo en la demanda de los productos de la empresa. También es esencial para la planificación financiera y presupuestaria, permitiendo anticipar cambios económicos.

Se tienen estos datos de 1996:



NOTA: La inflación de 1997 era la prevista por el gobierno.

a) ¿Crees que hay correlación entre el año en el que se estudia el IPC y el valor del IPC?¿De qué tipo?

b) El gobierno fijó para 1998 una inflación del 2.1% (dato que afecta a sueldos de funcionarios, pensionistas etc.) ¿Estimas que es un valor fiable?

Décimo sexta sesión: En esta clase se explicará lo que es el coeficiente de determinación y se hará un problema. El resto del tiempo se dedicará a responder dudas acerca de esta parte del temario.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
El Coeficiente de determinación	10	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador
Publicidad y ventas	15	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Trabajar el proyecto en clase	30 + trabajo fuera del aula	ACC y ABT	Grupos de tres	Sala de Ordenadores	Ordenadores

El Coeficiente de Determinación

Como se puede ver, el coeficiente de correlación sólo da información para las relaciones lineales entre las variables; por ello, se le llama **coeficiente de correlación lineal**. Pero hay otro coeficiente que también nos da información en otros tipos de relación. Es el **coeficiente de determinación**:

$$R^2 = \frac{varianza\ de\ valores\ estimados}{varianza\ de\ valores\ observados}$$

En este caso, el coeficiente tampoco tiene unidades y se valor se encuentra comprendido entre 0 y 1.

Publicidad y ventas

Esta empresa de fabricación y distribución de productos agroalimentarios está interesada en entender la relación entre sus gastos en publicidad y las ventas mensuales. Para ello, ha recopilado datos durante los últimos 12 meses sobre los gastos en publicidad (en euros) y las ventas mensuales (en unidades vendidas):

Mes	Gastos en Publicidad (euros)	Ventas Mensuales (unidades)
1	2000	1500
2	2500	1600
3	3000	1700
4	3500	1750
5	4000	1800
6	4500	1900
7	5000	2000
8	5500	2100
9	6000	2200
10	6500	2300
11	7000	2400
12	7500	2500

a) Encuentra la ecuación de la recta de regresión.

b) Calcular el coeficiente de Determinación.

c) Interpreta los resultados.

En el apartado de temporalización se observa que para este tema se tienen cinco semanas. Las sesiones planteadas son dieciséis , a las cuales hay que sumarle tres más, una en la que los alumnos trabajarán en clase el trabajo que deberán exponer, otra para las exposiciones y una para la prueba escrita. La que sobra se utilizará en caso de que haya algún retraso o improvisto.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Día “examen”	50 (5 en lo que se reparten y recogen)	Prueba escrita	Individual	Aula habitual	Hoja con los enunciados
Día presentaciones	55	Prueba oral (ACC y ABT)	Grupos de tres	Salón para las presentaciones	Pizarra digital Ordenador Hoja de guía

Capítulo 4: "Probabilidad y distribuciones"

Se van a agrupar los dos temas en un solo capítulo debido a lo muy relacionados que están, aunque se realizarán las pruebas y presentaciones correspondientes a cada parte. Se va a seguir la misma dinámica que para el tema anterior, solo que en este caso para cada tema solo tenemos tres semanas (un total de 24 clases).

Primera sesión: Se dará un contexto para el temario y se expondrá la situación de aprendizaje a los alumnos y la dinámica que se va a seguir en las siguientes semanas.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Introducción Probabilidad	40	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador
Organización del Tema	15	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra Digital Ordenador

Introducción

Se empieza un nuevo bloque, en el que se tratarán conceptos y técnicas relacionadas con el azar y cuyos contenidos, en la mayoría de los casos, te resultarán conocidos ya que se han trabajado en cursos anteriores.

El azar, relacionado siempre con los juegos y los sorteos (como seguramente sabrás, importantes problemas de probabilidad ya considerados clásicos se plantearon a partir de las observaciones realizadas por jugadores "empedernidos") interviene en muchos fenómenos de la vida real.

Sexo y altura de un ser humano, desintegración de un átomo, riadas, evolución y desarrollo de una población... son situaciones que se pueden modelizar como juegos de azar. El sorteo, en estos casos ya está realizado (y muchas veces por procesos complejos y/o desconocidos) y el trabajo consistirá en recoger los resultados y tratar de extraer consecuencias que nos permitan predecir y tomar decisiones futuras.

La comprensión del azar plantea una dificultad, ya que éste posee dos cualidades aparentemente contradictorias: es imprevisible y produce regularidades. Entender el significado de estas cualidades y conocer las leyes que rigen las regularidades que aparecen permitirá realizar predicciones sabiendo además valorar su calidad y fiabilidad.

En las primeras actividades se irán recordando conceptos, definiciones y técnicas (frecuencia, suceso, diagrama de árbol, recuentos, probabilidad...). A su vez, estos contenidos se irán formalizando con unas definiciones más rigurosas y una notación matemática más precisa y serán tratados en mayor profundidad.

Segunda sesión: Como en el tema anterior, se realizarán unos primeros problemas sencillos, con el objetivo de hacer que el alumno recuerde términos y piense por sí mismo en diferentes maneras de resolverlos (sin explicaciones previas).

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Lanzamiento monedas	10	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno Monedas
¿Cuántas tiradas?	10	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
La ruleta	10	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
¿Qué prefieres?	12	ACC	Parejas	Aula habitual (mesas juntas)	Bolsa Bolas colores Cuaderno
El frontón	10	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Conseguir el cinco	13	ACC	Parejas	Aula habitual (mesas juntas)	Dado cúbico Cuaderno

Lanzamiento de monedas

Alfonso y Pablo estaban jugando con unas monedas. Lo que hacen es lanzar dos simultáneamente y anotar el número de caras obtenido. En cada lanzamiento pueden obtener 0, 1 o 2 caras.

a) ¿Son todos los resultados igualmente posibles? ¿Por qué?

b) Realiza la experiencia 30 veces con monedas, tabla de números aleatorios o calculadora y anota los resultados obtenidos.

c) Calcula las frecuencias relativas de los tres posibles sucesos.

d) Presenta tus datos en una gráfica.

¿Cuántas tiradas?

Pablo está lanzando una moneda, con el objetivo de sacar tres caras, ya que tras sacarlas podrá ir en busca de sus amigos, que han ido a esconderse ya que están jugando al escondite y es él quien se la queda.

a) ¿Cuántas veces será necesario, por término medio, lanzar la moneda?

b) ¿Por qué número mínimo de lanzamientos apostarías para tener una probabilidad de acertar próxima al 50%?

La ruleta

Alfonso y sus amigos han ido al casino del pueblo y están preguntándose si les será conveniente jugar a la ruleta.

La ruleta está dividida en 36 sectores iguales. Considera tres sectores de tal ruleta: El A, que incluye los sectores numerados del 1 al 25; el B, los numerados del 26 al 35; el C, el numerado 36.

Si el resultado del juego es un número del sector A, pagas 0'5 euros; si es del B, ganas 1 euro y si es del C, ganas 1'5.

¿Les conviene jugar? ¿Cuánto esperas que ganen o pierdan en 100 jugadas?

¿Qué prefieres?

Se dispone de 2 bolas rojas, 2 bolas negras y 2 bolsas opacas. La idea es que el primero del grupo de amigos que consiga sacar una bola roja gana el billete de cinco euros que se han encontrado en el suelo. La madre de Alfonso, imparcial, será la que distribuya las bolas en las bolsas:

Las bolas se pueden distribuir entre los dos bolsas de distintas maneras. Por ejemplo:

1.- Bolsa A: 1R; 1N. Bolsa B: 1R; 1N.

2.- Bolsa A: 2R. Bolsa B: 2N.

Se debe elegir una bolsa al azar y extraer una bola de la bolsa elegida. ¿En cuál de estos dos casos consideras más fácil conseguir una bola roja?

¿Se te ocurre otra distribución de las bolas más favorable para obtener bola roja?

El frontón

Es una actividad típica ir a jugar al frontón de lo alto del pueblo. Alfonso y Pablo juegan un partido a 21 tantos (gana el primero que llega a 21). En un momento del partido, cuando Pablo lleva 20 tantos, el otro jugador, Alfonso, lleva 18.

¿Cuál es la probabilidad de que gane Pablo? ¿Y de que gane Alfonso?

Suponiendo que cada punto requiere unos 2 minutos de juego, ¿cuánto tiempo sería necesario, por término medio, para terminar la partida a partir de la puntuación 20-18?

Conseguir el cinco

Paula, todos los domingos después de ir a tomar el vermú con su familia, juega con sus abuelos una partida de parchís. En el juego del parchís es necesario obtener un cinco para sacar las fichas y poder empezar a avanzar, lo cual cabrea a Paula, ya que muchas veces pierde sin apenas haber sacado todas sus fichas…

Si has jugado varias veces al parchís, es fácil que en alguna de las partidas algún jugador o jugadora se haya visto con todas sus fichas en "casa" mientras que los demás ya habían dado casi una vuelta al tablero.

¿Es muy difícil conseguir un cinco con un dado cúbico? ¿Cuántas veces, por término medio, habrá que lanzar el dado hasta obtenerlo?

Tercera sesión: Se comenzará la parte de Cálculo de Probabilidades. Se irá explicando los conceptos de azar, sucesos y experimentos aleatorios.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Las leyes del azar	15	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador
¿Datos especiales?	10	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Sucesos asociados a un experimento aleatorio	25	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador
Arriésgate	15	ACC	Parejas	Aula habitual	Nada

Las leyes del azar

Las leyes del azar permitirán pronosticar cuando se realice un gran número de pruebas de una experiencia aleatoria pero no, por ejemplo, cuando se lanza una vez un dado.

La teoría de probabilidades se ocupa de medir hasta qué punto se puede esperar que ocurra un suceso. Se dice que esa medida es su **probabilidad**.

Que un suceso tenga una probabilidad del 70%, significa que, de cada 100 veces que se presentaran las mismas condiciones, podríamos esperar que el suceso se verificase unas 70 de ellas. También se dice, en este caso, que la probabilidad es de

$$\frac{70}{100} = 0.7$$

La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1. Un suceso de probabilidad próxima a 0 es un suceso raro, poco frecuente. Un suceso de probabilidad próxima a 1 es un suceso casi seguro.

¿Dados especiales?

María ha convencido a Paula de que lo divertido del parchís es que depende de la suerte y que cualquier cosa puede ocurrir. Por ello, han decidido ir a ver la partida de sus abuelas. Tras acabar esta, comentan lo que ocurrido en la partida:

Una de las jugadoras tenía las cuatro fichas "fuera" cuando llevaban 10 tiradas (recuerda que para poder sacar una ficha se tiene que obtener un 5 con el dado).

Otra de ellas sacó su primera ficha en la tirada número treinta cuando las demás jugando con todas las fichas.

¿Consideras posibles estas situaciones? ¿Y habituales?

Si cada jugadora utiliza su propio dado ¿consideras que alguno de ellos puede ser defectuoso?

¿Se podría encontrar una ley que indique el número de cincos que se puede esperar conseguir al lanzar un dado varias veces?

Sucesos asociados a un experimento aleatorio

Cuando se realiza una experiencia o experimento aleatorio, pueden darse varias posibilidades. A cada una de ellas la llamamos suceso elemental.

- Al lanzar un dado, los sucesos elementales son seis: salir 1, salir 2, salir 3…
- Al lanzar una moneda, los sucesos elementales son dos: salir cara y salir cruz.

El espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los sucesos elementales.

Se puede imaginar una partida de cartas en la que se gana si sale un as cualquiera. Se ganará tanto si sale el as de oros, como el de copas, el de espadas o el de bastos. Se dirá que se ha producido el suceso "salir as". Análogamente, el suceso "salir par" en el experimento de lanzar un dado, se producirá cuando al lanzar un dado, sale tanto un 2, como un 4 como un 6.

- En una experiencia aleatoria, se llama suceso a cualquier colección o conjunto de sucesos elementales.
- Se llama suceso seguro a aquel que se verifica siempre que se realiza el experimento. Se suele representar por Ω.
- Se llama suceso imposible, ϕ, a aquel que no se verifica nunca.
- Dos sucesos A y $\bar{A}$ (o no A) son contrarios si al verificarse A no se verifica $\bar{A}$ y al no verificarse A sí se verifica $\bar{A}$.
- Dados dos sucesos A y B, se denomina suceso unión de A y B, y se escribe $A \cup B$ (o bien A o B) al suceso que se verifica cuando lo hacen A, o B o ambos a la vez.
- Dados dos sucesos A y B, se denomina suceso intersección de A y B, y se escribe $A \cap B$ (o bien A y B) al suceso que se verifica cuando lo hacen ambos a la vez.
- Dos sucesos A y B, se llaman incompatibles cuando no pueden verificarse a la vez. Esto se cumplirá cuando $A \cap B = \phi$

Arriésgate

A María le gustaría conocer mejor a Pablo, por lo que decide hacerle una serie de preguntas con el objetivo de que califique de seguro, casi seguro, probable, poco probable, casi imposible o imposible cada uno de los siguientes sucesos:

- Que un equipo de baloncesto de la NBA no consiga ningún punto en un partido.
- Acertar la Lotería Primitiva con una única apuesta. 103923 200A0
- Obtener doble 6 al lanzar dos dados.
- No obtener ninguna cara al lanzar 1.000 monedas.
- Que un equipo de fútbol de 1a división gane algún partido.
- Obtener sobresaliente en Matemáticas todos los alumnos y alumnas de este grupo.
- Que en Alicante no llueva más de veinte días durante el año 1.999.
- Que en el desierto del Sahara no llueva ningún día durante el año 2.000.

¿Qué responderías si tú fueses Pablo?

Cuarta sesión: <u>Se define el concepto de lo que es la Probabilidad. Dentro de la parte de Cálculo de Probabilidades.</u>

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Probabilidad	35	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador Pizarra
Trabajando con sucesos	20	ABT	Individual Revisión conjunta	Aula habitual (mesas juntas)	Cuaderno

Probabilidad

La probabilidad de un suceso aleatorio es igual al cociente del número de casos que le son favorables entre el número de casos posibles del experimento. (Siempre que todos los sucesos elementales tengan la misma posibilidad de ocurrir). A esto se le llama:

Regla de Laplace: En el caso de que todos los resultados de un experimento aleatorio sean equiprobables, Laplace define la probabilidad de un suceso A como el cociente entre el número de resultados favorables a que ocurra el suceso A en el experimento y el número de resultados posibles del experimento.

Si A es un suceso aleatorio:

$$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

P(A) es el cociente de dos números positivos. Por lo tanto, se cumple que P(A) ≥ 0. El número de casos favorables a A nunca puede ser mayor que el número de casos posibles. Por lo tanto, P(A) ≤ 1. Se deduce entonces que $0 \leq P(A) \leq 1$

Se ha visto que hay dos formas de asignar la probabilidad a un suceso:

- Suponiendo que todos los resultados elementales tienen la misma posibilidad de realizarse (son equiprobables). Esta probabilidad (de Laplace) se puede conocer de antemano, sin necesidad de realizar el experimento, por eso la denominaremos probabilidad "a priori".

- Utilizando la frecuencia relativa del suceso en un número elevado de experiencias. Esta probabilidad requiere la realización del experimento. La denominaremos probabilidad "a posteriori"."

Cuanto mayor es el número de experiencias, más se acerca la frecuencia relativa a la probabilidad teórica (ley de los grandes números)

Trabajando con sucesos

El grupo de amigos se encuentra metidos en casa de la abuela de María, ya que hace un calor horrible fuera. Lo malo es que es una casa antigua y lo único que tienen para divertirse es una moneda y un dado. Como tienen mucho tiempo por delante han decidido ponerse a experimentar con ellos. El experimento consistente en lanzar al aire una moneda y un dado.

a) Escribe el espacio muestral de esta experiencia.

b) Si A es el suceso "salir cara", escribe el conjunto de resultados favorables a A.

c) ¿Cuál es el suceso contrario a A?

d) Si B es el suceso "salir puntuación mayor que 4", ¿qué suceso es $\bar{B}$?

e) ¿Qué suceso será $A \cup B$? ¿Y $A \cap B$?

f) Intenta completar:

$P(A) =$

$P(B) =$

$P(\bar{B}) =$

$P(A \cup B) =$

$P(A \cap B) =$

g) ¿Qué relaciones has encontrado entre las probabilidades calculadas en el apartado anterior? ¿Cuáles consideras que también se cumplirán con otros sucesos distintos?

h) Calcula la probabilidad de los sucesos:

P = {obtener puntuación par}

T = {cruz y puntuación menor que 4}.

Quinta sesión: Se repasará el cálculo de probabilidades y los números combinatorios. Dentro de la parte de Cálculo de Probabilidades.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
El juego de la moneda	10	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno Moneda
La baraja	20	ABP	Parejas para debatirlo	Aula habitual (mesas juntas)	Cuaderno Cartas
Números combinatorios	25	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador Pizarra

El juego de la moneda

Paula y María juegan con una moneda y un dado que se suponen perfectos (al parecer las gustó mucho la actividad anterior). El juego consiste en lo siguiente: se lanzará la moneda dos veces. Si se obtienen dos caras gana Paula, si no se lanzará el dado y si sale un 6 ganará Paula también, ganando María en los demás casos.

¿Quién te parece que tiene más posibilidades de ganar?

La baraja

Alfonso se chulea de saber mucho de probabilidad, por lo que Pablo le reta a realizar unos cálculos sencillos utilizando una baraja de cartas. Pablo extrae una carta de una baraja española (40 cartas) y Alfonso tendrá que calcular la probabilidad de que se trate de:

a) Un cuatro.

b) Un oro.

c) Una figura.

d) Un cuatro o una figura.

e) Un cuatro o un oro.

f) Un cuatro de oros.

¿Cómo lo harías tú?

Los números combinatorios

Los números combinatorios $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ya deberían ser conocidos como una herramienta para realizar recuentos de posibilidades y han sido utilizados en varias ocasiones en las actividades precedentes. Estos números tienen además unas interesantes propiedades matemáticas que interesa conocer.

Aunque 0! no tendría sentido aplicando la definición de factorial, se le asigna el valor 1 y por tanto se pueden calcular números del tipo $\binom{n}{0}$.

Utilizando los números combinatorios se puede construir un triángulo numérico, triángulo al que puedes añadir tantas filas como desees y que recibe el nombre de triángulo de Pascal o de Tartaglia.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\ & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Si se analiza detenidamente su estructura se podrán observar muchas regularidades. Por ejemplo, en la quinta fila los valores aparecen repetidos, el número $\binom{4}{1}$ coincide con $\binom{4}{3}$ y el $\binom{4}{0}$ con $\binom{4}{4}$ y una simetría similar encontrarás en cualquier otra fila. Esta propiedad se puede escribir de forma general:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Sexta sesión: Se aplicará la teoría de los números combinatorios y se explicará la relación de estos con el binomio de Newton. Dentro de la parte de Cálculo de Probabilidades.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Colores	15	ABT	Individual	Aula habitual	Telas colores Cuaderno
Tiro al blanco	10	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Dados cúbicos	20	ACC	Parejas	Aula habitual (mesas juntas)	Dados Cuaderno
Binomio de Newton	10	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador

Colores

Va a ser la fiesta del pueblo, San Pascal, por lo que los chicos de la zona han decidido agruparse en peñas. Cada una de estas tendrá que formar su propia bandera con los instrumentos a su disposición:

a) Si disponen de telas de cuatro colores distintos para realizar banderas tricolores ¿Cuántas banderas, y, por tanto, peñas distintas se conseguirán?

b) Nuestro grupo de amigos ha construido una base para su peña, la cual quieren pintar de muchos colores, lo malo es que solo tienen cuatro a su disposición asique se preguntan: utilizando cuatro colores base y mezclando tres colores diferentes en la misma proporción ¿Cuántos colores se pueden obtener?

c) Busca procedimientos generales que puedas aplicar a los apartados a) y b) si modificas el número de colores disponibles y el número de elementos que utilizas cada vez.

Tiro al blanco

El abuelo de Alfonso era cazador, y a él le encanta también todo lo relacionado con el mundo del disparo, por lo que un día Alfonso senior decide llevar a su nieto a un establecimiento de tiro al blanco. La diana en el establecimiento son diez caballitos numerados que giran alrededor de un punto fijo, si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballo ¿De cuántas maneras se pueden encender las luces con tres tiros? ¿Y si el primer tiro da al caballo número 2?

Considera para contestar dos casos posibles:

a) Que Alfonso sea infalible y no falle nunca.

b) Que, en cada tiro, Alfonso pueda acertar o fallar.

Dados cúbicos

Se lanzan dos dados cúbicos y se restan las puntuaciones obtenidas. (Siempre la mayor menos la menor). Este es un juego de azar en el que la hermana de María siempre la ganaba de pequeña, pero, ahora que María sabe algo más de combinatoria y probabilidad, ha decidido analizarlo junto a sus amigos, a los cuales expone las siguiente preguntas:

a) ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?

b) ¿Son igualmente probables? ¿Por qué resultado apostarías?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia obtenida sea par? ¿Es la misma para impar?

d) ¿Cuánto suman en total todas las puntuaciones posibles?

Binomio de Newton

La generalización de los resultados obtenidos en la anterior actividad proporciona un procedimiento para el cálculo de potencias de un binomio sin realizar los productos.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Esta igualdad, es conocida como **binomio de Newton**.

Ahora se podría justificar otra propiedad observada en el triángulo de Pascal:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Séptima sesión**:** Estudio de la probabilidad condicionada. Dentro de la parte de Cálculo de Probabilidades.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Probabilidad condicionada	20	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador
Investigación en una baraja	8	ACC	Parejas	Aula habitual (mesas juntas)	Cartas póker Cuaderno
¿Niño o niña?	7	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Oro a punta pala	20	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno

Probabilidad Condicionada

La probabilidad del suceso A **condicionado** a B, P(A/B), indica la probabilidad de que se verifique el suceso A conociendo que el suceso B se ha verificado. El suceso A/B indica que el suceso B se ha realizado y no se debe confundir con el suceso A ∩ B. Pero, aunque son sucesos diferentes están relacionados ya que, en general:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$

Puede ocurrir que el hecho de que se haya verificado o no un suceso B no influya en las posibilidades de que ocurra A. En este caso P(A) = P(A/B) y, por tanto

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Si se cumple esta última igualdad, como $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)P(B/A)$ también será $P(B) = P(B/A)$ y se dice que los Sucesos A y B son **independientes**. Si los sucesos no son independientes, se dice que son **dependientes**.

Investigación en una baraja

Todos los años hay un gran torneo de póquer en el pueblo, y este año, Alfonso y sus amigos por fin tienen edad para participar. Pero, antes de nada, quieren entender el trasfondo matemático de este juego.

El póquer es un juego de cartas de envite, en que cada jugador recibe cinco y gana el que tiene la combinación superior de las varias establecidas. Cuando se juega sin comodín, las tres jugadas más valiosas son:

Full: Pareja y trío.

Póquer: Cuatro cartas iguales.

Escalera de color: Todas la cartas consecutivas y del mismo palo.

Estudia la probabilidad de conseguir cada una de estas combinaciones y justifica el valor mayor o menor asignado a cada una.

¿Niño o niña?

Paula acaba de contarle a sus amigos que su madre está embarazada. Esto los lleva a comentar la siguiente cuestión: Suponiendo que la probabilidad de que el sexo de un recién nacido sea masculino o femenino es la misma, un 50%. Si una pareja tiene dos hijos.

¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

A = {El 2º hijo es chica}; B = {El hijo mayor es chica}; C = {Uno de los hijos es chica}

Oro a punta pala

A María la han quedado las matemáticas para septiembre, por lo que su padre, que es profesor de matemáticas, la va a ayudar a practicar la probabilidad mediante el uso de una baraja española de 40 naipes. Ya sabes que consta de cuatro "palos" (oros, copas, espadas y bastos) y en cada uno de ellos aparecen as, dos, tres, ..., siete, sota, caballo y rey.

Se considera la experiencia aleatoria de extraer sucesivamente dos cartas, reintegrando la primera carta extraída a la baraja antes de elegir la segunda. Las preguntas que se le plantean a María son las siguientes:

a) La primera carta extraída es de oros ¿cuál es la probabilidad de que la segunda también lo sea?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta extraída sea de oros?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas sean de oros? ¿Y de que sólo lo sea una de ellas?

La experiencia también se puede realizar sin reintegrar a la baraja la primera carta extraída. Analiza cada uno de los apartados anteriores en este otro caso.

Octava sesión: Tablas de contingencia y diagramas de árbol. Dentro de la parte de Cálculo de Probabilidades.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Tablas de contingencia y diagramas de árbol	20	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador Pizarra
¿francés o inglés?	10	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
¿Estudias o trabajas?	25	ABP	Parejas para debatirlo	Aula habitual (mesas juntas)	Cuaderno

Tablas de Contingencia y Diagramas de Árbol

La construcción de una tabla de contingencia o de un diagrama de árbol son técnicas eficaces para el cálculo de probabilidades relacionadas con cuatro sucesos, contrarios dos a dos: A, noA, B y noB. La elección de una u otra dependerá de los datos conocidos.

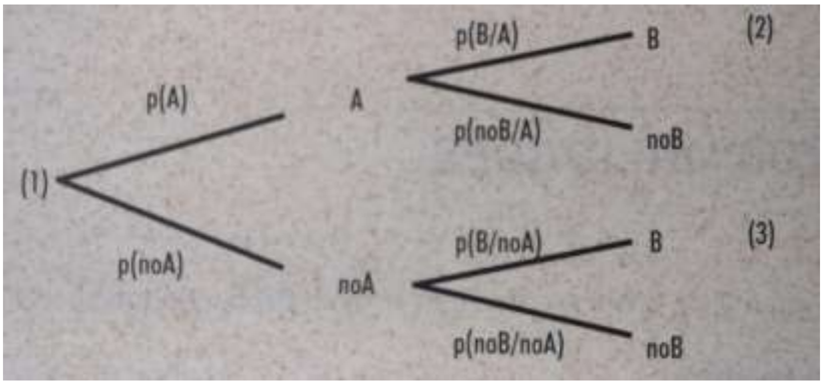
En la tabla intervienen las probabilidades de los cuatro sucesos y de sus intersecciones:

	B	noB	
A	$p(A \cap B)$	$p(A \cap noB)$	$p(A)$
noA	$p(noA \cap B)$	$p(noA \cap noB)$	$p(noA)$
	$p(B)$	$p(noB)$	1

1ºBach LOGSE. Grupo Eureka. MACCSS 1

Si se trabaja con porcentajes, está claro que en la última casilla debe aparecer 100%. También se puede rellenar la tabla con datos absolutos y en este caso en la casilla indicada aparecerá el número total de datos.

Cuando los datos disponibles son probabilidades condicionadas interesará más el diagrama de árbol:



1ºBach LOGSE. Grupo Eureka. MACCSS 2

Como ya se debería saber, la probabilidad de un camino se obtiene como producto de las probabilidades asignadas a las ramas que recorre. Por ejemplo, el camino (1)→ (2) tiene come probabilidad P(A)P(A/B) que coincide con P(A∩B). Si interesa conocer la probabilidad del suceso B, se puede obtener como suma de las probabilidades de todos los caminos que terminan en él, en este caso (1)→ (2) y (1) → (3).

Por tanto, a partir del diagrama de árbol se pueden obtener datos que permiten rellenar la tabla de contingencia asociada. De forma similar, a partir de la tabla de contingencia y con los cálculos necesarios se pueden asignar probabilidades a las ramas del árbol.

¿francés o inglés?

En la escuela de verano del pueblo se puede cursar inglés o francés. En la clase el 90% estudia inglés y el resto francés; además se sabe que en esa clase el 30% de los que estudian inglés son chicos y de los que estudian francés son chicas el 40%.

¿Cuál es el porcentaje de chicas en la escuela de verano?

¿Estudias o trabajas?

El pueblo tiene un única empresa, la cual se encarga de labrar las tierras. En ella trabajan 200 personas de las que 82 tienen el título de Bachillerato. Se sabe además que el número de mujeres que trabajan en esta empresa es 90 y que 40 de los hombres son bachilleres.

a) ¿Cuál es porcentaje de hombres que no tienen el título?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado sea mujer titulada?

c) Se elige un empleado al azar que resulta ser mujer ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el título?

d) Si el empleado elegido aleatoriamente ha estudiado el Bachillerato ¿Qué probabilidad hay de que sea hombre?

Novena sesión: Problemas de repaso muy generales. También se aprovechará esta sesión para responder a dudas. Dentro de la parte de Cálculo de Probabilidades.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
¿Es fiable?	20	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Titanic	20	ACC + ABP	Parejas	Aula habitual (mesas juntas)	Cuaderno
Los neumáticos	15	ACC + ABP	Parejas	Aula habitual (mesas juntas)	Cuaderno

¿Es fiable?

María está en cama y se cree que es debido a la novedosa enfermedad “calor de pueblo” (CDP). El padre de Paula es farmacólogo y asegura tener una prueba que sirve para diagnosticarla. Si se tiene la enfermedad, la prueba es positiva con un 97% de seguridad. Si no se tiene, la prueba es negativa con un 93% de seguridad.

María se somete a la prueba y se conoce que, por el grupo de población al que pertenece, una de cada 100 personas está enferma sin saberlo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva?

b) Si el resultado es positivo ¿cuál es la probabilidad de que tenga CDP realmente?

c) Si la prueba fuese negativa ¿cuál es la probabilidad de que, a pesar de ello, tenga CDP?

d) ¿Qué valoración haces de esta prueba?

Titanic

María y Paula adoran la película del Titanic, por lo que junto a Alfonso y Pablo han decidido analizar profundamente ciertos aspectos del accidente. De forma aproximada, se puede suponer que en el Titanic viajaban 1300 pasajeros (no incluyendo tripulación y servicios) de los que 320 eran de 1ª clase, 270 de 2ª clase y los restantes 710 viajaban en 3ª clase.

De los pasajeros de 1a clase fueron rescatados 3 da cada 5, mientras que de 2ª clase lo fueron 4 de cada 10. Fallecieron 535 de los pasajeros de 3ª. Entre otras cosas se plantean lo siguiente:

a) ¿Qué porcentaje de los pasajeros fue rescatado?

b) Uno de los pasajeros rescatados, ¿qué probabilidad tenía de ser de 3ª clase?

c) ¿Qué porcentaje de los fallecidos eran pasajeros de 3ª clase?

Los neumáticos

Los cuatro amigos están de excursión a una ciudad cercana a su pueblo, pero resulta que se encuentran con un gran atasco. Como quieren saber que ha ocurrido se meten a ver las noticias y descubren que ha habido un gran accidente debido a un coche que tenía los neumáticos en mal estado. Esto los ha llevado a plantearse que probabilidades tiene un vehículo de sufrir un accidente según el estado de sus ruedas.

La probabilidad de que un vehículo tenga un accidente depende, entre otros factores que no tendremos en cuenta, del estado de sus neumáticos. En óptimas condiciones la probabilidad de accidente es 0'1, si los neumáticos están deteriorados la probabilidad de accidente es 0'4, y si los neumáticos son deplorables, el vehículo tendrá una probabilidad de 0'8 de sufrir un accidente. Las inspecciones de un gran número de vehículos nos permiten asegurar que la mitad de los vehículos tienen los neumáticos deteriorados, mientras que sólo un 20% los tienen en óptimas condiciones.

a) ¿Qué probabilidad tiene un vehículo elegido al azar de tener un accidente?

b) Si un vehículo tiene un accidente y no revisa los neumáticos, ¿cuál es la probabilidad de que vuelva a tener otro?

- Quedarían tres sesiones, de las cuales, dos serán de evaluación (prueba escrita y prueba oral), y las otras para posibles retrasos (en este caso el trabajo en equipos de exposición se harán fuera del aula). Tras acabar estas semanas se empezarán las clases orientadas a enseñar las distribuciones de probabilidad que corresponden a este curso.

Primera sesión: Se introducirá la distribución Binomial. Dentro de la parte de Distribuciones de Probabilidad.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Introducción	25	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador
Dos dados y una moneda	30	ABT	Parejas	Aula habitual (mesas juntas)	Dados Moneda

Introducción

Se ha trabajado con experiencias aleatorias tales que:

1. Se realizan n pruebas y sólo hay dos resultados posibles (éxito y fracaso) en cada una.
2. La probabilidad de éxito es la misma (p) en cada prueba.
3. Cada prueba es independiente de las demás.

Tales experiencias reciben el nombre de experiencias de Bernoulli. Sea X la variable aleatoria que mide el número de éxitos en n pruebas. Los valores que toma son 0, 1, 2, ..., n, y la distribución de probabilidad correspondiente responde a la expresión:

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ donde $q = 1 - p$

llamada distribución binomial de parámetros n y p, que denotaremos por B(n, p). Como es lógico, se cumple que la suma de las probabilidades es 1, pues cada una de ellas es un término del desarrollo (binomio de Newton) de una potencia de $p + q$, y, $p + q = 1$.

Dos dados y Una moneda

María y Paula están discutiendo por qué película ver en el cine de verano. Como no llegan a un acuerdo deciden apostar: Se lanzan dos dados y se suman las puntuaciones obtenidas en ambos. María gana si la suma es un número primo.

En vez del juego anterior, han decidido lanzar una moneda para ver quién decide la película. En este caso gana María si sale cara.

Las siguientes preguntas se refieren a los dos juegos, y es probable que te sea útil un diagrama de árbol:

a) ¿Qué probabilidad tienes de ganar en una partida?

b) Si se juegan dos partidas, ¿qué probabilidad tienes de ganar exactamente una vez? ¿y por lo menos una vez?

c) Estudia la distribución de probabilidad para una, dos o tres partidas.

d) En n partidas, ¿cuál es la probabilidad de ganar exactamente una vez? ¿y al menos una vez?

e) En n partidas, ¿cuál será la probabilidad de ganar exactamente k veces?

Puedes definir una variable aleatoria X que represente el número de éxitos en n tiradas. Los valores que toma son 0,1, ..., n; de este modo, escribirás $P(X = 3)$ para designar la probabilidad de tener 3 éxitos, o $P(X \geq 1)$ para la de tener al menos 1 éxito.

Segunda sesión: Se explicarán los parámetros generales de las distribuciones y específicamente los parámetros de la distribución Binomial. Dentro de la parte de Distribuciones de Probabilidad.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Parámetros estadísticos (Binomial)	25	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador Pizarra
Un examen tipo test	20	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Medias y Desviaciones	10	Ejercicios	Individual	Aula habitual	Cuaderno

Parámetros Estadísticos. Parámetros en una Binomial

Esperanza matemática: Dada una v.a. discreta X con un número finito de valores se llama esperanza matemática o valor medio esperado de X al número

$$\mu = E(X) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + \cdots + x_n P(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$$

Así como la media en una distribución de frecuencias describe una experiencia ya realizada, la esperanza dice lo que cabe esperar que ocurra por término medio si se realiza la experiencia un número elevado de veces. Si se trata de una distribución de frecuencias, esta definición coincide con la de media aritmética.

Varianza y desviación típica: La esperanza matemática es una medida de centralización; permite obtener un solo número que representa a todos los demás valores de la variable aleatoria. Interesa saber si los valores de la variable están muy separados respecto de ella. Dicha información viene dada por las medidas de dispersión (ya conocidas) y que en el caso de una distribución de probabilidad se obtienen de la siguiente manera:

$$Varianza = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 P(x_i) \text{ y } D.T. = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

En una v.a. binomial se verifica que:

$$\mu = E(X) = np$$

$$\sigma^2 = npq$$

Un examen de tipo test

El examen de recuperación de historia de Pablo, que será en unas semanas cuando vuelva de sus vacaciones en el pueblo, es de tipo test y se pregunta porque deberían bajarle nota por contestar mal en vez de simplemente no contar nada. La mayoría de las veces, cuando se hace un examen tipo test de respuesta múltiple (es válida una y sólo una de las respuestas que se ofrece), se suele introducir un factor de corrección para evitar las respuestas al azar (aquello de que si se responde mal se resta medio punto, o algo así). ¿Por qué? ¿tan fácil es aprobar respondiendo al azar?

Contesta a las siguientes preguntas relacionadas con este tema, para comprobar si Pablo tiene razón o no en lo que piensa:

a) Consideremos un test de 10 preguntas, en que se ofrece dos posibles respuestas para cada pregunta. ¿Cuál es la probabilidad, para un alumno que responde al azar, de hacerlo correctamente a cinco preguntas? ¿Y de responder bien al menos a cinco preguntas? ¿Y al menos a tres preguntas?

b) Responde a las mismas cuestiones si hay cuatro respuestas posibles por pregunta.

c) ¿Cuántas preguntas debe tener cada uno de estos exámenes para que la probabilidad de acertar al menos tres preguntas al azar sea menor que 0.5?

d) ¿Cuál es el número medio de respuestas correctas que se puede esperar obtener contestando todas las preguntas al azar?

Medias y Desviaciones (ejercicio extraordinario)

Calcula la esperanza, varianza y desviación típica en los ejemplos de distribución binomial estudiados hasta ahora. Confecciona una tabla con cinco columnas (n, p, q, μ, σ^2) con los datos obtenidos. ¿Encuentras alguna relación entre ellas?

Tercera sesión: <u>En esta clase se trabajará con la distribución Binomial. Dentro de la parte de Distribuciones de Probabilidad.</u>

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Revisando…	30	ABP	Individual	Sala de ordenadores	Cuaderno
Los Histogramas y la Binomial	25	Ejercicios	Individual	Sala de ordenadores	Cuaderno Ordenadores

Revisando…

Nuestro grupo de amigos se ha puesto a pensar en la cantidad de cosas que han aprendido este verano de matemáticas con sus pequeños juegos de dados, monedas etc. El padre de María (que como se ha dicho previamente es profesor de matemáticas) los ha escuchado y decide plantearles una serie de cuestiones para comprobar si realmente han entendido bien las cosas:

a) Juegas 1.200 partidas a los dados. ¿Cuántas esperas ganar por término medio? ¿Cuántas deberías ganar "normalmente"?

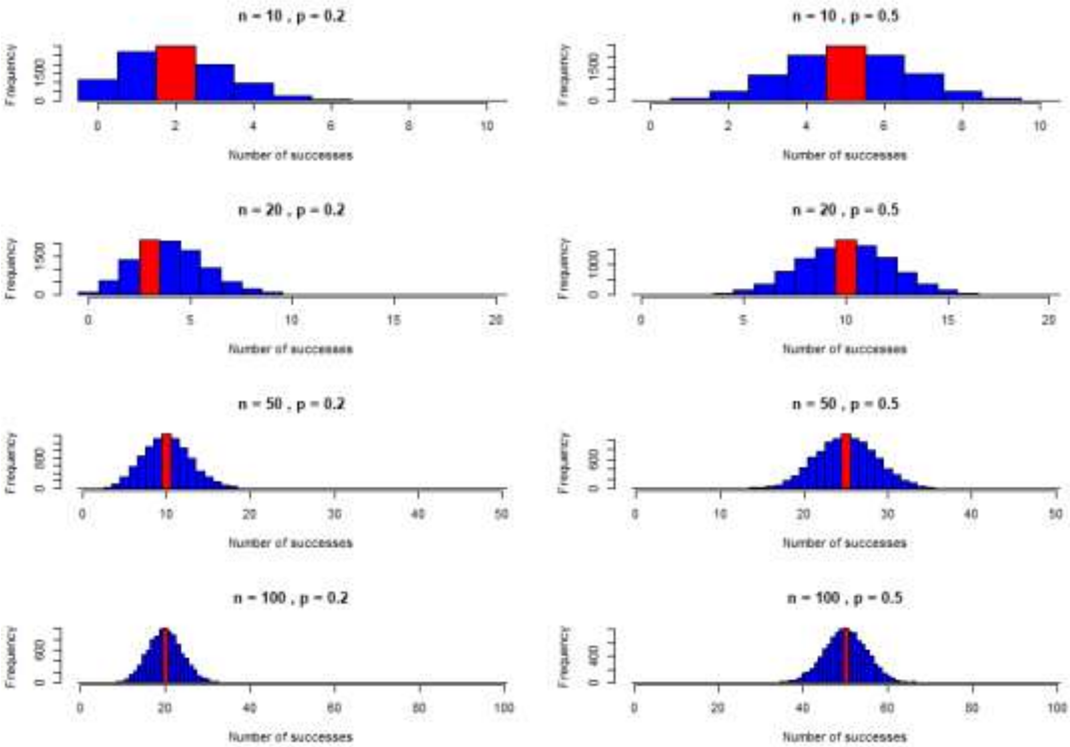
b) ¿Qué pensarías si jugases 100 veces con la moneda y perdieses 63? ¿Puedes asegurar algo?

c) ¿Qué sería más sorprendente obtener 3 caras en 10 tiradas o 300 caras en 1.000 tiradas? ¿Por qué?

d) Un test consta de 10 preguntas de respuesta múltiple. ¿Qué es más raro, que un alumno acierte al azar 3 preguntas en un test con dos respuestas posibles por pregunta o que acierte 2 en un test de cuatro respuestas?

Los Histogramas y la Binomial (ejercicio extraordinario)

En una distribución binomial, la probabilidad de que un valor esté en el intervalo $[x-\sigma, x+\sigma]$ es bastante más alta que la cota dada por Chebycheff. Los siguientes histogramas corresponden a distribuciones binomiales con los parámetros indicados, y el área rayada es la probabilidad de dichos intervalos:



Compara en algunos de estos casos ambas probabilidades.

***Cuarta sesión*: Se introducirá la distribución Normal, se definirá y explicarán sus propiedades. Será una clase bastante teórica. Dentro de la parte de Distribuciones de Probabilidad.**

Cronograma	Tiempo (min)	Metodología	Organización alumnos	Espacio	Recursos
Introducción	30	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador
Definición y propiedades	25	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador Pizarra

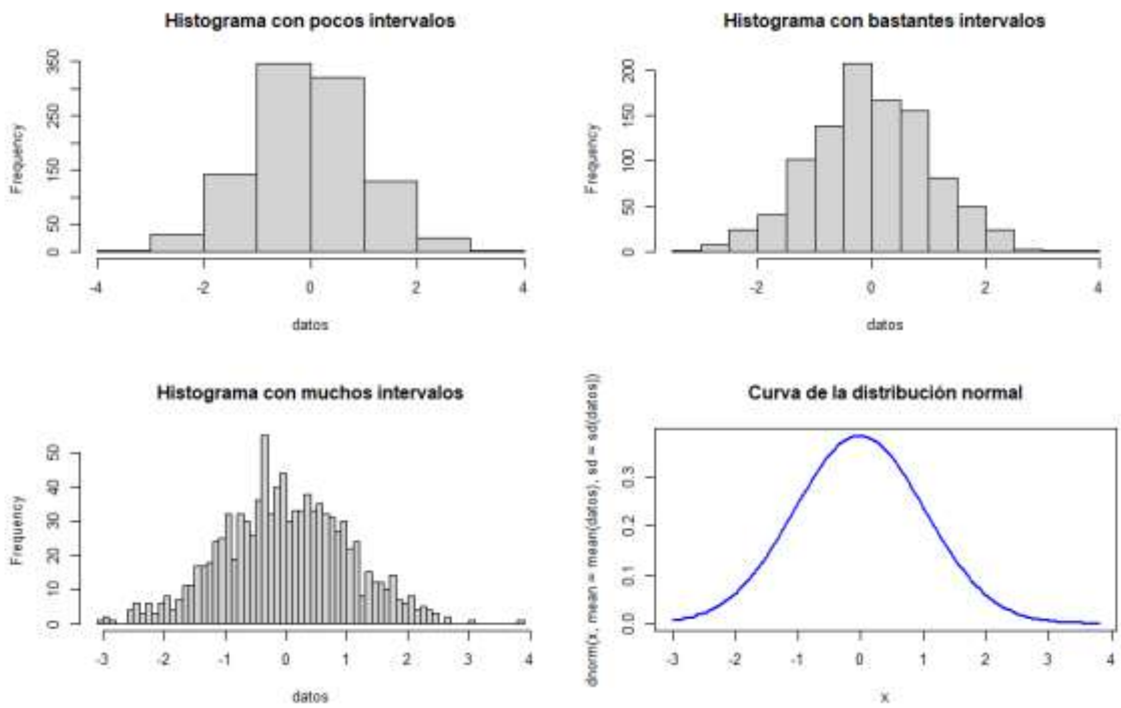
Introducción

Una variable aleatoria $X: E \rightarrow R$ se dice continua si X(E) es un conjunto continuo de números reales (como por ejemplo un intervalo).

Existen muchos ejemplos de variables aleatorias continuas. Si se estudia la altura de un conjunto de personas, ésta puede tomar como valor cualquier número real dentro de un cierto intervalo, a pesar de que se convierta en discreta, y esto por varios motivos: precisión del instrumento de medida, o el hecho de que, si se anotase la altura de cien personas con una precisión de milímetros, se obtendrían muchos resultados distintos con una frecuencia baja para cada uno de ellos.

Por ello, se suele agrupar los datos en intervalos ("clases") y se elige como representante el punto medio ("marca de clase"). Para la representación gráfica, se utiliza el histograma, en que el área de cada rectángulo es proporcional a la frecuencia (o probabilidad); por ello, en el eje vertical se representa la densidad de frecuencia de probabilidad (está dividida entre la longitud del intervalo).

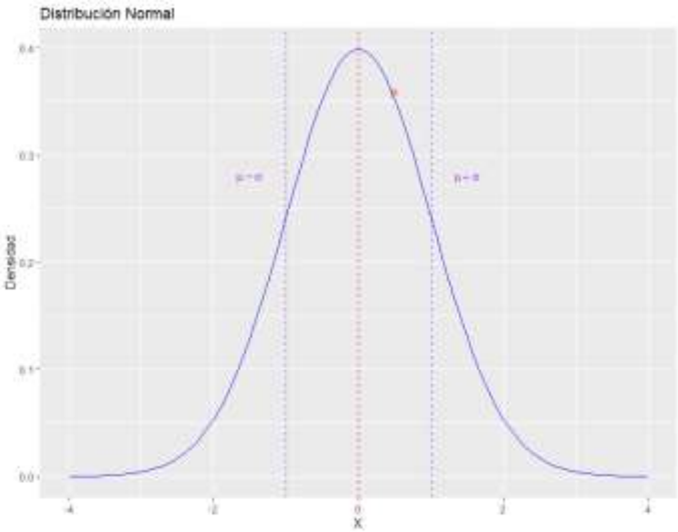
Dada una v.a. continua se podría, en teoría, elegir libremente la anchura de los intervalos. Si ésta es cada vez menor, se obtendrán histogramas con un aspecto muy parecido, y que contienen cada vez más información:



Parece indicado, pues, intentar buscar una curva como la del último gráfico, que recibe el nombre de **función de densidad de probabilidad** (recuerda que las alturas de los rectángulos corresponden a la densidad de probabilidad), para representar un modelo de probabilidad continua. Teniendo en cuenta que el área bajo un histograma nos da la probabilidad, la función buscada debe cumplir unas ciertas condiciones.

Son muchas las situaciones prácticas en las que los histogramas tienen un aspecto de "campana", curva simétrica respecto de la media, como por ejemplo los correspondientes a una distribución binomial a partir de ciertos valores de n; asimismo multitud de v.a. continuas responden a un tal modelo.

Definición y Propiedades



Se dice que una v.a. continua X de media μ y desviación típica σ tiene una distribución normal si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in R$$

Se dirá que X es una $N(\mu, \sigma)$, y a la gráfica se la llama **campana de Gauss**.

Dicha gráfica cumple que:

- Es simétrica respecto a la recta $x = \mu$.
- Tiene un máximo en $x = \mu$.
- Tiene dos puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$.
- El eje OX es asíntota horizontal.

Quinta sesión: Se indicará qué es, cómo se obtiene, y para que se utiliza la Normal Tipificada y se trabajarán diversos problemas relacionados con la distribución Normal. Dentro de la parte de Distribuciones de Probabilidad.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
Normal tipificada	20	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador Pizarra
Intervalos normalidad	15	Ejercicios	Individual	Aula habitual	Cuaderno Ordenadores
Bombillas	20	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno

Normal Tipificada

Para obtener la probabilidad sería necesario conocer el área correspondiente. Para ello es necesario recurrir a tablas ya construidas mediante técnicas numéricas, pero no es posible tener una tabla para cada uno de los posibles valores de μ y σ.

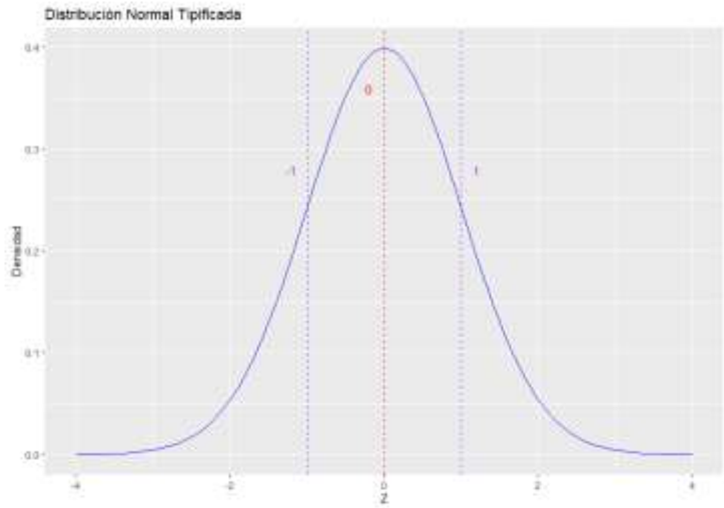
Ahora bien, si X es una v.a. de parámetros μ y σ , podemos realizar las siguientes transformaciones:

$$\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma$$

$$-\sigma \leq X - \mu \leq \sigma$$

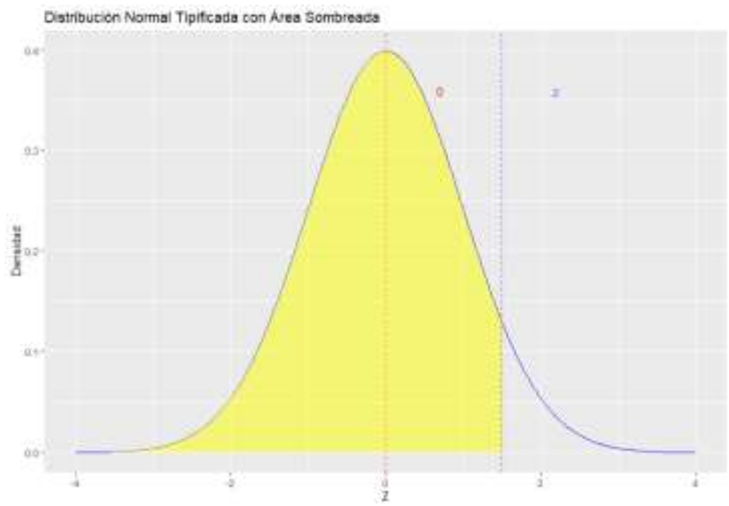
$$-1 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 1$$

Resultando la v.a. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, que tiene media 0 y desviación típica 1, y se llama **variable aleatoria tipificada**.



Se dice que una v.a. Z es una **normal tipificada** si es una N(0,1), y su función de densidad responde a la expresión:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$



El área rayada de la siguiente gráfica será: $\phi(z) = P[Z \leq z]$. En los anexos aparecerá una tabla con los valores de $\phi(z)$ para $0 \leq z \leq 3.49$

Intervalos de Normalidad (ejercicio extraordinario)

Si X es una $N(\mu,\sigma)$, ¿qué porcentaje de la población se encuentra en $[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$, $[\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]$, $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$? Compara los resultados con los obtenidos de la desigualdad de Chebycheff.

Las bombillas

Los cuatro amigos han decidido comprar cajas de fuegos artificiales para una fiesta de despedida del verano. Comprobando la compra han descubierto que el 10% de los fuegos artificiales en estas cajas están defectuosos. Cada caja contiene 100 fuegos artificiales.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja contenga más de 5 fuegos artificiales defectuosos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de fuegos artificiales defectuosos en una caja esté comprendido entre 7 y 13?

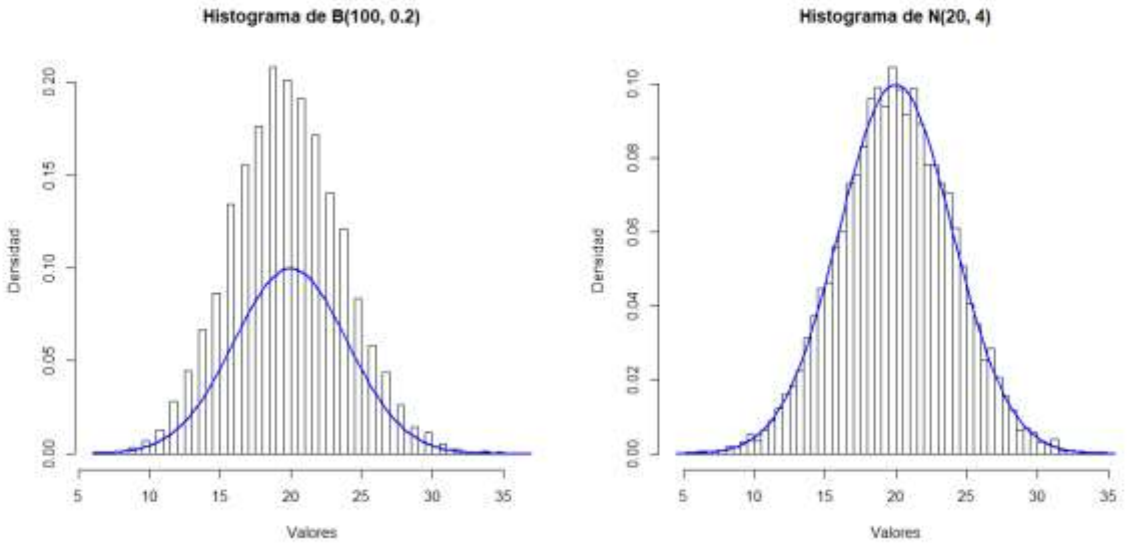
c) ¿Cuántos fuegos artificiales defectuosos pueden esperar encontrar en cada caja por término medio?

Sexta sesión: Se explicará como aproximar la distribución Binomial a través de la Normal y se harán ejercicios relacionados con esto. Dentro de la parte de Distribuciones de Probabilidad.

Cronograma	**Tiempo (min)**	**Metodología**	**Organización alumnos**	**Espacio**	**Recursos**
La normal como aprox. a la binomial	20	Lección magistral	Individual	Aula habitual	Pizarra digital Ordenador
Las cajas	20	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno
Los gorgojos	15	ABP	Individual	Aula habitual	Cuaderno

La Normal como aproximación a la Binomial

Se ha podido comprobar que los cálculos de probabilidades para una distribución binomial son largos en el momento en que n es grande. Pero hubo ocasión de comprobar cómo los histogramas de una distribución binomial se "parecen" mucho a una curva normal con los mismos parámetros que aquella. En el siguiente gráfico se tiene representado el histograma correspondiente a una $B(100, 0.2)$, luego $\mu = np = 20$, $\sigma = \sqrt{npq} = 4$, y la gráfica de la función de densidad de una $N(20{,}4)$.



Si se plantea el cálculo de, por ejemplo, $P(18 \leq K \leq 24)$, siendo K la binomial, ¿se podría aproximar dicho valor mediante el obtenido para la variable normal X con igual media y desviación? Para ello, se deben tener en cuenta algunos puntos importantes:

- Los rectángulos de los que hay que calcular el área están centrados en los números del 18 al 24, luego debemos considerar el área bajo la curva normal en el intervalo [17'5, 24'5]. Sea Z la normal tipificada:

  $P(18 \leq K \leq 24) \cong P(17'5 \leq X \leq 24'5) = P\left(\frac{17.5-20}{4} \leq \frac{X-20}{4} \leq \frac{24.5-20}{4}\right) =$
  $P(-0.625 \leq Z \leq 1.125) = \phi(1.125) - \phi(-0.625) = \phi(1.125) - [1-\phi(0.625)] =$
  $0.8686 - [1-0.7324] = 0.601$

  En general, el rectángulo que corresponde al valor a de la binomial, va desde a - 0'5 hasta a +0'5, extremo que hay que tener en cuenta para conseguir una buena aproximación mediante una normal.

- No siempre la aproximación es buena. Se admitirá como buena la aproximación de una binomial por una normal con su misma media y desviación típica si se cumple que

$$npq > 9$$

Las cajas

Alfonso, Pablo, Paula y María deciden comprar cajas de bebidas en una tienda local para la fiesta de despedida. Han descubierto que el 20% de las cajas de bebidas tienen contenido defectuoso (botellas rotas, bebidas vencidas, etc.).

a) Deciden abrir dos cajas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cajas estén defectuosas?

b) Luego, deciden abrir tres cajas. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de ellas estén defectuosas?

c) Finalmente, deciden abrir 100 cajas. ¿Cuál es la probabilidad de que, como mínimo, 98 cajas no estén defectuosas? ¿Y de que más de 50 cajas estén defectuosas?

Los gorgojos

Una de las plantaciones que pertenecen a la localidad está infectada por una especie de gorgojos y se estima que la plaga la componen dos millones de estos insectos. El ayuntamiento ha pedido ayuda a todos los vecinos y personas en el pueblo para resolver el siguiente problema:

Se trata la plantación con un insecticida que mata al 75% de los bichos. ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan 450.000 insectos o menos? ¿Y de que sobrevivan más de 300.000? ¿Y la de que sobrevivan entre 100.000 y 200.000?

Séptima sesión: Se resolverán dudas y se trabajará la exposición de los problemas asignados a los grupos en clase. Dentro de la parte de Distribuciones de Probabilidad.

- Quedarían cinco sesiones, de las cuales, dos serán de evaluación (prueba escrita y prueba oral), otras dos para posibles retrasos (en este caso el trabajo en equipos de exposición se harán fuera del aula). Y la última se utilizará para que los estudiantes respondan a unas encuestas, creadas por el profesor, que evalúen como creen que han funcionado las clases estos últimos meses, con el objetivo de tras estudiar los resultados, el profesor se dé cuenta de lo que funciona mejor y peor, y pueda mejorar así su docencia de cara a futuro.

Capítulo 5: Conclusiones

En conclusión, la elaboración de una programación didáctica para el primer curso de bachillerato en la modalidad de ciencias sociales ha supuesto un reto estimulante y enriquecedor, que ha permitido integrar de manera coherente y estructurada los diversos elementos que conforman el proceso de enseñanza-aprendizaje. A lo largo de este trabajo, se han abordado aspectos fundamentales del centro educativo y del curso, permitiendo contextualizar la programación en un entorno específico que favorezca el aprendizaje significativo y relevante para los estudiantes.

La definición de objetivos ha sido crucial, ya que ha permitido establecer las metas a alcanzar, alineándolas con las competencias clave que los alumnos deben desarrollar. En este sentido, se ha prestado especial atención a la integración de contenidos que no solo fomenten el conocimiento teórico, sino que también promuevan habilidades prácticas y competencias transversales, esenciales para el desarrollo integral del alumnado.

La metodología aplicada ha sido cuidadosamente seleccionada para fomentar un aprendizaje activo y participativo. Se han incorporado diversas estrategias didácticas que buscan motivar a los estudiantes y adaptarse a sus diferentes estilos de aprendizaje. La inclusión de medidas de atención a la diversidad ha sido un aspecto fundamental, garantizando que todos los alumnos, independientemente de sus características individuales, puedan alcanzar los objetivos propuestos. Estas medidas aseguran una educación inclusiva y equitativa, promoviendo el éxito de todos los estudiantes.

La temporalización de los contenidos ha sido diseñada de manera equilibrada, permitiendo un desarrollo progresivo y coherente de los temas a lo largo del curso. Se ha procurado distribuir el tiempo de manera eficiente, asegurando que cada tema reciba la atención necesaria para su comprensión profunda y aplicación práctica.

La evaluación, planteada desde un enfoque formativo y sumativo, ha sido diseñada para medir de manera objetiva y justa el progreso de los estudiantes. Se han implementado diferentes instrumentos y técnicas de evaluación que permiten recoger información precisa sobre el aprendizaje, facilitando la retroalimentación y la toma de decisiones pedagógicas para mejorar el proceso educativo.

El desarrollo de dos situaciones de aprendizaje en profundidad, enfocadas en los temas de estadística y de probabilidad y distribuciones de probabilidad, ha permitido aplicar de manera práctica los principios de la programación didáctica. Estas situaciones de aprendizaje no solo han sido diseñadas para reforzar los contenidos teóricos, sino también para desarrollar competencias específicas, como el análisis crítico de datos y la toma de decisiones basada en la probabilidad. Se ha buscado que estas actividades sean lo más realistas y aplicables posible, facilitando así la conexión entre los conocimientos académicos y su aplicación en contextos reales.

Bibliografía

Diseño de una programación dinámica en orden a impartir Matemáticas en Bachillerato. TFM: Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas. Ángel Gumiel Correa. Valladolid, Julio 2022.

Diseño de una programación dinámica para impartir matemáticas en Bachillerato con el desarrollo de diversas metodologías. TFM: Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas. Eduardo de Nicolás Gutiérrez. Valladolid, junio 2022.

La estadística de 1º de Bachillerato a través de proyectos y el software R. TFM: Máster en profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas Especialidad: matemáticas. Nuria Alemany Palomo. Junio 2015.

Programación didáctica anual de matemáticas de 1º de Bachillerato de ciencias. SA: La observación permite la predicción. TFM: Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Interuniversitario). Eduardo Hernández Córdoba. curso 2021-2022.

Propuesta de innovación educativa interdisciplinar para Matemáticas en 1º de la ESO. TFM: Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas. María del Mar Arranz Martín. Valladolid, julio de 2021.

Decreto 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León (Boletín Oficial de Castilla y León). Consejería de Educación.

Decreto 86/2002, de 4 de julio, por el que se aprueba el Reglamento Orgánico de los Centros de Educación Obligatoria. Consejería de Educación.

Guía para la elaboración de la programación didáctica (ESO). Junta de Castilla y León. Consejería de Educación. Curso 2022-2023.

Programación de didáctica de matemáticas. IES Carpetania. Curso académico 2022-2023.

Programación del departamento de matemáticas. Comunidad de Madrid. IES Ciudad de Jaén. Curso 2022-2023.

Programación didáctica matemáticas I. 1º de Bachillerato. Gobierno de Canarias. IES Santiago Santana Díaz. Curso Escolar 2022-2023.

Programación didáctica matemáticas I. 1º de Bachillerato. Jaén. Departamento de matemáticas. IES María Bellido Bailén. Curso 2021-2022.

Programación matemáticas bachillerato (LOMLOE). IES Los Batanes Viso del Marqués. Curso 2023-2024.

Anexos

Septiembre

L	M	X	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Octubre

L	M	X	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Noviembre

L	M	X	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Diciembre

L	M	X	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Enero

L	M	X	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Febrero

L	M	X	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29			

Marzo

L	M	X	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Abril

L	M	X	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Mayo

L	M	X	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

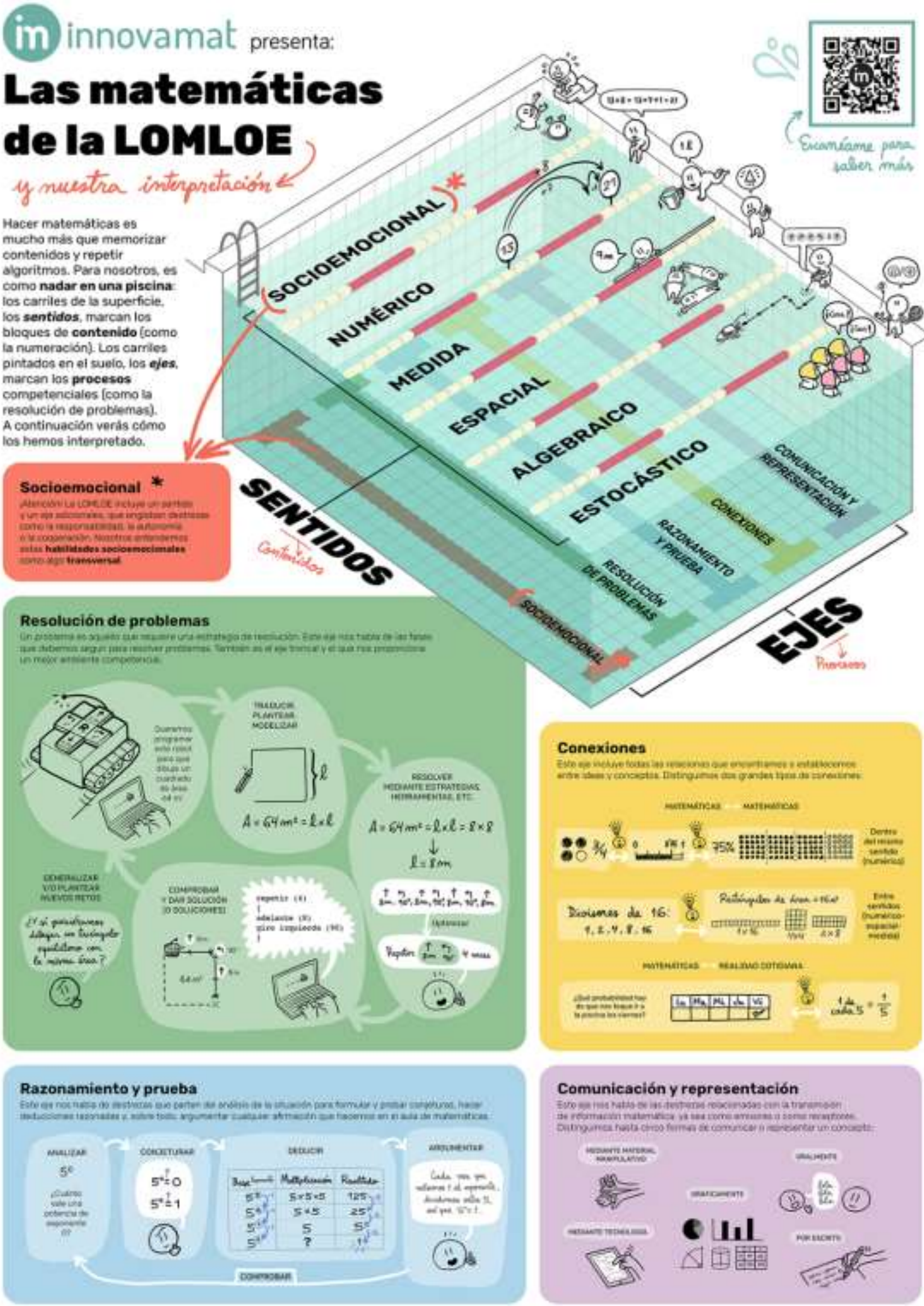
Junio

L	M	X	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Leyenda de colores empleada en el calendario

- Inicio de curso (1)
- Inicio de curso (2)
- Inicio de curso (3)
- Inicio de curso (4)
- Inicio de curso (5)
- Inicio de curso (6)
- Fin de curso (1)
- Fin de curso (2)
- Fin de curso (3)
- Vacaciones escolares
- Días no lectivos
- Fiestas laborales

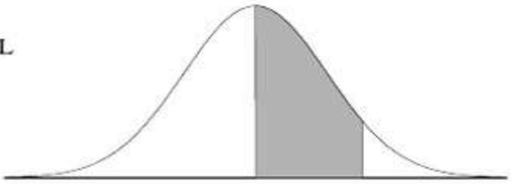
ç



innovamat presenta:
Las matemáticas de la LOMLOE
y nuestra interpretación
Hacer matemáticas es mucho más que memorizar contenidos y repetir algoritmos. Para nosotros, es como nadar en una piscina: los carriles de la superficie, los sentidos, marcan los bloques de contenido (como la numeración). Los carriles pintados en el suelo, los ejes, marcan los procesos competenciales (como la resolución de problemas). A continuación verás cómo los hemos interpretado.
Escanéame para saber más
SOCIOEMOCIONAL
NUMÉRICO
MEDIDA
ESPACIAL
ALGEBRAICO
ESTOCÁSTICO
SENTIDOS
Contenidos
COMUNICACIÓN Y REPRESENTACIÓN
CONEXIONES
RAZONAMIENTO Y PRUEBA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
SOCIOEMOCIONAL
EJES
Procesos
Socioemocional *
habilidades socioemocionales
transversal
Resolución de problemas
TRADUCIR PLANTEAR MODELIZAR
A = 64 m² = l × l
RESOLVER MEDIANTE ESTRATEGIAS, HERRAMIENTAS, ETC.
A = 64 m² = l × l = 8 × 8
l = 8 m
COMPROBAR Y DAR SOLUCIÓN (O SOLUCIONES)
GENERALIZAR Y/O PLANTEAR NUEVOS RETOS
Conexiones
MATEMÁTICAS - MATEMÁTICAS
Divisores de 16:
1, 2, 4, 8, 16
MATEMÁTICAS - REALIDAD COTIDIANA
Razonamiento y prueba
ANALIZAR
CONJETURAR
DEDUCIR
ARGUMENTAR
COMPROBAR
Comunicación y representación

ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL

TIPIFICADA DE 0 A Z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Código TFM

Cesar Ramos

2024-06-04

R Markdown - Código TFM - Variado

```
duration <- faithful$eruptions
colors <- c("red", "yellow", "purple", "violet", "orange", "blue", "pi
nk", "cyan")

# Crear el histograma y guardar los datos en un objeto
hist_data <- hist(duration, right = FALSE, plot = FALSE)

# Calcular los porcentajes
counts <- hist_data$counts
total_counts <- sum(counts)
percentages <- counts / total_counts * 100

# Graficar el histograma con los colores
hist(duration, right = FALSE, col = colors, main = "Erupciones géiser
Faithful", xlab = "Duración en minutos")

# Añadir los porcentajes sobre cada columna
text(x = hist_data$mids, y = counts, labels = paste0(round(percentages
, 1), "%"), pos = 3, cex = 0.8, col = "black")
duration <- faithful$eruptions
colors <- c("red", "yellow", "purple", "violet", "orange")

# Crear el histograma y guardar los datos en un objeto
hist_data <- hist(duration, breaks = 3, right = FALSE, plot = FALSE)

# Calcular los porcentajes
counts <- hist_data$counts
total_counts <- sum(counts)
percentages <- counts / total_counts * 100
```

```
# Graficar el histograma con los colores
hist(duration, breaks = 3, right = FALSE, col = colors, main = "Erupciones géiser", xlab = "Duración en minutos", ylab="Numero de erupciones")


# Añadir los porcentajes sobre cada columna
text(x = hist_data$mids, y = counts, labels = paste0(round(percentages, 1), "%"), pos = 3, cex = 0.8, col = "black")


#---------------------------------------------------------------------


# Instalar y cargar ggplot2 si no lo tienes instalado
# install.packages("ggplot2")
library(ggplot2)
# Parámetros para la distribución normal
mu <- 0       # Media
sigma <- 1    # Desviación estándar


# Crear un data frame para la distribución normal
x <- seq(mu - 4*sigma, mu + 4*sigma, length=100)
y <- dnorm(x, mean=mu, sd=sigma)
data <- data.frame(x, y)


# Crear la gráfica
p1 <- ggplot(data, aes(x, y)) +
  geom_line(color = "blue") +
  geom_vline(xintercept = mu, linetype = "dashed", color = "red") +
  geom_vline(xintercept = mu - sigma, linetype = "dashed", color = "purple") +
  geom_vline(xintercept = mu + sigma, linetype = "dashed", color = "purple") +
  labs(title = "Distribución Normal",
       x = "X",
       y = "Densidad") +
  annotate("text", x = mu+0.5, y = max(y) * 0.9, label = expression(mu), color = "red") +
  annotate("text", x = mu - sigma-0.5, y = max(y) * 0.7, label = expression(mu - sigma), color = "purple") +
```

```r
  annotate("text", x = mu + sigma+0.5, y = max(y) * 0.7, label = expre
ssion(mu + sigma), color = "purple")


print(p1)
# Parámetros para la distribución normal tipificada
mu <- 0
sigma <- 1


# Crear un data frame para la distribución normal tipificada
x_standard <- seq(mu - 4*sigma, mu + 4*sigma, length=100)
y_standard <- dnorm(x_standard, mean=mu, sd=sigma)
data_standard <- data.frame(x_standard, y_standard)


# Crear la gráfica
p2 <- ggplot(data_standard, aes(x_standard, y_standard)) +
  geom_line(color = "blue") +
  geom_vline(xintercept = 0, linetype = "dashed", color = "red") +
  geom_vline(xintercept = -1, linetype = "dashed", color = "purple") +
  geom_vline(xintercept = 1, linetype = "dashed", color = "purple") +
  labs(title = "Distribución Normal Tipificada",
       x = "Z",
       y = "Densidad") +
  annotate("text", x = 0-0.2, y = max(y_standard) * 0.9, label = "0",
color = "red") +
  annotate("text", x = -1-0.2, y = max(y_standard) * 0.7, label = "-1"
, color = "purple") +
  annotate("text", x = 1+0.2, y = max(y_standard) * 0.7, label = "1",
color = "purple")


print(p2)
#----------------------------------------------------------------------
---


# Instalar y cargar ggplot2 si no lo tienes instalado
# install.packages("ggplot2")
library(ggplot2)
```

```r
# Parámetros para la distribución normal tipificada
mu <- 0
sigma <- 1
z <- 1.5  # Valor z específico donde queremos sombrear a la izquierda

# Crear un data frame para la distribución normal tipificada
x_standard <- seq(mu - 4*sigma, mu + 4*sigma, length=1000)
y_standard <- dnorm(x_standard, mean=mu, sd=sigma)
data_standard <- data.frame(x_standard, y_standard)

# Crear la gráfica
p <- ggplot(data_standard, aes(x_standard, y_standard)) +
  geom_line(color = "blue") +
  geom_vline(xintercept = 0, linetype = "dashed", color = "red") +
  labs(title = "Distribución Normal Tipificada con Área Sombreada",
       x = "Z",
       y = "Densidad") +
  annotate("text", x = 0+0.7, y = max(y_standard) * 0.9, label = "0",
color = "red") +
  geom_ribbon(data=subset(data_standard, x_standard <= z), aes(ymax=y_
standard), ymin=0, fill="yellow", alpha=0.5) +
  geom_vline(xintercept = z, linetype = "dashed", color = "purple") +
  annotate("text", x = z + 0.7, y = max(y_standard) * 0.9, label = "z"
, color = "purple")

print(p)
#-------------------------------------------------------------------
---


par(mfrow=c(1,2))

# Instalar y cargar ggplot2 si no lo tienes instalado
# install.packages("ggplot2")
library(ggplot2)

# Parámetros para la distribución binomial
n <- 100
p <- 0.2
```

```r
# Generar datos binomiales
set.seed(123)  # Para reproducibilidad
binom_data <- rbinom(10000, size = n, prob = p)

# Crear un data frame para el histograma
hist_data <- data.frame(binom_data)

# Crear el histograma
ggplot(hist_data, aes(x = binom_data)) +
  geom_histogram(binwidth = 1, color = "black", fill = "white") +
  labs(title = "Histograma de una Distribución Binomial B(100, 0.2)",
       x = "Valores",
       y = "Frecuencia") +
  theme_minimal()
#----------------------------------------------------------------------
---

# Instalar y cargar ggplot2 si no lo tienes instalado
# install.packages("ggplot2")
library(ggplot2)

# Parámetros para la distribución normal
mu <- 20
sigma <- 4

# Generar datos normales
set.seed(123)  # Para reproducibilidad
normal_data <- rnorm(10000, mean = mu, sd = sigma)

# Crear un data frame para el histograma
hist_data <- data.frame(normal_data)

# Crear el histograma
ggplot(hist_data, aes(x = normal_data)) +
  geom_histogram(aes(y = ..density..), binwidth = 0.5, color = "black"
, fill = "white") +
```

```
  stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = mu, sd = sigma), color
= "blue", size = 1) +
  labs(title = "Histograma de una Distribución Normal N(20, 4)",
       x = "Valores",
       y = "Densidad") +
  theme_minimal()
#-----------------------------------------------------------------------
---

# Parámetros para la distribución binomial
n <- 100
p <- 0.2
mu_binom <- n * p
sigma_binom <- sqrt(n * p * (1 - p))

# Generar datos binomiales
set.seed(123)  # Para reproducibilidad
binom_data <- rbinom(10000, size = n, prob = p)

# Parámetros para la distribución normal
mu_norm <- 20
sigma_norm <- 4

# Generar datos normales
normal_data <- rnorm(10000, mean = mu_norm, sd = sigma_norm)

# Establecer el layout para dos gráficos
par(mfrow = c(1, 2))  # 1 fila, 2 columnas

# Crear el histograma de la distribución binomial
hist(binom_data, breaks = 50, probability = TRUE,
     main = "Histograma de B(100, 0.2)",
     xlab = "Valores",
     ylab = "Densidad",
     col = "white", border = "black")
# Superponer la densidad normal teórica
curve(dnorm(x, mean = mu_binom, sd = sigma_binom),
      col = "blue", lwd = 2, add = TRUE)
```

```r
# Crear el histograma de la distribución normal
hist(normal_data, breaks = 50, probability = TRUE,
     main = "Histograma de N(20, 4)",
     xlab = "Valores",
     ylab = "Densidad",
     col = "white", border = "black")
# Superponer la densidad normal teórica
curve(dnorm(x, mean = mu_norm, sd = sigma_norm),
      col = "blue", lwd = 2, add = TRUE)
# Restaurar el layout por defecto
par(mfrow = c(1, 1))

#----------------------------------------------------------------------
---

# Parámetros de la distribución normal
mu <- 0
sigma <- 1

# Generar valores x en un rango amplio
x <- seq(mu - 4*sigma, mu + 4*sigma, length.out = 100)

# Calcular los valores de la función de densidad de probabilidad norma
l
y <- dnorm(x, mean = mu, sd = sigma)

# Graficar la campana de Gauss
plot(x, y, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
     main = "Campana de Gauss", xlab = "Valores", ylab = "Densidad")
#----------------------------------------------------------------------
---

# Instalar y cargar ggplot2 si no lo tienes instalado
# install.packages("ggplot2")
library(ggplot2)

# Crear un data frame con los valores x y y
```

```r
data <- data.frame(x, y)

# Graficar la campana de Gauss con ggplot2
ggplot(data, aes(x, y)) +
  geom_line(color = "blue", size = 1) +
  labs(title = "Campana de Gauss", x = "Valores", y = "Densidad")
#----------------------------------------------------------------------
---


# Datos de ejemplo
x <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)
y <- c(2, 3, 5, 4, 6, 7, 9, 8, 10, 11)
labels <- c("A", "B", "C", "D", "E", "F", "G", "H", "I", "J")

# Graficar el diagrama de dispersión con etiquetas
plot(x, y,
     main = "Diagrama de Dispersión",
     xlab = "Eje X",
     ylab = "Eje Y",
     pch = 16,  # Cambia el tipo de punto
     col = "blue",  # Cambia el color de los puntos
     xlim = c(0, 11),  # Establece el límite del eje x
     ylim = c(0, 12)  # Establece el límite del eje y
)

# Agregar etiquetas a los puntos
text(x, y, labels, pos = 3, cex = 0.8, col = "red")
#----------------------------------------------------------------------
---


# Crear variables x e y
x <- c("A", "B", "C", "A", "B")
y <- c("X", "Y", "X", "Z", "Y")

# Calcular la tabla de contingencia
tabla_contingencia <- table(x, y)

# Reemplazar todos los valores con NA
```

```
tabla_contingencia[] <- NA

# Mostrar la tabla de contingencia
print(tabla_contingencia)
```

```
##    y
## x   X Y Z
##   A
##   B
##   C
```

```
#--------------------------------------------------------

# Cargar la librería
library(ggplot2)

# Generar datos para distintos casos de correlación
set.seed(123)  # Para reproducibilidad

# Correlación positiva perfecta
x_perfecta <- 1:10
y_perfecta <- 1:10

# Correlación positiva alta
x_positiva_alta <- 1:10
y_positiva_alta <- x_positiva_alta + rnorm(10, mean = 0, sd = 1)

# Correlación positiva baja
x_positiva_baja <- 1:10
y_positiva_baja <- x_positiva_baja + rnorm(10, mean = 0, sd = 2)

# Sin correlación
x_sin_correlacion <- 1:10
y_sin_correlacion <- rnorm(10, mean = 0, sd = 1)

# Correlación negativa baja
x_negativa_baja <- 1:10
y_negativa_baja <- x_negativa_baja - rnorm(10, mean = 0, sd = 2)
```

```r
# Correlación negativa alta
x_negativa_alta <- 1:10
y_negativa_alta <- -x_negativa_alta + rnorm(10, mean = 0, sd = 1)

# Correlación negativa perfecta
x_negativa_perfecta <- 1:10
y_negativa_perfecta <- -1: -10

# Crear gráficos para cada caso
par(mfrow = c(3, 3))  # Organizar los gráficos en 3 filas y 3 columnas

# Correlación positiva perfecta
plot(x_perfecta, y_perfecta, main = "Correlación Positiva Perfecta", col = "blue", pch = 16)

# Correlación positiva alta
plot(x_positiva_alta, y_positiva_alta, main = "Correlación Positiva Alta", col = "green", pch = 16)

# Correlación positiva baja
plot(x_positiva_baja, y_positiva_baja, main = "Correlación Positiva Baja", col = "red", pch = 16)

# Sin correlación
plot(x_sin_correlacion, y_sin_correlacion, main = "Sin Correlación", col = "orange", pch = 16)

# Correlación negativa baja
plot(x_negativa_baja, y_negativa_baja, main = "Correlación Negativa Baja", col = "purple", pch = 16)

# Correlación negativa alta
plot(x_negativa_alta, y_negativa_alta, main = "Correlación Negativa Alta", col = "brown", pch = 16)

# Correlación negativa perfecta
plot(x_negativa_perfecta, y_negativa_perfecta, main = "Correlación Negativa Perfecta", col = "cyan", pch = 16)
```

```r
#-------------------------------------------------------------------------
---

# Cargar la librería
library(ggplot2)

# Generar datos para distintos casos
set.seed(123)  # Para reproducibilidad

# Sin relación
x1 <- rnorm(100)
y1 <- rnorm(100)

# Relación lineal
x2 <- seq(-10, 10, length.out = 100)
y2 <- 2 * x2 + rnorm(100)

# Relación cuadrática
x3 <- seq(-10, 10, length.out = 100)
y3 <- x3^2 + rnorm(100)

# Relación exponencial
x4 <- seq(0, 4, length.out = 100)
y4 <- exp(x4) + rnorm(100)

# Relación logarítmica
x5 <- seq(1, 100, length.out = 100)
y5 <- log(x5) + rnorm(100)

# Relación inversa
x6 <- seq(1, 100, length.out = 100)
y6 <- 1 / x6 + rnorm(100, sd = 0.1)

# Establecer el layout para seis gráficos
par(mfrow = c(3, 2))
# Graficar cada relación
```

```
# Sin relación
plot(x1, y1, main = "Sin relación", xlab = "X", ylab = "Y", pch = 16,
col = "blue")


# Relación lineal
plot(x2, y2, main = "Relación lineal", xlab = "X", ylab = "Y", pch = 1
6, col = "green")


# Relación cuadrática
plot(x3, y3, main = "Relación cuadrática", xlab = "X", ylab = "Y", pch
= 16, col = "red")


# Relación exponencial
plot(x4, y4, main = "Relación exponencial", xlab = "X", ylab = "Y", pc
h = 16, col = "purple")


# Relación logarítmica
plot(x5, y5, main = "Relación logarítmica", xlab = "X", ylab = "Y", pc
h = 16, col = "orange")


# Relación inversa
plot(x6, y6, main = "Relación inversa", xlab = "X", ylab = "Y", pch =
16, col = "brown")
# Restaurar el layout por defecto
par(mfrow = c(1, 1))


#----------------------------------------------------------------------
---


# Función para calcular el triángulo de Pascal
pascal_triangle <- function(n) {
  triangle <- matrix(0, nrow = n, ncol = n)
  for (i in 1:n) {
    triangle[i, 1:i] <- choose(i - 1, 0:(i - 1))
  }
  return(triangle)
}
```

```r
# Función para dibujar la pirámide de Pascal
plot_pascal_pyramid <- function(triangle) {
  n <- nrow(triangle)
  max_width <- n
  max_height <- n
  plot(1:max_width, type = "n", xlim = c(-(max_width - 1)/2, (max_width - 1)/2), ylim = c(0, max_height + 1), xlab = "", ylab = "", axes = FALSE, main = "Pirámide de Pascal")
  for (i in 1:max_height) {
    for (j in 1:i) {
      text(j - (i - 1)/2 - 0.5, max_height - i + 1, labels = triangle[i, j], cex = 0.8)
      text(-(j - (i - 1)/2 - 0.5), max_height - i + 1, labels = triangle[i, j], cex = 0.8)
    }
  }
}

# Crear el triángulo de Pascal
n <- 5
triangle <- pascal_triangle(n)

# Configurar el layout para dos gráficos
par(mfrow = c(1, 2))

# Dibujar la pirámide de Pascal
plot_pascal_pyramid(triangle)

# Dibujar la pirámide de Pascal
plot_pascal_pyramid(triangle)
# Restaurar el layout por defecto
par(mfrow = c(2, 2))
```

```r
#-----------------------------------------------------------------------
---

# Generar datos de una distribución normal
datos <- rnorm(1000)

# Crear un histograma con pocos intervalos
hist(datos, breaks = 5, main = "Histograma con pocos intervalos")

# Crear un histograma con bastantes intervalos
hist(datos, breaks = 20, main = "Histograma con bastantes intervalos")

# Crear un histograma con muchos intervalos
hist(datos, breaks = 50, main = "Histograma con muchos intervalos")

# Crear una gráfica con la curva de la distribución normal
curve(dnorm(x, mean = mean(datos), sd = sd(datos)), from = min(datos),
to = max(datos), col = "blue", lwd = 2, main = "Curva de la distribuci
ón normal")
#-----------------------------------------------------------------------
---

# install.packages("scales")
# Cargar las librerías necesarias
library(ggplot2)
library(scales)

# Datos de la población activa en Castilla y León
sectores <- c("Servicios", "Agricultura", "Industria", "Construcción")
porcentajes <- c(59.2, 6, 25.4, 9.4)

# Crear un data frame con los datos
data <- data.frame(
  Sector = sectores,
  Porcentaje = porcentajes
)

# Definir los colores para cada sector
```

```r
colores <- c("Servicios" = "pink", "Agricultura" = "green", "Industria
" = "orange", "Construcción" = "yellow")


# Crear el gráfico de sectores
ggplot(data, aes(x = "", y = Porcentaje, fill = Sector)) +
  geom_bar(stat = "identity", width = 1) +
  coord_polar(theta = "y") +
  scale_fill_manual(values = colores) +
  theme_void() +
  ggtitle("Distribución de la Población Activa en Castilla y León") +
  labs(fill = "Sector") +
  geom_text(aes(label = percent(Porcentaje/100)), position = position_
stack(vjust = 0.5))
#----------------------------------------------------------------------
---


#install.packages("plotly")
library(plotly)
# Cargar la librería necesaria
library(plotly)


# Datos de la población activa en Castilla y León
sectores <- c("Servicios", "Agricultura", "Industria", "Construcción")
porcentajes <- c(59.2, 6, 25.4, 9.4)


# Definir los colores para cada sector
colores <- c("pink", "green", "red", "yellow")


# Crear el gráfico de sectores en 3D
fig <- plot_ly(
  labels = sectores,
  values = porcentajes,
  type = 'pie',
  textinfo = 'label+percent',
  insidetextorientation = 'radial',
  marker = list(colors = colores),
  hole = 0.3  # Para un gráfico de dona 3D
)
```

```
fig <- fig %>% layout(
  title = 'Distribución de la Población Activa en Castilla y León',
  showlegend = TRUE,
  legend = list(title = list(text = 'Sector'))
)

# Mostrar el gráfico
Fig

#----------------------------------------------------------------------
---

# Cargar la librería ggplot2
library(ggplot2)

# Datos del IPC en España desde 1987 hasta 1995
anos <- 1987:1995
ipc <- c(4.6, 5.8, 6.9, 6.5, 5.5, 5.3, 4.9, 4.3, 4.3)

# Crear data frame
data <- data.frame(Ano = anos, IPC = ipc)

# Crear el gráfico
ggplot(data, aes(x = Ano, y = IPC)) +
  geom_line(color = "black", size = 1) +  # Línea negra
  geom_area(aes(y = ifelse(IPC > 0, IPC, 0)), fill = "green", alpha =
0.5) +  # Área verde por encima de 0
  geom_area(aes(y = ifelse(IPC < 0, IPC, 0)), fill = "brown", alpha =
0.5) +  # Área marrón por debajo de 0
  scale_y_continuous(limits = c(0, max(ipc)), expand = c(0, 0)) +  # A
segurarse de que el eje y comienza en 0
  labs(title = "Evolución del IPC en España (1987-1995)", x = "Año", y
= "IPC (%)") +
  theme_minimal()
# Cargar la librería ggplot2
library(ggplot2)

# Datos del IPC en España desde 1987 hasta 1995
```

```r
anos <- 1987:1995
ipc <- c(4.6, 5.8, 6.9, 6.5, 5.5, 5.3, 4.9, 4.3, 4.3)

# Crear data frame
data <- data.frame(Ano = anos, IPC = ipc)

# Crear el gráfico
ggplot(data, aes(x = Ano, y = IPC)) +
  geom_line(color = "black", size = 1) +  # Línea negra
  geom_point(color = "blue", size = 3) +  # Puntos azules en cada año
  geom_text(aes(label = IPC), vjust = -1, color = "black") +  # Valores del IPC encima de los puntos
  geom_area(aes(y = ifelse(IPC > 0, IPC, 0)), fill = "green", alpha = 0.5) +  # Área verde por encima de 0
  geom_area(aes(y = ifelse(IPC < 0, IPC, 0)), fill = "brown", alpha = 0.5) +  # Área marrón por debajo de 0 (en este caso no hay)
  geom_vline(xintercept = anos, linetype = "dotted", color = "grey") + # Líneas verticales
  geom_hline(yintercept = seq(4, max(ipc), by = 1), linetype = "dotted", color = "grey") +  # Líneas horizontales
  scale_x_continuous(breaks = anos) +  # Mostrar todos los años en el eje x
  scale_y_continuous(limits = c(4, max(ipc)+0.5), expand = c(0, 0)) + # Comenzar el eje y en 4
  labs(title = "Evolución del IPC en España (1987-1995)", x = "Año", y = "IPC (%)") +
  theme_minimal()
# Configuración de parámetros
n_values <- c(10, 20, 50, 100)
p_values <- c(0.2, 0.5)
colors <- c("red", "blue")

# Configuración del layout de los gráficos
par(mfrow = c(4, 2))

# Generar y graficar histogramas para cada combinación de n y p
for (n in n_values) {
  for (p in p_values) {
    # Generar datos binomiales
    data <- rbinom(10000, size = n, prob = p)
```

```
    # Crear histograma
    hist_info <- hist(data, breaks = -0.5:(n + 0.5), plot = FALSE)

    # Determinar la barra con más datos
    max_count_index <- which.max(hist_info$counts)

    # Crear el histograma con colores personalizados
    hist(data, breaks = -0.5:(n + 0.5), col = ifelse(hist_info$mids == hist_info$mids[max_count_index], colors[1], colors[2]),
         main = paste("n =", n, ", p =", p), xlab = "Number of successes", ylab = "Frequency")
  }
}
```