UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología.

Dpto. Matemática Aplicada.

ESTUDIO DE LA APLICACIÓN DE DIVERSAS METODOLOGÍAS A LA HORA DE ESTUDIAR VARIOS CONCEPTOS DISTINTOS DE LAS ASIGNATURAS DE BACHILLERATO

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Salgado Herreras, Pedro.

Tutor: Fernández Boix, Alberto.

González Fernández, Cesáreo Jesús.

Valladolid, junio 2024.

RESUMEN.

A lo largo del desarrollo de este TFM vamos a estudiar diferentes métodos para aislar raíces de polinomios y cómo podemos llevar estos teoremas a la clase de forma que sean entendibles y aplicables por parte de los alumnos. Para ello comenzaremos con el contenido matemático, explicando los teoremas con los que vamos a trabajar, desarrollando las demostraciones de los mismos y todos los conceptos necesarios para su comprensión. Seguidamente se propondrán una serie de ejercicios para realizar en clase aplicando estos métodos, para concluir con un análisis curricular acerca de su implementación en los diferentes cursos y la exposición de diferentes metodologías para ser explicados en clase.

ABSTRACT.

Throughout the development of this TFM we are going to study different methods for isolating roots of polynomials and how we can bring these theorems to the classroom so that they are understandable and applicable by the students. To do so, we will begin with the mathematical content, explaining the theorems we are going to work with, developing their proofs and all the concepts necessary for their understanding. We will then propose a series of exercises to be carried out in class applying these methods, to conclude with a curricular analysis of their implementation in the different courses and the presentation of different methodologies to be explained in class.

PALABRAS CLAVE.

Raíces, polinomios, cooperativo, proyectos, magistral.

KEYWORDS.

Roots, polynomials, cooperative, projects, master class.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

En el examen de junio de la EBAU de Castilla y León de 2018 aparecía el siguiente problema:

"Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula." (EBAU Castilla y León, Matemáticas II, propuesta 3/2018, Opción A, E3).

Uno de mis antiguos profesores del instituto, que corrigió esa prueba, me comentaba el asombroso porcentaje de alumnos que para hallar el número de raíces de la función polinómica intentó factorizar el polinomio mediante una división a través del método de Ruffini, buscando entre las posibles raíces enteras del mismo, divisores del término independiente. Al no obtener ninguna raíz entera desistieron del problema. Él me aseguraba que de los 65 alumnos que eligieron la Opción A, donde figuraba ese problema, más de 45 intentaron el procedimiento mencionado y no continuaron con el problema, y que tan solo 4 alumnos lo resolvieron con éxito. Cuando lo habló con el resto de correctores de su distrito universitario todos tenían la misma impresión.

No es éste, por supuesto, un estudio riguroso de las competencias adquiridas por los alumnos sobre la resolución de ecuaciones, ni sobre las ideas e impresiones que adquieren los alumnos a partir de los contenidos trabajados durante toda la educación secundaria sobre el tema. Ese sería tema para otro trabajo fin de Máster o, probablemente, un trabajo mucho más amplio de investigación. Pero sí que podemos, a partir de estas impresiones, reflexionar un poco más en el trato que se le presta a la resolución de ecuaciones polinómicas en los temarios de la educación secundaria.

Como expondremos con mayor detenimiento en el desarrollo en el capítulo 4. de este trabajo, en el primer curso de la E.S.O. se introduce por primera vez el Álgebra, con especial atención a la resolución de ecuaciones de primer grado.

En segundo curso se repasa la resolución de ecuaciones de primer grado y, de forma, casi siempre, tristemente mágica, se les ofrece a los alumnos una fórmula para la resolución de ecuaciones de segundo grado. Posteriormente se estudian por vez primera los sistemas lineales de ecuaciones, para los que se les brindan varios métodos de resolución.

En los cursos de 3º y 4º de E.S.O. se aborda la factorización de polinomios, se estudia el teorema del resto y, de manera mágica de nuevo en muchos de los textos, se dice a los alumnos que una raíz entera de un polinomio de coeficientes enteros ha de ser divisor del término independiente. Se realizan múltiples ejercicios para practicar con estas factorizaciones, que se usarán, posteriormente en la resolución de ecuaciones de grado mayor o igual que tres.

Estos mismos conceptos son los que se repasan en el comienzo de 1º de Bachillerato en cualquiera de las opciones del mismo en la que se cursan Matemáticas.

Si se observan los ejercicios propuestos en los textos utilizados por los alumnos, naturalmente, éstos ofrecen casi el 100% de las ocasiones un resultado satisfactorio, entendiéndose éste como el hallazgo final de la factorización propuesta.

Tan sólo en el 2º curso de Bachillerato, y sólo en la opción de Ciencias, al estudiar el teorema de Bolzano en el tema de continuidad de funciones, se plantean algunos problemas como el reseñado anteriormente, en el que se habla se aislar raíces sin obtener algebraicamente una solución.

Creemos que, con este enfoque y desarrollo del temario de Matemáticas, los alumnos adquieren la falsa impresión de que hay una fórmula para que todo salga. No es extraño que en el segundo curso de la E.S.O., los alumnos, al estudiar la fórmula para la resolución de la ecuación de segundo grado, pregunten por fórmulas para resolver ecuaciones de grado superior. La respuesta, al menos en mi experiencia como alumno, suele ser un tanto elusiva: la hay, pero es muy complicada, ya la estudiarás o, a lo mejor, no la estudias nunca que ya se encargan los ordenadores de hacer esos cálculos. Casi nunca hay tiempo, siquiera, de esbozar una exposición de la historia del Álgebra, que pudiese aclarar un poco la idea de que los problemas que hacemos salen porque están preparados para que eso ocurra, pero que el Álgebra no tiene fórmulas para todo y que hay otros métodos, numéricos, para obtener resultados que necesitamos de forma cotidiana en ciencia e ingeniería.

La inmensa evolución en la implementación de estos métodos gracias al desarrollo de los ordenadores es ajena a la evolución del currículo escolar.

Entendiendo que los temas que acabamos de señalar son complejos, amplios y que el desarrollo del currículo escolar es tema del que ya se ocupan expertos. Este TFM pretende explorar una pequeña vía de trabajo sobre la resolución de las ecuaciones polinómicas en Bachillerato.

A partir de tres teoremas (Regla de los signos de Descartes, Teorema de Budan-Fourier y Teorema de Sturm) sencillos en cuanto a la facilidad de comprensión de su enunciado, asequibles para cualquier estudiante de Bachillerato de Ciencias. Se proponen diversos ejercicios y actividades para trabajar el problema de aislar las raíces de una función polinómica. Se pretende con ello alejar del alumno la idea de que resolvemos algebraicamente cualquier ecuación polinómica, que la costumbre de que todos los ejercicios tienen soluciones afortunadamente enteras es un artificio creado por la selección de los problemas y que en la vida real no suele acontecer así. Y, a su vez, posibilitar que se hable en la clase de Matemáticas de esos otros métodos de resolución y de las técnicas específicas en nuestra ciencia para aprovechar la potencia de cálculo de los ordenadores.

Indicamos, en la línea antes enunciada, algunas sugerencias de trabajo para la E.S.O. Pero centramos nuestra propuesta para llevarse a cabo de manera más o menos ambiciosa en los cursos de Bachillerato. Desde la simple introducción de la regla de los signos de Descartes en el tema de ecuaciones de primero de Bachillerato o del teorema de Budan-Fourier como una aplicación del estudio local de funciones mediante las derivadas a la localización de las raíces de un polinomio. O como una ampliación de las aplicaciones del teorema de Bolzano, como primera aproximación al cálculo numérico.

El contexto también puede ser variado, desde considerarse adecuado para tratarlo de forma general, considerarlo más pertinente para un grupo que muestre especial interés en las Matemáticas, plantearlo como un posible trabajo de investigación para ampliar conocimientos o dentro de un proyecto significativo más amplio. O, incluso, como un posible proyecto de investigación dentro del Bachillerato de Investigación/Excelencia.

Por todo ello, fundamentaremos este trabajo con la introducción de tres resultados básicos sobre el problema de aislar raíces de una ecuación polinómica. Como ya hemos comentado, creemos que los enunciados de estos teoremas son asequibles a los alumnos de Bachillerato. Su implementación también lo es, aunque, como veremos, la del teorema de Sturm es ciertamente laboriosa. Ésta puede servir para reflexionar sobre el problema de reforzar las hipótesis necesarias para conseguir resultados más precisos, e introducir el concepto de coste computacional de un algoritmo. Más complejas resultan las demostraciones de estos tres resultados, aunque no requieren de ninguna herramienta matemática que no se adquiera en Bachillerato. Estas pueden obviarse con los alumnos, como desgraciadamente se hace cada vez más en las clases de Bachillerato, limitando progresivamente la asignatura a un aprendizaje de diversas técnicas. O abordarlas, en mayor o menor grado, según los intereses y capacidades de los alumnos concernidos.

A partir del desarrollo riguroso de los teoremas, presentaremos unos ejemplos de aplicación de los mismos.

Posteriormente, analizaremos, con mayor detenimiento que el mostrado en esta introducción, los aspectos relacionados que se recogen en el currículo actual de la asignatura en la ESO y Bachillerato, con el fin de elaborar una propuesta didáctica enfocada a su tratamiento en Bachillerato.

Finalmente, explicitaremos esta propuesta mediante la elaboración de los contenidos de una unidad didáctica.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES.

Definición 2.1. "Dada una secuencia, finita o infinita, de números reales $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..$ decimos que hay una variación de signo entre los elementos a_p y a_q, ambos distintos de 0, si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

i. Si $q = p+1$, a_p y a_q tienen signo opuesto.

ii. Si $q \geq p+2$, $a_{p+1} = ... = a_{q-1} = 0$ y a_p y a_q tienen signo opuesto." (Akritas, 1982)

Definición 2.2. "Dado un polinomio con coeficientes reales $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$. Denotaremos por $\upsilon(p)$ al número de variaciones de signo de la secuencia de coeficientes y por $z(p)$ al número de raíces positivas del polinomio teniendo en cuenta su multiplicidad."

Lema 2.3. "Dado un polinomio $p(x) = a_0 x^{b_0} + a_1 x^{b_1} + ... + a_n x^{b_n}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2,...,n$, $0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < ... < b_n$. Si $a_0 a_n > 0$, entonces $z(p)$ es par; y si $a_0 a_n < 0$, entonces $z(p)$ es impar".

Demostración:

Caso $a_0 > 0$, $a_n > 0$.

En la gráfica del polinomio $p(x)$ cuando $x > 0$, podemos considerar dos tipos de raíces:

- Raíces, x_0, donde la gráfica "cruza" el eje OX, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_1, x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) /\ f(x_1) f(x_2) < 0$$

- Raíces, x_0, donde la gráfica "sólo toca" el eje OX, es decir:

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) /\ f(x) > 0 \text{ ó } f(x) < 0$$

Dado que $a_0 > 0$, $a_n > 0$, es obvio que $p(0) = a_0 > 0$, $\lim_{x \to \infty} p(x) = \infty$ y, por tanto, el número de raíces donde la gráfica "cruza" el eje OX, debe ser par.

Además, si en una raíz, x_0, la gráfica "sólo toca" el eje *OX*, ésta debe tener multiplicidad par. Ya que, si tuviese multiplicidad impar, en la descomposición factorial del polinomio tendríamos un término $(x - x_o)^k$, con k impar y en un entorno del punto x_0 que no contuviera ninguna otra raíz, el polinomio adoptaría signos diferentes a ambos lados de x_0.

$z(p)$ debe ser par.

El resto de casos se demuestran de forma análoga. □

Lema 2.4. (Aleksandrov, Kolmogorov, & Laurentiev, 1985) "Una raíz múltiple de un polinomio con coeficientes reales es raíz de su derivada con multiplicidad inferior en una unidad. Además, si la raíz es simple, ésta no es raíz de su derivada."

Demostración:

Sea $p(x)=(x-a)^k p_1(x)$, donde $p_1(x)$ no es divisible por $(x-a)$, es decir, $p_1(a)\neq 0$. Entonces:

$$p'(x)=k(x-a)^{k-1} p_1(x)+(x-a)^k p_1'(x)=(x-a)^{k-1}\left[kp_1(x)+(x-a)p_1'(x)\right]=(x-a)^{k-1}P(x)$$

donde $P(x)=kp_1(x)+(x-a)p_1'(x)$, que no es divisible por $(x-a)$ puesto que $P(a)=kp_1(a)\neq 0$.

Por tanto, si $k=1 \Rightarrow p'(x)$ no es divisible por $(x-a)$ y para $k>1$, $p'(x)$ es divisible por $(x-a)^{k-1}$ pero no por $(x-a)^k$. □

Lema 2.5. "Dado un polinomio $p(x)$: $z(p')\geq z(p)-1$".

Demostración:

Sean $x_1<x_2<...<x_k$ las raíces reales positivas de $p(x)$, con multiplicidades $n_1,n_2,...,n_k$ respectivamente. De forma que: $z(p)=n_1+n_2+...+\mathrm{n}_k$.

En virtud del teorema de Rolle, en cada uno de los intervalos $(x_1,x_2),(x_2,x_3),...,(x_{k-1},x_k)$ existe al menos una raíz de $p'(x)$.

Por el Lema 2.4, $x_1,x_2,...,x_k$ son raíces de $p'(x)$, con multiplicidades $n_1-1,n_2-1,...,n_k-1$ respectivamente.

Por tanto: $z(p')\geq n_1-1+n_2-1+...+n_k-1+k-1=n_1+n_2+...+n_k-1=z(p)-1$. □

Teorema 2.6. (Regla de los signos de Descartes). "Sea un polinomio $p(x)=a_0x^{b_0}+a_1x^{b_1}+...+a_nx^{b_n}$, $a_i\in\mathbb{R}$, $i=0,1,2,...,n$, $0\leq b_0<b_1<b_2<...<b_n$. Entonces $z(p)\leq \upsilon(p)$ y $z(p)-\upsilon(p)$ es un número par. Además, el número de raíces reales negativas de $p(x)$, teniendo en cuenta su multiplicidad, es menor o igual que $\upsilon(p(-x))$ y, en el caso de ser menor, lo es en un número par".

Para la demostración de este teorema seguiremos el método de expuesto en (Wang, 2004).

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $b_0 = 0$. Procedemos por inducción sobre n:

$n=1,\ p(x) = a_0 + a_1 x^{b_1}$,

$$b_1 \text{ es par} \Rightarrow \begin{cases} signo(a_0) = signo(a_1) \Rightarrow \text{cero raíces reales} \\ signo(a_0) \neq signo(a_1) \Rightarrow \text{una raíz real positiva} \end{cases}$$

$$b_1 \text{ es impar} \Rightarrow \begin{cases} signo(a_0) = signo(a_1) \Rightarrow \text{cero raíces reales positivas} \\ signo(a_0) \neq signo(a_1) \Rightarrow \text{una raíz real positiva} \end{cases}$$

Por lo que $\upsilon(p) = z(p)$

Suponemos que es cierto para $n \leq k-1$: $\upsilon(p) \geq z(p),\ z(p) \equiv \upsilon(p) (\text{mod}\, 2)$

Probamos para $n = k$:

Sea $p'(x)$ la derivada de $p(x)$. Distinguimos los siguientes casos:

Caso $a_0 a_1 > 0$.

Dado que $signo(a_0) = signo(a_1) \Rightarrow \upsilon(p) = \upsilon(p')$

Además, aplicando el resultado del **Lema 2.3.** $signo(a_0 a_n) = signo(a_1 a_n) \Rightarrow z(p) \equiv z(p') (\text{mod}\, 2)$. Y aplicando la hipótesis de inducción $z(p') \equiv \upsilon(p') (\text{mod}\, 2)$. Uniendo los tres resultados: $z(p) \equiv z(p') \equiv \upsilon(p') = \upsilon(p) (\text{mod}\, 2)$

Por otra parte, aplicando el Lema 2.5:

$$z(p') \geq z(p) - 1 \Rightarrow \upsilon(p) = \upsilon(p') \geq z(p') \geq z(p) - 1 > z(p) - 2 \Rightarrow z(p) < \upsilon(p) + 2$$

Y como $z(p) \equiv \upsilon(p) (\text{mod}\, 2) \Rightarrow z(p) \leq \upsilon(p)$

Caso $a_0 a_1 < 0$:

Dado que $signo(a_0) \neq signo(a_1) \Rightarrow \upsilon(p) = \upsilon(p') + 1$

Y, en virtud del Lema 2.3. $z(p) - z(p') \equiv 1 (\text{mod}\, 2)$.

Por la hipótesis de inducción $z(p') \equiv \upsilon(p')(\mathrm{mod}\, 2)$ y $z(p') \leq \upsilon(p')$.

Luego $z(p) \equiv \upsilon(p)(\mathrm{mod}\, 2)$.

Por el Lema 2.5: $z(p') \geq z(p) - 1$. Así que $\upsilon(p) = \upsilon(p') + 1 \geq z(p') + 1 \geq z(p)$

Así queda probada la primera tesis. Para el caso de las raíces reales negativas baste notar que $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 < 0$ es una raíz negativa de $p(x)$ si y sólo si $-x_0$ es una raíz positiva de $p(-x)$. □

2.2. TEOREMA DE BUDAN-FOURIER

Lema 2.7. “Sea $p(x)$ un polinomio de coeficientes reales, si α es una raíz simple del polinomio, entonces $\exists\varepsilon > 0 / x \in (\alpha-\varepsilon, \alpha) \Rightarrow p(x)p'(x) < 0 \wedge x \in (\alpha, \alpha+\varepsilon) \Rightarrow p(x)p'(x) > 0$.”

Demostración:

Si $p(\alpha) = 0, p'(\alpha) \neq 0$, por el Lema 2.4, entonces $\exists\varepsilon > 0 / x \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon),\ signo(p'(x)) = signo(p'(\alpha))$. Supongamos que $p'(\alpha) > 0$, entonces $p(x)$ es creciente en dicho intervalo, luego:

$$p(x) < 0 \text{ si } x < \alpha \text{ y } p(x)p'(x) < 0 \text{ si } x < \alpha$$

$$p(x) > 0 \text{ si } x > \alpha \text{ y } p(x)p'(x) > 0 \text{ si } x > \alpha$$

De igual forma se razona el caso $p'(\alpha) < 0$. □

Teorema 2.8. (Teorema de Budan-Fourier). “Sea $p(x)$ un polinomio de coeficientes reales de grado n y sean $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ p(a)p(b) \neq 0$ Sean $\upsilon(a)$ y $\upsilon(b)$ el número de variaciones de signo en las secuencias $\left(p(a), p'(a), p''(a), ..., \mathrm{p}^{(n)}(a)\right)$ y $\left(p(b), p'(b), p''(b), ..., \mathrm{p}^{(n)}(b)\right)$ respectivamente. Entonces, $\upsilon(a) \geq \upsilon(b)$, , el número de raíces entre a y b de $p(x)$, contadas con su multiplicidad, es menor o igual que $\upsilon(a) - \upsilon(b)$ y, en el caso de ser menor, lo es en un número par.”

Demostración:

Estudiemos la variación de $\upsilon(x)$ al crecer x de a a b.

Si x no pasa por la raíz de alguno de los polinomios de la secuencia $\left(p(x), p'(x), p''(x), ..., p^{(n)}(x)\right)$, $\upsilon(x)$ no varía.

Por tanto, debemos estudiar dos casos:

Caso 1. x pasa por una raíz de $p(x)$ de multiplicidad l. Sea α dicha raíz:

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = ... = p^{(l-1)}(\alpha) = 0,\ p^{(l)}(\alpha) \neq 0 \text{, por el Lema 2.4.}$$

Sea $\varepsilon > 0 / [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$ no contenga ninguna otra raíz de los polinomios $p(x), p'(x), ..., p^{(l)}(x)$.

Por el Lema 2.7, entre cada dos números consecutivos de la secuencia $p(\alpha-\varepsilon), p'(\alpha-\varepsilon), p''(\alpha-\varepsilon),..., p^{(l)}(\alpha-\varepsilon)$ hay una variación de signos. Totalizando l variaciones de signo en la secuencia.

Además, como $p(\alpha)=0$, en virtud del Lema **2.7**, teniendo en cuenta que en la secuencia $p(\alpha+\varepsilon), p'(\alpha+\varepsilon), p''(\alpha+\varepsilon),..., p^{(l)}(\alpha+\varepsilon)$ cada término es la derivada del anterior, podemos iterar el razonamiento y concluir que no hay ninguna variación de signo en dicha secuencia.

Por tanto, entre las secuencias $p(\alpha-\varepsilon), p'(\alpha-\varepsilon), p''(\alpha-\varepsilon),..., p^{(l)}(\alpha-\varepsilon)$ y $p(\alpha-\varepsilon), p'(\alpha-\varepsilon), p''(\alpha-\varepsilon),..., p^{(l)}(\alpha-\varepsilon)$ se ha producido una pérdida de l variaciones de signo.

Caso 2. x pasa por una raíz de multiplicidad l de la derivada k -ésima de $p(x)$. Es decir:

$$p^{(k-1)}(\alpha)\neq 0,\ p^{(k)}(\alpha)=p^{(k+1)}(\alpha)=p^{(k+2)}(\alpha)=...=p^{(k+l-1)}(\alpha)=0,\ p^{(k+l)}(\alpha)\neq 0$$

Sea $\varepsilon>0/[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$ no contenga ninguna otra raíz de los polinomios anteriores.

Observemos como varía $\upsilon(x)$ cuando x va de $(x-\varepsilon)$ a $(x+\varepsilon)$.

Por el mismo razonamiento que aplicamos en el caso 1, la secuencia:

$$p^{(k)}(\alpha-\varepsilon),\ p^{(k+1)}(\alpha-\varepsilon),\ p^{(k+2)}(\alpha-\varepsilon),\ ...,\ p^{(k+l-1)}(\alpha-\varepsilon),\ p^{(k+l)}(\alpha-\varepsilon) \qquad \textbf{(2.2)}$$

presenta l variaciones de signo. Mientras que:

$$p^{(k)}(\alpha+\varepsilon),\ p^{(k+1)}(\alpha+\varepsilon),\ p^{(k+2)}(\alpha+\varepsilon),\ ...,\ p^{(k+l-1)}(\alpha+\varepsilon),\ p^{(k+l)}(\alpha+\varepsilon)$$

no presenta ninguna.

Pero puede producirse una variación de signo en la secuencia $p^{(k-1)}(x),\ p^{(k)}(x)$.

Entonces debemos examinar las variaciones en las secuencias:

$$p^{(k-1)}(\alpha-\varepsilon),\ p^{(k)}(\alpha-\varepsilon),\ p^{(k+1)}(\alpha-\varepsilon),\ ...,\ p^{(k+l-1)}(\alpha-\varepsilon),\ p^{(k+l)}(\alpha-\varepsilon) \qquad \textbf{(2.3)}$$

$$p^{(k-1)}(\alpha+\varepsilon),\ p^{(k)}(\alpha+\varepsilon),\ p^{(k+1)}(\alpha+\varepsilon),\ ...,\ p^{(k+l-1)}(\alpha+\varepsilon),\ p^{(k+l)}(\alpha+\varepsilon) \qquad \textbf{(2.4)}$$

teniendo en cuenta que $p^{(k-1)}(x)$ y $p^{(k)}(x)$ mantienen su signo constante.

Si l es impar, como en la secuencia (2.2) hay l cambios de signo, $signo\left(p^{(k)}(\alpha-\varepsilon)\right)\neq signo\left(p^{(k+l)}(\alpha-\varepsilon)\right)$ y si l es par $signo\left(p^{(k)}(\alpha-\varepsilon)\right)=signo\left(p^{(k+l)}(\alpha-\varepsilon)\right)$. Entonces:

Si l es impar:

Si $signo\left(p^{(k-1)}(\alpha-\varepsilon)\right)=signo\left(p^{(k+l)}(\alpha-\varepsilon)\right)$. En (2.3) hay $l+1$ variaciones de signo. Y en (2.4) hay cero.

Si $signo\left(p^{(k-1)}(\alpha-\varepsilon)\right)\neq signo\left(p^{(k+l)}(\alpha-\varepsilon)\right)$. En (2.3) hay l variaciones de signo. Y en (2.4) hay una.

Si l es par:

Si $signo\left(p^{(k-1)}(\alpha-\varepsilon)\right)=signo\left(p^{(k+l)}(\alpha-\varepsilon)\right)$. En (2.3) hay l variaciones de signo. Y en (2.4) hay cero.

Si $signo\left(p^{(k-1)}(\alpha-\varepsilon)\right)\neq signo\left(p^{(k+l)}(\alpha-\varepsilon)\right)$. En (2.3) hay $l+1$ variaciones de signo. Y en (2.4) hay una.

Podemos observar que, en todos los casos, la diferencia es par. Y el teorema queda demostrado. □

2.3. TEOREMA DE STURM

Seguimos en este teorema las indicaciones expuestas en (Barbeau, 2003) y (Kurosch, 1977), reproducidas estas últimas en el artículo de (Yañez, 1983).

Definición 2.9. “Sea $p(x)$ un polinomio de coeficientes reales sin raíces reales múltiples. Llamamos sistema de Sturm del polinomio $p(x)$ a un sistema finito ordenado de polinomios, no nulos, de coeficientes reales

$$p_0(x) = p(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_s(x) \tag{2.5}$$

que verifique las siguientes condiciones:

1. Dos polinomios consecutivos del sistema no tienen raíces comunes.
2. El último polinomio del sistema, $p_s(x)$, no tiene raíces reales.
3. Si α es una raíz real de uno de los polinomios intermedios del sistema, $p_k(x), 1 \le k \le s-1$, entonces $p_{k-1}(\alpha)$ y $p_{k+1}(\alpha)$ tienen distinto signo.
4. Si α es una raíz real del polinomio $p(x)$. El producto $p(x)p_1(x)$ cambia su signo de menos a más, cuando al crecer x pasa por el punto α.”

Definición 2.10. “Sea un polinomio de coeficientes reales $p(x)$ y sea $p_0(x) = p(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_s(x)$**,** como en (2.5), un sistema de Sturm de dicho polinomio. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) \ne 0$. Denotaremos por $\upsilon(c)$ al número de variaciones de signo de la secuencia $p_0(c) = p(c), p_1(c), p_2(c), ..., p_s(c)$, según se precisó en la Definición 2.1, al que llamaremos número de variaciones de signo del sistema de Sturm (2.5) del polinomio $p(x)$ en $x = c$.”

Construcción de un sistema de Sturm de un polinomio. Dado un polinomio $p(x)$ de coeficientes reales sin raíces múltiples, sean:

$p_1(x) = p'(x)$

$p_2(x)$ tal que $p(x) = p_1(x)q_1(x) - p_2(x)$, con $grado(p_2(x)) < grado(p_1(x))$

$p_3(x)$ tal que $p_1(x) = p_2(x)q_2(x) - p_3(x)$, con $grado(p_3(x)) < grado(p_2(x))$

y así sucesivamente, de forma que, en general:

$p_{k+1}(x)$ tal que $p_{k-1}(x) = p_k(x)q_k(x) - p_{k+1}(x)$, con $grado(p_{k+1}(x)) < grado(p_k(x))$

Es decir, $p_{k+1}(x)$ es el resto de la división de $p_{k-1}(x)$ entre $p_k(x)$ tomado con signo contrario.

Este procedimiento sólo se diferencia del algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de $p(x)$ y $p'(x)$ en que, cada vez, se cambia el signo del resto y se efectúa la siguiente división con este cambio de signo. Pero este cambio de signo no afecta al cálculo del m.c.d. Por lo que el último polinomio $p_s(x)$ será en realidad una constante ya que, en virtud del Lema 2.4, $p(x)$ es primo con $p'(x)$ al no tener $p(x)$ raíces múltiples.

Proposición 2.11. "El sistema de polinomios formado por el procedimiento descrito anteriormente es un sistema de Sturm del polinomio $p(x)$."

Demostración:

Veamos que el sistema verifica las cuatro condiciones de la Definición 2.9:

Condición 1: Supongamos que $\exists \alpha \in (a,b) / p_k(\alpha) = p_{k+1}(\alpha) = 0$, entonces, como

$$p_{k-1}(\alpha) = p_k(\alpha) q_k(\alpha) - p_{k+1}(\alpha) \Rightarrow p_{k-1}(\alpha) = 0$$

Podemos razonar de igual forma con $p_{k-1}(\alpha)$ y $p_k(\alpha)$ para concluir que $p_{k-2}(\alpha) = 0$. E, iterando el razonamiento k veces, concluiremos que $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$, en contradicción con la hipótesis de que $p(x)$ no tenía raíces múltiples (Lema 2.4).

Condición 2: Como acabamos de exponer en el procedimiento de construcción $p(x)$ no tiene raíces múltiples, luego $p(x)$ y $p'(x)$ son primos entre sí y $p_s(x) = k, k \in \mathbb{R}$, que no tiene raíces reales.

Condición 3: es consecuencia directa de la definición de los polinomios: $p_{k-1}(x) = p_k(x) q_k(x) - p_{k+1}(x)$. Si $p(\alpha) = 0 \Rightarrow p_{k-1}(\alpha) = -p_{k+1}(\alpha)$.

Condición 4: como $p_1(x) = p'(x)$, se verifica en aplicación del Lema 2.7. □

Teorema 2.12. (Teorema de Sturm). "Sea $p(x)$ un polinomio de coeficientes reales y sean $a,b \in \mathbb{R}, a < b$ y tales que $p(a) \neq 0, p(b) \neq 0$. Sea un sistema de Sturm asociado al polinomio como en (2.5), y sean $\upsilon(a)$ y $\upsilon(b)$ el número de variaciones de signo del sistema de Sturm en a y b. Entonces:

1. $\upsilon(a) \geq \upsilon(b)$.
2. $\upsilon(a) - \upsilon(b)$ es igual al número de raíces reales de $p(x)$ contando cada raíz múltiple una única vez."

Demostración:

En primer lugar, notemos que podemos limitar la demostración a polinomios sin raíces múltiples mediante las siguientes observaciones:

- Si dividimos todos los polinomios del sistema de Sturm por un mismo polinomio $\upsilon(x)$ no varía para cualquier $x \in \mathbb{R}$.
- Además, el sistema de Sturm de $p(x)/q(x)$ es el mismo que el sistema que obtenemos al aplicar el procedimiento de construcción del sistema de Sturm de $p(x)$ dividido por $q(x)$. Siendo, por tanto, las raíces de $p(x)/q(x)$ simples y las mismas que las de $p(x)$.

Entonces, es suficiente probar el teorema de Sturm para el caso en el que $p(x)$ sólo tiene raíces simples.

Para ello analizamos el cambio del número $\upsilon(x)$ al crecer x desde a hasta b. Distinguiendo tres posibilidades:

Caso 1. Si x no pasa por ninguna raíz de alguno de los polinomios que forman el sistema de Sturm, es evidente que $\upsilon(x)$ no varía.

Caso 2. Si x pasa por una raíz de alguno de los polinomios del sistema de Sturm, $p_k(x)$, $1 \le k \le s-1$. Sea α dicha raíz de $p_k(x)$. Entonces, por la condición 1 de la Definición 2.9 de sistema de Sturm $p_{k-1}(\alpha) \neq 0$ y $p_{k+1}(\alpha) \neq 0$. Por tanto: $\exists \varepsilon > 0 / x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \Rightarrow p_{k-1}(x) \neq 0 \wedge p_{k+1}(x) \neq 0$.

Luego $p_{k-1}(x)$ y $p_{k+1}(x)$ conservan los signo en ese intervalo que, además, son distintos en virtud de la condición 3 de la Definición 2.9.

Observemos entonces las variaciones de signo que se producen en la secuencia: $p_{k-1}(x), p_k(x), p_{k+1}(x)$ cuando x pasa de $\alpha - \varepsilon$ a $\alpha + \varepsilon$. Para lo cual consideramos las siguientes situaciones:

i. $p_k(x)$ conserva el signo. En este caso los tres polinomios de la secuencia conservan el signo al pasar x de $\alpha - \varepsilon$ a $\alpha + \varepsilon$ y, por tanto, $\upsilon(x)$ no varía.

ii. $p_k(x)$ cambia de signo al pasar por α. En ese caso, observemos que, como $p_{k-1}(x)$ y $p_{k+1}(x)$ eran de signo opuesto y lo mantienen, sólo pueden producirse cuatro situaciones: $++- \to +--$, $+-- \to ++-$, $-++ \to --+$ o $--+ \to -++$. En todas esas secuencias sólo hay una variación de signo, esta puede trasladarse pero no aparecer ni desaparecer, de modo que $\upsilon(x)$ no varía.

Caso 3. Si x pasa por una raíz de $p(x)$, sea α dicha raíz. Por la condición 1 de la Definición 2.9, α no es raíz de $p_1(x)$. Por tanto: $\exists \varepsilon > 0 / x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \Rightarrow signo(p_1(x)) = signo(p_1(\alpha))$. Y como la condición 4 de dicha definición dice que $p(x)\,p_1(x)$ cambia de menos a más al pasar por α, podemos considerar:

i. Si $p_1(\alpha) < 0$, $p(\alpha - \varepsilon) > 0, p(\alpha + \varepsilon) < 0$. Luego a la secuencia $p(\alpha - e), p_1(\alpha - \varepsilon)$ le corresponde los signos $+-$, y a la secuencia $p(\alpha + e), p_1(\alpha + \varepsilon)$ le corresponde los signos $--$.

ii. Si $p_1(\alpha) > 0$, $p(\alpha - \varepsilon) < 0, p(\alpha + \varepsilon) > 0$. Y la secuencia $p(\alpha - e), p_1(\alpha - \varepsilon)$ tendrá signos $-+$, mientras que la secuencia $p(\alpha + e), p_1(\alpha + \varepsilon)$ tendrá signos $++$.

En ambos casos $\upsilon(x)$ pierde exactamente una variación de signos cuando x pasa por una raíz de $p(x)$. Con lo que queda demostrado el teorema. □

Nota 2.13. Como expusimos al principio de la demostración del teorema de Sturm, si $p(x)$ es un polinomio cualquiera y $q(x) = m.c.d.(p(x), p'(x))$. Entonces $p(x)/q(x)$ tiene las mismas raíces que $p(x)$ pero sin raíces reales múltiples.

Si efectuamos con un polinomio cualquiera, $p(x)$, el procedimiento descrito para la construcción del sistema de Sturm, habremos obtenido el $q(x) = m.c.d.(p(x), p'(x))$ y, dividiendo por dicho *m.c.d.* los polinomios intermedios obtenidos, obtendremos el sistema de Sturm del polinomio $p(x)/q(x)$. Será más fácil efectuar los cálculos con este último sistema.

Nota 2.14. A la hora de efectuar los cálculos para la obtención del sistema de Sturm de forma manual, es interesante notar que, dado que sólo estamos interesados en el signo que toman los polinomios de la secuencia en determinados valores, podemos sustituir cualquier polinomio de la secuencia por el resultado de multiplicarlo por un entero positivo. Así que, multiplicando en cada etapa del proceso el polinomio obtenido por un entero adecuado podemos eliminar los denominadores y trabajar sólo con números enteros.

3. EJEMPLOS

Pasamos a desarrollar unos ejemplos de aplicación de los teoremas anteriores. Como se apreciará en su desarrollo, no son una propuesta adecuada para su trabajo con los alumnos, en especial en lo que se refiere al teorema de Sturm, por su laboriosidad. En esta sección sólo pretendemos dar una representación fiel del trabajo que requieren realmente las técnicas propuestas. Más adelante se hará una propuesta más adecuada didácticamente.

1. Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 7x + 7$.

Este polinomio tiene tres raíces reales cuyos resultados aproximados son

$$x_1 = -3.048917339,\ x_2 = 1.356895867\ ,\ x_3 = 1.692021471$$

Procedemos a su estudio mediante la aplicación de los teoremas estudiados con anterioridad.

Teorema de Descartes:

La secuencia de coeficientes de $p(x)$ es $(1,0,-7,7)$ y, por tanto, $\upsilon(p) = 2$. Es decir, en aplicación de la regla de los signos de Descartes, podemos asegurar que el número de raíces reales positivas del polinomio, $z(p)$ es *2* ó *0*. Podremos comprobar, en la aplicación de los siguientes teoremas, que, en este caso, el número de raíces positivas coincide con el número de variaciones de signo de la secuencia de coeficientes.

Como $p(-x) = -x^3 + 7x + 7$, cuya secuencia de coeficientes es $(-1,0,7,7)$, $\upsilon(p(-x)) = 1$ y el número de raíces reales negativas de $p(x)$ es 1.

Teorema de Budan-Fourier:

Construimos la secuencia de polinomios:

$$\left.\begin{array}{l} p_0(x) = p(x) \\ p_1(x) = p'(x) = 3x^2 - 7 \\ p_2(x) = p''(x) = 6x \\ p_3(x) = p'''(x) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x^3 - 7x + 7, 3x^2 - 7, 6x, 6\right] \qquad \mathbf{(3.1)}$$

Vamos a evaluar la secuencia de polinomios (3.1) desde $x = -4$, con incrementos sucesivos de dos unidades:

$$x = -4 \Rightarrow [-29, 41, -12, 6] \Rightarrow \upsilon(-4) = 3$$

$$x = -2 \Rightarrow [13, 5, -12, 6] \Rightarrow \upsilon(-2) = 2$$

$x = 0 \Rightarrow [7, -7, 0, 6] \Rightarrow \upsilon(0) = 2$

$x = 2 \Rightarrow [1, 5, 12, 6] \Rightarrow \upsilon(-2) = 0$

De donde se deduce que $p(x)$ tiene una raíz en el intervalo $(-4, -2)$, no tiene raíces en el intervalo $(-2, 0)$ y tiene dos o cero raíces en el intervalo $(0, 2)$.

Podemos intentar precisar más este último resultado:

$x = 1 \Rightarrow [1, -4, 6, 6] \Rightarrow \upsilon(-2) = 2$

Es decir, las raíces, de existir, pertenecen al intervalo $(1, 2)$.

Si evaluamos la secuencia en $x = \frac{3}{2} \Rightarrow \left[-\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, 9, 6\right] \Rightarrow \upsilon\left(\frac{3}{2}\right) = 1$. Lo que implica que $p(x)$ tiene una raíz real en el intervalo $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ y otra en el $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Teorema de Sturm:

Construimos la secuencia de polinomios de Sturm que, como veremos, es mucho más costosa de generar que la secuencia de Fourier:

$$p_0(x) = p(x) = x^3 - 7x + 7$$
$$p_1(x) = p'(x) = 3x^2 - 7$$

Para calcular $p_2(x)$, efectuamos la división $p_0(x) / p_1(x)$:

$$\begin{array}{rrr|ll} x^3 & -7x & +7 & 3x^2 & -7 \\ \cline{4-5} -x^3 & +\frac{7}{3}x & & \frac{1}{3}x & \\ \cline{1-2} & -\frac{14}{3}x & +7 & & \end{array}$$

Luego, tomando el resto con signo contrario: $p_2(x) = \frac{14}{3}x - 7$. Y calculamos $p_1(x) / p_2(x)$:

$$
\begin{array}{rrr|rr}
3x^2 & & \text{-7} & \frac{14}{3}x & -7 \\ \cline{4-5}
-3x^2 & +\frac{9}{2}x & & \frac{9}{14}x & +\frac{27}{28} \\ \cline{1-2}
 & \frac{9}{2}x & -7 & & \\
 & -\frac{9}{2}x & +\frac{27}{4} & & \\ \cline{2-3}
 & & -\frac{1}{4} & &
\end{array}
$$

Tomando de nuevo el resto con signo contrario: $p_3(x) = \dfrac{1}{4}$.

Por tanto, la secuencia de Sturm del polinomio $p(x)$ es $\left[x^3 - 7x + 7, 3x^2 - 7, \dfrac{14}{3}x - 7, \dfrac{1}{4}\right]$.

Si evaluamos la secuencia de Sturm en los mismos valores que tomamos para la secuencia de Fourier, obtendremos:

$$x = -4 \Rightarrow \left[-29, 41, \frac{-77}{3}, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \upsilon(-4) = 3$$

$$x = -2 \Rightarrow \left[13, 5, \frac{-49}{3}, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \upsilon(-2) = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow \left[7, -7, -7, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \upsilon(0) = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow \left[1, 5, \frac{7}{3}, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \upsilon(-2) = 0$$

De igual forma que antes, se deduce que $p(x)$ tiene una raíz en el intervalo $(-4, -2)$ y no tiene raíces en el intervalo $(-2, 0)$. A diferencia con el teorema de Fourier, ahora podemos afirmar que $p(x)$ tiene dos raíces reales en el intervalo $(0, 2)$.

Si evaluamos la secuencia en $x = 1 \Rightarrow \left[1, -4, -\dfrac{7}{3}, \dfrac{1}{4}\right] \Rightarrow \upsilon(1) = 2$, por tanto las dos raíces están en el intervalo $(1, 2)$.

Mientras que en $x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \left[-\dfrac{1}{8}, -\dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{1}{4}\right] \Rightarrow \upsilon\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1$ y $p(x)$ tiene una raíz real en el intervalo $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ y otra en el $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$.

Observación: Podemos sustituir cualquiera de los polinomios de la secuencia por su producto por un número positivo, ya que sólo nos interesa el signo que toma en determinados valores y este no variará. De esta forma, podríamos haber tomado como secuencia de Sturm del polinomio $p(x)$ a $\left[x^3-7x+7, 3x^2-7, 14x-21, 1\right]$ si deseamos evitar trabajar con fracciones en las evaluaciones de la secuencia.

Pero, además, como los cocientes de las sucesivas divisiones no se tienen en cuenta, podemos ir multiplicando en cada etapa de las divisiones por el entero positivo adecuado para evitar cálculo con fracciones en todo momento, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccc|cc} x^3 & -7x & +7 & 3x^2 & -7 \\ \cline{4-5} \end{array}$$

Multiplicamos por 3

$$\begin{array}{ccc|cc} 3x^3 & -21x & +21 & 3x^2 & -7 \\ \cline{4-5} -3x^3 & +7x & & x & \\ \cline{1-2} & 14x & +21 & & \end{array}$$

Tomando el resto con signo opuesto, $p_2(x)=14x-21$.

Calculamos $p_1(x)/p_2(x)$:

$$\begin{array}{ccc|cc} 3x^2 & & -7 & 14x & -21 \\ \cline{4-5} \end{array}$$

Multiplicamos por14

$$\begin{array}{ccc|cc} 42x^2 & & -98 & 14x & -21 \\ \cline{4-5} -42x^2 & +63x & & 3x & \\ \cline{1-2} & 63x & -98 & & \end{array}$$

Multiplicamos por 2

$$\begin{array}{cc|cc} 126x & -196 & 14x & -21 \\ \cline{3-4} -126x & +189 & 9 & \\ \cline{1-2} & -7 & & \end{array}$$

Luego $p_3(x)=7$.

Aplicaremos este procedimiento en lo sucesivo, excepto en el caso que reseñaremos, para una mayor apariencia de limpieza en la presentación de los resultados.

2. El siguiente ejemplo nos permitirá apreciar dos aspectos interesantes acerca de los teoremas expuestos:

   a. Como en los teoremas de Descartes y de Budan-Fourier tan sólo obtenemos cotas superiores para el número de raíces. Mientras que el de Sturm da el número exacto de raíces.

   b. Como, pese a la ventaja que acabamos se señalar del teorema de Sturm, el coste de uso de este es mucho mayor.

Sea el polinomio $p(x)=2x^6-7x^5+x^4+x^3-12x^2-5x+1$. Aplicamos los tres teoremas al cálculo de las raíces.

Teorema de Descartes.

Secuencia de coeficientes: $[2,-7,1,1,-12,-5,1] \Rightarrow \upsilon(p)=4$. Luego $z(p)=4$ ó $z(p)=2$ ó $z(p)=0$. Posteriormente veremos que en realidad $z(p)=2$, no coincidiendo el número de variaciones de signo de la secuencia de coeficientes con el número de raíces positivas del polinomio, al contrario que en el primer ejemplo.

Secuencia de coeficientes del $p(-x)$: $[2,7,1,-1,-12,5,1] \Rightarrow \upsilon(p(-x))=2$. Y el número de raíces negativas de $p(x)$ es 2 ó 0. Posteriormente comprobaremos que, en este caso, sí coincide con el número de variaciones de signo de $p(-x)$.

Teorema de Budan-Fourier.

La secuencia de Fourier de $p(x)$ se calcula rápidamente:

$$[2x^6-7x^5+x^4+x^3-12x^2-5x+1, 12x^5-35x^4+4x^3+3x^2-24x-5, 60x^4-140x^3+12x^2+6x-24,$$
$$240x^3-420x^2+24x+6, 720x^2-840x+24, 1440x-840, 1440]$$

Evaluamos la secuencia según se indica en la siguiente tabla:

x	**Evaluación de la secuencia**	$\upsilon(x)$
-1	$[3,-29,182,-678,1584,-2280,1440]$	6
0	$[1,-5,-24,6,24,-840,1440]$	4
1	$[-19,-45,-86,-150,-96,600,1440]$	1
2	$[-129,-185,-124,294,1224,2040,1440]$	1
3	$[-257,139,1182,2778,3984,3480,1440]$	1
4	$[1133,3531,6592,8742,8184,4920,1440]$	0

En aplicación del teorema de Budan-Fourier:

en el intervalo $(-1,0)$, $p(x)$ tendrá *0* ó *2* raíces reales,

en el intervalo $(0,1)$, $p(x)$ tendrá *1* ó *3* raíces reales,

en el intervalo $(3,4)$, $p(x)$ tendrá *1* raíz real.

Teorema de Sturm:

Este ejercicio está propuesto alegremente en la página 176 de (Barbeau, 2003). Se pide usar el teorema de Sturm para localizar las raíces reales del polinomio estudiándolas en intervalos sucesivos con extremos enteros. Veremos la ingente cantidad de cálculo que supone buscar la secuencia de Sturm, de hecho, sólo mostraremos los primeros pasos para evitar el excesivo tedio de mostrar todos estos cálculos de forma manual:

Sea $p_0(x) = p(x) = 2x^6 - 7x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 - 5x + 1$

$p_1(x) = 12x^5 - 35x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 24x - 5$

Para calcular $p_2(x)$, efectuamos $p_0(x)/p_1(x)$, como ya hemos indicado, seguimos inicialmente el procedimiento indicado en la observación del ejemplo anterior para evitar fracciones mientras mostramos los cálculos efectuados manualmente:

	$2x^6$	$-7x^5$	$+x^4$	$+x^3$	$-12x^2$	$-5x$	$+1$	$12x^5 \; -35x^4 \; +4x^3 \; +3x^2 \; -24x \; -5$
$\cdot 6$	$12x^6$	$-42x^5$	$+6x^4$	$+6x^3$	$-72x^2$	$-30x$	$+6$	
	$12x^6$	$+35x^5$	$-4x^4$	$-3x^3$	$+24x^2$	$+5x$		x
		$-7x^5$	$+2x^4$	$+3x^3$	$-48x^2$	$-25x$	$+6$	
$\cdot 12$		$-84x^5$	$+24x^4$	$+36x^3$	$-576x^2$	$-300x$	$+72$	
		$84x^5$	$-245x^4$	$+28x^3$	$+21x^2$	$-168x$	-35	-7
			$-221x^4$	$+64x^3$	$-555x^2$	$-468x$	$+37$	

Luego $p_2(x) = 221x^4 - 64x^3 + 555x^2 + 468x - 37$.

Efectuamos $p_1(x)/p_2(x)$:

	$12x^5$	$-35x^4$	$+4x^3$	$+3x^2$	$-24x$	-5	$221x^4 \; -64x^3 \; +555x^2 \; +468x \; -37$
$\cdot 221$	$2652x^5$	$-7735x^4$	$+884x^3$	$+663x^2$	$-5304x$	-1105	
	$-2652x^5$	$+768x^4$	$-6660x^3$	$-5616x^2$	$+444x$		$12x$
		$-6967x^4$	$-5776x^3$	$-4953x^2$	$-4860x$	-1105	
$\cdot 221$		$-1539707x^4$	$-1276496x^3$	$-1094613x^2$	$-1074060x$	-244205	
		$1539707x^4$	$-445888x^3$	$+3866685x^2$	$+3260556x$	-257779	-6967
			$-1722384x^3$	$+2772072x^2$	$+2186496x$	-501984	

De esta forma: $p_3(x) = 1722\,384x^3 - 2\,772\,072x^2 - 2186\,496x + 501984$

No es nuestra pretensión abrumar al presunto lector de este trabajo con los cálculos, tan sólo mostrar el nivel de laboriosidad que estos van alcanzando, baste señalar que:

$p_4(x) = -53\,769\,799\,673\,928\,x^2 - 31\,885\,814\,810\,304\,x + 5\,027\,206\,474\,368$

$p_5(x) = 52\,389\,819\,679\,833\,731\,520\,x + 34\,442\,082\,077\,126\,352\,480$

$p_6(x)$ será un constante positiva, luego puede tomarse como 1.

Pretendemos ilustrar con este ejemplo el gran número de cálculos necesario para calcular la secuencia de Sturm. Se ha demostrado que, para un polinomio de coeficientes enteros con una variable de grado *n* sin raíces múltiples, el tiempo de computación del método de Sturm es del orden de $O\left(n^{13}L\left(|P|_\infty\right)^3\right)$, donde $L\left(|P|_\infty\right)$ es la longitud en bits del mayor en valor absoluto de los coeficientes del polinomio (Akritas, 1982).

Creemos que este concepto de coste computacional es un tema interesante también para tratar en clase, que no se aborda en ninguna parte del currículo y que puede introducirse a partir del trabajo con estos métodos. Desde luego con casos mucho más sencillos y que propondremos más adelante.

Examinemos el comportamiento de algunos casos con raíces múltiples.

3. En este caso tenemos una raíz múltiple justo en uno de los puntos en los que vamos a evaluar:

Sea $p(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 15x + 5 = (x-1)^3\left(x^2-5\right)$

Teorema de Descartes:

Secuencia de coeficientes: $[1,-3,-2,14,-15,5] \Rightarrow \upsilon(p) = 4$. Luego $z(p) = 4$ ó $z(p) = 2$ ó $z(p) = 0$.

Secuencia de coeficientes del $p(-x)$: $[-1,-3,2,14,15,5] \Rightarrow \upsilon(p(-x)) = 1$. Luego $p(x)$ tiene una raíz real negativa.

Teorema de Budan-Fourier:

Secuencia de Fourier:

$$[x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 15x + 5, 5x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 28x - 15, 20x^3 - 36x^2 - 12x + 28,$$
$$60x^2 - 72x - 12, 120x - 72, 120]$$

Evaluamos la secuencia:

x	**Evaluación de la secuencia**	$\upsilon(x)$
-3	$[-256,576,-800,744,-432,120]$	5
-2	$[27,81,-252,372,-312,120]$	4
-1	$[32,-32,-16,120,-192,120]$	4
0	$[5,-15,28,-12,-72,120]$	4
1	$[0,\ 0,\ 0,-24,48,\ 120]$	1
2	$[-1,1,\ 20,\ 84,168,120]$	1
3	$[32,\ 96,208,312,\ 288,120]$	0

Luego:

en el intervalo $(-3,-2)$, $p(x)$ tiene una raíz real,

los tres primeros términos de la secuencia en $x=1$ son cero, lo que significa que $x=1$ es una raíz triple de $p(x)$

en el intervalo $(2,3)$, $p(x)$ tendrá *1* raíz real.

Teorema de Sturm:

Calculamos la secuencia de Sturm:

$$
\begin{array}{lcccccc|l}
 & x^5 & -3x^4 & -2x^3 & +14x^2 & -15x & +5 & 5x^4 \quad -12x^3 \quad -6x^2 \quad +28x \quad -15 \\
\hline
\text{Por 5} & 5x^5 & -15x^4 & -10x^3 & +70x^2 & -75x & +25 & \\
\hline
 & -5x^5 & +12x^4 & +6x^3 & -28x^2 & +15x & & x \\
\hline
 & & & & & & & \\
\text{Por 5} & & -15x^4 & -20x^3 & +210x^2 & -300x & +125 & \\
\hline
 & & 15x^4 & -36x^3 & -18x^2 & +84x & -45 & -3 \\
\hline
 & & & -56x^3 & +192x^2 & -216x & +80 & \\
\hline
\end{array}
$$

$p_2(x)=56x^3-192x^2+216x-80$, o mejor, dividiendo por 8: $p_2(x)=7x^3-24x^2+27x-10$

$$
\begin{array}{lrrrrr|rrrr}
 & 5x^4 & -12x^3 & -6x^2 & +28x & -15 & 7x^3 & -24x^2 & +27x & -10 \\
\hline
\text{Por 7} & 35x^4 & -84x^3 & -42x^2 & +196x & -105 & & & & \\
 & -35x^4 & +120x^3 & -135x^2 & +50x & & 5x & & & \\
\hline
 & & 36x^3 & -177x^2 & +246x & -105 & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
\text{Por 7} & & 252x^3 & -1239x^2 & +1722x & -735 & & & & \\
 & & -252x^3 & +864x^2 & -972x & +360 & & +36 & & \\
\hline
 & & & -375x^2 & +750x & -375 & & & &
\end{array}
$$

$p_3(x) = 375x^2 - 750x + 375$, o mejor, dividiendo por 375: $p_3(x) = x^2 - 2x + 1$

Finalmente, al dividir:

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
7x^3 & -24x^2 & +27x & -10 & x^2 & -2x & +1 \\
\hline
-7x^3 & +14x^2 & -7x & & 7x & -10 & \\
\hline
 & -10x^2 & +20x & -10 & & & \\
 & 10x^2 & -20x & +10 & & & \\
\hline
 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Vemos que $mcd\left(p(x), p'(x)\right) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, es decir $x = 1$ es una raíz triple de $p(x)$.

Luego la secuencia de Sturm es:

$$\left[x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 15x + 5, 5x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 28x - 15, 7x^3 - 24x^2 + 27x - 10, x^2 - 2x + 1\right] / \left(x^2 - 2x + 1\right) =$$

$$= \left[x^3 - x^2 - 5x + 5, 5x^2 - 2x - 15, 56x - 80, 1\right]$$

x	**Evaluación de la secuencia**	$\upsilon(x)$
-3	$[-16,\ 36,\ -248,\ 1]$	3
-2	$[3,\ 9,\ -192,\ 1]$	2
-1	$[8, -8,\ -136,\ 1]$	2
0	$[5,\ -15,\ -80,\ 1]$	2
1	$[0,\ -12,\ -24,\ 1]$	1
2	$[-1,\ 1,\ 32,\ 1]$	1
3	$[8,\ 24,\ 88,\ 1]$	0

Vemos que hay una raíz en el intervalo $(-3,-2)$ y ya habíamos notado que había otra en $x=1$. Podemos observar que el teorema de Sturm cuenta las raíces múltiples una sola vez, ya que esa raíz múltiple en $x=1$ se refleja con la disminución en una unidad de las variaciones de signo entre $x=0$ y $x=1$.

Para finalizar los ejemplos, veremos un caso con raíces reales múltiples y raíces complejas.

4. Sea $p(x)=8x^5-12x^4+46x^3-61x^2+30x-5=(2x-1)^3\left(x^2+5\right)$

Teorema de Descartes:

Secuencia de coeficientes: $[8,-12,46,-61,30,-5] \Rightarrow \upsilon(p)=5$. Luego $z(p)=5$ ó $z(p)=3$ ó $z(p)=1$.

Secuencia de coeficientes del $p(-x)$: $[-8,-12,-46,-61,-30,-5] \Rightarrow \upsilon(p(-x))=0$. Luego $p(x)$ no tiene raíces reales negativas.

Teorema de Budan-Fourier:

Secuencia de Fourier:

$$[8x^5-12x^4+46x^3-61x^2+30x-5, 40x^4-48x^3+138x^2-122x+30, 160x^3-144x^2-276x-122,$$
$$480x^2-288x-276, 960x-288, 960]$$

Evaluamos la secuencia en los mismos valores que venimos mostrando en todos los ejemplos, pero en realidad no tiene sentido evaluarlo en valores negativos ya que el teorema de Descartes nos ha asegurado que no hay raíces negativas. Y tampoco tendría sentido hacerlo a partir de $x=1$ ya que $\upsilon(1)=0$ y ya no puede producirse disminuir más:

x	**Evaluación de la secuencia**	$\upsilon(x)$
-3	$[-4802,\ 6174,\ -6566,\ 5460,\ -3168,\ 960]$	5
-2	$[-1125,\ 1850,\ -2530,\ 2772,\ -2208,\ 960]$	5
-1	$[-162,\ 378,\ -702,\ 1044,\ -1248,\ 960]$	5
0	$[-5,\ 30,\ -122,\ 276,\ -288,\ 960]$	5
1	$[6,\ 38,\ 170,\ 468,\ 672,\ 960]$	0
2	$[243,\ 594,\ 1134,\ 1620,\ 1632,\ 960]$	0
3	$[1750,\ 2850,\ 3730,\ 3732,\ 2592,\ 960]$	0

Luego:

en el intervalo $(0,1)$, $p(x)$ tiene una o tres o cinco raíces reales.

Teorema de Sturm:

Calculamos la secuencia de Sturm:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
8x^5 & -12x^4 & +46x^3 & -61x^2 & +30x & -5 & 40x^4 \quad -48x^3 \quad +138x^2 \quad -122x \quad +30 \\ \hline
 & & & & & & \\
40x^5 & -60x^4 & +230x^3 & -305x^2 & +150x & -25 & \\ \cline{7-7}
-40x^5 & +48x^4 & -138x^3 & +122x^2 & -30x & & \quad x \\ \cline{1-5}
 & -12x^4 & +92x^3 & -183x^2 & +120x & -25 & \\
 & & & & & & \\
 & -120x^4 & +920x^3 & -1830x^2 & +1200x & -250 & \\ \cline{7-7}
 & 120x^4 & -144x^3 & +414x^2 & -366x & +90 & \qquad -3 \\ \cline{2-6}
 & & 776x^3 & -1416x^2 & +834x & -160 &
\end{array}$$

Luego $p_2(x) = -776x^3 + 1416x^2 - 834x + 160$, o mejor, dividiendo por 2, $p_2(x) = -388x^3 + 708x^2 - 417x + 80$.

$$\begin{array}{lrrrrr|l}
 & 40x^4 & -48x^3 & +138x^2 & -122x & +30 & -388x^3 \quad +708x^2 \quad -417x \quad +80 \\ \cline{7-7}
 & & & & & & \\
\text{Por } 97 & 3880x^4 & -4656x^3 & +13886x^2 & -11834x & +2910 & \\ \cline{7-7}
 & -3880x^4 & +7080x^3 & -4170x^2 & +800x & & \quad -10x \\ \cline{2-5}
 & & 2424x^3 & +9216x^2 & -11034x & +2910 & \\
 & & & & & & \\
\text{Por } 97 & & 235128x^3 & +893952x^2 & -1070298x & +282270 & \\ \cline{7-7}
 & & -235128x^3 & +429048x^2 & -252702x & +48480 & \qquad -606 \\ \cline{3-6}
 & & & 1323000x^2 & -1323000x & +330750 &
\end{array}$$

Luego $p_3(x) = -1323000x^2 + 1323000x - 330750$, o dividiendo por 330750, $p_3(x) = -4x^2 + 4x - 1$.

Finalmente, al dividir:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-388x^3 & +708x^2 & -417x & +80 & -4x^2 \quad +4x \quad -1 \\ \cline{5-5}
388x^3 & -388x^2 & +97x & & 97x \quad -80 \\ \cline{1-3}
 & 320x^2 & -320x & +80 & \\
 & -320x^2 & +320x & -80 & \\ \cline{2-4}
 & & 0 & &
\end{array}$$

Luego $m.c.d.\left(p(x), p'(x)\right) = (2x-1)^2$, de donde $x = -\frac{1}{2}$ es una raíz triple de $p(x)$.

Una secuencia de Sturm de $p(x)$, sería:

$$\frac{\left[8x^5 - 12x^4 + 46x^3 - 61x^2 + 30x - 5, 40x^4 - 48x^3 + 138x^2 - 122x + 30, -388x^3 + 708x^2 - 417x + 80, -4x^2 + 4x - 1\right]}{-4x^2 + 4x - 1} =$$

$$=[-2x^3+x^2-10x+5,-2\left(5x^2-x+15\right),9x-80,1]$$

O, más sencilla aún: $[-2x^3+x^2-10x+5,-5x^2+x-15,9x-80,1]$.

Y, si evaluamos esta secuencia, obtenemos los siguientes resultados:

x	**Evaluación de la secuencia**	$\upsilon(x)$
-3	$[98,\ -63,\ -371,\ 1]$	2
-2	$[45,\ -37,\ -274,\ 1]$	2
-1	$[18,\ -21,\ -177,\ 1]$	2
0	$[5,\ -15,\ -80,\ 1]$	2
1	$[-6,\ -19,\ 17,\ 1]$	1
2	$[-27,\ -33,\ 114,\ 1]$	1
3	$[-70,\ -57,\ 211,\ 1]$	1

Así, con la aplicación del resultado de Sturm, contamos sólo una raíz en el intervalo $(0,1)$.

4. CONTEXTO CURRICULAR

En este apartado analizaremos el contexto curricular en el que se sitúa nuestra propuesta. Para ello analizamos los diferentes contenidos relacionados con la resolución de ecuaciones que aparecen en el currículo de Castilla y León, tarea cada vez más ardua, dado el interés de los legisladores, que se han debido considerar a la altura del grupo Bourbaki, en reorganizar las ramas de las Matemáticas en sentidos (numérico, de la medida, espacial, algebraico, estocástico y socioafectivo), dispersando de forma poco inteligible los contenidos.

4.1. LAS ECUACIONES EN EL CURRÍCULO DE SECUNDARIA

Los currículos en la comunidad de Castilla y León se fijaron en los Decretos 39/2022 de 29 de septiembre (Consejería de Educación, Junta de Castilla y León, 2022), para la E.S.O., y 40/2022 de 29 de septiembre para Bachillerato (Consejería de Educación, Junta de Castilla y León, 2022).

Extractamos a continuación los aspectos del currículo referidos a la resolución de ecuaciones, desde 1º de E.S.O. hasta 2º de Bachillerato en la modalidad de Ciencias.

1º E.S.O.

D. Sentido algebraico.

2. Variable.

- Variable: Comprensión del concepto como incógnita en ecuaciones lineales con coeficientes enteros y como cantidades variables en fórmulas.

- Comprensión del significado del lenguaje algebraico como un avance en la historia y el desarrollo de las matemáticas frente al lenguaje retórico sin símbolos matemáticos de la antigüedad.

3. Igualdad y desigualdad.

- Equivalencia de expresiones algebraicas involucradas en ecuaciones lineales con coeficientes enteros, utilizando representaciones concretas (balanzas, discos algebraicos, etc.), matemáticas y simbólicas.

- Ecuaciones lineales con coeficientes enteros: resolución mediante cálculo mental o métodos manuales apoyados por material manipulativo si es necesario.

2º E.S.O.

D. Sentido algebraico

3. Variable

- Variable: Comprensión del concepto de variable como incógnita en ecuaciones lineales con coeficientes racionales, como indeterminadas en expresión de patrones o identidades y como cantidades variables en fórmulas y funciones afines.

- Monomios. Operaciones básicas.

4. Igualdad y desigualdad

- Relaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica.

- Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas, especialmente aquellos basados en relaciones lineales.

- Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales con coeficientes racionales y sistemas de ecuaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana.

- Ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el uso de la tecnología según el grado de dificultad.

3º E.S.O.

C. Sentido algebraico

3. Variable

- Comprensión del concepto de variable como incógnita en ecuaciones cuadráticas, como indeterminadas en identidades notables y como cantidades variables en fórmulas y funciones cuadráticas.

- Polinomios en una variable, operaciones básicas y factorización.

4. Igualdad y desigualdad

- Relaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica.

- Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas, especialmente aquellos basados en relaciones cuadráticas. Identidades notables.

- Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana.

- Ecuaciones cuadráticas: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el uso de la tecnología según el grado de dificultad.

4º E.S.O. Opción A.

D. Sentido algebraico

3. Variable

- Variables: asociación de expresiones simbólicas al contexto del problema y diferentes usos (como incógnita en ecuaciones, inecuaciones y sistemas, indeterminada en patrones e identidades, para expresar cantidades que varían en fórmulas y funciones elementales y como constantes o parámetros en modelos funcionales).

- Características del cambio en la representación gráfica de relaciones lineales y cuadráticas.

4. Igualdad y desigualdad

- Relaciones lineales, cuadráticas y de proporcionalidad inversa en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica.

- Formas equivalentes de expresiones algebraicas (incluyendo la factorización) en la resolución de ecuaciones polinómicas y sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales.

- Estrategias de discusión y búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales y cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana.

- Ecuaciones polinómicas, sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el uso de la tecnología según el grado de dificultad.

4º E.S.O. Opción B.

D. Sentido algebraico

3. Variable

- Variables: asociación de expresiones simbólicas al contexto del problema y diferentes usos (como incógnita en ecuaciones, inecuaciones y sistemas, indeterminada en patrones e identidades, para expresar cantidades que varían en fórmulas y funciones elementales y como constantes o parámetros en modelos funcionales).

- Relaciones entre cantidades y sus tasas de cambio.

4. Igualdad y desigualdad

- Álgebra simbólica: representación de relaciones funcionales en contextos diversos.

- Formas equivalentes de expresiones algebraicas (incluyendo factorización y fracciones algebraicas sencillas) en la resolución de ecuaciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas sencillas e irracionales, inecuaciones lineales y cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.

- Estrategias de discusión y búsqueda de soluciones de ecuaciones lineales y no lineales sencillas en contextos diversos.

- Ecuaciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas sencillas e irracionales, inecuaciones lineales y cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el uso de la tecnología según el grado de dificultad.

1º Bachillerato Ciencias.

A. Sentido numérico.

2. Relaciones.

- Los números complejos como soluciones de ecuaciones polinómicas que carecen de raíces reales.

- Historia de la incorporación de los diferentes conjuntos numéricos hasta llegar a los complejos.

D. Sentido algebraico.

3. Igualdad y desigualdad.

- Resolución de ecuaciones (incluyendo polinómicas, con radicales, racionales sencillas, exponenciales y logarítmicas), inecuaciones (polinómicas y racionales sencillas), sistemas de ecuaciones no lineales y sistemas de inecuaciones lineales en diferentes contextos.

- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas mediante el método de Gauss.

2º Bachillerato Ciencias

B. Sentido de la medida.

2. Cambio.

- Aplicación de los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad a la representación y al estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones. Teorema de Bolzano. Teorema de Rolle.

4.2. ANÁLISIS DEL CURRÍCULO

Nos interesa señalar los siguientes aspectos sobre los datos que hemos extractado de los decretos de la Junta de Castilla y León.

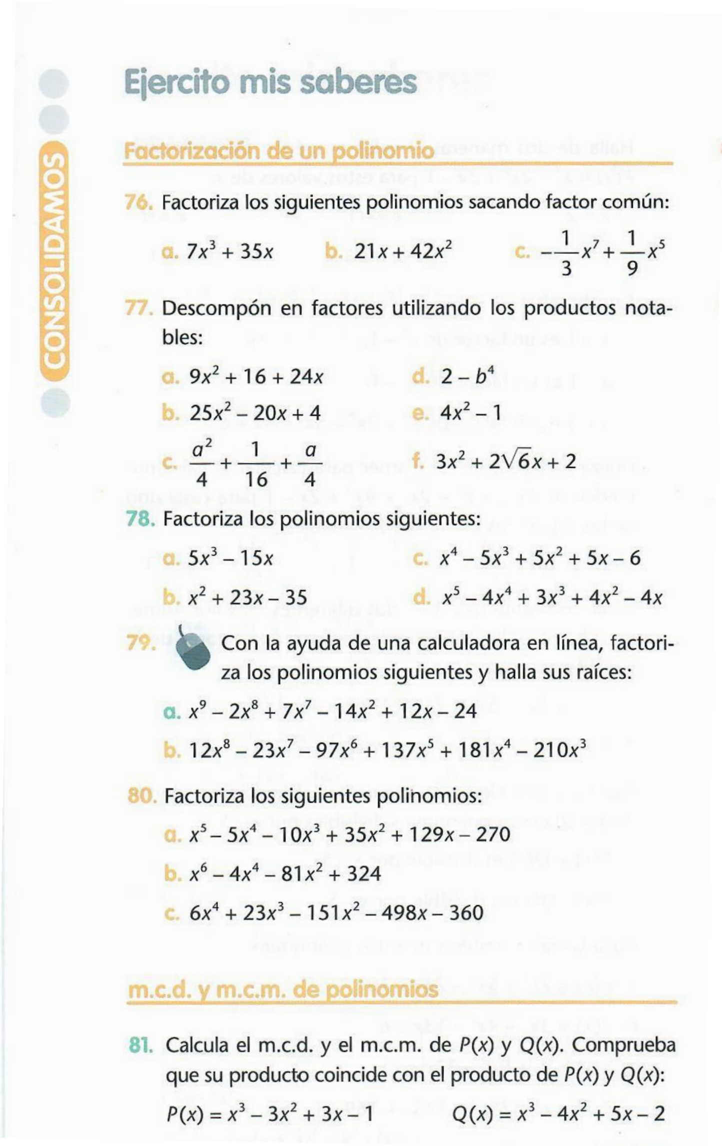
En primero de la E.S.O. se limitan las ecuaciones a las lineales con coeficientes enteros.

En segundo de la E.S.O. se han desterrado, nuevamente, las ecuaciones de segundo grado. Limitándose el currículo a ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales.

En tercero de la E.S.O. se habla por primera vez de polinomios y de factorización, así como de la resolución ecuaciones cuadráticas y las identidades notables.

En cuarto de la E.S.O. se aborda la resolución de ecuaciones polinómicas mediante factorización. También se estudian las ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Los sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Y las inecuaciones lineales y cuadráticas.

Es evidente que, en los tres primeros cursos, se propone a los alumnos resolución de problemas de los que siempre obtenemos una solución exacta, mediante un método algebraico perfectamente reglado (quitar denominadores multiplicando por su m.c.m., quitar paréntesis aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, aplicar las reglas de equivalencia para dejar los términos con la incógnita sólo en un miembro de la ecuación…). Si algún alumno pregunta por ecuaciones de grado mayor que dos, ocasionalmente se le comenta que hay "fórmulas" para resolver ecuaciones de tercer y cuarto grado pero que son muy largas y engorrosas y no se estudian en el instituto. Y que podemos resolver ecuaciones de grado superior mediante la factorización del polinomio correspondiente como se estudia en 3º y 4º. Se proponen problemas en este sentido que siempre tienen solución, como podemos comprobar en el siguiente ejemplo de un texto elegido al azar:



CONSOLIDAMOS

Ejercito mis saberes

Factorización de un polinomio

76. Factoriza los siguientes polinomios sacando factor común:

a. $7x^3 + 35x$ b. $21x + 42x^2$ c. $-\frac{1}{3}x^7 + \frac{1}{9}x^5$

77. Descompón en factores utilizando los productos notables:

a. $9x^2 + 16 + 24x$ d. $2 - b^4$

b. $25x^2 - 20x + 4$ e. $4x^2 - 1$

c. $\frac{a^2}{4} + \frac{1}{16} + \frac{a}{4}$ f. $3x^2 + 2\sqrt{6}x + 2$

78. Factoriza los polinomios siguientes:

a. $5x^3 - 15x$ c. $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$

b. $x^2 + 23x - 35$ d. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 4x$

79. Con la ayuda de una calculadora en línea, factoriza los polinomios siguientes y halla sus raíces:

a. $x^9 - 2x^8 + 7x^7 - 14x^2 + 12x - 24$

b. $12x^8 - 23x^7 - 97x^6 + 137x^5 + 181x^4 - 210x^3$

80. Factoriza los siguientes polinomios:

a. $x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 35x^2 + 129x - 270$

b. $x^6 - 4x^4 - 81x^2 + 324$

c. $6x^4 + 23x^3 - 151x^2 - 498x - 360$

m.c.d. y m.c.m. de polinomios

81. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de $P(x)$ y $Q(x)$. Comprueba que su producto coincide con el producto de $P(x)$ y $Q(x)$:

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

Figura 4.1. Ejercicios Matemáticas 4B libro de texto (Pancorbo Palenzuela & Ruiz Bueno, 2023)

Estos son los ejemplos del libro de texto de 4º de E.S.O. de Matemáticas B de la editorial Vicens Vives. Como se puede comprobar, naturalmente todos los ejercicios "salen", podemos encontrar raíces enteras, aplicando el teorema del resto y probando los divisores del término independiente hasta llegar a un polinomio de grado dos, que podremos factorizar resolviendo la ecuación de segundo grado, para la que tenemos una fórmula.

Incluso el problema 79 b, para cuya resolución se brinda el uso de una calculadora en línea, puede realizarse manualmente de forma exacta. Tan sólo el 79 a no tiene raíces enteras, presumo que fruto de alguna errata, porque tiene cuatro pares de raíces complejas que no tendrían sentido para los alumnos de 4º de E.S.O. que tristemente desconocen aún los secretos de este maravilloso cuerpo.

Podríamos repetir el experimento con la propuesta de ejercicios de los libros de texto propuestos por cualesquiera otras editoriales y obteniendo idénticos resultados. Entendemos que no es cuestión de alargar más la demostración en este trabajo.

Cuando ampliamos nuestro análisis a las propuestas en los contenidos de las Matemáticas de ciencias de Bachillerato (que en realidad no todos alumnos que cursan dicha modalidad de Bachillerato estudian, ya que la nueva ley establece la posibilidad de elegir Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales en segundo de Bachillerato para los alumnos de ciencias), observamos contenidos análogos a los presentados en 4º de la E.S.O. con la introducción de los números complejos "como soluciones de ecuaciones polinómicas que carecen de raíces reales".

En 2º de Bachillerato no se hace alusión alguna a la resolución de ecuaciones, pero hemos deseado reflejar el apartado en el que se hace alusión a los teoremas de Bolzano y de Rolle en relación con los problemas que luego suelen plantearse en este curso.

Resulta llamativa la nula mención a los métodos de cálculo numérico en el currículo de secundaria obligatoria y Bachillerato. Siendo esta la rama de las Matemáticas que probablemente ha presentado un mayor desarrollo desde que en los años cincuenta del pasado siglo se desarrollaron las computadoras.

Es posible que parte de las causas de esta omisión sea achacable a la fuerza de la tradición en la organización del currículo. Se habla mucho en las últimas décadas de la introducción, primero de la calculadora y, posteriormente, del ordenador en las clases de Matemáticas. Pero siempre en relación a contenidos que se ya se trabajaban de forma tradicional, con la pretensión de perfeccionar la comprensión de los conceptos mediante herramientas tecnológicas que permitan presentarlos de formas más atractivas o visuales o permitan la realización de ejercicios de forma automática o la autocorrección de los mismos. Pero no se ha introducido en el currículo ningún contenido sobre las matemáticas que se llevan realmente a cabo con computadoras.

Centrándonos en el tema de este trabajo, los alumnos acaban Bachillerato pensando que el Álgebra tiene una solución para todos los problemas y, si no es así, es que el problema no tiene solución. Incluso cuando, en 2º de Bachillerato, se estudia la resolución de sistemas lineales de ecuaciones, la regla de Cramer se ofrece, sin más, como la solución definitiva al problema de la resolución de sistemas de ecuaciones. Sin hablar en ningún momento de su coste computacional, que para un sistema de *n* ecuaciones es del orden de $T_n = (n+1)^2 n! - 1$, es decir que un sistema de 100 ecuaciones en un ordenador con una capacidad de 100 Mflops tardaría $3 \cdot 10^{142}$ años en resolverse, mostrando la inviabilidad de implementar dicho método. (Laboratori de Càlcul Numèric (LaCàN). Departament de Matemàtica Aplicada III. Universitat Politècnica de Catalunya (Spain), 2024).

Nos parece que nuestra asignatura podría contribuir, con conceptos como este último del coste computacional, a la formación del alumnado para el mundo que se nos avecina.

En estos sentidos formulamos las sugerencias que se exponen en el siguiente apartado de este trabajo.

4.3. PROPUESTA DIDÁCTICA DE INCLUSIÓN DE NUEVOS CONTENIDOS

En virtud de los anteriormente reseñado, planteamos una serie de propuestas que se podrían incorporar a los contenidos habituales, sin añadir complejidad a los ya existentes y sin incrementar en exceso en número de sesiones en los que la resolución de ecuaciones suele abordarse en cada curso. Creemos que la inclusión de estos nuevos contenidos presentaría la virtud de acercar más a los estudiantes a la realidad de la materia de los que lo hacemos en la actualidad, vincularía más nuestra materia a las nuevas tecnologías y ofrecería la posibilidad de explorar nuevos conceptos asociados a la computación.

1º y 2º de E.S.O.

No nos referiremos directamente a la resolución de ecuaciones, para las que se establece en el currículo que sólo se estudian lineales con coeficientes enteros, en primer curso, o racionales, en segundo. En estos cursos no se estudian polinomios, por tanto, no cabe hablar de factorización. Sin embargo, todos los procesos y algoritmos que se estudian posteriormente para el anillo de los polinomios son análogos a los que se estudian en estos cursos para los números naturales y enteros. Y, con posterioridad, el estudio de las fracciones algebraicas guarda paralelismo con el trabajo con las fracciones que se realiza en los primeros cursos de la E.S.O.

En estos cursos se incluyen el estudio de la divisibilidad y del cálculo y aplicaciones del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. En la enseñanza tradicional de estos temas, a los alumnos se les muestran unas reglas para averiguar si un número es divisible por algunos de los primeros números primos y se les proponen ejercicios para factorizar números, comprobando si estos cumplen alguna de las reglas de divisibilidad que se han enunciado previamente.

Frente a la complejidad del problema de la factorización, en el que, como es sabido, se basan algunos de los más importantes sistemas criptográficos, se trasmite la idea de que factorizar es un ejercicio mecánico, con ejercicios que siempre tiene una solución sencilla.

No pretendemos, en absoluto, complicar dichos contenidos ni los ejercicios que se plantean. Pero nos parece una posibilidad interesante considerar la enseñanza del algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor en estos cursos. Este sí que es un algoritmo que realmente funciona siempre. Es sencillo de aprender y ejecutar con números enteros y fomenta el pensamiento computacional. Como establece la competencia específica: “4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.”

Este sencillo y eficaz algoritmo es más trabajoso de realizar con polinomios en cursos posteriores, en los que deberemos ser más cuidadosos con los ejercicios que planteemos para que no aparezcan operaciones demasiado laboriosas. Pero, con esta salvedad, será un buen contenido para trabajar en tercero y, especialmente, en cuarto curso cuando se inicie el trabajo con fracciones algebraicas.

3º de E.S.O.

La estructura habitual de contenidos aborda os siguientes tópicos:

- Transformación de expresiones algebraicas.
- Operaciones elementales (suma, resta, producto, división) con polinomios.
- Igualdades notables.
- Resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Factorización de polinomios de coeficientes enteros mediante la extracción de factor común, el reconocimiento de igualdades notables y la detección de ceros enteros,
- Aplicación a la resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos.

En la línea de trabajo que proponemos, además del uso de herramientas tecnológicas que ya se está produciendo, como la hoja de cálculo para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones de grado superior a dos o el empleo de programas de representación gráfica para resolver ecuaciones, introduciríamos el estudio y aplicación de la regla de los signos de Descartes. De esta forma se muestra a los alumnos que no siempre hallamos la solución de todas las ecuaciones, pero que tenemos herramientas para una primera localización de la situación de las raíces, aunque no sepamos cuáles son.

4º E.S.O.

En línea con la propuesta realizada en los primeros cursos, nos parece interesante introducir en clase la aplicación del algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de dos polinomios, frente a la imposibilidad real de factorizar la mayoría de los polinomios con las herramientas de las que disponen los alumnos, este algoritmo siempre permite calcular el resultado. Además, permite practicar y agilizar los cálculos algebraicos a los alumnos que tantos disgustos suelen darles en cursos posteriores. La práctica con este algoritmo permitirá comprender la implementación de teorema de Sturm.

Como en 3º de E.S.O., nuestra propuesta incluye la práctica con la regla de los signos de Descartes para las ecuaciones polinómicas.

1º Bachillerato.

Incidimos de nuevo en la aplicación del algoritmo de Euclides para el cálculo del m.c.d. de dos polinomios. El teorema de Budan-Fourier permite mostrar una interesante aplicación de las derivadas, hablar del problema de la resolución de ecuaciones y trabajar con el concepto de derivada y de su cálculo; en una introducción para nuestra propuesta en 2º de Bachillerato.

2º Bachillerato.

Por primera vez en este curso, al estudiar el teorema de Bolzano se plantean problemas como los siguientes, recogidos de diversos textos y exámenes de este curso, incluyendo exámenes de E.B.A.U.:

- "Demuestra que la ecuación $x^4 + x^3 + x^2 - 2 = 0$ tiene exactamente dos raíces reales."
- "Demuestra que la ecuación $x^3 + 3x^2 = 3$ tiene exactamente tres soluciones reales."
- "Demuestra que $e^x = 2 - x$ admite una y solo una solución real."
- "Demuestra que $x = \frac{\operatorname{sen} x}{2} + k$ tiene una única solución $\forall x \in \mathbb{R}$."
- "¿Cuántas raíces reales tiene la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 25 = 0$?"
- "Demuestra que una ecuación polinómica de grado tres tiene siempre una solución real. ¿Ocurre lo mismo con una ecuación polinómica de cuarto grado?"
- "¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\operatorname{sen} x + 2x + 1 = 0$? Razona tu respuesta."
- "Demuestra que las funciones $f(x) = x^3 + 2x,\ g(x) = \operatorname{sen} x + 1$ se cortan en un único punto, enunciando los teoremas que aplicas."

Mucho menos frecuentes son los problemas como los siguientes:

- "Averigua con una cifra decimal exacta, cuál es la solución de la ecuación $x^3 - 2x + 1 = 0$, comprendida en el intervalo $[-2, -1]$"
- "La ecuación $(x+1)^{\ln x} = 5$ tiene una solución en el intervalo $[3, 4]$. Hállala con dos cifras decimales exactas."

Evidentemente, estos últimos son ejemplo de un método numérico de resolución de ecuaciones mediante bisección.

Parece este un momento adecuado para, al menos, presentar el cálculo numérico a los alumnos, con una referencia a la historia de la resolución de ecuaciones, véanse las referencias (Casalderrey, 2000) y (Corbalán, 2000), y a la imposibilidad de obtener métodos algebraicos generales para la resolución de ecuaciones polinómicas de grado mayor que cuatro.

Cuando se plantean los problemas anteriores a los alumnos de 2º de Bachillerato, la duda más común es justo la de cómo aislar los ceros, ¿cómo elegir los intervalos adecuados para aplicar el teorema de Bolzano y comprobar la existencia de una raíz? La respuesta dada de forma habitual alude a la intuición, a probar conjetura o a esbozar la gráfica de la función. Pero sería buena ocasión para introducir justo ese problema y presentar los tres teoremas enunciados en este trabajo.

Además de presentar los métodos numéricos de resolución de ecuaciones, en el momento que se hagan un par de ejercicios para familiarizarse con el comportamiento de estos teoremas, los alumnos verán que la regla de los signos de Descartes es muy fácil de implementar, pero ofrece muy poca información, en realidad. Podrán notar que el teorema de Budan-Fourier ofrece mucha más información a un coste algo más elevado. Y valorarán que el precio a pagar por conseguir la información precisa que proporciona el teorema de Sturm es muy alto en cuanto al trabajo que requieren los cálculos previos. Una buena forma de hablar del coste computacional, crucial en todos los desarrollos actuales.

Además, aunque no proponemos ni mucho menos la demostración de dichos teoremas, el esbozo de lo que pasa con el teorema de Budan-Fourier para que se produzcan esos cambios de signo constituye una interesante aplicación de la interpretación geométrica de la derivada y un buen ejercicio para completar su comprensión.

Capítulo aparte sería el interés del desarrollo de un proyecto de investigación sobre este tema como propuesta para algún alumno del Bachillerato de Investigación/Excelencia.

5. EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1. CÁLCULO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR MEDIANTE EL ALGORITMO DE EUCLIDES.

1. Calcula, utilizando el algoritmo de Euclides, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números:

   a. 48 y 64.

   b. 120 y 150.

   c. 1008 y 225.

   d. 480 y 216.

2. Calcula, utilizando el algoritmo de Euclides, el máximo común divisor de: 56, 1029 y 288.

3. Calcula, utilizando el algoritmo de Euclides, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de polinomios:

   a. $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$.

   b. $P(x) = 2x^4 + x^3 - x^2$, $Q(x) = x^3 - x$.

   c. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $Q(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$.

   d. $P(x) = x^4 + x^3 - x - 1$, $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

   e. $P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x + 8$, $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3x + 8$.

5.2. REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

1. Calcula, aplicando la regla de los signos de Descartes, cuántas raíces reales positivas pueden tener los siguientes polinomios:

    a. $p(x)=x^3-2x^2+5$

    b. $q(x)=x^4-3x^2+7x-2$

    c. $r(x)=-x^6+x^5+4x^4-3x^3-3x^2+x+1$

    d. $s(x)=-x^6+x^5+4x^4-3x^3-3x^2+2x+2$

    e. $t(x)=x^5+2x^4-3x^3-5x^2+x+1$

2. Demuestra que la ecuación $7x^8+5x^6+3x^4+2x^2+1=0$ no tiene soluciones reales.

3. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado y comprueba que se verifica la regla de los signos de Descartes para cada una de ellas:

    a. $6x^2-5x+1=0$.

    b. $9x^2-6x+1=0$

    c. $x^2-3x+4=0$

4. Aplica la regla de los signos de Descartes para comprobar que el siguiente polinomio tiene a lo sumo cinco raíces positivas y cuatro negativas. Por tanto, ¿cómo mínimo cuántas raíces no reales debe tener?

$$x^{11}+2x^8-3x^6+x^5+x^4-2x^2+x-2$$

5. Realiza un programa en Geogebra (https://www.geogebra.org/) definiendo tres deslizadores (*a*, *b* y *c)* que varíen entre -10 y 10 de unidad en unidad. Estos serán los coeficientes de una función cuadrática: $f(x)=ax^2+bx+c$ que definirás a continuación y representarás gráficamente. Utilizando la variación de dichos coeficientes mediante los deslizadores busca dos ecuaciones que cumplan las condiciones que se indican en cada uno de los siguientes casos. NOTA: ten en cuenta que no todos los apartados tienen solución, indica cuáles no la tienen y por qué la regla de los signos de Descartes implica que no pueda darse dicho caso.

a. El coeficiente del término de grado dos es positivo, la secuencia de coeficientes tiene dos variaciones de signo y la ecuación tiene dos soluciones positivas.

b. El coeficiente del término de grado dos es positivo, la secuencia de coeficientes tiene dos variaciones de signo y la ecuación tiene una solución positiva doble.

c. El coeficiente del término de grado dos es positivo, la secuencia de coeficientes tiene dos variaciones de signo y la ecuación tiene una solución positiva y una negativa.

d. El coeficiente del término de grado dos es positivo, la secuencia de coeficientes tiene dos variaciones de signo y la ecuación tiene cero soluciones positivas.

e. El coeficiente del término de grado dos es negativo, la secuencia de coeficientes tiene dos variaciones de signo y la ecuación tiene dos soluciones positivas.

f. El coeficiente del término de grado dos es negativo, la secuencia de coeficientes tiene dos variaciones de signo y la ecuación tiene una solución positiva doble.

g. El coeficiente del término de grado dos es negativo, la secuencia de coeficientes tiene dos variaciones de signo y la ecuación tiene una solución positiva y una negativa.

h. El coeficiente del término de grado dos es negativo, la secuencia de coeficientes tiene dos variaciones de signo y la ecuación tiene cero soluciones positivas.

i. La secuencia de coeficientes tiene una variación de signo y la ecuación tiene dos soluciones positivas.

j. La secuencia de coeficientes tiene una variación de signo y la ecuación tiene una solución positiva y una negativa.

6. Realiza en Geogebra una construcción análoga a la del problema anterior, con siete deslizadores que te permitan definir y una función polinómica de grado seis y explorar las raíces del polinomio mediante su representación. Obtén ejemplos de polinomios con:

   a. Una, dos, tres y cuatro raíces reales positivas.

   b. Dos raíces reales positivas y ninguna negativa.

   c. Dos raíces reales positivas y dos raíces reales negativas.

   Comprueba en todos esos casos que se verifica la regla de los signos de Descartes.

NOTA: en la siguiente imagen tienes un ejemplo de la construcción que se pide en este último problema, análoga a la requerida en el ejercicio anterior:

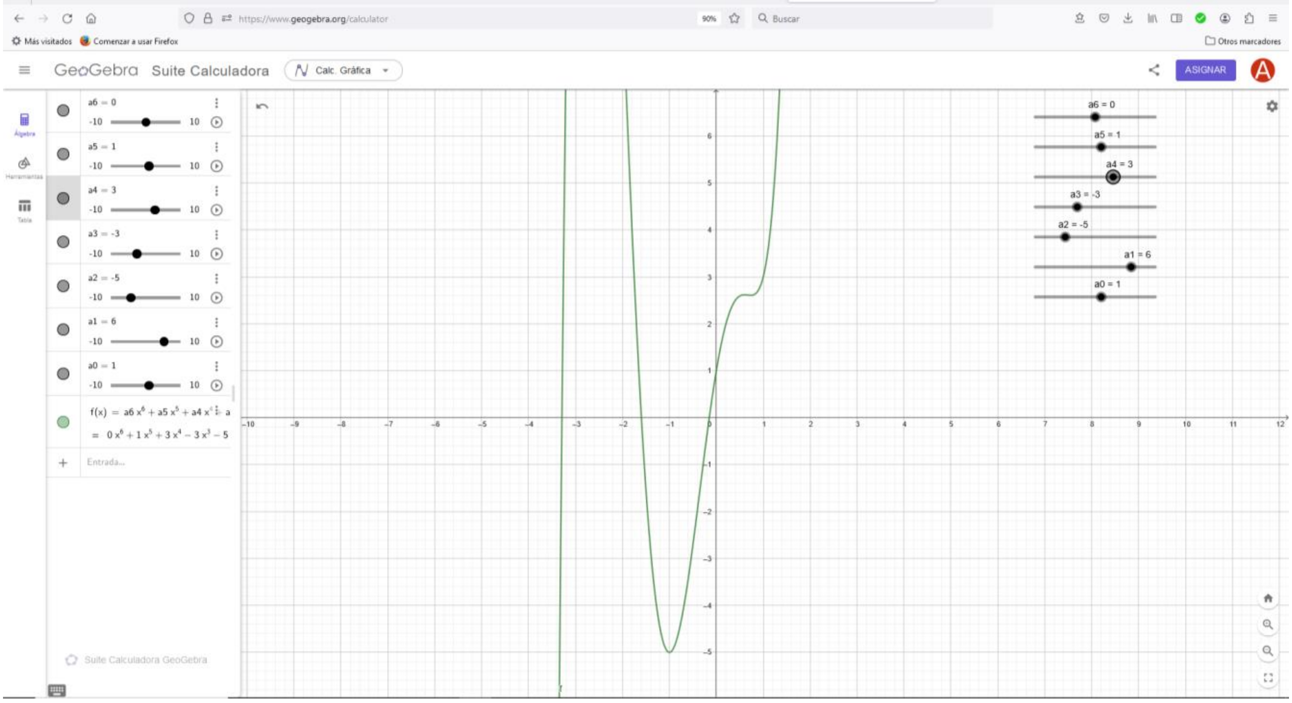


Figura 5.1. Ejercicio polinomio grado menor o igual que seis con deslizadores en Geogebra para observar el cambio del número de raíces

5.3. TEOREMA DE BUDAN-FOURIER.

1. Determina, aplicando el teorema de Budan-Fourier, cuántas raíces pueden tener los siguientes polinomios en los intervalos que se indica:
    a. $p(x)=x^4-2x^2-3x+2$, en $[-2,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ y $[1,2]$.
    b. $q(x)=x^4-7x^2-3x+2$, en $[-3,0]$ y en $[0,3]$.
    c. $r(x)=x^5-x^4-x^3+4x^2-x-1$, en $[-2,0]$ y en $[0,2]$.
2. Refina los intervalos en los apartados b y c del ejercicio anterior de forma que puedas determinar la parte entera de las raíces de esos polinomios.
3. Aplica el teorema de Budan-Fourier para verificar que el polinomio $p(x)=8x^2-8x+1$ tiene un cero en cada uno de los intervalos $(0,1/2),(1/2,1)$.
4. Sea $p(x)=2x^6-7x^5+x^4+x^3-12x^2-5x+1$. Utiliza el teorema de Budan-Fourier para demostrar que:
    a. $p(x)$ tiene exactamente una raíz en el intervalo $(3,7/2)$.
    b. $p(x)$ tiene una o tres raíces en el intervalo $(1/8,1/4)$.
    c. $p(x)$ tiene cero o tres raíce en el intervalo $(-1,-1/2)$.
    d. Calcula $p(-1), p(-1/2), p(-3/4)$ y precisa las conclusiones obtenidas en el punto c.
5. Utiliza el teorema de Budan-Fourier para demostrar la regla de los signos de Descartes para las raíces positivas.

5.4. TEOREMA DE STURM

1. Determina, aplicando el teorema de Sturm, cuántas raíces pueden tener los siguientes polinomios en los intervalos que se indica:
   a. $p(x) = 2x^3 - 4x + 1$, en $[-2,0]$, $[0,2]$.
   b. $q(x) = 4x^3 - 2x^2 - 3x - 2$, en $[-3,0]$ y en $[0,3]$.
2. Refina los intervalos en el ejercicio anterior de forma que puedas determinar la parte entera de las raíces de esos polinomios.
3. Busca una herramienta informática en internet que te permita obtener las sucesivas divisiones del algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor y de esta forma ahorrarte los cálculos de generación del sistema de Sturm. Utilizando dicha herramienta, genera sistemas de Sturm de los siguientes polinomios y obtén, aplicando el teorema de Sturm toda la información que puedas sobre sus raíces:
   a. $p(x) = x^5 - 3x^4 - x^2 - 4x + 14$.
   b. $q(x) = 2x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x + 2$.
   c. $r(x) = 16x^6 + 3x^4 - 3x^3 - 142x^2 - 9x - 21$.

6. METODOLOGÍA DIDÁCTICA. APLICACIÓN A NUESTRO CASO

Dedicamos este capítulo a presentar tres posibles propuestas de trabajo de los contenidos propuestos de acuerdo a diversas metodologías de enseñanza. Tras una breve introducción teórica sobre las generalidades que fundamentan cada una de dichas técnicas ofrecemos una guía de la aplicación de dicha propuesta a los contenidos que deseamos trabajar.

6.1. APRENDIZAJE COOPERATIVO

Si revisamos en la bibliografía moderna las orientaciones didácticas, en todas la etapas escolares se da una gran relevancia al aprendizaje entre iguales, al aprendizaje en grupo.

La trascendencia que se le da al aprendizaje en grupo en el modelo curricular choca, en ocasiones, con las dudas que se les plantean a muchos profesores, en el momento de aplicar estas técnicas de manera efectiva en clase, para conseguir que los alumnos adquieran esas habilidades.

Resulta imprescindible que los docentes tengan herramientas para trabajar grupalmente con diferentes niveles de competencia y desde diferentes competencias. Esto implica, necesariamente, partir del grupo y contar con él como condición necesaria, aunque no única, para promover aprendizajes en los alumnos.

Teniendo todo esto en cuenta, el aprendizaje cooperativo es una estrategia de enseñanza que da respuesta a las nuevas necesidades de la educación.

6.1.1. ¿Qué es el aprendizaje cooperativo?

El aprendizaje cooperativo es un método de aprendizaje basado en el trabajo en equipo. Incluye diversas y numerosas técnicas en las que los alumnos trabajan conjuntamente para lograr determinados objetivos comunes de los que son responsables todos los miembros del equipo.

Para entender mejor el aprendizaje cooperativo es necesario conocer las diferencias con otras formas de aprendizaje, como son el aprendizaje competitivo y el aprendizaje individual.

Tomando como referencia las obras de (Johnson, 1999), (García, 2001) y (Prieto, 2007), en una situación de aprendizaje competitivo los estudiantes compiten entre sí para lograr los resultados previstos. Esto implica, necesariamente, que un mejor rendimiento de un alumno o grupo de alumnos conlleve un menor rendimiento del resto. Un estudiante alcanzará el objetivo si, y sólo si, los demás no lo logran. Por tanto, cada persona perseguirá los resultados que, siendo beneficiosos para él, sean perjudiciales para los otros compañeros con los que está compitiendo. La recompensa máxima la recibirá el alumno con mejor rendimiento y los demás recibirán recompensas menores.

En una situación de aprendizaje individualista el alumno se centra únicamente en la realización de su tarea y en conseguir, a nivel individual, los resultados previstos. Por ende, el hecho de que un alumno consiga o no los objetivos no influye de ningún modo en que sus compañeros los alcancen o no. De esta manera, cada estudiante perseguirá su propio beneficio sin tener en cuenta el de sus compañeros de clase. Así, la recompensa viene determinada por el trabajo de cada persona, sin tener en consideración los trabajos de los demás.

En una situación de aprendizaje cooperativo el grupo de alumnos tiene que trabajar conjuntamente porque se lograrán los objetivos si, y sólo si, cada miembro del equipo consigue los suyos. El equipo necesita el conocimiento y el trabajo de todos los miembros. En esta situación de aprendizaje, se buscan los beneficios para el conjunto del grupo, que lo son, también, para uno mismo. La recompensa recibida por el alumno, en el aprendizaje cooperativo, es equivalente a los resultados obtenidos por el grupo.

No sería adecuado, ni cierto, afirmar que siempre es más eficaz el aprendizaje cooperativo, sino que cualquiera de las situaciones de aprendizaje descritas anteriormente puede resultar la más eficaz en un momento determinado. Sin embargo, de lo que no hay duda es de las competencias que los alumnos pueden desarrollar cuando se utilizan métodos de trabajo basado en la cooperación:

- Búsqueda, selección, organización y valoración de la información.
- Comprensión profunda de conceptos abstractos esenciales para la materia.
- Adaptación y aplicación de conocimientos a situaciones reales.
- Resolución creativa de problemas.
- Resumir y sintetizar.
- Expresión oral y asertividad.
- Habilidades interpersonales: desempeño de roles (liderazgo, organizador, etc.) y expresar acuerdos y desacuerdos, resolver conflictos, trabajar conjuntamente, mostrar respeto, etc.
- Organización/gestión personal: planificación de los tiempos, distribución de tareas.

Johnson, Johnson y Holubec (Johnson, 1999) señalan que son cinco los elementos básicos que forman el aprendizaje cooperativo, que se resumen de la siguiente manera:

- La interdependencia positiva, es decir, tener presente que el aprendizaje cooperativo sólo es eficaz cuando las personas se dan cuenta de que la cooperación es esencial para lograr su objetivo.
- La interacción “cara a cara” o simultánea, esto es que los estudiantes tienen que discutir sobre los distintos puntos de vista, sobre la manera de enfocar determinada actividad, explicar a los demás lo

que cada uno va aprendiendo, etc. Son acciones que se tienen que llevar a cabo con todos los miembros del grupo para poder lograr los objetivos previstos.

- La responsabilidad individual, referida a la importancia de la contribución de cada individuo para el éxito de las actividades de grupo.
- El trabajo en grupo ha de desafiar a los estudiantes a interactuar entre sí. De este modo el aprendizaje cooperativo ofrece la oportunidad de adquirir habilidades sociales, tales como escuchar a los demás, perder la vergüenza, ayudar y ser ayudado, hacer preguntas, expresar su propia opinión, mejorar su grado de asertividad, afianzar sus propios conocimientos, etc.
- Finalmente, debe quedar tiempo para evaluar la actividad, tanto desde el punto de vista del desarrollo de la misma como del cumplimiento de los objetivos que se hayan establecido.

6.1.1.1. Factores que influyen en el aprendizaje cooperativo.

Para que el aprendizaje cooperativo sea lo más eficaz posible hay que tener en cuenta aquellos factores que afectan a la interacción entre iguales y al desarrollo del aprendizaje. Los más destacados podrían ser:

- *Características del grupo y de sus participantes, según el nivel académico y social.*

Por el nivel académico se distinguen alumnos de nivel alto, medio y bajo. Ante estas características se pueden crear grupos homogéneos, o heterogéneos, con alumnos de diversas destrezas, donde se suelen logran aprendizajes significativamente superiores.

En relación a la condición social de los participantes, esto abarca la procedencia étnica, religiosa, cultural y de género. Dicha condición puede facilitar o bloquear los beneficios del aprendizaje cooperativo. Por tanto, hay que promover posibilidades equitativas de interacción y aprendizaje, independientemente de las características personales, para poder crear una participación e interacción constructiva.

- *Las características de la tarea/contenido que se propone a los alumnos.*

Hay que tener en cuenta que en una tarea de grupo los participantes son interdependientes, es decir cada uno debe obtener e intercambiar algún tipo de recurso con los otros para que el trabajo pueda completarse y todos puedan y deban aportar algo a la resolución del mismo.

Tampoco hay que olvidar que si se plantean actividades que se puedan resolver individualmente, cabe esperar que el trabajo se realice sólo por algunos miembros del grupo, excluyendo a otros, por lo que es muy importante hacer hincapié en la participación de todos, de forma continuada.

- *El papel del profesor.*

La formación y la calidad del profesor y el número de alumnos están directamente relacionados con la calidad de la enseñanza. Además, el papel del profesor mejora el aprendizaje cooperativo y fomenta la motivación en los estudiantes. Se espera por tanto que, en el contexto de aprendizaje en colaboración, el profesor acompañe, proporcione retroalimentación, entrene la colaboración y mantenga a estudiantes activos (Vermunt, 2006).

Dentro de las técnicas de aprendizaje cooperativo nosotros vamos a trabajar con la técnica Jigsaw, Puzle o Rompecabezas (Aronson, 1978) y (Slavin, 1983):

Los objetivos buscados con el uso de esta técnica son: estructurar las interacciones entre alumnos, mediante equipos de trabajo, y lograr que los alumnos aprendan los unos de los otros para lograr sus objetivos.

Los pasos serían los siguientes:

- El docente ha de tener preparada la división del tema a tratar en cinco ó seis documentos, los cuales se repartirán a los alumnos siguiendo un orden. Cada uno de ellos será importante para aprender la totalidad del tema.
- Se divide a los alumnos en grupos de cinco ó seis (según el número de documentos elaborados) y dentro de cada grupo cada miembro recibirá un número de 1 a 4 (ó 5).
- A los estudiantes con el número 1 se les reparte el mismo documento (que será diferente al del resto de compañeros y que puede corresponderse a la primera parte del tema de estudio). A los alumnos con el número 2 se les reparte el mismo documento (que puede ser la segunda parte del tema) y así sucesivamente con el resto de alumnos. La primera fase será, por tanto, que los alumnos individualmente preparen su documento, que lo lean, que lo entiendan, que lo aprendan (no memorizando) y que recopilen las dudas que les surjan.
- Una vez que ya ha finalizado el tiempo estimado para la preparación individual del documento, comienza la segunda fase que se denomina “Reunión o Grupo de Expertos”. En este momento todos los alumnos con el número 1 se reúnen para debatir y comentar su documento (que es el mismo). Los alumnos con el número 2 también se reúnen, y así sucesivamente con el resto de los números.

Figura 6.1. Técnica Puzle. (Berné, 2024)

- Finalizada la reunión del grupo de expertos llega la tercera fase, esta consiste en que todos regresen al grupo original o mixto, y cada alumno explica al resto de sus compañeros el documento que ha estado preparando.

- La última y cuarta fase, consiste en evaluar el aprendizaje logrado y la eficacia de la técnica individualmente. Para ello, el docente prepara preguntas relativas al material que han trabajado para demostrar el dominio del material adquirido y algún otro tipo de cuestionario para evaluar la cooperación más allá del contenido.

6.1.2. Propuesta de actividad cooperativa sobre la resolución de ecuaciones polinómicas de grado superior a dos.

Presentamos a continuación un modelo de aplicación de la técnica que acabamos de exponer adaptada a 1º de Bachillerato. Con las oportunas modificaciones de nivel sería válida para otros cursos a partir de 3º de la E.S.O., ajustándonos a los contenidos que hemos ido proponiendo en el apartado 4.3.

Tomamos como referente una clase de 1º de Bachillerato de Ciencias de entre 15 y 20 alumnos.

Como hemos comentado, la idea de la técnica puzle es dividir nuestra clase en grupos, y que cada componente estudie una técnica para aislar las raíces de un polinomio.

Para ello dividiremos inicialmente nuestra clase en cuatro grupos de cuatro o cinco personas. A cada miembro del grupo se le entregará una de las fichas que mostramos más adelante (la ficha I se entrega a todos los grupos, al primer grupo se le entrega además la ficha dos, al segundo la tres y al tercero la cuatro). En estas fichas se ofrece el planteamiento teórico de alguno de los contenidos a trabajar, se muestra un ejemplo de los contenidos propuestos y se plantean ejercicios para resolver en común. Cada una de las fichas aborda uno de los tres algoritmos que hemos explicado en el capítulo 2. de este trabajo (la regla de los signos de Descartes, el teorema de Budan-Fourier y el teorema de Sturm) y hay un grupo que deberá dedicarse al estudio del algoritmo de Euclides de cálculo del máximo común divisor y a la generación de los sistemas de Sturm que de por sí es muy laborioso. Así, durante una o dos sesiones, se les dará tiempo para que, entre los cuatro o cinco miembros del grupo, debatan acerca de los contenidos y realicen los ejercicios para ver si han llegado a dominar los conceptos y compartan las dudas con sus compañeros de grupo y el profesor.

El trabajo con estas primeras fichas, la primera fase, ocupará una o dos sesiones lectivas en función de la evolución del trabajo de los grupos. Una vez concluidas estas sesiones, pasaríamos a la segunda fase, para la que prevemos otra u otras dos sesiones lectivas. En estas clases, cada uno de los miembros de los grupos iniciales se dividirá y se juntará con un miembro de cada uno de los otros grupos. De esta forma se conformarán cinco o seis grupos de cuatro miembros en los que cada miembro dominará, a priori, uno de los algoritmos desarrollados para obtener información sobre la localización de las raíces de los polinomios. Durante esta sesión/es cada alumno explicará a sus compañeros el algoritmo con el que trabajó en las sesiones anteriores.

Para concluir, se realizará una sesión en la que, a cada grupo, se le proporcionará una hoja para la puesta en común. Así, cada grupo dedicará una sesión a resolver los ejercicios y, como última sesión, se resolverán en la pizarra, resolviendo las dudas que hayan surgido.

Con la primera ficha logramos que todos los alumnos se introduzcan en el problema y descubran las dificultades que se pueden encontrar a la hora de hallar las raíces del polinomio. Con ello podemos generar curiosidad en el alumnado, que los lleve a sentir la necesidad de averiguar cómo se resuelven este tipo de situaciones. Además, el uso de la herramienta Wolfram Alpha nos permite que los alumnos visualicen las soluciones.

Ya con las segundas fichas, específicas para cada grupo, logramos que los alumnos tengan que organizarse y debatir en grupo la información recibida, valorando cómo aplicarían eso a la resolución de problemas que se les puedan plantear.

Así, a la hora de tener que comunicárselo a los compañeros de manera correcta, usando bien los conceptos vistos, esquematizando y resumiendo lo que han aprendido de su hoja del grupo base, asumiendo roles a la hora de pedir el turno de palabra y comunicarse, todo ello para lograr que todo el grupo interiorice todos los métodos.

Finalmente, con la última hoja logramos que traten de resolver los problemas de forma creativa con los métodos ya vistos, aparte de que comprobamos si han entendido los conceptos y reforzamos aún más toda la parte de trabajo en grupo.

6.1.2.1. Ficha de trabajo I

Esta ficha es común a todos los grupos de trabajo.

Planteamiento del problema.

Objetivo: averiguar el número de raíces reales de un polinomio, aunque no sepamos calcularlas.

1. Estudia con tus compañeros si sois capaces de factorizar el siguiente polinomio.

$$p(x) = x^4 - 5x^3 \; q(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 - 3x - 8$$

2. Como veréis, cuando los polinomios no tienen raíces enteras o racionales no hemos estudiado cómo podemos resolverlos.
3. De hecho, contamos con métodos algebraicos para resolver cualquier ecuación de segundo grado, fórmula que conocéis, de tercer y cuarto grado. Pero no existe, no es que no se haya encontrado, ninguna fórmula que nos permita resolver en general cualquier ecuación de grado superior a 5.
4. Sin embargo, si en cualquier página web o en cualquier herramienta computacional de Matemáticas, introducís, por ejemplo, la siguiente ecuación:
$$x^5 - 7x^2 + 7 = 0$$
obtendréis las soluciones. Probada a hacerlo. Podéis usar cualquier página de internet como, por ejemplo, Wolfram Alpha (https://www.wolframalpha.com).
5. Como comprobaréis en las soluciones esa página no indica que éstas sean exactas, si no que usa el signo de aproximado $\approx$. Es decir que hemos hallado una solución por métodos numéricos que obtienen soluciones aproximadas, pero no exactas.
6. Esta rama de las Matemáticas, el Análisis Numérico, ha experimentado un gran desarrollo desde la invención de los ordenadores. De hecho, en gran parte, éstos se inventaron justo para eso. Si os apetece pasar un buen rato viendo una película o leyendo sobre los primeros ordenadores os recomiendo que veáis "Descifrando Enigma" o "Oppenheimer", o leáis "Maniac" de Benjamín Labatut.
7. Pero para poder aproximar las soluciones, primero tenemos que tener una idea de por dónde están. Si le ponemos a buscar a un ordenador soluciones en torno a 1, y las soluciones están, por ejemplo, alrededor de 10^9, o no las encontrará o le llevará demasiado tiempo.
8. Sobre ese problema de "situar" las soluciones vamos a trabajar estas tres sesiones. En realidad, el problema se conoce en Matemáticas como "aislar las raíces de un polinomio". Esto es, definir intervalos de la recta real disjuntos (cuya intersección sea vacía) cada uno de los cuales contenga una única raíz del polinomio y cuya unión contenga todas las raíces del mismo.
9. Con la definición anterior, aislad las raíces del siguiente polinomio: $p(x) = (x-1)(x+7)(x+23)$.

6.1.2.2. Ficha de trabajo II

1. Ahora que ya conocéis el problema al que nos enfrentamos, a vuestro grupo le corresponde estudiar el primer resultado que nos permite conocer algunos datos sobre las raíces de los polinomios sin saber cuáles son:

   La regla de los signos de Descartes.

   Sea un polinomio cuyos términos están ordenados de menor a mayor grado:

   $$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n,\ a_i \in \mathbb{R}$$

   La regla de los signos de Descartes afirma que el nº de raíces positivas contándolas con su multiplicidad, que denominaremos $z(p)$ del polinomio es menor o igual que el nº de cambios de signo de la secuencia de coeficientes del polinomio, que denotaremos por $\upsilon(p)$. También sabemos que la diferencia entre ambos valores es un número par.

   Además, el número de raíces reales negativas del polinomio es menor o igual que el número de cambios de signo de la secuencia de coeficientes de $p(-x)$ y ocurre lo mismo que con las positivas, en caso de ser menor la diferencia es par.

2. Por si tenéis alguna duda, precisamos a que llamamos número de cambios de signo de una secuencia de números:

   Sea una serie de número reales $a_1, a_2, ..., a_n$, siendo n un número natural, decimos que hay un cambio de signo si:

   Dos números consecutivos tienen diferente signo.

   Si todos los números comprendidos entre dos números no consecutivos, a_i y a_j, son 0, y a_i y a_j presentan diferente signo.

3. Os presentamos un ejemplo:

   Si $p(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x + 1$

   La secuencia de coeficientes es $1, 2, -3, -5, 1, 1$. Como veréis, en realidad hemos tomado los coeficientes tal y como estaban escritos, de mayor a menor grado, pero esto no influye a la hora de contar el número de cambios de signo.

   Podemos ver que hay dos cambios de signo, $\upsilon(p) = 2$: al pasar de 2 a -3, y al pasar de -5 a 1.

   Por tanto, la regla de los signos de Descartes nos asegura que ese polinomio tiene a lo sumo dos raíces positivas, y de no tener dos no tendrá ninguna, porque la diferencia ha de ser par.

Además $p(-x)=(-x)^5+2(-x)^4-3(-x)^3-5(-x)^2+(-x)+1=-x^5+2x^4+3x^3-5x^2-x+1$, por tanto, su secuencia de coeficientes será $-1,2,3,-5,-1,1$.

Vemos tres cambios de signo: de -1 a 2, de 3 a -5 y de -1 a 1. Por tanto $p(x)$ tiene 3 o una raíz real negativa.

Comprobad con alguna herramienta, como la página web que mencionamos en el punto 4 de la ficha anterior, cuáles son las raíces de $p(x)$.

4. Aplicad la regla de los signos de Descartes a los siguientes polinomios:
   a. $p(x)=x^5+x^4-3x^3-5x^2+x+1$
   b. $p(x)=x^5+x^4-3x^3-5x^2+6x+1$
   c. $p(x)=x^5+3x^4-3x^3-5x^2+6x+1$
   d. $p(x)=-x^6+x^5+4x^4-3x^3-5x^2+x+1$

5. De la misma forma que en el último paso del punto 3, utilizad alguna herramienta informática para calcular las raíces de dichos polinomios y comparadlo con los resultados que habíais predicho en el apartado 4.

6. Utilizad la regla de los signos de Descartes para estudiar el posible número de soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ en función de los signo de a,b y c.

6.1.2.3. Ficha de trabajo III

1. Ahora que ya conocéis el problema al que nos enfrentamos, a vuestro grupo le corresponde estudiar un teorema que nos permite conocer algunos datos sobre las raíces de los polinomios sin saber cuáles son:

   El teorema de Budan-Fourier

   Sea un polinomio $p(x)$ de coeficientes reales de grado n.

   Sean dos números reales, a y b, $a<b$ y $p(a)p(b)\neq 0$.

   Llamamos secuencia de Budan-Fourier del polinomio a la formada por el polinomio y sus n primeras derivadas, es decir, todas las derivadas no nulas del polinomio:

   $$\left(p(x), p'(x), p''(x), p'''(x),..., p^{(n)}(x)\right)$$

   Sean $\upsilon(a)$ y $\upsilon(b)$ el número de variaciones de signo en las secuencias $\left(p(a), p'(a), p''(a),..., \mathrm{p}^{(n)}(a)\right)$ y $\left(p(b), p'(b), p''(b),..., \mathrm{p}^{(n)}(b)\right)$.

   Una vez construidas ambas series, se cumple que $\upsilon(a)$ es mayor o igual que $\upsilon(b)$ y el número de raíces del polinomio entre a y b, contando su multiplicidad, es menor o igual que $\upsilon(a)-\upsilon(b)$ y si es menor, lo es en un número par.

2. Por si tenéis alguna duda, precisamos a que llamamos número de cambios de signo de una secuencia de números:

   Sea una serie de número reales $a_1, a_2, ..., a_n$, siendo n un número natural, decimos que hay un cambio de signo si:

   Dos números consecutivos tienen diferente signo.

   Si todos los números comprendidos entre dos números no consecutivos, a_i y a_j, son 0, y a_i y a_j presentan diferente signo.

3. Veamos un ejemplo del teorema:

   Sea el polinomio $p(x)=4x^3-2x^2-3x+2$.

   Calculamos las derivadas del polinomio para construir la secuencia de Budan-Fourier:

   $p'(x)=12x^2-4x^2-3$

   $p''(x)=24x-4$

   $p'''(x)=24$

La secuencia es: $\left(4x^3-2x^2-3x+2,\,12x^2-4x-3,\;24x-4,\;24\right)$.

Si deseamos averiguar cuántas raíces tiene el polinomio en un intervalo, por ejemplo, $\left[-1,0\right]$, evaluamos la secuencia en los extremos del intervalo:

$-1 \Rightarrow \left(-1,13,-28,\;24\right)$, vemos que esta secuencia tiene tres variaciones de signo, de -1 a 13, de 13 a -28 y de -28 a 24. Luego $\upsilon\left(-1\right)=3$.

$0 \Rightarrow \left(2,-3,-4,24\right)$, esta secuencia presenta dos variaciones de signo, de 2 a -3 y de -4 a 24. Luego $\upsilon\left(0\right)=2$.

Como $\upsilon\left(-1\right)-\upsilon\left(0\right)=3-2=1$, $p\left(x\right)$ tiene una raíz en el intervalo $\left[-1,0\right]$.

Si ahora deseamos averiguar las raíces del intervalo $\left[0,1\right]$, no tendremos más que calcular $\upsilon\left(1\right)$ y compararlo con $\upsilon\left(0\right)$:

$1 \Rightarrow \left(1,5,20,24\right)$, que no presenta ninguna variación de signo, luego $\upsilon\left(1\right)=0$.

Así: $\upsilon\left(0\right)-\upsilon\left(1\right)=2$. Y, por tanto, el teorema de Budan-Fourier nos dice que en el intervalo $\left[0,1\right]$ hay dos o cero raíces reales. Y no puede haber raíces para $x>1$.

Comprobad con alguna herramienta, como la página web que mencionamos en el punto 4 de la primera ficha, cuáles son las raíces de $p\left(x\right)$.

4. Aplicad el teorema de Budan-Fourier a los siguientes polinomios para intentar delimitar en que intervalos pueden tener sus raíces:
   a. $p\left(x\right)=x^5+x^4-3x^3-5x^2+x+1$
   b. $p\left(x\right)=x^5+x^4-3x^3-5x^2+6x+1$
   c. $p\left(x\right)=x^5+3x^4-3x^3-5x^2+6x+1$
   d. $p\left(x\right)=-x^6+x^5+4x^4-3x^3-5x^2+x+1$

5. De la misma forma que en el último paso del punto 3, utilizad alguna herramienta informática para calcular las raíces de dichos polinomios y comparadlo con los resultados que habíais predicho en el apartado 4.

6. ¿Se os ocurre alguna forma de emplear este teorema para aproximar una raíz de un polinomio?

6.1.2.4. Ficha de trabajo IV

A. Vuestros compañeros del grupo cuatro van a estudiar la aplicación del teorema de Sturm para poder calcular cuántas raíces tiene un polinomio en un intervalo dado.

El problema de este método es que la secuencia de Sturm, que es una sucesión de polinomios que se deducen del que nos dan, no es una secuencia fácil de calcular.

Vuestro trabajo es aprender a construir esta secuencia de polinomios para poder mostrársela a vuestros compañeros que estarán practicando con esas secuencias la aplicación del teorema de Sturm.

Para ello primero vamos a estudiar un método de cálculo del Máximo Común Divisor de dos números mediante un algoritmo que no implica la factorización de los números: el algoritmo de Euclides.

Para calcular el $M.C.D.(a,b)$ supuesto que $b < a$ se siguen los siguientes pasos:

1. Se divide a entre *b*. Se guarda el resto, *r*, de esta división.
2. Se divide el divisor anterior, *b*, entre el resto anterior, obteniéndose un nuevo resto *r'*.
3. Se repite el paso anterior con el divisor anterior y el nuevo resto hasta obtener una división exacta. Cuando esto ocurre, el último divisor es el M.C.D. de *a* y *b*.

Veamos un ejemplo:

Calcula el M.C.D.(1008,225)

1.

$$\begin{array}{r|l} 1008 & 225 \\ \hline 108 & 4 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r|l} 225 & 108 \\ \hline 9 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 9 \\ \hline 0 & 12 \end{array}$$

3. El $M.C.D.(1008,225) = 9$

Como verás este método es en realidad bastante más sencillo sobre todos si los números son difíciles de factorizar que puede pasar con números muy altos. O con polinomios. Porque este método se puede aplicar igualmente a polinomios. Veamos otro ejemplo:

Calcula el $M.C.D.\left(p(x)=x^4-5x^3+9x^2+5x+8,\ q(x)=x^4-4x^3+4x^2+3x+8\right)$

Como hablamos de polinomios, dividiremos el de mayor entre el de menor grado, si tienen igual grado cualquiera de los dos puede ser el dividendo y el otro el divisor.

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr}
+x^4 & -5x^3 & +9x^2 & -5x & +8 & x^4 & -4x^3 & +4x^2 & +3x & +8 \\ \cline{6-10}
-x^4 & +4x^3 & -4x^2 & -3x & -8 & & 1 & & & \\ \cline{1-5}
 & -x^3 & +5x^2 & -8x & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
x^4 & -4x^3 & +4x^2 & +3x & +8 & -x^3 & +5x^2 & -8x \\ \cline{6-8}
-x^4 & +5x^3 & -8x^2 & & & -x & -1 & \\ \cline{1-3}
 & x^3 & -4x^2 & & & & & \\
 & -x^3 & +5x^2 & -8x & & & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & -5x & +8 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr}
-x^3 & +5x^2 & -8x & x^2 & -5x & +8 \\ \cline{4-6}
x^3 & -5x^2 & +8x & -x & & \\ \cline{1-3}
 & 0 & & & &
\end{array}$$

Luego el $M.C.D.\left(p(x),\ q(x)\right)=x^2-5x+8$

Ahora probad vosotros si habéis entendido el algoritmo realizando los siguientes ejercicios:

Calcula el Máximo Común Divisor de:

1. 480 y 216.
2. 21658 y 923.
3. $P(x)=x^4+2x^2+1$, $Q(x)=x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2$.
4. $P(x)=x^4+x^3-x-1$, $Q(x)=2x^3-3x^2+1$.

B. La secuencia de Sturm de un polinomio $p(x)$ será una sucesión de polinomios

$$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x)$$

y se calcula de la siguiente forma:

El primer polinomio es el mismo $p_0(x)=p(x)$

El segundo polinomio es $p_1(x) = p'(x)$, es decir la derivada del polinomio inicial.

Para $k \geq 1$, $p_{k+1}(x)$ es el resto de la división de $p_{k-1}(x)$ entre $p_k(x)$ tomado con signo contrario.

Este procedimiento sólo se diferencia del algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de $p(x)$ y $p'(x)$ en que, cada vez, se cambia el signo del resto y se efectúa la siguiente división con este cambio de signo.

Hasta que el resto sea un polinomio sin raíces reales, por ejemplo, una constante.

Veamos un ejemplo:

Sea $p(x) = x^3 - 7x + 7$

$$p_0(x) = p(x) = x^3 - 7x + 7$$
$$p_1(x) = p'(x) = 3x^2 - 7$$

Para calcular $p_2(x)$, efectuamos la división $p_0(x)/p_1(x)$:

$$\begin{array}{ccc|cc} x^3 & -7x & +7 & 3x^2 & -7 \\ \cline{4-5} -x^3 & +\frac{7}{3}x & & \frac{1}{3}x & \\ \cline{1-2} & -\frac{14}{3}x & +7 & & \end{array}$$

Luego, tomamos el resto con signo contrario: $p_2(x) = \frac{14}{3}x - 7$. Y calculamos $p_1(x)/p_2(x)$

$$\begin{array}{ccc|cc} 3x^2 & & -7 & \frac{14}{3}x & -7 \\ \cline{4-5} -3x^2 & +\frac{9}{2}x & & \frac{9}{14}x & +\frac{27}{28} \\ \cline{1-2} & \frac{9}{2}x & -7 & & \\ & -\frac{9}{2}x & +\frac{27}{4} & & \\ \cline{2-3} & & -\frac{1}{4} & & \end{array}$$

Tomando de nuevo el resto con signo contrario: $p_3(x) = \frac{1}{4}$.

Por tanto, la secuencia de Sturm del polinomio $p(x)$ es $\left[x^3 - 7x + 7, 3x^2 - 7, \frac{14}{3}x - 7, \frac{1}{4}\right]$

Para terminar, os propongo el siguiente ejercicio:

Calcula la secuencia de Sturm de los polinomios $p(x) = x^2 - x$, $q(x) = 4x^3 - 16x^2 + 13x - 3$.

6.1.2.5. Ficha de trabajo V

1. Ahora que ya conocéis el problema al que nos enfrentamos, a vuestro grupo le corresponde estudiar el teorema que nos permite obtener más datos sobre las raíces de los polinomios sin saber cuáles son:

   El teorema de Sturm

   Sea un polinomio $p(x)$ de coeficientes reales de grado n.

   Sean dos números reales, a y b, $a < b$ y $p(a)p(b) \neq 0$.

   Sea el sistema de Sturm del polinomio:

   $$p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_s(x)$$

   Sean $\upsilon(a)$ y $\upsilon(b)$ el número de variaciones de signo en las secuencias $(p_0(a), p_1(a), p_2(a), ..., p_s(a))$ y $(p_0(b), p_1(b), p_2(b), ..., p_s(b))$.

   Entonces, el teorema de Sturm dice que:

   1. $\upsilon(a) \geq \upsilon(b)$.
   2. $\upsilon(a) - \upsilon(b)$ es igual al número de raíces reales de $p(x)$ contando cada raíz múltiple una única vez."

2. Seguro que habéis notado que en el teorema anterior falta algo: ¿qué es la secuencia de Sturm? Pues resulta que el cálculo de esta secuencia es sencillo pero laborioso, así que vuestros compañeros de otro grupo están trabajando en calcular secuencias de Sturm y os lo explicarán cuando os juntéis en las siguientes clases. De momento, para ver cómo funciona este teorema os daremos las secuencias de Sturm de los polinomios ya calculadas.
3. Por si tenéis alguna duda, precisamos a que llamamos número de cambios de signo de una secuencia de números:

   Sea una serie de número reales $a_1, a_2, ..., a_n$, siendo n un número natural, decimos que hay un cambio de signo si:

   Dos números consecutivos tienen diferente signo.

   Si todos los números comprendidos entre dos números no consecutivos, a_i y a_j, son 0, y a_i y a_j presentan diferente signo.

4. Vamos a ver un ejemplo del teorema:

   Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 7x + 7$, cuya sistema de Sturm es $\left[x^3 - 7x + 7, 3x^2 - 7, 14x - 21, 1\right]$.

   Entonces para averiguar cuántas raíces tiene el polinomio en el intervalo, por ejemplo, $[-5, 0]$, evaluamos la secuencia en $a = -5$:

   $$\left[(-5)^3 - 7(-5) + 7, 3(-5)^2 - 7, 14(-5) - 21, 1\right] = [-83, 68, -91, 1]$$

   Como veréis, en esta secuencia hay tres variaciones de signo: de -83 a 68, de 68 a -91 y de -91 a 1. Decimos, por tanto, que $\upsilon(-5) = 3$.

   Y evaluamos el sistema de Sturm en $b = 0$:

   $$\left[(0)^3 - 7(0) + 7, 3(0)^2 - 7, 14(0) - 21, 1\right] = [7, -7, -21, 1]$$

   En esa secuencia hay dos variaciones de signo: de 7 a -7 y de -21 a 1. Por tanto: $\upsilon(0) = 2$.

   Como $\upsilon(-5) - \upsilon(0) = 3 - 2 = 1$, el teorema de Sturm afirma que $p(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $[-5, 0]$.

5. Para practicar el teorema de Sturm os proponemos los siguientes ejercicios:

   a. Sea el mismo polinomio del ejemplo $p(x) = x^3 - 7x + 7$, cuya sistema de Sturm era $\left[x^3 - 7x + 7, 3x^2 - 7, 14x - 21, 1\right]$.

      i. Evaluad el sistema de Sturm en $x = -4,\ x = -3,\ x = -2,\ x = -1$ y precisad en que intervalo se encuentra la raíz negativa del polinomio.

      ii. Evaluad el sistema de Sturm en $x = 1$, x = 2 . ¿En qué intervalo o intervalos, cuyos extremos sean números enteros consecutivos, están las restantes raíces de $p(x)$?

   b. Sea el polinomio $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ cuyo sistema de Sturm es $\left[2x^3 - 4x^2 - 3x + 2,\ 6x^2 - 8x - 3,\ 34x - 12,\ 1\right]$. Evaluad el sistema en los número enteros a partir de $x = -2$ y hallad en qué intervalos, cuyos extremos sean números enteros consecutivos, están las raíces de $p(x)$.

6.1.2.6. Ficha de trabajo VI

Esta ficha es común a todos los grupos en la última/s sesiones.

Aplicad los métodos que habéis estudiado para aislar las raíces de los siguientes polinomios:

1. $p(x) = x^3 - x + 1$
2. $q(x) = x^4 - 4x^2 - x - 1$

Tras vuestra experiencia en el trabajo con los métodos, ¿podéis responder a las siguientes preguntas?

1. ¿Cuál de los métodos es más fácil de aplicar?
2. ¿Cuál más difícil?
3. ¿Cuál aporta más información?
4. ¿Cómo valoráis la diferencia entre la dificultad y la información que aportan?
5. Esa dificultad, ¿en qué consiste?, ¿sería la misma si se programan los cálculos en un ordenador?
6. ¿Qué conclusiones podéis extraer del trabajo de estos días?

Para valorar el éxito de la actividad el profesor recogerá los ejercicios de los alumnos previamente a su corrección para valorar si se han entendido los conceptos y a los alumnos se les proporcionará el siguiente cuestionario para ver cómo han trabajado en equipo:

¿Quiénes son tus compañeros de grupo?

	Sí	No
¿El ambiente de trabajo en grupo ha sido positivo?		
¿Consideras que el ritmo de trabajo ha sido el correcto para completar los ejercicios?		
¿Habéis sabido resolver todos los tipos de ejercicios?		
¿Tus compañeros han aceptado tu colaboración?		
¿Han colaborado todos tus compañeros contigo?		
¿Han respetado tus compañeros los momentos de intervención de cada uno?		
¿Consideras que tus aportaciones se han tenido en cuenta?		
¿Consideras las aportaciones de tus compañeros como buenas para el desarrollo del trabajo en grupo?		
¿El trabajo en grupo te ha servido para resolver dudas?		
¿Habéis compartido las soluciones comprobando si son correctas?		

Tabla 6.1. Encuesta para valorar el trabajo en grupo.

Consecuentemente, para la evaluación de los resultados se valorará la resolución de los ejercicios, así como si todos los compañeros han sido capaces de entender todos los métodos, lo cual se valorará mediante la observación del profesor a la hora de explicar los ejercicios resueltos y la valoración de cómo se ha trabajado en clase.

6.2. APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS

Un proyecto se define como la realización de una serie ordenada de actividades orientadas al logro de una meta definida, que tiene un principio y un fin en un período de tiempo determinado y que requiere de recursos para su ejecución.

El aprendizaje basado en proyectos (o aprendizaje por proyectos) es una metodología educativa que permite a los estudiantes involucrarse en actividades que les interesan, mientras adquieren conocimientos curriculares y ponen a prueba sus competencias clave, según la LOMLOE.

Para lograr esto, el profesor plantea una pregunta-desafío basada en una situación real y cercana a los estudiantes, que despierte su interés y esté relacionada con los conceptos y procedimientos que deben aprender.

Los estudiantes deben resolver la tarea en equipo, llevando a cabo una investigación, realizando diversas actividades de aprendizaje a lo largo del proyecto y trabajando de forma colaborativa y casi autónoma. Finalmente, compartirán el producto final o la solución con el resto de la clase.

A partir de este tipo de aprendizaje es posible tratar diversas asignaturas del currículo escolar, ya que se puede proponer un proyecto que englobe varias, todo depende del tema central que se elija.

Este modelo de innovación educativa está diseñado para que los estudiantes tengan un papel más activo en su proceso de aprendizaje, en comparación con la enseñanza directa o tradicional.

El profesor ya no es solo el experto que se dedica a transmitir sus conocimientos. Ahora, se encarga de crear entornos de aprendizaje que se adapten a las capacidades y necesidades de los estudiantes. Además, actúa como guía y orientador, mientras los estudiantes desarrollan el proyecto correspondiente.

Esta dinámica exige que los alumnos sean más participativos, asuman la responsabilidad de su propio aprendizaje y, en consecuencia, aumenten su implicación.

Además, el aprendizaje basado en proyectos es una metodología inclusiva, que permite identificar los diferentes ritmos de aprendizaje de una clase o estudiante y responder a ellos con una propuesta de actividades que abarcan varios niveles de complejidad.

Sumado a ello, el ABP permite evaluar numerosos aspectos además de la adquisición de conocimientos y el desarrollo de competencias: el proceso de aprendizaje, la calidad del producto final, el uso de herramientas tecnológicas y otros recursos didácticos, la socialización de los estudiantes, entre otros.

Por esta razón, se necesitan mecanismos de evaluación alternativos a los exámenes escritos tradicionales, como cuestionarios, diarios de aprendizaje, portafolios, rúbricas, etc.

Sin embargo, es una técnica laboriosa, que requiere un proceso continuo de reflexión, mejora y evaluación, por lo que no es una actividad que se pueda desarrollar en un solo día.

A la hora aplicar el aprendizaje por proyectos en clase, se recomienda hacerlo de esta forma:

- Seleccionar el tema y plantear la pregunta guía.
- Crear grupos de trabajo pequeños y heterogéneos, además de asignar un rol a cada miembro.
- Definir el producto o reto final: un folleto, una presentación, una maqueta, etc.
- Planificar el proyecto.
- Investigar y recopilar la información necesaria para responder al reto que se ha planteado.
- Analizar y sintetizar toda esta información con el objetivo de encontrar la mejor respuesta a la pregunta inicial.
- Elaborar el proyecto aplicando los conocimientos y las habilidades adquiridos en esa y/o en otras materias.
- Presentar los resultados al resto de los compañeros.
- Encontrar una respuesta colectiva de todos los grupos a la pregunta inicial.

Así, el Aprendizaje Basado en Proyectos ofrece múltiples ventajas para los estudiantes. Este enfoque facilita el desarrollo de habilidades cognitivas, tales como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la creatividad.

Asimismo, el ABP estimula competencias socioemocionales, incluyendo la colaboración, la comunicación efectiva y la responsabilidad personal.

Adicionalmente, el aprendizaje a través de proyectos incrementa el interés y la motivación de los alumnos al abordar temas que son relevantes y significativos para ellos.

Este método se desarrolló gracias a John Dewey, el cual es reconocido como uno de los primeros defensores de la educación basada en proyectos o al menos de sus principios a través de su idea de «aprender haciendo». En "*My Pedagogical Creed"* (Dewey, 2000), Dewey enumeró sus creencias, incluida la opinión de que "el maestro no está en la escuela para imponer ciertas ideas o para formar ciertos hábitos en el niño, sino que está allí como miembro de la comunidad para seleccionar las influencias que afectarán al niño y ayudarlo a responder adecuadamente a estas". Por ello, promovió las llamadas actividades expresivas o constructivas como centro de correlación.

La investigación educativa ha desarrollado esta idea de enseñanza y aprendizaje en una metodología conocida como «aprendizaje basado en proyectos», basada en la teoría de Dewey, quien introdujo la metodología basada en proyectos como un componente del método de enseñanza de problemas de Dewey.

Algunos académicos también asociaron el aprendizaje basado en proyectos con la perspectiva del «aprendizaje situado» de Jean Piaget y las teorías constructivistas. Piaget defendió una idea de aprendizaje que no se centra en la memorización; dentro de su teoría, el aprendizaje basado en proyectos se considera un método que involucra a los estudiantes, les impulsa a inventar y a ver el aprendizaje como un proceso con futuro, en lugar de adquirir una base de conocimiento como un hecho. Los desarrollos posteriores a la educación basada en proyectos como pedagogía se basaron más tarde en las teorías de la educación teniendo en cuenta la experiencia y la percepción, propuestas por teóricos como John Amos Comenius, Johann Heinrich Pestalozzi y María Montessori, entre otros.

El método de proyectos ofrece a los estudiantes una experiencia de aprendizaje más rica y auténtica en comparación con otros enfoques, ya que se lleva a cabo en un contexto social donde la interdependencia y la cooperación son esenciales para lograr los objetivos. Este entorno permite a los estudiantes anticipar y resolver conflictos interpersonales. En un ambiente de apoyo, los estudiantes adquieren la confianza necesaria para desarrollar sus habilidades individuales, preparándolos para la vida fuera del ámbito escolar. Si se implementa correctamente, este método puede dotar a los estudiantes de siete habilidades clave:

- Expresión oral y escrita: Además de redactar el proyecto, la etapa final consiste en presentarlo oralmente a sus compañeros. De este modo, los estudiantes trabajan tanto la expresión escrita como la oral.
- Análisis y síntesis: Los alumnos deben analizar la situación real planteada y ser capaces de extraer las ideas fundamentales de la información recopilada.
- Investigación: En la realización de un proyecto, los alumnos investigan sobre un tema utilizando diversas fuentes de información. Esto implica aprender a utilizar correctamente las tecnologías digitales, que serán su herramienta principal para buscar información.
- Planificación y organización: Para llevar a cabo el proyecto, deben planificar los pasos a seguir y organizarse con sus compañeros de grupo. Esto aumenta la responsabilidad del alumno sobre su propio aprendizaje, ya que deben aprender a gestionar el tiempo y trabajar en equipo.
- Trabajo en equipo: Los proyectos generalmente se realizan en grupos, por lo que desde el principio hasta el final deben colaborar con sus compañeros. Esto ayuda a mejorar las habilidades sociales de los alumnos.
- Toma de decisiones: Al desarrollar su propio proyecto, a veces es necesario tomar decisiones independientes del profesor. El alumno puede desarrollar sus propias ideas de manera autónoma.
- Pensamiento crítico: La investigación sobre un tema implica cuestionar la información encontrada y formar una opinión sobre el mismo. Dado que se trata de una situación real, los alumnos deben desarrollar su pensamiento crítico.

Los proyectos se pueden clasificar en función de tres criterios: la finalidad, el diseñador y el apoyo del profesor. El tipo de proyecto seleccionado puede depender de la madurez, las capacidades y la experiencia de los alumnos en el desarrollo de proyectos. Considerando estos factores, podemos determinar la complejidad del diseño del proyecto, el grado de autonomía que queremos otorgarles y el nivel de participación de los alumnos en la toma de decisiones sobre cómo se llevará a cabo el proyecto.

Teniendo en cuenta la finalidad del proyecto, podemos clasificarlos en las siguientes categorías:

- Proyecto de producción.
- Proyecto de diseño.
- Proyecto de mejora o rediseño.
- Proyecto de solución de alguna dificultad.
- Proyecto de investigación.
- Proyecto de utilización de algún producto.

Si consideramos quién diseña el proyecto, los podemos clasificar de la siguiente manera:

- Proyecto cerrado: definido por el profesor con pautas muy estrictas que no permiten la intervención del alumno en el diseño.
- Proyecto abierto: definido por el profesor, pero los alumnos pueden diseñar sus propias especificaciones y condiciones para el desarrollo del proyecto, lo que les da un mayor grado de libertad.
- Proyecto libre: seleccionado y diseñado por los alumnos bajo la supervisión y aprobación del profesor.

Finalmente, podemos clasificar los proyectos según el apoyo que reciben los alumnos del profesor:

- Proyecto dirigido: el profesor guía a los alumnos paso a paso. Este tipo de proyecto es recomendable cuando se utiliza este método de aprendizaje por primera vez.
- Proyecto semi-dirigido: el profesor interviene solo en momentos clave para guiar a los alumnos.
- Proyecto autónomo: los alumnos tienen casi todo el control del proceso y el profesor solo supervisa su trabajo.

Es crucial elegir correctamente el tipo de proyecto a plantear a los alumnos. El éxito de este método de aprendizaje depende en gran medida de la planificación previa realizada por el docente, quien debe considerar las características específicas de la clase donde se implementará.

Al plantear un aprendizaje basado en proyectos, el docente debe seguir una serie de pasos para asegurar su éxito. Es fundamental considerar tres aspectos:

- Los objetivos que los estudiantes alcanzarán a través del desarrollo del proyecto.
- Los conocimientos que adquirirán al crear el proyecto.
- Las temáticas que se abordarán con el proyecto.

Resulta fundamental elegir el momento adecuado para impartir conocimientos de una parte de la asignatura mediante la realización de un proyecto. La elaboración de un proyecto, debido a su complejidad, requiere tiempo, posiblemente más que otros tipos de metodologías. Por esta razón, suele utilizarse más en los últimos cursos académicos. Sin embargo, si desde el principio se entrena a los alumnos en la adquisición de conocimientos mediante la investigación propia y el trabajo en equipo, los proyectos pueden emplearse en cualquier momento, siempre que estén justificados por los objetivos y contenidos a desarrollar.

Es posible que en las primeras aplicaciones del aprendizaje basado en proyectos no se obtengan los resultados esperados. Esto es normal, y tanto alumnos como docentes pueden obtener información valiosa de estas experiencias para resolver posibles dificultades futuras.

Para evaluar el proyecto que han realizado los alumnos, hay que tener en cuenta dos aspectos, la evaluación del proceso y la evaluación del producto.

La evaluación del proceso se lleva a cabo en las reuniones de trabajo en equipo, las sesiones de tutoría y las sesiones presenciales. Para ello, es necesaria la colaboración de los alumnos, pidiéndoles que el coordinador elabore informes periódicos sobre el rendimiento del grupo, la eficacia de las reuniones y los aprendizajes logrados. De manera similar, el docente puede registrar los avances, los conocimientos adquiridos y el enfoque dado al problema durante las sesiones presenciales y de tutoría.

Es esencial especificar detalladamente las variables que se van a evaluar y asegurarse de que los alumnos las conozcan. De esta manera, se evitará evaluar aspectos que no estén dirigidos al logro de los objetivos y al desarrollo de competencias.

Se deben redactar actas de las reuniones del grupo en las que se especifiquen los objetivos, los logros alcanzados, la distribución de tareas, las tareas pendientes y la eficacia de la reunión para el avance del proyecto. Al finalizar el proyecto, todos los alumnos entregarán un informe que especifique los siguientes aspectos:

- Defensa del proyecto: justificación, viabilidad y pertinencia.
- Aprendizajes logrados: detallar los conocimientos adquiridos.
- Autoevaluación en cuanto a las competencias desarrolladas:
    - Análisis y síntesis.
    - Transferencia de conocimientos y procedimientos a otros contextos.
    - Pensamiento crítico.
    - Investigación y manejo de diversas fuentes de información.
    - Expresión oral y escrita.
    - Trabajo en equipo.
    - Responsabilidad individual y grupal.
    - Planificación y organización.
    - Toma de decisiones.

Por otro lado, la evaluación del producto es, en este caso, la de las entregas. Durante la elaboración del proyecto, los alumnos realizan diversas actividades que deben ser evaluadas, al igual que el proyecto en su conjunto. El docente puede utilizar los criterios que considere más efectivos para valorar la calidad de los productos. Es recomendable que los alumnos también conozcan estos criterios para orientar su aprendizaje. Los criterios de evaluación deben ser claros y coherentes con los objetivos previstos.

En la evaluación de proyectos, así como en otras metodologías similares, se utilizan las rúbricas. Una rúbrica es una herramienta de puntuación que evalúa la calidad de un producto (proyecto, tarea, etc.) basándose en criterios establecidos, los cuales son iguales para todos los estudiantes. Estos criterios se presentan en distintos niveles y se completan según las características del producto evaluado.

Con este recurso, es posible corregir todo tipo de trabajos y proyectos siguiendo criterios establecidos y reflexionados previamente. Aunque crear una rúbrica puede requerir inicialmente mucho tiempo y dedicación, su uso es muy beneficioso debido al ahorro de tiempo y la facilidad de evaluar a los estudiantes a la hora de realizar las exposiciones y los ejercicios.

Además, este proceso deberá ser realizarse también por el resto de compañeros de clase, en un ejercicio de evaluación entre iguales, el profesor tendrá en cuenta esta coevaluación para la evaluación global del proyecto, dando cierto peso a las observaciones realizadas por sus compañeros.

6.2.1. Propuesta de actividad de investigación sobre la resolución de ecuaciones de grado superior a dos y el problema de aislar soluciones

Una vez introducida esta técnica vamos a ver cómo la desarrollaríamos y llevaríamos a cabo dentro de nuestra clase.

Proponemos la realización de esta actividad en 2º de Bachillerato. Puede, inicialmente, sorprender esta propuesta en un curso en el que parece existir sólo la EBAU. La relevancia que ha adquirido esta prueba en los últimos tiempos hace palidecer los objetivos formativos reales, que no han desaparecido de la legislación referida a este nivel educativo, de nuestra asignatura en Bachillerato. Creemos que atender a la formación completa de los alumnos de 2º de Bachillerato redundará en su rendimiento a todos los niveles, EBAU incluida, por encima de la preparación específica de una prueba, por otra parte, cada día más desnaturalizada por la artificial competencia entre comunidades autónomas por ver quién pone el examen más sencillo.

Una situación ideal para la aplicación de esta técnica con estos contenidos concretos sería una clase del Bachillerato de Investigación/Excelencia, clases que suelen tener un menor número de alumno que, a priori, manifiestan un mayor interés en cuanto a la investigación y el descubrimiento científico.

Dividiremos a nuestra clase en grupos de tres a cinco alumnos y les iremos sugiriendo las líneas de investigación que figuran en la ficha adjunta a continuación. Al final, les proporcionaremos información sobre los tres métodos expuestos para aislar raíces: el criterio de los signos de Descartes, el teorema de Sturm y el teorema de Budan-Fourier. En función de la marcha de cada grupo se le puede asignar el estudio de un método más o menos sencillo. Cuando consideremos que han avanzado suficientemente en su trabajo les podemos proponer la resolución de problemas como los enunciados en el capítulo 5. de este trabajo. Opcionalmente se puede plantear una exposición pública del trabajo realizado por cada grupo al resto de sus compañeros, para su debate, como culminación de los proyectos de investigación. Para valorar correctamente este proyecto podemos utilizar una rúbrica como la que se muestra al final.

Aventuramos la siguiente guía-propuesta de trabajo de investigación para los alumnos:

PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN: Sabéis la forma de resolver ecuaciones de segundo grado. Queremos investigar sobre formas de resolver ecuaciones de grado superior (tres, cuatro, cinco…).

LÍNEAS DE TRABAJO: Las siguientes ideas-preguntas no están pensadas para entregarlas como guion de trabajo a los estudiantes, sino que se irán seleccionando y lanzando a los alumnos por el profesor en la medida que éste lo considere oportuno para orientar el trabajo de los estudiantes. Naturalmente, dada la naturaleza de un auténtico proyecto de investigación, pueden estas formulaciones apriorísticas no ser las más adecuadas al desarrollo real del proyecto cuando sea abordado por los alumnos y existen muchas otras que podrían plantearse de forma más oportuna en función del progreso por su parte.

- ¿Cuáles son las primeras noticias que se conservan sobre la resolución de ecuaciones polinómicas?
- ¿Cuándo se describe por primera vez el procedimiento para la resolución de ecuaciones cuadráticas?
- A partir de dicha formulación, ¿cómo prosigue la investigación de la resolución de ecuaciones polinómicas a lo largo de la historia?
- ¿Conocéis cómo resolver ecuaciones de grado superior a dos? Explicad dichos métodos.
- ¿Sirve alguno de los procedimientos que habéis descrito para resolver la ecuación $x^3-2x+7=0$? Buscad una solución de dicha ecuación.
- ¿Podéis encontrar un método general para resolver ecuaciones de tercer grado?
- ¿Y la ecuación $x^5-2x+3=0$?
- ¿Podéis encontrar alguna solución de dicha ecuación? Podéis usar métodos computacionales para hallarla.
- ¿Qué teorema de los estudiados este curso te permitiría saber, al menos, si esas ecuaciones tienen solución?
- ¿Cómo calculan los ordenadores las soluciones reales que habéis encontrado?
- ¿Qué es el cálculo numérico?

- ¿Cómo podemos aproximar una raíz de un polinomio si no tenemos ni idea de su localización?
- ¿Qué significa aislar una raíz de un polinomio?
- ¿Existe algún resultado que nos permita conocer el número de raíces positivas de un polinomio?
- ¿Podéis encontrar algún resultado que nos permita conocer el número de raíces de un polinomio en un intervalo dado? (Aquí se pueden sugerir alguno o varios de los tres métodos a los que nos estamos refiriendo).
- ¿Podéis poner ejemplos de alguno de dichos resultados?
- ¿Por qué se usan unos u otros métodos? ¿Son siempre preferibles los métodos más precisos? ¿Qué es el coste computacional?

…

LECTURAS RECOMENDADAS: Existen numerosas lecturas cuya propuesta puede orientar a los alumnos en su trabajo o resultar sugerente como las biografías publicadas por Nivola de Cardano y Tartaglia (Casalderrey, 2000) o de Galois (Corbalán, 2000). Más literario y provocador es el texto del estudiante Törless (Musil, 2023) sobre las soluciones complejas de las ecuaciones, que aún fuera del alcance del campo de nuestro estudio, no podemos dejar de invitar a la lectura a nuestros alumnos por su carácter inspirador.

La lectura de estos y otros textos, por si misma, ya sería un hito interesante en la formación de los estudiantes.

A continuación, mostramos la tabla que se entregará a los alumnos para evaluar cómo han trabajado en grupo, que será muy similar a la adjuntada en la técnica Puzle:

¿Quiénes son tus compañeros de grupo?

	Sí	No
¿El ambiente de trabajo en grupo ha sido positivo?		
¿Consideras que el ritmo de trabajo ha sido el correcto para completar los ejercicios?		
¿Habéis sabido resolver todos los tipos de ejercicios?		
¿Tus compañeros han aceptado tu colaboración?		
¿Han colaborado todos tus compañeros contigo?		
¿Han respetado tus compañeros los momentos de intervención de cada uno?		
¿Consideras que tus aportaciones se han tenido en cuenta?		
¿Consideras las aportaciones de tus compañeros como buenas para el desarrollo del trabajo en grupo?		
¿El trabajo en grupo te ha servido para resolver dudas?		
¿Habéis compartido las soluciones, comprobando si son correctas?		

Tabla 6.3. Encuesta para valorar el trabajo en grupo.

Rúbrica de Evaluación				
TRABAJO: “Aislar raíces de polinomios”				
	0 puntos	1 puntos	2 puntos	3 puntos
Proceso comunicativo	No miran a la gente, leen todo lo que está escrito en la diapositiva	Miran a la gente y tratan de no leer las diapositivas		
Resolución de los ejercicios.	No han sido capaces de resolver ninguno de los ejercicios planteados.	Solo han sido capaces de resolver los ejercicios aplicando un método.	Han sido capaces de resolver los ejercicios aplicando dos de los métodos propuestos.	Han sido capaces de resolver los ejercicios aplicando los tres métodos.
Tiempo de exposición	No se ajustan al tiempo establecido	Se ajustan al tiempo establecido		
Explicación correcta de los métodos.	No comprenden ni explican correctamente ningún método.	Comprenden y explican correctamente un método.	Comprenden y explican correctamente dos métodos.	Comprenden y explican correctamente tres métodos.
Trabajo en equipo.	No han sido capaces de trabajar en equipo.	Han trabajado en equipo de manera adecuada.		
Contestación preguntas	Contestan erróneamente o divagando a una pregunta	Contestan de manera adecuada a la pregunta realizada		

Tabla 6.2. Rúbrica ABP.

6.3. LECCIÓN MAGISTRAL

Primero, definamos qué es una lección magistral. Esta metodología consiste en que el docente presenta los contenidos de una materia o tema de manera oral a un grupo de estudiantes, quienes deben escuchar activamente y tomar notas.

Podemos referirnos también al método didáctico expositivo, el cual se da cuando la lección magistral ocupa la mayor parte del tiempo de clase y se convierte en la principal forma de enseñanza del contenido en cuestión.

La Escuela Tradicional apoya el método expositivo o lección magistral, en el cual el profesor lleva la mayor responsabilidad, ya que es quien domina el contenido de la materia. En este enfoque, el conocimiento del maestro es indiscutible y no tiene competidores en el ámbito escolar. El maestro es la figura que posee el conocimiento, mientras que los estudiantes deben memorizar y aprender lo que se les enseña, sin oportunidad de contradecir o debatir. La desobediencia se castiga y la disciplina se recompensa. Esta rigurosa visión de la lección magistral ha desembocado en su desprestigio. Pero creemos que no refleja la realidad de la lección magistral en nuestras aulas es estos tiempos. La metodología expositiva no está reñida con la participación activa del alumno al que, como detallaremos más adelante, se interroga e invita a participar en la construcción del discurso que el docente desea mostrar. Resulta difícil imaginar a muchos alumnos descubriendo por su cuenta el cálculo diferencial, el trabajo del docente es esencial en la construcción de este conocimiento en el que debe ser guía.

Como hemos mencionado, el método expositivo consiste en que el docente presenta un tema o lección, y los estudiantes toman notas para su posterior estudio. Este es un método muy utilizado que busca proporcionar información de manera ordenada y proveniente de diversas fuentes. Su objetivo es ofrecer nuevos conocimientos, actitudes y valores a los que el alumno no tendría fácil acceso por sí mismo.

El docente tiene la tarea de seleccionar, sintetizar y organizar los contenidos para transmitirlos de forma que los estudiantes puedan recibir y comprender la información. Por lo tanto, la función del profesor es fundamental en este método, y su trabajo se convierte en el centro de la materia. Esto requiere que el maestro sea capaz de crear un contenido crítico y actualizado, permitiendo a los estudiantes identificar los contenidos de estudio y entender los requisitos para ser evaluados.

Los estudiantes pueden intervenir durante la lección magistral con comentarios o preguntas, normalmente se limitan a escuchar y tomar notas de la información proporcionada por el docente. Este deberá ser dinamizador de esta actividad para que el alumno tenga un papel más dinámico e implicarle en la comprensión activa de la materia.

Sin embargo, los alumnos deben utilizar diversas estrategias para comprender e interiorizar esos contenidos sin depender del profesor.

Algunos errores comunes en la lección magistral incluyen la falta de intención crítica por parte del profesor y la enseñanza de un método de aprendizaje independiente del docente. Esto puede resultar en lecciones donde los estudiantes simplemente toman notas para memorizar sin entender o interiorizar previamente la información.

Otra crítica a este sistema es que el docente no siempre puede conocer el progreso del alumno ni si realmente está adquiriendo los conocimientos necesarios hasta que se realiza un examen, que es la única prueba que permite al docente evaluar si se han alcanzado los objetivos. Crítica que puede ser refutada si el docente procura intercalar en su discurso preguntas a los estudiantes que le permitan conocer en avance de los mismos en la comprensión y conocimiento de la materia objeto de estudio.

La lección magistral puede tener ventajas si se lleva a cabo adecuadamente. Por ejemplo, permite la síntesis de contenidos que los alumnos podrían no ser capaces de asumir por sí mismos debido a la gran cantidad de fuentes disponibles. Además, puede ser útil para una primera introducción a la materia, donde el docente, a través de la organización y selección del contenido, puede motivar a los estudiantes a comprender y explorar un tema.

Por todo ello, no debemos descartar este método sin un análisis previo, ya que existe una tendencia a generalizarlo como perteneciente a la Escuela Tradicional y, por ende, inapropiado para el sistema educativo actual. Puede ser eficaz en ciertos casos y puede combinarse con otros métodos, enriqueciendo así la enseñanza en el aula.

Así, algunas de las ventajas que presenta la lección magistral son (Gómez López, 2002):

- Establecer una primera toma de contacto con el tema de manera sintetizada y global.
- Acercar al alumnado a ciertas temáticas complejas con un lenguaje más accesible y adecuado.
- Resolver dudas que puedan surgir durante la explicación y que serían difíciles de resolver de manera individual.
- Sintetizar, pero también ampliar, aquellas cuestiones donde la información es escasa o de difícil acceso para el alumnado.
- Motivar a los estudiantes a través de un discurso interesante y entusiasta por parte del profesor sobre ciertos temas.
- Proporcionar una base previa a la lectura de la temática, haciendo que esta resulte más sencilla para el alumnado posteriormente.

Sin embargo, es importante recordar que este método también puede tener desventajas y debemos considerar ciertos inconvenientes que pueden surgir al aplicarlo (Gómez López, 2002):

- Si el profesor no realiza una elaboración previa y personal de los contenidos seleccionados y no adopta una actitud crítica consultando diversas fuentes, la lección puede limitarse simplemente a la lectura de textos que ya están accesibles para el alumnado.
- Si no se fomenta el espíritu crítico y la motivación intrínseca de los estudiantes, es probable que no consulten otras fuentes y solo estudien lo que han anotado en clase.
- La transmisión de una gran cantidad de información sin tiempo suficiente para reflexionar sobre ella puede frustrar a los estudiantes, ya que no son capaces de asimilar tanto contenido y se pierden en el proceso.
- Es posible que los estudiantes no participen activamente en su aprendizaje y adopten una actitud pasiva frente a la educación y durante su estancia en el aula.
- Es necesario trabajar en la atención sostenida de los estudiantes ya que, si la lección magistral es muy densa, se dificulta la recepción de toda la información debido a posibles distracciones. A veces, sería útil hacer pausas o interactuar con los estudiantes, respondiendo sus dudas y formulándoles preguntas para que el docente pueda verificar si la clase mantiene la atención en la lección.
- El método expositivo puede llevar a los estudiantes a memorizar los apuntes tomados en clase sin realizar ningún tipo de reflexión sobre ellos.

Así, aunque actualmente este método es altamente criticado, hay algunos expertos, como Donal A. Bligh, que enumera en su libro *"What's the use of lectures?"* los criterios a tener en cuenta sobre las lecciones expositivas y cómo pueden tener éxito en el sistema educativo actual:

Bligh sostiene que las lecturas o clases magistrales deben considerarse una forma de enseñar información en lugar de fomentar el pensamiento crítico, cambiar actitudes o desarrollar habilidades conductuales. Para lograr una lección magistral de calidad, donde la información sea relevante y significativa para los estudiantes, Bligh propone los siguientes ocho principios:

- Hacer que la conferencia sea significativa para los estudiantes. Las conferencias son más comprensibles cuando se conectan con las realidades cotidianas de los estudiantes.
- Utilizar el "aprendizaje completo" para enseñar comprensión y el "aprendizaje parcial" para enseñar información. Bligh ejemplifica esto en su clase sobre la sociedad estadounidense y la cultura popular, comenzando cada conferencia pidiendo a los estudiantes que piensen sociológicamente sobre el tema y que identifiquen preguntas importantes de investigación sociológica ("aprendizaje integral"). Luego, pasa a "aprendizaje parcial" al enseñar los resultados específicos de la investigación en áreas particulares.

- Organizar el tema. Los resúmenes, descripciones generales y conceptos proporcionan una narrativa para cada conferencia. El plan de estudios y la estructura de exámenes, trabajos y asignaciones proporcionan una narrativa similar para todo el semestre, ayudando a los estudiantes a conectar los componentes específicos del curso en un todo comprensible.

- Utilizar la nueva información rápidamente. Cuestionarios, trabajos breves, debates y asignaciones brindan a los estudiantes la oportunidad de poner en práctica nuevos conocimientos, mejorando su retención.

- Utilizar la repetición en la exposición. Indicar los puntos clave al principio y al final. Repetir frecuentemente las definiciones de conceptos y conclusiones importantes.

- Proporcionar comentarios sobre el aprendizaje con frecuencia. Los estudiantes aprenden mejor cuando saben cómo evaluar su propio progreso, por lo que es importante evaluar el conocimiento desde el principio.

- Mantener alerta a los estudiantes. (Una mala postura indica poca atención de los estudiantes). Mezclar estimulación visual y auditiva aporta novedad a cada conferencia. Interrumpir la charla con "cambios" que energicen la capacidad de atención de los estudiantes.

- Conectar nuevos conceptos a conferencias anteriores. Aprovechar los conocimientos previos para enseñar nueva información refuerza los conceptos anteriores y facilita el aprendizaje de nueva información.

Así, como hemos podido ver, presenta una gran cantidad de ventajas. Además, como persona que ha cursado todas las etapas del sistema educativo español, únicamente he podido apreciar realmente el uso de clases magistrales sin intervención del alumnado en la Universidad. Así, durante el instituto, este tipo de lecciones como tal no existen, o al menos yo no las he podido apreciar. Normalmente, el profesor es el que lleva el ritmo de la clase, pero con una amplia intervención del alumnado, siendo apelado por el profesor a la hora de resolver ejercicios o de hacerle preguntas que le adelanten a la explicación. Por lo tanto, el modelo propuesto inicialmente, en el que el alumno no interviene y el profesor es una figura autoritaria, ha quedado desfasado y ahora el profesor se trata únicamente de una figura similar a un director de orquesta, que va organizando a la clase para que todo el mundo participe, a la vez que imparte los conocimientos que solo él domina.

6.3.1. Propuesta de lección magistral sobre la resolución de ecuaciones de grado superior a dos y el problema de aislar soluciones.

Vamos a suponer un contexto de una clase de cualquiera de los cursos de Bachillerato, idealmente, como hemos comentado en el apartado anterior del Bachillerato de Investigación/Excelencia. Para esta técnica, al contrario que para el resto de las comentadas previamente, no importa tanto el tamaño de la clase, ya que puede realizarse tanto con pocos alumnos como con muchos, pero vamos a suponer una clase de unos 15 alumnos.

Al tratarse de un curso avanzado, las Matemáticas deben situarse en conceptos puramente matemáticos o científicos tecnológicos. Por ello, comenzaremos definiendo el problema al que nos enfrentamos, comentando con el alumnado que todos los problemas de obtención de raíces de polinomios a los que se han enfrentado a lo largo de su etapa escolar están "preparados", es decir, que están hechos para que sus raíces sean enteras. Podemos comenzar proponiéndoles un polinomio que no presente raíces enteras, y que traten de hallarlas. Comprobarán que esto es un proceso muy laborioso y prácticamente imposible de resolver con los métodos conocidos hasta el momento, lo que dará pie a introducir lo que queremos explicar.

Seguidamente, vamos a explicar lo que trataremos de realizar con este tipo de polinomios. Como hemos dicho, hallar la raíz exacta es complicado, por lo tanto, lo que haremos con los alumnos será tratar de aislar las raíces, es decir, encontrar los intervalos en los que se pueden encontrar las raíces de nuestros polinomios. Para ello explicaremos adecuadamente el concepto y comenzaremos con los métodos propuestos en este trabajo.

Por ello, vamos a comenzar explicando el método más sencillo con el que vamos a trabajar, la regla de los signos de Descartes. Habrá que iniciar la explicación comentando lo que son las variaciones de signo. Para ello nos apoyaremos en ejemplos de series de números. Al ser un concepto relativamente sencillo, el profesor puede realizar algún ejemplo, como puede ser:

- ➔ (1,-2,7,0,0,0,0,2,3,-1,0,0,3), donde hay cuatro variaciones de signo.

Y proponer a los alumnos otro par de series de números para que digan las variaciones de signo que presentan:

- ➔ (-3,-4,0,1,0,2,0), donde hay una variación de signo.
- ➔ (1,0,-3,2,0,-5), donde hay tres variaciones de signo.

Una vez realizada esta explicación inicial, que se utiliza en los tres métodos que se van a explicar, podemos pasar a la explicación del método de Descartes para hallar las raíces. Trabajaremos con series polinomios, mismamente el ejemplo que hemos puesto para abrir la explicación y hacer ver a los alumnos la dificultad de hallar raíces, haciéndoles ver que, con un método tan sencillo como la regla de los signos, se nos permite estimar de manera bastante aproximada el número de las mismas. Así, estos polinomios pueden ser, por ejemplo:

- ➔ $p(x)=x^3-2x^2+5$
- ➔ $q(x)=x^4-3x^2+7x-2$

A partir de los cuales podemos solicitar al alumnado que nos den las series de los coeficientes de los polinomios y nos digan las variaciones de signo que presentan. Una vez realizado esto y habiendo explicado el método, propondremos que nos digan el número de raíces reales, tanto positivas como negativas, que pueden tener.

A continuación, pasaríamos a explicar el teorema de Budan-Fourier, que es el siguiente más sencillo. Recordemos que en 1º de Bachillerato se ve por primera vez el concepto de derivada, por lo que los alumnos deberían de tenerlo reciente y nos servirá la práctica de este método para repasarlo y afianzarlo. Inicialmente explicaremos como construimos las series que se utilizan en este método. Propondremos inicialmente una serie de polinomios y que los alumnos nos realicen todas las derivadas posibles, pudiendo incluso utilizar los mismos que se han utilizado para ejemplificar o explicar la regla de los signos de Descartes, dando así la posibilidad de comparar al final ambos métodos.

Una vez realizadas las derivaciones podemos comenzar con la explicación del método, asegurándonos de que se comprenda de manera adecuada. Seguidamente propondremos dos polinomios para la aplicación del método, dejando que los alumnos prueben con diferentes intervalos, tratando de hallar uno en el que encuentren raíces. Una posibilidad es ofrecerles los mismos polinomios en todos los métodos, ya que pueden ver cuál es el método más adecuado en cuanto a la relación de tiempo gastado en realizarlo y el resultado obtenido.

Para cerrar la explicación teórica, pasaríamos al método de Sturm. Para ello trabajaría con el polinomio $q(x) = x^4 - 3x^2 + 7x - 2$, que es el segundo propuesto a la hora de explicar el método de Descartes. Este es el método laborioso, por lo que, a la hora de llevar a cabo su implementación en clase, es recomendable que los polinomios sean de un grado bajo o que la construcción del sistema de Sturm venga dada por el profesor, lo que elude la principal complicación de este método. Por tanto, comenzaríamos explicando que es un sistema de Sturm y como se construye en base al algoritmo de Euclides, que también requerirá ser explicado. Una vez construido el sistema de Sturm de este polinomio y los alumnos hayan comprendido perfectamente su explicación, pasaremos a la aplicación del método, pudiendo utilizar los mismos valores de intervalos utilizados en el método de Budan-Fourier y valorando si se obtienen los mismos resultados utilizando ambos métodos. Una vez concluida la explicación, los estudiantes aplicarán el método autónomamente al primer polinomio propuesto en la regla de signos de Descartes. Tras estas explicaciones, podemos representar los polinomios utilizados en las mismas utilizando algún programa informático, como puede ser GeoGebra, para que los alumnos visualicen que, en efecto, estos métodos funcionan.

Para cerrar propondremos una serie de ejercicios de entre los que se encuentran en el apartado 5, que los alumnos pueden ir resolviendo de forma individual o grupal e irán saliendo a la pizarra a resolverlos, explicarlos y comentarlos con la clase. Esto será de utilidad para el profesor para comprobar si lograron entender los conceptos explicados.

Así, aunque sea trabajo autónomo, el profesor estará siempre a disposición de los alumnos para la resolución de dudas y aportará distintos itinerarios en los problemas propuestos que abarquen las diferentes velocidades de adquisición de conocimientos de los alumnos.

Para evaluar el éxito de la explicación, el profesor se basará en la observación del alumnado y en la adecuación de los resultados obtenidos a la hora de la resolución de los problemas propuestos.

7. CONCLUSIONES

Este trabajo comienza, en su capítulo dos, con la presentación y demostración de tres resultados clásicos sobre el problema de "aislar las raíces" de una ecuación polinómica: la regla de los signos de Descartes, el teorema de Budan-Fourier y el teorema de Sturm.

En el tercer capítulo, creemos haber demostrado, a través del desarrollo de varios ejemplos de la implementación de estos métodos, que las técnicas que estos conllevan son herramientas que deben ser habituales en el bagaje matemático de los alumnos de Bachillerato.

Y, en el sexto capítulo, mediante la propuesta de tres metodologías didácticas para su enseñanza en Bachillerato, creemos, también, que hemos acreditado que son tópicos cuya inclusión en el currículo sería factible.

Además de factible, pensamos que ampliaría de forma interesante la formación de nuestros alumnos como hemos justificado en el último apartado del capítulo cuatro de este trabajo.

En ese capítulo hemos analizado las referencias en nuestro currículo actual a la resolución de ecuaciones polinómicas. Creemos que la fuerza de la tradición en la enseñanza de nuestra asignatura conlleva la omisión de una rama tan importante de las Matemáticas a lo largo de la historia, pero en especial en los últimos 80 años, como es el Análisis Numérico. En realidad, jamás se hace alusión a lo que no se puede resolver por los métodos que tradicionalmente se estudian a lo largo de la enseñanza secundaria, obligatoria y postobligatoria. Ni al coste real que conlleva implementar alguno de los métodos que enseñamos, como por ejemplo en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

La inclusión de los contenidos abordados en este trabajo, que se esboza en el segundo apartado del capítulo cuatro, abriría una puerta interesante a la modernización del currículo y la oportunidad de mostrar pequeño atisbo de esta parte de nuestra ciencia. Y todo ello con un coste no elevado de horas lectivas ni de esfuerzo conceptual.

Sirve también este trabajo como reivindicación del olvidado, en nuestro currículo, algoritmo de Euclides de cálculo del M.C.D.

Todo ello alejado de cualquier crítica destructiva y sin más pretensión que la realización de un ejercicio intelectual de estudio, análisis y elaboración del currículo de nuestra asignatura.

No puedo sino concluir con mi agradecimiento a los directores de este trabajo que me guiaron en este interesante recorrido.

8. BIBLIOGRAFÍA

Akritas, A. G. (1982). Reflections on a pair of theorems by Budan and Fourier. *Mathematics Magazine, 55(5),* 292-298.

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A., & Laurentiev, M. (1985). *La matemática: su contenido, métodos y significado (Vol. 1).* Madrid: Alianza editorial.

Aronson, E. (1978). *The Jigeaw Classroom.* Beverly Hills, California: Sage Publications.

Barbeau, E. J. (2003). *Polynomials.* Springer Science & Business Media.

Berné, M. (24 de 5 de 2024). *Scrum Manager*. Obtenido de Técnica Jigsaw y su potencial como práctica ágil: https://www.scrummanager.com/blog/2023/04/tecnica-jigsaw/

Bligh, D. A. (2000). *What's the use of lectures?: First U.S. Edition of the Classic Work on Lecturing.* John Wiley & Sons.

Casalderrey, F. M. (2000). *Cardano y Tartaglia: Las matemáticas en el renacimiento Italiano.* Nivola.

Consejería de Educación, Junta de Castilla y León. (2022). DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. Valladolid: BOCYL.

Consejería de Educación, Junta de Castilla y León. (2022). DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. Valladolid: BOCYL.

Corbalán, F. (2000). *Galois: revolución y matemáticas.* Nivola.

Dewey, J. (2000). My pedagogic creed (1897). *Philosophical documents in education, 2,* 92-100.

García, R. T. (2001). *Aprendizaje cooperativo. Fundamentos, características y técnicas.* Madrid: CCS.

Johnson, D. W. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula (Vol. 4).* . Buenos Aires: Paidós.

Kurosch, A. G. (1977). *Curso de Algebra Superior.* Moscú: Editorial Mir.

Labatut, B. (2023). *Maniac.* Barcelona: Anagrama.

Laboratori de Càlcul Numèric (LaCàN). Departament de Matemàtica Aplicada III. Universitat Politècnica de Catalunya (Spain). (14 de 05 de 2024). *http://www-lacan.upc.es*. Obtenido de https://portal.camins.upc.edu/materials_guia/250133/2012/SistemasLineales.pdf

López, R. G. (2002). Análisis de los métodos didácticos en la enseñanza. *Publicaciones, 32*, 261-334.

Musil, R. (2023). *Las tribulaciones del estudiante Törless.* Barcelona: Austral.

Pancorbo Palenzuela, L., & Ruiz Bueno, G. (2023). *Matemáticas 4B.* Vicens Vives.

Prieto, L. (2007). *El aprendizaje cooperativo.* Madrid: PPC.

Slavin, R. E. (1983). *Cooperative learning.* Nueva York: Longman Publishers.

Vermunt, J. D. (2006). *Vermunt, J. D. (2006).Balancing support for student learning. Handling complexity in learning environments: Theory and research.* Oxford: Elsevier.

Wang, X. (2004). A Simple Proof of Descartes's Rule of Signs. *The American Mathematical Monthly, 111:6*, 525-526.

Yañez, G. (1983). El teorema de Sturm. *Integración, temas de matemáticas, 2(1)*, 59-67.