Universidad de Valladolid

Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Especialidad: Matemáticas

**TRABAJO DE FIN DE MÁSTER**
Curso 2023/2024

# PROPUESTA STEM PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN ESO MEDIANTE EL RAZONAMIENTO Y LA DEMOSTRACIÓN

Autor: Manuel Aragón Ruiz
Tutor: Matías Arce Sánchez

**RESUMEN**

Las matemáticas forman parte de la cultura que transmite el sistema educativo y son una parte esencial de la formación básica de todos los ciudadanos que es necesario aplicar en la vida cotidiana. La etapa de Educación Secundaria Obligatoria es fundamental para el desarrollo del estudiante, pues en ella el alumno debe comprender los conceptos básicos de manera significativa y adquirir habilidades esenciales en esta área como el razonamiento lógico y la resolución de problemas. El profesor tiene que promover este desarrollo a través de las tareas escolares, que deben responder a las expectativas de aprendizaje de los contenidos previstos. En este trabajo se presenta una propuesta didáctica que consiste en el diseño de una situación de aprendizaje para la enseñanza y aprendizaje de las relaciones de proporcionalidad mediante el razonamiento y la demostración para 2º curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria.



**Palabras clave:** Razonamiento proporcional, demostración, enseñanza secundaria, aprendizaje de las matemáticas, relaciones de proporcionalidad (razones y proporciones).



**ABSTRACT**

Mathematics is a part of the culture transmitted by the education system and is an essential part of the basic training of all citizens that needs to be applied in everyday life. The stage of Mandatory Secondary Education is essential for the student's development, as it is here that the student must understand basic concepts in a significant way and acquire essential skills in this area such as logical reasoning and problem solving. The teacher has to promote this development through school tasks, which must respond to the learning expectations of the contents foreseen. This paper presents a didactic proposal consisting of the design of a learning situation for the teaching and learning of proportionality relations through reasoning and proof for the 2nd year of Mandatory Secondary Education.



**Keywords:** Proportional reasoning, proof, secondary education, learning mathematics, proportional relationships (ratios and proportions).

# INDICE

# 1. INTRODUCCIÓN

La Educación Secundaria es fundamental para el desarrollo del estudiante. En esta etapa educativa, el alumno adquiere habilidades y conocimientos imprescindibles para su formación como persona y como ciudadano y para su futura formación académica y profesional. Sin embargo, en algunos casos, ciertas materias se convierten en obstáculos para lograrlo, generando un rechazo que se traduce en un bajo rendimiento académico y, contribuyendo al fracaso escolar. Por ello, es necesario replantearse la enseñanza para lograr acercar los conocimientos a los alumnos de una forma motivadora y atractiva que les resulte cercana, favoreciendo el desarrollo de habilidades que posibiliten un aprendizaje autónomo (Amezcua y Amezcua, 2018).

En la actualidad, el docente ha dejado de ser un mero transmisor de conocimientos para ser un guía que fomente un aprendizaje significativo, imprescindible al afrontar materias del ámbito científico-tecnológico (Serrano y Pons, 2008). El aprendizaje, según Serrano (2008), es un proceso activo en el cual cumplen un papel fundamental la atención, la memoria, la imaginación y el razonamiento que el alumno realiza para elaborar y asimilar los conocimientos que va construyendo y que debe incorporar en su mente en estructuras definidas y coordinadas.

El profesor tiene que promover el aprendizaje en el alumnado de Secundaria a través de las tareas escolares, que deben responder a las expectativas de aprendizaje de los contenidos previstos. Existen muchas estrategias y recursos para la enseñanza de las Matemáticas (ejercicios y problemas, simulaciones interactivas, juegos educativos, videos educativos, etc.) que pueden ser efectivos para ayudar a los estudiantes a comprender los conceptos básicos de manera significativa y desarrollar habilidades esenciales en esta área como el razonamiento lógico y la resolución de problemas. Además, el docente también debe estimular la curiosidad y la creatividad de cara a la resolución de desafíos y problemas en el futuro. El diseño y la secuenciación de las actividades, así como los recursos y materiales seleccionados, deben atender a la diversidad del aula (Cepa, Heras y Fernández-Hawrylah, 2017).

Las matemáticas forman parte de la cultura que transmite el sistema educativo y son parte esencial de la formación básica de todos los ciudadanos que es necesario aplicar en la vida cotidiana. La educación matemática abarca desde las primeras nociones sobre el número, el razonamiento y la prueba hasta la profundización en estudios superiores.

El conocimiento matemático es un proceso intencional en el que se aprenden conceptos y procedimientos que se podrán representar y aplicar.

En el presente trabajo se ha diseñado una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en 2.º curso de ESO utilizando un enfoque educativo basado en el razonamiento y la demostración que fomenta en los estudiantes la comprensión de los conceptos y la capacidad de resolver problemas, así como el desarrollo de habilidades para justificar y demostrar afirmaciones matemáticas y la capacidad de aplicar los conocimientos matemáticos en situaciones reales.

La elección del tema de la proporcionalidad se debe a varias razones:

- En primer lugar, se debe a una motivación personal, ya que la proporcionalidad ha estado presente a lo largo de mis estudios durante todas las etapas educativas en diferentes materias y las relaciones de proporcionalidad se aplican y utilizan de forma habitual en muchos ámbitos de la vida cotidiana. Esto me ha llevado a reflexionar y querer profundizar sobre la importancia de su enseñanza y aprendizaje.

- Esta temática tiene una gran presencia y relevancia en los currículos de Educación Primaria y Secundaria, debido a su papel transversal respecto a otras disciplinas y a su relación con los contenidos curriculares de otras materias (Wilhelmi, 2017).

- La proporcionalidad presenta una gran versatilidad, ya que corresponde a contenidos del currículo de la asignatura Matemáticas en todos los cursos de la Educación Secundaria Obligatoria, por lo que las actividades que se proponen pueden ser realizadas en varios cursos, adaptando y adecuando el nivel y la profundización de los contenidos en algunas de ellas.

- Asimismo, se trabajan contenidos comunes a otros bloques de la materia de Matemáticas, como geometría, álgebra y funciones y aspectos generales como el uso e interpretación de tablas y gráficas.

- Es un tema con alto carácter interdisciplinar y un enorme campo de aplicación, ya que las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes están presentes en muchas otras disciplinas como Física, Química, Economía, Biología,… Esto propicia el diseño y la implementación de proyectos en torno a esta temática que se pueden trabajar desde diversas asignaturas. Por otro lado, tiene muchas aplicaciones en la vida cotidiana: medida y unidades, velocidad (relación espacio/tiempo), aceleración, frecuencia, multiplicación celular, multiplicación de las especies, relaciones causa-efecto en general, precios, descuentos, etc., lo que puede motivar al alumnado acercando las matemáticas al mundo que nos rodea.

- Los contenidos elegidos (razones, proporciones y proporcionalidad) constituyen un campo ampliamente investigado desde hace varias décadas y los resultados de las investigaciones recientes muestran que los conceptos implicados siguen siendo difíciles de aprender para una mayoría de estudiantes (Obando, *et al.*, 2014). Esto indica la necesidad de realizar nuevas investigaciones y propuestas didácticas para lograr mejorar el aprendizaje.

El curso elegido para el diseño de la propuesta didáctica ha sido 2.º de Educación Secundaria Obligatoria por dos motivos:

- En el currículo de Matemáticas del curso anterior (1º de ESO) se recogen contenidos sobre proporcionalidad, por lo que el alumnado ya dispone de conocimientos recientes sobre esta temática (además de los correspondientes a Educación Primaria) que facilitarán la implementación de la propuesta y la realización de las actividades con mejor aprovechamiento.
- Por otro lado, en 2º de ESO se imparte la materia de Física y Química, posibilitando la realización de una propuesta transversal realizando actividades en las dos asignaturas y dando a la propuesta didáctica un carácter interdisciplinar. Esto contribuye a una mayor contextualización en situaciones de la vida cotidiana.

En lo referente a la estructura de la memoria, se presentan los objetivos del trabajo y, a continuación, se recoge una revisión bibliográfica que se ha llevado a cabo sobre la enseñanza mediante el razonamiento y la demostración y sobre la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad y las relaciones de proporcionalidad. Seguidamente, se recoge una contextualización normativa y curricular y, por último. se describe la propuesta didáctica elaborada y una valoración sobre la misma.

# 2. OBJETIVOS

## 2.1 Objetivo general

El objetivo principal de este trabajo es la elaboración de un documento que recoja un análisis de los aspectos más importantes de la enseñanza y el aprendizaje basado en el razonamiento y la demostración, aplicado a la proporcionalidad y su ejecución en el aula. Para ello, se han establecido dos campos principales:

- Realizar un estudio sobre la enseñanza mediante el razonamiento y la demostración en Educación Secundaria, considerando lo que significa y lo que conlleva para el profesor y para los alumnos, aplicado al aprendizaje de la proporcionalidad en esta etapa educativa.

- Llevar a cabo la elaboración de una propuesta didáctica para implementar en el aula el enfoque didáctico descrito en el estudio previo.

## 2.2 Objetivos específicos

- Realizar una revisión bibliográfica acerca de la importancia del razonamiento y la demostración para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

- Analizar trabajos de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad.

- Diseñar una propuesta didáctica para la etapa de Educación Secundaria sobre esta temática aplicando los resultados de las investigaciones anteriores.

- Extraer conclusiones e información relevante a partir del estudio llevado y cabo y la propuesta didáctica elaborada.

# 3. MARCO TEÓRICO

## 3.1 Aprendizaje mediante el razonamiento y la demostración

El aprendizaje mediante el razonamiento y la demostración es una orientación pedagógica que se basa en el uso de la lógica y del pensamiento crítico para adquirir conocimientos y desarrollar habilidades (Fiallo, *et al.*, 2013). Esta metodología se utiliza en diversas disciplinas, como la matemática, la filosofía, la ciencia y la ingeniería, entre otras (Godino y Recio, 2001), y el presente trabajo está centrado en su aplicación a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El razonamiento y la demostración son una parte fundamental en el aprendizaje de las matemáticas y, en el aula, cumplen muchas funciones esenciales para la comprensión y aplicación en las distintas ramas que componen la asignatura: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento, comunicación, persuasión o convencimiento y construcción de teorías entre otras (Bieda, 2010). Algunas de estas funciones (Villiers, 2003) permiten adquirir habilidades y capacidades concretas como:

- Verificación: Comprobación de la validez de una afirmación.
- Explicación: Profundización en la justificación de la afirmación.
- Sistematización: Organización de resultados dentro del sistema de conceptos matemáticos (axiomas, teoremas, etc.).
- Descubrimiento: Comprensión de demostraciones y resultados de teoremas que permite el entendimiento de otros nuevos.
- Comunicación: Transmisión del conocimiento matemático adquirido.

Considerando el contexto actual, existen gran cantidad de estudios (Fiallo *et al.*, 2013) sobre la capacidad de los alumnos para entender y generar argumentos que prueben conceptos que les son explicados. Sin embargo, hay muy pocos trabajos sobre cómo enseñar y fomentar estas capacidades, especialmente en matemáticas, donde son tan necesarias. Por todo ello, en las últimas décadas, la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas han cobrado importancia en muchas investigaciones, debido al creciente cuestionamiento sobre la forma más adecuada de enseñar y aprender dicha disciplina ( Arce *et al.*, 2019; Bieda, 2010; Camargo y Gutiérrez, 2010; Fiallo *et al.*, 2013; Godino y Recio, 2001).

En la actualidad, el razonamiento y la demostración se consideran uno de los pilares que los estudiantes deben conocer y desarrollar a medida que progresan en el aprendizaje de las matemáticas (Fiallo *et al.*, 2013). Esto debe permitirles adquirir ideas y habilidades tales como:

- Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales en el estudio de las matemáticas.
- Formular e investigar conjeturas matemáticas.
- Desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones.
- Utilizar distintos tipos de razonamiento y formas de demostración.

Una de las líneas donde más se ha investigado es en las propuestas didácticas utilizadas por los profesores en el aula para la enseñanza de la demostración en matemáticas (Fiallo *et al.*, 2013). En este punto, se pretende generar propuestas alternativas para la enseñanza mediante la demostración, que deben tener en cuenta aspectos como:

- Tipos de tareas propuestas.
- Recursos a disposición de los estudiantes.
- Interacciones entre estudiantes y profesor.
- Clima de interacción social en el aula favorable para el aprendizaje.

Para fomentar el aprendizaje mediante la demostración, el profesor debe proponer tareas que conduzcan a los estudiantes a formular conjeturas y a la construcción de argumentos que finalmente puedan dar lugar a demostraciones formales (Godino y Recio, 2001). Algunos ejemplos de este tipo de tareas podrían ser problemas con soluciones abiertas que den lugar a conjeturas en relación con el enunciado o demostraciones incompletas o desordenadas, las cuales, al completar sus pasos, dan significado a teoremas u otros conceptos matemáticos y motivan la demostración matemática.

Estas tareas pueden complementarse con los recursos que los estudiantes tienen a su disposición, como herramientas informáticas que permitan representar funciones o figuras o programas que permitan la visualización directa de distintos temas o aspectos matemáticos, facilitando la comprensión y favoreciendo el entendimiento de la demostración de los mismos.

En cuanto a los tipos de interacciones entre profesores y alumnos, uno de los aspectos clave es que el profesor conduzca la clase procurando que los estudiantes participen en las explicaciones y razonamientos, de manera que los alumnos intervengan para aceptar o rechazar una afirmación que provenga del libro de texto, del profesor o de sus compañeros.

El último de los aspectos a tener en cuenta, que está estrechamente relacionado con el anterior, es la construcción de un clima favorable de interacción en el aula. Para ello, el profesor debe dar autoridad y confianza a los estudiantes para que formulen ideas, dudas y conjeturas así como coordinar y plantear las discusiones para que entre alumnos y profesor se construyan las demostraciones.

Estos dos últimos aspectos ponen de manifiesto la importancia de vías metodológicas que promuevan la participación de los alumnos en el aula, ya sea con el profesor o entre ellos. Por lo tanto, puede considerarse la participación del alumnado como un elemento que favorece en gran medida el aprendizaje de la demostración (Bieda, 2010).

## 3.2 Definición de razonamiento matemático

El razonamiento matemático se refiere a la habilidad o proceso cognitivo que permite a una persona utilizar la lógica y el pensamiento crítico para comprender, analizar, resolver problemas y justificar afirmaciones y resultados en el contexto de las matemáticas (Godino y Recio, 2001).

El razonamiento matemático también puede implicar la capacidad de justificar y demostrar afirmaciones matemáticas mediante argumentos lógicos y demostraciones rigurosas. Esto puede incluir la construcción de demostraciones matemáticas, la identificación de patrones o regularidades en datos, la elaboración de conjeturas y su validación mediante evidencias matemáticas, y la capacidad de comunicar de manera clara y coherente los pasos y procedimientos utilizados en el proceso de razonamiento (Arce *et al.*, 2019).

Basado en las premisas anteriores, se podría definir razonamiento matemático como:

*La relación de una serie de conceptos matemáticos que pretenden probar conjeturas o ideas, basándose en verdades universales, y persuadir o convencer de la veracidad de esas ideas* (Camargo y Gutiérrez, 2010).

En este sentido, el razonamiento matemático engloba tres procesos:

- Razonar: Relacionar una serie de conceptos para tratar de explicar un fenómeno o idea.
- Argumentar: Alegar y dar argumentos que expliquen esa idea.
- Demostrar: Probar esa idea basándose en verdades universales.

Estos tres procesos están estrechamente relacionados en matemáticas, ya que relacionan conceptos, verdades universales y argumentos mediante la inferencia lógica. Además, son progresivos, ya que se comienza buscando la veracidad de una conjetura o idea matemática, tratando de encontrar su relación con conceptos o principios que puedan explicar un fenómeno (razonamiento), de forma que se puedan dar argumentos de esa veracidad (argumentación) y de modo que esa idea quede probada de forma irrefutable (demostración) (Camargo, *et al.*, 2010).

Por lo tanto, los objetivos del razonamiento matemático son:

- Formular ideas que expliquen un concepto o hecho concreto a partir del análisis de información.
- Argumentar esas ideas.
- Demostrar la certeza de las mismas.

### 3.2.1 Tipos de razonamiento, esquemas de prueba y enunciados

Como se ha indicado anteriormente, el razonamiento es un proceso fundamental en matemáticas. Existen tres tipos de razonamiento en función del tipo de argumento en el que pretenden basar su validez: razonamiento abductivo, inductivo y deductivo (Arce *et al.*, 2019).

- El razonamiento abductivo basa su validez en dar por supuesta una información sobre la que no se tiene certeza y que utiliza como hipótesis o conjetura.
- El razonamiento inductivo consiste en validar una afirmación que se cumple para varios casos particulares.
- El razonamiento deductivo valida una hipótesis a partir de una serie de razonamientos lógicos que parten de una premisa que se acepta como verdadera, como una ley o principio general.

Desde el punto de vista matemático, el razonamiento deductivo es el único tipo considerado como válido para establecer una conclusión aceptable. Sin embargo, en la matemática escolar los razonamientos abductivos e inductivos tienen mucha importancia por dos razones:

- En los niveles más bajos de enseñanza secundaria los razonamientos de tipo deductivo pueden ser inalcanzables para los alumnos debido al desarrollo insuficiente de sus habilidades y capacidades matemáticas.
- Dan la posibilidad al alumno de examinar y generalizar resultados y de conjeturar sobre ellos, lo que es un paso previo para la justificación de estos resultados.

Por lo tanto, en la etapa de enseñanza secundaria los resultados de los procesos que engloba el razonamiento matemático y que se utilizan de forma escalonada (razonamiento o formulación de conjeturas, argumentación y demostración) se alcanzan utilizando de forma progresiva los tres tipos de razonamiento.

Como se ha explicado anteriormente, el razonamiento deductivo es difícil de aplicar por los alumnos de los primeros cursos de secundaria debido a las dificultades que encuentran por falta de desarrollo en sus habilidades matemáticas. Estas habilidades están relacionadas con su capacidad para encontrar argumentos que validen sus conjeturas (Godino *et al.*, 2001). Dichos argumentos son los denominados esquemas de prueba que son los procesos que utilizan los alumnos para asegurarse de la certeza de una afirmación. Los esquemas de prueba tienen una doble función, por un lado, el convencimiento del propio alumno de la veracidad de una afirmación eliminando sus propias dudas y por el otro la persuasión a otros alumnos eliminando sus dudas sobre dicha veracidad (Harel y Sowder, 2007).

Los esquemas de prueba pueden ser de varios tipos: de convicción externa, empíricos y analíticos (Godino y Recio, 2001):

- Esquemas de prueba de convicción externa: Basados en la creencia de que algo es cierto apoyándose en elementos ajenos al razonamiento. En función de la fuente en la que basan la convicción pueden ser rituales (apariencia de demostración), autoritarios (libro o profesor) o simbólicos (porque tiene forma simbólica matemática).

- Esquemas de prueba empíricos: Demostración a través de hechos físicos o experiencias sensoriales. Pueden ser experimentales o inductivos, dependiendo de si requieren manipulación directa o se infieren de los resultados de uno o varios casos particulares, para validar una afirmación.

- Esquemas de prueba analíticos: Validación de las conjeturas por medio de la deducción lógica, es decir, corresponden con el razonamiento deductivo y, por tanto, con la demostración matemática. Pueden ser transformacionales (transforman imágenes por medio de la deducción) o axiomáticos (basan la validación en axiomas o teoremas).

Debido al predominio de las prácticas argumentativas no analíticas en las etapas de primaria y secundaria y coincidiendo con el desarrollo progresivo de las habilidades de razonamiento, en los primeros niveles de secundaria los alumnos utilizan habitualmente argumentos de prueba de convicción externa y empírico-inductivos (Godino y Recio, 2001). Mientras que la transición de esquemas de prueba inductivos hacia intuitivos-axiomáticos se produce en bachillerato (Fiallo *et al.*, 2013). Por ello, el objetivo final del profesor debe ser hacer evolucionar los esquemas de prueba de los alumnos hacia los argumentos intuitivo-axiomáticos en los últimos cursos de secundaria, ya que se corresponden con el razonamiento deductivo.

El último de los aspectos que influye en los esquemas de prueba utilizados por los alumnos es cómo son utilizados en los libros de texto. Los esquemas de prueba en libros de texto son los procesos que se muestran impresos en los mismos con la misión de convencer al lector de la veracidad de los resultados (Arce *et al.*, 2019). Debido a la gran relevancia y utilización que tienen los libros de texto en las aulas, los procesos utilizados para justificar teoremas, propiedades o resultados matemáticos influirán en gran medida en los que utilicen a su vez los alumnos para justificar sus resultados y tratar de persuadir a otros.

Por lo tanto, es necesario tener en cuenta las distintas formas en que las que los resultados y las justificaciones son presentados a los alumnos, para poder transmitir unas matemáticas interconectadas y con sentido.

Otro elemento que utilizan los alumnos para sus razonamientos es la prueba preformal. Este instrumento consiste en la aplicación de los pasos de una demostración formal a un ejemplo concreto. Este tipo de herramientas, aunque no permiten entender y razonar en su totalidad el proceso, son muy útiles para reflejar ideas claves de la demostración que pueden ser un primer paso hasta la comprensión de la demostración formal en su totalidad (Fiallo *et al.*, 2013).

Un ejemplo de prueba preformal para la identidad notable del cuadrado de la suma sería la siguiente:

$$(a+b)^2 \text{ con } a = 2\ y\ b = 3$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$´\,Sustituyendo\ a\ y\ b\text{: } (a+b)^2 = (2+3)^2 \quad y \quad a^2 + b^2 + 2ab = 2^2 + 3^2 + 2*(2*3)$$

$$Desarrollando\ los\ productos\ parciales$$

$$(2+3)^2 = (2+3)*(2+3)$$

$$´\,(2+3)*(2+3) = (2*2) + (2*3) + (3*2) + (3*3)$$

$$´\,(2*2) + (2*3) + (3*2) + (3*3) = 2^2 + 3^2 + (2*3) + (3*2)$$

$$2^2 + 3^2 + (2*3) + (3*2) = 2^2 + 3^2 + 2*(2*3)$$

De esta forma el alumno va comprobando en cada paso que el resultado se cumple con un ejemplo concreto.

En definitiva, el razonamiento matemático implica la utilización de diferentes estrategias y enfoques, basados en los tipos de razonamiento y los esquemas de prueba utilizados por los alumnos (Fiallo *et al.*, 2013). Estas estrategias son principalmente la inferencia, la inducción, la deducción y la resolución de problemas:

- La inferencia implica sacar conclusiones a partir de la combinación de información nueva con la información previa almacenada en la memoria.
- La inducción implica obtener conclusiones generales a partir de ejemplos o casos específicos.
- La deducción, por otro lado, implica partir de premisas o principios generales para llegar a conclusiones específicas.
- Y la resolución de problemas implica aplicar estrategias y técnicas para encontrar soluciones a situaciones matemáticas complejas.

Como se ha explicado en el apartado anterior, a pesar de que el razonamiento y la demostración en matemáticas cada vez van cobrando más valor, a los profesores les resulta difícil incluir actividades relacionadas con el razonamiento y la demostración como parte habitual de su desempeño. Esto se debe principalmente a las dificultades que tienen los alumnos a la hora de generar pruebas y justificaciones (Bieda, 2010).

Una de las mayores dificultades que encuentran los estudiantes es la comprensión de enunciados matemáticos, como teoremas o corolarios. Los procedimientos indicados anteriormente (razonamiento, argumentación y demostración) se hacen a partir de la información contenida en un enunciado que pretende ser verificada. Estas dificultades radican sobre todo en la forma en que esté escrito el enunciado.

Un teorema es una afirmación que está compuesta por dos proposiciones:

- Hipótesis: Parte verdadera.
- Tesis: Parte que se deduce de la hipótesis.

Estos elementos aparecen en el enunciado de cualquier teorema, propiedad o corolario. Sin embargo, se pueden enunciar de distintas formas, lo que puede afectar a la comprensión del propio enunciado y a la forma de razonamiento y demostración utilizada, sobre todo en los primeros cursos de secundaria.

Algunos tipos de enunciados pueden dificultar el entendimiento del mismo, como por ejemplo los que mezclan hipótesis y tesis, los de hipótesis implícitas o los que incluyen cuantificador universal. Los primeros no tienen expresiones como “si…” o “entonces…” que son muy aclaratorias, los segundos se utilizan habitualmente para establecer fórmulas cuya comprensión puede no ser demasiado evidente y, por último, los enunciados con cuantificador universal implícito sustituyen las expresiones “si…” o “entonces…” por "para todo" o “para cualquier” elemento de un cierto conjunto se cumple la proposición dada a continuación, lenguaje que puede dificultar la comprensión de la información (Fiallo *et al.*, 2013).

Según diversos estudios los enunciados que más favorecen su comprensión son los expresados de la forma “si Hipótesis entonces Tesis”, y recíprocamente. Por todo esto, es necesario que los docentes utilicen enunciados con un lenguaje que facilite su identificación y comprensión sobre todo en los primeros cursos de secundaria (Fiallo *et al.*, 2013).

Por ejemplo, al enunciar el primer Teorema de Tales aplicado a la construcción de triángulos semejantes, donde:

H → Obtención de un triángulo a partir de la unión de una línea paralela a uno de sus lados, con la prolongación de sus otros dos lados.

T → El triángulo obtenido es semejante al primer triángulo.

Mezcla de H y T: Para obtener un triángulo semejante a otro basta con trazar la paralela a uno de los lados y unirla con la prolongación de los lados restantes.

Hipótesis implícita: Dado un triángulo de vértices ABC, al trazar una línea paralela a uno de los lados y unirla con la prolongación de los otros dos lados se obtendrá un triángulo semejante A'B'C' de forma que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'};\ \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}\ y\ \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

Cuantificador universal implícito: Para todo triángulo a partir del cual se trace una línea paralela a uno de sus lados y esta se una a con la prolongación del resto de lados, se obtendrá un triángulo semejante al primero.

Si hipótesis entonces tesis: Partiendo de un triángulo, si se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados y esta línea se une con la prolongación de los otros dos lados, entonces se obtiene un triángulo semejante al inicial.

Teniendo en cuenta el lenguaje y estructuras utilizadas, la última de las formas en las que está expresado el enunciado sería la que entenderían los alumnos más fácilmente.

Podemos concluir que el razonamiento matemático es una habilidad fundamental en la resolución de problemas matemáticos y en la comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Además, también puede ser aplicado en otros contextos y áreas de la vida cotidiana, como en la toma de decisiones y en la planificación y la resolución de problemas en situaciones prácticas que involucren el uso de habilidades matemáticas.

## 3.3 La proporcionalidad en enseñanza secundaria

La proporcionalidad constituye un campo ampliamente investigado y diversos trabajos muestran que estos conocimientos siguen siendo difíciles de aprender para la mayoría de los estudiantes (Obando *et al.*, 2014), lo que apunta a la necesidad de realizar más investigaciones didácticas que propicien la comprensión de esta temática (razones, proporciones y proporcionalidad) contribuyendo así a la mejora de su aprendizaje.

En la Enseñanza Secundaria Obligatoria, la proporcionalidad se refiere a la relación de equivalencia entre dos o más magnitudes, y cómo éstas se relacionan de manera constante en función de la variación de sus cantidades (Arce *et al*., 2019, Martínez-Juste, 2022).

La relación proporcional entre magnitudes históricamente ha supuesto la culminación de la formación aritmética de los alumnos. Esto y su utilización habitual en la vida diaria en múltiples aplicaciones y campos disciplinares, como física, química, tecnología, economía y arte entre otros, hace que se dedique una gran atención a esta temática en diversas investigaciones (Martínez-Juste, 2022).

La proporcionalidad es un tema que se aborda en los programas de matemáticas de todos los cursos de la etapa de ESO. En los primeros cursos se profundiza en los conceptos de proporción y razón, ya impartidos en educación primaria, y se amplían hasta nuevos contenidos como la proporcionalidad inversa o los repartos (Arce *et al*., 2019, cap. 12). En los cursos posteriores se amplía el estudio de la proporcionalidad desarrollando otros conceptos y habilidades, iniciados en esos primeros cursos, que incluyen: proporciones, razones, porcentajes, problemas de proporcionalidad, representaciones gráficas, etc.:

- Proporciones: Se estudia cómo se establecen las relaciones de equivalencia entre dos o más cantidades, y cómo se pueden resolver proporciones directas e inversas utilizando técnicas de álgebra y aritmética, como la regla de tres (Martínez-Juste, 2022).

- Razones: Se profundiza en la comprensión de las razones de proporcionalidad, y cómo se aplican en situaciones de la vida cotidiana, como las relaciones entre magnitudes físicas (velocidad, aceleración, fuerza, relaciones estequiométricas en las reacciones químicas, etc.) y cálculos con las mismas, las razones financieras, y otros contextos.

- Porcentajes: Se estudian los porcentajes como una forma de expresar relaciones proporcionales en términos de partes de un todo, y cómo se aplican en situaciones de cálculos financieros (descuentos, intereses, cálculo de impuestos, etc.) y en otros ámbitos como la composición de los alimentos y otros productos de uso cotidiano.

- Resolución de problemas de proporcionalidad: Se aplican los conceptos de proporcionalidad en la resolución de problemas prácticos, como problemas de comercio, problemas geométricos, problemas de escala y cambio de unidades y otros contextos del mundo real.

- Gráficos y representaciones proporcionales: Se exploran las representaciones gráficas de relaciones proporcionales, como las gráficas de proporcionalidad directa e inversa, y se analizan las características y patrones de estas gráficas y su interpretación y utilización.

La proporcionalidad, además, es una parte clave del contenido matemático impartido en enseñanza secundaria, debido a que está estrechamente relacionada con otras áreas de las matemáticas como la geometría (semejanza de figuras o representación de funciones) o el análisis matemático (modelización de funciones) y con otras asignaturas que los alumnos estudian simultáneamente, como la física (el movimiento, las fuerzas: ley de Hooke, ley de Ohm, etc.), la química (ley de los gases ideales, cálculos estequiométricos, composición de las sustancias, etc.) y el dibujo (proporción áurea, triángulos semejantes, etc.) entre otras.

### 3.3.1 Tipos de proporcionalidad

Uno de los contenidos más importantes dentro de la proporcionalidad en la ESO es el tipo de proporcionalidad entre magnitudes, que puede ser simple, directa o inversa, o compuesta:

- Proporcionalidad directa: Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar una de ellas, la otra también aumenta en la misma proporción, y al disminuir una, la otra también disminuye en la misma proporción. En este caso, la relación entre las magnitudes se puede expresar mediante una ecuación de la forma $y = kx$, donde "y" es la variable dependiente, "x" es la variable independiente y "k" es la constante de proporcionalidad.

- Proporcionalidad inversa: Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar una de ellas, la otra disminuye en la misma proporción, y al disminuir una, la otra aumenta en la misma proporción. En este caso, la relación entre las magnitudes se puede expresar mediante una ecuación de la forma y = k/x, donde "y" es la variable dependiente, "x" es la variable independiente y "k" es la constante de proporcionalidad.

- Proporcionalidad compuesta: Se refiere a una situación en la que intervienen más de dos magnitudes y su relación de proporcionalidad es más compleja. En este caso, las magnitudes pueden estar relacionadas mediante una combinación de proporcionalidades directas e inversas, y su expresión matemática puede requerir la utilización de varias constantes de proporcionalidad.

Los tipos de proporcionalidad son una de las bases que los alumnos deben comprender para poder adquirir conocimientos más complejos relacionados con la proporcionalidad como representación y modelización de funciones a través de una pendiente, cálculos geométricos de semejanza de figuras, relaciones trigonométricas, etc.

### 3.3.2 Razonamiento proporcional

El razonamiento proporcional consiste en la habilidad para utilizar de forma significativa conceptos propios de las razones y las proporciones en la resolución de situaciones relacionadas con la proporcionalidad (Obando *et al.*, 2014).

Teniendo en cuenta la definición de proporcionalidad del apartado anterior, el razonamiento proporcional se basa en la comprensión de la relación de proporcionalidad entre dos o más cantidades. Es decir, se comprende la relación de covarianza de las cantidades (variación constante de una respecto a la variación de las demás) y la invariancia de razones y productos. Por lo tanto, el razonamiento proporcional conlleva la capacidad de establecer la relación multiplicativa entre varias cantidades y la habilidad de extender dicha relación a otras cantidades (Arce *et al.*, 2019, cap. 12).

Según se avanza en las etapas educativas, el desarrollo del razonamiento proporcional va unido a la asimilación de otros conceptos como la multiplicación de enteros o los números racionales. El paso de primaria a secundaria coincide con la transición entre el pensamiento aditivo y multiplicativo. La enseñanza debe promover la utilización de un razonamiento proporcional multiplicativo, que permita a los alumnos analizar de forma crítica situaciones matemáticas y distinguirlas entre situaciones proporcionales y no proporcionales (Fernández, 2011; Fernández y Llinares, 2013).

En consecuencia, la comprensión de las estructuras multiplicativas es un elemento clave para el desarrollo del razonamiento proporcional, en especial para establecer relaciones directas, inversas o compuestas entre cantidades, que como se ha indicado anteriormente es una de las bases para adquirir conocimientos más complejos basados en la proporcionalidad (Martínez-Juste, 2022).

Teniendo en cuenta lo anterior, el desarrollo del razonamiento proporcional requiere el desarrollo del pensamiento lógico y del pensamiento matemático. Desde el aspecto lógico la proporción establece un esquema de relaciones:

- La razón es una relación de dos variables.
- La proporción es una relación de equivalencia entre dos razones.

Desde el punto de vista matemático se establecen los esquemas de equivalencia, que permiten garantizar la invariancia de un cociente o un producto (Obando *et al.*, 2014):

$$Si\,\frac{x}{y} = \frac{x\prime}{y\prime} \rightarrow xy' = x'y$$

### 3.3.3 Tareas relacionadas con la proporcionalidad y el razonamiento proporcional

Existen una gran cantidad de situaciones en las que interviene o está relacionada la proporcionalidad. En el ámbito curricular, los contextos más habituales en los que aparece la proporcionalidad son cuatro (Arce *et al.*, 2019, cap. 12):

- Proporcionalidad aritmética: Repartos proporcionales, razones, porcentajes, etc.
- Escalas: Semejanza de figuras, mapas, etc.
- Pendiente: Representación y modelado de funciones
- Geometría relacionada con el Teorema de Tales: división de segmentos, cálculo de longitudes proporcionales, obtención de triángulos semejantes, etc.

La resolución de tareas en los distintos contextos en los que interviene la proporcionalidad desarrolla en gran medida el razonamiento proporcional de los alumnos. Los tipos de tareas se definen en función del tipo de cálculo a realizar por el alumno (razones, coeficientes de proporcionalidad, porcentajes, etc.), los distintos registros en los que puede aparecer una situación proporcional (identificar la proporcionalidad entre magnitudes, obtención del coeficiente proporcional, representación de dicha relación proporcional, etc.) y de todos los procesos de desarrollo o conversión necesarios para la resolución de la tarea (Obando *et al.*, 2014).

Se pueden considerar dos tipos de tareas relacionadas con la proporcionalidad que se han utilizado históricamente en los libros de texto, tareas de valor perdido o falta de valor y tareas de comparación (Brakoniecki *et al.*, 2021). Las tareas de comparación se dividen a su vez en tareas de comparación numérica o cuantitativa y tareas de comparación cualitativa (Martínez- Juste *et al.*, 2022).

- Tareas de valor perdido: Se proporcionan todos los datos de una proporción menos uno y el objetivo es calcular ese valor desconocido. En proporcionalidad simple, se conocen tres de los cuatro valores en una proporción del tipo: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y el objetivo es obtener el valor de la cuarta magnitud desconocida (Brakoniecki *et al.*, 2021). Este tipo de tareas son problemas típicos en actividades escolares (Arce *et al*., 2019, cap. 12).

  A continuación, se muestra un posible ejemplo de estas tareas:

  Un pastelero vende un día una tarta hecha con 7 manzanas y un kilo de harina. Al día siguiente le encargan otra tarta igual para la que utiliza 2 kilos de harina. ¿Cuántas manzanas necesitará si quiere que la tarta tenga el mismo sabor que la del primer día?

- Tareas de comparación cuantitativa: Se presentan dos situaciones de proporcionalidad distintas en las que intervienen las mismas magnitudes pero con valores diferentes (Martínez-Juste, 2022). El problema da los valores de todas las magnitudes: $(a, b, c, d)$ y el objetivo es comparar el orden de las relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes de cada situación: $\frac{a}{b}(<,>,=)\frac{c}{d}$ (Brakoniecki *et al.*, 2021).

  Un posible ejemplo sería:

  Un pastelero hace tarta de manzana dos días seguidos, el primer día utiliza 7 manzanas y un kg de harina y el segundo 12 manzanas y dos kg de harina. ¿Cuál de las dos tartas tendrá más sabor a manzana?

- Tareas de comparación cualitativa: La estructura es similar a los problemas de comparación cuantitativa, pero en este tipo de problemas el enunciado no proporciona los valores de las magnitudes, sino que da información cualitativa que compara las magnitudes de ambas situaciones. El objetivo es el mismo que en las tareas cuantitativas: comparar el orden de proporcionalidad entre las magnitudes de cada situación (Martínez-Juste, 2022).

A continuación, se muestra un posible ejemplo, similar a los anteriores:

*Un pastelero hace tarta de manzana dos días seguidos, el primer día utiliza una bolsa con varias manzanas y una cantidad de harina. El segundo día, como se va de vacaciones, decide utilizar todos los ingredientes que le quedan: una manzana menos que el primer día y el doble de harina. ¿Cuál de las dos tartas tendrá más sabor a manzana?*

Por su estructura, las tareas de comparación cuantitativa y cualitativa fomentan la comprensión de conceptos como la covarianza de cantidades (sobre todo las cualitativas) y la capacidad de entender las cantidades absolutas y relativas en distintas situaciones (Arce *et al*., 2019, cap. 12). A pesar de esto, para favorecer el desarrollo del razonamiento proporcional deben utilizarse tareas de todas las clases, de forma que los alumnos adquieran habilidades y destrezas relacionadas con la proporcionalidad y comprendan conceptualmente los conceptos matemáticos implicados.

Para resolver las tareas relacionadas con la proporcionalidad existen una gran variedad de estrategias de resolución y, en función del tipo de tarea planteada (valor perdido o comparación), los alumnos utilizan distintos tipos de estrategias.

En los primeros cursos de secundaria, los problemas más habituales son los de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa. Las estrategias que utilizan de forma más habitual los alumnos en este tipo de problemas son cálculos matemáticos para obtener la relación de proporción entre las magnitudes (Martínez-Juste, 2022). En este sentido aparece la regla de tres, que es una técnica aritmética muy utilizada para la resolución de proporciones simples directas o indirectas. La regla de tres consiste en establecer una relación de proporcionalidad entre tres valores conocidos y una incógnita para posteriormente calcular el valor desconocido mediante operaciones aritméticas sencillas. Por ejemplo, para una proporción simple directa con tres valores conocidos A, B y C y un valor desconocido tal que: $A \to B$ y $X \to C$ se establece la relación de proporcionalidad: $\frac{A}{B} = \frac{X}{C} = k$ y se obtiene el valor desconocido de la forma: $X = \frac{C*A}{B}$ con el famoso “este por este entre este”. A pesar de ser una técnica ampliamente utilizada y que permite obtener muy rápidamente el resultado, debe procurarse que lo alumnos no mecanicen su uso y que comprendan las relaciones de proporcionalidad que existen entre los distintos valores.

Estos métodos de resolución son, a su vez, de dos tipos: estrategias multiplicativas y estrategias de construcción progresiva (Martínez-Juste, 2022).

Las estrategias multiplicativas se basan en el cálculo de la razón de la misma magnitud en distintas situaciones, o bien en el cálculo de la constante de proporcionalidad entre distintas magnitudes en una situación determinada. Las más utilizadas son:

- Estrategia escalar o de factor de cambio: Calculo de la razón entre los valores de una misma magnitud en situaciones diferentes.

- Estrategia de razón externa o de reducción a la unidad: Cálculo de la constante de proporcionalidad entre magnitudes distintas en una misma situación.

Para resolver el problema de valor perdido planteado anteriormente, podría utilizarse una estrategia de resolución de razón externa:

> Para este caso nos dan la cantidad de harina y manzanas de la tarta del primer día y la cantidad de harina del segundo. Como el sabor tiene que ser el mismo en las dos tartas se deduce que la cantidad de manzanas respecto de la harina tiene que ser la misma en los dos casos, es decir la razón manzanas-harina debe permanecer constante. Con los datos del primer día se obtiene la constante de proporcionalidad manzanas-harina:
>
> $$Constante\ de\ proporcionalidad = \frac{7\ manzanas}{1\ kg\ harina} = 7\ manzanas\ por\ kg\ harina$$
>
> Una vez obtenida se compara con las cantidades del segundo día:
>
> $$7\ manzanas\ por\ kg\ harina = \frac{7\ manzanas}{1\ kg\ harina} = \frac{X\ manzanas}{2\ kg\ harina};$$
>
> $$X = \frac{2kg\ harina * 7\ manzanas}{1\ kg\ harina};\ \ Por\ lo\ tanto, \qquad X = 14\ manzanas$$

De forma que se compare la constante de proporcionalidad o relación manzanas-harina de ambas tartas, sabiendo que es la misma, para obtener la cantidad de manzanas de la segunda tarta.

Las estrategias de construcción progresiva se basan en que la función que relaciona situaciones sucesivas de proporcionalidad directa es de tipo lineal. Las estrategias de resolución más habituales que ponen en práctica esta propiedad son:

- Descomposición escalar o construcción progresiva: Descomposición aditiva de la situación de proporcionalidad sobre la que se pregunta, en situaciones proporcionales cuya suma da como resultado la situación inicial.

- Descomposición funcional o construcción de patrones: Descompone una de las magnitudes en función de la otra, hasta encontrar un patrón lineal.

La construcción de patrones, aunque numéricamente es correcta, no tiene una visualización fácil en muchas situaciones reales, ya que no tiene un sentido físico claro. Sin embargo, es muy útil a la hora de encontrar patrones que permitan linealizar una función de proporcionalidad entre magnitudes, lo que es de gran interés por ejemplo para representar gráficamente funciones de proporcionalidad.

En los problemas de comparación cualitativa y cuantitativa, el objetivo de las estrategias de resolución es la transformación de todas o de alguna de las situaciones de proporcionalidad en situaciones equivalentes, para poder comparar las cantidades de cada magnitud y la relación entre magnitudes de todas las situaciones o conjuntos de magnitudes.

Las estrategias que los alumnos utilizan más habitualmente en este tipo de tareas son: (Brakoniecki *et al.*, 2021):

- Unificación: Una de las magnitudes se divide en unidades de un valor específico en todas las situaciones.
- Partición: Se dividen una o varias situaciones en partes proporcionales y equivalentes entre las situaciones en una de las magnitudes.
- Ampliación: Análoga a la partición, se añaden copias adicionales a una situación hasta obtener una situación equivalente en una de las magnitudes.
- Normalización: Consiste en examinar cuántas veces encaja una magnitud de una situación en las demás de modo que se pueda comparar la cantidad que sobra o falta del resto de magnitudes.

- Combinación de las técnicas anteriores: Utilización sucesiva de varias de las técnicas anteriores, hasta encontrar situaciones equivalentes que permitan la comparación.
- Comparación multiplicativa: Mismo principio que las técnicas utilizadas en los problemas de valor perdido, es decir, cálculo de las razones entre las mismas magnitudes en situaciones proporcionales diferentes o cálculo de la constante de proporcionalidad de cada una de las situaciones, de forma que se puedan comparar los valores numéricos entre situaciones.
- Comparación porcentual y decimal: Obtención del valor numérico en tanto por uno o en tanto por ciento, de la proporción de cada magnitud en cada situación de proporcionalidad dada para su comparación directa.

Para la resolución del ejemplo de problema de comparación cuantitativa planteado anteriormente podría utilizarse una estrategia de unificación:

El sabor a manzana de las tartas dependerá de la cantidad de manzana que lleven respecto a la cantidad de harina, por tanto, debe calcularse la proporción manzana-harina de cada una de las tartas:

- Tarta 1 $\rightarrow \frac{7\text{ manzanas}}{1\text{ kg harina}} = 7;$ habrá 7 manzanas por cada kg de harina
- Tarta 2 $\rightarrow \frac{12\text{ manzanas}}{2\text{ kg harina}} = 6;$ habrá 6 manzanas por cada kg de harina

Así, se deduce que la primera tarta tendrá más sabor a manzana.

En este caso se dividen la cantidad de harina de las dos situaciones en un valor específico: 1 kg de harina, de forma que se pueda comparar la cantidad de manzana en cada una de ellas.

El ejemplo de comparación cualitativa podría resolverse con una comparación multiplicativa, similar a lo planteado en el ejemplo de valor perdido:

El sabor a manzana de las tartas dependerá de la cantidad de manzana que lleven respecto a la cantidad de harina, por tanto, debe estimarse la proporción manzana-harina de cada una de las tartas:

La segunda tarta lleva el doble de harina que la primera, sin embargo, tiene una manzana menos que la primera, por lo que la cantidad de manzana de la segunda tarta es menor que la de la primera. Con esta estimación se puede deducir la proporción manzana-harina de la segunda tarta es menor que la de la primera y por lo tanto tendrá menos sabor a manzana.

Para este problema se estiman las constantes de proporcionalidad (relación manzana-harina) de las dos tartas, de una forma parecida al ejemplo de la tarea de valor perdido, para poder compararlas y establecer cuál de las dos tartas tiene mayor cantidad de manzana.

# 4. MARCO METODOLÓGICO

La propuesta que se presenta en este documento está enfocada en las metodologías STEM, que son muy adecuadas para proyectos educativos interdisciplinares por su gran versatilidad. Además, en la ley vigente (LOMLOE) se promueven este tipo de metodologías de aprendizaje integrado de distintas materias, como queda reflejado en una de las ocho competencias claves existentes, con el nombre de “Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería”, denominada competencia STEM.

El proyecto diseñado se apoya en el aprendizaje basado en proyectos (ABP) y en el trabajo cooperativo, por lo que la metodología seguida debe incluir este tipo de aprendizajes.

## 4.1 Metodologías STEM

Las características de la metodología STEM han estado presentes desde hace décadas. Ya en el siglo XIX, con la revolución industrial y la aparición de las escuelas técnicas se ofertaba una formación especializada en áreas de tecnología y ciencias y, en el siglo XX, con la búsqueda de los avances necesarios para la carrera espacial y la incorporación de la informática.

Sin embargo, no fue hasta 1990 cuando la Fundación Nacional de Ciencias (National Science Foundation, NSF), con sede en Estados Unidos, acuñó por primera vez el término SMET para referirse a las áreas de, en inglés, Science, Mathematics, Engineering and Technology. Tras la queja de un oficial de la fundación por la similitud de dicho término con la palabra “tizón” en inglés, se decidió en 2001 cambiar el orden de estas letras surgiendo, así, el acrónimo STEM, usado desde ese momento, según Sanders (2009), para hacer referencia a cada una de estas cuatro materias por separado.

Años más tarde, concretamente en 2011 comenzó a verse la necesidad de invertir en un modelo educativo actualizado que aunara las ciencias y las tecnologías. Se consideró fundamental que dicho modelo promoviera, con un enfoque equilibrado y práctico, un aprendizaje significativo que conectara, siguiendo un modelo constructivista, los contenidos estudiados con la realidad observada. De esta forma, como mencionan Fuentes-Hurtado y González (2019), surgió en Estados Unidos la iniciativa educativa STEM, la cual está siendo introducida, según European Parliment (2015), por los gobiernos del resto de los países desarrollados del mundo que consideran la formación integral de todo el alumnado y del personal docente una necesidad vital para su futuro.

La educación STEM está orientada a educar a los estudiantes en las cuatro disciplinas que constituyen su nombre de forma integrada y agrupada, es decir, dejando de considerarse áreas de conocimiento aisladas como se había hecho hasta el momento, y dotándolas de interdisciplinariedad gracias a las conexiones que existen entre ellas y con el mundo real. De esta forma, Bybee (2013) indica que se fomentaría el interés por las ciencias y la tecnología del alumnado, así como su carácter resolutivo ante problemas cotidianos. Además, Bybee (2010) indicaba que este tipo de educación debía aumentar la comprensión de los estudiantes sobre el funcionamiento de lo que les rodea y mejorar el uso que hacen de las tecnologías, incluyendo, debido a la estrecha relación que tiene con la innovación y la resolución de problemas, más ingeniería en la educación secundaria. Couso (2017) añade que el interés por este tipo de educación debería centrarse, desde el punto de vista de los docentes en estas áreas, en promover la alfabetización en el ámbito STEM como otro de los valores personales que se enseñan en los centros educativos, incluyendo los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). La educación STEM busca, desde un punto de vista práctico y orientado a la creación de proyectos y a la resolución de problemas cotidianos, el desarrollo de habilidades como el pensamiento crítico, la creatividad, el trabajo cooperativo y la capacidad de comunicación, esenciales para cumplir la ley educativa en vigor.

Toda esta información sobre la educación STEM hace pensar que hay una metodología que recibe este mismo nombre, pero la realidad es que el término STEM, en lugar de ser una metodología en sí, consiste en un conjunto de enfoques metodológicos y perspectivas pedagógicas que Couso (2017) considera útiles para el cumplimento de los objetivos STEM mencionados en párrafos anteriores, de forma que el alumnado que haya recibido este tipo de educación logre aprender significativamente, vinculando conscientemente conocimientos nuevos con conceptos e ideas previas (Ausubel, 2002).

Como ya se ha mencionado, la metodología STEM tiene muchos puntos fuertes y ventajas para la sociedad, pero Bogdan y García-Carmona (2021) han realizado un exhaustivo análisis crítico centrándose en las desventajas y limitaciones de esta metodología. En dicho artículo se menciona que “la mayoría de las propuestas didácticas catalogadas como STEM son educativamente deficitarias, además de poco novedosas respecto de planteamientos anteriores para la enseñanza de las ciencias, la tecnología y las matemáticas”, también se cuestiona si realmente es viable el enfoque STEM en el contexto educativo español tras verificar las grandes dificultades de los docentes para conectar este enfoque con las demandas curriculares y comprobar que no contaban con fundamentación clara para su puesta en práctica. En este mismo análisis se menciona que hoy en día se está abusando mucho de uso del término STEM para atraer financiación o “hacer propaganda de iniciativas y materiales educativos añosos, rebautizados ahora como STEM” pero que realmente no cumplen con las características mínimas para poder designarse con ese nombre. Es por esto último que, en el propio documento, sus autores reflexionan también sobre la necesidad de una validación didáctica previa y rigurosa de cualquier propuesta que lleve en su título la palabra “STEM” para comprobar que cumple los requisitos para designarse así.

Para terminar, es importante comentar que el término STEM ha ido evolucionando y convirtiéndose en otros acrónimos según se han ido sumando nuevas iniciativas, según mencionan en su artículo Bogdan y García-Carmona (2021). Entre ellos, el término más utilizado es STEAM, cuyas siglas hacen referencia al estudio y la enseñanza de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas, añadiendo, además las artes. Por último, Yakman y Lee (2012) apoyan este tipo de educación acuñando a que “es fundamental para la cultura global que los estudiantes se interesen por estos campos y que sean capaces de aprender y desarrollarse con actitudes y habilidades profesionales y realistas”. Además de asegurar que, mediante estas metodologías, los estudiantes logren actualizar sus conocimientos y puedan transferirlos para resolver problemas de la vida real.

## 4.2 Aprendizaje basado en proyectos (ABP)

El aprendizaje basado en proyectos (ABP) es un tipo de metodología activa e interactiva a través de la cual los alumnos, por medio de la elaboración de proyectos que responden a problemas actuales, adquieren conocimientos y competencias técnicas clave relacionados con su entorno y contextualizados en situaciones de la vida cotidiana que les resultan próximos y aplicables, mostrando su utilidad y fomentando su interés (Rodríguez-Oro *et al.*, 2019). Además, mediante la realización de este tipo de proyectos, el alumno es el protagonista de su propio aprendizaje y se centra en procesos cognitivos de rango superior, como el análisis, la investigación y la experimentación autónoma y grupal. Estos proyectos no solo deben tener un propósito educativo acorde a los contenidos de la materia en la que se realicen, sino que deben tener sentido y motivación para los estudiantes.

En términos generales, las características más importantes de esta metodología, según Helle (2006), son:

1. El objetivo es la "fabricación de un producto". Los alumnos saben que el fin último es diseñar una solución al problema planteado. Esta situación predispone al alumno a pensar sobre el proceso que debe llevar a cabo para lograr el objetivo. Durante este proceso se deben descubrir nuevos conceptos importantes para realizar la tarea.
2. El control del aprendizaje. Esta metodología proporciona la autonomía suficiente para que los alumnos tomen decisiones sobre la secuenciación de su aprendizaje. Ellos observan y se enfrentan a las dificultades y seleccionan el modo de superarlas.
3. Contextualización. La información se interioriza mejor cuando se aprende en un entorno de aprendizaje adecuado.
4. Diversidad de formas de representación. Los alumnos disponen de cierta libertad para desarrollar la representación de la solución o "producto", de la forma que mejor se adapte a su estilo de aprendizaje y favoreciendo el desarrollo de sus habilidades. Este elemento es interesante porque da cabida al diseño universal del aprendizaje y a la atención a la diversidad del alumnado, con sus formas de explorar, aprender y explicar una solución o un producto.

Considerando las características mencionadas, el ABP da importancia al proceso de adquisición del conocimiento permitiendo el trabajo de competencias individuales y sociales, y fomentando la exploración y la metacognición del alumno para finalmente crear el producto que propocione la solución al problema planteado.

El aprendizaje basado en proyectos, según Sanmartí y Márquez (2017), tiene una serie de características que hacen que se diferencie de la enseñanza tradicional, al actuar el docente como guía o apoyo de los estudiantes. Se parte del estudio y reconocimiento de alguna situación o problema real al que se intenta dar solución durante la realización del proyecto. Tras la comprensión e interpretación de los datos e ideas obtenidas y el establecimiento de conclusiones, se aprenden conocimientos transferibles a otros contextos.

A todo lo anterior, Galeana (2016) añade que la metodología ABP posee muchas ventajas y beneficios sin necesidad de cumplir únicamente los objetivos curriculares, tales como la creación de conexiones entre el aprendizaje en el aula y la realidad, el desarrollo de habilidades y competencias individuales y colectivas, un aumento de la motivación, la autoestima y las fortalezas de aprendizaje de los estudiantes y la capacidad de relacionar diferentes materias interdisciplinarmente mientras se aprende a utilizar de manera práctica la tecnología.

El enfoque de ingeniería que promueve STEM está muy relacionado con metodologías activas, por lo que el aprendizaje basado en proyectos es considerado de los más adecuados para la educación STEM. Además, Domènech-Casal, Lope y Mora (2019) han demostrado que el diseño de proyectos STEM mediante este tipo de aprendizaje permite a los alumnos ser más creativos, más autónomos en su aprendizaje, mejorar su motivación y aumentar su compromiso personal. Pérez-Torres, Couso y Márquez (2021) apoyan estas ideas con el hecho de que en Educación Secundaria es muy frecuente trabajar con este tipo de metodología a partir de un modelo de ciencia escolar basado en la participación de las formas de hacer, pensar y hablar de ciencias y el fomento de las TIC, logrando, de esta forma, dotar al alumnado con los instrumentos necesarios para mejorar la calidad de los proyectos STEM implementados en los que participen.

## 4.3 Aprendizaje cooperativo

Hoy en día se usan con frecuencia los términos “cooperativo” y “colaborativo” indistintamente y, pese a que ambos sean enfoques pedagógicos que promueven la participación activa y el trabajo en equipo de los estudiantes, existen diferencias entre ellos.

Johnson, Johnson y Holubec (1999) afirman que los alumnos escalan más fácilmente las cimas del aprendizaje cuando lo hacen formando parte de un equipo cooperativo y definen el aprendizaje cooperativo como “el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás”. Además, hacen hincapié en que cooperar consiste en trabajar juntos para alcanzar objetivos comunes y obtener resultados beneficiosos para todos los miembros del grupo, a diferencia de la competición.

A todas estas características, Gavilán (2009) añade que este tipo de aprendizaje es una alternativa para tener en cuenta en la enseñanza actual, resaltando que la escuela posee un papel importante como potenciadora de cambio. Además, menciona que la socialización, el desarrollo personal y el desarrollo cognitivo son las tres líneas principales de influencia del aprendizaje cooperativo, por lo que la interacción y la construcción sociales de la inteligencia constituyen algunos de los fundamentos psicosociales del aprendizaje cooperativo (Figura 1). Estas características y el fomento del respeto a los compañeros y sus opiniones, aprender a escuchar y a ser escuchado, además de a ser capaz de defender las propias ideas utilizando argumentos sólidos hacen que este tipo de aprendizaje esté muy relacionado con dos de las competencias clave que se mencionan en la LOMLOE, la competencia personal, social y de aprender a aprender y la competencia ciudadana.


***Figura 1:*** *Líneas de influencia del aprendizaje cooperativo (Gavilán, 2009).*

Johnson, Johnson y Holubec (1999) también mencionan que el aprendizaje cooperativo comprende tres tipos de grupos de aprendizaje:

- Grupos formales, donde los estudiantes trabajan juntos durante un tiempo para lograr objetivos comunes pero el aprendizaje cooperativo es tarea del profesor ya que debe explicar la tarea y sus objetivos, supervisar y tomar decisiones durante su realización y evaluar el aprendizaje de los estudiantes animándolos a reflexionar sobre las acciones realizadas.
- Grupos informales, en los que el alumnado trabaja en grupos cooperativos durante periodos cortos de tiempo con la finalidad de centrar su atención, promover un buen clima de aula o asegurar que los alumnos realizan una tarea.
- Grupos base cooperativos, que son grupos heterogéneos pensados para funcionar a largo plazo, por lo que sus miembros deben de ser permanentes si se quiere conseguir su objetivo principal: posibilitar que sus integrantes se ayuden entre ellos, se apoyen y se respalden para lograr un buen rendimiento escolar.

## 5. MARCO LEGISLATIVO Y CONTEXTUALIZACIÓN CURRICULAR

Este trabajo se enmarca en la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre (LOMLOE), por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006 (LOE), aprobada a finales del año 2020 y puesta en marcha a principios del curso académico 2022-2023.

La LOMLOE promueve acciones orientadas a actualizar la profesión docente para liderar la innovación didáctica y curricular, y a impulsar el aumento de las vocaciones STEM. Desde esta Ley también se anima a los centros docentes a convertirse en lugares donde prime el cuidado del medioambiente y se promueva una cultura de sostenibilidad ambiental y de cooperación social. Una de las novedades que presenta la LOMLOE es en las competencias clave que, aunque fueron introducidas en la LOMCE, experimentan algunas modificaciones, siguiendo la Recomendación del Consejo de la Unión Europea de 2018, y se añade la competencia plurilingüe aumentando a ocho competencias clave. Entre ellas se encuentra la competencia ciudadana, que "contribuye a que alumnos y alumnas puedan ejercer una ciudadanía responsable y participar plenamente en la vida social y cívica", y dentro de la que cobra especial importancia "la reflexión crítica acerca de los grandes problemas éticos de nuestro tiempo y el desarrollo de un estilo de vida sostenible acorde con los Objetivos de Desarrollo Sostenible planteados en la Agenda 2030", volviendo a remarcar la importancia de los ODS en la elaboración de esta ley educativa.

La presente propuesta didáctica ha sido diseñada para la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la asignatura Matemáticas, por lo que ha sido elaborada en base a lo establecido en la ley educativa vigente, Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre (LOMLOE); además del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, y su correspondiente adaptación a la comunidad autónoma de Castilla y León, Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

Dentro de esta Ley se tratan algunos aspectos que es importante explicar para el correcto entendimiento del presente documento.

## 5.1 Objetivos de etapa

Los objetivos de la etapa son cada uno de los logros que se espera que el alumnado haya alcanzado al terminar la etapa, en este caso la Educación Secundaria Obligatoria, y cuya consecución se relaciona con la adquisición de las competencias clave.

Según el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, la Educación Secundaria Obligatoria debe contribuir a que el alumnado desarrolle las capacidades establecidas en los objetivos generales establecidos para dicha etapa.

A estos doce objetivos de etapa, el Decreto 39/2022 de 29 de septiembre, incorpora otros tres objetivos específicos para la comunidad autónoma de Castilla y León, los cuales son:

1. Conocer, analizar y valorar los aspectos de la cultura, tradiciones y valores de la sociedad de Castilla y León.
2. Reconocer el patrimonio natural de la Comunidad de Castilla y León como fuente de riqueza y oportunidad de desarrollo para el medio rural, protegiéndolo, y apreciando su valor y diversidad.
3. Reconocer y valorar el desarrollo de la Cultura Científica en Castilla y León, indagando sobre los avances en materias STEM y su valor en la transformación de su sociedad, fomentando iniciativas de responsabilidad, cuidado y respeto por el entorno.

## 5.2 Perfil de salida y competencias clave

El perfil de salida constituye el referente último del desempeño competencial, tanto en la evaluación de las diferentes etapas y modalidades de la formación básica como para el título de graduado en Educación Secundaria Obligatoria. Fundamenta el resto de las decisiones curriculares, así como las estrategias y las orientaciones metodológicas en la práctica lectiva.

Las competencias clave son desempeños fijados por el perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica, considerados imprescindibles para que los estudiantes puedan progresar con garantías de éxito en su itinerario formativo, y afrontar los principales retos y desafíos globales y locales. Además, son la adaptación al sistema educativo español de las competencias clave establecidas en la Recomendación del Consejo de la Unión Europea de 22 de mayo de 2018 relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente, la cual responde a la necesidad de vincular dichas competencias con los retos y desafíos del siglo XXI, con los principios y fines del sistema educativo y con el contexto escolar.

Según el artículo 11 del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, la consecución de las competencias y los objetivos previstos en la LOMLOE está vinculada a la adquisición y al desarrollo de las competencias clave recogidas en este Perfil de salida.

Para cada una de las competencias clave, se define un conjunto de descriptores operativos partiendo de los diferentes marcos europeos de referencia existentes.

Los descriptores operativos junto con los objetivos de la etapa constituyen el marco referencial que concreta las competencias específicas de cada materia, que dan información sobre el grado de adquisición de los anteriores.

Las competencias clave son las siguientes:

1. Competencia en Comunicación Lingüística (CCL)
2. Competencia Plurilingüe (CP)
3. Competencia Matemática y Competencia en Ciencia, Tecnología e Ingeniería (STEM)
4. Competencia Digital (CD)
5. Competencia Personal, Social y de Aprender a Aprender (CPSAA)
6. Competencia Ciudadana (CC)
7. Competencia Emprendedora (CE)
8. Competencia en Conciencia y Expresión Culturales (CCEC)

Por último, es de interés mencionar que no existe jerarquía entre las competencias clave y que no puede establecerse una correspondencia exclusiva con una única área, ámbito o materia, sino que todas se concretan, se adquieren y desarrollan a partir de los aprendizajes que se producen en el conjunto de las mismas, por lo que la adquisición de cada una de estas competencias clave contribuye a la adquisición de todas las demás.

## 5.3 Competencias específicas y criterios de evaluación

Las competencias específicas son desempeños que el alumnado debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los saberes básicos de cada materia. Las competencias específicas constituyen un elemento de conexión entre el perfil de salida del alumnado, y los saberes básicos de las materias y los criterios de evaluación. Su desarrollo se tiene que producir mediante las situaciones de aprendizaje contextualizadas.

La adquisición de las competencias específicas constituye la base para efectuar la evaluación competencial del alumnado. El nivel de desarrollo de cada competencia específica vendrá determinado por el grado de consecución de los criterios de evaluación con los que se vincula, por lo que estos han de entenderse como herramientas de diagnóstico en relación con el desarrollo de las propias competencias específicas. Estos criterios se han formulado vinculados a los descriptores del perfil de la etapa, a través de las competencias específicas, de tal forma que no se produzca una evaluación de la materia independiente de las competencias clave.

Como se ha mencionado anteriormente (apartado 5.2), el grado de adquisición de las competencias clave se concreta a través de los descriptores operativos.

Los descriptores operativos de las competencias clave son el marco de referencia a partir del cual se concretan las competencias específicas, convirtiéndose así éstas en un segundo nivel de concreción de las primeras que son específicas para cada materia.

Esta vinculación entre descriptores operativos y competencias específicas hace que la evaluación de estas últimas proporcione información sobre el grado de adquisición de las competencias clave definidas en el perfil de salida, así como el logro de las competencias y objetivos para la etapa.

Como ya se ha indicado, las competencias específicas se conectan directamente con las competencias clave. Cada etapa educativa tiene su lista de competencias específicas para cada área.

La adquisición de las competencias específicas se evalúa a través de los criterios de evaluación y se lleva a cabo a través de la movilización de un conjunto de saberes básicos que integran conocimientos, destrezas y actitudes.

Las competencias específicas correspondientes a la materia de Matemáticas en Enseñanza Secundaria Obligatoria entroncan y suponen una profundización con respecto a las adquiridas por el alumnado a partir del área de Matemáticas durante la Educación Primaria, proporcionando una continuidad en el aprendizaje de las Matemáticas que respeta el desarrollo psicológico y el progreso cognitivo del alumnado. Se relacionan entre sí y han sido agrupadas en torno a cinco bloques competenciales según su naturaleza: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación y destrezas socioafectivas.

Los criterios de evaluación son referentes que indican los niveles de desempeño esperados en el alumnado en las situaciones o actividades de aprendizaje que requieren el despliegue de las competencias específicas de cada materia o ámbito en un momento determinado de su proceso de aprendizaje.

En la Tabla 1 se recogen las competencias específicas y los criterios de evaluación correspondientes a cada una de dichas competencias, junto con los descriptores operativos del perfil de salida que se conectan con cada uno de ellos, según el Decreto que desarrolla el currículo de la etapa de ESO, para la materia Matemáticas del segundo curso.

*Tabla 1. Competencias Específicas y Criterios de Evaluación de la materia Matemáticas en 2º curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria.*

| **Competencias específicas** | **Criterios de evaluación** |
|---|---|
| 1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.<br><br>Descriptores operativosdel Perfil de salida: CCL1, CCL2, CCL3, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4. | 1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana, organizando los datos dados y/o seleccionando información, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. (CCL2, STEM1, STEM2, STEM4)<br>1.2 Aplicar diferentes herramientas y estrategias apropiadas como descomponer un problema en partes más simples que contribuyan a la resolución de problemas. (STEM1, STEM2, STEM4, CE1)<br>1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema movilizando los métodos y conocimientos necesarios. (STEM1, STEM2) |
| 2, Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.<br><br>Descriptores operativos del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM4, CD2, CPSAA4, CC3, CE3. | 2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema recibiendo indicaciones cuando sea imprescindible. (STEM1, STEM2)<br>2.2 Comprobar, con algunas indicaciones de guía, la validez de las soluciones de un problema y elaborar las respuestas comprobando su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.). (STEM1, STEM4) |
| 3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.<br><br>Descriptores operativos del Perfil de salida: CCL1, CCL2, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3. | 3.1 Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones. (CCL1, STEM1, STEM2, CD2)<br>3.2 Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos. (CCL1, STEM2)<br>3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la comprobación de conjeturas o problemas analizando el resultado obtenido. (STEM1, CD2) |

| | |
|---|---|
| 4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.<br><br>Descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3. | 4.1 Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación. (STEM1, STEM2, CD2)<br>4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando y modificando algoritmos. (STEM1, STEM3, CD2) |
| 5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.<br><br>Descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1. | 5.1 Conocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente. (STEM1, CD3)<br>5.2 Conocer y usar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas. (STEM1, CD2) |
| 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas.<br><br>Descriptores operativos del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM5, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1. | 6.1 Identificar situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas usando los procesos inherentes a la investigación: medir, comunicar, clasificar y predecir. (STEM1, STEM2)<br>6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados sencillos. (STEM2, CE3)<br>6.3 Reconocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual. (STEM2, STEM5, CCEC1) |
| 7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.<br><br>Descriptores operativos del Perfil de salida: STEM3, STEM4, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4. | 7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos. (STEM3, CD1)<br>7.2 Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo de apoyo si es necesario. (STEM3, CD1, CD2) |
| 8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología | 8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir y |

| | |
|---|---|
| matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.<br><br>Descriptores operativos del Perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3. | explicar razonamientos, procedimientos y conclusiones. (CCL1, CP1, STEM2, STEM4, CD2) 8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión. (CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4) |
| 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.<br><br>Descriptores operativos del Perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3. | 9.1 Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. (STEM5, CPSAA1, CE2, CE3)<br>9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas. (CPSAA1, CPSAA5) |
| 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.<br><br>Descriptores operativos del Perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3. | 10.1 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones. (CCL5, CP3, STEM3, CPSAA3, CC2, CC3)<br>10.2 Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, y asumiendo el rol asignado. (STEM3, CPSAA1, CPSAA3) |

Entre estas competencias, cabe señalar que la Competencia específica 3 es la más vinculada al eje del razonamiento y la demostración.

### 5.4 Las matemáticas en ESO

El Decreto 39/2022 de 29 de marzo recoge que las matemáticas son una herramienta básica para el desarrollo cognitivo, interviniendo en la capacidad de abstracción y del análisis del mundo que nos rodea, y forman parte de las tareas de la vida diaria, constituyendo la base para otras materias. El conocimiento de esta materia permite que las personas puedan valerse en su día a día y facilita una mejor incorporación al mercado laboral. Asimismo, las matemáticas tienen un papel crucial en el desarrollo sostenible y contribuyen a la implementación de los ODS y de la agenda 2030, ya que constituyen el lenguaje de los modelos que describen los fenómenos naturales y la actividad humana.

La finalidad de la materia de Matemáticas es proporcionar al alumnado herramientas de resolución de problemas e instrumentos de análisis e interpretación de datos para adquirir competencias específicas que le permitan desenvolverse en distintos contextos personales, académicos, laborales y sociales. Su importancia en el currículo, además, tiene que ver con su carácter instrumental para la mayoría de las áreas de conocimiento y su papel en el desarrollo tecnológico.

## 5.5 Saberes básicos

Los saberes básicos son conocimientos, destrezas y actitudes que constituyen los contenidos propios de una materia o ámbito cuyo aprendizaje es necesario para la adquisición de las competencias específicas.

Estos saberes se estructuran en torno al concepto de sentido matemático, y se organizan en dos dimensiones: cognitiva y afectiva. Los sentidos se entienden como el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos, métricos, geométricos, algebraicos, estocásticos y socioafectivos. Dichos sentidos permiten emplear los saberes básicos de una manera funcional, proporcionando la flexibilidad necesaria para establecer conexiones entre ellos.

En el Decreto 39/2022 se establecen los saberes básicos para Matemáticas en 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria:

# A. Sentido numérico

**1. Cantidad**

- Números grandes y pequeños: notación exponencial y científica y uso de la calculadora.
- Números enteros, fracciones, decimales, potencias de exponente entero y raíces sencillas en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana.
- Porcentajes mayores que 100 y menores que 1: interpretación.

**2. Sentido de las operaciones**

- Efecto de las operaciones aritméticas con fracciones, expresiones decimales, potencias de exponente entero y raíces sencillas.
- Propiedades de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación): cálculos de manera eficiente con enteros, fracciones, decimales, tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora.

**3. Relaciones**

- Comparación y ordenación de fracciones, decimales y porcentajes con eficacia encontrando su situación exacta o aproximada en la recta numérica.
- Selección y utilización de la representación más adecuada de una misma cantidad (decimal, fracción, representación gráfica, incluida la representación en la recta) en cada situación o problema.

**4. Razonamiento proporcional**
- Porcentajes: comprensión y resolución de problemas.
- Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, escalas, cambio de divisas, cálculos geométricos, repartos, velocidad y tiempo, etc.).
**5. Educación Financiera**
- Información numérica en contextos financieros sencillos: interpretación.
- Métodos para la toma de decisiones de consumo responsable: relaciones calidad-precio y valor-precio en contextos cotidianos.

## B. Sentido de la medida
**1. Magnitud**
- Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos en el espacio: investigación y relación entre los mismos.
- Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida en el espacio
**2. Estimación y relaciones**
- Formulación de conjeturas sobre medidas en el espacio o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones.
- Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida en el espacio.
**3. Medición**
- Longitudes, áreas y volúmenes en figuras tridimensionales: deducción, interpretación y aplicación.
- Representaciones planas de objetos tridimensionales en la visualización y resolución de problemas de áreas.
- Representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos.
- La probabilidad como medida asociada a la incertidumbre de experimentos aleatorios.

## C. Sentido espacial
**1. Figuras geométricas de tres dimensiones**
- Figuras geométricas tridimensionales: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características.
- Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras tridimensionales: identificación y aplicación.
- Construcción de figuras geométricas tridimensionales con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada …).
**2. Localización y sistemas de representación**
- Relaciones espaciales: localización y descripción mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica
- Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas.
D. Sentido algebraico
1. Patrones
- Patrones, pautas y regularidades: observación, predicción y determinación de la regla de formación en casos sencillos, mediante palabras, gráficas, tablas o reglas simbólicas.
2. Modelo matemático

- Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando material manipulativo y representaciones matemáticas para llegar al lenguaje algebraico.
- Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.
- Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.

**3. Variable**

- Variable: Comprensión del concepto como incógnita en ecuaciones lineales con coeficientes racionales, como indeterminadas en expresión de patrones o identidades y como cantidades variables en fórmulas y funciones afines.
- Monomios. Operaciones básicas.

**4. Igualdad y desigualdad**

- Relaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica.
- Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas, especialmente aquellos basados en relaciones lineales.
- Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales con coeficientes racionales y sistemas de ecuaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana.
- Ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el uso de la tecnología según el grado de dificultad.

**5. Relaciones y funciones**

- Función como relación unívoca entre magnitudes.
- Relaciones funcionales: identificación y comparación de diferentes modos de representación, enunciados verbales, tablas, gráficas o expresiones algebraicas.
- Funciones afines: traducción de unas formas de representación a otras y estudio de sus propiedades.

**6. Pensamiento computacional**

- Estrategias útiles en la interpretación y/o modificación de algoritmos.
- Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.

## E. Sentido estocástico

**1. Incertidumbre**

- Fenómenos deterministas y aleatorios: identificación. Espacio muestral y sucesos.
- Experimentos simples: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada.
- Asignación de probabilidades mediante experimentación, el concepto de frecuencia relativa y la regla de Laplace.

## F. Sentido socioafectivo

**1. Creencias, actitudes y emociones**

- Esfuerzo y motivación: reconocimiento de su importancia en el aprendizaje de las matemáticas.
- Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación.
- Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.
- Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.

**2. Trabajo en equipo y toma de decisiones**

- Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.
- Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.

**3. Inclusión, respeto y diversidad**

- Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.
- La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...).

# 6. PROPUESTA DIDÁCTICA

## 6.1. Introducción

La importancia de esta propuesta, para alumnos de 2º curso de ESO, radica en su carácter interdisciplinar y en una enseñanza de las Matemáticas contextualizada en aspectos de la vida cotidiana que contribuye a la motivación del alumnado despertando su curiosidad e interés.

El tema elegido para la propuesta didáctica: Enseñanza y aprendizaje de la proporción se ha diseñado a través de una situación de aprendizaje constituida por una secuencia de actividades variadas (ejercicios de aplicación, problemas contextualizados, juegos, actividades manipulativas, etc.). Esta secuencia de aprendizaje se enmarca en la unidad didáctica correspondiente al Razonamiento Proporcional y su implementación se llevará a cabo en las sesiones de clase intercalando la realización de las actividades que constituyen la situación de aprendizaje con clases explicativas por parte del profesor.

En la LOMLOE se definen situaciones de aprendizaje como situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas.

A lo largo de este apartado se van a presentar los objetivos, las competencias, los saberes básicos y los criterios de evaluación, que están implicados en el desarrollo de esta propuesta. Además, se hará una breve contextualización, se describirá la situación de aprendizaje diseñada en este trabajo y su temporalización, así como las actividades que la constituyen y los aspectos relacionados con la metodología, la atención a la diversidad y la evaluación de los alumnos y de la propuesta diseñada.

## 6.2. Objetivos de la propuesta

De acuerdo con los objetivos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria descritos en el apartado 5.1 de este documento, se han establecido una serie de objetivos didácticos que debe alcanzar el alumnado mediante la implementación de la propuesta.

Los objetivos que se pretende que consigan los estudiantes con el desarrollo de esta situación de aprendizaje son:

- Contribuir a la adquisición de las competencias específicas correspondientes a Matemáticas de 2º curso de ESO (recogidas en el apartado 5.4 de esta memoria).

- Conocer y comprender las relaciones de proporcionalidad y sus tipos.
- Utilizar el razonamiento proporcional y la demostración.
- Saber aplicar los conocimientos adquiridos a contextos y situaciones de la vida real.
- Despertar el interés y sentirse motivados para el aprendizaje de las matemáticas y otras materias de ámbito científico.
- Trabajar la expresión oral y escrita.
- Aprender trabajando en grupos en grupos cooperativos y adquirir habilidades sociales y de comunicación.
- Desarrollar destrezas en el manejo de las TIC.

## 6.3 Contextualización

La propuesta diseñada no ha sido planteada para ningún centro específico, ya que su implementación es viable en cualquier centro educativo en el que se imparta la etapa educativa de ESO al no requerir medios materiales especiales. Todas las actividades se pueden realizar en un aula de clase estándar con las dotaciones habituales: pizarra, proyector, pantalla y conexión a internet. Además, no se requiere la utilización de un aula de informática pues, si no estuviera disponible en el centro, los alumnos, de forma puntual, podrían utilizar teléfonos móviles para llevar a cabo alguna actividad grupal en clase que lo requiera.

Los alumnos de 2º de Educación Secundaria generalmente tienen entre 13 y 14 años de edad. En esta etapa están en pleno desarrollo de su capacidad de pensamiento abstracto y desarrollo cognitivo. Pueden comenzar a pensar de forma más abstracta y lógica, y ser capaces de razonar y resolver problemas algo complejos. Sin embargo, aunque están experimentando cambios físicos y emocionales propios de la adolescencia, todavía conservan muchas características propias de la infancia. Los adolescentes de esta edad aún están en proceso de formación y desarrollo. Si bien pueden demostrar cierta autonomía y madurez, todavía necesitan un ambiente de apoyo que promueva su bienestar y un enfoque educativo que tenga en cuenta su etapa de transición. Es habitual en este nivel educativo que los grupos presenten una gran diversidad, en términos de habilidades, intereses y antecedentes académicos. Por estas características, se ha considerado que son un grupo muy adecuado para trabajar con actividades de diferentes tipos y utilizando recursos variados, ya que están abiertos a experiencias que les brinden un equilibrio entre la diversión y el aprendizaje. Asimismo, se debe fomentar las buenas relaciones entre la diversidad del alumnado y que todos los estudiantes se sientan seguros para expresar sus ideas y opiniones.

La elección del 2º curso de ESO, como ya se ha se ha indicado anteriormente, ha sido motivada principalmente por la posibilidad de implementar la situación de aprendizaje de manera transversal al estar implicados contenidos de la materia Física y Química.

Asimismo, este curso presenta una ventaja adicional respecto al anterior ya que, en el primer año de ESO, aunque el aprendizaje de la proporcionalidad se comienza al final de la etapa de Educación Primaria, existen diferencias en los conocimientos previos del alumnado debido a sus distintas procedencias, las cuales se reducen en gran parte tras cursar un primer año en común.

## 6.4 Metodología

La situación de aprendizaje se ha elaborado en el marco metodológico STEM considerando la interdisciplinariedad de las actividades y su contextualización en situaciones de la vida cotidiana. De este modo se incide en la motivación y el interés del alumnado al trabajar de una manera eminentemente práctica y aplicada.

Se hace referencia a la metodología de ABP (Aprendizaje Basado en Proyectos) considerando algunas actividades como pequeños proyectos que los estudiantes realizarán en grupos de trabajo cooperativo. Estos grupos serán heterogéneos con objeto de fomentar el aprendizaje entre iguales y atender a la diversidad del alumnado.

En cuanto a los recursos, la secuencia de actividades que se propone es muy variada. Las clases expositivas y explicativas por parte del profesor se irán desarrollando en las sesiones de clase intercaladas con la realización de las actividades que constituyen la secuencia de aprendizaje y se plantean con un enfoque de metodologías activas con mucha participación de los alumnos y la realización de ejercicios y problemas contextualizados de complejidad creciente. Algunos de ellos se resolverán de forma individual y otros de forma grupal con una posterior puesta en común. Asimismo, se realizarán actividades manipulativas con materiales de uso habitual y se llevarán a cabo otras actividades mediante recursos digitales como juegos educativos y ejercicios en formato digital. Todos los enlaces y materiales digitales estarán disponibles en la plataforma educativa para que los alumnos puedan utilizarlos en tiempo no lectivo para el aprendizaje y refuerzo de sus conocimientos.

## 6.5 Contenidos

La temática elegida para esta propuesta se encuentra recogida en los Saberes Básicos correspondientes a la materia de Matemáticas de 2º curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria que se recogen en el apartado 5.5 de esta memoria.

La proporcionalidad se presenta de manera específica en el Bloque A: Sentido numérico, que en su apartado 4 recoge los siguientes contenidos:

**Razonamiento proporcional**

- Porcentajes: comprensión y resolución de problemas.
- Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, escalas, cambio de divisas, cálculos geométricos, repartos, velocidad y tiempo, etc.).

Asimismo, en la propuesta elaborada también se trabajan contenidos de otros bloques, como son el Bloque C: Sentido espacial y el Bloque D: Sentido algebraico:

- Relaciones espaciales: Localización de puntos en coordenadas cartesianas.
- Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando material manipulativo y representaciones matemáticas para llegar al lenguaje algebraico.
- Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.
- Comprensión del concepto de variable como incógnita en ecuaciones lineales con coeficientes racionales, como indeterminadas en expresión de patrones o identidades y como cantidades variables en fórmulas y funciones afines.
- Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas, especialmente aquellos basados en relaciones lineales.
- Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales con coeficientes racionales y sistemas de ecuaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana.
- Ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales: resolución mediante cálculo mental y métodos manuales.
- Funciones afines: Uso y comparación de las diferentes formas de representación (enunciados verbales, tablas, gráficas o expresiones algebraicas) de una relación funcional afín.

En el curso anterior, los contenidos relativos al razonamiento proporcional en el Bloque A: Sentido numérico son:

Razonamiento proporcional

- Razones y proporciones: comprensión y representación de relaciones cuantitativas.
- Porcentajes: comprensión y resolución de problemas.
- Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas. Igualdad entre razones y método de reducción a la unidad.

Asimismo, en el Bloque C: Sentido espacial de primer curso también se recogen contenidos que se trabajan en esta propuesta

Figuras geométricas de dos dimensiones

- Razón de proporcionalidad, aplicaciones del Teorema de Tales y escalas.

Dado el carácter interdisciplinar de las actividades que se proponen, es importante mencionar los contenidos de otras materias de 2º curso de ESO que están implicados en las mismas.
En Física y Química de 2º curso, dentro del Bloque D: La interacción, se recogen los saberes básicos que se trabajan en una de las actividades propuestas:

- Predicción del movimiento rectilíneo uniforme a partir de los conceptos de la cinemática, formulando hipótesis comprobables sobre valores futuros de estas magnitudes, validándolas a través del cálculo numérico, la interpretación y elaboración de gráficas posición-tiempo, el trabajo experimental o la utilización de simulaciones informáticas.

- Las fuerzas como productoras de deformaciones en los sistemas sobre los que actúan. Ley de Hooke.

Por último, cabe señalar que en la asignatura de Biología y Geología de primer curso, en el Bloque E: Seres vivos, ya han trabajado cuestiones relativas a la nutrición que se utilizarán en otra de las actividades propuestas:

- Funciones vitales: nutrición, relación y reproducción.

## 6.6 Situación de aprendizaje

En este apartado se presenta la secuencia de actividades que conforma la situación de aprendizaje propuesta para el estudio de la proporcionalidad.

En la Tabla 2 se presentan las actividades ordenadas y estructuradas considerando su posible implementación en las sesiones de clase correspondientes a la Unidad Didáctica sobre Razonamiento Proporcional. En este caso se intercala la realización de las actividades con las clases expositivas y explicativas y la realización de ejemplos y ejercicios, indicando la tipología de cada una de ellas y su duración.
Se ha considerado adecuada la implementación de las actividades relativas al estudio del movimiento en sesiones de clase de la materia de Física y Química. Asimismo, sería de interés la adaptación de esta actividad a 4º curso, ampliando sus contenidos a otros tipos de movimiento, como el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

*Tabla 2. Secuencia de actividades estructuradas en las sesiones de clase.*

| SESIÓN | ACTIVIDAD | Tipo de actividad | Duración |
|---|---|---|---|
| 1 | 1. Ideas previas | Activación de conocimientos<br>Evaluación diagnóstica | 20 min |
| 1 | Explicación razón y proporción | Repaso de conceptos básicos | 30 min |
| 2 | Explicación proporcionalidad directa y ejercicios | Repaso de conceptos básicos | 50 min |
| 3 | Explicación proporcionalidad inversa y ejercicios | Repaso de conceptos básicos | 50 min |
| 4 | Ejemplos de proporcionalidad directa e inversa | Repaso de conceptos básicos | 50 min |
| 5 y 6 | 2 y 3. Etiqueta de yogur | Aplicación contextualizada en la vida cotidiana | 1 h y 40 min |
| 7 | 4. Quiziz proporcionalidad | Aplicación y refuerzo | 50 min |
| 8 | 5. Puzzle de semejanza y proporcionalidad | Manipulativa y de aplicación de conocimiento | 50 min |
| 9 | 6. Teorema de Tales: semejanza y proporcionalidad | Manipulativa y de aplicación de conocimiento | 50 min |
| 10 y 11 | 7 y 8. El movimiento: Tablas y gráficas | Interdisciplinar: aplicación de conocimiento a la Física y análisis de datos | 1 h y 40 min |
| 12 | 9. Mapa conceptual | Recopilación y relación de conceptos y de evaluación | 50 min |

Además de estas actividades, se propone otra actividad de aplicación a la Química, trabajando las relaciones de proporcionalidad en la estequiometría de las reacciones químicas. No se ha incluido en esta secuencia de aprendizaje, por ser más adecuada una vez aprendidos los contenidos de Química de 3º curso de ESO. Se menciona aquí por considerarse de utilidad como continuación de esta secuencia de aprendizaje o en una adaptación de la misma para cursos posteriores.

Todos los materiales y enlaces que se utilicen en las actividades estarán disponibles para los alumnos en la plataforma educativa del centro para su posterior utilización como ejercicios de repaso y refuerzo.

Seguidamente se describe cada una de las actividades propuestas.

## SESIÓN 1

### ACTIVIDAD 1. Ideas previas (Activación de conocimientos y Evaluación diagnóstica)

En esta actividad se llevará a cabo una evaluación diagnóstica inicial de las ideas previas de los alumnos, teniendo en cuenta que la proporcionalidad está incluida en los contenidos de la asignatura de Matemáticas del curso anterior.

Se comenzará con una recogida de ideas previas del alumnado sobre las relaciones de proporcionalidad. Como instrumento se utiliza un cuestionario constituido por una serie de preguntas de carácter práctico que servirá al docente para recabar información sobre los conocimientos que poseen los alumnos sobre relaciones de proporcionalidad y a los estudiantes para recordar lo aprendido anteriormente sobre esta temática. Se realizará de forma individual e indicando a los estudiantes que no será calificable. Los alumnos responderán al cuestionario online con herramientas como Kahoot o Mentimeter o en papel en función de los medios disponibles en el aula. Una vez completados los cuestionarios se pondrán en común las respuestas con la interacción de los alumnos ya sea a través del software utilizado o de palabra apoyándose en imágenes relacionadas con las preguntas proyectadas en la pizarra o el proyector.

Ejemplos de preguntas tipo:

- Si en una granja hay 5 caballos y 15 gallinas ¿cuántas gallinas hay por cada caballo? ¿Y si hubiera 9 caballos y 15 gallinas?
- Si el granjero utiliza un litro de agua para limpiar tres establos utilizando la misma cantidad de agua en cada establo y para limpiar 6 gallineros utiliza dos litros de agua y la misma cantidad de agua en cada gallinero ¿Se utiliza más agua en limpiar un establo o un gallinero?

- Si cada gallina pone 2 huevos al día, ¿cómo están relacionados el número de gallinas que hay en la granja y el número de huevos que el granjero recoge cada día?
- Si cada gallina come 70 gramos de pienso al día, ¿cómo están relacionados el número de gallinas y los días que tarda en acabarse el saco de 1 kg de pienso con el que las alimenta?

**Explicación de razón y proporción**

A continuación, el profesor impartirá una clase expositiva repasando los conceptos básicos aprendidos el curso anterior: razones y proporciones, apoyado en las preguntas y respuestas del cuestionario anterior, así como en ejemplos contextualizados en situaciones cotidianas representados con ilustraciones para facilitar la comprensión de los mismos.

La definición y exposición de ejemplos será la siguiente:

**Razón**

Una razón es una comparación entre dos cantidades o magnitudes. Se expresa generalmente como una fracción, donde el numerador representa la cantidad o magnitud de interés y el denominador representa la referencia o base de comparación siendo estos en la mayoría de casos números racionales positivos. La razón se puede simplificar si tiene factores comunes en el numerador y el denominador.

*Ejemplo 1*:

Supongamos que en una empresa hay 15 mujeres y 25 hombres (Figura 2). La razón entre el número de mujeres y el número de hombres es 15/25. Esta razón también se puede simplificar dividiendo ambos términos por 5, lo que nos da una razón simplificada de 3/5.

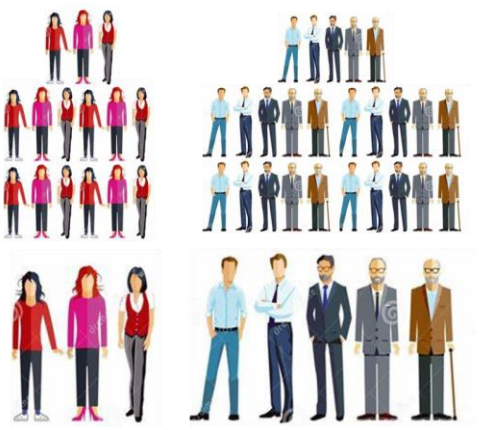

*Figura 2. Ilustración ejemplo 1.*

**Proporción**

Una proporción es una igualdad entre dos razones. En otras palabras, es una expresión matemática que establece que dos razones son equivalentes. Se denota utilizando el símbolo de proporcionalidad (≈) o el símbolo igual (=).

*Ejemplo 2*:

Una receta para un bizcocho necesita 2 tazas de azúcar y 5 tazas de harina y se quiere hacer un bizcocho con solo una taza de azúcar (Figura 3):

Se puede establecer una proporción entre la cantidad de azúcar y la cantidad de harina:

$$\frac{\text{2 tazas azúcar}}{\text{5 tazas de } harina} = \frac{1\ taza\ de\ azucar}{x}$$

Aquí, "x" representa la cantidad desconocida de harina necesaria si se utiliza 1 taza de azúcar. Resolviendo la proporción, encontramos que:

$$x = \frac{5\ tazas\ harina * 1\ taza\ azucar}{2\ tazas\ azucar} = 2{,}5\ tazas\ harina$$

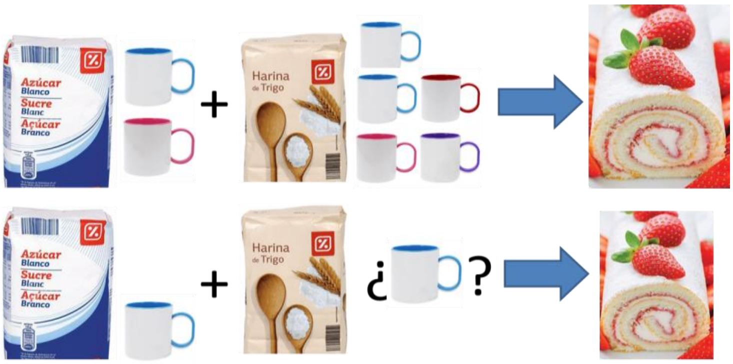


*Figura 3. Ilustración ejemplo 2.*

*Ejemplo 3*:

Imagina que una persona camina a velocidad constante, recorre 4 kilómetros en 1 hora y se quiere saber cuántos kilómetros recorrerá en 2.5 horas (Figura 4). Para esto se establece la proporción:

$$\frac{4\ km}{1\ h} = \frac{x}{2{,}5\ h}$$

Aquí, "x" representa la cantidad desconocida de kilómetros que recorrerá en 2,5 horas

Resolviendo la proporción, encontramos que:

$$x = \frac{4\ km * 2{,}5\ h}{1\ h} = 10\ km$$

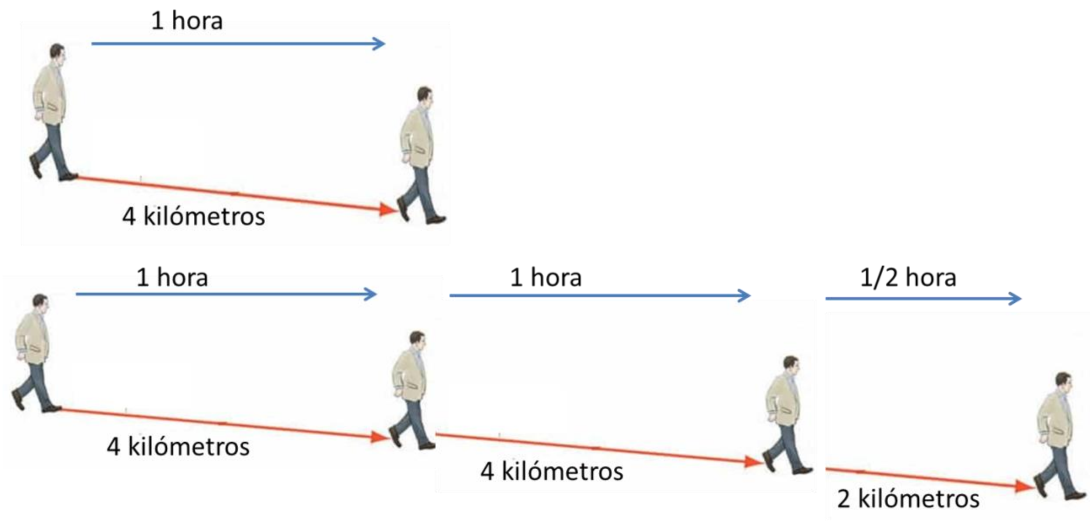


*Figura 4. Ilustración ejemplo 3.*

Temporalización: Estas dos actividades se realizarán en una sesión de aula con una duración de 50 minutos para la recopilación de los conocimientos básicos que poseen los alumnos a través del cuestionario lo que servirá también para detectar posibles concepciones erróneas del alumnado y la explicación de conceptos básicos en la PDI o en la pizarra tradicional. Se llevarán a cabo durante la 1ª sesión y el tiempo restante se dedicaría a una explicación por parte del profesor de los ejemplos propuestos que se irán resolviendo en clase con la participación de los alumnos.

## SESIÓN 2

### Proporcionalidad directa

Al comienzo de la sesión, el profesor dará una clase expositiva repasando los conceptos básicos aprendidos el curso anterior sobre la proporcionalidad directa. Tras esta explicación, se utilizarán como situaciones introductorias al tema las preguntas de la sesión anterior relacionadas (nº gallinas/nº huevos y otras similares) para ver cómo las resuelven los estudiantes y discutir esas posibles resoluciones y su adecuación (relación 1 gallina/dos huevos constante, formas de añadir dos huevos por cada gallina, etc.). Por último, se presentará y resolverá de forma cooperativa con los alumnos, un ejemplo que tiene lugar en una situación cotidiana apoyado con ilustraciones para facilitar su comprensión. Para la resolución del ejemplo se utilizarán las herramientas e ideas utilizadas para las situaciones introductorias. Las definiciones, ejemplos e ilustraciones expuestos serán los siguientes.

**Proporcionalidad directa:**

Es una relación entre magnitudes, en la cual aumentan o disminuyen de forma conjunta manteniendo la razón entre ellas constante. En una proporción directa, dos cantidades o magnitudes varían de tal manera que cuando una aumenta, la otra también lo hace, y cuando una disminuye, la otra también disminuye en ambos casos en la misma proporción. Como esta relación entre las magnitudes siempre es la misma, es decir, la razón entre ellas es constante, se puede expresar mediante una ecuación:

$$\frac{y}{x} = cte$$

Este valor es la constante de proporcionalidad entre magnitudes y suele representarse con "k". De forma que la relación entre las variables pude representarse de la forma:

$$y = k * x$$

*Ejemplo 4 (proporcionalidad directa)*:

Según una receta, para cocinar un bizcocho de limón de 4 raciones iguales, se necesitan 12 huevos y 4 limones. Sí se quiere hacer un bizcocho que tenga el doble de raciones y las raciones se quieren hacer del mismo tamaño que indica la receta, se necesitarán el doble de huevos y limones. En este ejemplo hay una proporción directa entre el número raciones y el número de huevos y limones necesarios (Figura 7):

Para la resolución se utilizan diferentes caminos de forma que los alumnos puedan relacionar la solución:

Utilizando estrategias multiplicativas:

Como la relación número de raciones cantidad de huevos y número de raciones cantidad de limones es constante, es posible obtener las razones huevos-ración y limones-ración:

$$Limones \rightarrow k = \frac{limones\ 1}{raciones\ 1} = \frac{limones\ 2}{raciones\ 2} \rightarrow k = \frac{4\ limones}{4\ raciones} = 1\frac{limon}{ración}$$
$$= \frac{x}{8\ raciones} \rightarrow k = 1 = \frac{x}{8} \rightarrow x = 1 * 8 = 8\ limones$$

$$Huevos \rightarrow k = \frac{huevos\ 1}{raciones\ 1} = \frac{huevos\ 2}{raciones\ 2} \rightarrow k = \frac{12\ huevos}{4\ raciones} = 3\frac{huevos}{ración}$$
$$= \frac{x}{8\ raciones} \rightarrow k = 3 = \frac{x}{8} \rightarrow x = 3 * 8 = 24\ huevos$$

También se puede resolver a través de las proporciones entre las variables de cada situación, teniendo en cuenta que la proporción entre las raciones es la misma que la proporción entre los limones y los huevos.

$$Limones \rightarrow \frac{personas\ 2}{raciones\ 1} = \frac{limones\ 2}{limones\ 1} \rightarrow \frac{8\ personas}{4\ raciones} = 2 = \frac{x}{4\ limones} \rightarrow$$
$$x = 2 * 4 = 8\ limones$$

$$Huevos \rightarrow \frac{raciones\ 2}{raciones\ 1} = \frac{huevos\ 2}{huevos\ 1} \rightarrow \frac{8\ raciones}{4\ raciones} = 2 = \frac{x}{12\ limones} \rightarrow$$
$$x = 2 * 12 = 24\ huevos$$

Otro posible camino en el que se puede orientar a los alumnos es mediante una resolución basada en construcciones progresivas, descomponiendo una de las situaciones en función de la otra, ayudándose de imágenes o dibujos que sirvan como esquemas:

Las raciones del bizcocho de la segunda situación son el doble que las raciones del bizcocho de la primera situación:

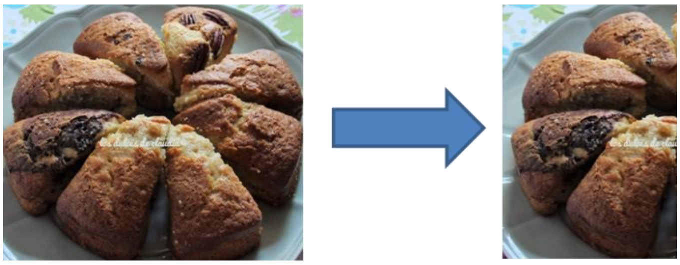

*Figura 5. Comparación raciones de cada situación.*

$$\frac{8\ raciones}{4\ raciones} = 2$$

Como cada ración tiene la misma cantidad de huevo y de limón decir, las cantidades del segundo bizcocho serán el doble que las del primer bizcocho:

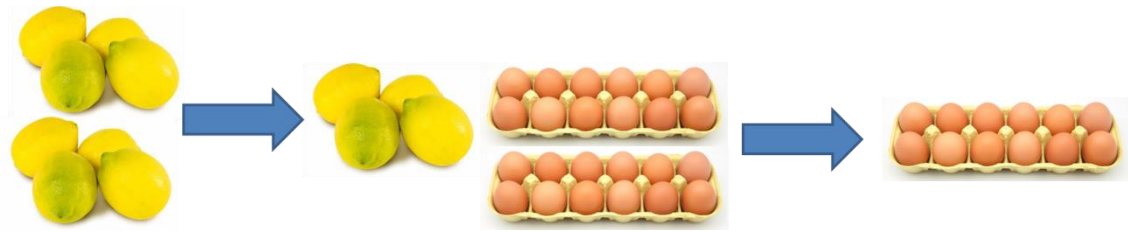

*Figura 6. Comparación ingredientes de cada situación*

$$Limones\ 2 = 2 * limones\ 1 = 2 * 4 = 8\ limones$$
$$Huevos\ 2 = 2 * huevos\ 1 = 2 * 12 = 24\ huevos$$

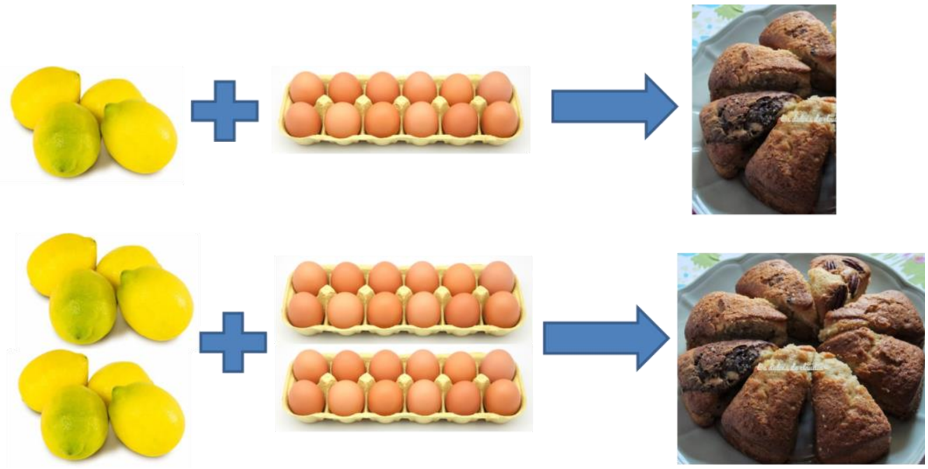

*Figura 7. Ilustración ejemplo 4.*

Temporalización:

La actividad se realizará en una sesión de aula con una duración de 50 minutos. Se utilizarán los primeros 10 minutos para la explicación del docente. Los 15 minutos siguientes será para la resolución en grupo de las preguntas de iniciación. Por último, en los 25 minutos restantes el profesor planteara una situación proporcional que resolverá de forma cooperativa con los alumnos, para que vayan adquiriendo herramientas de resolución de proporcionalidad directa y afiancen los conceptos introducidos en las sesiones anteriores.

La explicación de conceptos básicos y de las cuestiones planteadas se realizará en la PDI o en la pizarra tradicional.

## <u>SESIÓN 3</u>

**Proporcionalidad inversa**

Al comienzo de la sesión, el profesor dará una clase expositiva repasando los conceptos básicos aprendidos el curso anterior sobre la proporcionalidad inversa. Tras esta explicación, se utilizarán como situaciones introductorias al tema preguntas relacionadas con este tipo de proporcionalidad en algunas situaciones cotidianas (como el nº de gallinas y el nº de días que tarda en acabarse el pienso en un ejemplo de la sesión anterior) para ver cómo las resuelven los estudiantes y discutir esas posibles resoluciones y su adecuación. Por último, se presentará y resolverá de forma cooperativa con los alumnos, un ejemplo relacionado con una situación real que les pueda resultar familiar apoyado con ilustraciones para facilitar su comprensión. En estos ejemplos se utilizarán las herramientas e ideas utilizadas para las situaciones introductorias. Las definiciones, ejemplos e ilustraciones expuestos serán los que se exponen a continuación.

**Proporcionalidad inversa:**

En una proporción inversa, dos magnitudes varían sus cantidades de tal manera que cuando una aumenta, la otra disminuye, y viceversa. Es decir, mientras una cantidad aumenta, la otra disminuye en la misma proporción, y al disminuir una, la otra aumenta en la misma proporción. Como esta relación entre las magnitudes se mantiene constante, el producto entre ellas se mantiene constante. De forma que esta relación se puede expresar mediante la ecuación:

$$y * x = cte = k$$

De esta manera, se puede expresar una magnitud respecto a otra como:

$$y = \frac{k}{x}$$

Tras la explicación, se analizarán preguntas relacionadas con el tema para orientar a los estudiantes en la forma de resolverlas en grupos de 4 personas. Cada grupo recibe las cuestiones, de forma que puedan resolverlo de forma cooperativa al entrañar una posible mayor dificultad para parte de los alumnos.  Este sería un posible ejemplo:

- Si cada gallina come 50 gramos de pienso al día, ¿el número de gallinas y los días que tarda en acabarse el saco de 1 kg de pienso con el que las alimenta son inversamente proporcionales? ¿Por qué? ¿Si hay 5 gallinas cuantos días tarda en acabarse el pienso? ¿Y si hay 10 gallinas?

Para responder la primera pregunta el razonamiento utilizado será seguramente abductivo, ya que es evidente que la relación entre ambas cantidades (número de gallinas y días que tarda en acabarse el pienso) es tal que cuando una aumenta la otra disminuye de manera proporcional. Al tratar de responder la segunda pregunta, es probable que los alumnos utilicen cálculos de situaciones supuestas, que serán el esquema de prueba que  hará que el razonamiento pase a ser inductivo. Por último, el cálculo de los días que tarda en acabarse el pienso de las dos últimas preguntas, reforzará la hipótesis planteada. Una vez los grupos han respondido las cuestiones se ponen en común los resultados para que los alumnos puedan comprender posibles errores y se entregan las respuestas al profesor. De esta manera el docente, junto los resultados de la clase anterior, puede hacer hincapié en las siguientes sesiones en los conceptos que no se hayan entendido y en los errores más habituales de los alumnos.

Tras entregar las cuestiones, los grupos realizan una lluvia de ideas y proponen un ejemplo de proporcionalidad inversa que encuentren en su vida cotidiana para afianzar los conceptos impartidos en la clase. En este caso deben plantear el ejemplo suponiendo valores para que les resulte más fácil entender la idea y no les resulte abstracta. El profesor realizará un ejemplo previo que sirva como orientación. Un posible ejemplo sería el siguiente.

*Ejemplo 5:*
Dos vecinos se compran la misma piscina que tiene una capacidad de 6000 litros. Uno de los vecinos la llena con una manguera que vierte 1000 litros cada hora de forma continua y el otro vecino la llena con una manguera con un caudal continuo de 2000 litros/hora.
En este caso, como el volumen que hay que llenar es el mismo, el caudal de las mangueras y el tiempo que se tarda en llenar la piscina es inversamente proporcional, de forma que cuanto mayor sea el caudal que vierta la manguera, el tiempo de llenado se reducirá de forma proporcional (Figura 8).
El razonamiento en este caso se plantea de forma abductiva: Si se utiliza más caudal, se echa agua más rápidamente y la piscina se llena antes.
Se aplica este planteamiento a la situación del problema:
Una manguera echa 1000 litros cada hora y se necesitan 6000 litros. Cada hora habrá 1000 litros más, luego se necesitarán:

$$Vol\ Piscina\ 1 = 6000\ L = caudal\ manguera\ * h\ necesarias$$
$$= 1000\frac{L}{h} * h\ necesarias \rightarrow horas\ necesarias = \frac{6000}{1000} = 6\ h$$

Se hace un cálculo similar para el caso de la piscina cuya manguera tiene el doble de caudal: 2000 L/h. Cada hora habrá 2000 litros más, luego se necesitarán:

$$Vol\ Piscina\ 2 = 6000\ L = caudal\ manguera * h\ necesarias =$$
$$= 2000\frac{L}{h} * h\ necesarias \rightarrow horas\ necesarias = \frac{6000}{2000} = 3\ h$$

De esta forma se comprueba que con el doble de caudal se tarda la mitad de tiempo en llenar una piscina.

Por último, el profesor a través de una escritura más formal, hará una comprobación de las soluciones obtenidas.

En estas dos situaciones las variables tienen una relación inversamente proporcional, pero sí lo son para todos los casos deben cumplir la condición:

$$y * x = cte = k$$

$$Piscina\ 1: y * x = cte = k \rightarrow 1000\frac{L}{h} * 6h = 6000\ L$$

$$Piscina\ 2: y * x = cte = k \rightarrow 2000\frac{L}{h} * 3h = 6000\ L$$

Efectivamente se cumple, luego las variables son inversamente proporcionales.

Si el profesor detecta que no se entiende el ejemplo, puede representar más situaciones (caudal de 3000 L/h) u otros ejemplos.

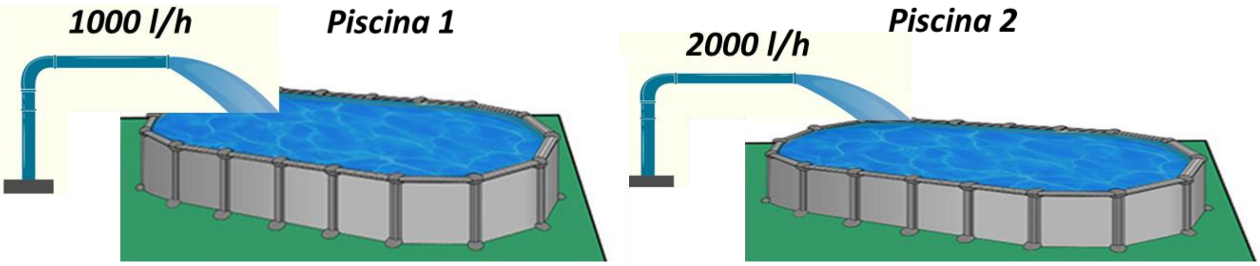


*Figura 8. Ilustración ejemplo 5.*

Temporalización:

La actividad se realizará en una sesión de aula con una duración de 50 minutos. Se utilizarán los primeros 10 minutos para la explicación del docente. Los 15 minutos siguientes será para la resolución en grupo del cuestionario y entrega y puesta en común de resultados. Por último, en los 25 minutos restantes el profesor planteara una situación proporcional y los grupos plantearán y presentarán las propuestas para afianzar los nuevos conceptos introducidos.

La explicación de conceptos básicos y de las cuestiones planteadas se realizará en la PDI o en la pizarra tradicional.

## SESIÓN 4

**Ejemplos de proporcionalidad directa e inversa**

En esta sesión se presentarán y resolverán una serie de cuestiones relativas a un ejemplo que tiene lugar en una situación cotidiana apoyado con ilustraciones para facilitar la comprensión de este. En el ejemplo propuesto, se presentará una situación de proporcionalidad directa y otro de proporcionalidad inversa. Las cuestiones de la primera situación se resolverán de forma cooperativa entre profesor y alumnos y las cuestiones de la segunda situación se resolverán de forma individual por los alumnos una vez hayan comprobado cómo se aplican las herramientas de resolución. En las cuestiones se utilizarán los planteamientos, ideas y conceptos utilizados en las sesiones anteriores. Esta actividad, permitirá a los alumnos detectar los patrones correspondientes a los tipos de proporcionalidad y enunciar conjeturas acerca del tipo de problema en cada caso.

*Ejemplo 6 (proporcionalidad directa)*:

Una fábrica produce camisetas en turnos de 6 horas, de forma que dos trabajadores tardan 2 horas en hacer cada camiseta. En cada turno se asigna un número de trabajadores al proceso. Si el número de trabajadores se duplica:

- ¿Existe alguna relación de proporcionalidad entre las variables: nº de trabajadores y nº de camisetas fabricadas?
- ¿Cuántas camisetas se fabricarán?

En este ejemplo se introduce una variable numérica que no es necesaria para los cálculos: tiempo=2 horas. Sin embargo, los alumnos deben razonar que esas dos horas son el tiempo que transcurre en las dos situaciones para que exista proporcionalidad. De esta forma, los alumnos deben razonar que variables son las que necesitan para resolver el problema y como deben utilizarlas. Al ser un tiempo fijo para las dos situaciones hay una proporción directa entre el número de trabajadores asignados y el número de camisetas producidas (Figura 9).

Una vez se ha discutido y consensuado cuales son los datos necesarios y qué papel juega cada uno, se utilizan para llegar a la solución los métodos vistos hasta el momento: comparación de la razón trabajadores-camisetas de cada situación, comparación de la proporción entre las variables en las dos situaciones y mediante descomposición escalar de una de las situaciones:

Solución 1:

$$k = \frac{6\ trab.}{3\ camisetas} = \frac{12\ trab.}{x} \rightarrow k = 2 = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{12 * 3}{6} = 6\ camisetas$$

Solución 2:

$$\frac{6\ trab.}{12\ trab.} = \frac{3\ camisetas}{x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3\ camisetas}{x} \rightarrow x = \frac{2 * 3}{1} = 6\ camisetas$$

Solución 3: Al ser el doble de trabajadores y producir todos lo mismo el número de camisetas tendrá que ser el doble también, por tanto:

$$Variables\ situac.2 = 2 * variables\ situac.1 \rightarrow$$
$$camisetas\ situación\ 2 = 2 * camisetas\ situac.1 = 2 * 3 = 6\ camisetas$$


*Figura 9. Ilustración ejemplo 6.*

*Ejemplo 7 (proporcionalidad inversa):*

Una fábrica produce camisetas en turnos de 2 horas, de forma que 2 trabajadores tardan 2 horas en hacer cada camiseta. Si se quiere fabricar un número concreto de camisetas y el número de trabajadores se duplica:

- ¿Existe alguna relación de proporcionalidad entre las variables: nº de trabajadores y nº de camisetas fabricadas?
- ¿Cuánto tiempo tardarán en fabricar las camisetas?

En este caso, en las dos situaciones se mantiene fijo el número de camisetas por lo que el número de trabajadores y el tiempo necesario para fabricar un número de camisetas son magnitudes inversamente proporcionales (Figura 8):

$$n^{o}\ trab\ 1 * tiemp\ 1 = cte = n^{o}\ trab\ 2 * tiemp\ 2$$
$$donde \rightarrow cte = 2\ trab * 2h = 4$$

La constante indica el número de horas de trabajo que precisa la fabricación de una camiseta que son 4 h. Por lo tanto:

$$n^{o}\ trab\ 2 = 2 * n^{o}\ trab\ 1\ = 2 * 2 = 4\ trab$$
$$cte = 4 = n^{o}\ trab\ 2 * tiemp\ 2 = 4\ trab * tiemp\ 2 \rightarrow tiemp\ 2 = \frac{4}{4} = 1\ h$$

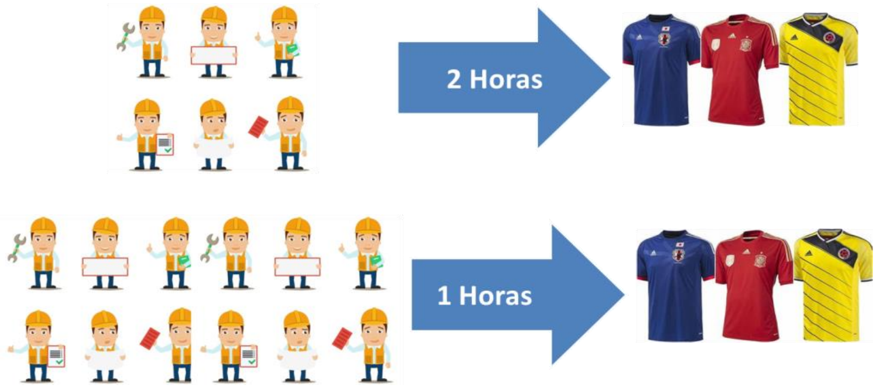


*Figura 10. Ilustración ejemplo 7.*

Temporalización: La actividad se realizará en el aula durante una sesión de clase, dedicando 20 minutos a cada ejemplo y los últimos 10 minutos para poner en común los resultados y la resolución del último ejercicio. Como recursos se utilizarán una PDI o una pizarra tradicional y un proyector para mostrar las ilustraciones.

## SESIÓN 5

### ACTIVIDAD 2. Etiqueta de un yogur

Se trata de una actividad en la que se trabajará con un alimento cotidiano, concretamente con la información nutricional mostrada en la etiqueta de un yogur.

Se comenzará hablando brevemente sobre como muchos alimentos llevan información sobre su composición nutricional indicando en su etiqueta las cantidades y/o proporciones de cada componente y cuáles son los componentes y características sobre los que más habitualmente se informa al consumidor (contenido en proteínas, hidratos de carbono, calorías, etc.).

Este ejemplo, al estar relacionado con conceptos impartidos en la asignatura de Ciencias Naturales y con objetos que los alumnos pueden ver habitualmente en sus casas o al hacer la compra hará que aumente el interés en la actividad.

Esta actividad se realizará en clase, al comienzo de la cuarta sesión, en grupos de trabajo cooperativo. Una vez terminada la resolución de las preguntas, se procederá a la puesta en común de los resultados obtenidos por cada grupo y, si hubiera discrepancias en algún resultado o se hubiera obtenido de formas diferentes, se procederá a explicar en detalle con el apoyo del profesor.

El profesor proyectará en la pantalla la imagen del yogur y la tabla de su correspondiente información nutricional (Figura 11).

A partir de los datos nutricionales (proteínas, hidratos de carbono, grasas, calcio y "energía") que son proporcionados para 2 cantidades de referencia diferentes:

- En 100 g de yogur
- En cada envase de yogur (que contiene 125 g),

COMPOSICIÓN NUTRICIONAL

| | POR 100 g | POR YOGUR (125 g) |
|---|---|---|
| PROTEINAS | 4,1 g | 5,125 g |
| HID. DE CARBONO | 5,6 g | 7 g |
| GRASAS | 3,7 g | 4,625 g |
| CALCIO | 108 mg | 135 mg |
| ENERGÍA | 72 kcal | 90 kcal |


*Figura 11. Actividad sobre la información nutricional de la etiqueta de un yogur*

Los alumnos tendrán que responder a una serie de preguntas, en orden de menor a mayor dificultad y, por tanto, con un nivel de demanda cognitiva creciente. Deberán elegir qué datos (para qué cantidad) eligen para efectuar los cálculos de cada apartado.

1. Si tomas dos yogures, ¿cuántas kilocalorías te aportan? ¿Y si tomas un yogur y medio?

Al proporcionar el contenido energético de cada envase de yogur se puede establecer de forma directa la razón de las kilocalorías por yogur: $\frac{90\ kcal}{1\ yogur}$

Como las calorías de cada yogur son las mismas, es decir la razón se mantiene constante, se puede establecer una proporción entre la cantidad de calorías y la cantidad de yogur, o bien entre las cantidades de yogur o bien sumar las calorías de ambos yogures:

$$\frac{90\ kcal}{1\ yogur} = \frac{x}{2\ yogures} \rightarrow x = \frac{90 * 2}{1} = 180\ kcal$$

$$\frac{1\ yogur}{2\ yogures} = \frac{90\ kcal}{x} \rightarrow x = \frac{2 * 90}{1} = 180\ kcal$$

$$O\ bien: kcal\ de\ 1\ yogur + kcal\ de\ 1\ yogur = 90 + 90 = 180\ kcal$$

Para calcular las calorías de un yogur y medio, como en el caso anterior, se puede hacer con la proporción directa entre cada yogur y sus calorías, entre las cantidades de yogur u obteniendo las calorías de medio yogur y sumándolas a las de un yogur:

$$\frac{90\ kcal}{1\ yogur} = \frac{x}{1{,}5\ yogures} \rightarrow x = \frac{90 * 1{,}5}{1} = 135\ kcal$$

$$\frac{90\ kcal}{1\ yogur} = \frac{x}{0{,}5\ yogures} \rightarrow x = \frac{90 * 0{,}5}{1} = 45\ kcal \rightarrow 90 + 45 = 135\ kcal$$

2. ¿Cuántas proteínas contiene 1 g de yogur? ¿Y 1000 g de yogur?

La etiqueta da la relación de proteínas contenidas en 100 gramos de yogur: $\frac{4{,}1\ g\ prot}{100\ g\ yogur}$

Para que todos los yogures tengan la misma composición, la proporción de componentes de cualquier cantidad de yogur tiene que ser equivalente, de forma que se puede establecer una proporción relacionando el contenido de proteínas con la cantidad de yogur de cada caso o relacionando las dos cantidades de yogur con los dos contenidos de proteínas:

$$\frac{4{,}1\ g\ prot}{100\ g\ yogur} = \frac{x}{1\ g\ yogur} \rightarrow x = \frac{4{,}1 * 1}{100} = 0{,}041\ g\ de\ proteinas$$

$$\frac{1\ g\ yogur}{100\ g\ yogur} = \frac{x}{4{,}1\ g\ prot} \rightarrow x = \frac{1 * 4{,}1}{100} = 0{,}041\ g\ proteinas$$

De la misma forma para los 1000 gramos de yogur:

$$\frac{4{,}1\ g\ prot}{100\ g\ yogur} = \frac{x}{1000\ g\ yogur} \rightarrow x = \frac{4{,}1 * 1000}{100} = 41\ g\ de\ proteinas$$

$$\frac{1000\ g\ yogur}{100\ g\ yogur} = \frac{x}{4{,}1\ g\ prot} \rightarrow x = \frac{1000 * 4{,}1}{100} = 41\ g\ proteinas$$

3. Las cantidades de proteínas, hidratos de carbono y grasas correspondientes a 125 g son proporcionales a las correspondientes a 100 g. ¿Qué crees que quiere decir proporcional? ¿Cómo puedes saber si realmente estas cantidades son proporcionales?

Que el contenido de cada componente sea proporcional en las dos cantidades de yogur quiere decir que las razones entre masa de componente y masa de yogur son las mismas en las dos situaciones o bien que la razón entre la cantidad de yogur de cada situación y la cantidad presente de un componente son las mismas y son constantes para cualquier cantidad de yogur.

Para comprobar que realmente son proporcionales, basta con calcular la razón de cada componente con la cantidad de yogur o entre los componentes en las dos situaciones y verificar que son iguales:

| **Razones componente yogur de cada situación** | | | **Razones entre las dos situaciones** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Componente** | **g comp/100g yogur** | **g comp/125g yogur** | Cantidad yogur | 125/100= | 1,25 |
| Proteínas | 0,041 | 0,041 | Proteínas | 5,125/4,100= | 1,25 |
| H. Carbono | 0,056 | 0,056 | H. Carbono | 7,0/5,6= | 1,25 |
| Grasas | 0,037 | 0,037 | Grasas | 4,625/3,700= | 1,25 |
| Calcio | 0,00108 | 0,00108 | Calcio | 0,135/0,108= | 1,25 |
| Energía(kcal) | 0,72 | 0,720 | Energía (kcal) | 90/72= | 1,25 |

4. ¿Por cuánto debes multiplicar la cantidad de proteínas que hay en 100 g para obtener la cantidad que hay en 125 g?

Los alumnos deben relacionar el número que se pide con la razón que relaciona las cantidades de los componentes del yogur de 100 gramos con las del yogur de 125 gramos, es decir, la razón entre las cantidades de las dos situaciones.

$$\frac{125\ g\ yogur}{100\ g\ yogur} = \frac{5{,}1\ g\ proteínas}{4{,}1\ g\ proteínas} = 1{,}25$$

Otra forma a partir de la cual pueden obtener ese factor es a través de la proporción yogur/proteínas de cada situación:

$$\frac{125\ g\ yogur}{5{,}125\ g\ proteínas} = \frac{100\ g\ yogur}{4{,}1\ g\ proteínas} \rightarrow 5{,}1 = 4{,}1 * \frac{125}{100} = 4{,}1 * 1{,}25$$

Temporalización: Se dedicarán los 50 minutos de la sesión de clase a esta actividad.

Los recursos utilizados serán una PDI o una pizarra tradicional y un proyector para la proyección de la etiqueta del yogur y las preguntas propuestas.

En esta actividad se trata de incluir la S de Science de la metodología STEM, debido a la relación que guarda con parte del temario de la parte de biología de la asignatura de Ciencias Naturales de 1º curso.

## <u>SESIÓN 6</u>

### Continuación ACTIVIDAD 3. Etiqueta de un yogur

En esta sesión se completará la actividad sobre las proporciones en la composición nutricional de la etiqueta de un producto alimentario realizada en la sesión anterior. El objetivo es completar y afianzar el aprendizaje de estos contenidos a través de este ejemplo contextualizado y de utilidad en la vida cotidiana.

Para ello, se les propondrá que en cada grupo de trabajo los alumnos planteen un cálculo en relación con los datos de la etiqueta del yogur trabajados anteriormente: cantidad de grasas, hidratos de carbono, de calcio o energía aportada en relación con el número de yogures consumidos. Tras elaborar estos enunciados, se intercambiarán entre los distintos grupos para que sean resueltos y, al final de la sesión se hará una puesta en común.

Temporalización: Para la continuación de esta actividad se dedicarán los 50 minutos de la sesión de clase en el aula.

Los recursos utilizados serán los mismos que en la sesión anterior.

## SESIÓN 7

### ACTIVIDAD 4. Quiziz proporcionalidad

En esta tarea, los alumnos responderán, de forma individual, una serie de preguntas de opción múltiple sobre proporcionalidad directa e inversa. Las preguntas están basadas en ejemplos de situaciones reales que los alumnos pueden ver en su vida diaria, similares a los de otras actividades: cantidad-precio, descuentos, velocidad-tiempo, etc. (Figura 12). El docente podrá obtener una tabla de clasificación con los resultados de los alumnos lo que aumentará su motivación al resolver las preguntas.

Se encuentra disponible en:

https://quizizz.com/admin/quiz/5c9b53e069ac14001ad74f9f/proporcionalidad-directa-e-inversa

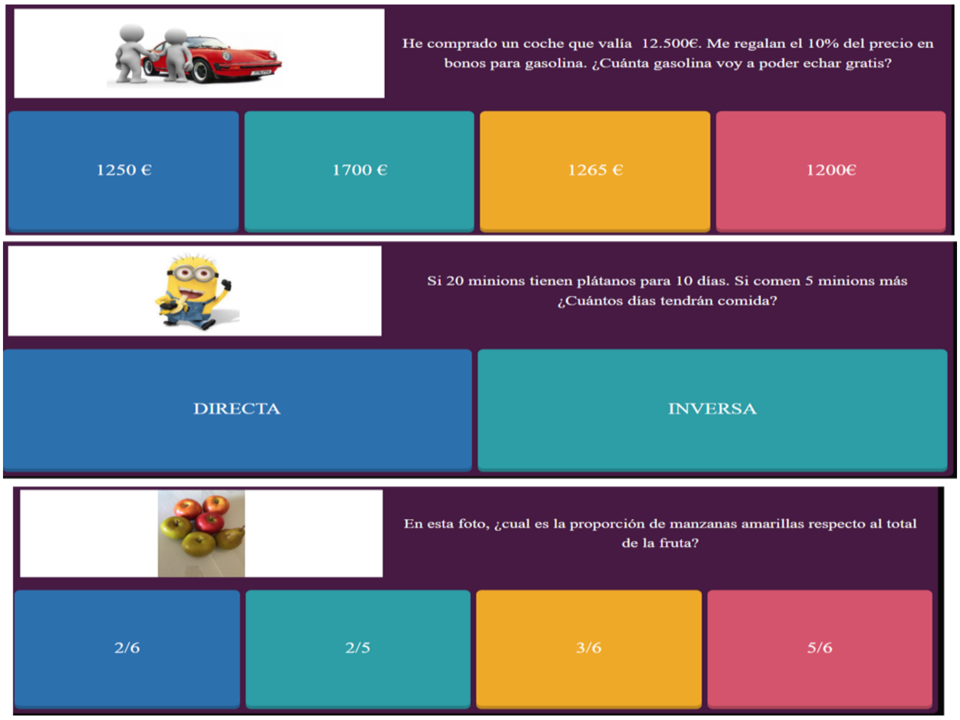


*Figura 12. Ejemplos de preguntas quiziz.*

Temporalización: Se realizará, de forma individual en una sesión de clase de 50 minutos y al comienzo de la siguiente sesión, una vez revisados por el profesor, se comentarán los resultados.

De la misma manera que en la actividad 4, se aplica también la T de Technology de la metodología STEM, debido al uso de la tecnología para desarrollar la actividad.

## <u>SESIÓN 8</u>

### ACTIVIDAD 5. Puzzle de semejanza y probabilidad

La actividad está basada en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007). Esta actividad se realizará en grupos cooperativos de 5 alumnos que realizarán un juego por equipos.

La actividad consiste en que cada grupo, siguiendo un breve manual de instrucciones, reproduzca las 6 piezas del puzle en unas nuevas dimensiones ampliadas (que serán diferentes para cada equipo), respetando las proporciones (Figura 13). Ganará el equipo que primero pueda armar correctamente el puzle completo.

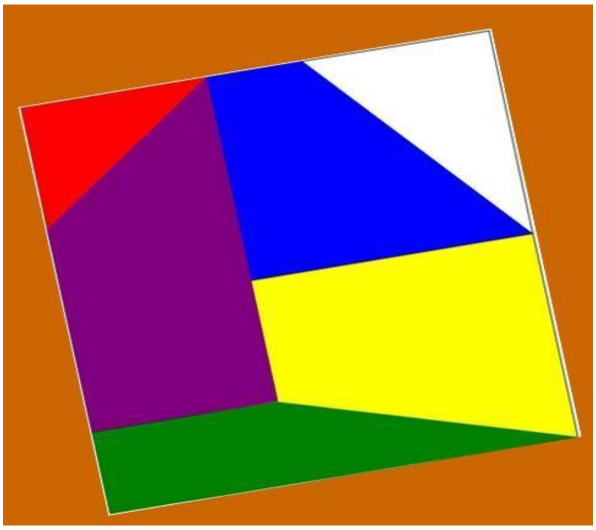

*Figura 13. Puzzle de semejanza y probabilidad.*

Los contenidos de esta actividad están relacionados tanto con la proporcionalidad como con la geometría y son los siguientes:

- Trabajar la proporcionalidad.
- Relacionar la proporcionalidad con la semejanza.
- Utilizar teoremas para cálculo de longitudes: Th., Pitágoras.
- Dividir figuras complejas en figuras sencillas: Triángulos rectángulos, cuadrados y rectángulos

El material necesario para desarrollar la actividad será:

- Regla, escuadra y cartabón para poder reproducir el puzzle.
- Seis cartas con las proporciones, una para cada grupo.

El desarrollo de la sesión será de esta forma:

El profesor divide la clase en grupos de 5 o 6 alumnos y entrega a cada alumno esta figura del puzzle (Figura 14):

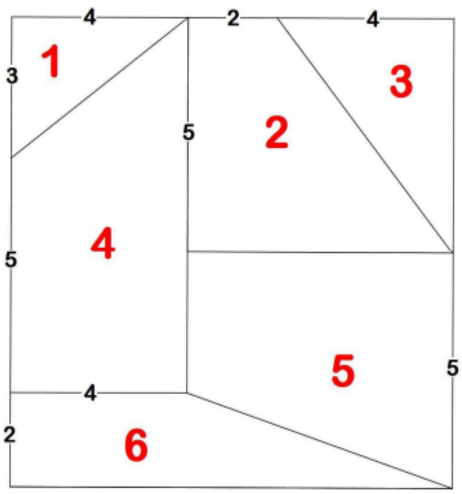


*Figura 14. Medidas Puzzle de semejanza y probabilidad.*

En la figura, las 6 piezas están numeradas y sobre los lados aparecen unas dimensiones en cm. Cada grupo recibe una carta donde se le indica las proporciones que se les va a pedir (Figura 15):

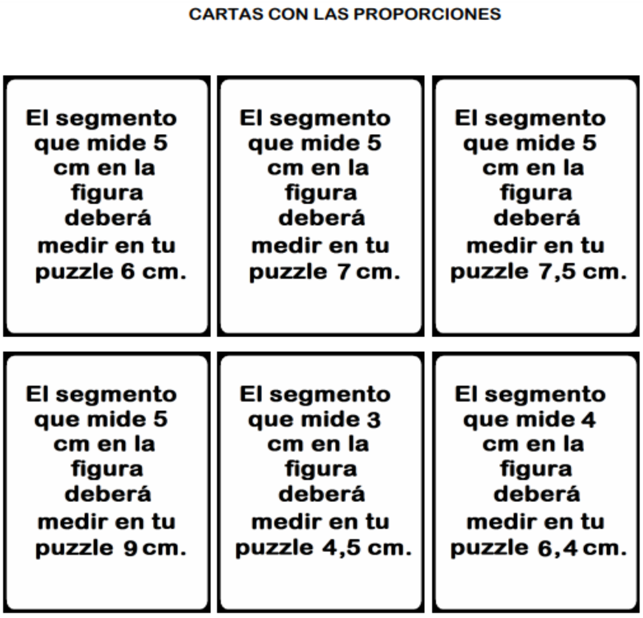


*Figura 15. Cartas con nuevas proporciones puzzle*

Las seis cartas corresponden a las razones 1´2, 1´4, 1´5, 1´6 y 1´8 respectivamente.

Cada grupo debe reproducir un puzzle semejante al de la figura, pero cambiando sus dimensiones proporcionalmente a la medida indicada en la carta del grupo. Para eso, cada alumno debe calcular las dimensiones de una de las piezas por separado (si sólo son cinco, un alumno deberá calcular las dimensiones de dos de las piezas del puzzle) y reproducir su pieza con los instrumentos de dibujo y las tijeras.

Los cálculos que necesitarán realizar serán con la proporción entre los lados con las medidas iniciales y con las nuevas medidas de la pieza que les haya tocado:

$$\frac{lado\ 1\ medidas\ iniciales}{lado\ 1\ medidas\ nuevas} = \frac{lado\ 2\ medidas\ iniciales}{lado\ 2\ medidas\ nuevas}$$

$$O\ bien: \frac{lado\ 1\ medidas\ iniciales}{lado\ 2\ medidas\ iniciales} = \frac{lado\ 1\ medidas\ nuevas}{lado\ 2\ medidas\ nuevas}$$

Ejemplo pieza 1 y carta 5 (Figura 16):

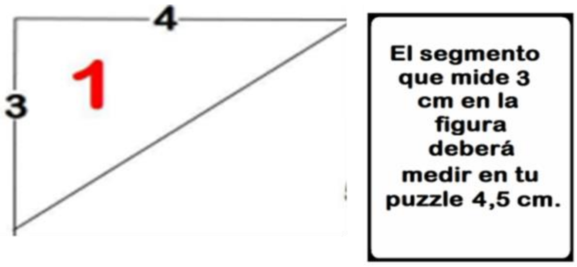


*Figura 16. Cartas con nuevas proporciones puzle.*

$$\frac{3}{4,5} = \frac{4}{x} \rightarrow x = \frac{4,5 * 4}{3} = \frac{18}{3} = 6\ cm$$

$$O\ bien: \frac{3}{4} = \frac{4,5}{x} \rightarrow x = \frac{4 * 4,5}{3} = \frac{18}{3} = 6\ cm$$

Además, como hay piezas que comparten lados, los cálculos pueden ser cooperativos entre los alumnos que tengan piezas contiguas.

Algunas piezas pueden requerir también su división e figuras más sencillas para facilitar los cálculos, como por ejemplo la pieza 6 (Figura 17):

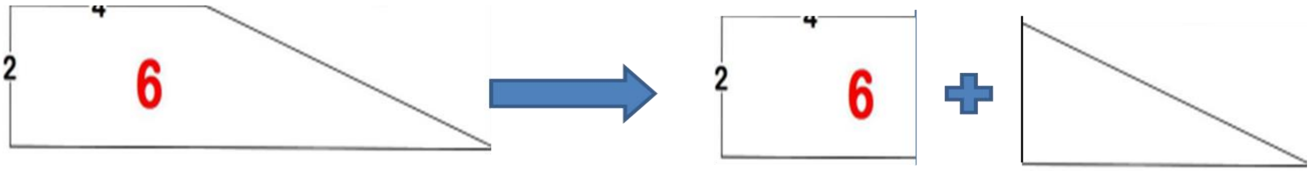


*Figura 17. Desglose pieza 6*

Al acabar la reproducción de las 6 piezas, se deberán unir para formar el nuevo cuadrado. Ganará el grupo que acabe el primero su nuevo puzzle.

La actividad de realizará en el aula y, durante su desarrollo, el profesor irá supervisando a los distintos grupos para orientarlos si fuera necesario.

Temporalización: La actividad se llevará a cabo en una sesión de 50 minutos: 5 minutos para la explicación de la actividad y la colocación de los alumnos en su grupo, 30 minutos para el cálculo, recorte de las piezas y formación de la figura y por último 15 minutos para la explicación de la solución y comparación de resultados.

Para esta actividad se utilizarán como recursos los puzles, las cartas con las proporciones y cartulina y tijeras para la construcción de los nuevos cuadrados.

En esta sesión se aplica la E de Engineering (ingeniería) del método STEM, debido a la necesidad de combinar cálculos y construcciones para llegar al resultado.

## <u>SESIÓN 9</u>

## ACTIVIDAD 6. Teorema de Tales: semejanza y proporcionalidad

De la misma forma que la sesión anterior, esta actividad relaciona contenidos de proporcionalidad y de geometría a través del Teorema de Tales. La actividad está centrada en el primero de los Teoremas, que explica la forma de construir un triángulo semejante a otro ya existente: *Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.*

- Para la actividad se utilizará el primero de los teoremas, de forma similar a como Tales lo utilizó para medir la pirámide de Keops (Figura 18).

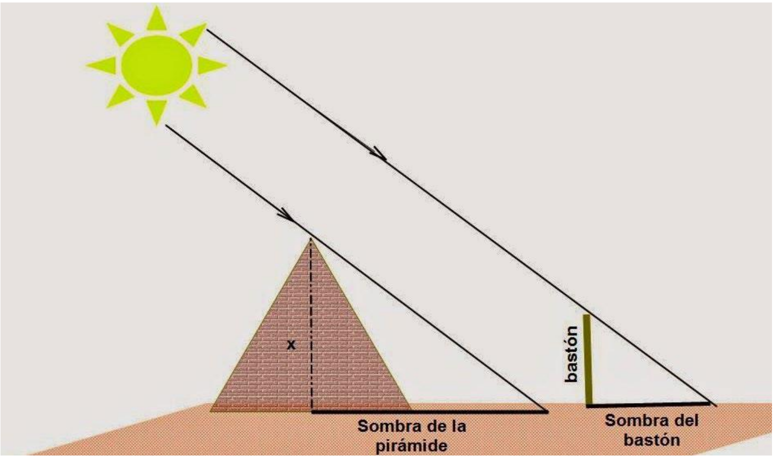


*Figura 18. Medición de la altura de la pirámide de Keops mediante relaciones de semejanza (Teorema de Tales).*

El objetivo de esta actividad será que los alumnos recreen en sus casas la medición de la pirámide de Keops a partir de la explicación y simulación del proceso llevados a cabo por el profesor en la sesión del aula.

El docente primero hará la explicación teórica del proceso:

- Tales calculo la altura de la pirámide comparando la longitud de la sombra de la misma, con la sombra proyectada por un bastón de longitud conocida. Para ello esperó a una hora del día en que el sol proyectase las sombras de forma que estuvieran alineadas.
- De esta forma, Tales estableció una relación de semejanza entre dos triángulos rectángulos, formados por las alturas de la pirámide (hasta la cúspide) y el bastón, sus sombras y los rayos del sol que las unen, suponiendo estos paralelos.

- Por lo tanto, de acuerdo con el teorema, Tales obtuvo la altura de la pirámide de la siguiente manera:

$$\frac{Altura\ de\ la\ pirámide}{Longitud\ sombra\ de\ la\ pirámide} = \frac{Longitud\ bastón}{Longitud\ sombra\ del\ bastón}$$

$$\rightarrow Altura\ pirámide = \frac{Longitud\ sombra\ de\ la\ pirámide * Longitud\ bastón}{Longitud\ sombra\ del\ bastón}$$

Para comprobar de forma empírica el teorema se va a recrear el cálculo de la altura de la pirámide con material manipulativo que los alumnos tengan en sus casas. El material necesario para desarrollar la actividad será:

- Un flexo, lámpara o fuente de luz que podamos dirigir en una dirección deseada.
- Objeto 1, de altura mayor (desconocida) que será la "pirámide".
- Objeto 2, de altura menor (conocida) que será el "bastón".
- Un metro o regla para medir las sombras proyectadas de los objetos.
- Calculadora, papel y bolígrafo.

Para el experimento se utiliza un bote de champú como objeto de altura mayor, un bote de desodorante de altura desconocida como objeto de altura menor y un flexo normal para proyectar las sombras de ambos objetos.
La construcción resultante sería la siguiente (Figura 19):

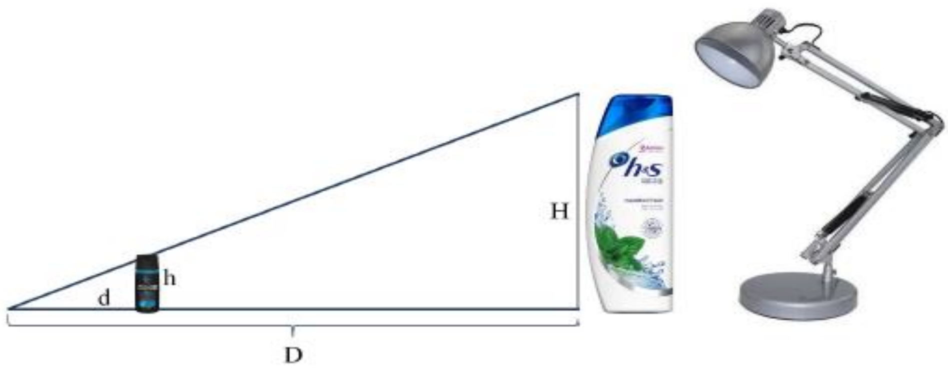


*Figura 19. Aplicación del teorema de Tales en el aula*

Donde H y h son las alturas de los objetos 1 y 2 y D y d las longitudes de sus sombras.

Procedimiento: Se colocan el objeto 1 alineado con la fuente de luz que se utilice, de forma que se proyecte su sombra sobre el suelo y se mide la longitud de esa sombra (Distancia D). A continuación, se coloca el objeto 2 de forma que su sombra quede alineada con la del objeto 1 y termine a la misma distancia y se mide su longitud. Este proceso viene indicado en el siguiente esquema (Figura 20):

*Figura 20. Realización del experimento de aplicación del teorema de Tales.*

En la simulación llevada a cabo se han obtenido las siguientes medidas:

- D=42 cm
- d=19,5 cm
- h=14 cm (altura del objeto 2 “bastón” conocida)

Una vez obtenidas las longitudes de las sombras proyectadas, se calcula la altura del objeto 1, aplicando el teorema:

$$\frac{H}{h}=\frac{D}{d}\rightarrow H=\frac{h*D}{H}=\frac{14*42}{19{,}5}=30{,}15\ cm$$

Se mide el objeto 2 a modo de comprobación y la altura obtenida es de aproximadamente 30cm, por lo que los cálculos son correctos.

Una vez terminada la simulación, los alumnos podrán preguntar al profesor para resolver sus dudas. Los alumnos deberán repetir el experimento en sus casas y enviar al profesor a través la plataforma digital del centro un archivo PDF con los resultados y desarrollo del experimento, para su posterior evaluación.

Temporalización: La primera parte se realizará en el aula de matemáticas en una sesión de clase de 50 minutos, los 15 primeros para la explicación teórica del teorema y su aplicación a la obtención de la altura pirámide, los 25 minuto siguientes para llevar a cabo la simulación medición y cálculos correspondientes y los 10 últimos para resolver las dudas que los alumnos pudieran tener para llevar a cabo el experimento en sus casas. La segunda parte los alumnos la llevarán a cabo fuera del horario escolar con un tiempo estimado de realización de 2 horas.

Los recursos necesarios para la actividad en el aula son los anteriormente indicados. Para llevar a cabo la tarea fuera del horario escolar se necesitará un teléfono móvil u otro dispositivo con el que puedan documentar la tarea.

Como en la sesión anterior, se aplica la E de Engineering del método STEM, a causa de la combinación de cálculos y diseño de un montaje con elementos sencillos para obtener el resultado.

## SESIÓN 10

### ACTIVIDAD 7. El movimiento rectilíneo uniforme (Actividad interdisciplinar de Física)

En esta actividad se propondrán problemas en los que se utilicen tablas y gráficas para representar relaciones de proporcionalidad de forma que los alumnos se familiaricen con su interpretación.

Los problemas consistirán en un desplazamiento en automóvil en el que se varían la distancia o la velocidad y se compara su relación con el tiempo. Para esta comparación, el profesor con ayuda del proyector, representará algun ejemplo gráficamente con la herramienta Excel, explicando detalladamente cada uno de los pasos.

Al comienzo de la sesión el profesor hará una breve exposición de que es la velocidad y cómo se relaciona con la distancia recorrida por el móvil y el tiempo utilizado para el desplazamiento, ya que es la razón de ambas: $v = \frac{Dist}{t}$

*Ejemplo 1*:

Un coche circula a una velocidad constante y tarda dos horas en llegar a un destino a 60 km de distancia. Si el coche mantiene la velocidad constante y tiene que llegar a un destino al doble de distancia (Figura 21):

- ¿Existe alguna relación de proporcionalidad entre las variables?
- ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al destino?

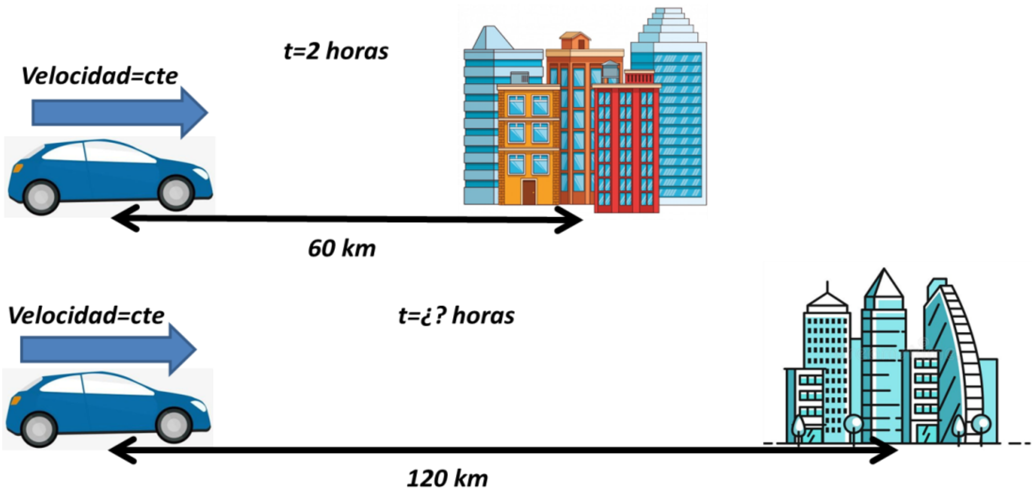


*Figura 21. Ilustración ejemplo 1 actividad 7.*

Para responder a la primera pregunta, los alumnos hacen una suposición o conjetura a través de un planteamiento abductivo del tipo: Como la velocidad es constante y tiene que llegar a un destino situado al doble de distancia, el tiempo que necesitará será el doble también. Por lo tanto, la distancia recorrida y el tiempo transcurrido están en una proporción directa. Para la resolución del problema y comprobación de la hipótesis se utilizan diferentes caminos de forma que los alumnos puedan relacionar la solución.

Utilizando estrategias multiplicativas: Razones y proporciones

Como la relación tiempo y distancia recorrida es constante para cualquier situación, es posible obtener la razón distancia tiempo: $\frac{60km}{2h} = 30km/1h = cte = k$ de forma que recorre 30 km en una hora. Como se pide el tiempo que tarda en recorrer 120 km:

$$k = \frac{Dist\ 1}{tiempo\ 1} = \frac{Dist\ 2}{tiempo\ 2} \rightarrow k = \frac{60km}{2h} = 30\frac{km}{1h} = \frac{120\ km}{x} \rightarrow k = 30 = \frac{120}{x} \rightarrow$$

$$x = \frac{120}{30} = 4\ horas$$

También se puede resolver a través de las proporciones entre las variables de cada situación, teniendo en cuenta que la proporción entre las distancias es la misma que la proporción entre los tiempos:

$$\frac{Dist\ 2}{Dist\ 1} = \frac{tiempo\ 2}{tiempo\ 1} \rightarrow \frac{120\ km}{60\ km} = \frac{x}{2\ h} \rightarrow x = \frac{120 * 2}{60} = 4\ horas$$

Otro posible camino en el que se puede orientar a los alumnos es mediante una resolución basada en construcciones progresivas, descomponiendo una de las situaciones en función de la otra.

La distancia recorrida en la segunda situación es el doble que la primera:

$$\frac{120\ km}{60\ km} = 2$$

Como la velocidad es constante el tiempo que tarda el coche en recorrer el doble de distancia también será el doble, es decir, las magnitudes de la situación final son el doble que las de la situación inicial:

$$\frac{x}{2\ h} = 2 \rightarrow x = 2 * 2h = 4\ horas$$

Si el alumno ha hecho una suposición errónea (no hay relación de proporcionalidad o la relación es de proporcionalidad es inversa) podrá comprobar su error durante la resolución del problema o en la puesta en común de resultados.

A continuación, se representarán gráficamente explicando los datos de las dos situaciones (Figura 22) mostrando que la velocidad es constante y las magnitudes distancia y tiempo son directamente proporcionales en el movimiento rectilíneo uniforme.

| | t (h) | Dist (km) |
|---|---|---|
| *Situación 1* | 2 | 60 |
| *Situación 2* | 4 | 120 |


*Figura 22. Representación gráfica ejemplo proporcionalidad directa*

Este ejemplo se completará en la sesión siguiente al realizar la actividad 8, en la que se los alumnos trabajarán con diferentes tablas de datos y representaciones gráficas relativas al movimiento rectilíneo uniforme en las que afianzarán la relación entre las magnitudes físicas implicadas espacio, tiempo y velocidad.

*Ejemplo 2:*

Un coche circula a una velocidad constante de 30 km/h y tarda dos horas en llegar a un destino situado a 60 km de distancia. Al día siguiente tiene que ir al mismo lugar, pero el coche circulará al doble de velocidad que el día anterior manteniendo esa velocidad durante todo el camino (Figura 23).

- ¿Existe alguna relación de proporcionalidad entre las variables?
- ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al destino?

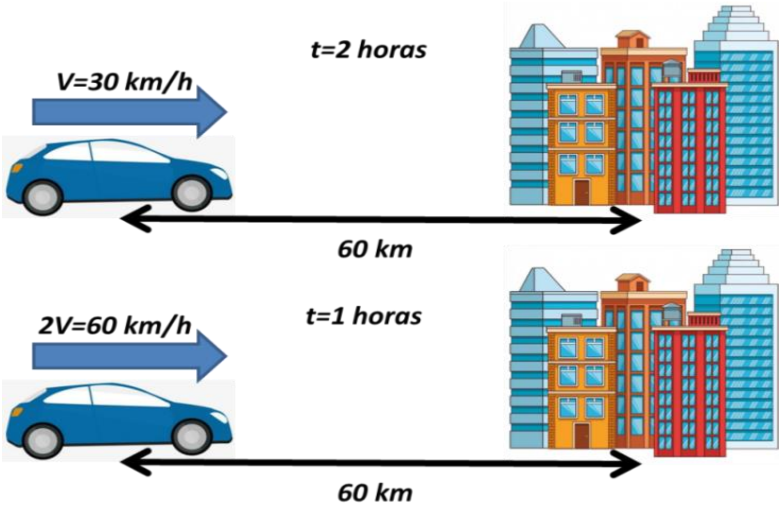


*Figura 23. Ilustración ejemplo 2 actividad 7.*

Para responder a la primera pregunta, los alumnos hacen una suposición o conjetura a través de un planteamiento abductivo y para la resolución del problema y comprobación de la hipótesis se utilizan diferentes caminos de forma que los alumnos puedan relacionar la solución.

En este escenario, como la distancia en las dos situaciones es la misma y las dos velocidades de cada situación son diferentes pero ambas constantes, la velocidad a la que circula el coche y el tiempo transcurrido hasta llegar al destino están en una proporción inversa (Figura 23):

Como la velocidad y el tiempo son inversamente proporcionales se cumple que:

$$Vel\ 1 * tiemp\ 1 = cte = Vel\ 2 * tiemp\ 2$$

$$donde \rightarrow cte = 30\frac{km}{h} * 2h = 60km\ \ y\ \ Vel\ 2 = 2 * 30\frac{km}{h} = 60\frac{km}{h}$$

Por lo tanto:

$$cte = 60\ km = Vel\ 2 * tiemp\ 2 = 60\frac{km}{h} * tiemp\ 2 \rightarrow tiemp\ 2 = \frac{60}{60} = 1\ h$$

*30 km/h * 2 horas = 60 km/h * tiemp 2 → tiemp 2 = 30*2/60 = 1 h*

Se muestra que la constante de proporcionalidad inversa es igual a 60 km en las dos situaciones y el tiempo que se tarda en recorrer esa distancia es la mitad en la situación 2 (donde la velocidad es el doble) que en la situación 1. Por lo tanto, las magnitudes velocidad y tiempo son inversamente proporcionales en el movimiento rectilíneo uniforme.

Tras realizar los dos ejercicios el profesor responderá las dudas que puedan haberles surgido.

Temporalización: Se dedicarán los 50 minutos de la sesión de clase a esta actividad.

La resolución de los ejemplos previa a la representación se hará de forma cooperativa con los alumnos en la pizarra. Los recursos utilizados serán una PDI o una pizarra tradicional y un proyector para la proyección de los procesos de representación gráfica.

Esta actividad se trata de incluir la S de Science de la metodología STEM, debido a la relación que guarda con contenidos de la materia Física y Química.

## SESIÓN 11

### ACTIVIDAD 8. El movimiento 2 (Actividad interdisciplinar de Física)

La segunda actividad sobre sobre el movimiento rectilíneo uniforma se desarrollará en la siguiente sesión de clase y consta de dos partes.

En la primera, se comenzará entregando a cada alumno de forma individual un cuestionario con dos problemas relacionados con la velocidad, similar a los de la sesión anterior, con la representación gráfica de sus magnitudes. En ellos los alumnos deben responder una serie de preguntas:

¿Qué magnitud está representada en cada eje?

¿Qué punto representa cada situación en cada gráfica?

¿Qué magnitudes lo forman y que valores tienen?

¿Se observa alguna tendencia en la representación gráfica de magnitudes directamente proporcionales?
¿Y en la representación de magnitudes inversamente proporcionales?
Si la velocidad es constante ¿cómo se relaciona con el espacio recorrido? ¿y con el tiempo que tarda en recorrerlo?
Una vez respondidos los cuestionarios, se pondrán en común los resultados y el profesor resolverá las dudas y preguntas de los alumnos haciendo hincapié en la velocidad como relación lineal de las magnitudes espacio y tiempo (Física).

Para la realización de la segunda parte de esta actividad, el profesor dividirá la clase en grupos de 4 alumnos y entregará a cada grupo otros dos ejemplos impresos diferentes para cada grupo: una gráfica y una tabla con datos numéricos, dónde deben interpretar los datos de la gráfica en el primer ejercicio y representar e interpretar los datos de la tabla en el segundo ejercicio y entregarlos al terminar la clase.
Temporalización: La sesión está dividida en dos partes, en la primera los alumnos tienen 20 minutos para resolver el cuestionario. Tras esto, se dedicarán 10 minutos a la puesta en común y los últimos 20 minutos para la realización de los 2 ejercicios grupales.
Los recursos utilizados serán una PDI o una pizarra tradicional, los cuestionarios entregados a los alumnos y las tablas y gráficas entregadas en la segunda parte.
En esta actividad se trata de incluir la S de Science de la metodología STEM, debido a que se trabajan contenidos de la materia Física y Química del 2º curso de ESO.

## SESIÓN 12

### ACTIVIDAD 9. Mapa conceptual

Los mapas conceptuales son un recurso gráfico esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales, relacionados entre sí, incluidos en una estructura de proposiciones de forma jerárquica. Los mapas conceptuales son herramientas gráficas para organizar y representar el conocimiento.
En esta última tarea los alumnos elaborarán un mapa conceptual con todo lo aprendido sobre las relaciones de proporcionalidad, incluyendo algunos ejemplos y aplicaciones. Se realizará en clase, en grupos de trabajo de 4 alumnos. Cada grupo construirá un mapa conceptual sin poder mirar ningún tipo de apuntes ni material de apoyo, aunque en cualquier momento pueden preguntar al profesor las dudas que tengan. Al final de la

actividad se hará una puesta en común y se corregirán y completarán los mapas conceptuales.

Fortalecen el aprendizaje autónomo en los estudiantes y contribuir a la comprensión de las diferentes estructuras teóricas y las relaciones conceptuales, a través del uso de elementos visuales que contribuyen con este proceso educativo.

Temporalización: esta actividad se realizará en una sesión de clase (50 minutos).

En las Figuras 24 y 25 se muestran algunos ejemplos, como posibles respuestas de mapa conceptual.

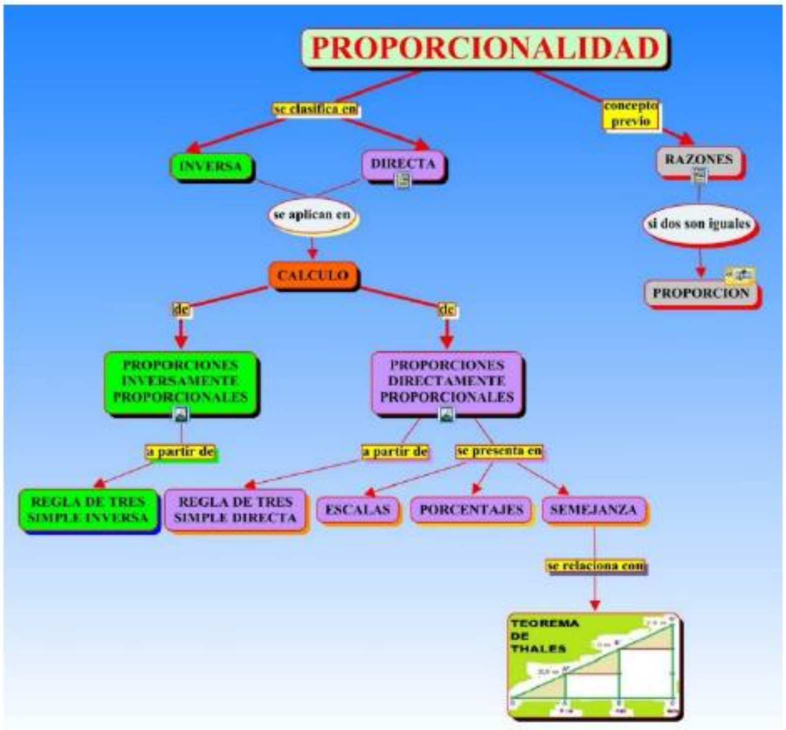


*Figura 24. Ejemplo 1 de mapa conceptual*

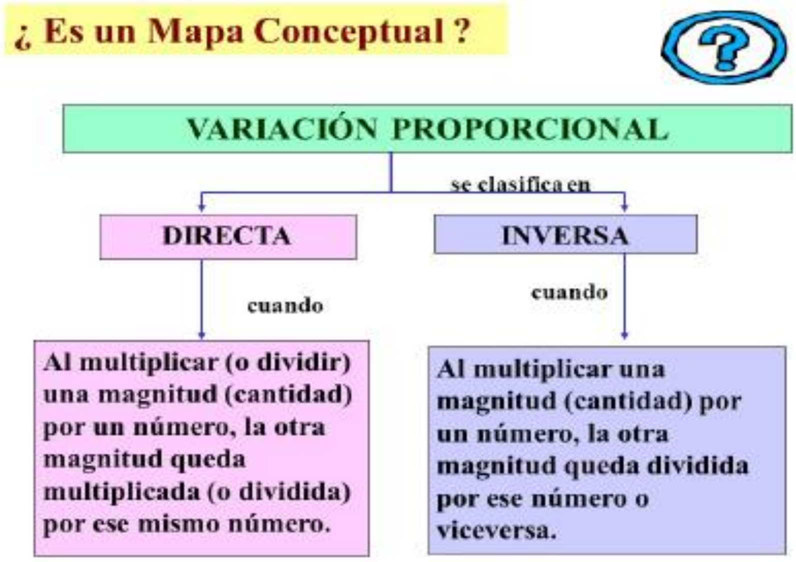


*Figura 25. Ejemplo 2 de mapa conceptual*

## 6.7 Medidas de atención a la diversidad, inclusión y necesidades especiales de aprendizaje

Con respecto a las adaptaciones curriculares, aunque existe diversidad en los estudiantes en el grupo supuesto, ninguno necesita adaptaciones curriculares significativas ya que la realización de una gran parte de las actividades en grupos de trabajo cooperativo facilita el aprendizaje y la integración de todos los estudiantes con la ayuda de sus compañeros. Si se presentara algún caso con necesidades educativas especiales como respuesta a la diversidad se procederá a la aplicación de los principios DUA (Diseño Universal de Aprendizaje) para la atención a las diferencias individuales con tutorías particulares de refuerzo por parte del profesor y mediante los apoyos necesarios por parte del centro. Para alumnos de altas capacidades se propondrían actividades de ampliación mediante ejercicios y problemas de mayor complejidad.

## 6.8 Evaluación y calificación de los alumnos

Para la evaluación del aprendizaje de los alumnos se aplicarán los criterios de evaluación correspondientes a las competencias específicas para Matemáticas de 2 curso de ESO que se han detallado en el apartado 5.4 de esta memoria.

Para la calificación de los alumnos se considerará la actitud y participación de cada alumno durante las sesiones de clase utilizando como instrumento la observación y efectuando el seguimiento mediante un diario de clase que completará después de cada

sesión. Esto tendrá un peso del 20% en la calificación final de la situación de aprendizaje.
Un 30% de la calificación correspondería a los resultados de las actividades realizadas (15% para las realizadas individualmente y otro 15% para las que han llevado a cabo de forma grupal).

Una vez terminada la implementación se realizará una prueba individual en una sesión de clase posterior que consistirá en la elaboración de un mapa conceptual (teniendo en cuenta que ya han utilizado este recurso en la última actividad de la situación de aprendizaje de forma grupal) de todo lo aprendido y en la resolución de 3 problemas, similares a los trabajados, y que aportará el 50% a la calificación final de la situación de aprendizaje.

## 6.9 Evaluación y valoración de la secuencia de aprendizaje

Al no haber podido implementar la propuesta no ha sido posible efectuar la evaluación de la misma. Como instrumentos de evaluación de la situación de aprendizaje diseñada se utilizarán tres instrumentos:

- Las calificaciones obtenidas como resultado de la evaluación del alumnado que proporcionarán información sobre el aprendizaje adquirido mediante la realización de las actividades.

- El registro de las observaciones del profesor que servirán como medida de la motivación, el interés y la participación de los estudiantes.

- Un cuestionario de satisfacción que se realizará de forma anónima y cuyas respuestas aportarán información sobre cada una de las actividades y sobre la situación de aprendizaje en su totalidad.

Como valoración personal, creo que la situación de aprendizaje es muy versátil dada la variedad de tipos de actividades realizadas y de recursos utilizados y que puede romper la monotonía de las clases tradicionales despertando el interés de los alumnos y comprendiendo la utilidad de adquirir conocimientos sobre las relaciones de proporcionalidad y de su aplicación en muchas situaciones de la vida cotidiana.

# 7. REFLEXIONES FINALES, CONCLUSIONES Y PROSPECTIVAS

El trabajo presentado cumple con los objetivos planteados para su realización, indicando que algunas de las actividades que se proponen para la Situación de Aprendizaje no se han desarrollado en detalle para no prolongar en exceso la duración de este trabajo.

Se ha llevado a cabo una revisión bibliográfica sobre la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad a través del razonamiento y la demostración que ha resultado de gran utilidad en el planteamiento de unos objetivos de aprendizaje adecuados para el diseño posterior de la propuesta didáctica elaborada.

Se ha efectuado una revisión de los nuevos aspectos que plantea la LOMLOE (principios pedagógicos y metodológicos, y evaluación competencial, entre otros) para diseñar una situación de aprendizaje acorde con los requisitos normativos vigentes.

La situación de aprendizaje ha sido elaborada para 2º curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria. Debido a que presenta una gran versatilidad, algunas actividades pueden ser realizadas en el primer curso de ESO, concretamente las relativas a proporcionalidad directa y que no incluyan contenidos de Física. Asimismo, la situación de aprendizaje podría ser adaptada a 4º curso con mayor profundización de contenidos y mayor complejidad en el planteamiento y la resolución de problemas y ejercicios y en las actividades a realizar ampliando los contenidos de otras disciplinas. Concretamente, se podría ampliar a otras actividades interdisciplinares con la materia de Física, como el movimiento uniformemente acelerado y las relaciones de proporcionalidad para los distintos tipos de fuerzas (elásticas, gravitatorias y eléctricas) y de Química, como las proporciones en la Química aplicadas a la concentración de las disoluciones y a las relaciones estequiométricas en las reacciones químicas.

Según lo anterior, como línea futura de continuación de este trabajo para ese plantea el diseño de otras situaciones de aprendizaje de carácter interdisciplinar para el estudio de las relaciones de proporcionalidad en diferentes cursos de la etapa de Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Como puntos fuertes del trabajo realizado quiero destacar el análisis y estudio que se ha llevado a cabo sobre la enseñanza y el aprendizaje mediante el razonamiento y la demostración y su aplicación al razonamiento proporcional que me ha aportado conocimientos importantes en mi formación como futuro profesor.

Otra aportación de interés ha sido el estudio de la ley educativa en vigor (LOMLOE), que ha supuesto un esfuerzo adicional debido a que he cursado las asignaturas de este máster estando vigente la anterior ley educativa (LOMCE).

Asimismo, la elaboración de la propuesta me ha acercado de forma muy directa al trabajo de planificación del profesorado, de gran relevancia en el ejercicio profesional.

Como puntos débiles de la propuesta, destaco la limitación temporal del trabajo en la elaboración de la propuesta didáctica que no ha permitido desarrollar en detalle todos los materiales, recursos e instrumentos necesarios para la implementación de todas las actividades, para la atención a la diversidad del alumnado y para todos los procesos de evaluación.

Por ello, como línea de continuación inmediata de este trabajo se plantea completar y detallar en su totalidad el desarrollo de la propuesta presentada y, para continuar cara a futuro, diseñar otras situaciones de aprendizaje de carácter interdisciplinar centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones de proporcionalidad mediante el razonamiento y la demostración para el estudio de estos contenidos en los diferentes cursos de la etapa de Enseñanza Secundaria Obligatoria.

## Bibliografía


Amezcua, T. y Amezcua, P. (2018). La gamificación como estrategia de motivación en el aula. En A. Torres-Toukoumidis y L. M. Romero.Rodríguez, (Eds.), *Experiencias desde la comunicación y la educación*, (p. 137-146). Iberoamérica.

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas.* Síntesis.

Ausubel, D. P. (2002). Adquisición y retención del conocimiento: Una perspectiva cognitiva (G. Sánchez Trad.). Paidós.

Bieda, K. N. (2010). Enacting Poof-Related Tasks in Middle School Mathematics: Challenges and Opportunities. 1 *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 41 (4)*, 351-382.

Bogdan, R. y García-Carmona, A. (2021). «De STEM nos gusta todo menos STEM». Análisis crítico de una tendencia educativa de moda. *Enseñanza de las Ciencias, 39-1*, 65-80. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3093

Brakoniecki, A., Amador, J. M. y Glassmeyer, D. M. (2021). One Task, Multiple Proportional Reasoning Strategies. *Mathematics teacher: learning & teaching, Vol. 114 (1)*, 32-40.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al studio de la teoría de las situaciones didácticas.* Zorzal.

Bybee, R. W. (2010). What Is STEM Education? *Science 329 (5)*, 995-996. (DOI: https://doi.org/10.1126/science.11949988).

Bybee, R. W. (2013). The case for STEM education: Challenges and opportunities. *National Science Teachers Association*. NSTA press. https://static.nsta.org/pdfs/samples/PB337Xweb.pdf

Camargo, L. y Gutiérrez, A. (2010). El aprendizaje de la demostración visto desde la teoría de la práctica social. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sie rra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (p. 245-258). Lleida: SEIEM.

Cepa, A., Heras, D. y Fernández-Haetylak, M. (2017). La educación emocional en la infancia: una estrategia inclusiva. *Aula Abierta 46*, 73-82.

Couso, D. (2017). Per a què estem a STEM? Un intent de definir l'alfabetització STEM per a tothom i amb valors. *Ciències: revista del professorat de ciències de Primària i Secundària, (34)*, 22-30. (DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ciencies.403)

Domènech-Casal J., Lope S., Mora L. (2019). Qué proyectos STEM diseña y qué dificultades expresa el profesorado de secundaria sobre Aprendizaje Basado en Proyectos. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias,16(2)*, 2203. (DOI: https://dio.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2019.v16.i2.2203).

European Parliament. (2015). Encouraging STEM Studies for the Labour Market. Recuperado el 30 de mayo de 2023 de: http://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/STUD/2015/542199/IPOL_STU(2015)542199_EN.pdf

Fernández, C. y Llinares, S. (2013). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias 30 (1)*, 129-142.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2011). The development of students´ use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European Journal of Psychology of Education 27*, 421-438.

Fiallo, J., Camargo, L. y Gutiérrez, A. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Integración, Escuela de Matemáticas (Universidad Industrial de Santander), Vol. 31*, No. 2, 2013, pág. 181–205.

Fuentes-Hurtado, M. y González Martínez, J. (2019). Evaluación inicial del diseño de unidades didácticas STEM gamificadas con TIC. *Edutec. Revista Electrónica De Tecnología Educativa*. (DOI: https://doi.org/10.21556/edutec.2019.70.1469).

Galeana, L. (2016). Aprendizaje basado en proyectos. *Universidad del s.XXI*. Recuperado el 30 de mayo de 2023 de: https://repositorio.ue.siglo21.edu.ar/handle/ues21/12835

Gavilán Bouzas, P. (2009). Aprendizaje cooperativo. Papel del conflicto sociocognitivo en el desarrollo intelectual. Consecuencias pedagógicas. *Revista española de Pedagogía*, *242*, 131-148. https://revistadepedagogia.org/wpcontent/uploads/2009/01/242-06.pdf

Godino, J. D. y Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias 19 (3),* 405-414.

Godino J. D. (2013). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 11*, 111-132.

Harel, G., Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second Handbook of researchon mathematics teaching and learning.* F. Lester Ed. VA. EE:UU., National council of Teachersof Mathematics. Citado por Fiallo *et al.*, (2013).

Helle, L., Tynjälä, P., Olkinuora, E. (2006). Project-based learning in post-secondary education-theory practice and rubber sling shots. *Higher Education, 51*, 287-314.

Johnson, D., Johnson, R y Holubec, E. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Paidós.

Martínez-Juste, Sergio (2022). *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de Secundaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Martínez-Juste, S., Oller-Marcén, A. M., Muñoz-Escolano, J. M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Sobre la regla de tres y la proporcionalidad aritmética. *La Gaceta de la RSME, Vol. 25* (2), p. 353–371.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 17 (1),* 57-81.

Pérez-Torres M., Couso D. y Márquez C. (2021). ¿Como diseñar un buen proyecto STEM? Identificación de tensiones en la co-construcción de una rúbrica para su mejora. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 18(1),* 1301. (DOI: https://10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2021.v18.i1.1301

Rodríguez-Oroz D., Gómez-Espina R., Bravo Pérez M. J. y Truyol M. E. (2019). Aprendizaje basado en un proyecto de gamificación: vinculando la educación universitaria con la divulgación de la geomorfología de Chile. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 16 (2),* 2202. (DOI: https://10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2019.v16.i2.2202

Sanders, M. E. (2009). STEM, STEM Education, STEMmania. *The Technology Teacher*, 20-26. https://www.teachmeteamwork.com/files/sanders.istem.ed.ttt.istem.ed.def.pdf

Sanmartí, N y Márquez, C (2017). Aprendizaje de las ciencias basado en proyectos: del contexto a la acción. *Ápice. Revista de la Educación Científica, 1(1),* 3-16. (DOI: https://doi.org/10.17979/arec.2017.1.12020).

Serrano, J. M. y Pons, R. M. (2008). La concepción constructivista de la instrucción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 13 (38),* 681-712.

Villiers, M. (2003). The value of experimenttion in mathematics.*9th National Congress of, AMESA.* In Proceedings, 174-185.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en educación primaria y secundaria. *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.) (2017).

Yakman, G. y Lee, H. (2012). Exploring the Exemplary STEAM Education in the U.S. as a practical educational framework for Korea. *Journal of the Korean Association for Science Education, 32(6),* 1072-1086. (DOI: https://doi.org/10.14697/jkase.2012.32.6.1072).

## LEGISLACIÓN

Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León (BOCYL de 30 de septiembre de 2022).

Decreto 38/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León (BOCYL de 30 de septiembre de 2022).

Decreto 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León (BOCYL de 30 de septiembre de 2022).

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (BOE de 30 de marzo de 2022).

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (BOE de 6 de abril de 2022).

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (BOE de 2 de marzo de 2022).

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE 340, de 30 de diciembre de 2020).

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (BOE 295, de 10 de diciembre de 2013).