

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER
MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Modelización y valoración de derivados financieros

Autor: Carlos Saravia de Coca

Tutores:

Victor Gatón Bustillo

Paula M. López Pérez

Departamento de Matemática Aplicada

Índice general

Abstract	5
Introducción	7
1. Introducción a los Mercados e instrumentos financieros	9
1.1. Conceptos preliminares de los Mercados Financieros	9
1.2. Rentabilidad y Riesgo	10
1.2.1. Rentabilidad	11
1.2.2. Riesgo	11
1.3. Arbitraje	12
1.4. Derivados Financieros	12
2. Modelización matemática	15
2.1. La modelización estocástica de los mercados	15
2.1.1. El modelo de Black-Scholes	19
2.2. La ecuación de Black-Scholes	23
2.2.1. El Delta Hedging	23
2.3. Condiciones específicas para distintas Opciones	25
2.3.1. Opciones Europeas	25
2.3.2. Opciones Americanas	26
2.3.3. Opciones Barrera	28
2.3.4. Opciones Asiáticas	29
3. Valoración numérica de la opción financiera a través de la EDP	31
3.1. El Método de Elementos Finitos	31
3.1.1. Resultados previos	32
3.1.2. El método Galerkin	33
3.1.3. Análisis teórico del problema variacional de Black-Scholes	35
3.2. Una implementación de Elementos Finitos para el problema de Black-Scholes	37
3.2.1. Funciones base	38
3.2.2. Forma matricial del método	40
3.2.3. Experimentos numéricos	46
3.2.4. Análisis del Error	47
3.3. Valoración de la opción americana	51

4. El método de Longstaff-Schwartz para la Opción Americana	57
4.1. Introducción	57
4.2. El método de Monte Carlo y el ajuste de mínimos cuadrados	58
4.3. El método de Longstaff-Schwartz	60
4.4. Experimentos Numéricos	62
5. Conclusiones	67

Abstract

La valoración de contratos financieros constituye un componente esencial en el ámbito de las finanzas y la inversión. Estos contratos representan acuerdos financieros que abarcan desde opciones y futuros hasta bonos y acciones individuales. La exactitud en la valoración de contratos financieros resulta de suma relevancia para la toma de decisiones fundamentadas en el ámbito de la inversión y la gestión de riesgos. Los inversores emplean modelos de valoración con el propósito de determinar si un contrato se encuentra sobrevalorado o subvalorado en el mercado, lo cual facilita la toma de decisiones informadas respecto a la adquisición o venta de dichos instrumentos.

La valoración de contratos financieros se basa en los principios fundamentales de la teoría financiera y hace uso de diversos modelos y métodos matemáticos con el propósito de estimar el valor presente de los flujos de efectivo futuros asociados con dichos contratos.

Asimismo, las empresas utilizan la valoración con el fin de establecer precios para la emisión de nuevos contratos o para evaluar su exposición al riesgo financiero.

Este Trabajo Fin de Máster (TFM) está orientado a analizar la modelización matemática de los mercados financieros y algunas de las técnicas numéricas disponibles para aproximar la solución de ecuaciones que, en general, carecen de solución explícita.

Introducción

El precio de una cosa no depende de su naturaleza, sino de la estimación en que la tengan los hombres, aunque tal estimación pueda ser extravagante

Diego de Covarrubias, escolástico de la Escuela de Salamanca

La valoración de contratos financieros constituye un componente esencial en el ámbito de las finanzas y la inversión.

Una primera referencia histórica data del siglo VI a.C., siendo Aristóteles quien mencionaba que Tales de Mileto solía predecir por las estrellas la calidad de la próxima cosecha y aprovechó esa habilidad para acordar con los dueños de las pocas prensas de aceitunas existentes un precio por adelantado por el alquiler futuro de dichas máquinas (contrato de adquisición de un derecho a futuro). Tras una buena cosecha, los campesinos se veían forzados a realquilarle a Tales a precios superiores.

Otro antecedente histórico se dio en Holanda en el siglo XVII. La fiebre por los tulipanes y sus bulbos llevó a realizar pedidos por adelantado, constituyéndose contratos “forward”, después contratos de opciones de compra (Call) y de venta (Put). El alza desbocada de los precios de los tulipanes es considerada la primera burbuja financiera que estalló en 1637.

Estos contratos representan acuerdos financieros que abarcan desde opciones y futuros hasta bonos y acciones individuales. La exactitud en la valoración de contratos financieros resulta de suma relevancia para la toma de decisiones fundamentadas en el ámbito de la inversión y la gestión de riesgos. Los inversores emplean modelos de valoración con el propósito de determinar si un contrato se encuentra sobrevalorado o subvalorado en el mercado, lo cual facilita la toma de decisiones informadas respecto a la adquisición o venta de dichos instrumentos.

La valoración de contratos financieros se basa en los principios fundamentales de la teoría financiera y hace uso de diversos modelos y métodos matemáticos con el propósito de estimar el valor presente de los flujos de efectivo futuros asociados con dichos contratos.

Asimismo, las empresas utilizan la valoración con el fin de establecer precios para la emisión de nuevos contratos o para evaluar su exposición al riesgo financiero.

Este Trabajo Fin de Máster (TFM) está orientado a analizar la modelización matemática de los mercados financieros y algunas de las técnicas numéricas disponibles para aproximar la solución de ecuaciones que, en general, carecen de solución explícita.

La estructura por capítulos es la siguiente:

- En el primer capítulo, se ofrecerá una introducción a los mercados financieros, donde se presentarán los conceptos básicos necesarios para entender el contexto en el que operan los derivados financieros. Se discutirán términos esenciales como rentabilidad y riesgo, la noción de arbitraje y una descripción general de los principales tipos de derivados financieros, estableciendo así los cimientos para los capítulos posteriores.
- El segundo capítulo se centrará en la modelización matemática de los mercados financieros, destacando la naturaleza estocástica en la comprensión y predicción de comportamientos del mercado. Aquí se introducirá la EDP de Black-Scholes, una piedra angular en la teoría de valoración de opciones, explicando su formulación, supuestos y aplicaciones.
- En el tercer capítulo, se analizará en profundidad la valoración de opciones a través de la EDP utilizando el método de elementos finitos para encontrar soluciones aproximadas, y se abordará la valoración tanto de la opción Europea como de la Americana.
- El cuarto capítulo se dedicará al método de Longstaff-Schwartz, un enfoque utilizado para la valoración, entre otras, de opciones americanas mediante simulación de Monte Carlo. Además, se presentará una comparación empírica entre el método de Longstaff-Schwartz y el método de Elementos Finitos.
- Finalmente, en el quinto capítulo se presentarán las conclusiones de este trabajo de investigación.

Capítulo 1

Introducción a los Mercados e instrumentos financieros

El mercado financiero se define como un conjunto de instituciones, mecanismos y procesos que facilitan el intercambio de instrumentos financieros entre diversos participantes. Estos instrumentos pueden incluir bienes, acciones, bonos, derivados, divisas y otros activos financieros. Su función principal radica en permitir la asignación eficiente de capital, el descubrimiento y asignación de precios y la transferencia de riesgos dentro de la economía y/o entre agentes económicos.

1.1. Conceptos preliminares de los Mercados Financieros

En esta Sección, se explorarán en detalle los conceptos fundamentales que rodean la valoración de contratos financieros, centrándonos en algunos de los diferentes tipos de contratos existentes y las definiciones e hipótesis necesarias para una modelización matemática que permita hacer una valoración de los mismos (ver [23] para un desarrollo más detallado). Se explicarán algunos de los rudimentos necesarios para entender el trabajo pues, si bien el trabajo se centra en la modelización matemática formal, no se dejará de lado la Teoría Económica, dotando así de cierta perspectiva a la memoria y no limitando este texto a una exposición instrumental. Se comenzará definiendo el concepto de activo e instrumento financiero

Definición 1.1.1. Los activos son bienes o contratos que son negociados en el mercado. Los activos pueden ser físicos, como las propiedades inmobiliarias o activos financieros, que incluyen una gran variedad de contratos como bonos, cuentas bancarias, acciones o instrumentos derivados que pueden comprarse o venderse. El precio de estos activos, por ejemplo de una acción, se suele denotar por $S(t)$, el valor por unidad en el instante de tiempo t .

Definición 1.1.2. Un instrumento financiero puede definirse como un medio o vehículo contractual utilizado en los mercados financieros con el propósito de adquirir, gestionar o transferir activos financieros, así como para obtener financiación o gestionar riesgos.

Definición 1.1.3. Una cartera o estrategia de inversión está formada por un conjunto de activos y/o instrumentos financieros. Se define el valor liquidativo $v(t)$ de una

cartera con $m_0 \in \mathbb{N}$ activos, como

$$v(t) = \sum_{j=1}^{m_0} x_j S_j(t), \quad (1.1)$$

donde $x_j \in \mathbb{R}$ denota la cantidad del activo j y $S_j(t) \in \mathbb{R}_+$, $j \in \{1, \dots, m_0\}$ el precio unitario del activo j en el instante t .

De ahora en adelante, se supone que el precio de los activos es positivo $S_j(t) \geq 0$. No obstante, dentro de una cartera, los activos pueden estar en cantidades positivas o negativas.

Definición 1.1.4. Cuando un agente posee cantidades positivas de un activo ($x_j \geq 0$) se dice que tiene una posición larga en ese activo. Por el contrario, si un individuo está endeudado en un activo, su posición representa una obligación por la que tiene que responder; en dicho caso la cantidad aparece con un signo negativo en la cartera ($x_j < 0$) y se dice que tiene una posición corta en el activo.

Ejemplo 1.1.5. Si alguien pide prestado dinero para comprar acciones estará "corto" en dinero y "largo" en acciones. También se puede estar endeudado en acciones y disponer de dinero propio. La cartera tendrá unidades negativas en las acciones y positiva en el dinero. Esto puede hacerse mediante un instrumento llamado futuro.

Financieramente, al adoptar una posición corta respecto de un activo, uno se puede encontrar en la situación de tener que afrontar las deudas asumidas, es decir, de cerrar las posiciones cortas en los activos.

Definición 1.1.6. Se dice que una cartera es solvente en el intervalo $[0, T]$, si

$$v(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

es decir, que las carteras solventes son las que tienen recursos suficientes para pagar las deudas en cualquier instante temporal.

1.2. Rentabilidad y Riesgo

El valor de los activos varía con el tiempo. Para medir esa evolución se han de emplear los conceptos de rentabilidad y riesgo. La gestión de activos financieros conlleva siempre una ponderación cuidadosa de estos dos factores.

La rentabilidad se refiere al potencial de obtener un retorno financiero positivo (o ganancias) a partir de una inversión o de una cartera de inversiones. Es una medida para evaluar el desempeño financiero y la eficacia de las estrategias de inversión.

Por otro lado, el riesgo (en finanzas) se manifiesta como la incertidumbre o la posibilidad de que las inversiones no rindan como se esperaba, e incluso que se produzcan pérdidas financieras. En el contexto de las finanzas, el riesgo puede surgir de múltiples fuentes, incluyendo la volatilidad de los precios de los activos, los cambios en las condiciones macroeconómicas y las fluctuaciones en los mercados financieros.

La comprensión y gestión adecuadas de la relación entre rentabilidad y riesgo son cruciales para los inversores y gestores de carteras. La toma de decisiones financieras informadas requiere un equilibrio prudente entre buscar rendimientos atractivos y mitigar los riesgos inherentes (ver [3], [4] ó [16]).

1.2.1. Rentabilidad

La rentabilidad es una medida cuantitativa del beneficio o la pérdida que está asociada a un activo o inversión.

Definición 1.2.1. Fijado $T \geq 0$, la rentabilidad de un activo S en un periodo de tiempo $[0, T]$ se define de forma general como:

$$\text{rentabilidad} = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)}.$$

Esta cantidad cuantifica el rendimiento obtenido por cada unidad monetaria invertida en dicho activo. Cuando la rentabilidad es negativa hace referencia a la pérdida por unidad monetaria.

En lo que resta de Capítulo, fijado $T > 0$, se supone que la evolución de los activos se analiza en el intervalo temporal $[0, T]$. Fijado un $n_0 \in \mathbb{N}$, se define

$$\Delta t = \frac{T}{n_0},$$

y sea $\{S(t_i)\}_{i=0}^{n_0}$ el valor del activo en los tiempos $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \dots, n_0$.

Definición 1.2.2. El retorno o rentabilidad logarítmica $R(t_i)$ de un activo S en el instante t_i , se define como:

$$R(t_i) = \log \left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})} \right), \quad i = 1, \dots, n_0. \quad (1.2)$$

Observación 1.2.3.

- (i) Los retornos son una medición de la tasa de crecimiento o rendimiento de una inversión a lo largo del tiempo.
- (ii) Aunque se desarrollará posteriormente, si el activo S es un activo con riesgo, éste se modelizará asumiendo que los $R(t_i)$ son las realizaciones de una variable aleatoria X y se podrá hablar de una rentabilidad esperada, definida a través de la esperanza matemática.

1.2.2. Riesgo

El riesgo puede entenderse como la incertidumbre asociada a los valores finales de una inversión. Si la inversión fuese determinista, es decir, si se supiera a priori el valor final, lógicamente la incertidumbre desaparecería y el riesgo sería nulo.

Al igual que la rentabilidad, el riesgo está asociado a un activo o cartera, pero no a la cantidad invertida en dichos activos o carteras, es decir se mide en cantidades relativas. Como se ha indicado antes, asumiendo que los $R(t_i)$ son realizaciones de una variable aleatoria, el riesgo de la inversión estará asociado a la varianza matemática de dicha variable aleatoria.

Los inversores buscan maximizar la rentabilidad de sus inversiones, pero toda inversión en uno o varios productos cuya evolución no sea determinista, acarrea un riesgo de incurrir en pérdidas. Por ello, ambos factores deben ser tenidos en consideración. Dentro de las distintas hipótesis que se hacen al modelizar problemas

financieros, una de ellas está asociada al comportamiento de los agentes del Mercado y es el denominado Principio de aversión al riesgo, asumido basándose en la racionalidad de los agentes económicos en su toma de decisiones.

Definición 1.2.4. El principio de aversión al riesgo dice que, ante dos inversiones idénticas en cuanto a la compensación que ofrezcan (rentabilidad o rentabilidad esperada), se elegirá la que tenga menor riesgo.

Por ejemplo, en [16] Harry Markowitz desarrolla un modelo que calcula, bajo ciertas hipótesis, la ponderación entre los distintos activos que debe tener una cartera de inversiones en función del riesgo y la rentabilidad esperados de cada uno de ellos. En otros casos, los inversores pueden medir la utilidad (esperada) que les proporcionará en un futuro el retorno de sus inversiones y su toma de decisiones se basa en intentar maximizar dicha utilidad. En [21] se estudia un modelo donde, bajo esta premisa, además se incorporan condiciones reales de mercado, como los costes de transacción (comisiones que se cobran por cada operación de compra o venta realizada). Hay un gran desarrollo en la literatura que incorporan estos y otros factores en la modelización de los mercados y la toma de decisiones financieras. Algunos ejemplos pueden ser [7], [8] y [17].

1.3. Arbitraje

El arbitraje es un concepto del campo de las finanzas que se basa en la explotación de diferencias de precio en los mercados financieros para obtener ganancias sin asumir riesgos.

Definición 1.3.1. Una oportunidad de arbitraje es una estrategia que permite, sin tener nada de dinero y en un escenario con riesgo (se desconoce la evolución futura), obtener un beneficio positivo a riesgo nulo en un tiempo futuro.

Observación 1.3.2. La ausencia de arbitraje es una hipótesis esencial en la modelización de los mercados financieros. Para la modelización matemática y valoración de los productos que se van a analizar se asume que no existen oportunidades de arbitraje.

1.4. Derivados Financieros

Definición 1.4.1. Se entiende por derivado a los contratos financieros cuyo valor se deriva de la fluctuación de precios de un activo subyacente.

Un instrumento financiero es un contrato que da origen a un activo financiero para una de las partes y a un pasivo financiero o instrumento de capital para otra.

Un derivado financiero (ver [23]) es un tipo de instrumento financiero cuyo valor se deriva del valor de un activo subyacente, como acciones, bonos, materias primas, tasas de interés, divisas, índices, entre otros. En esencia, su valor fluctúa en función de los cambios en el precio del activo subyacente. Los derivados financieros se utilizan principalmente para gestionar riesgos financieros, especular sobre movimientos futuros de precios, o como instrumentos de cobertura para protegerse contra posibles pérdidas. Los derivados financieros pueden clasificarse en lineales y no lineales según la relación entre el valor del derivado y el valor del activo subyacente:

- Derivados lineales: En estos derivados, la relación entre el valor del derivado y el valor del activo subyacente es lineal.
- Derivados no lineales: En estos derivados, la relación entre el valor del derivado y el valor del activo subyacente no es lineal.

Existen multitud de derivados, entre otros Futuros, Warrants, Swaps, FRA's, . . . Este trabajo se va a centrar en las opciones. Las opciones financieras son un tipo de derivados que ofrecen a los inversores y gestores de carteras herramientas para gestionar el riesgo.

Definición 1.4.2. Una opción Call Europea confiere al comprador de la misma el derecho de comprar el activo subyacente S en el instante futuro T , llamado vencimiento, a un precio especificado a la firma del contrato, llamado precio de ejercicio o strike, usualmente denotado por K .

Este derecho, negociado en el instante t , se adquiere al abonar $C(t)$ unidades monetarias al vendedor de la Call. El vendedor de la Call Europea adquiere, a cambio de recibir $C(t)$ en el instante t , la obligación de vender el activo, si el comprador se lo exige, al precio K en el vencimiento. Por definición:

$$C(T) = \text{máx}\{S(T) - K, 0\}$$

Definición 1.4.3. Una opción Put Europea confiere al comprador el derecho de vender el activo subyacente S en el instante futuro T , conocido como vencimiento, a un precio especificado al momento de la firma del contrato, denominado precio de ejercicio o strike, generalmente representado por K .

Este derecho, negociado en el instante t , se adquiere al pagar $P(t)$ unidades monetarias al vendedor de la Put. A cambio de recibir $P(t)$ en el instante t , el vendedor de la Put Europea asume la obligación de comprar el activo al precio K en el vencimiento si el comprador de la Put así se lo exige. Por definición:

$$P(T) = \text{máx}\{K - S(T), 0\}$$

Observación 1.4.4. Nótese que el comprador de la Call (resp. Put) no ejercerá su derecho en el vencimiento si $S(T) < K$ (resp. $S(T) > K$) porque podría comprarlo (resp. venderlo) más barato (resp. más caro) en el mercado.

Definición 1.4.5. Para una Call se dice que la opción está in the money si

$$S(t) > K, \quad t \in [0, T].$$

Se dice que la opción está at the money si

$$S(t) = K, \quad t \in [0, T].$$

Se dice que la opción está out the money si

$$S(t) < K, \quad t \in [0, T].$$

Definición 1.4.6. Una opción Americana es un tipo de contrato financiero que concede a su titular el derecho (pero no la obligación) de comprar (Call) o vender (Put) un activo subyacente a un precio predeterminado (strike) en cualquier instante desde que se negocia hasta el vencimiento. La característica distintiva de las opciones americanas es que el titular puede ejercer su derecho en cualquier momento antes o en la fecha de vencimiento.

Como se puede intuir por lo dicho, el valor de las opciones dependerá de la volatilidad del activo subyacente y de factores como el tiempo y el vencimiento.

Las opciones son ampliamente utilizadas en una variedad de estrategias lo que las convierte en un componente integral de las decisiones financieras en los mercados modernos.

Observaciones 1.4.7.

- (i) Comprar una opción Call es un modo de cubrir los riesgos ante la subida de precios, o de especular apostando por esta subida. En las opciones Europeas sólo se puede ejecutar en el vencimiento y en las Americanas en cualquier instante.
- (ii) Las opciones permiten transferir el riesgo. Un fabricante que quiera vender sus productos y garantizar un precio mínimo, puede comprar una opción de venta (Put) transfiriendo el riesgo al vendedor de la opción. En este caso, aunque el comprador haya pagado una prima, tiene garantizado un precio de venta y puede tomar decisiones sin riesgo en cuanto a su producción.
- (iii) Tanto en la Call como en la Put es el comprador de la opción el que tiene el derecho y debe pagar al vendedor por la obligación adquirida. Estos contratos son similares a los seguros, y la terminología usada para describirlos es parecida. La diferencia con un seguro es que éste se hace a medida para un determinado fin como puede ser un hurto. Las opciones son instrumentos diseñados para los mercados financieros.
- (iv) El que vende una opción Call (resp. Put), está obligado a comprar (resp. vender) si el poseedor ejerce la opción. El que compra la opción Call (resp. Put) tiene el derecho a comprar (resp. vender) pero no está obligado a ejercerlo. Se asume racionalidad en los agentes y que los derechos se ejercen cuando es la estrategia más favorable.

La pregunta ahora es saber cuál es el precio de ese derecho que otorgan las opciones. Es decir, negociada una opción a un vencimiento T futuro y un strike K fijos, si hoy es $t = 0$, ¿Cuál es el precio de la opción Call (o Put) para cada $t \in [0, T]$ si en el instante t el activo vale $S(t)$? A responder esta pregunta se orienta el resto del trabajo.

Capítulo 2

Modelización matemática

2.1. La modelización estocástica de los mercados

La naturaleza incierta y la aleatoriedad de las cotizaciones de los activos en los mercados y activos financieros es una propiedad inherente a los mismos a lo largo de la historia. La modelización estocástica de los mercados financieros se ha convertido en un área de estudio para los inversores, analistas y gestores de carteras, ya que permite comprender y gestionar el riesgo de manera efectiva. La modelización de la variabilidad de los precios y la evaluación de las probabilidades de eventos extremos ayudan a los participantes del mercado a tomar decisiones informadas y a diseñar estrategias de inversión sólidas.

A lo largo de este Capítulo, se presentan los conceptos matemáticos así como las herramientas y los modelos utilizados para describir y analizar esta naturaleza incierta.

El marco sobre el que se modelizará la dinámica de los activos financieros serán los procesos estocásticos y en particular se modelizarán los precios de los activos como procesos estocásticos en tiempo continuo $t \in [0, T]$.

Un desarrollo más detallado de los conceptos de procesos estocásticos (con aplicación en el ámbito de las finanzas) se puede encontrar en [2]. También se recomiendan [11], [14], [20] y [22] como referencias complementarias.

Definición 2.1.1. Se denomina espacio de probabilidad a la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde Ω es el conjunto de los sucesos elementales, \mathcal{F} es una σ -álgebra $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ donde \mathbb{P} es una medida de probabilidad definida sobre \mathcal{F} .

Definición 2.1.2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se dice que es un espacio de probabilidad completo si para todo $B \subseteq A \in \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(A) = 0$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Se supone de ahora en adelante que se trabaja en espacios de probabilidad completos.

Definición 2.1.3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una filtración es una familia de σ -álgebras $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ tales que $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$, si $0 \leq k \leq t \leq T$.

Observación 2.1.4. Si se desea dar una interpretación financiera, las filtraciones podrían entenderse en cierto sentido como las σ -álgebras generadas por la información acumulada hasta el instante t .

Definición 2.1.5. Se denomina espacio de probabilidad filtrado a un espacio de probabilidad dotado de una filtración \mathbb{F} cuya representación es $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$.

Definición 2.1.6. Se denomina proceso estocástico a la familia de variables aleatorias $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ definidas en un cierto espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con llegada en \mathbb{R}^n . Se asume que los procesos estocásticos entendidos como aplicaciones $\Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ van a ser $\mathcal{F} \times \beta[0, T] | \beta(\mathbb{R}^n)$ -medibles, donde β denota la σ -álgebra de Borel.

Notación 2.1.7. Para el resto del trabajo, cuando se trabaja con procesos estocásticos, la notación X_t se refiere a $X(t)$.

Definición 2.1.8. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea X una variable aleatoria medible. Se define la esperanza condicionada de X con respecto a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ a la variable aleatoria $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ que satisface las siguientes propiedades:

- (i) $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ es \mathcal{G} -medible.
- (ii) Para cada $G \in \mathcal{G}$, $\int_G X d\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P}$.

Propiedades 2.1.9. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea X una variable aleatoria medible. La esperanza condicionada $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ satisface las siguientes propiedades:

- (i) Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
- (ii) Si $\mathbb{E}[XY] < \infty$ y X es \mathcal{G} -medible, entonces $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.
- (iii) Si X es independiente de \mathcal{G} , entonces $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.
- (iv) Si $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]$.
- (v) Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa y $\mathbb{E}[\phi(X)] < \infty$, entonces $\phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}]$.

Presentadas algunas herramientas matemáticas, se asumen además las siguientes hipótesis:

Hipótesis 2.1.10.

- (i) \mathcal{F}_0 contiene a todos los conjuntos de Ω cuya probabilidad es nula.
- (ii) La filtración \mathbb{F} es continua por la derecha, es decir, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{k>t} \mathcal{F}_k$.

Definición 2.1.11. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se dice que un proceso estocástico $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ es un proceso de Wiener si verifica las siguientes propiedades:

- (i) $W(0) = 0$.
- (ii) $W(t+k) - W(t) \sim N(0, k)$.
- (iii) $W(t) - W(k)$ es independiente de $W(r) - W(s)$, para cada $0 \leq r < s \leq k < t \leq T$.
- (iv) W tiene trayectoria continua.

Definición 2.1.12. Si X es un proceso estocástico, $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}$ denota

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X(s) : 0 \leq s \leq t\},$$

es decir, la σ -álgebra generada por $\{X(s) : 0 \leq s \leq t\}$.

Si el valor de una variable estocástica Z puede determinarse completamente con las observaciones de la trayectoria $\{X(s) : 0 \leq s \leq t\}$ se denota por $Z \in \mathcal{F}_t^X$.

Si Y es otro proceso estocástico tal que $Y \in \mathcal{F}_t^X, \forall t \geq 0$ se dice que Y está adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$.

Definición 2.1.13. Un proceso g se dice que pertenece a $L^2[a, b]$ si se verifica que:

- (i) $\int_a^b \mathbb{E}[g^2(s)]ds < \infty$.
- (ii) El proceso g está adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$.

Para procesos $g \in L^2[a, b]$ se pueden definir integrales del tipo $\int_a^b g(s)dW(s)$, desarrollando el cálculo diferencial correspondiente conocido como Cálculo de Itô (ver [2], [11] ó [14]).

La clave será intentar modelizar la evolución de las cotizaciones (de forma local) como la combinación de un término determinista y otro aleatorio. Es decir, con una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \\ X(0) &= a. \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde μ es el drift y σ la volatilidad que amplifica el término gaussiano.

Definición 2.1.14. Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ es una martingala respecto de (\mathbb{P}, \mathbb{F}) si se verifica que:

- (i) $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ es \mathbb{F} -adaptado, es decir, $X_t \in \mathcal{F}_t$, para cada $t \in [0, T]$.
- (ii) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, para cada $t \geq 0$,
- (iii) $\mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_t] = X_t$ casi seguro si $k \geq t \geq 0$,

Definición 2.1.15. Se dice que un proceso $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ es un proceso de Itô si admite una representación de la forma

$$X(t) = X(0) + \int_0^t K(s)ds + \int_0^t H(s)dW(s) \tag{2.2}$$

donde K es un proceso adaptado a $\{\mathcal{F}_t^W\}$ tal que $\int_0^t |K(s)|ds < \infty$ y $H \in L^2[0, t]$, para cada $t \geq 0$.

Otra notación muy empleada es:

$$dX_t = K(t)dt + H(t)dW(t).$$

Definición 2.1.16. Se dice que un proceso $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ es un proceso de Itô con drift μ y volatilidad σ si es una regla continua de evolución estocástica que se expresa como,

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \tag{2.3}$$

donde W_t es un movimiento de Wiener.

Si un proceso de Itô admite dos representaciones distintas, éstas son idénticas casi seguro.

En finanzas hay algunos procesos de Itô usados habitualmente. Por ejemplo:

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (\text{proceso de Itô normal}).$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (\text{proceso de Itô lognormal}).$$

$$dR_t = a(b - R_t) dt + \sigma dW_t, \quad (\text{proceso de Itô con reversión a la media}).$$

En los modelos más simples, los parámetros μ y σ son constantes positivas, pero podrían ser funciones.

Este trabajo se centrará en activos que se rigen por la segunda ecuación, es decir

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (2.4)$$

Lema 2.1.17 (de Itô). Sea $S = \{S_t : t \in [0, T]\}$ un proceso estocástico dado por:

$$dS = \mu(t, S) dt + \sigma(t, S) dW_t.$$

Supongamos que W_t es un proceso de Wiener y sea $f(t, S) \in \mathcal{C}^{1,2}$. Entonces, $f(t, S_t)$ verifica que:

$$df(t, S) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu(t, S) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2(t, S) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma(t, S) dW_t.$$

Demostración. La demostración formal requiere un desarrollo más largo de teoría y, por ese motivo, en este trabajo se incluye una aproximación más breve a la demostración presentada en [2].

Se considera el desarrollo de Taylor hasta orden dos:

$$df(t, S) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial S} dt dS + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2 \right). \quad (2.5)$$

Las reglas de multiplicación de Itô son:

$$\begin{aligned} (dt)^2 &= 0, \\ dt dW &= 0, \\ (dW)^2 &= dt. \end{aligned}$$

Como $dS = \mu(t, S) dt + \sigma(t, S) dW_t$, se tiene que

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= (\mu(t, S) dt + \sigma(t, S) dW_t)^2 = \mu^2(t, S) (dt)^2 + 2\mu(t, S)\sigma(t, S) dt dW_t + \sigma^2(t, S)(dW_t)^2 \\ &= \sigma^2(t, S)dt, \end{aligned}$$

sustituyendo en (2.5), tras agrupar queda

$$df(t, S) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu(t, S) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2(t, S) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma(t, S) dW_t.$$

□

2.1.1. El modelo de Black-Scholes

Las hipótesis (ver [3]) que se deben asumir sobre el Mercado para este modelo son:

1. El tipo de interés a corto plazo es conocido y constante a lo largo del tiempo.
2. No hay costes en comprar o vender la acción o la opción.
3. Existe un activo libre de riesgo (letra) al tipo de interés a corto plazo del que es posible comprar, mantener o vender la cantidad deseada.
4. Es posible la venta a corto sin penalizaciones. Si alguien no posee la letra o la acción aceptará su importe actual de un comprador con el compromiso de devolverle en la fecha fijada el valor de la letra o de la acción en ese momento.
5. La acción no paga dividendos.
6. El precio de las acciones sigue un camino aleatorio en tiempo continuo de forma que la distribución de los posibles precios de las acciones al final de cualquier intervalo finito es log-normal. La varianza de los retornos de los precios de las acciones es constante.
7. El mercado es eficiente, es decir, todos los jugadores tienen la misma información en cualquier momento.

La acción podría pagar dividendos, pero en ese caso se puede descontar el importe actualizado del dividendo mediante las leyes de capitalización a la cotización y se volvería a un escenario en el que no hay dividendos.

Definición 2.1.18. Se dice que el Mercado sigue el modelo de Black-Scholes si la dinámica del activo libre de riesgo viene dada por:

$$dB(t) = rB(t)dt, \quad (2.6)$$

y la de las acciones por:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \quad (2.7)$$

donde además se verifican las hipótesis indicadas anteriormente.

Definición 2.1.19. Una medida de probabilidad Q en \mathcal{F} se llama medida libre de riesgo equivalente para el modelo del Mercado en $[0, T]$ si satisface las siguientes propiedades:

- (i) Q es equivalente a \mathbb{P} en \mathcal{F} .
- (ii) El proceso de precios de $S(t)$ descontado con r es una martingala en la medida Q en el intervalo $[0, T]$.

La demostración de los siguientes resultados puede encontrarse en [2]

Teorema 2.1.20. El modelo del Mercado está libre de arbitraje si existe una medida (local) libre de riesgo Q .

Definición 2.1.21. Un mercado se dice completo si cualquier derivado (entre ellos las opciones) puede replicarse mediante la construcción de una cartera de inversiones con los activos que forman el mercado

En un mercado formado sólo por un bono $B(t)$ libre de riesgo y una acción $S(t)$, lo que quiere decir completo es que, dado cualquier producto derivado, entre ellos las opciones, existe una cartera de inversiones formada por el bono y por la acción, en unas ciertas proporciones que varían con el tiempo, de forma que la cartera replica exactamente el derivado negociado en todo instante $t \in [0, T]$.

Por tanto, para que no exista arbitraje, si un derivado es replicable, su valor y el valor de la cartera de réplica deben coincidir en todo tiempo $t \in [0, T]$.

Teorema 2.1.22. Suponiendo ausencia de arbitraje, el modelo del Mercado es completo si la medida libre de riesgo Q es única.

Teorema 2.1.23 (de Girsanov). Sea W un \mathbb{P} -proceso de Wiener y ϕ un proceso \mathbb{F} -adaptado. Se supone que $\mathbb{E}^P \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^T \|\phi(s)\|^2 ds} \right] < \infty$, para cada $T > 0$. Si para cada $T > 0$ se define una nueva medida de probabilidad Q en \mathbb{F} mediante

$$dQ = L_T dP, \quad (2.8)$$

donde $L_T = e^{\int_0^T \phi(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \|\phi(s)\|^2 ds}$, entonces P y Q son dos medidas equivalentes.

Además, se verifica que:

$$dW^Q = \phi dt + dW, \quad (2.9)$$

donde W^Q es un Q -proceso de Wiener, es decir, un proceso de Wiener con respecto de la medida Q .

Teorema 2.1.24. El modelo de Black-Scholes está libre de arbitraje y la medida libre de riesgo es única, es decir, el modelo es completo.

La medida Q libre de riesgo se obtiene a partir del Teorema de Girsanov definiendo

$$\phi = \frac{\mu - r}{\sigma}, \quad (2.10)$$

y la dinámica de las acciones en esa medida es:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^Q(t). \quad (2.11)$$

Además, el precio de la opción Call europea es:

$$C(S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q \left[\max\{S_T - K, 0\} | \mathcal{F}_t^{W^Q} \right]. \quad (2.12)$$

Observación 2.1.25. Nótese que la expresión anterior ya nos da una forma numérica de aproximarnos al valor de la opción mediante simulaciones de Monte-Carlo.

En el modelo de Black-Scholes, el precio de la opción Europea tiene fórmula explícita, conocida como la famosa fórmula de Black-Scholes.

Para la demostración de la fórmula, es necesario un resultado previo.

Lema 2.1.26. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ y varianza σ^2 .

Entonces se verifica que:

$$\mathbb{E}[\exp(aX)|X \geq k] = \exp\left(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right) N(d), \quad (2.13)$$

donde a es una constante, $d \equiv (-k + \mu + a\sigma^2)/\sigma$ y $N(\cdot)$ es la función de distribución Normal de media 0 y varianza 1.

Demostración.

$$\mathbb{E}[\exp(aX)|X \geq k] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty \exp(aX) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dX.$$

Si se completan los cuadrados

$$aX - \frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 = a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{X - (\mu + a\sigma^2)}{\sigma}\right)^2,$$

se obtiene que

$$\mathbb{E}[\exp(aX)|X \geq k] = \exp\left(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{X - (\mu + a\sigma^2)}{\sigma}\right]^2\right) dX.$$

Definiendo $u \equiv [X - (\mu + a\sigma^2)]/\sigma$ y $H = [k - (\mu + a\sigma^2)]/\sigma$ se llega a que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(aX)|X \geq k] &= \exp\left(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) dX \\ &= \exp\left(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right) [1 - N(H)] = \exp\left(a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right) N(d), \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde $d \equiv -H = (-k + \mu + a\sigma^2)/\sigma$. □

Teorema 2.1.27. El precio de una Call europea para $t \in [0, T]$ es:

$$C(S_t) = N(d_1)S_t - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}, \quad (2.15)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

- $N(\cdot)$ es la función de distribución de la $N(0, 1)$.
- T es el vencimiento.
- t es el tiempo actual.
- S_t es el precio de la acción en el instante t .
- K es el strike.

- r es el tipo de interés del bono libre de riesgo.
- σ es la volatilidad (constante) de los retornos de la acción.

Demostración. Por el Teorema 2.1.24, el precio de la Call es

$$C(S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[\text{máx}\{S_T - K, 0\}]$$

y se ejecuta si $S_T \geq K$. De la ecuación diferencial estocástica que rige la dinámica de la acción (ver [2]):

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))$$

la condición que se busca es:

$$S_T = S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))\right] \geq K,$$

o de forma equivalente,

$$(W(T) - W(t)) \geq \frac{1}{\sigma} \left[\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right] \equiv k.$$

La opción vale cero si $S_T < K$ y, en caso contrario, su valor es:

$$C(S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))\right] - K \mid W(T) - W(t) \geq k \right].$$

Como $(W(T) - W(t)) \sim N(0, T-t)$ se aplica el Lema 2.1.26 y se obtiene el resultado indicado. \square

Se podría hacer un razonamiento análogo, pero el precio de la Put Europea puede obtenerse del de la Call Europea.

Proposición 2.1.28 (paridad Put-Call). El valor de una opción Put Europea puede expresarse haciendo uso del valor de la Call Europea como:

$$P(t, S_t) = C(t, S_t) - S_t + Ke^{-r(T-t)}.$$

Demostración. Se supone que se tiene una posición larga en un activo S , una opción Put Europea y una posición corta en una Call Europea, ambas con el mismo vencimiento T y strike K sobre el activo S .

Es decir, sea el portfolio:

$$\Pi_t = S_t + P(t, S_t) - C(t, S_t).$$

En el vencimiento el valor del portfolio es:

$$\Pi_T = S_T + \text{máx}\{K - S_T, 0\} - \text{máx}\{S_T - K, 0\}.$$

El payoff será,

$$\begin{cases} S_T + (K - S_T) - 0 = K & \text{si } S_T \leq K, \\ S_T + 0 - (S_T - K) = K & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

El portfolio Π_t es determinista (se conoce su valor en el futuro). Por tanto, debe evolucionar como el activo libre de riesgo para que no haya arbitraje, es decir

$$\Pi_t = Ke^{-r(T-t)}.$$

y se concluye que

$$S_t + P(t, S_t) - C(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}.$$

□

En la Figura 2.1 se ha representado el valor de una Put Europea (izquierda) y de una Call Europea (derecha) para distintos tiempos al vencimiento ($T - t$) y valores del subyacente (S) negociada para un strike $K = 5$. Los parámetros del modelo han sido $r = 0.05$ y $\sigma = 0.1$.

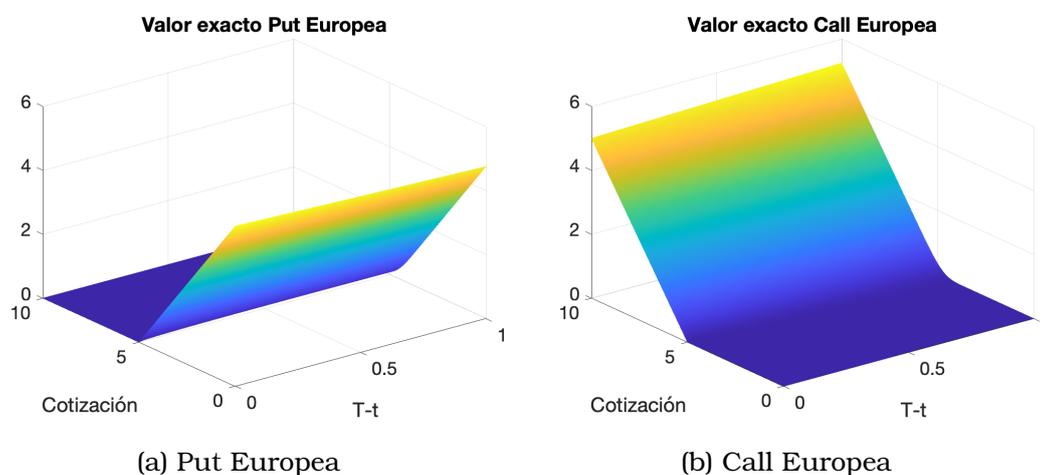


Figura 2.1: Solución analítica de las opciones europeas

2.2. La ecuación de Black-Scholes

La ecuación de Black-Scholes es una ecuación en derivadas parciales (EDP), totalmente determinista, que describe la dinámica de las opciones.

La función $v(t, S; \sigma, \mu, r, K, T)$ representa el valor de una opción (bien una Call o una Put). Las variables de la función serán el tiempo t y el precio del activo subyacente S . El resto son parámetros fijos del modelo de mercado de Black-Scholes (σ, μ, r) y de las condiciones negociadas para la opción (K, T).

La EDP que se obtendrá da otra herramienta numérica para aproximar el precio de las opciones distinta a las simulaciones de Monte Carlo mencionadas en la Observación 2.1.25.

2.2.1. El Delta Hedging

Para obtener la ecuación en derivadas parciales, se usará la estrategia de cobertura conocida como delta Hedging, estrategia del ámbito de las finanzas y que tiene

como objetivo principal gestionar uno de los riesgos asociado a la negociación de opciones financieras. Esta estrategia se basa en medir la sensibilidad (delta) del precio de una opción ante cambios en el precio del activo subyacente. Se busca mantener una posición neutral en cuanto al riesgo de cambios del precio del derivado debido a cambios del precio del subyacente.

Teorema 2.2.1 (Ecuación de Black-Scholes). El valor de una opción europea $v(t, S)$ (Call o Put) con strike K , precio del activo subyacente S en el instante de tiempo t , vencimiento T , volatilidad σ , y tipo de interés libre de riesgo r satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + rS \frac{\partial v}{\partial S} - rv = 0, \quad (t, S) \in [0, T) \times (0, \infty). \quad (2.16)$$

Demostración. Se construye una cartera de inversión compuesta por la opción que se quiere valorar en una posición larga y una cantidad $-\Delta$ del activo subyacente. El valor de este portfolio es:

$$\Pi_t = v(t, S) - \Delta S, \quad (2.17)$$

La variación del valor de la cartera se debe a los cambios en el valor de la opción y del valor del activo subyacente,

$$d\Pi_t = dv - \Delta dS. \quad (2.18)$$

Asumiendo las hipótesis del modelo de Black-Scholes

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t,$$

por el Lema 2.1.17 se tiene que

$$dv(t, S) = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial v}{\partial S} \sigma S dW_t.$$

Sustituyendo las dos anteriores expresiones en la ecuación (2.18) y agrupando términos:

$$d\Pi_t = \sigma S \left(\frac{\partial v}{\partial S} - \Delta \right) dW_t + \left(\mu S \frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt. \quad (2.19)$$

El término del lado derecho de esta ecuación está compuesto por dos tipos de componentes uno aleatorio y otro determinista. El término aleatorio es el que genera el riesgo del portfolio. La manera de eliminar el riesgo consiste en elegir un Δ concreto. Como el término aleatorio es

$$\sigma S \left(\frac{\partial v}{\partial S} - \Delta \right) dW_t,$$

tomando

$$\Delta = \frac{\partial v}{\partial S}, \quad (2.20)$$

el riesgo queda neutralizado.

Al eliminar el riesgo, es decir, la componente estocástica, se obtiene una cartera cuya evolución es determinista en su totalidad

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \right) dt. \quad (2.21)$$

Nótese que en esta última expresión no aparece μ . Esto implica que el valor de la opción es independiente de este parámetro.

Puesto que las oportunidades de arbitraje no están permitidas, al evolucionar la cartera de forma determinista, debe hacerlo al tipo de interés libre de riesgo, es decir,

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt. \quad (2.22)$$

Por consiguiente

$$r\Pi_t dt = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \right) dt.$$

Sustituyendo $\Delta = \frac{\partial v}{\partial S}$, en la ecuación (2.17)

$$\Pi_t = v(t, S) - S \frac{\partial v}{\partial S}(t, S),$$

se obtiene la célebre ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + rS \frac{\partial v}{\partial S} - rv = 0. \quad (2.23)$$

□

Observaciones 2.2.2.

- (i) Surge de forma natural la interpretación de esta ecuación como núcleo de un operador, el llamado operador de Black-Scholes,

$$\mathcal{L}_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r.$$

- El operador tiene una componente que describe la dependencia temporal de la opción, representada por la derivada parcial con respecto al tiempo $\frac{\partial v}{\partial t}$. Esta componente refleja cómo cambia el precio de la opción con el paso del tiempo.
 - El operador también incluye componentes que describen la dependencia espacial de la opción, representadas por las derivadas parciales con respecto al precio del activo subyacente $\frac{\partial v}{\partial S}$ y $\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}$. Estas componentes capturan cómo los movimientos en el precio del activo subyacente afectan al precio de la opción y están influenciadas por la volatilidad del activo subyacente.
- (ii) La ecuación de Black-Scholes es una ecuación en derivadas parciales parabólica. En dicha ecuación no aparece el drift μ , que desapareció al cubrir el riesgo, es decir, cuando se eliminó el componente estocástico de la cartera usando el propio activo S , con lo que no es necesario conocer su valor para valorar las opciones.

2.3. Condiciones específicas para distintas Opciones

2.3.1. Opciones Europeas

Para que el problema quede completamente determinado, lo siguiente es considerar las condiciones frontera, que son especificaciones que rigen el comportamiento

de las opciones en los límites del dominio del problema y en la representación de las restricciones del mercado financiero.

Por un lado, se tiene la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + rS \frac{\partial v}{\partial S} - rv = 0, \quad \text{para } t \in [0, T], S > 0.$$

En primer lugar, para $t = T$, el valor de la opción debe ser el payoff. Para la opción Call Europea es:

$$v(T, S) = C(T, S) = \max\{S - K, 0\},$$

y para la opción Put Europea, es

$$v(T, S) = P(T, S) = \max\{K - S, 0\}.$$

Cuando $S = 0$, el activo no cambia de precio $dS = 0$. En $S = 0$ la ecuación de Black-Scholes se reduce a la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dv}{dt}(t, 0) = rv(t, 0),$$

La solución de la ecuación es

$$v(t, 0) = v(T, 0)e^{-r(T-t)},$$

y, por consiguiente, como $C(T, 0) = 0$ se tiene que

$$C(t, 0) = 0,$$

es decir, para opciones Call, la condición frontera dicta que para $S = 0$ el valor de la opción debe ser cero.

En cambio, para la opción Put, usando $v(t, 0) = v(T, 0)e^{-rT}$

$$P(t, 0) = P(T, 0)e^{-r(T-t)} = Ke^{-r(T-t)}.$$

Falta analizar la condición de frontera cuando $S \rightarrow \infty$, es decir, cuando el precio del activo se mueve hacia el infinito. Puesto que a medida que el valor del activo subyacente crece, dificulta que la opción Put se ejerza, tomando el límite se puede probar que

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(t, S) = 0,$$

y utilizando la paridad Put-Call (Proposición 2.1.28)

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{C(t, S)}{S} = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{P(t, S) + S - Ke^{-r(T-t)}}{S} = 1.$$

2.3.2. Opciones Americanas

El término americano, referido a una opción financiera (sea Call como Put), implica que en su negociación se ha incorporado el derecho al comprador de la misma a ejercerla en cualquier instante de tiempo desde su negociación hasta el vencimiento.

Por un argumento financiero, el precio de una opción americana debe ser igual o mayor que el de una Europea, ya que un derecho adicional debe implicar una contraprestación monetaria adicional por adquirirlo.

En el caso de la Put Americana, el precio sí será mayor pero, curiosamente, en el de la Call Americana el precio coincide con el de la Europea.

Proposición 2.3.1. Sea $C(t, S)$ el precio de una Call Europea y $C_A(t, S)$ el precio de la Call Americana de igual strike y vencimiento.

Entonces, $C_A(t, S) = C(t, S)$.

Demostración. Que $C_A \geq C$ es trivial por el argumento económico mencionado.

Veamos qué ocurre si la opción Americana se ejerce:

- Si el ejercicio es en el vencimiento, $C_A(T, S) = C(T, S)$.
- Si la opción Americana se ejerce antes ($t < T$), se recibe $S(t) - K$. Puesto que $e^{-r(T-t)} < 1$ y $P(t, S) \geq 0$ se tiene que:

$$S(t) - K < S(t) - Ke^{-r(T-t)} \leq P(t, S) + S(t) - Ke^{-r(T-t)} = C(t, S),$$

donde en el último paso se ha utilizado la paridad Call-Put Europea (Proposición 2.1.28).

Esta desigualdad implica que ejercer la opción reporta menos que conservarla.

Si la opción Call Americana nunca se ejerce (pese a poder hacerlo) es equivalente a tener una Call Europea. \square

Para el caso de la Put Americana, denotada por $P_A(t, S)$, solamente se tiene la cota $P_A(t, S) \geq P(t, S)$ obtenida del argumento económico.

El problema de valorar la Put Americana es lo que se conoce como un problema de frontera libre (free boundary problem).

Para cada instante de tiempo t , va a existir un valor $S_e(t)$ que denota la frontera de los valores de la cotización del activo donde será óptimo conservar la opción (si $S(t) > S_e(t)$) o donde será óptimo ejercerla prematuramente (si $S(t) \leq S_e(t)$).

El valor concreto de $S_e(t)$ dependerá, además de los parámetros del mercado, del tiempo que reste hasta el vencimiento $T - t$.

Los valores de $S_e(t)$, $t \in [0, T]$ no son conocidos de antemano y son parte del problema, haciendo que sea más difícil aproximar una solución numérica al precio de la opción.

Un desarrollo más detallado de lo que se expone a continuación se puede encontrar en [9] y en las referencias allí incluidas.

El precio de la Put Americana $P_A(t, S)$ lo que verifica es la desigualdad

$$\frac{\partial P_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P_A}{\partial S} - rP_A \leq 0, \quad (2.24)$$

donde la igualdad estricta ocurre en la zona donde no se ejerce la opción prematuramente, es decir, cuando $S(t) > S_e(t)$.

El resto de condiciones que debe verificar la Put Americana son:

$$\begin{aligned} P_A(t, S) &\geq \max\{K - S, 0\}, \\ P_A(t, S_e(t)) &= \max\{K - S_e(t), 0\}, \\ \frac{\partial P_A}{\partial S}(t, S_e(t)) &= -1. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para tener el problema perfectamente definido, deben verificarse las ecuaciones (2.24) y (2.25) además de la condición en el vencimiento

$$P_A(t, S) = \text{máx}\{K - S, 0\}$$

resultando en un problema bastante más complejo.

No obstante, la ecuación anterior suele reescribirse (problema complementario) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial P_A}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P_A}{\partial S} - rP_A \right) (P_A(t, S) - \text{máx}\{K - S, 0\}) &= 0, \\ -\frac{\partial P_A}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P_A}{\partial S} - rP_A &\leq 0, \\ P_A(t, S) - \text{máx}\{K - S, 0\} &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde $\tau = T - t$. Nótese que de esta forma no ha aparecido la frontera libre $S_e(t)$ en la formulación, calculándose posteriormente cuando se ha aproximado el valor de $P_A(t, S)$, de forma que

$$S_e(t) = \text{máx}\{S | P_A(t, S) - \text{máx}\{K - S, 0\} = 0\}. \quad (2.27)$$

2.3.3. Opciones Barrera

Una opción barrera (europea) es un tipo de opción que incorpora una dependencia (débil) de la trayectoria. Las condiciones en el vencimiento no varían

$$\begin{aligned} \text{Call: } &\text{máx}\{S - K, 0\}, \\ \text{Put: } &\text{máx}\{K - S, 0\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

pero se añade una condición binaria (sí o no) que depende de la trayectoria de la cotización.

La opción es de tipo In (resp. Out) si el pago de la opción se realiza (resp. no se realiza) si, y solo si, el precio del activo ha cruzado un cierto valor prefijado de antemano.

Si la condición implica que el valor se haya cruzado desde un valor inferior a uno superior se dice además que es de tipo Up y si es que se ha cruzado desde un valor superior a uno inferior es de tipo Down.

De forma esquemática, las opciones barrera más sencillas son:

- Up-and-Out: La opción no vale nada si $S(t)$ alcanza o sobrepasa el valor S_u antes del vencimiento.
- Down-and-Out: La opción no vale nada si $S(t)$ llega o baja del valor S_d antes del vencimiento.
- Up-and-In: La opción vence sin valor a no ser que $S(t)$ alcance o sobrepase el valor S_u antes del vencimiento.
- Down-and-In: La opción vence sin valor a no ser que $S(t)$ llegue o baje del valor S_d antes del vencimiento.

Los valores S_u o S_d se fijan cuando se negocia el contrato y en ese instante de tiempo t se tiene que $S_u > S(t) > S_d$. En el caso de que la condición se cumpla a lo largo de la trayectoria, se suele decir que la opción se ha “disparado”.

Asumiendo el modelo de mercado de Black-Scholes, las opciones barrera verifican la ecuación habitual

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + rS \frac{\partial v}{\partial S} - rv = 0$$

pero las condiciones frontera deben modificarse o ampliarse. Por ejemplo, para una opción barrera de tipo Up-and-Out, la condición debería ser del estilo

$$v(t, S_u) = 0, \quad 0 < t < T,$$

de forma que si $S(t)$ alcanza ese valor, el contrato se dispara y deja de existir.

Nótese que esta condición genera una discontinuidad de salto en el vencimiento, pero que no crea excesivos inconvenientes debido al carácter regularizante de la ecuación de Black-Scholes.

Para opciones barrera del tipo Up-and-In, si no se ha disparado antes de llegar al vencimiento, el contrato llega sin valor, luego

$$v(T, S) = 0$$

y, en el caso de que se haya disparado, llegará al vencimiento como una opción Europea.

Para evitar el arbitraje, en $S(t) = S_u, t \in [0, T]$, el precio de la opción barrera debe coincidir con el de la opción Europea de igual vencimiento y Strike.

Por tanto, se calcula previamente el precio de una opción europea $v_E(t, S)$ y la condición frontera que se impondría sería:

$$v(t, S_u) = v_E(t, S_u), \quad 0 \leq t < T.$$

2.3.4. Opciones Asiáticas

Las opciones Asiáticas son un tipo de contrato derivado donde el valor en el vencimiento se negocia en función del precio medio del activo subyacente en un intervalo de tiempo.

Este valor medio $A(t)$ se puede calcular con una media aritmética o geométrica de forma discreta o también de forma continua, afectando esto al precio del contrato. El precio dependerá en estos casos de tres variables, la cotización $S(t)$, el tiempo t y la propia media $A(t)$ aunque, en algunos casos el problema puede reducirse a uno bidimensional.

El procedimiento para la obtención de la EDP sería similar, aplicando la versión multidimensional del Lema de Itô e imponiendo las pertinentes condiciones frontera.

Para finalizar esta Sección, indicar que en [2] y [23] se pueden ver éstos y otros tipos de derivados así como su tratamiento matemático.

Capítulo 3

Valoración numérica de la opción financiera a través de la EDP

3.1. El Método de Elementos Finitos

Las Ecuaciones Diferenciales son una herramienta matemática utilizada para describir fenómenos y procesos naturales de la física y la ingeniería, permitiendo, junto con adecuadas condiciones iniciales y de contorno, modelar variaciones y relaciones entre las distintas variables que afectan a la evolución del proceso que se quiere analizar.

Uno de los métodos que permite aproximar soluciones de problemas que involucran Ecuaciones Diferenciales es el Método de Elementos Finitos, técnica numérica empleada para obtener aproximaciones numéricas de problemas diversos en una variedad de disciplinas como, por ejemplo, la economía. El método de elementos finitos posibilita encontrar soluciones aproximadas a problemas complejos cuando no es posible encontrar soluciones analíticas directas.

Primero, se plantea el problema modelo. Consideremos un fenómeno económico en un dominio definido, donde una función desconocida debe satisfacer una ecuación en derivadas parciales. Este planteamiento establece el marco teórico inicial del problema a resolver. Después, haciendo uso de la formulación variacional, se obtiene el problema débil.

Posteriormente, se plantea el problema aproximado donde en este caso concreto se usará el Método de Elementos Finitos para obtener la discretización.

Por último, a través de la notación matricial se implementará computacionalmente el modelo obteniéndose así la solución numérica aproximada.

En primer lugar, se presentan varios resultados de Análisis Funcional, necesarios para el desarrollo del capítulo.

Posteriormente, se presentará el método Galerkin y se hará un análisis para ver que efectivamente el problema de Black-Scholes está bien planteado.

En la Sección 3.2 se desarrollará una implementación del método de elementos finitos y se hará un análisis empírico del error numérico cometido.

Para finalizar el capítulo, se verá como aplicar el método a la valoración de la opción americana.

3.1.1. Resultados previos

Los resultados que se presentan a continuación son habituales de los cursos de Análisis Funcional. Su desarrollo y las demostraciones se pueden encontrar en [6], [13], [18] ó [19].

Por comodidad, todos los espacios vectoriales que se empleen están definidos sobre el cuerpo \mathbb{R} .

Los siguientes resultados dan el marco teórico necesario para el desarrollo del método.

Definición 3.1.1. Un espacio vectorial V dotado de una norma se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente. En ese caso se dice que V es un espacio de Banach.

Proposición 3.1.2. Dados V, W dos espacios de Banach y dada $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, son equivalentes:

- (i) f es continua en V .
- (ii) Existe $\mu \geq 0$ tal que $\|f(x)\| \leq \mu\|x\|, \forall x \in V$.
- (iii) f es uniformemente continua en V .
- (iv) f transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Definición 3.1.3. Sea V espacio vectorial dotado de norma. Se define:

$$V' = \{F : V \rightarrow \mathbb{R} / F \text{ es lineal y continua}\}.$$

El espacio V' se conoce como el espacio dual de V .

Proposición 3.1.4. Sea V un espacio de Banach y $F \in V'$. Si se define

$$\|F\|_{V'} = \sup\{|F(x)| : \|x\| = 1\},$$

entonces V' dotado de la norma $\|\cdot\|_{V'}$ es un espacio de Banach.

Definición 3.1.5. Sea V un espacio vectorial y (\cdot, \cdot) un producto interno. Se dice que el par $(V, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert si V con la norma asociada al producto interno $\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \forall x \in V$, es completo.

Proposición 3.1.6. Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ un espacio de Hilbert real. Sea $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Son equivalentes:

- (i) La forma bilineal a es continua.
- (ii) Existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$|a(x, y)| \leq \alpha\|x\|\|y\|,$$

para cada $x, y \in V$.

Definición 3.1.7. Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ un espacio de Hilbert real. Se dice que una forma bilineal $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es coerciva si existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$a(x, x) \geq \beta\|x\|^2$$

para todo $x \in V$.

Proposición 3.1.8. Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ un espacio de Hilbert, $W \subseteq V$ un subespacio cerrado y $x \in V \setminus W$.

Si $\delta(x) = \inf_{y \in W} \{\|x - y\|\}$ entonces existe $y_0 \in W$ tal que $\|x - y_0\| = \delta(x)$ y se verifica que $x - y_0 \in W^\perp$, donde W^\perp denota el espacio ortogonal a W , definido como

$$W^\perp = \{x \in V : (x, y) = 0, \forall y \in W\}.$$

Teorema 3.1.9 (de representación de Riesz). Sean $(V, (\cdot, \cdot))$ un espacio de Hilbert y F un funcional lineal y continuo sobre V , es decir, $F \in V'$.

Entonces, existe $x \in V$ tal que $F(y) = (x, y)$ para todo $y \in V$.

Además, en estas condiciones, el elemento x es único y $\|F\|_{V'} = \|x\|$.

Definición 3.1.10. Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ un espacio de Hilbert. Se supone que $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, continua y coerciva en V .

Dado $F \in V'$, se define el problema variacional como la búsqueda del elemento $x \in V$, tal que

$$a(x, y) = F(y) \tag{3.1}$$

para cada $y \in V$.

Para que el problema variacional que se ha definido esté bien puesto, lo primero es garantizar que tiene solución y es única.

Teorema 3.1.11 (de Lax-Milgram). Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ un espacio de Hilbert, a una forma bilineal continua y coerciva en V y sea $F \in V'$. Entonces, existe un único $x \in V$ tal que para cada $y \in V$,

$$a(x, y) = F(y),$$

y donde se verifica que $\|x\| \leq \frac{1}{\beta} \|F\|_{V'}$ con β la constante de coercitividad de a .

La demostración de este último resultado se puede encontrar en el Teorema 6.5 de [19].

3.1.2. El método Galerkin

Para el problema variacional (3.1), en la práctica, el objetivo es encontrar un método para poder calcular una solución aproximada y poder analizar cómo de buena es.

Supongamos que V se puede describir como unión de espacios de dimensión finita. La idea básica del método Galerkin consiste en ver si las soluciones aproximadas pueden obtenerse como proyecciones de la ecuación (3.1) sobre esos subespacios.

Veamos, siguiendo la línea presentada en [19], una breve descripción algo más formal del método.

Sea V un espacio de Hilbert y sea $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ un conjunto de subespacios de V tales que:

- $\dim V_i = i$
- $V_i \subseteq V_{i+1}$
- $V = \overline{\cup_i V_i}$

Para un $n \in \mathbb{N}$ fijo, sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ una base de V_n . Cualquier elemento $u_n \in V_n$ puede escribirse como

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i.$$

Supongamos que se quiere resolver el problema variacional (3.1) restringido a V_n , es decir, encontrar $u_n \in V_n$ tal que

$$a(u_n, y) = F(y), \quad \forall y \in V_n. \quad (3.2)$$

En particular, esto implica que

$$a(u_n, \varphi_i) = F(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Como $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal, esto da lugar a un sistema de ecuaciones lineal, que matricialmente se puede escribir como

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{F},$$

donde $\mathbf{A}_{j,k} = a(\varphi_k, \varphi_j)$, $\mathbf{c}_{j,1} = c_j$ y $\mathbf{F}_{j,1} = F(\varphi_j)$.

Se puede probar que (ver [19]), por ser $a(\cdot, \cdot)$ bilineal y coerciva, la matriz \mathbf{A} es definida positiva (estrictamente) y, por tanto, el sistema tiene solución única. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, existe una única solución $u_n \in V_n$.

Para ver si el conjunto de soluciones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de utilidad, hay que analizar si converge cuando $n \rightarrow \infty$. Para ello se necesita un resultado previo.

Lema 3.1.12 (de Céa). Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram y sea u la solución del problema (3.1).

Si u_n es la solución del problema 3.2, entonces

$$\|u - u_n\| \leq \frac{\alpha}{\beta} \inf_{v \in V_n} \|u - v\|,$$

donde α y β son las constantes de continuidad y de coercividad respectivamente.

Demostración. Partiendo de que para cada $v \in V_n$

$$a(u, v) = F(v),$$

$$a(u_n, v) = F(v),$$

si se restan ambas expresiones, para todo $v \in V_n$

$$a(u - u_n, v) = 0$$

y, en particular, como $v - u_n \in V_n$, también se cumple que

$$a(u - u_n, v - u_n) = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} a(u - u_n, u - u_n) &= a(u - u_n, u - v) + a(u - u_n, v - u_n) \\ &= a(u - u_n, u - v). \end{aligned}$$

Como $a(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva, se verifica que

$$\beta \|u - u_n\|^2 \leq a(u - u_n, u - u_n) \leq \alpha \|u - u_n\| \cdot \|u - v\|$$

llegando a que para todo $v \in V_n$

$$\|u - u_n\| \leq \frac{\alpha}{\beta} \|u - v\|$$

donde conviene señalar que la constante $\frac{\alpha}{\beta}$ es independiente del valor de n . \square

Para ver que el método Galerkin lleva a la solución, recordemos que por hipótesis $V = \overline{\cup V_i}$, por tanto existe una sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, $w_n \in V_n$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = u.$$

Por el Lema de Céa

$$\|u - u_n\| \leq \frac{\alpha}{\beta} \inf_{v \in V_n} \|u - v\| \leq \frac{\alpha}{\beta} \|u - w_n\|$$

por lo que $\|u - u_n\|$ tiende a cero conforme n tiende a infinito.

3.1.3. Análisis teórico del problema variacional de Black-Scholes

En esta subsección, sin entrar en un desarrollo exhaustivo, se van a exponer las herramientas necesarias para poder comprobar que el problema Black-Scholes es abordable en sentido variacional y, mediante una técnica Galerkin, nos podemos aproximar a la solución del problema. Un desarrollo más detallado se puede encontrar en [19].

Definición 3.1.13. Fijado $k \in \mathbb{Z}$, el conjunto de las funciones reales definidas en $[a, b]$ tales que todas sus derivadas hasta orden $k - 1$ son absolutamente continuas en $[a, b]$ y tales que

$$\left(\int_a^b \left(\frac{d^k}{dx^k}(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

se llama el espacio de Sobolev $H^k(a, b)$.

Para $u \in H^k(a, b)$, a la norma

$$\|u\|_{H^k(a,b)} = \left(\sum_{i=0}^k \int_a^b \left(\frac{d^i u}{dx^i}(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

se la conoce como la norma de Sobolev.

Además, se denota por $H_0^k(a, b) = \{u \in H^k(a, b) : u(a) = u(b) = 0\}$.

Es sencillo probar, usando la desigualdad de Poincaré, que para $u \in H_0^1(a, b)$, las normas $\|u\|_{H_0^1(a,b)}$ y $\|u\|_{L^2(a,b)}$ son normas equivalentes.

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $w : [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \mathcal{A}w = f, & \text{si } (\tau, x) \in (0, T) \times (a, b), \\ w(0, x) = g(x), & \text{si } x \in (a, b), \\ w(\tau, a) = 0, \\ w(\tau, b) = 0, \end{cases}$$

donde \mathcal{A} es un operador de la forma

$$\mathcal{A}(w) = -\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma w$$

donde $\alpha > 0$ y β, γ son constantes.

Sea $u \in H_0^1(a, b)$. Si (\cdot, \cdot) denota el producto interno usual de $L^2(a, b)$, se define

$$a(w, u) = (\mathcal{A}w, u) = \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \beta \left(\frac{\partial w}{\partial x}, u \right) + \gamma(w, u)$$

donde, en el primer término de la derecha, se ha integrado por partes y se ha empleado el hecho de que $u(a) = u(b) = 0$.

La formulación variacional del problema consiste en encontrar $w(\tau, x) \in H_0^1(a, b)$ c.s. para todo $\tau \in [0, T]$ tal que

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial w}{\partial \tau}, u \right) + a(w, u) = (f, u), \\ w(0, x) = g(x). \end{cases} \quad (3.3)$$

para toda función $u \in H_0^1(a, b)$.

Sea $\{\varphi_i\}$ una base de $H_0^1(a, b)$.

Aplicando la técnica Galerkin, para un $n \in \mathbb{N}$ fijo, sea V_n el espacio generado por $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ y sea

$$w_n(\tau, x) = \sum_{i=1}^n c_i(\tau) \varphi_i(x).$$

Si se sustituye w por w_n en (3.3) y, para cada $i = 1, \dots, n$ se sustituye u por φ_i , el problema se reduce a resolver un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \mathbf{c}'(\tau) = -\mathbf{A}\mathbf{c}(\tau) + \mathbf{F}(\tau), & \tau \in (0, T] \\ \mathbf{c}(0) = \mathbf{g}. \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{j,k} &= a(\varphi_k, \varphi_j), \\ \mathbf{F}_{i,1}(\tau) &= (f(\tau), \varphi_i), \\ \mathbf{c}_{i,1}(0) &= (g, \varphi_i). \end{aligned}$$

Bajo ciertas hipótesis de regularidad para f y g (ver [19]), y si $a(\cdot, \cdot)$ es un operador bilineal, continuo y coercivo, se puede probar (ver Teorema 9.9 en [19]) el siguiente resultado.

Teorema 3.1.14. El problema (3.3) está bien puesto y las soluciones w_n del método Galerkin convergen (débilmente) a la solución.

En el caso de que el problema (3.3) no tenga condiciones frontera homogéneas, si $h(\tau, x)$ es una función suficientemente regular (ver [19]) tal que las condiciones frontera de (3.3) son $h(\tau, a)$ y $h(\tau, b)$, el cambio $w = u - h$ transforma el problema en uno de condiciones homogéneas y el Teorema 9.9 de [19] sería aplicable. Tras resolverlo, no habría más que deshacer el cambio.

Volvamos ahora al problema de Black-Scholes. Sea $v(t, S)$ el precio de la opción Put Europea y para $\delta > 0$, sea $v_\delta(\tau, x)$ la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_\delta}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v_\delta}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right) \frac{\partial v_\delta}{\partial x} + rv_\delta = 0, \quad (\tau, x) \in (0, T] \\ v_\delta(0, x) = \max\{K - e^x, 0\}, \quad x \in (-\delta, \delta), \\ v_\delta(\tau, -\delta) = Ke^{r\tau}, \\ v_\delta(\tau, \delta) = 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

donde $\tau = T - t$ y $x = \log(S)$.

Nótese que (3.4) no es más que la EDP de Black-Scholes tras los cambios de variable indicados y restringida a un dominio finito, lo que se conoce como la localización del problema. En [12] se prueba que $v_\delta(\tau, x)$ converge a $v(T - \tau, e^x)$, el precio de la Put Europea, conforme $\delta \rightarrow \infty$.

Por último, indicar que el problema (3.4) tiene una única solución variacional. Basta considerar

$$w = v_\delta + \frac{x - \delta}{2\delta} Ke^{r\tau}$$

y ver que el problema variacional asociado a w verifica las condiciones del Teorema 9.9 de [19].

Veamos ahora una implementación de un método de elementos finitos.

3.2. Una implementación de Elementos Finitos para el problema de Black-Scholes

Se va a hacer el desarrollo siguiendo una implementación planteada en [1].

Para ello, el primer paso es fijar un dominio finito donde se va a resolver el problema, que como se ha indicado, se llama la localización del problema.

Sea S_R lo suficientemente grande. De ahora en adelante, $S \in [0, S_R]$. Esta localización genera un error en la aproximación, pero por argumentos como en [12] se puede hacer tan pequeño como se dese tomando S_R más grande.

Se va a trabajar con la Put Europea. Partiendo de (2.23) se realiza el cambio (habitual) de variable $\tau = T - t$, y se plantea el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} - rS \frac{\partial v}{\partial S} + rv = 0 \text{ con } (\tau, S) \in (0, T] \times (0, S_R), \\ v(0, S) = \max\{K - S, 0\} \text{ con } S \in [0, S_R], \\ v(\tau, 0) = Ke^{-r\tau} \\ v(\tau, S_R) = 0. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Para evitar casos extremos, se asume que existen valores $\sigma_{\min}, \sigma_{\max}, r_{\min}, r_{\max} \in (0, \infty)$ tales que

$$\begin{aligned} 0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max}, \\ 0 < \sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}. \end{aligned}$$

En [1] también se puede encontrar un análisis teórico de que (3.5) tiene solución variacional.

Proposición 3.2.1 (formulación variacional de la ecuación de Black-Scholes). La formulación variacional de la ecuación de Black-Scholes viene dada por:

$$\int_0^{S_R} \frac{\partial v}{\partial \tau} \varphi dS = -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial v}{\partial S} \frac{\partial \varphi}{\partial S} dS + (r - \sigma^2) \int_0^{S_R} S \frac{\partial v}{\partial S} \varphi dS - r \int_0^{S_R} v \varphi dS, \quad (3.6)$$

Demostración. Se multiplica la EDP (3.5) por una función test φ tal que verifica que $\varphi(0) = \varphi(S_R) = 0$,

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} \varphi = \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \varphi + r S \frac{\partial v}{\partial S} \varphi - r v \varphi,$$

y se integra sobre S en el dominio $([0, S_R])$ a ambos lados de la ecuación:

$$\int_0^{S_R} \frac{\partial v}{\partial \tau} \varphi dS = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \varphi dS + r \int_0^{S_R} S \frac{\partial v}{\partial S} \varphi dS - r \int_0^{S_R} v \varphi dS,$$

Se integra por partes el primer término de la derecha

$$\begin{aligned} u &= S^2 \varphi, & u' &= 2S \varphi + S^2 \frac{\partial \varphi}{\partial S}, \\ w' &= \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}, & w &= \frac{\partial v}{\partial S}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

obteniéndose

$$\int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \varphi dS = 0 - \int_0^{S_R} 2S \varphi \frac{\partial v}{\partial S} + S^2 \frac{\partial v}{\partial S} \frac{\partial \varphi}{\partial S}$$

usando el hecho de que $\varphi(0) = \varphi(S_R) = 0$.

Agrupando términos

$$\int_0^{S_R} \frac{\partial v}{\partial \tau} \varphi dS = -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial v}{\partial S} \frac{\partial \varphi}{\partial S} dS + (r - \sigma^2) \int_0^{S_R} S \frac{\partial v}{\partial S} \varphi dS - r \int_0^{S_R} v \varphi dS,$$

□

Observación 3.2.2. Nótese que no aparece ninguna derivada de segundo orden en (3.6).

3.2.1. Funciones base

Para discretizar el problema débil, se tomarán funciones Lagrange \mathbb{P}_1 estándar como funciones base, de tal manera que el espacio discreto sea el espacio de funciones continuas y lineales a trozos, es decir,

$$V_h = \{\varphi_i \in \mathcal{C}^0([0, S_R]) : \varphi_i|_{I_j} \in \mathbb{P}_1, i = 1, \dots, M-1\},$$

donde I_j son los subintervalos de la partición, con la notación introducida en la siguiente definición.

Definición 3.2.3. Fijado $[0, S_R]$ y $M \in \mathbb{N}$, sea la malla

$$\{S_0, \dots, S_M \in [0, S_R] : 0 = S_0 < S_1 < \dots < S_M = S_R\} \quad (3.8)$$

una partición del intervalo $[0, S_R]$ donde a los $S_i, i \in \{0, \dots, R\}$ se les denomina nodos. Aunque a efectos de la implementación se empleará una malla equidistante

$$S_i = ih, \quad i = 0, \dots, M, \quad h = \frac{S_R}{M},$$

esto no es una condición necesaria en el método de Elementos Finitos. Puede ocurrir que, para alcanzar una precisión deseada, sea mejor refinar más una zona del dominio que otra y la discretización espacial puede elegirse de esa forma.

Eso si se supone que el strike K coincide en algún nodo de la malla, es decir existe un i_0 tal que $S_{i_0} = K$.

El desarrollo se hará de forma general para una malla cualquiera y al final se indicará la fórmula para el caso de una malla equidistante.

Las funciones base deben cumplir que $\varphi_i(S_j) = \delta_{ij}$, para cada $i, j = 0, \dots, M$, por tanto, para $i = 1, \dots, M - 1$ se definen de la siguiente manera

$$\varphi_i(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq S \leq S_{i-1}, \\ \frac{S - S_{i-1}}{S_i - S_{i-1}} & \text{si } S_{i-1} \leq S \leq S_i, \\ \frac{S_{i+1} - S}{S_{i+1} - S_i} & \text{si } S_i \leq S \leq S_{i+1}, \\ 0 & \text{si } S_{i+1} \leq S \leq S_R. \end{cases}$$

En la Figura 3.1 se puede ver la representación de dos funciones base con su forma característica

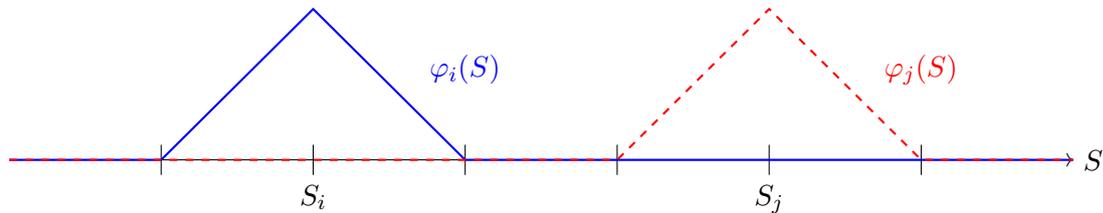


Figura 3.1: Representación de dos funciones base

También se definen, para las condiciones frontera

$$\varphi_0(S) = \begin{cases} \frac{S_1 - S}{S_1 - S_0} & \text{si } 0 \leq S \leq S_1, \\ 0 & \text{si } S \geq S_1, \end{cases} \quad \text{y} \quad \varphi_n(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S \leq S_{R-1}, \\ \frac{S - S_{R-1}}{S_R - S_{R-1}} & \text{si } S_{R-1} \leq S \leq S_R. \end{cases}$$

Se define el espacio

$$V_h = \langle \{\varphi_0, \dots, \varphi_M\} \rangle, \quad (3.9)$$

es decir, el espacio generado por $\varphi_0(S), \dots, \varphi_M(S)$.

La hipótesis sobre la malla asegura que $v(0, S) = \max\{K - S, 0\} \in V_h$.

Observación 3.2.4. Nótese que $\text{sop}(\varphi_i) = [S_{i-1}, S_{i+1}]$, $i = 1, \dots, M - 1$ una propiedad a tener en cuenta posteriormente.

Definición 3.2.5. Sea $v \in \mathcal{C}^0([0, R])$. El interpolante $v_I \in V_h$ de v se define como

$$v_I(S) = \sum_{i=0}^M v(S_i) \varphi_i(S),$$

es decir, el interpolante se construye como una combinación lineal de los valores nodales y las funciones base.

Lema 3.2.6. El conjunto $\{\varphi_0, \dots, \varphi_M\}$ forma una base de V_h .

Demostración. Es un conjunto de generadores por definición. La independencia lineal es evidente pues $\sum_{i=0}^M c_i \varphi_i(S) = 0$ implica que $c_i = 0$, $i = 0, \dots, M$ simplemente evaluando en $S = S_i$, $i = 0, \dots, M$. \square

3.2.2. Forma matricial del método

Se mostró anteriormente que la formulación débil de la Ecuación de Black-Scholes es (3.6). Sustituyendo v por v_h y φ por φ_k se tiene que

$$\int_0^{S_R} \frac{\partial v_h}{\partial \tau} \varphi_k dS = -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial v_h}{\partial S} \frac{\partial \varphi_k}{\partial S} dS + (r - \sigma^2) \int_0^{S_R} S \frac{\partial v_h}{\partial S} \varphi_k dS - r \int_0^{S_T} v_h \varphi_k dS,$$

y teniendo en cuenta que $v_h(\tau, S) = \sum_{j=0}^M v_j(\tau) \varphi_j(S)$, la anterior expresión para cada $k \in \{1, \dots, M-1\}$ adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^M \frac{dv_j}{d\tau} \int_0^{S_R} \varphi_j \varphi_k dS &= -\frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=0}^M v_j \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial S} \frac{\partial \varphi_k}{\partial S} dS \\ &+ (r - \sigma^2) \sum_{j=0}^M v_j \int_0^{S_R} S \frac{\partial \varphi_j}{\partial S} \varphi_k dS \\ &- r \sum_{j=0}^M v_j \int_0^{S_R} \varphi_j \varphi_k dS \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde las dos ecuaciones correspondientes a $k \in \{0, M\}$ se calcularán al final para incorporar las condiciones frontera.

Recordar que para la Put Europea con strike K son

$$\begin{aligned} v_0(\tau) &= v_h(\tau, 0) = Ke^{-r\tau}, \\ v_h(\tau) &= v_h(\tau, S_T) = 0. \end{aligned}$$

El objetivo es reescribir (3.10) como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Se definen las matrices, que se calculan sólo una vez al inicio del algoritmo,

$$\mathbf{M} = (M_{ij})_{i,j=1}^{M-1}, \quad M_{ij} = \int_0^{S_R} \varphi_j \varphi_i dS, \quad (\text{Matriz de masa})$$

$$\mathbf{K} = (K_{ij})_{i,j=1}^{M-1}, \quad K_{ij} = \int_0^{S_R} S^2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial S} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} dS, \quad (\text{Matriz de rigidez})$$

$$\mathbf{C} = (C_{ij})_{i,j=1}^{M-1}, \quad C_{ij} = \int_0^{S_R} S \frac{\partial \varphi_j}{\partial S} \varphi_i dS, \quad (\text{Matriz de convección})$$

Las entradas de las matrices se calculan a continuación

- $i + 1 \leq j + 1$ ó $i - 1 \geq j + 1$: En la Figura 3.2 se representa gráficamente este caso.

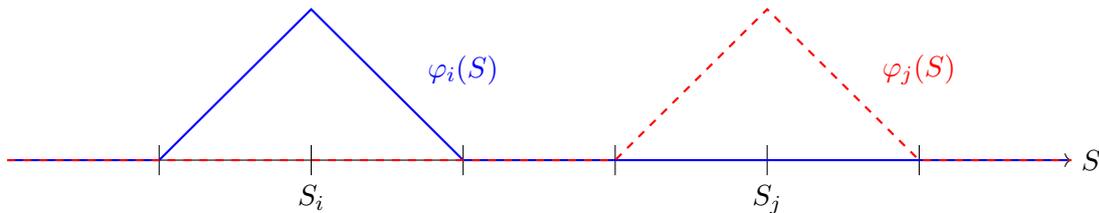


Figura 3.2: Representación de dos funciones base tales que $i + 1 < j + 1$

Este caso es el trivial pues en este caso el producto de las dos funciones será la idénticamente nula por lo que a la hora de calcular las entradas de las matrices todas serán nulas.

- $i = j$: En este caso las funciones coinciden; como se puede ver en la Figura 3.3

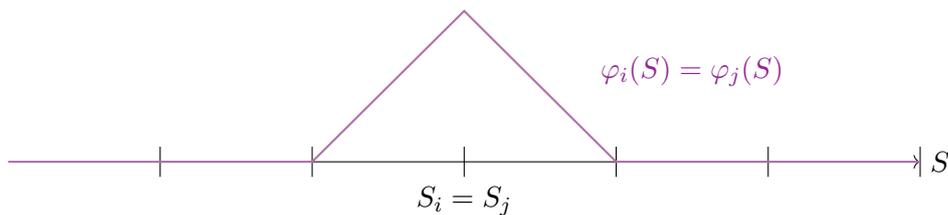


Figura 3.3: Representación de dos funciones base coincidentes

- **Matriz de masa:** haciendo uso de la definición las entradas son

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \int_0^{S_T} \varphi_i(S) \varphi_j(S) dS = \int_0^{S_T} \varphi_i^2(S) dS \\ &= \underbrace{\int_{S_{i-1}}^{S_i} \left(\frac{S - S_{i-1}}{S_i - S_{i-1}} \right)^2 dS}_{(*)} + \underbrace{\int_{S_i}^{S_{i+1}} \left(\frac{S_{i+1} - S}{S_{i+1} - S_i} \right)^2 dS}_{(**)} \end{aligned}$$

Si se resuelve

$$(*) : \int_{S_{i-1}}^{S_i} \left(\frac{S - S_{i-1}}{S_i - S_{i-1}} \right)^2 dS = \frac{1}{(S_i - S_{i-1})^2} \int_{S_{i-1}}^{S_i} (S - S_{i-1})^2 dS = \frac{S_i - S_{i-1}}{3}$$

y

$$(**) : \int_{S_i}^{S_{i+1}} \left(\frac{S_{i+1} - S}{S_{i+1} - S_i} \right)^2 dS = \frac{1}{(S_{i+1} - S_i)^2} \int_{S_i}^{S_{i+1}} (S_{i+1} - S)^2 dS = \frac{S_{i+1} - S_i}{3}$$

Se tiene que

$$M_{i,j} = \frac{(S_{i+1} - S_i) + (S_i - S_{i-1})}{3} = \frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{3}.$$

en el caso de tener una malla uniforme

$$M_{i,j} = \frac{(S_{i+1} - S_i) + (S_i - S_{i-1})}{3} = \frac{2h}{3}.$$

- **Matriz de rigidez:** sabiendo que las derivadas parciales son

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S - S_{i-1}}{S_i - S_{i-1}} \right) = \frac{1}{S_i - S_{i-1}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S_{i+1} - S}{S_{i+1} - S_i} \right) = \frac{-1}{S_{i+1} - S_i}.$$

Las entradas son:

$$\begin{aligned} K_{i,j} &= \int_0^{S_T} S^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial S}(S) \frac{\partial \varphi_j}{\partial S}(S) dS = \int_0^{S_T} S^2 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial S}(S) \right)^2 dS \\ &= \underbrace{\int_{S_{i-1}}^{S_i} S^2 \left(\frac{1}{S_i - S_{i-1}} \right)^2 dS}_{(*)} + \underbrace{\int_{S_i}^{S_{i+1}} S^2 \left(\frac{-1}{S_{i+1} - S_i} \right)^2 dS}_{(**)} \end{aligned}$$

donde,

$$(*) : \int_{S_{i-1}}^{S_i} S^2 \left(\frac{1}{S_i - S_{i-1}} \right)^2 dS = \frac{1}{(S_i - S_{i-1})^2} \int_{S_{i-1}}^{S_i} S^2 dS = \frac{S_i^3 - S_{i-1}^3}{3(S_i - S_{i-1})^2}$$

y

$$(**) : \int_{S_i}^{S_{i+1}} S^2 \left(\frac{-1}{S_{i+1} - S_i} \right)^2 dS = \frac{1}{(S_{i+1} - S_i)^2} \int_{S_i}^{S_{i+1}} S^2 dS = \frac{S_{i+1}^3 - S_i^3}{3(S_{i+1} - S_i)^2}$$

Por lo que se tiene que

$$K_{i,j} = \frac{S_i^3 - S_{i-1}^3}{3(S_i - S_{i-1})^2} + \frac{S_{i+1}^3 - S_i^3}{3(S_{i+1} - S_i)^2}.$$

En el caso de una malla uniforme se tiene que $S_i = ih$, y que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} K_{i,j} &= \frac{S_i^3 - S_{i-1}^3}{3(S_i - S_{i-1})^2} + \frac{S_{i+1}^3 - S_i^3}{3(S_{i+1} - S_i)^2} = \frac{-S_{i-1}^3 + S_{i+1}^3}{3h^2} \\ &= \frac{-(i-1)^3 h^3 + (i+1)^3 h^3}{3h^2} = \frac{2h}{3} [3i^2 + 1] \end{aligned} \quad (3.11)$$

- **Matriz de convección:** Haciendo uso de las derivadas parciales anteriormente expresadas, las entradas son:

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= \int_0^{S_T} S \frac{\partial \varphi_j}{\partial S}(S) \varphi_i(S) dS = \int_0^{S_T} S \frac{\partial \varphi_i}{\partial S}(S) \varphi_i(S) dS \\ &= \underbrace{\int_{S_{i-1}}^{S_i} S \left(\frac{1}{S_i - S_{i-1}} \right) \left(\frac{S - S_{i-1}}{S_i - S_{i-1}} \right) dS}_{(*)} + \underbrace{\int_{S_i}^{S_{i+1}} S \left(\frac{-1}{S_{i+1} - S_i} \right) \left(\frac{S_{i+1} - S}{S_{i+1} - S_i} \right) dS}_{(**)} \end{aligned}$$

donde,

$$(\star) : \int_{S_{i-1}}^{S_i} S \left(\frac{1}{S_i - S_{i-1}} \right) \left(\frac{S - S_{i-1}}{S_i - S_{i-1}} \right) dS = \frac{1}{(S_i - S_{i-1})^2} \left[\frac{S^3}{3} - S_{i-1} \frac{S^2}{2} \right]_{S_{i-1}}^{S_i} \\ = \frac{2S_i^3 - 3S_{i-1}S_i^2 + S_{i-1}^3}{6(S_i - S_{i-1})^2}$$

y

$$(\star\star) : \int_{S_i}^{S_{i+1}} S \left(\frac{-1}{S_{i+1} - S_i} \right) \left(\frac{S_{i+1} - S}{S_{i+1} - S_i} \right) dS = \frac{-1}{(S_{i+1} - S_i)^2} \left[S_{i+1} \frac{S^2}{2} - \frac{S^3}{3} \right]_{S_i}^{S_{i+1}} \\ = -\frac{S_{i+1}^3 - 3S_{i+1}S_i^2 + 2S_i^3}{6(S_{i+1} - S_i)^2}.$$

Se tiene que

$$C_{i,j} = \frac{2S_i^3 - 3S_{i-1}S_i^2 + S_{i-1}^3}{6(S_i - S_{i-1})^2} - \frac{S_{i+1}^3 - 3S_{i+1}S_i^2 + 2S_i^3}{6(S_{i+1} - S_i)^2}.$$

En el caso de que la malla sea uniforme

$$C_{i,j} = \frac{2S_i^3 - 3S_{i-1}S_i^2 + S_{i-1}^3}{6(S_i - S_{i-1})^2} - \frac{S_{i+1}^3 - 3S_{i+1}S_i^2 + 2S_i^3}{6(S_{i+1} - S_i)^2} \quad (3.12) \\ = \frac{(i-1)^3h^3 - 3(i-1)i^2h^3 - (i+1)^3h^3 + 3(i+1)i^2h^3}{6h^2} = \frac{-h}{3}$$

- $j = i + 1$: En la Figura 3.4 se puede ver una representación gráfica de este caso.

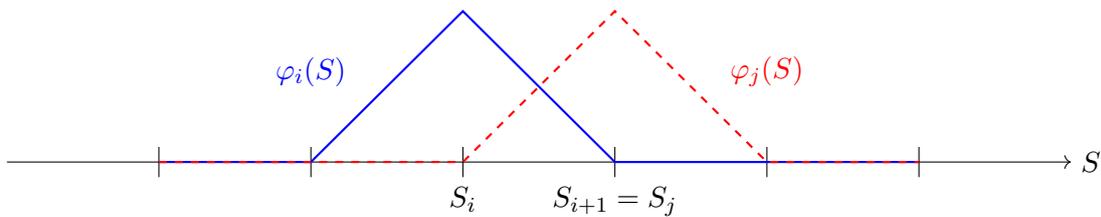


Figura 3.4: Representación de dos funciones base consecutivas

En este caso solo se calculan las integrales en las partes en las que no se anula el producto de las dos funciones. Ya que ahora se tienen

$$\varphi_i(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq S \leq S_{i-1}, \\ \frac{S-S_{i-1}}{S_i-S_{i-1}} & \text{si } S_{i-1} \leq S \leq S_i, \\ \frac{S_{i+1}-S}{S_{i+1}-S_i} & \text{si } S_i \leq S \leq S_{i+1}, \\ 0 & \text{si } S_{i+1} \leq S \leq S_T. \end{cases} \quad \text{y } \varphi_{i+1}(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq S \leq S_{i-1}, \\ \frac{S-S_i}{S_{i+1}-S_i} & \text{si } S_i \leq S \leq S_{i+1}, \\ \frac{S_{i+2}-S}{S_{i+2}-S_{i+1}} & \text{si } S_{i+1} \leq S \leq S_{i+2}, \\ 0 & \text{si } S_{i+2} \leq S \leq S_T. \end{cases}$$

• **Matriz de masa:**

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \int_0^{S_T} \varphi_i(S) \varphi_{i+1}(S) dS = \int_{S_i}^{S_{i+1}} \varphi_i(S) \varphi_{i+1}(S) dS \\ &= \int_{S_i}^{S_{i+1}} \left(\frac{S_{i+1} - S}{S_{i+1} - S_i} \right) \left(\frac{S - S_i}{S_{i+1} - S_i} \right) dS \\ &= \frac{1}{(S_{i+1} - S_i)^2} \left(\frac{S_{i+1}^3 + 3S_{i+1}S_i^2 - 3S_{i+1}^2S_i - S_i^3}{6} \right) \end{aligned}$$

En el caso de la malla uniforme considerando $S_i = ih$ se tiene que

$$M_{i,j} = \frac{1}{6h^2} [(i+1)^3 h^3 + 3(i+1)hi^2 h^2 - 3(i+1)^2 h^2 ih - i^3 h^3] = \frac{h}{6}$$

• **Matriz de rigidez:**

$$\begin{aligned} K_{i,j} &= \int_0^{S_T} S^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial S}(S) \frac{\partial \varphi_j}{\partial S}(S) dS = \int_{S_i}^{S_{i+1}} S^2 \left(\frac{-1}{S_{i+1} - S_i} \right) \left(\frac{1}{S_{i+1} - S_i} \right) dS \\ &= -\frac{S_{i+1}^3 - S_i^3}{3(S_{i+1} - S_i)^2} \end{aligned}$$

En el caso de la malla uniforme considerando $S_i = ih$ se tiene que

$$K_{i,j} = -\frac{S_{i+1}^3 - S_i^3}{3(S_{i+1} - S_i)^2} = \frac{-1}{3h^2} [(i+1)^3 h^3 - i^3 h^3] = \frac{-h}{3} [3i^2 + 3i + 1].$$

• **Matriz de convección:** las entradas de esta matriz son de la forma

$$C_{i,j} = \int_0^{S_T} S \frac{\partial \varphi_j}{\partial S}(S) \varphi_i(S) dS,$$

y se habrá de distinguir los casos respecto de si se considera la derivada parcial sobre φ_i o φ_j .

- **Caso 1.** Se considera $\frac{\partial \varphi_j}{\partial S}$,

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= \int_0^{S_T} S \frac{\partial \varphi_j}{\partial S}(S) \varphi_i(S) dS = \int_{S_i}^{S_{i+1}} S \left(\frac{1}{S_{i+1} - S_i} \right) \left(\frac{S_{i+1} - S}{S_{i+1} - S_i} \right) dS \\ &= \frac{S_{i+1}^3 - 3S_{i+1}S_i^2 + 2S_i^3}{6(S_{i+1} - S_i)^2} \end{aligned}$$

Si se tiene una malla uniforme con $S_i = ih$ se tiene que

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= \frac{S_{i+1}^3 - 3S_{i+1}S_i^2 + 2S_i^3}{6(S_{i+1} - S_i)^2} = \frac{1}{6h^2} [(i+1)^3 h^3 - 3(i+1)hi^2 h^2 + 2i^3 h^3] \\ &= \frac{h}{6} (3i + 1). \end{aligned}$$

- **Caso 2.** En esta ocasión se considera $\frac{\partial \varphi_i}{\partial S}$

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= \int_0^{S_T} S \frac{\partial \varphi_i}{\partial S}(S) \varphi_j(S) dS = \int_{S_i}^{S_{i+1}} S \left(\frac{-1}{S_{i+1} - S_i} \right) \left(\frac{S - S_i}{S_{i+1} - S_i} \right) dS \\ &= \frac{-1}{(S_{i+1} - S_i)^2} \left(\frac{2S_{i+1}^3 + S_i^3 - 3S_{i+1}^2 S_i}{6} \right) \end{aligned}$$

Si se tiene una malla uniforme con $S_i = ih$ se tiene que

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= \frac{-1}{(S_{i+1} - S_i)^2} \left(\frac{2S_{i+1}^3 + S_i^3 - 3S_{i+1}^2 S_i}{6} \right) \\ &= \frac{-1}{6h^2} [2(i+1)^3 h^3 + i^3 h^3 - 3(i+1)^2 h^2 i h] = \frac{-h}{6} (3i+2). \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones (3.10) se reescribe de forma matricial de la siguiente forma

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \mathbf{K} + (r - \sigma^2) \mathbf{C} - r \mathbf{M} \right) \mathbf{v}(\tau) + \mathbf{b}(\tau),$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\tau) &= [v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_{M-1}(\tau)]^t, \\ \mathbf{b}(\tau) &= [b_1(\tau), b_2(\tau), \dots, b_{M-1}(\tau)]^t, \end{aligned}$$

y en el vector $\mathbf{b}(\tau)$ se van a recoger las condiciones frontera.

Como se trabaja con la Put Europea, $v_M(\tau) = 0$, así que, tras unas sencillas cuentas, el vector \mathbf{b} se reduce a

$$b_i = -M_{i0} \frac{dv_0}{d\tau}(\tau) - \frac{1}{2} \sigma^2 K_{i0} v_0(\tau) + (r - \sigma^2) C_{i0} v_0(\tau) - r M_{i0} v_0(\tau),$$

donde, para la malla de nodos equiespaciada, se verifica

$$\begin{aligned} M_{10} &= \frac{h}{6}, & M_{i0} &= 0, \quad i > 0, \\ K_{10} &= \frac{-h}{3}, & K_{i0} &= 0, \quad i > 0, \\ C_{10} &= \frac{-h}{3}, & C_{i0} &= 0, \quad i > 0. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v_0(\tau) &= K e^{-r\tau} \\ \frac{dv_0}{d\tau}(\tau) &= -r K e^{-r\tau}, \end{aligned}$$

es decir, $\mathbf{b}(\tau)$ es un vector todo nulo salvo la componente $b_1(\tau)$ para la Put.

Recopilando, la EDP (3.5), en forma variacional, se ha convertido en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} &= \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \mathbf{K} + (r - \sigma^2) \mathbf{C} - r \mathbf{M} \right) \mathbf{v}(\tau) + \mathbf{b}(\tau), \\ \mathbf{v}(0) &= [\text{máx}\{K - S_1, 0\}, \text{máx}\{K - S_2, 0\}, \dots, \text{máx}\{K - S_{M-1}, 0\}]^t. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Para resolver numéricamente la ecuación anterior, basta simplemente con sustituir $\frac{dv}{d\tau}$ por el integrador temporal que se desee. Integradores temporales de mayor orden requerirán un mayor coste computacional.

3.2.3. Experimentos numéricos

En este algoritmo, como integrador temporal, se ha utilizado la regla de Euler implícita.

Se fija un valor $N \in \mathbb{N}$ para la discretización temporal y se define

$$t_i = i\Delta t, \quad i = 0, \dots, N, \quad \Delta t = \frac{T}{N}.$$

Se fija un valor $M \in \mathbb{N}$ para la discretización espacial y se calcula

$$S_j = jh, \quad j = 0, \dots, M, \quad h = \frac{S_R}{M}.$$

Se calculan (Ver Subsección 3.2.2) para la malla espacial equiespaciada, las correspondientes matrices de Masa (\mathbf{M}), Convección (\mathbf{C}) y Rigidez (\mathbf{K}), los vectores $\mathbf{b}(\tau), i = 0, 1, \dots, N$, y se define

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{1}{2}\sigma^2\mathbf{K} + (r - \sigma^2)\mathbf{C} - r\mathbf{M} \right).$$

Como el integrador temporal será la regla de Euler implícita

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{v}(\tau_{i+1}) - \mathbf{v}(\tau_i)}{\Delta t} = \mathbf{A}\mathbf{v}(\tau_{i+1}) + \mathbf{b}(\tau_{i+1}),$$

depejando se obtiene

$$\mathbf{v}(\tau_{i+1}) = (M - \Delta t\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{M}\mathbf{v}(\tau_i) + \Delta t\mathbf{b}(\tau_{i+1})).$$

Se calcula $\mathbf{B} = (M - \Delta t\mathbf{A})^{-1}$.

Una vez hecho esto, el algoritmo es iterativo.

Se inicializa

$$\mathbf{v}(0) = [\text{máx}\{K - S_1, 0\}, \text{máx}\{K - S_2, 0\}, \dots, \text{máx}\{K - S_{M-1}, 0\}]^t,$$

y para cada $i = 1, \dots, N - 1$ se calcula

$$\mathbf{v}(\tau_{i+1}) = \mathbf{B}(\mathbf{M}\mathbf{v}(\tau_i) + \Delta t\mathbf{b}(\tau_{i+1})).$$

En la Figura 3.5 se ha representado un experimento numérico con este algoritmo, donde los parámetros del modelo de Black-Scholes han sido $r = 0.05$, $\sigma = 0.10$. La opción se ha negociado a un vencimiento $T = 1$ y un Strike $K = 5$. Los parámetros del método numérico han sido $S_R = 10$, $M = 256$ y $N = 1000$. A la izquierda se ha representado la Put y a la derecha la Call. Como se puede observar en la Figura 3.5, los resultados parecen consecuentes con la solución exacta representada en el Figura 2.1

Conviene indicar que, aunque la Call podría calcularse de la fórmula de la paridad Put-Call Europeas, también se puede calcular numéricamente. Simplemente basta con modificar la condición inicial $v(0, S) = \text{máx}\{S - K\}$ y recalculer el término independiente $\mathbf{b}(\tau)$ para las condiciones frontera de la Call Europea de idéntica forma a como se han calculado para la Put.

Para finalizar esta Sección se va a realizar un análisis empírico del error numérico cometido con este método.

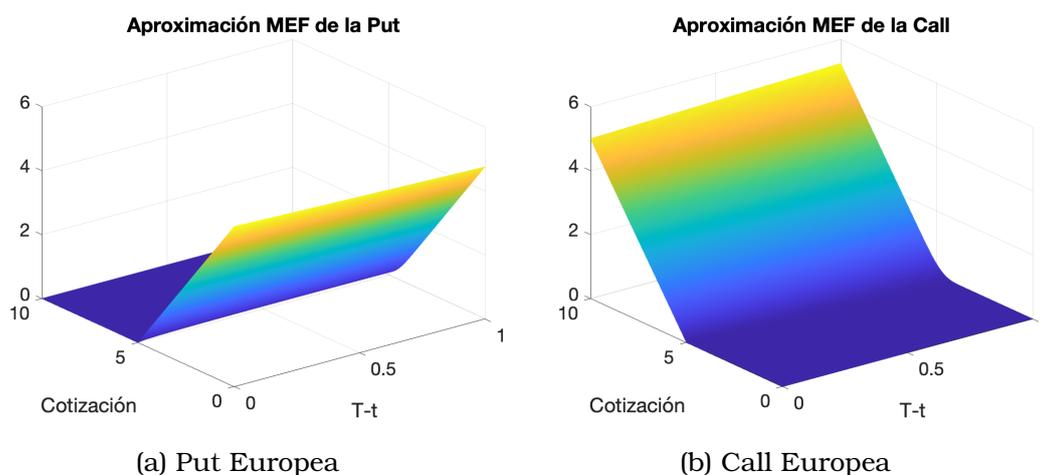


Figura 3.5: Aproximación MEF de las opciones europeas

3.2.4. Análisis del Error

El análisis del error en un método numérico es crucial para evaluar la precisión y la fiabilidad de la aproximación obtenida. El error numérico se refiere a la diferencia entre la solución numérica y la solución exacta y hay que analizar cómo depende de los parámetros del método numérico.

En [1] se pueden encontrar resultados teóricos que acotan el error numérico cometido en función de cómo se haya implementado de forma efectiva el método (se han podido utilizar diversas funciones test o integradores numéricos).

Aquí se va a ver cómo analizar de forma empírica el comportamiento de este método en función del tamaño de las discretizaciones empleadas.

Hay tres tipos de errores que se deben analizar:

- El error debido a la discretización temporal.
- El error debido a la discretización espacial.
- El error de localización debido al S_R fijado.

En primer lugar se va a analizar el error del tamaño de las discretizaciones.

Como el error depende del valor de N y M , el procedimiento habitual suele ser analizar los errores por separado. En primer lugar se fija un valor muy alto para uno de los parámetros, esperando que el error cometido que depende de ese parámetro sea despreciable con respecto al error cometido por el valor del otro parámetro. Una vez hecho esto, se varía el valor del segundo parámetro y se analiza cómo se comporta la aproximación numérica. Una vez acabado, se intercambian los papeles y se analiza el error del otro parámetro.

Para todos los experimentos que siguen en esta Sección, los valores de los parámetros del modelo de Black-Scholes han sido $r = 0.05$, $\sigma = 0.10$, la opción se ha negociado a un vencimiento $T = 1$ y un Strike $K = 5$. También ha sido común el parámetro del algoritmo de $S_R = 10$.

la Figura 3.8 se ha representado el valor numérico de la Call obtenido para $N = 1000$ y los valores $M \in \{10, 20, 40, 256\}$.

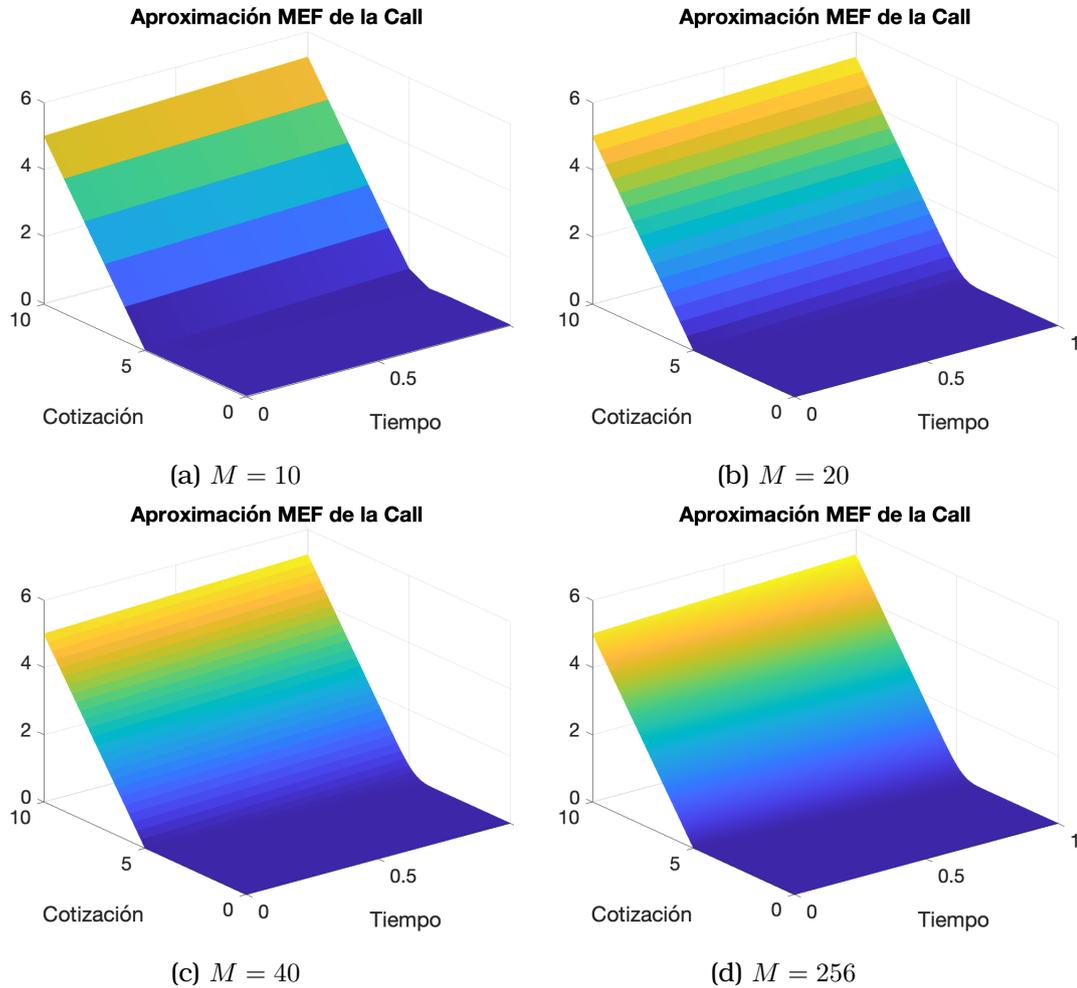


Figura 3.8: Aproximación MEF de la Call europea variando el número de elementos de la malla de la discretización espacial M

Los errores cometidos se pueden ver en la Figura 3.9 donde se ha representado, para $N = 1000$ y los valores $M \in \{10, 20, 40, 256\}$ la diferencia entre el valor exacto y la aproximación numérica obtenida. Como se puede apreciar, conforme el valor de M aumenta, el error disminuye.

Para analizar el error de forma rigurosa, en primer lugar se fija un conjunto de nodos

$$\{S_j\}_{j=1}^{n_0},$$

donde se analizará el error cometido. Este conjunto de puntos debe ser fijo en todo el análisis y representativo del dominio espacial.

Como para el modelo de Black-Scholes se dispone de fórmula exacta, se obtienen los valores exactos de la Call Europea en esos puntos

$$\{v_C(T, S_j)\}_{j=1}^{n_0}.$$

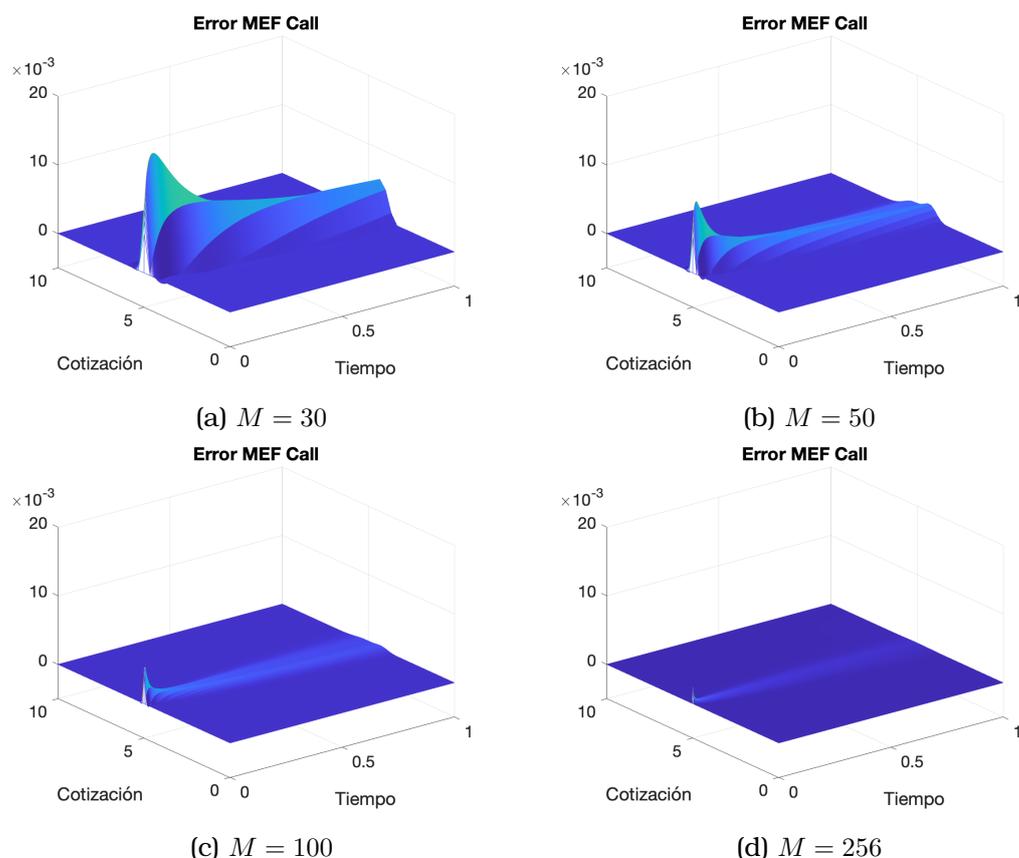


Figura 3.9: Diferencia del MEF en la Call europea variando el número M de elementos de la malla de la discretización espacial

En caso de no disponer de fórmula exacta, es habitual emplear como tal una solución calculada con mucha precisión y/u otro método numérico.

Para las particiones temporal y espacial definidas por N y M , se define el error cometido (raíz del error cuadrático medio) como

$$RMSE_{N,M} = \sqrt{\frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^{n_0} (v_C(T, S_j) - v^{N,M}(T, S_j))^2},$$

donde $v^{N,M}(\tau, S)$ se refiere a la solución numérica obtenida con el algoritmo y las N y M correspondientes.

Se fijan dos números grandes, donde en los experimentos posteriores han sido $N^{\text{sup}} = 2^{10}$ y $M^{\text{sup}} = 2^{10}$, y se toman dos conjuntos de números más pequeños donde cada número es el doble del anterior. Se han empleado:

$$\begin{aligned} C_N &= \{2^3, 2^4, 2^5, 2^6\}, \\ C_M &= \{2^4, 2^5, 2^6, 2^7\}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Para analizar el error temporal se calcula

$$RMSE_{N,M^{\text{sup}}} = \sqrt{\frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^{n_0} (v_C(T, S_j) - v^{N,M^{\text{sup}}}(T, S_j))^2}, \quad N \in C_N.$$

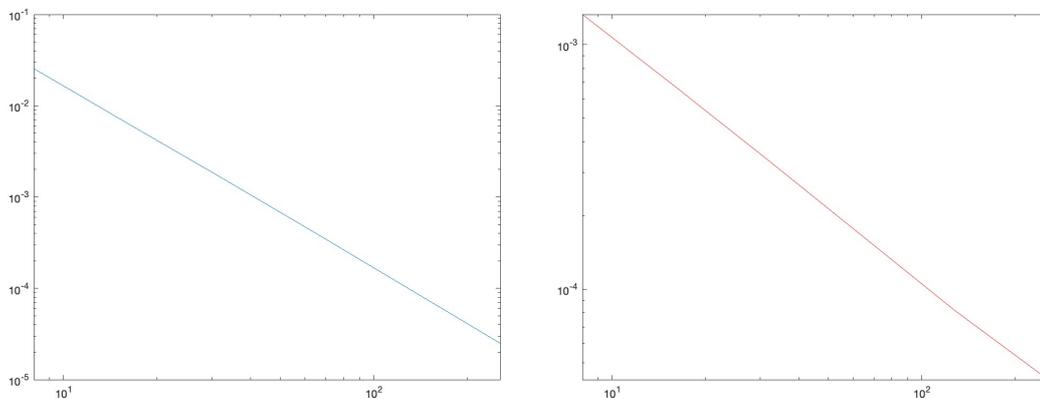
El valor $M^{\text{sup}} = 2^{10}$ se ha estimado empíricamente para que el error espacial sea despreciable frente al error temporal.

Para analizar el error espacial se calcula

$$RMSE_{N^{\text{sup}},M} = \sqrt{\frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^{n_0} (v_C(T, S_j) - v^{N,M}(T, S_j))^2}, \quad M \in C_M.$$

El valor $N^{\text{sup}} = 2^{10}$ se ha estimado empíricamente para que el error temporal sea despreciable frente al error espacial.

En la Figura 3.10 se representa, en escala logarítmica, a la izquierda el valor de $RMSE_{N^{\text{sup}},M}$, $M \in C_M$ para los valores indicados. A la derecha se ha representado el valor de $RMSE_{N,M^{\text{sup}}}$, $N \in C_N$. En ambos casos, como se puede comprobar, se han obtenido rectas.



(a) Error espacial, pendiente=-1.9988 (b) Error temporal, pendiente= -0.9981

Figura 3.10: Análisis de los errores espacial y temporal

Si se calculan las pendientes, la recta de la izquierda de la Figura 3.10 tiene una pendiente de -1.9988 y la de la derecha de -0.9981, lo que implica que el método implementado es (empíricamente) de orden 2 en espacio y de orden 1 en tiempo. Estos resultados eran esperables de [1] y [10].

El análisis del error de localización se haría tomando valores $N^{\text{sup}}, M^{\text{sup}}$ muy elevados y viendo como varía la aproximación numérica para distintos valores de S_R .

No se incluye un análisis gráfico porque, para los parámetros usados, el error de localización ha sido despreciable frente a los otros dos errores.

3.3. Valoración de la opción americana

Como ya se vio en la Sección 2.3.2, la opción americana es un tipo de contrato financiero que concede a su titular el derecho (pero no la obligación) de comprar (Call) o vender (Put) el activo subyacente a un precio predeterminado (strike) en cualquier instante desde la negociación de la opción hasta el vencimiento.

La Proposición 2.3.1 implica que no será necesario calcular numéricamente la opción Call americana, ya que su precio coincide con el de la Call Europea (aunque esto se comprobará empíricamente con un experimento numérico al final de esta sección)

Por tanto, el problema que interesa resolver numéricamente es la ecuación que verifica el precio de la Put Americana (2.26):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P_A}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P_A}{\partial S} - rP_A \right) (P_A(t, S) - \text{máx}\{K - S, 0\}) &= 0, \\ -\frac{\partial P_A}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P_A}{\partial S} - rP_A &\leq 0, \\ P_A(t, S) - \text{máx}\{K - S, 0\} &\geq 0, \end{aligned}$$

Existen técnicas específicamente adaptadas a la resolución numérica de la ecuación anterior, como pueden ser el método SOR (“Successive Over Relaxation”, ver [1]) o métodos de tipo “Penalty” (ver [9]). No obstante, una técnica muy extendida en la literatura es aproximar la Opción Americana por una Opción Bermudea o Bermuda (ver [15]).

Una Opción Bermuda se puede entender como una versión discreta (en tiempo) de la Americana. Al negociar el contrato ($t = 0$) con un vencimiento T , se fijan además una serie de tiempos $0 = t_0 < t_2 < \dots < t_n = T$ donde el comprador de la Opción tiene el derecho de ejercerla (sigue sin poder ejercerla en $t \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \dots, n - 1$).

Lo que se hace en la práctica es definir una discretización temporal:

$$\tau_i = i \frac{T}{N}, \quad i = 0, \dots, N,$$

con N suficientemente grande y tomar como precio de la Opción Americana la aproximación obtenida con esta posibilidad de ejercicio en tiempos discretos.

Para ello, es preciso adaptar el algoritmo de valoración de Opción Put Europea (ver Sección 3.2.3), cosa que es bastante directa con dos pequeños cambios. En primer lugar, como la opción se puede ejercer en todo tiempo τ_i , $i = 0, 1, \dots, N$, para la cotización $S = 0$ el importe recibido es K , el strike. Luego las nuevas condiciones frontera en el algoritmo para $S = 0$ son:

$$\begin{aligned} v_0(\tau) &= K, \\ \frac{dv_0}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Además, en cada etapa (ver Sección 3.2.3), una vez calculado

$$\mathbf{v}(\tau_{i+1}) = \mathbf{B}(\mathbf{v}(\tau_i) + \Delta t \mathbf{b}(\tau_{i+1})),$$

se comprueba si es mejor conservar la opción o ejercerla en ese instante. Para $j = 0, \dots, M$ se recalcula

$$v_j(\tau_{i+1}) = \text{máx}\{K - S_j, v_j(\tau_{i+1})\},$$

donde $S_j = jh$, $j = 0, \dots, M$, $h = \frac{S_R}{M}$ y M es el valor del parámetro que controla el tamaño de la discretización espacial.

En la Figura 3.11 se representan la Put Americana (izquierda), Europea (centro), además de su diferencia (derecha). Los parámetros del modelo de Black-Scholes han sido $r = 0.05$ y $\sigma = 0.1$. En la parte derecha de la gráfica se puede observar lo que se conoce como la "early exercise prime", es decir, el aumento del precio de la opción americana por el derecho adicional de ejecutarla cuando se desee.

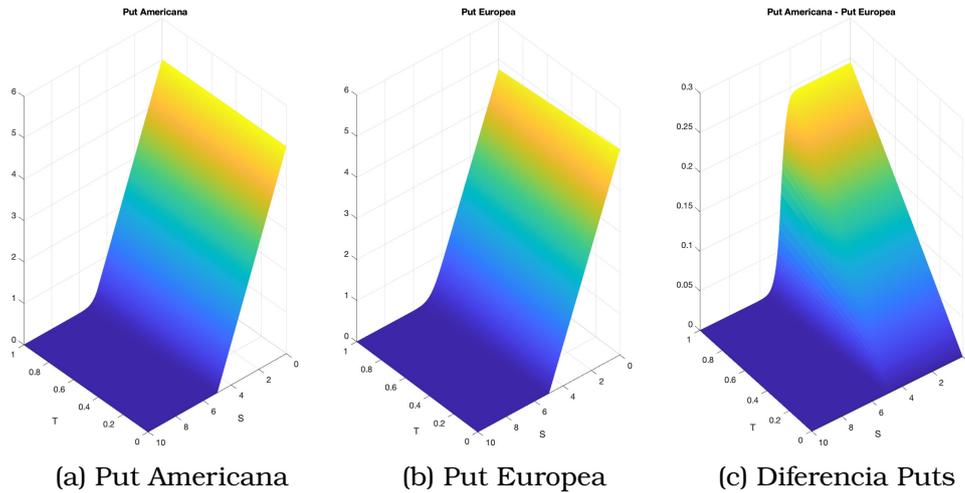


Figura 3.11: Diferencia de valores entre la Put americana y la Put europea

Como se comentó en la Sección 2.3.2, otro elemento crucial, aparte del precio, de la Opción Americana era el concepto de la frontera de ejercicio $S_e(t)$, $t \in [0, T]$.

Para cada instante t , existe un valor $S_e(t)$ donde si $S \leq S_e(t)$ es óptimo ejercer la Put Americana mientras que si $S > S_e(t)$ es óptimo conservarla. De igual modo que se aproxima numéricamente el precio de la Put Americana por la Bermudea, el valor de la frontera de ejercicio se puede aproximar para cada instante de la discretización temporal.

Como aproximación numérica en cada instante de tiempo de $S_e(t_i)$ se toma el valor de la cotización más alto donde $K - S(t_i)$ es más alto que el valor numérico de conservar la opción.

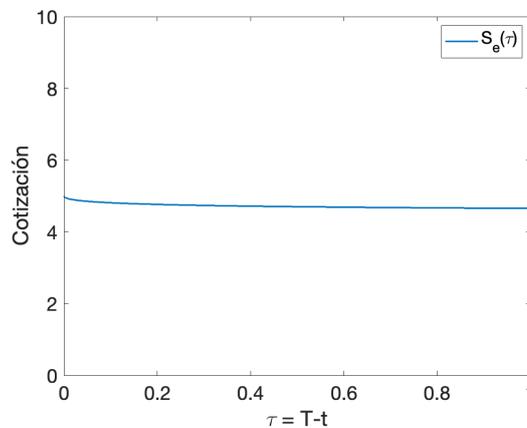


Figura 3.12: Frontera de Ejercicio

En la Figura 3.12 se dibuja la curva que representa la frontera de ejercicio para los parámetros del modelo de Black-Scholes $r = 0.05$ y $\sigma = 0.10$.

A partir de la frontera de ejercicio se obtienen dos regiones: arriba (en amarillo) la región en la que es óptimo ejercer la opción y debajo la región en la que es óptimo conservarla. Esto se representa en la Figura 3.13

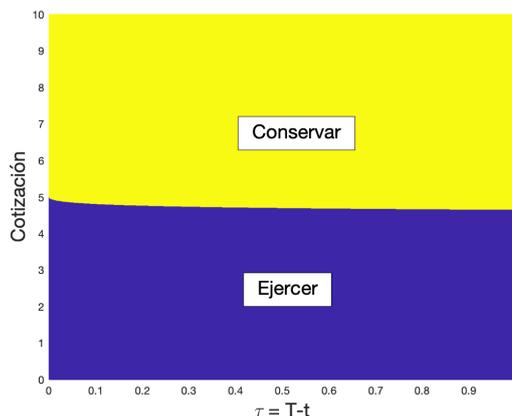


Figura 3.13: Regiones de Ejercicio

Se puede comprobar, que el valor concreto de la frontera de ejercicio depende de los valores r y σ . En la Figura 3.14 se representa la frontera de ejercicio para los valores $r = 0.05$ y $\sigma = 0.10$ (izquierda), los valores $r = 0.5$ y $\sigma = 0.10$ (centro) y los valores $r = 0.05$ y $\sigma = 0.50$ (derecha) como se puede apreciar la forma de la frontera de ejercicio varía con el valor de estos parámetros.

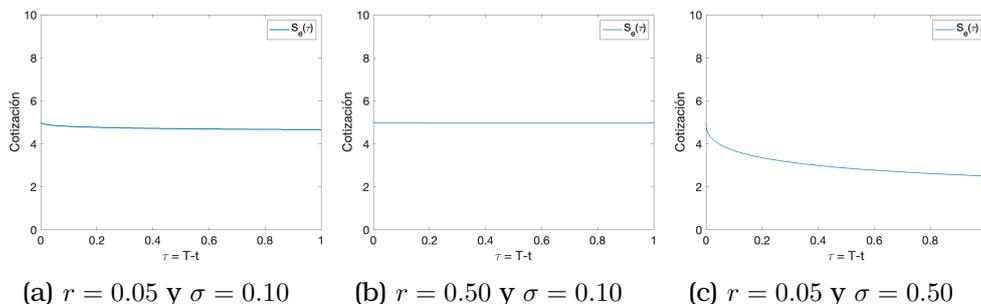


Figura 3.14: Frontera de ejercicio para distintos valores

Para finalizar este Capítulo, aunque sabemos que el precio de la Call Americana coincide con el de la Call Europea (Proposición 2.3.1), se va a ver qué resultado se obtiene si se aproxima la Call Americana numéricamente.

En la Figura 3.15 se ha representado el precio de la Call Americana para los parámetros $r = 0.05$ y $\sigma = 0.10$. A la izquierda está la aproximación numérica de la opción Americana, en el centro el precio exacto de la Call Europea y a la derecha su diferencia.

Como se puede apreciar en la parte derecha de la Figura 3.15, la diferencia entre ambas es, prácticamente, nula. En el experimento numérico realizado, la opción Call Americana nunca se ha ejercido y la pequeña diferencia que se aprecia se debe al

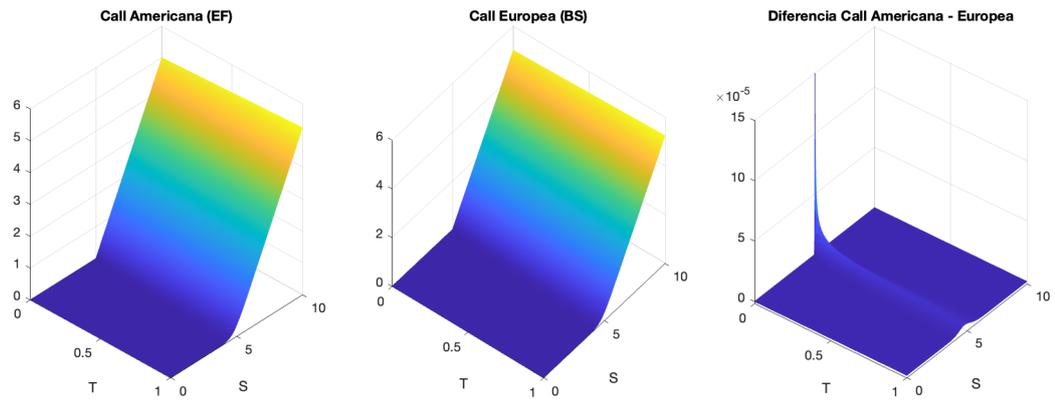


Figura 3.15: Igualdad de valores entre la Call Americana y la Call Europea

error numérico del tamaño de las discretizaciones espacial y temporal. Si éstas se refinan, la diferencia observada converge a 0.

Capítulo 4

El método de Longstaff-Schwartz para la Opción Americana

4.1. Introducción

En el Capítulo 2 se ha visto cómo modelizar la dinámica de las acciones a través de procesos estocásticos y cómo se podía expresar el valor de una opción europea como el valor esperado en una medida de probabilidad libre de riesgo. Posteriormente, se vio cómo se podía calcular una ecuación en derivadas parciales, totalmente determinista, que verificaba el precio de una opción.

En el Capítulo 3 se ha visto como la técnica del método de elementos finitos permitía aproximar numéricamente el valor de los contratos. Esta técnica es una entre varias disponibles en la literatura (ver [1], por ejemplo).

En este Capítulo se va a volver a la ecuación estocástica y se va a ver cómo se puede aproximar el precio de los productos derivados mediante una técnica estadística. Para ello se va a emplear una variante del método de Monte Carlo planteada por Longstaff y Schwartz en [15] llamada el Least Square Monte Carlo (LSMC) method para el cálculo de la Put Americana. Se asumen conocidos todos los conceptos mencionados en capítulos anteriores.

El principio básico del método de Monte Carlo implica generar muestras aleatorias de una distribución conocida y usarlas para estimar valores de interés. Estas muestras se utilizan para aproximar el resultado final a través de estadísticas y cálculos probabilísticos.

La gran ventaja que ofrece el método de Monte Carlo es su versatilidad ya que, como principalmente implica la generación de simulaciones de distribuciones conocidas, permite probar experimentalmente distintas distribuciones e incorporar otras propiedades a la dinámica de las acciones (como por ejemplo procesos con saltos), estudiando si se consigue una mejor aproximación a los datos reales observados en el mercado.

Dinámicas más complejas, o trabajar con productos derivados de varios subyacentes, suele implicar desarrollos más complicados o un coste computacional mucho más alto si se sigue un enfoque numérico similar al del Capítulo 3. Por ello, el método de Monte Carlo, cuya implementación suele ser bastante directa, ofrece una alternativa para aproximar el valor numérico del precio de los contratos. El inconveniente que presenta este método es su lenta convergencia, siendo en ocasiones necesarias

gran cantidad de simulaciones para alcanzar la precisión deseada.

El método LSMC presentado en [15] es un método de gran éxito y ampliamente utilizado debido a que combina la técnica de Monte Carlo con una técnica de estimación por mínimos cuadrados para calcular el valor de la opción Americana.

Esta combinación permite conseguir una aproximación bastante buena a la solución con un número relativamente bajo de simulaciones, reduciendo así el principal inconveniente que tiene aproximar el precio mediante simulaciones aleatorias.

4.2. El método de Monte Carlo y el ajuste de mínimos cuadrados

Volviendo a la ecuación que rige la dinámica de la acción en la medida libre de riesgo del modelo de Black-Scholes

$$dS = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^Q \quad (4.1)$$

si $t \in [t_0, T]$, y $S(t_0) = S_0$ entonces, por el cálculo de Itô (ver [2])

$$S(T) = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t_0) + \sigma \sqrt{T - t_0} z \right) \quad (4.2)$$

donde $z \sim N(0, 1)$ es una variable aleatoria de distribución Normal de media 0 y varianza 1.

Un ejemplo sencillo del método de Monte Carlo sería calcular el precio de la opción Put Europea. El precio de la opción a un vencimiento T viene dado por

$$v(t_0, S_0) = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}^Q \left[\max\{K - S(T), 0\} | \mathcal{F}_t^{W^Q} \right]. \quad (4.3)$$

En un primer lugar se fija un número N_{sim} de trayectorias que se van a simular. Implementando el método de forma directa, se generan N_{sim} realizaciones de una Normal de media 0 y varianza 1 y con la fórmula (4.2) se obtienen $\{S_i(T)\}_{i=1}^{N_{sim}}$.

Con el valor de la cotización en el vencimiento de las distintas trayectorias simuladas, se aproxima el precio de la Opción Europea por

$$e^{-r(T-t_0)} \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \max\{K - S_i(T), 0\}.$$

Se comete un error numérico por aproximar así el valor de la opción, pero se hace tan pequeño como se desee tomando N_{sim} más grande. En la Sección 4.4 se verá como se controla el error cometido en este método.

La opción Americana puede también aproximarse mediante simulaciones pero, como la opción puede ejercerse en cualquier instante hasta el vencimiento, se debe emplear una aproximación similar a la del Capítulo 3. Es decir, aproximar el precio de la Put Americana a través del precio de la Put Bermuda.

En primer lugar, se hace una partición del intervalo de tiempo $\{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T\} \in [0, T]$ suficientemente fina. Luego, tras realizar las simulaciones de las trayectorias, se calcula la frontera de ejercicio para cada instante de tiempo de la discretización temporal y el precio esperado de la opción Americana en el caso de

que sea óptimo conservarla (si es óptimo ejercerla su precio es calculable de forma directa). Como se verá en la siguiente sección, el método de LSMC da un algoritmo eficiente para realizar estas operaciones.

La otra herramienta matemática que emplea el LSMC es el ajuste por mínimos cuadrados.

Supongamos que para una serie de variables $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ se tienen N_{sim} valores de una función $F(\mathbf{x})$ para distintos valores de dichas variables, es decir, se tiene $\{F_i = F(\mathbf{x}^i) = F(x_1^i, \dots, x_m^i)\}_{i=1}^{N_{sim}}$.

La función $F(\mathbf{x})$ es, a priori, desconocida. No obstante, se quiere aproximar por una cierta función $f(\mathbf{x}; \bar{\theta})$ conocida que depende de las mismas variables y de una serie de parámetros $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ que, de momento, son libres.

El método de los mínimos cuadrados lo que hace es buscar el valor de los parámetros $\bar{\theta}$ de forma que el valor

$$\frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} (F_i - f(x_1^i, \dots, x_m^i; \bar{\theta}))^2.$$

sea mínimo.

Asumiendo que la función f es suficientemente regular, esta aproximación puede hacerse a través de un algoritmo del tipo Gauss-Newton.

Se define la función objetivo como el error cuadrático medio (MSE)

$$MSE = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} (F_i - f(x_1^i, \dots, x_m^i; \bar{\theta}))^2.$$

Se define un candidato inicial $\bar{\theta} = \bar{\theta}_0$, $\Delta\bar{\theta} = 1$ y una tolerancia ($TOL > 0$).

Mientras $\max\{|\Delta\bar{\theta}|\} > TOL$ se repiten los pasos 1 a 4:

1. Se calcula

$$\Delta F = \begin{pmatrix} F(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^1; \bar{\theta}) \\ \vdots \\ F(\mathbf{x}^{N_{sim}}) - f(\mathbf{x}^{N_{sim}}; \bar{\theta}) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

2. Se calcula la matriz J :

$$J_{ij} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^i; \bar{\theta})}{\partial \theta_j}, \quad i = 1, \dots, N_{sim}; \quad j = 1, \dots, q.$$

3. Se calcula la dirección del mínimo:

$$\Delta\bar{\theta} = (J^T J)^{-1} J^T \Delta F.$$

4. Se actualiza el valor de los parámetros

$$\bar{\theta} = \bar{\theta} + h\Delta\bar{\theta},$$

donde $0 < h < 1$ es un parámetro de relajación.

Esta técnica es lo que hace competitivo al método LSMC, ya que se emplea para aproximar, en cada instante de tiempo, una función que informa del precio de conservar la opción Americana en función de la cotización.

Las trayectorias calculadas mediante las simulaciones se emplearán para generar el conjunto de datos al que se ajustarán los parámetros de dicha función.

4.3. El método de Longstaff-Schwartz

Siguiendo el mismo enfoque que en [15], se va a hacer una descripción constructiva del método propuesto en ese artículo.

Sea $t \in [0, T]$ y se desea calcular en $t = 0$ el precio de una opción Put Americana $v(0, S_0)$ para un determinado strike K y a un vencimiento T .

Se fija un número de etapas temporales intermedias N_t de forma que

$$t_i = i \frac{T}{N_t}, i = 0, \dots, N_t,$$

y un número de simulaciones N_{sim} para el método de Monte Carlo.

Estos $t_i, i = 0, \dots, N_t$ son los instantes de tiempo de la opción Put Americana donde se puede ejercer prematuramente (aproximándola, como se ha dicho, por una opción Bermuda).

Se generan N_{sim} trayectorias de la acción mediante (4.2) para la discretización temporal fijada $\{t_i\}_{i=0}^{N_t}$ y se almacenan el valor de todas las cotizaciones de la acción en todos los tiempos de la discretización de cada trayectoria.

El valor de la Put se aproxima mediante un principio de programación dinámica, es decir, se empieza desde el vencimiento T y el problema se va resolviendo desde el último instante de tiempo hacia atrás.

En el vencimiento, la opción muere, y el precio de la misma es conocido, con lo que se puede calcular el precio de la Put Americana

$$\hat{v}_j(T, S_j(T)) = \max\{K - S_j(T), 0\}, j = 1, \dots, N_{sim}.$$

El resto del algoritmo es iterativo.

Se supone conocido el precio de la Put Americana en el instante t_{i+1} y se desea calcular el precio en el instante t_i .

En primer lugar, para cada trayectoria se calcula el valor de la Put en el instante t_i . Asumiendo que la opción no se ejecuta y se conserva hasta el instante t_{i+1} , el precio es el valor en t_{i+1} actualizado a t_i , es decir,

$$\bar{v}_j(t_i, S_j(t_i)) = e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_j(t_{i+1}, S_{j+1}(t_{i+1})), j = 1, \dots, N_{sim}.$$

Nótese que en este momento no se aplica directamente el método de Monte Carlo, como se hizo en el ejemplo de la opción Europea, es decir, aproximar el precio de la Opción a través de la fórmula (4.3) mediante una media. Las $S_j(t_i)$ pueden ser todas distintas.

Aquí es donde se aplica el ajuste por mínimos cuadrados.

De las N_{sim} trayectorias, se buscan aquellas cotizaciones de la acción en el instante t_i de forma que ejercer la opción en ese instante produzca un retorno estrictamente positivo. Es decir, se buscan los valores:

$$k_1, k_2, \dots, k_{N_{sim}^{t_i}} \in \{1, 2, \dots, N_{sim}\}$$

que verifican que

$$\max\{K - S_{k_j}(t_i), 0\} > 0, j = 1, \dots, N_{sim}^{t_i}.$$

Para estas trayectorias, se recogen los correspondientes valores $\{\bar{v}_{k_j}(t_i, S_{k_j}(t_i))\}_{j=1}^{N_{sim}^{t_i}}$.

Aquí conviene señalar que esta elección selectiva de valores no es estrictamente necesaria, pero en [15] se indica que se observó experimentalmente que, en caso de no hacerlo y trabajar con todos los valores, el modelo tiende a infravalorar el precio de la opción y son necesarias muchas más simulaciones para aproximar el valor correcto.

Lo siguiente es estimar los parámetros $\bar{\theta}$ de una función $f(S; \bar{\theta})$ que mejor ajusten por mínimos cuadrados al conjunto de valores $\{\bar{v}_{k_j}(t_i, S_{k_j}(t_i))\}_{j=1}^{N_{sim}^{t_i}}$.

Asumiendo (ver [15]) que la verdadera función $\bar{v}(t, S)$ del valor esperado de conservar la opción en el instante t se puede representar como una combinación lineal (numerable) de funciones base, $f(S; \bar{\theta})$ se toma como una combinación de M polinomios.

En [15] se indica que distintos candidatos funcionan bien (Chebyshev, Hermite,...) y aquí se van a emplear los de Laguerre. Para $M = 4$ sería

$$f(S; \bar{\theta}) = \theta_0 L_0(S) + \theta_1 L_1(S) + \theta_2 L_2(S) + \theta_3 L_3(S),$$

donde los parámetros estimados $\bar{\theta}_{t_i} = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ sólo se utilizan en la etapa t_i y los $L_i(S)$ son los polinomios de Laguerre

$$\begin{aligned} L_0(S) &= 1, \\ L_1(S) &= 1 - S, \\ L_2(S) &= \frac{1}{2}(2 - 4S + S^2), \\ L_3(S) &= \frac{1}{6}(6 - 18S + 9S^2 - S^3). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Una vez estimados los parámetros que mejor ajustan, esta función aproxima el valor de la opción Put en el caso de que se decida mantenerla.

Para finalizar la etapa, se actualizan los precios de los contratos de todas las trayectorias con el siguiente criterio, para $j = 1, \dots, N_{sim}$.

En el caso de que $j \notin \{k_1, k_2, \dots, k_{N_{sim}^{t_i}}\}$

$$\hat{v}_j(t_i, S_j(t_i)) = e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_j(t_{i+1}, S_{j+1}(t_{i+1})),$$

y en el caso de que $j \in \{k_1, k_2, \dots, k_{N_{sim}^{t_i}}\}$

$$\hat{v}_j(t_i, S_j(t_i)) = \text{máx}\{K - S_j(t_i), f(S_j(t_i); \bar{\theta}_{t_i})\}$$

Una vez hecho, se retrocede a la etapa t_{i-1} y se repite todo. Así sucesivamente hasta llegar a t_0 , donde también se realiza todo el proceso.

En la etapa t_0 , el precio de la opción Americana se calcula como

$$\hat{v}(0, S_0) = \text{máx} \left\{ K - S_0, \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} \hat{v}_i(t_0, S_0) \right\},$$

ya que, en la etapa t_0 , todas las trayectorias parten de S_0 .

En [15] se incluyen los siguientes resultados teóricos de la convergencia del método cuya demostración se puede encontrar en el propio artículo.

Proposición 4.3.1. Para cualquier elección (finita) de M funciones base y N_t etapas, la siguiente desigualdad se satisface (casi seguro)

$$v(0, S_0) \geq \lim_{N_{sim} \rightarrow \infty} \hat{v}(0, S_0),$$

donde $v(0, S_0)$ representa el verdadero valor de la opción que puede ejecutarse en los tiempos $t_i, i = 0, \dots, N_t$ y $\hat{v}(0, S_0)$ el precio obtenido por el método LSMC.

Como se indica en [15] este resultado es útil ya que permite establecer un criterio (empírico) para encontrar un número M de funciones base que da una predicción razonable.

Para ver la convergencia, por simplicidad, en [15] sólo se demuestra para el caso más sencillo, donde la opción sólo se puede ejercer en dos instantes t_1 y t_2 , pero la demostración sería generalizable a más etapas.

Proposición 4.3.2. Sea $v(t_1, S)$ el verdadero precio de la opción que sólo puede ser ejecutada en t_1 y t_2 con $t_1 < t_2$.

Sea $\bar{v}(t_1, S)$ el verdadero valor esperado en t_1 si se decide conservar la opción y supongamos que $\bar{v}(t_1, S)$ verifica ciertas hipótesis de integrabilidad (ver [15]) y es absolutamente continua.

Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $M_\varepsilon < \infty$ tal que

$$\lim_{N_{sim} \rightarrow \infty} \Pr[|v(t_1, S) - \hat{v}(t_1, S)| > \varepsilon] = 0,$$

donde $\hat{v}(t_1, S)$ es el precio obtenido por LSMC usando M_ε funciones base.

Conviene señalar que, fijado el nivel de error ε aceptable, este resultado implica que el número mínimo de funciones base necesarias para alcanzar esa precisión M_ε , no depende del N_{sim} usado.

Para finalizar esta sección indicar que en [15] no sólo se desarrolla el método para la Put Americana, sino que también se indica cómo adoptar el método para otros derivados y dinámicas de la acción.

4.4. Experimentos Numéricos

En primer lugar se van a recrear los experimentos del artículo [15].

Para un strike $K = 40$ y un valor de $r = 0.06$, se van a calcular los precios de la Put Americana para distintas cotizaciones de la acción, volatilidades y vencimientos (de 1 y 2 años). El número de etapas en las que se ha dividido el intervalo de tiempo son de 50 etapas (equidistantes) por año transcurrido.

En la Tabla 4.1 se pueden observar un resumen de los resultados donde

- Cotización: Precio de la acción.
- Volatilidad: la volatilidad de la acción
- Vencimiento: el tiempo máximo al que se negocia el contrato.
- Precio Paper LS: el valor obtenido en el artículo [15].
- Precio Modelo propio: el valor obtenido con la implementación propia realizada.

Cotización	Volatilidad	Vencimiento	Precio Paper LS	Precio Modelo propio
36	0.2	1	4.472	4.4856
36	0.2	2	4.821	4.8144
40	0.2	1	2.313	2.2987
40	0.2	2	2.879	2.8767
40	0.4	1	5.308	5.3255
40	0.4	2	6.921	6.9096
44	0.2	1	1.118	1.1259
44	0.2	2	1.675	1.6890

Cuadro 4.1: Tabla 1 de [15] donde $r = 0.06$, $N_{sim} = 10000$ y $N_t = 50$ si el vencimiento es de 1 año y $N_t = 100$ si el vencimiento es de 2 años

Como se puede ver, los resultados son consecuentes con los obtenidos en [15]. Evidentemente, al haberse obtenido los valores mediante simulaciones aleatorias, no se obtienen exactamente los mismos resultados.

Una vez comprobado que la implementación es consecuente con [15], se realiza una comparativa entre el método implementado en el Capítulo 3 mediante elementos finitos y el método de Longstaff-Schwartz.

Antes de seguir, conviene indicar que, a la hora de expresar una solución obtenida mediante el método de Monte Carlo, esto suele hacerse mediante intervalos de confianza (ver [15]).

Se asume que los errores numéricos debido a las simulaciones siguen una distribución normal. Para estudiar el error cometido, una vez fijado el valor N_{sim} , el experimento se repite N_{ex} veces.

Para cada uno de los N_{ex} experimentos realizados, se obtiene un valor mediante el método de Monte Carlo $v_i(0, S_0)$, $i = 1, \dots, N_{ex}$. Se calculan las medias y desviaciones muestrales

$$v_{ex} = \frac{1}{N_{ex}} \sum_{i=1}^{N_{ex}} v_i(0, S_0),$$

$$\sigma_{ex} = \sqrt{\frac{1}{N_{ex} - 1} \sum_{i=1}^{N_{ex}} (v_{ex} - v_i(0, S_0))^2},$$

y, el valor exacto del contrato se encontrará en el intervalo

$$\left(v_{ex} - 1, 96 \frac{\sigma_{ex}}{\sqrt{N_{ex}}}, v_{ex} + 1, 96 \frac{\sigma_{ex}}{\sqrt{N_{ex}}} \right)$$

con una probabilidad del 95%.

Para la comparativa entre elementos Finitos y el LSMC, se han calculado los precios de los contratos con ambos métodos para distintas cotizaciones. El tipo de interés ha sido $r = 0.05$, la volatilidad $\sigma = 0.10$ y el vencimiento $T = 1$ y el strike $K = 5$.

En el método de Elementos Finitos se ha tomado $\Delta t = 10^{-3}$ y $N_s = 256$. En el método LSMC, los parámetros han sido $N_{sim} = 10000$, $N_{ex} = 20$ y $N_t = 50$.

En la Tabla 4.2 se reflejan los resultados. Las distintas columnas representan:

- Cotización: Precio del activo subyacente.
- Precio EF: Precio de la opción americana calculado utilizando el método de Elementos Finitos.
- Precio LS: Precio de la opción americana calculado utilizando el método de Longstaff-Schwartz.
- Diferencia: Diferencia entre los precios calculados por los dos métodos.
- Des.est. del precio LS: Desviación estándar muestral (σ_{ex}) del precio calculado por el método de Longstaff- Schwartz.

Cotización	Precio EF	Precio LS	Diferencia	Des.est. de precio LS
3.7890	1.2109	1.2109	0	0
4.0234	0.9765	0.9765	0	0
4.2578	0.7421	0.7421	0	0
4.4921	0.5078	0.5078	0	0
4.7265	0.2820	0.2807	0.0013	$(8.74 \cdot 10^{-4})$
4.9609	0.1382	0.1376	$6.48 \cdot 10^{-4}$	$(6.13 \cdot 10^{-4})$
5.1953	0.0621	0.0619	$1.81 \cdot 10^{-4}$	$(7.37 \cdot 10^{-4})$
5.4296	0.0254	0.0255	$3.72 \cdot 10^{-4}$	$(6.03 \cdot 10^{-4})$
5.6640	0.0095	0.0096	$1.52 \cdot 10^{-4}$	$(3.35 \cdot 10^{-4})$
5.8984	0.0032	0.0033	$1.34 \cdot 10^{-4}$	$(2.28 \cdot 10^{-4})$
6.1328	0.0010	0.0011	$8.50 \cdot 10^{-5}$	$(1.09 \cdot 10^{-4})$

Cuadro 4.2: Comparación de precios de opción americana utilizando Elementos Finitos (EF) y Longstaff-Schwartz (LS).

Como se puede ver en las columnas 2, 3 y 4 de la Tabla 4.2, los resultados han sido muy similares. Hasta la cotización $S = 4.4921$ la diferencia ha sido 0. Esto se debe a que la opción se encuentra en la zona de ejercicio, es decir, vale más ejercerla que conservarla. Como el precio de ejercicio es único para ambos métodos, se obtiene el mismo resultado.

En las cotizaciones donde es óptimo conservar la opción, la diferencia entre ambos métodos es muy pequeña.

A la vista de los resultados de la Tabla 4.2 se puede concluir que tanto el método de elementos finitos como el LSMC dan aproximaciones válidas al precio de la Put Americana.

Esto se puede ver gráficamente en la Figura 4.1 donde, para el mismo experimento, a la izquierda se ha representado el precio obtenido con el método de elementos finitos, en el centro el precio obtenido con el LSMC y a la derecha su diferencia.

El tiempo de cómputo para los parámetros de los métodos indicados han sido similares, tardando algo más el método de Monte Carlo al tener que ir cotización a cotización.

Para concluir indicar que, si deseara más precisión en el cálculo de los precios, el método de elementos finitos sería más eficiente, ya que como se vio en el Capítulo 3, es un método de orden 2 en espacio (y 1 un tiempo). La estimación del error del método

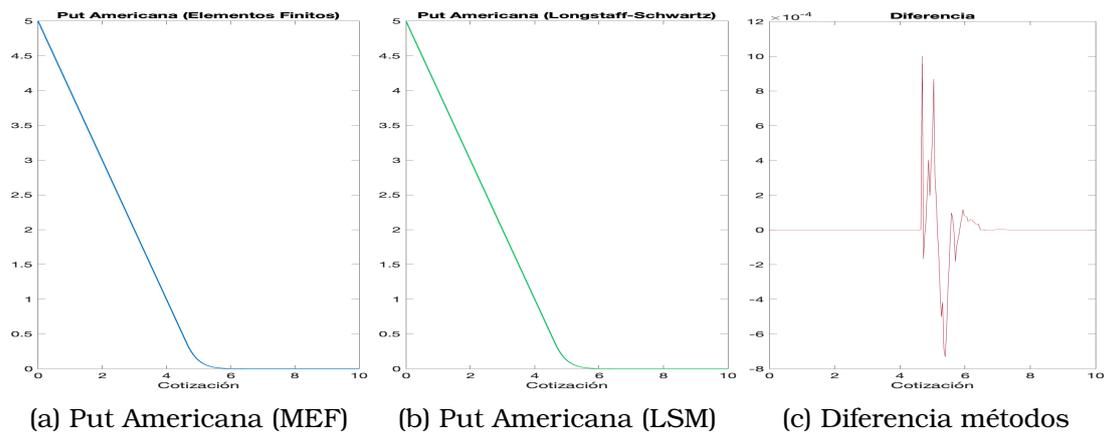


Figura 4.1: Comparativa en la valoración de la Put Americana entre el MEF y el LSM

LSMC a través de intervalos de confianza hace que sea un método de convergencia más lenta que el método de elementos finitos.

No obstante, la adaptación del LSMC a otros productos derivados o dinámicas de la acción es muy directa, como se puede ver en [15], mientras que el desarrollo de un método numérico de elementos finitos a otros productos o dinámicas puede requerir de un mayor desarrollo o coste computacional.

Capítulo 5

Conclusiones

La valoración de opciones financieras ha sido objeto de investigación y desarrollo durante décadas, lo que ha llevado al surgimiento de una variedad de métodos para abordar su complejidad.

Entre estos métodos se encuentran los elementos finitos, que ofrecen una versatilidad notable al permitir la modelización de opciones con condiciones de frontera complejas, lo que resulta útil en contextos donde las estructuras de pago no son estándar.

Sin embargo, su implementación puede ser computacionalmente costosa, especialmente cuando se trata de opciones con múltiples dimensiones o con condiciones de ejercicio temprano. Por otro lado, el método de Least Squares Monte Carlo destaca por su eficiencia en la valoración de opciones americanas, ya que permite abordar el ejercicio temprano de manera efectiva. No obstante, su precisión está sujeta a la calidad de las simulaciones y al modelo de regresión utilizado, lo que puede afectar su utilidad en situaciones donde se requiere una precisión excepcional.

Otras técnicas como los métodos espectrales, ofrecen una alta precisión y eficiencia. Aunque son altamente efectivos en problemas con soluciones suaves y bien representadas, su implementación puede requerir un desarrollo complejo o transformaciones y/o cambios de variable que pueden resultar un desafío.

Finalmente, las redes neuronales han surgido como una herramienta poderosa en la valoración de opciones financieras debido a su capacidad para capturar relaciones no lineales complejas y adaptarse a datos no lineales. Sin embargo, su éxito depende en gran medida de la disponibilidad de grandes cantidades de datos de alta calidad para entrenarse adecuadamente, y su naturaleza de "caja negra" puede dificultar la interpretación de los resultados.

En última instancia, la elección del método de valoración adecuado depende del contexto específico, las características de la opción y los recursos computacionales disponibles. Una combinación inteligente de enfoques puede ofrecer una valoración más completa y precisa de las opciones financieras en diferentes escenarios y condiciones del mercado, lo que subraya la importancia de comprender y utilizar apropiadamente estos métodos en el contexto financiero.

Bibliografía

- [1] Y. Achdou and O. Pironneau. Computational methods for option pricing. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2005.
- [2] T. Björk. Arbitrage theory in continuous time. *Oxford University Press*, 2004.
- [3] F. Black and M. Scholes. The valuation of option contracts and a test of market efficiency. *The Journal of Finance*, Vol. 27, No. 2, 399-417, 1972.
- [4] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, 647-654, 1973.
- [5] S. C. Brenner and L. Ridgway Scott. The mathematical theory of finite element methods. *Springer*, 2006.
- [6] H. Brezis. Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations. *Springer*, 2010.
- [7] R. Carmona. Indifference pricing. *Princeton University Press*, 2009.
- [8] R. Coase. The problem of social cost. *The Journal of Law and Economics*, Vol 3, 1-44, 1960.
- [9] J. de Frutos. Implicit-explicit runge-kutta methods for financial derivatives pricing models. *J. Oper. Research, Elvesier* 171:991-1004, 2006.
- [10] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, 2000.
- [11] K. Ito. Stochastic integral. *Proc. Imp. Acad*, Volume 20, Number 8, pag 519-524, 1944.
- [12] R. Kangro and R. Nicolaidis. Far field boundary conditions for black-scholes equations. *Siam Journal on Numerical Analysis - SIAM J NUMER ANAL*, Vol. 38, Number 4, pag 1357-1368, 2000.
- [13] S. Kesavan. Topics in functional analysis and applications. *New Age International, Limited Publishers*, 2003.
- [14] H. Kuo. Introduction to stochastic integration. *Springer*, 2006.
- [15] F. A. Longstaff and E. S. Schwartz. Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 1, 113-147, 2001.

-
- [16] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Financial*, Vol. 7, No. 1, 77-91, 1952.
- [17] S. C. Myers. Merton h. miller's contributions to financial economics. *The Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 93, No. 1, 22-32, 1991.
- [18] W. Rudin. Análisis real y complejo. *Alhambra*, 1979.
- [19] S. Salsa. Partial differential equations in action: From modelling to theory. *Springer*, 2008.
- [20] S. E. Shreve. Stochastic calculus for finance ii. *Springer*, 2004.
- [21] S. E. Shreve and H. M. Soner. Optimal investment and consumption with transaction costs. *Annals of Applied Probability* 4(3), 609-692, 1994.
- [22] J. Steele. Stochastic calculus and financial applications. *Springer*, 2001.
- [23] P. Wilmott. On quantitative finance. *John Wiley and Sons*, 2000.