UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dptos. de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y topología y de Matemática Aplicada

ESTUDIO DE LA APLICACIÓN DE DIVERSAS METODOLOGÍAS A LA HORA DE ESTUDIAR VARIOS CONCEPTOS DISTINTOS DE LAS ASIGNATURAS DE BACHILLERATO.

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Nicolás Duque Miguel

Tutores: Alberto Fernández Boix y

Cesáreo Jesús González Fernández

Valladolid, junio de 2024.

Resumen: en este trabajo se analizan y comparan distintas metodologías educativas aplicadas a la enseñanza de las matemáticas en el contexto de la educación secundaria. Se estudian tres metodologías: la lección magistral tradicional, el Aprendizaje Basado en Problemas y el método Singapur, evaluando sus fortalezas y debilidades y estableciendo una comparativa entre ellas.

Abstract: the present work examines and compares different educational methodologies applied to the teaching of mathematics in the context of secondary education. Three methodologies are studied: traditional lectures, problem-based learning and Singapore math, evaluating their strengths and weaknesses and drawing a comparison bewteen them.

Índice

1. Introducción

En el Máster de Profesorado se han estudiado varias metodologías educativas, y cómo aplicarlas a la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, a día de hoy, la tradicional metodología de las clases magistrales sigue dominando el panorama educativo, siendo con diferencia la metodología más usada. Esta falta de variedad metodológica produce estancamiento en el sistema educativo, y es incapaz de dar respuesta a las necesidades contemporáneas de nuestros estudiantes. Se hace necesario, por tanto, explorar otras metodologías y ver cómo se comparan con las clases magistrales, qué ventajas tienen y cuándo es adecuado aplicarlas.

Las dos metodologías nuevas que exploraremos en este trabajo son el método Singapur y el aprendizaje basado en problemas (ABP). Estas metodologías se han ido haciendo populares en los últimos años y prometen solventar algunas de las carencias de las clases convencionales. Incluiremos también a la lección magistral como una metodología más con el objetivo de establecer las comparaciones pertinentes. Veremos primero cómo encajan nuestras propuestas con la legalidad vigente y luego, tras una breve discusión del fundamento teórico de estas metodologías, presentaremos ejemplos de aplicación de las mismas al temario de matemáticas de 2º de Bachillerato.

Para el método Singapur se ha elegido el tema de matrices (y un poco de determinantes), siguiendo en parte las aportaciones de Gallo et al. (2019) sobre la visualización de transformaciones lineales en el plano con GeoGebra. Tanto para esta parte como para la lección magistral, planteamos una planificación típica de varias sesiones, que asumiremos de 50 minutos. La parte de ABP se centra más en el tema de determinantes (pero las matrices siguen siendo muy importantes), presentando varios problemas junto con las soluciones a las que se espera pudieran llegar los alumnos por su cuenta. A parte de explorar el temario estándar del currículum, se plantean también algunos problemas más avanzados y "reales" como la modelización de un apocalipsis zombi (que no deja de ser un problema de modelos de población), siguiendo el modelo dado por Munz et al. (2009), y el estudio de ternas pitagóricas, siguiendo las demostraciones dadas por Hall (1970). Para la parte sobre la lección magistral se hace una presentación más o menos estándar del temario habitual de derivadas. Por supuesto, cada sección lleva asociada una parte de evaluación para asegurar que los alumnos han adquirido los conceptos.

Finalmente, establecemos una comparativa entre metodologías, señalando las ventajas y desventajas de cada una y cuándo sería apropiado utilizarlas.

2. Fundamentación Curricular

Toda propuesta didáctica debe estar encuadrada en la legislación vigente; en este caso el currículum pertinente viene dado en «Decreto 40/2022 de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León, 190*» (2022). Nos encontramos en el segundo curso del Bachillerato y en la asignatura de Matemáticas. Los elementos curriculares más importantes que debemos tener en mente son los contenidos y las competencias específicas de la asignatura.

2.1. Contenidos

Estos son los contenidos que abordaremos con las diferentes metodologías, tal como vienen en el BOCyL:

- Sentido numérico.
  - Adición y producto de vectores y matrices: interpretación, comprensión y uso adecuado de las propiedades.
  - Inversa de una matriz.
  - Cálculo de determinantes: interpretación, comprensión y uso adecuado de sus propiedades.
  - Conjuntos de vectores y matrices: estructura, comprensión y propiedades.
- Sentido espacial.
  - Objetos geométricos de tres dimensiones (vectores, rectas, planos): análisis de las propiedades y determinación de sus atributos.
  - Relaciones de objetos geométricos en el espacio: representación y exploración con ayuda de herramientas digitales.
  - Representación de objetos geométricos en el espacio mediante herramientas digitales o físicas.
  - Modelización de la posición y el movimiento de un objeto en el espacio utilizando vectores.
- Sentido de la medida.

- Interpretación de la integral definida como el área bajo una curva.
- Derivadas: interpretación y aplicación al cálculo de límites. Regla de L'Hôpital.
- Cálculo de la ecuación de la recta tangente y la recta normal.

(«Decreto 40/2022 de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León, 190*», 2022).

2.2. Competencias específicas

Debido a la variedad en las metodologías elegidas, tendremos ocasión de trabajar todas las competencias específicas de la asignatura:

1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones.
2. Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.
3. Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.
4. Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz, modificando, creando y generalizando algoritmos que resuelvan problemas mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de la ciencia y la tecnología.
5. Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.
6. Descubrir los vínculos de las Matemáticas con otras áreas de conocimiento y profundizar en sus conexiones, interre-

lacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.

7. Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.

8. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.

9. Utilizar destrezas personales y sociales, identificando y gestionando las propias emociones, respetando las de los demás y organizando activamente el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje y afrontando situaciones de incertidumbre, para perseverar en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas.

(«Decreto 40/2022 de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León, 190*», 2022).

3. Fundamento teórico de las metodologías

3.1. Método Singapur

El método Singapur hace referencia a los elementos del currículo educativo de Singapur con respecto a la enseñanza de las matemáticas. Ha ido cogiendo fuerza en los últimos años debido a los excelentes resultados que ha obtenido Singapur en pruebas internacionales como la de PISA.

De acuerdo con Linares (2020), el método se basa en las ideas de Jerome Bruner, Zoltan Dienes y Richard Skemp, concretándose en los siguientes elementos:

- Enfoque CPA: se plantea el aprendizaje de las matemáticas en tres etapas, pasando de una concreta, donde se manipulan objetos físicos para representar conceptos matemáticos, otra pictórica, donde se utilizan dibujos y diagramas para visualizar los conceptos, y finalmente, una abstracta, donde se introducen ya los símbolos y la notación propios de la disciplina.
- Currículo en espiral: los conceptos matemáticos se revisan y se profundizan a lo largo de varios años, construyendo nuevos conocimientos sobre los antiguos, lo que permite a los estudiantes desarrollar una comprensión sólida y duradera.
- Variaciones sistemáticas y perceptuales: se presentan múltiples representaciones de los conceptos matemáticos (tanto en cuanto a complejidad, como en cuanto a la manera de representarlos), lo que ayuda a los estudiantes a desarrollar una comprensión flexible y adaptable.
- Comprensión relacional frente a la comprensión instrumental: se pone énfasis en la comprensión de cómo los conceptos matemáticos se relacionan entre sí, en lugar de simplemente memorizar procedimientos.

Aunque este método se aplica en Singapur sobre todo en primaria, en este trabajo se presenta algo completamente novedoso: su aplicación (incluyendo el uso de materiales manipulativos) al temario de 2º de Bachillerato, en concreto con el tema de matrices y determinantes.

3.2. Aprendizaje basado en problemas

El aprendizaje basado en problemas es una metodología que utiliza problemas (usualmente reales, pero pueden ser ficticios) como punto de partida para que, trabajando sobre ellos, los alumnos adquieran nuevos conocimientos. Este enfoque promueve la colaboración (se suele hacer por grupos) y el pensamiento crítico y autónomo.

Hay varias formas de plantear el ABP. Por ejemplo, en el artículo «Problem-Based Learning» (s.f.), de la universidad de Maastricht, plantean el ABP en siete pasos:

- Analizar el problema y asegurarse de que todo el mundo lo entienda.
- Identificar las preguntas a las que hay que dar respuesta para resolver el problema.
- Hacer una lluvia de ideas con lo que el grupo ya sabe e identificar soluciones en potencia.
- Analizar y estructurar los resultados de la lluvia de ideas.
- Formular objetivos de aprendizaje para el conocimiento que aún no se tiene.
- Estudiar de forma independiente (individualmente o en grupos más pequeños).
- Discutir los resultados.

En esta metodología, el papel del profesor es el de plantear el problema, facilitar el acceso a los recursos necesarios para que los alumnos investiguen, guiar un poco la investigación, resolver dudas y ayudar a los grupos si se atascan (cuando sea pertinente).

3.3. Lección magistral

La lección magistral es el método docente más utilizado tanto a día de hoy como históricamente. Consiste en la transmisión oral (a menudo con apoyo de una pizarra, transparencias, o presentaciones digitales) y directa de conocimientos desde el docente hacia los estudiantes. Esto implica que el profesor desempeña el papel principal en el proceso de enseñanza.

Esta metodología ha sido fuertemente criticada por diversas razones:

- Fomenta la pasividad de los estudiantes. Durante la mayor parte de una clase magistral los estudiantes se limitan a escuchar al profesor y tomar nota.

- Dificulta adaptar el ritmo a las necesidades de todos los estudiantes. Siguiendo con el punto anterior, esta metodología dificulta la retroalimentación entre el profesor y los estudiantes y por tanto limita la capacidad del profesor para adecuar las clases a su alumnado.
- Hace difícil mantener una alta motivación en el alumnado. Las clases pueden hacerse repetitivas y poco interesantes.
- El desarrollo de habilidades prácticas está completamente ausente en esta metodología.

Sin embargo, también tiene claras ventajas:

- Permite una visión global y unificada del tema, haciendo más fácil su posterior estudio por parte de los alumnos.
- Es eficaz en la transmisión de la información. Al tener el profesor tanto control sobre las clases, se pueden evitar malentendidos y resolver dudas al momento.
- Es eficiente para el docente en cuanto al tiempo de preparación de las clases.

Y hay autores contemporáneos que la defienden. Bligh (1998) defiende que la lección magistral puede ser una metodología adecuada, siempre y cuando sea elegida por el profesor por buenos motivos, y no como la metodología por defecto. Asimismo, Bligh propone ocho principios para garantizar una lección magistral de calidad:

- Intentar que las clases tengan conexión con la vida diaria o intereses de los alumnos.
- Enseñar sobre el todo para mejorar la comprensión y sobre las partes para comunicar información específica. Por ejemplo, pedir a los estudiantes que reflexionen en general sobre un tema, identificando las preguntas más importantes a responder, y luego ir enseñando resultados específicos en diversas áreas del tema.
- Organizar el tema. Con resúmenes de cada clase y tema y un plan de estudios bien elaborado se consigue conectar los componentes del curso en un todo unificado, lo cual facilita el aprendizaje.
- Darle uso a los nuevos conocimientos cuanto antes. Cuestionarios, trabajos, debates, cualquier actividad que de a los estudiantes la oportunidad de poner en práctica nuevos conceptos, mejorando su retención.

- Utilizar sabiamente la repetición. Indicar los puntos clave al principio y al final. Repetir las definiciones de conceptos y conclusiones importantes con frecuencia.
- Hacer comentarios frecuentes sobre cómo está yendo el proceso de aprendizaje. Los estudiantes aprenden mejor cuando saben cómo evaluar su propio progreso.
- Mantener a los estudiantes alerta. Mezclar estimulación visual y auditiva, e introducir algún elemento novedoso en cada clase.
- Relacionar la información nueva con los conceptos previamente adquiridos, resultando en un aprendizaje significativo.

4. Metodología 1: Método Singapur

4.1. Sesión 1: Rotaciones y simetrías

En 2º de Bachillerato se introduce el concepto de matriz, pero se suele presentar simplemente como una tabla de números. Con esta actividad pretendemos introducir tanto las matrices como el producto de vectores por matrices, de forma geométrica y con un entendimiento más profundo de **por qué** ponemos esos números en una tabla.

Para ello, dispondremos de varias copias del siguiente material:

- **Para las rotaciones:** dos hojas con una cuadrícula impresa, una con líneas mucho más gruesas. Las superponemos y las unimos con un encuadernador, como se muestra en la Figura 1. El resultado es una configuración que nos permite visualizar las rotaciones simplemente rotando una hoja respecto de otra a contraluz, para que se vea la cuadrícula original por debajo.
- **Para las simetrías:** igual que el anterior, pero no unimos las hojas con un encuadernador. Rotaciones con respecto a una recta arbitraria son más difíciles de hacer, así que nos quedamos con rotaciones con respecto del eje x, el eje y, y las bisectrices de los cuadrantes. Solo hay que dar la vuelta a la hoja adecuadamente para visualizar la simetría (para esto conviene poner las hojas en la ventana, porque lo que tienes que ver estará siempre por la otra cara de la hoja).

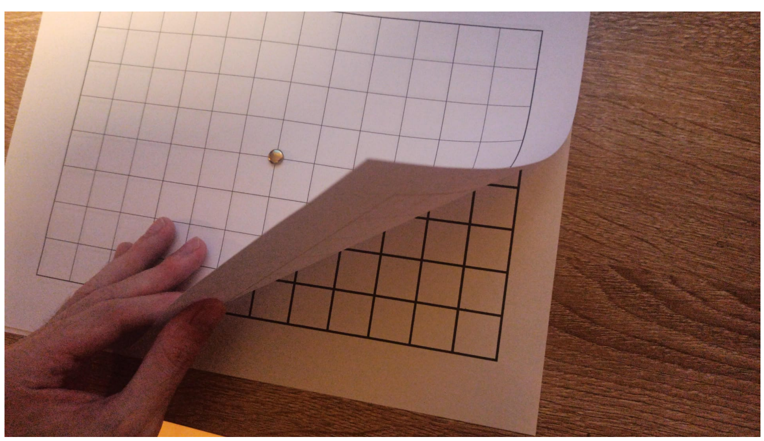


Figura 1. Disposición para trabajar las rotaciones

El resultado es un material manipulativo que nos permite visualizar dos tipos de transformaciones lineales: las rotaciones y las simetrías. Podemos, por ejemplo, dibujar cualquier figura que queramos con lápiz para rotarla con este material, como se muestra en la Figura 2. Se han dibujado los vectores de la base canónica $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, así como sus transformadas en una rotación de 60°.

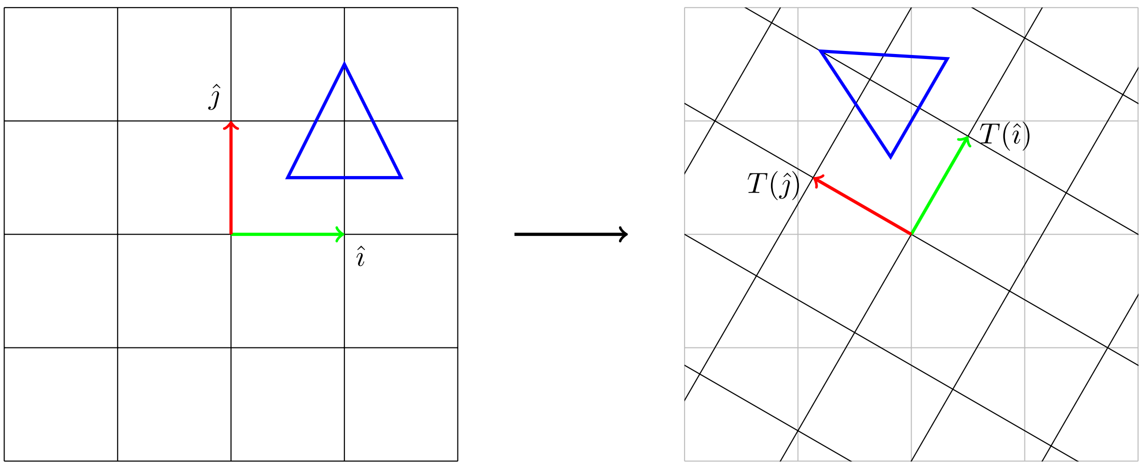


Figura 2. Ilustración de la rotación de un triángulo.

Con esto en mente, la actividad propuesta consiste en los siguientes pasos:

1. Se forman grupos de alumnos de cuatro o cinco personas, para minimizar la cantidad de material necesaria y para fomentar el trabajo en equipo y mejorar la atención a la diversidad. Para tal propósito, lo ideal serían grupos heterogéneos, pero las matrices se suelen ver al principio del curso, así que puede que nos tengamos que conformar con grupos aleatorios si no conocemos todavía a los alumnos y alumnas.

2. Empezamos con las rotaciones. Repartimos el material correspondiente y les enseñamos como se usa. Si hay luz suficiente, no es necesario poner el papel en la ventana para que se vea la cuadrícula de abajo. Si no, no pasa nada, nos levantamos y vamos a las ventanas para verlo.

3. Para que vayan familiarizándose con el material, les pedimos que dibujen cualquier cosa que quieran (con lápiz) y que vean cómo se va rotando a distintos ángulos.

4. Pasando a algo más formal, les pedimos que dibujen el vector $(1, 2)$, y para recordar conceptos del curso pasado les pedimos que lo expresen como combinación lineal de los vectores de la base canónica $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ (no

hace falta que usemos esa terminología para contárselo), y que dibujen también esa combinación lineal. Después, rotamos 90° en sentido antihorario y vemos que el vector rotado es el $(-2, 1)$.

5. Es importante hacer que los alumnos vean una propiedad fundamental de las rotaciones: la linealidad. Es decir,

$$\vec{v} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} \implies R_{90^\circ}(\vec{v}) = aR_{90^\circ}(\hat{\imath}) + bR_{90^\circ}(\hat{\jmath}). \tag{1}$$

Esta fórmula la escribimos en la pizarra (primero con el $(1, 2)$ en vez de (a, b)), y hacemos que la comprueben con el material manipulativo, como se ve en la Figura 3. Hacemos notar que esto significa que la rotación queda descrita completamente dando las coordenadas de $R_{90^\circ}(\hat{\imath})$ y $R_{90^\circ}(\hat{\jmath})$. Es decir, conociendo esos cuatro números, las cordenadas de los outputs de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, podemos rotar cualquier vector.

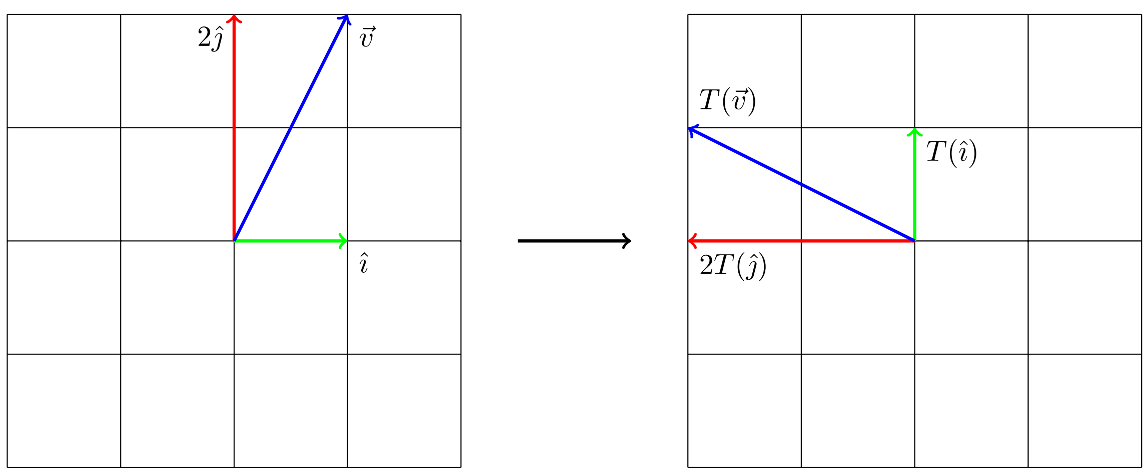


Figura 3. Ilustración de la linealidad con una rotación de 90°.

6. Vamos al siguiente paso, les decimos que encuentren una fórmula para $R_{90^\circ}(\vec{v})$ en función de las coordenadas de $\vec{v}$. ¿Qué encontrarán?

$$R_{90^\circ}(\hat{\imath}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_{90^\circ}(\hat{\jmath}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$R_{90^\circ}(\vec{v}) = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Esta es una fórmula que seguro que se sabían de otros años: para obtener un vector perpendicular a otro, cambias de orden las coordenadas y a una la cambias de signo. Pero ahora entienden de dónde sale. Dejamos la fórmula anterior en la pizarra y continuamos con el siguiente paso.

7. Repetimos los pasos 2-6 con la simetría con respecto al eje x. Esta es la fórmula que encontraríamos:

$$S_x(\hat{\imath}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_x(\hat{\jmath}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$S_x(\vec{v}) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}.$$

8. Les contamos que las rotaciones y las simetrías son transformaciones lineales, y que hay muchas más transformaciones lineales. Estas transformaciones son la que cumplen la ecuación (1), y precisamente porque cumplen esa ecuación, se pueden describir solo con cuatro números (en el plano): las coordenadas de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ tras aplicarles la transformación.

9. Introducimos el concepto de matriz. Como las transformaciones lineales en el plano se pueden describir con cuatro números, se suelen agrupar todos juntos:

$$R_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Finalmente, cuando queremos aplicar una transformación lineal sobre un vector, lo podemos entender como un producto de la matriz por el vector:

$$R_{90^\circ}\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

En general, una transformación lineal T llevará asociada una matriz:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = T(\hat{\imath}), \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = T(\hat{\jmath}),$$

y se aplicará a un vector cualquiera $\vec{v} = (x, y)$ mediante el producto:

$$T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Las primeras veces, no pasa nada porque escriban el paso intermedio, pues es el paso que le da el significado a la operación y la hace intuitiva. A partir de aquí podemos hacer ejercicios para que cojan soltura con el producto de matriz por vector, o podemos pasar directamente a la actividad 2 en la siguiente sesión, y dejar los ejercicios para más adelante.

Explicado de esta manera, la idea es que los estudiantes tengan un concepto mucho más robusto de para qué se usan las matrices y por qué las introducimos.

Además, les ayuda a interiorizar la idea de que, si tu vector tiene dos coordenadas, necesitas que la matriz tenga dos columnas, para multiplicar cada coordenada del vector por cada columna. Si las columnas fuesen de 3 números, no pasaría nada, el producto se puede hacer de la misma manera. Pero si hubiese más o menos columnas, ya no se podría realizar el producto. Por tanto, esta forma de enseñar el producto hará más fácil que luego entiendan que para multiplicar dos matrices necesitas que la de la izquierda tenga el mismo número de columnas que la de la derecha tiene de filas.

4.2. Sesión 2: Aplicaciones lineales con GeoGebra

En esta segunda sesión se trata de familiarizarse con las transformaciones lineales y sus propiedades usando programas de GeoGebra. Vamos a ver varios programas, que los estudiantes podrán manipular en una sala de ordenadores (si la logística no lo permite, como poco se lo podemos enseñar en el aula habitual con el proyector). Cada uno de estos programas puede ser útil para ver distintas propiedades.

4.2.1. Programa 1: El más básico

Empezamos con un programa sencillo que muestra una cuadrícula transformada por una aplicación lineal. Podemos cambiar la aplicación lineal cambiando los coeficientes de la matriz, y podemos ir moviendo el vector x para ver cómo cambia su transformado, el vector y. Algunas cosas interesantes que debemos hacer notar a los estudiantes:

- Si hacemos coincidir x con los vectores de la base canónica, obtenemos el paralelogramo en el que se basa la cuadrícula transformada.
- Si cambio el módulo de x sin cambiar su dirección, la dirección de y tampoco cambia.
- Hay ciertos inputs x que están alineados con sus outputs y. Aunque los vectores propios no forman parte del temario de bachillerato, no cuesta nada hacerles ver este hecho sencillo y decir que se llaman vectores propios.

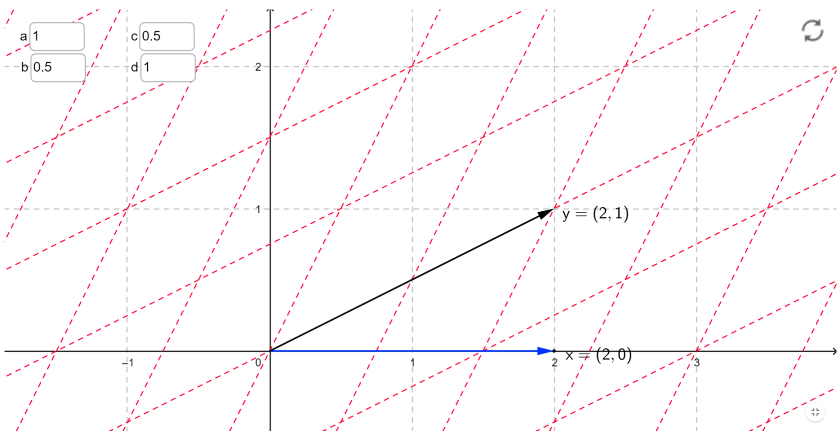


Figura 4. Programa mostrando una cuadrícula transformada mediante una aplicación lineal. Autor: Mikkel Stouby Petersen. URL: https://www.geogebra.org/m/sgG4s5Ak. Última consulta: 10/04/2024.

4.2.2. Programa 2: Transformando la Mona Lisa

Con este segundo programa podemos alterar con deslizadores la transformación lineal que aplicamos. Además de poder hacer esto manualmente, el programa dispone de una animación que va moviendo el cuadro por sí solo. Hay varias cosas que se pueden señalar aquí:

- El **área** del cuadro **puede cambiar**. Esto es una diferencia importante con las rotaciones y las simetrías, que dejan el área igual. En general, una aplicación lineal puede alterar las áreas.
- Hay veces que el cuadro "desaparece", el área va disminuyendo hasta llegar a cero. Les explicamos a los alumnos que esto es porque todos los outputs de la transformación lineal están en una línea.

- Después de que desaparezca el cuadro, vuelve a aparecer, pero está "dado la vuelta".

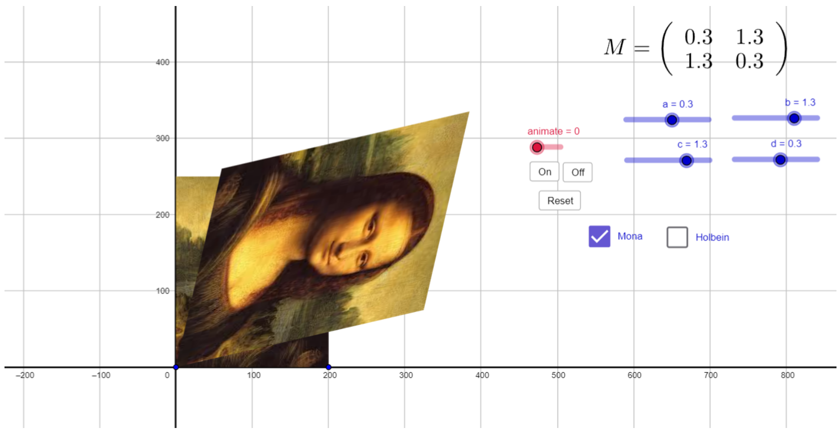


Figura 5. Programa de GeoGebra para ver como varían las áreas y la orientación transformando la Mona Lisa. Autor: rm11821. URL: https://www.geogebra.org/m/pDU4peV5. Última consulta: 10/04/2024.

4.2.3. Programa 3: Controlando gráficamente la transformación

Este tercer y último programa es especialmente útil porque nos permite controlar la transformación aplicada moviendo dos vectores, que son los outputs de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, es decir, las columnas de la matriz. Esto nos permite introducir de manera sencilla dos propiedades de las transformaciones lineales:

- Cuando los dos vectores son linealmente dependientes, el área de la foto transformada es cero, es decir, todo el espacio queda comprimido a una línea.

- ¿Cómo podríamos determinar si la transformación le "da la vuelta" a la imagen? Fácil: con la regla de la mano derecha. Si llevas v_1 a v_2 por el camino más corto y resulta que ese camino es en sentido antihorario, la imagen se queda con la misma orientación. Pero si es en sentido horario, la imagen queda del revés. Esta propiedad se puede comprobar fácilmente manipulando los vectores con el programa.

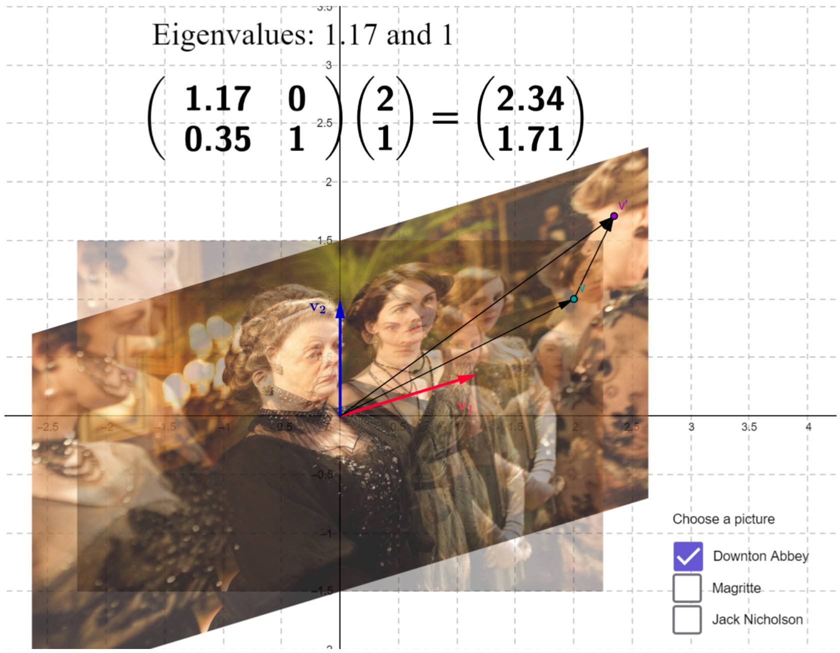


Figura 6. Tercer programa, importante para controlar la transformación de forma manipulativa. Autor: Gihan Marasingha. URL: https://www.geogebra.org/m/zjykhSfu. Última consulta: 10/04/2024.

4.3. Sesión 3: Determinantes

Pasando al terreno pictórico/representativo, en esta actividad introducimos el concepto de determinante de forma geométrica, como el factor por el cual se transforman las áreas al hacer una aplicación lineal.

En primer lugar, partimos de que ya les hemos hecho ver que el área puede cambiar al hacer transformaciones lineales. Luego, debemos convencerles de que todas las áreas cambian por el mismo factor. Esto es debido a dos hechos fundamentales:

- Estas transformaciones dejan las líneas de una cuadrícula paralelas y equiespaciadas. Por tanto, todos los cuadrados de la cuadrícula (que podemos hacer tan fina como queramos) cambian su área por el mismo factor, como se ve en la Figura 7.
- El área de cualquier forma geométrica puede aproximarse por cuadrados pequeños con precisión arbitraria.

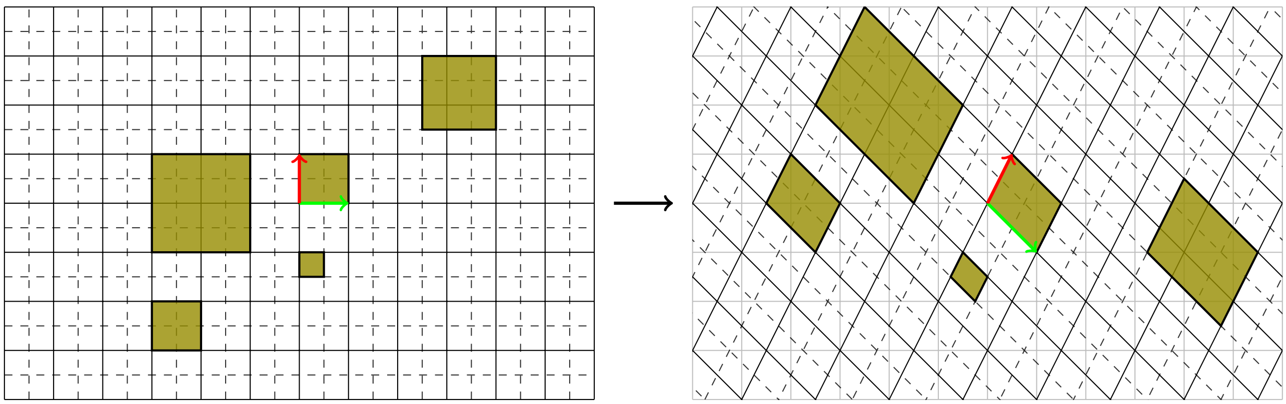


Figura 7. Ilustración de cómo cambian las áreas en una cuadrícula.

Una vez establecido esto, trabajamos la visualización de áreas de nuevo con GeoGebra, esta vez con dos programas, mostrados en las Figuras 8 y 9. La idea es trabajar un poco la intuición antes de meternos en cómo se calcula el determinante. También introducimos la idea de que si la transformación lineal le da la vuelta al plano, el determinante queremos que sea negativo.

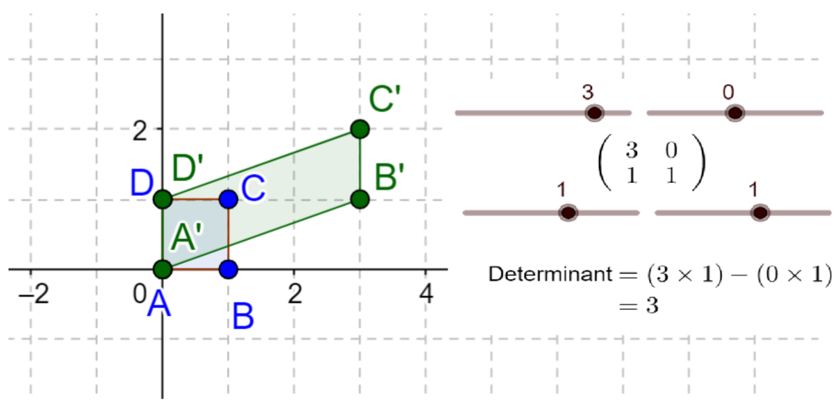


Figura 8. Primer programa de GeoGebra para entender los determinantes. Autores: Antonella Zanna, Catherine Berry. URL: https://www.geogebra.org/m/H2xbpuEa. Última consulta: 10/04/2024.

Por último, hacemos la deducción de ese factor por el que se multiplican las áreas, a base de transformar el cuadrado unidad, apoyándonos siempre en una representación geométrica de lo que está sucediendo, como se ve en la Figura 10.

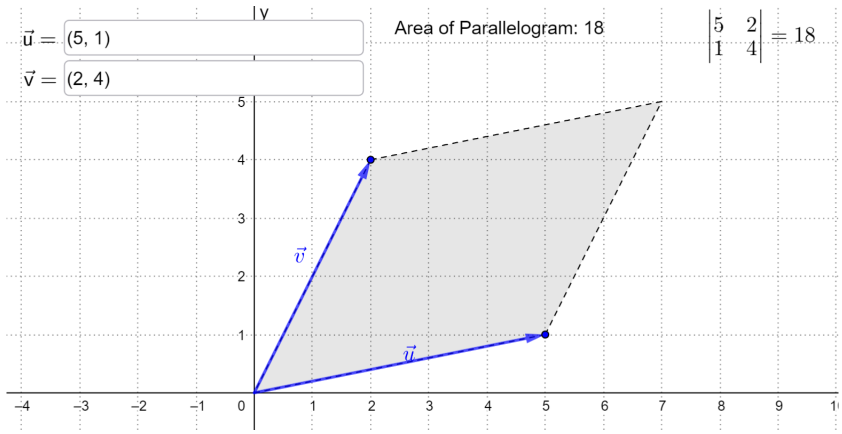
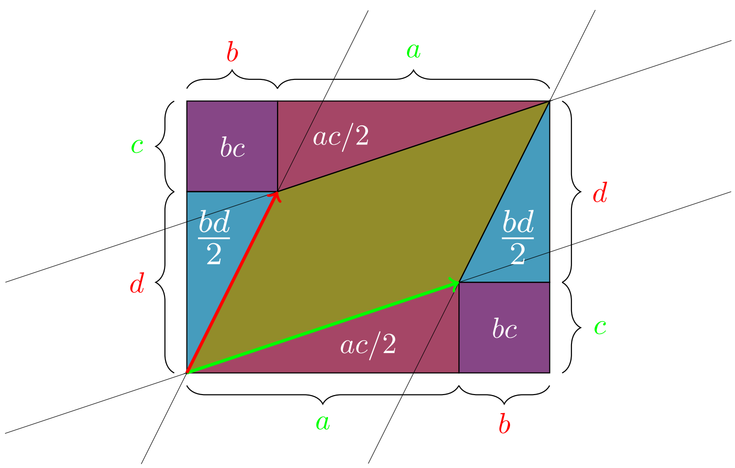


Figura 9. Segundo programa de determinantes. Autor: Brian Sterr. URL: https://www.geogebra.org/m/rsfuwyur. Última consulta: 10/04/2024.



$$\det\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (a+b)(c+d) - ac - bd - 2bc = ad - bc$$

Figura 10. Ilustración para deducir la fórmula del determinante 2×2.

4.4. Sesión 4: Producto de matrices

Por último, para una tarea más abstracta, queremos motivar la fórmula del producto de matrices usando todo lo que hemos visto anteriormente. La idea básica es que si aplicamos una transformación lineal después de otra, el efecto neto es el de aplicar una transformación lineal que llamamos la **composición** de las otras dos. Como hemos visto que aplicar una transformación lineal a un vector equivale a multiplicarlo por una matriz, podemos expresar esta idea en una ecuación:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Parece natural llamar a la matriz de la derecha, la composición, el producto de las dos matrices de la izquierda. Y como ya sabemos desarrollar la parte de la izquierda (dado que son productos de matriz por vector):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ex + fy \\ gx + hy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ae + bg)x + (af + bh)y \\ (ce + dg)x + (cf + dh)y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De esta manera deducimos la fórmula del producto de matrices sin tener que sacarla de la nada y decirles que la memoricen.

Para motivar a los alumnos a encontrar esta fórmula, empezamos primero con matrices sencillas cómo las de las rotaciones y simetrías, y les pedimos que calculen a dónde lleva la composición de las transformaciones a los vectores $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. Tal cómo hemos introducido las matrices, esa información nos da directamente la matriz producto. Luego pasamos a hacer este procedimiento con matrices más complicadas. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

por tanto la primera columna del producto de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

es $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Razonando igualmente para la segunda columna obtendríamos el producto completo.

Después de hacer unos cuantos ejemplos de este estilo, es cuando podemos plantear el ejercicio de encontrar una fórmula general para el producto de matrices 2×2.

Por último, presentamos un algoritmo práctico para calcular el producto de dos matrices. Partimos del producto de una matriz fila por un vector (o por una matriz columna), que se hace igual que hemos hecho los productos de matrices por vectores hasta ahora:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1.$$

Pues para hacer el producto de dos matrices, podemos organizarlas de la siguiente manera y hacer los productos correspondientes de filas por columnas:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 2} \\ 1 \quad -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 2} \\ 1 \quad -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \boxed{6} \\ ? & ? \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \quad 2 \\ \boxed{1 \quad -2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ \boxed{3} & ? \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \quad 2 \\ \boxed{1 \quad -2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & \boxed{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Por supuesto, el orden en el que se multiplican las matrices altera el producto.

¿Y qué hay de las matrices no cuadradas?¿O de más dimensiones?

Hasta ahora solo hemos hablado de matrices cuadradas en dos dimensiones, pero es necesario también saber operar con matrices no cuadradas. Por suerte, las ideas vistas hasta ahora se pueden generalizar sin problema a tales matrices. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

¿Qué aspecto tiene esta matriz como aplicación lineal? Si aplicamos el razonamiento al que hemos llegado con el material manipulativo, podemos hacer el producto de esta matriz por un vector de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -2x+3y \\ 4x+2y \end{pmatrix}.$$

El output de la aplicación es un vector en tres dimensiones. Esta matriz, por tanto, es una aplicación lineal del plano, $\mathbb{R}^2$, al espacio, $\mathbb{R}^3$.

Por otro lado, una matriz como la siguiente

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$. Podemos entonces componerlas, haciendo el producto de ambas:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[A]{} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow[B]{} & \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} & \longmapsto & A\vec{v} & \longmapsto & (BA)\vec{v} \end{array}$$

Es importante señalar a los alumnos una dificultad típica en este tema: solemos leer de izquierda a derecha, pero la matriz que se aplica primero en la composición es la de la **derecha**.

En esta ocasión, el resultado del producto es una aplicación lineal que va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. Por consiguiente, será una matriz 2×2. Esta forma de ver las matrices como aplicaciones lineales nos da una caracterización directa de cuándo se pueden multiplicar dos matrices. Los outputs que salgan de la primera (la de la derecha) tienen que ser de la misma dimensión que los inputs que entran a la segunda (la de la izquierda), para poder hacer la composición. En otras palabras, la matriz de la izquierda tiene que tener el mismo número de columnas que la de la derecha tiene de filas.

Procedemos, por tanto, a hacer el producto de las dos matrices propuestas, usando el mismo algoritmo que antes:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{7} & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & \boxed{8} \\ ? & ? \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ \boxed{10} & ? \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 10 & \boxed{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

4.5. Evaluación

Evidentemente no se puede pretender que después de 4 actividades de una hora los alumnos sean capaces de operar con matrices de forma fluida. Pero el objetivo de estas tareas no es ese, sino que adquieran una intuición y un entendimiento profundo de las matrices y de las operaciones con ellas. La evaluación por tanto deberá tener eso en cuenta.

Por ello la propuesta que se va a hacer es una prueba oral, donde los alumnos tenga que demostrar su entendimiento intuitivo de las matrices como aplicaciones lineales, a través de razonar sobre ciertas propiedades de los determinantes y del producto de matrices. La idea es que razonen y lleguen a entender por qué tienen que ser ciertas esas propiedades, y para ello una prueba oral donde podamos guiarles en esos razonamientos es mucho más adecuada que un examen escrito.

Se enumeran a continuación las propiedades en las que se va a centrar la prueba. Todas ellas se pueden demostrar a través del entendimiento de las matrices como aplicaciones lineales, del producto de matrices como composición, y del determinante como factor por el cual se transforman las áreas (o, equivalentemente, área del paralelogramo formado por las columnas de la matriz). Además, mediante este tipo de prueba podemos evaluar las competencias específicas 2, 3, 5 y 8. Esta última (comunicación de ideas matemáticas) merece especial mención pues se evalúa mejor con una prueba oral que con una prueba escrita.

- El producto de matrices es asociativo.
- El producto de matrices no es conmutativo.
- El determinante del producto de matrices es el producto de sus determinantes.
- Se puede extraer factor común de una columna multiplicando el determinante por el factor.
- Si una de las columnas es nula, el determinante es cero.
- Si se cambia el orden de dos de las columnas, el determinante cambia de signo.
- Si una matriz (aplicación) es invertible, el determinante de la inversa es el inverso del determinante.
- Si una matriz tiene columnas linealmente dependientes, entonces su determinante es 0 (en particular, en este caso la matriz no es invertible).
- No tiene sentido hablar del determinante de una matriz no cuadrada.

Es importante comentar en clase, además, que todas estas propiedades funcionan si cambias columnas (que es como hemos estado enmarcando la cuestión) por filas, aunque demostrar esto de forma geométrica no es trivial en absoluto, y se verá con la siguiente metodología.

5. Metodología 2: Aprendizaje basado en problemas

5.1. Problema 1: Determinantes y sus propiedades

Hasta ahora solo hemos visto como calcular determinantes 2×2, a partir de un cálculo de áreas sencillo. ¿Se puede hacer lo mismo en 3 dimensiones? Pues resulta que sí, en tres dimensiones, tendremos una matriz con tres columnas, y su determinante es el volumen del paralelepípedo generado por esas columnas. Es posible calcular este volumen directamente, con un argumento geométrico como el que hicimos en el caso de dos dimensiones, de modo que para una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

su determinante es

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{31}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Evidentemente no es razonable pedirle a nadie que se memorice esta fórmula, y un problema añadido es que en cuatro dimensiones o más ya no se puede (o es extremadamente difícil) usar este tipo de argumentos.

¿Existe otra forma de calcularlo? Eso es lo que vamos a proponer a los alumnos como problema. Encontrar una forma sistemática de calcular determinantes de orden 3, 4, y lo que haga falta. Es un problema pertinente, que surge naturalmente del desarrollo conceptual que estamos haciendo, y que además sirve para desarrollar el pensamiento computacional, pues la clave del problema es reducir un determinante de orden n a n determinantes de orden $n-1$, pero la idea es que los alumnos descubran esto por su cuenta.

Como afrontar esta tarea en su totalidad no es razonable para alumnos de 2º de Bachillerato, vamos a dividir el problema en varias partes, cada una de ellas un problema más pequeño, para ir construyendo conocimiento hasta llegar al resultado que queremos. Podemos poner a todos los grupos a trabajar en la misma parte, o poner a cada grupo con una parte distinta.

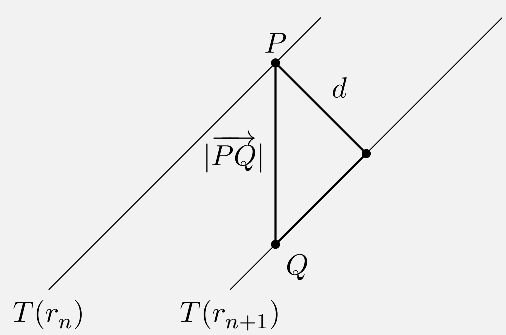
Empezamos por un problema relativamente sencillo, que termina de cerrar nuestra definición de determinante para tener una base sólida sobre la que asentarnos, a la vez que nos sirve para calentar y entrar en materia con procesos cognitivos más complejos que hasta ahora.

Primer subproblema

Hemos definido el determinante como el factor por el cual se multiplican las áreas al aplicar una transformación lineal. Este factor es **constante**, es decir, todas las áreas se multiplican por el mismo factor. Para demostrar esto, hemos usado una propiedad de las transformaciones lineales: las líneas de una cuadrícula siguen siendo paralelas y equidistantes tras aplicar la transformación. Demuestra que esto es, en efecto, correcto (en 2 dimensiones).

Posible solución

Las rectas verticales (es igual para las horizontales) de una cuadrícula tienen ecuación paramétrica $r_n \equiv n\,(1,0) + \mu\,(0,1)$. Sus transformadas serán $T(r_n) \equiv n\,T(1,0) + \mu\,T(0,1)$, gracias a la linealidad de la transformación. Vemos inmediatamente que son paralelas, pues tienen el mismo vector director. En cuanto a la distancia entre dos rectas consecutivas, podemos hacer un dibujo como el de la figura. Elegimos dos puntos cualesquiera de las rectas, P y Q, y nos damos cuenta de que d es la proyección de $\overrightarrow{PQ}$ sobre la dirección perpendicular a los vectores directores de las rectas. Por tanto, si $\vec{v}$ es un vector unitario en esa dirección, $d = \vec{v} \cdot \overrightarrow{PQ}$.



Elegimos, de forma natural, $P = n\,T(1,0)$ y $Q = (n+1)\,T(1,0)$, de modo que $\overrightarrow{PQ} = T(1,0) = (a,c)$ (la primera columna de la matriz).

El vector $\vec{v}$ tiene que ser perpendicular a $T(0,1) = (b,d)$ (la segunda columna). Si lo queremos unitario escogemos

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{b^2+d^2}}\,(d,-b),$$

de modo que

$$d = \frac{1}{\sqrt{b^2+d^2}}\,(d,-b)\cdot(a,c) = \frac{ad-bc}{\sqrt{b^2+d^2}}.$$

El punto crucial aquí es que esta distancia **no depende** de n, es decir, la distancia entre las rectas 2 y 3 de la cuadrícula, tras la transformación, es la misma que la distancia entre las rectas 3 y 4. En otras palabras, siguen siendo equidistantes tras aplicar la transformación.

Dificultades esperadas, y cómo abordarlas

En principio, que la proyección se puede hacer con el producto escalar es algo sencillo y que ya saben de 1º de Bachillerato. Más aún, no es necesario saber ese resultado, se puede resolver directamente el triángulo rectángulo de la figura usando trigonometría y la definición de producto escalar. En general, el cálculo de la distancia entre dos rectas no debería ser el problema.

Donde anticipo más dificultades es en plantear las ecuaciones de las rectas de la cuadrícula como $r_n \equiv n\,(1,0) + \mu\,(0,1)$. En tal caso, una ayuda que podemos darles es que primero concreticen, que se centren primero en dos rectas consecutivas concretas y calculen la distancia entre ellas. Luego, hacer lo mismo con tres rectas consecutivas, y ver que la distancia de la primera a la segunda es la misma que de la segunda a la tercera. Y por último, generalizar al caso de dos rectas consecutivas cualesquiera, lo cual debería ser sencillo en el momento en el que se dan cuenta que pueden elegir $\overrightarrow{PQ}$ de forma que no dependa de n muy fácilmente.

El segundo problema no es tan sencillo, y por eso vamos a dejarles que usen internet para buscar información sobre el tema. Pero primero, hay un hecho sencillo que tenemos que comentarles. Hemos visto que

$$\det\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = ad - bc.$$

Pues si hacemos lo que se llama la traspuesta de la matriz, cambiando filas por columnas, vemos que

$$\det\left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right] = ad - bc,$$

que es exactamente lo mismo. Es decir, el área del paralelogramo generado por las columnas y el del generado por las filas es, necesariamente, la misma. Como consecuencia, todas las propiedades que hemos visto (y veremos) de los determinantes que tengan que ver con las columnas, funcionarán exactamente igual para las filas.

El caso es que esta demostración de que el determinante de la traspuesta es el mismo es puramente algebraica, y no hay ninguna intuición geométrica detrás. Eso es lo que busca arreglar el siguiente problema.

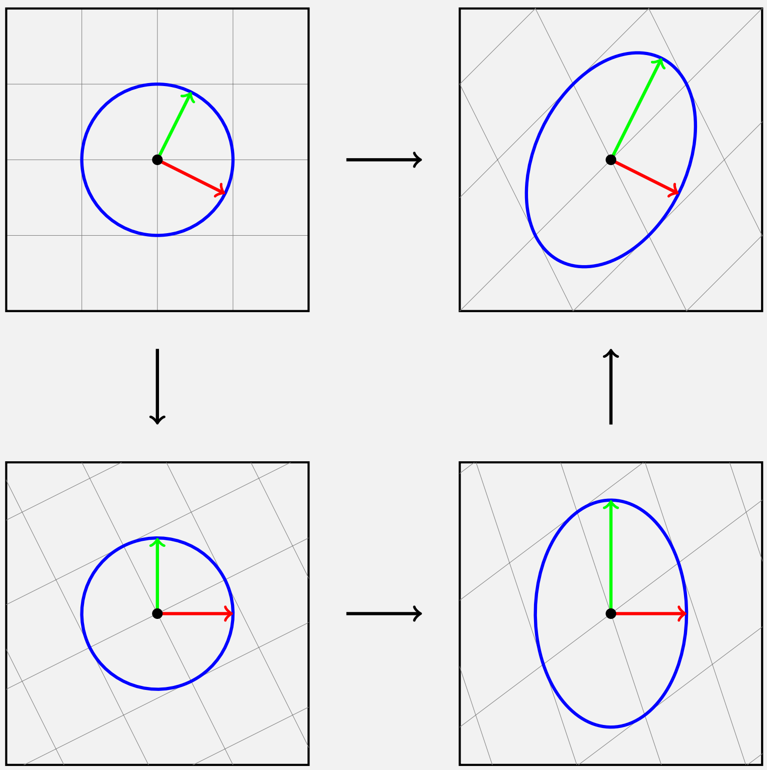
Segundo subproblema

Encontrar una demostración geométrica de que el determinante de la traspuesta de una matriz es el mismo que el de la propia matriz.

Demostrar esto geométricamente requiere de varios resultados previos y algo de inventiva. No se trata de que los alumnos lo resuelvan sin consultar fuentes exteriores, todo lo contrario. Más aún, este problema ha sido elegido específicamente porque no es trivial encontrar una respuesta satisfactoria al mismo ni consultando todas las fuentes posibles en internet. Requiere de esfuerzo e indagación por parte de los alumnos para entender lo que dicen dichas fuentes y los resultados sobre los que se apoyan, y juntarlo todo.

Posible solución

Lo primero que hay que entender es que las matrices, por ser aplicaciones lineales, operan de una manera muy particular. A los cuadrados los convierten en paralelogramos. ¿Y a los círculos? Los convierten en elipses. Esta es una propiedad fundamental que los alumnos pueden encontrar en internet tras buscar un poco sobre este tema. También deben ver que las transformaciones lineales se pueden descomponer en 3 partes: primero una rotación para alinear la contraimagen de los ejes de la elipse con los ejes de coordenadas, luego un escalado de los ejes coordenados, y luego otra rotación para devolver los ejes de la elipse a su sitio:



Por tanto, una matriz cualquiera A la podemos descomponer como $A = R_1 \Sigma R_2$, donde Σ es un escalado y R_1 y R_2 son rotaciones. Como queremos saber qué pasa al trasponer esta expresión, debemos preguntarnos qué pasa al trasponer un producto de matrices.

Encontrar una forma intuitiva de ver que $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal$ también forma parte de este problema. Una posible forma de verlo: $(A\vec{v})^\intercal$ es una matriz fila, que es la misma que se obtiene si haces $\vec{v}^\intercal A^\intercal$. Es fácil ver, si es necesario con un ejemplo, que se está realizando el mismo cálculo en ambos casos. Consecuencia de esto, y del hecho de que el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$ se puede ver como el producto de matrices $\vec{v}^{\intercal}\vec{w}$, es que la traspuesta de A cumple que

$$(A\vec{v}) \cdot (\vec{w}) = (\vec{v}) \cdot (A^{\intercal}\vec{w}).$$

Esta puede ser incluso una forma de definir la matriz traspuesta, y es, de hecho, más fundamental. Esta fórmula es **la razón** por la que nos importa la matriz traspuesta. El caso es que con ella se puede ver muy fácilmente cómo funciona la trasposición de un producto de matrices:

$$(AB\vec{v}) \cdot (\vec{w}) = (B\vec{v}) \cdot (A^{\intercal}\vec{w}) = (\vec{v}) \cdot (B^{\intercal}A^{\intercal}\vec{w}).$$

Por tanto, si $A = R_1 \Sigma R_2$, $A^{\intercal} = R_2^{\intercal} \Sigma^{\intercal} R_1^{\intercal}$. ¿Cómo son las traspuestas de estas aplicaciones? Bueno, la traspuesta de una transformación de escalado de los ejes,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix},$$

es ella misma, por supuesto (y su determinante es $\sigma_1\sigma_2$, el producto del escalado en el eje x por el escalado en el eje y).

¿Y la traspuesta de una matriz de rotación? Las rotaciones son muy especiales porque no alteran ni la longitud de los vectores ni el ángulo entre ellos. En consecuencia, tampoco alteran el producto escalar:

$$(R\vec{v}) \cdot (R\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Pero sabemos que podemos cambiar la rotación de lado si hacemos la traspuesta, por lo que

$$(R\vec{v}) \cdot (R\vec{w}) = \vec{v} \cdot (R^{\intercal}R\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Es decir, necesariamente $R^\intercal R = I$. La traspuesta de una rotación es su inversa, que será otra rotación de ángulo opuesto, y por tanto de determinante 1 (pues las rotaciones no cambian las áreas). Así que trasponer tanto las rotaciones como los escalados deja sus determinantes igual. Dado que cualquier transformación se puede descomponer en rotaciones y escalados, hemos llegado a la conclusión de que trasponer una matriz no cambia su determinante.

Falta un detalle, sin embargo: realmente no siempre se puede descomponer una transformación en una rotación, seguida de un escalado, y de otra rotación. Esto solo sirve para matrices de determinante positivo. Si el determinante es negativo, al menos una de esas rotaciones pasaría a ser una simetría (para que el determinante total, que es el producto de los determinantes, sea negativo). Pero esto no cambia en nada nuestro argumento, pues las simetrías tampoco cambian las longitudes, ni los ángulos, ni las áreas.

Dificultades esperadas, y cómo abordarlas

Aunque la solución dada no es algo que se le ocurriría a un alumno de bachillerato, los alumnos solo tienen que encontrar dicha solución, juntar todas sus partes y entenderla.

Una breve búsqueda sobre el tema les llevará derechos a la descomposición en valores singulares, y de ahí a tener que saber cómo se hace la traspuesta de un producto y cómo son las traspuestas de las rotaciones y simetrías. No se pide tampoco una demostración formal de cada paso, por lo que solo con encontrar los resultados ya estarían haciendo progreso.

Dicho esto, puede haber dificultades, para empezar, si el alumnado no tiene un cierto nivel de inglés, ya que es necesario buscar información en este idioma para obtener la solución. Para solventar esto, debemos asegurarnos de que, en cada grupo de alumnos, haya al menos una persona a la que se le dé bien el inglés.

En cuanto a la dificultad conceptual del problema, todo debería ir sobre ruedas una vez llegamos a la descomposición en valores singulares, pues es solo pulir detalles a partir de ahí. Se anticipan más problemas en llegar a esta descomposición; en particular, como no hemos visto transformaciones de escalado anteriormente, puede ser complicado hacerse a la idea de lo que son, qué hacen, y cómo se expresan en forma matricial. Por suerte, sí que hay multitud de recursos en internet que pueden ayudarles a entender estas transformaciones.

Queremos aprender a calcular determinantes de orden 3, pero hasta ahora solo hemos trabajado en dos dimensiones. El siguiente problema servirá para que los alumnos den el paso a tres dimensiones. Pero primero, introducimos el concepto de multilinealidad.

El determinante de una matriz es lineal en cada una de sus columnas, es decir,

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \lambda C_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 + C_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3' \end{vmatrix},$$

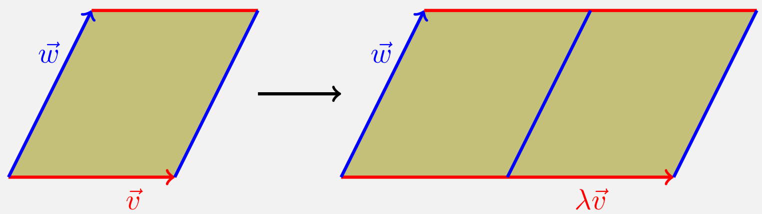
y lo mismo ocurre con las demás columnas (y filas, ya que como hemos visto cambiar filas por columnas no cambia nada con respecto a los determinantes). Esta propiedad es cierta para cualquier dimensión.

Tercer subproblema

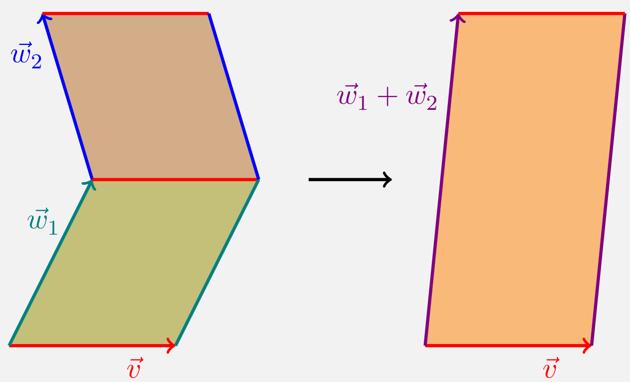
Demostrar geométricamente la multilinealidad del determinante, tanto en dos como en tres dimensiones.

Posible solución

En dos dimensiones: En 2D, el determinante de una matriz es el área del paralelogramo generado por sus columnas. Si multiplicamos una de esas columnas por un escalar, lo que estamos haciendo es equivalente a multiplicar la base del paralelogramo por ese escalar. O lo que es lo mismo, a multiplicar el área por ese escalar:

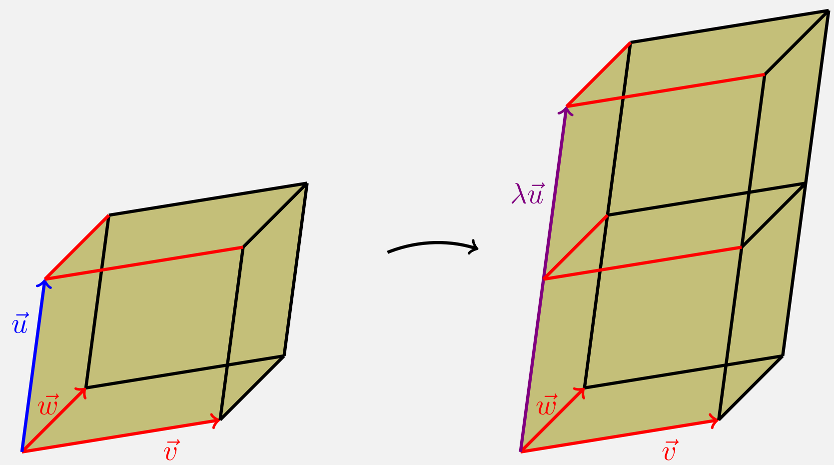


Es decir, escalar una dirección del paralelogramo equivale a escalar su área por el mismo factor, lo cual resulta intuitivo. Ver lo que pasa cuando ponemos una columna como suma de dos vectores es más complicado, pero también se puede hacer geométricamente:

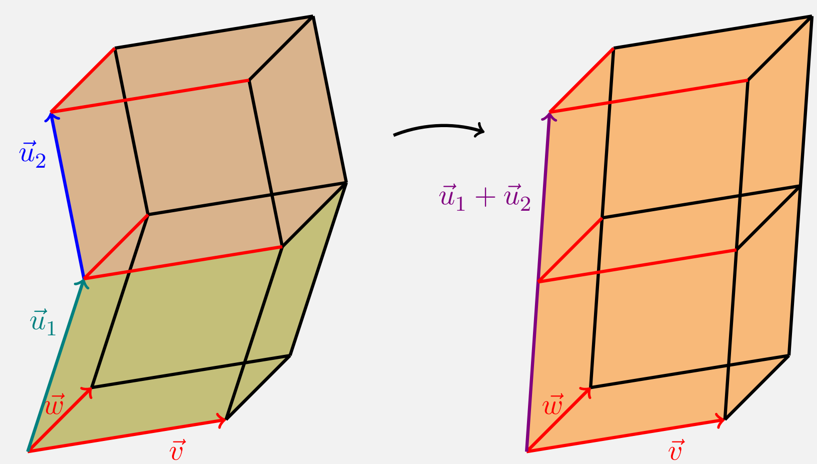


El área de la derecha es igual a la suma de las áreas de la izquierda. ¿Por qué? Una forma de verlo es que la base de todos los paralelogramos es la misma, y la altura del de la derecha es precisamente la suma de las alturas de los dos de la izquierda. Otra forma de verlo es con el principio de Cavalieri: las dos figuras están encerradas entre dos rectas paralelas (de dirección $\vec{v}$), y cualquier recta paralela a éstas interseca a ambas figuras en segmentos de igual longitud. Por lo tanto, tienen el mismo área.

En tres dimensiones: en 3D, el determinante es el volumen del paralelepípedo formado por las columnas de la matriz. El argumento geométrico es el mismo que antes, escalar una de esas columnas escala el volumen por el mismo factor:



Y en cuanto a la segunda propiedad, tendríamos algo así:



De nuevo, el principio de Cavalieri nos sirve para ver que ambos volúmenes son iguales: son dos sólidos que pueden ser encerrados entre dos planos paralelos (generados por $\vec{v}$ y $\vec{w}$), y cualquier plano paralelo a estos corta a ambos sólidos en secciones de igual área. Por tanto, tienen el mismo volumen.

Dificultades esperadas, y cómo abordarlas

El caso bidimensional no debería suponer mucho problema, especialmente porque pueden apoyarse fácilmente en que el área es base por altura.

Las verdaderas dificultades se esperan al pasar a tres dimensiones, pues es mucho más difícil visualizar lo que está ocurriendo. Una forma de ayudarles sería permitiendo el uso de GeoGebra para visualizar los paralelepípedos correspondientes. Además, les puede ayudar ver el volumen como el área de la base por la altura, para que sea más análogo al caso bidimensional. No obstante, en este caso, necesitan un dato extra que habría que comentarles: al sumar dos vectores, la longitud perpendicular a un plano también se suma (y por tanto, la altura del paralelepípedo con la suma de vectores se puede poner como la suma de las alturas de los otros dos paralelepípedos, como hacíamos en el caso de dos dimensiones).

Después de todo esto estamos listos para abordar el problema que nos planteábamos al principio: calcular determinantes de orden mayor que dos.

Problema final

Utilizar todo lo aprendido hasta ahora para desarrollar un determinante 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Posible solución

La idea es reducir el determinante 3×3 a uno (o varios) que sepamos calcular directamente como volumen de un paralelepípedo (es decir, como área de la base por la altura). Sabemos que podemos calcular áreas con un determinante 2×2, por lo que es de esperar que el resultado tenga uno o varios determinantes 2×2.

Empezamos por usar la multilinealidad del determinante para descomponerlo en tres:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

A su vez, podemos descomponer cada uno de estos determinantes en tres, usando la multilinealidad ahora por columnas. Veamos cómo se hace para el primero:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

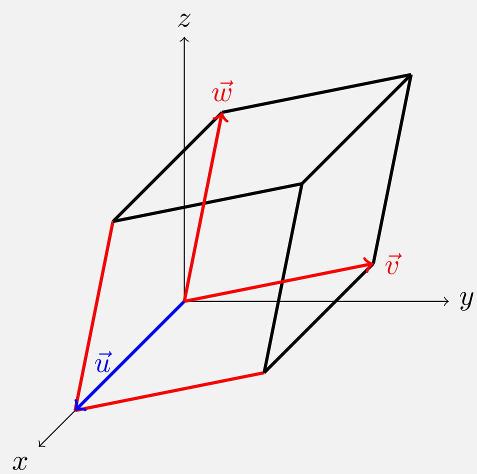
Los dos últimos son nulos por tener una fila de ceros. En cuanto al primero, éste sí lo podemos calcular directamente como un volumen. Veamos cómo. Tenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Llamamos a las columnas

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

El vector $\vec{u}$ está sobre el eje x, a una distancia de a_{11}. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tienen coordenada x nula, por lo que están sobre el plano yz, y son perpendiculares a $\vec{u}$. Por consiguiente, el volumen que buscamos será el área del paralelogramo formado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$, por la altura, que es a_{11}. De lo que más hay que tener cuidado aquí, es de respetar los signos de los determinantes. Como siempre, se entenderá mejor haciendo el dibujo apropiado:



Vemos que, tal y como está dibujado, ese determinante sería positivo, por la regla de la mano derecha. ¿Y cuál es el área del paralelogramo formado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Pues, por supuesto, es el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

que también sería positivo tal y como están dibujados $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Todo esto significa que, en efecto,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

¿Y qué hay del segundo término en nuestra expansión del principio? Se trata de

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Pues podemos calcularlo de la misma manera, simplemente haciendo uso de una de las propiedades de los determinantes que ya conocemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

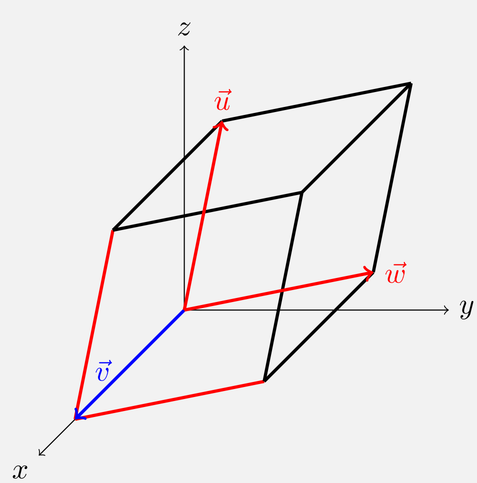
Por esto era tan importante asegurarnos de estar respetando los signos todo el rato. Si hacemos el dibujo de este determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix},$$

llamando a las columnas

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix},$$

obtendríamos un dibujo similar al anterior:



La regla de la mano derecha nos dice que, tal y como está dibujado, este determinante sería positivo. Sin embargo, el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

sería negativo tal y como están dibujados $\vec{u}$ y $\vec{w}$. De ahí que sea necesario cambiar el signo.

Para el tercer y último término de la expansión, habría que cambiar el signo dos veces, es decir, que se queda igual. Por tanto, podemos desarrollar finalmente el determinante original como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Dificultades esperadas, y cómo abordarlas

Es difícil dar el primer paso y empezar el desarrollo para llegar a un determinante de orden 3 que se pueda calcular directamente (o, bueno, con un determinante de orden dos). Requiere de una cierta inventiva, y si es necesario, podríamos ayudar a los alumnos dándoles pistas sobre cómo tiene que ser ese determinante para poder calcularlo directamente.

Pero donde más dificultades anticipo es en el cambio de signo que hay que hacer para uno de los términos. La noción de orientación en un espacio vectorial apenas se trabaja en este nivel, y podría costarles más. Para ello, lo mejor es que dispongan de GeoGebra y/o una calculadora de matrices, y que prueben con ejemplos concretos para convencerse de que ese cambio de signo es necesario.

Aunque hemos hecho la expansión para un determinante de orden 3, y solo por la primera fila, es importante comentar a los alumnos que esta expansión es válida para determinantes de cualquier orden, y se puede hacer por cualquier fila o columna.

5.2. Problema 2: Modelos de población

Este segundo problema introducirá a los alumnos a una prominente aplicación tanto de las matrices y los determinantes como de las derivadas (que ya vieron en 1º de Bachillerato): los modelos poblacionales.

A su vez, para resolverlo deberán investigar en internet sobre sistemas dinámicos. Aunque éstos no entran explícitamente en los contenidos de la asignatura, este problema no pide hacer nada que no sean derivadas y determinantes. Además, es importante que los alumnos se familiaricen con el proceso de investigación en matemáticas, para lo cual este problema es ideal.

Con la intención de motivar a los alumnos con algo más ameno, el caso que vamos a considerar es el de una epidemia zombi, aunque hay que dejar claro que estas técnicas se pueden usar para estudiar cualquier tipo de epidemia.

Problema

Vamos a estudiar un apocalipsis zombi utilizando las matemáticas. Consideraremos un modelo sencillo, con tres variables fundamentales: S, el número de personas normales (susceptibles de convertirse en zombis), Z, el número de zombis, y R, el número de muertos. Las personas normales pueden convertirse en zombis (porque les muerdan) o morir. Los zombis pueden morir, y los muertos pueden resucitar y convertirse en zombis. Consideramos por tanto los siguientes parámetros:

- $\alpha \to$ fracción de los zombis que elimina cada persona normal por unidad de tiempo.
- $\beta \to$ fracción de susceptibles a los que muerde cada zombi por

unidad de tiempo, y que se convierten en zombis.

- $\delta \rightarrow$ fracción de personas normales que se muere por muerte natural, por unidad de tiempo.
- $\eta \rightarrow$ fracción de muertos que resucitan y se vuelven zombis, por unidad de tiempo.
- $L \rightarrow$ tasa de natalidad.

Se pide:

1. Escribir las ecuaciones del sistema, es decir, unas ecuaciones que den el cambio con el tiempo de las variables, S', Z' y R', en términos de las propias variables y de los parámetros.
2. Supongamos, a partir de ahora, que el brote zombi ocurre en un periodo corto de tiempo, de modo que podemos ignorar la natalidad y la mortalidad, es decir, $L \approx 0$ y $\delta \approx 0$. ¿Qué puntos de equilibrio hay en el sistema?
3. Esos puntos de equilibrio, ¿son estables o inestables? Para este apartado puedes ayudarte de internet, buscando sobre sistemas dinámicos y equilibrio.

Posible solución

Las ecuaciones del sistema son

$$\begin{cases} S' = L - \beta SZ - \delta S, \\ Z' = \beta SZ + \eta R - \alpha SZ, \\ R' = \delta S + \alpha SZ - \eta R. \end{cases}$$

Salen de considerar que el cambio en el número de susceptibles será la natalidad, menos los que se convierten en zombis, menos los que se mueren de forma natural. El cambio en el número de zombis será los susceptibles que se convierten en zombis, más los muertos que resucitan, menos los zombis que matan las personas normales. Y por último, el cambio en el número de muertos será los que se mueren de forma natural, más los zombis que matan las personas normales, menos los que han resucitado.

Si suponemos que el brote ocurre en un periodo breve de tiempo, eliminamos la natalidad y la mortalidad y queda

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SZ, \\ Z' &= \beta SZ + \eta R - \alpha SZ, \\ R' &= \alpha SZ - \eta R. \end{aligned}$$

En un punto de equilibrio $S' = Z' = R' = 0$, por lo que de la primera ecuación sacamos que o bien $S = 0$ o bien $Z = 0$ (también podrían ser ambos nulos, pero esa solución no tiene ningún interés). En ambos casos, las otras dos ecuaciones implican que $R = 0$. Por tanto, solo hay dos puntos de equilibrio: todos sanos, o todos zombis. Al número de personas normales en el primer caso lo llamaremos $\bar{S}$, y al número de zombis en el segundo caso lo llamaremos $\bar{Z}$.

En cuanto a la estabilidad, para estudiarla hay que sacar el jacobiano del sistema:

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial S'}{\partial S} & \dfrac{\partial S'}{\partial Z} & \dfrac{\partial S'}{\partial R} \\ \dfrac{\partial Z'}{\partial S} & \dfrac{\partial Z'}{\partial Z} & \dfrac{\partial Z'}{\partial R} \\ \dfrac{\partial R'}{\partial S} & \dfrac{\partial R'}{\partial Z} & \dfrac{\partial R'}{\partial R} \end{pmatrix}.$$

En nuestro caso

$$J = \begin{pmatrix} -\beta Z & -\beta S & 0 \\ \beta Z - \alpha Z & \beta S - \alpha S & \eta \\ \alpha Z & \alpha S & -\eta \end{pmatrix}$$

Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio necesitamos el polinomio característico del jacobiano, que es $\det(J - \lambda I)$. Es importante ver que $\lambda = 0$ va a ser siempre una raíz de este polinomio, pues $\det(J) = 0$, ya que la primera fila es la suma de las otras dos cambiada de signo.

Procedemos, por tanto, a estudiar los dos puntos de equilibrio obtenidos.

Todos sanos. En este punto de equilibrio tenemos

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\beta\bar{S} & 0 \\ 0 & \beta\bar{S} - \alpha\bar{S} - \lambda & \eta \\ 0 & \alpha\bar{S} & -\eta - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \beta\bar{S} - \alpha\bar{S} - \lambda & \eta \\ \alpha\bar{S} & -\eta - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left[\lambda^2 + (\alpha\bar{S} - \beta\bar{S} + \eta)\lambda - \eta\beta\bar{S}\right].$$

Una de las raíces de este polinomio es, como ya hemos dicho, $\lambda_0 = 0$. En cuanto al factor cuadrático, el término independiente es $-\eta\beta\bar{S} < 0$. El producto de las otras dos raíces será por tanto $\lambda_1\lambda_2 = -\eta\beta\bar{S}$. Esto significa que una de las dos es positiva (o tiene parte real positiva) y la otra es negativa (o tiene parte real negativa). La existencia de una raíz con parte real positiva implica que necesariamente el equilibrio es inestable.

Todos zombis. En este caso tenemos

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\beta\bar{Z} - \lambda & 0 & 0 \\ \beta\bar{Z} - \alpha\bar{Z} & -\lambda & \eta \\ \alpha\bar{Z} & 0 & -\eta - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda + \beta\bar{Z})(\lambda + \eta).$$

Las raíces son $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = -\beta\bar{Z} < 0$ y $\lambda_2 = -\eta < 0$. El que todas las raíces (sin contar el 0) sean negativas significa que el equilibrio en este caso es estable.

Por consiguiente, en un brote que ocurra en un breve periodo de tiempo, es probable que los zombis infecten a todos.

Dificultades esperadas, y cómo abordarlas

Si bien en el problema anterior había poca información que encontrar sobre la interpretación geométrica de las propiedades de los determinantes, en este caso ocurre justo lo contrario: hay muchísima información en internet sobre sistemas dinámicos. Filtrar esa información puede ser formativo para los alumnos, pero también abrumador. Si es necesario, podemos delimitarles la bibliografía que pueden mirar sobre el tema para ayudarles.

Plantear correctamente las ecuaciones en sí puede resultar complicado también, especialmente porque los parámetros están dados como fracciones de la población. Para ayudarles en esto, podemos pedirles que hagan énfasis en las unidades y en la consistencia dimensional de las ecuaciones.

Por último, darse cuenta de que un punto de equilibrio es aquel con $S' = Z' = R' = 0$ tampoco es trivial, y dependerá mucho de la experiencia que tengan los alumnos en problemas de física donde ese tipo de razonamiento es muy común.

5.3. Problema 3: Ternas pitagóricas

Este problema, aunque solo toca tangencialmente las matrices, es otro buen ejemplo de sus aplicaciones. Se trata del estudio de las ternas pitagóricas, es decir, ternas de números enteros (nos interesan principalmente los positivos) (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 = z^2$.

Al igual que hicimos con el primer problema, lo vamos a dividir en problemas más cortos, dos en este caso. Para ambos permitimos la investigación en internet, pues no son problemas fáciles de abordar en absoluto.

El primer subproblema consiste en encontrar una buena parametrización de las ternas pitagóricas, que nos servirá para demostrar ciertas propiedades en el segundo.

Primer subproblema

Las ternas pitagóricas (x, y, z) cumplen que $x^2 + y^2 = z^2$. Podemos usar esto para parametrizarlas, por ejemplo como

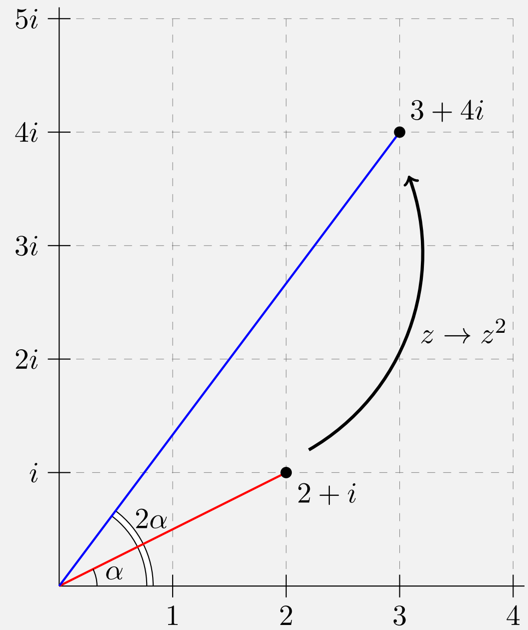
$$x = u$$
$$y = v$$
$$z = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

El problema de esta parametrización es que solo funciona para u y v tales que $u^2 + v^2$ es un cuadrado perfecto. Se pide encontrar una parametrización de las ternas pitagóricas en términos de dos parámetros u y v, $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, de modo que

1. Para cada valor entero de u y v obtengamos una terna pitagórica.
2. La parametrización dé todas las ternas pitagóricas, salvo quizás algún múltiplo. Es decir, que **toda** terna pitagórica se pueda escribir como $\big(kx(u, v), ky(u, v), kz(u, v)\big)$.

Posible solución

Con el objetivo de obtener ternas pitagóricas, imaginemos que estamos en el plano complejo. Las ternas pitagóricas corresponderán a números complejos $a + bi$, con a y b enteros, y que estén a una distancia entera del origen. Esta distancia, en general, es $\sqrt{a^2 + b^2}$, que no tiene por qué ser un número entero. Una estrategia que podemos seguir para que la distancia al origen sea siempre un número entero es elevar al cuadrado nuestro número complejo original, obteniendo $(a + bi)^2 = \big(a^2 - b^2\big) + (2ab)i$, con una distancia al origen de $a^2 + b^2$. Por ejemplo, si empezamos con $2 + i$, cuya distancia al origen es $\sqrt{5}$, al elevarlo al cuadrado obtenemos $3 + 4i$, que nos da precisamente la terna pitagórica $(3, 4, 5)$. Geométricamente, elevar un número complejo al cuadrado equivale a elevar al cuadrado su distancia al origen, y duplicar el ángulo que forma con el eje real:



Cada número complejo (con coordenadas enteras) que elevemos al cuadrado nos dará una terna pitagórica. La pregunta que debemos hacernos es: ¿podemos obtener **todas** las ternas pitagóricas de esta manera? Pues resulta que sí, las obtenemos todas, por lo menos sin contar algunos múltiplos de las ternas, que faltan. Por ejemplo, elevando al cuadrado nunca llegaríamos al punto $6+8i$. Sencillamente no hay ningún número complejo de coordenadas enteras que al elevarlo al cuadrado de $6+8i$. Pero sí que llegamos a $3+4i$, que corresponde a la terna anterior, dividida por dos.

Vamos a ver por qué, en efecto, así se llega a todas las ternas pitagóricas, salvo algunos múltiplos. Recordamos que estamos viendo una terna pitagórica (a, b, c) como un número complejo $a + bi$, con $a^2 + b^2 = c^2$. Dividiendo por c^2 obtenemos

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

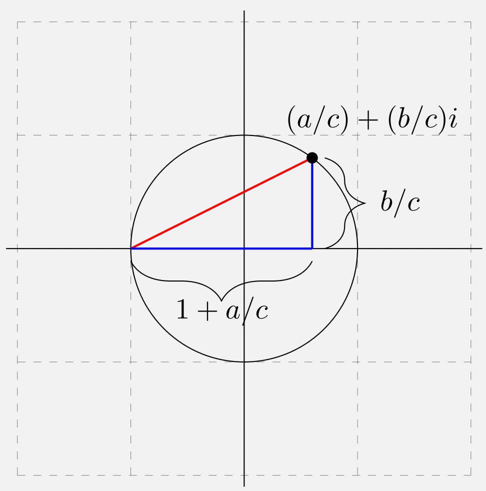
Esto quiere decir que toda terna pitagórica (a, b, c) está asociada a un punto de coordenadas racionales en la circunferencia unidad, $(a/c, b/c)$. Notamos que al hacer esta asociación todos los múltiplos de una terna van a parar al mismo punto de la circunferencia unidad.

Por otro lado, a las ternas pitagóricas que hemos obtenido con nuestro método, $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$, también les podemos asociar puntos de la circunferencia unidad, de la misma manera:

$$\left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}\right)^2 + \left(\frac{2uv}{u^2 + v^2}\right)^2 = 1.$$

Como u y v son enteros, este método también nos da puntos de coordenadas racionales. La pregunta es, ¿obtenemos así **todos** los puntos racionales de la circunferencia unidad?

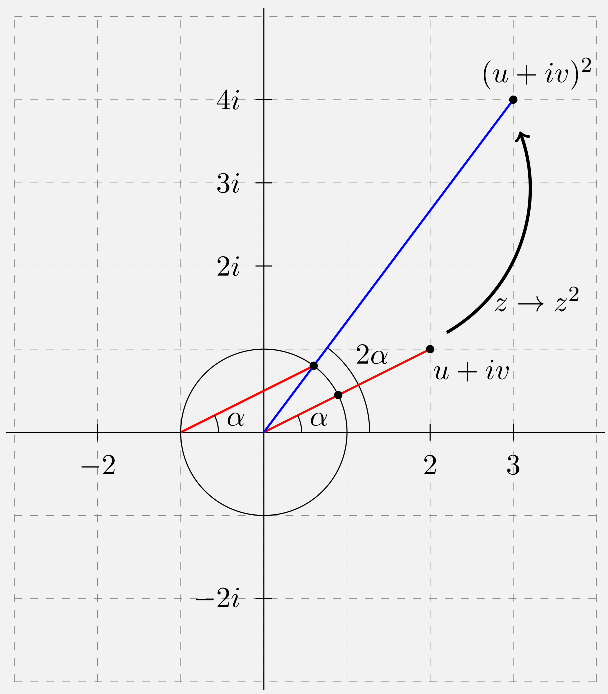
Para ver que sí, consideramos un punto racional cualquiera de la circunferencia unidad, y nos preguntamos por la pendiente de la recta que une el -1 con ese punto:



Como se ve en el dibujo, esa pendiente es **racional**, como consecuencia de que las coordenadas del punto sean racionales. Por tanto, solo tenemos que ver que nuestro método nos da todas las posibles pendientes racionales.

Pensemos entonces en cómo funciona nuestro método. Cogemos un número complejo cualquiera $u + iv$, con coordenadas racionales. Lo elevamos al cuadrado, lo cual duplica el ángulo que forma con la horizontal. Y luego lo proyectamos sobre la circunferencia unidad.

¿Cuál es la pendiente de la recta que une el -1 con dicho punto? Para calcularla, invocamos un poquito de geometría del círculo: cuando dos puntos de una circunferencia forman un ángulo α con el centro, el ángulo que forman con cualquier otro punto de la circunferencia (que no esté entre ellos) es $\alpha/2$. Y como al elevar al cuadrado el ángulo con la horizontal se duplica, resulta que el ángulo sobre la horizontal de la recta que une el -1 con el punto obtenido, es exactamente el mismo que el ángulo de partida:



La pendiente es la tangente de ese ángulo, que es justo v/u. Pero u y v son dos números enteros cualesquiera, por lo que la pendiente puede ser cualquier número racional que queramos.

Por consiguiente, nuestro método consigue generar cualquier punto racional en la circunferencia unidad, y por tanto cualquier terna pitagórica (salvo algunos múltiplos). Concluimos, entonces, que toda terna pitagórica (salvo algún factor k) (x, y, z), con $x^2 + y^2 = z^2$, puede ser parametrizada por

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v^2, \\ y &= 2uv, \\ z &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Dificultades esperadas, y cómo abordarlas

Este problema es probablemente en el que más variedad hay en las posibles soluciones. No es necesario en absoluto, por ejemplo, hablar de números complejos para llegar a la parametrización que hemos encontrado. La solución incluida incluye números complejos simplemente porque proporcionan una visualización intuitiva de lo que está haciendo la parametrización, para que no parezca que sale de la nada. Como consecuencia de esta variedad, hay que estar más atentos y saber guiar a los alumnos por cualquier solución que elijan.

A parte de eso, es un problema bien conocido y con muchos recursos online que lo tratan, por lo que no debería ser difícil que los alumnos encuentren una solución que puedan entender.

Ya estamos listos para presentar el problema que queremos resolver: encontrar un “árbol genealógico” de las ternas pitagóricas. Se trata de un problema muy didáctico, pues una vez se tiene la parametrización, es posible investigar un montón de resultados conociendo simplemente álgebra básica. Principalmente, los alumnos trabajarán con inecuaciones.

Segundo subproblema

Construir un árbol con todas las ternas pitagóricas positivas y primitivas (es decir, tales que sus tres elementos no compartan ningún factor) usando matrices, de modo que podamos multiplicar una terna pitagórica (x, y, z) por una matriz para llegar a otra (x', y', z'), y así sucesivamente. Y lo más importante, demostrar que, efectivamente, el árbol contiene todas las ternas pitagóricas primitivas.

Posible solución

Aunque las matrices que buscamos se pueden encontrar fácilmente en internet, una forma de motivarlas es buscar una función t, que dependa de x, y y z, y que transforme la terna pitagórica (x, y, z) en otra terna (x', y', z'), mediante una fórmula simple como $x' = t + x$, $y' = t + y$, $z' = t + z$. Imponiendo que $x'^2 + y'^2 = z'^2$ llegaríamos a que $t = 2(-x - y + z)$, y por tanto $(x', y', z') = (-x - 2y + 2z, -2x - y + 2z, -2x - 2y + 3z)$. Aplicando esto a $(x, y, z) = (3, 4, 5)$, llegaríamos a $(x', y', z') = (-1, 0, 1)$, que técnicamente es una terna pitagórica, pero preferentemente queremos ternas donde ningún elemento sea nulo.

Podríamos probar con hipótesis iniciales un poco diferentes, como $x' = t - x$, $y' = t + y$, $z' = t + z$. Esto llevaría a $t = 2(x - y + z)$ y $(x', y', z') = (x - 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x - 2y + 3z)$. Aplicado a $(3, 4, 5)$ nos da $(x', y', z') = (5, 12, 13)$. Por supuesto, lo que hemos descubierto es una transformación lineal, y como tal puede ser expresada en forma de matriz. Probando con hipótesis de este tipo, y jugando con los signos de x y de y en la hipótesis inicial, podemos llegar a obtener tres matrices relevantes:

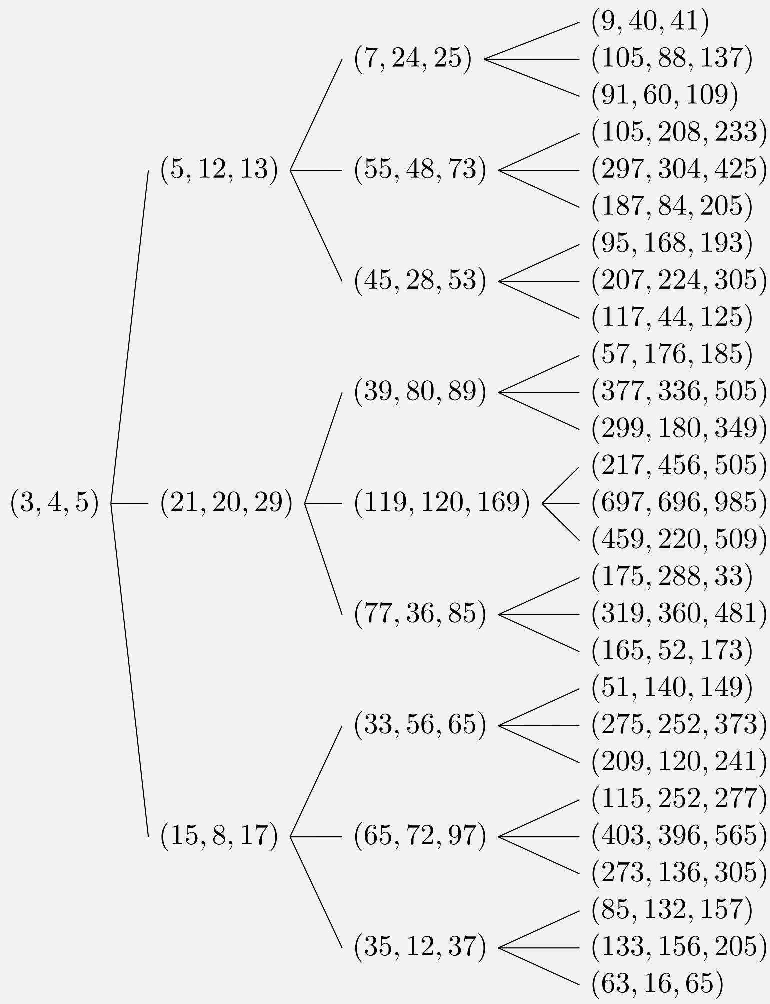
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos entonces construir un árbol de ternas pitagóricas empezando por la terna $(3, 4, 5)$ y aplicando sucesivamente estas matrices (a la terna como vector columna), como se ve en la página siguiente.

La pregunta ahora es, con este procedimiento, ¿generamos todas las ternas pitagóricas primitivas? Por construcción, al aplicar estas matrices a una terna pitagórica, generamos otras ternas pitagóricas. Lo único que tenemos que demostrar, por tanto, es:

(1) Que al aplicar una de las matrices a una terna pitagórica primitiva, la terna obtenida también es primitiva.

(2) Que toda terna pitagórica primitiva está en el árbol.



Árbol de ternas pitagóricas.

Demostrar (1) es muy sencillo. Vamos a hacerlo para la matriz A. La inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sus entradas son números enteros. Si $(x', y', z') = A(x, y, z)$, entonces podemos despejar x, y y z usando dicha matriz inversa, obteniendo $x = x' + 2y' - 2z'$, $y' = -2x - y + 2z$ y $z' = -2x - 2y + 3z$. Por tanto, si x', y' y z' compartiesen un factor, necesariamente x, y y z también compartirían un factor. Por contraposición, si (x, y, z) es una terna primitiva, (x', y', z') también lo es. De hecho, (x, y, z) es una terna primitiva **si y solo si** (x', y', z') lo es, por el mismo razonamiento (en realidad, primero habría que demostrar que si (x', y', z') es una terna pitagórica, (x, y, z) también lo es, pero eso es sencillo de comprobar). Y esto es válido para las matrices A, B y C.

En cuanto a (2), basta con ver que, dada una cierta terna pitagórica primitiva, existe un camino que podemos recorrer, aplicando las inversas de A, B o C, para llegar hasta la terna $(3, 4, 5)$. Para demostrar esto, lo hacemos en dos pasos:

(a) Dada una terna pitagórica positiva (x, y, z), al aplicar las matrices A^{-1}, B^{-1} o C^{-1}, el resultado es una terna pitagórica (x', y', z') con $z' < z$.

(b) Dada una terna pitagórica positiva y primitiva (x, y, z), distinta de $(3, 4, 5)$, por lo menos una de las matrices A^{-1}, B^{-1} o C^{-1}, da una terna pitagórica positiva, (x', y', z'), al multiplicarla por (x, y, z).

Si podemos asegurar ambas propiedades, podemos asegurar que una terna primitiva positiva cualquiera acabará llegando a la terna $(3, 4, 5)$ tras suficientes aplicaciones de A^{-1}, B^{-1} o C^{-1}, garantizando que dicha terna tiene su lugar en el árbol.

Empezamos con (a). Lo veremos para la matriz A, pero resulta que la tercera fila de A^{-1} es la misma que la tercera fila de B^{-1} y C^{-1}, por lo que $z' = -2x - 2y + 3z$ en todos los casos. Así que, lo que queremos ver es que $3z - 2x - 2y < z$. Aquí es donde entra en juego la parametrización que hemos encontrado para las ternas pitagóricas,

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v^2, \\ y &= 2uv, \\ z &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Si (x, y, z) es una terna positiva, podemos elegir u y v positivos, y necesariamente $u > v$. Entonces,

$$\begin{gathered} 3z - 2x - 2y = 3u^2 + 3v^2 - 2u^2 + 2v^2 - 4uv = u^2 + 5v^2 - 4uv \\ = z + 4v^2 - 4uv = z + 4v(v - u) < z, \end{gathered}$$

precisamente porque $u > v$.

En cuanto a (b), es útil tener primero en mente las tres matrices inversas, A^{-1}, B^{-1} y C^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lo que queremos ver es que, al multiplicar estas matrices por (x, y, z), una de las ternas que se obtiene es de números positivos (o, como mucho, con uno de ellos siendo cero). Primero, ya sabemos que $z' = 3z - 2x - 2y = u^2 + 5v^2 - 4uv$, donde u y v son enteros positivos. Fijemos v y estudiemos z' como función de u, $f(u) = u^2 + 5v^2 - 4uv$. Observamos que $f(0) = 5v^2 > 0$. Además, $f'(u) = 2u - 4v$, que es negativa si $u < 2v$ y positiva si $u > 2v$. Esto significa que $f(u)$ tiene un mínimo en $u = 2v$. Pero $f(2v) = v^2 > 0$. Por tanto $f(u)$ siempre es positiva, y por tanto z' siempre es positivo.

Vamos ahora a ver lo que pasa con x' e y'. En primer lugar, veremos que x' no puede ser cero. Dependiendo de qué matriz escojamos, x' puede ser $-x - 2y + 2z$, o lo mismo pero cambiado de signo, lo cual no nos importa para ver si puede ser cero. Tenemos

$$\begin{aligned}-x-2y+2z=0 \quad &\rightarrow \quad -u^2+v^2-4uv+2u^2+2v^2=0\\ u^2+3v^2-4uv=0 \quad &\rightarrow \quad (u-2v)^2+v^2=0.\end{aligned}$$

Evidentemente esto último es imposible si u y v son positivos.

Por otro lado, y' sí puede ser cero. Mediante un desarrollo similar al anterior (que haremos más tarde de todos modos), podemos encontrar que $y'=0$ si $u=2v$. Si (x,y,z) es una terna pitagórica primitiva, u y v tienen que ser coprimos (por la forma de la parametrización). La única manera de que esto ocurra con $u=2v$ es si $v=1$ y $u=2$, lo cual nos da la terna $(3,4,5)$. En este caso, al aplicarle a esta terna las matrices A^{-1}, B^{-1} y C^{-1} obtendríamos las ternas $(1,0,1)$ y $(-1,0,1)$, que técnicamente son ternas pitagóricas, pero no nos interesan. El caso es que, para cualquier otra terna primitiva, tenemos asegurado que y' no se va a anular.

Dicho esto, tendremos dos casos:

Caso 1: $x+2y-2z>0$. En este caso, o bien con la matriz A^{-1} o bien con B^{-1} obtendremos un y' mayor que cero, ya que los valores para y' resultantes de esas dos matrices tienen signos opuestos. Por tanto, queda garantizado que una de las tres matrices nos lleva a una terna positiva.

Caso 2: $x+2y-2z<0$. En este caso, si queremos que x' sea positivo, hay que elegir la matriz C^{-1}, que da $x'=-x-2y+2z>0$. Lo que hay que demostrar entonces es que, en este caso, $y'=2x+y-2z$ también es mayor que cero.

Usamos la condición de $x'>0$, que con la parametrización, implica

$$\begin{aligned}-u^2+v^2-4uv+2u^2+2v^2>0 \quad &\rightarrow \quad u^2+3v^2-4uv>0\\ (u-2v)^2-v^2>0 \quad &\rightarrow \quad (u-v)(u-3v)>0.\end{aligned}$$

Como $u>v$ siempre, de esta última inecuación obtenemos $u>3v$.

Pasamos ahora a estudiar y':

$$
\begin{aligned}
y' = 2x + y - 2z &= 2u^2 - 2v^2 + 2uv - 2u^2 - 2v^2 \\
&= -4v^2 + 2uv = 2v(u - 2v).
\end{aligned}
$$

Ahora bien, como precisamente acabamos de obtener que $u > 3v$, también $u > 2v$, y por consiguiente $y' > 0$.

Con esto concluimos, por consiguiente, que para cualquier terna pitagórica primitiva y positiva, existe un camino que podemos recorrer aplicando sucesivamente cierta combinación las matrices A^{-1}, B^{-1} y C^{-1}, para llegar a la terna $(3, 4, 5)$ y que, por tanto, toda terna pitagórica primitiva está en el árbol.

Dificultades esperadas, y cómo abordarlas

Aunque este problema se puede encontrar resuelto en internet, las soluciones que pululan por ahí dejan muchos detalles sin aclarar. Esto significa que el trabajo principal del alumno será precisar los detalles en todos los pasos de las demostraciones. Al mismo tiempo, cualquiera con conocimientos básicos de álgebra puede hacer algún progreso en cada uno de esos pasos, por lo que por lo menos tendrán por dónde empezar. Una posible dificultad que puede aparecer, sin embargo, es que los alumnos se desmotiven al ver la cantidad de cosas que hay que comprobar, y sobre todo si intentan unas cuantas y no les salen. Ante esta dificultad, debemos recalcar que hay varias formas de manipular las expresiones que obtenemos, e instar a los alumnos a probar por varios caminos (de hecho, hay varios caminos válidos para demostrar muchos de los pasos).

Otra cosa importante a tener en cuenta es ayudar a los alumnos a que desglosen adecuadamente todas las partes de la demostración a realizar, sin dejarse ningún hueco. Es muy fácil pasar por alto casos como $x' = 0$ o $y' = 0$, y estudiarlos es necesario para que la demostración esté completa.

5.4. Evaluación

En un aprendizaje basado en problemas, la evaluación formativa cobra más fuerza que nunca, pues conviene realizar un seguimiento de los avances que cada grupo va haciendo en el problema. Para tal propósito, usaremos una rúbrica para valorar dichos avances. Esta rúbrica se muestra en la Tabla 1, y se usará en cada sesión para dar a los grupos información útil y condensada sobre su proceso de aprendizaje.

Categoría.	**Mal.**	**Regular.**	**Bien.**	**Excelente.**
Avance en el problema.	Se ha avanzado poco o nada.	Avances menores.	Avance significativo.	Muy buen avance en el problema.
Rigor matemático.	No está bien expresado en el lenguaje matemático.	Hay muchos huecos en el razonamiento.	Aceptable, hay huecos menores.	Razonamiento riguroso y formal.
Presentación de los resultados obtenidos.	No se entiende nada.	Mala presentación, con faltas de ortografía y frases mal construidas.	Aceptable, se entiende lo que quiere decir.	Se entiende y además está bien redactado y presentado.
Actitud.	La actitud es disruptiva hacia el resto de compañeros.	Los miembros del grupo no muestran interés y se rinden ante la primera dificultad.	Muestran algo de interés y se dejan guiar.	Muestran interés y perseveran ante las dificultades.

Tabla 1. Rúbrica para la evaluación del trabajo realizado en cada sesión de un aprendizaje basado en problemas.

Es importante que parte de lo que evaluamos sea la respuesta ante las dificultades, pues forma parte de las competencias específicas de la asignatura. En cuanto a la evaluación sumativa, el ABP nos da una forma directa de comprobar si los alumnos han conseguido los objetivos marcados: mirar directamente la solución que han obtenido del problema. Así podremos evaluar el grado de consecución de los objetivos, incluyendo hasta qué punto han llegado en la resolución del problema, el nivel de rigor empleado, la calidad de la presentación, etc.

Además, también vamos a evaluar la capacidad de los alumnos de exponer sus resultados. Cada grupo deberá preparar una presentación en la que expliquen los resultados a los que han llegado trabajando en uno de los problemas estudiados (preferentemente, sin que haya dos grupos cubriendo el mismo problema). Para evaluar dicha presentación, se usará otra rúbrica, mostrada en la Tabla 2.

Debido a la naturaleza de la metodología, y a cómo requiere que los alumnos hagan realmente matemáticas, mediante estas dos rúbricas podemos evaluar esencialmente todas las competencias específicas de la asignatura.

Categoría.	**0 puntos.**	**1 punto.**	**2 puntos.**	**3 puntos.**
Proceso comunicativo.	No miran a la gente, leen todo lo que está escrito en la diapositiva.	Miran a la gente y tratan de no leer las diapositivas.		
Estructura y orden de la exposición.	Exposición que no es clara ni concisa y presenta ambigüedades en los pasos seguidos.	Exposición que, siendo clara, o no es concisa o presenta ambigüedades en la mayoría de pasos seguidos.	Exposición que, siendo clara y concisa, presenta ambigüedades en algunos de los pasos seguidos.	Exposición clara, concisa y sin ambigüedades.
Resultados obtenidos.	Apenas se ha progresado en la resolución del problema.	Se han encontrado algunos resultados importantes.	Se ha llegado prácticamente al resultado final, pero con algunos huecos en el camino.	Se ha resuelto el problema en su totalidad.
Tiempo de exposición.	No se ajusta al tiempo establecido.	Se ajusta al tiempo establecido.		
Contestación de preguntas	Contestan erróneamente o divagando a las preguntas realizadas.	Contestan de manera adecuada a las preguntas realizadas.		

Tabla 2. Rúbrica para la evaluación de la presentación.

6. Metodología 3: Lección Magistral

6.1. Sesión 1: derivadas e integrales con el coche

Aunque el teorema fundamental del cálculo se suele ver más tarde en la parte de análisis, en mi opinión es de lo primero que se debería ver, introduciendo las derivadas e integrales (como pendientes de la recta tangente y áreas bajo la curva respectivamente) como inversas la una de la otra desde el primer momento, para que el teorema fundamental del cálculo resulte completamente intuitivo y natural.

Para ello, como motivación para introducir los conceptos, imaginémonos que estamos conduciendo un coche que solo puede ir en línea recta. Tenemos acceso al tacómetro y al cuentakilómetros, y anotamos el valor que tienen en cada punto de nuestro recorrido. El resultado sería algo como la Figura 11.

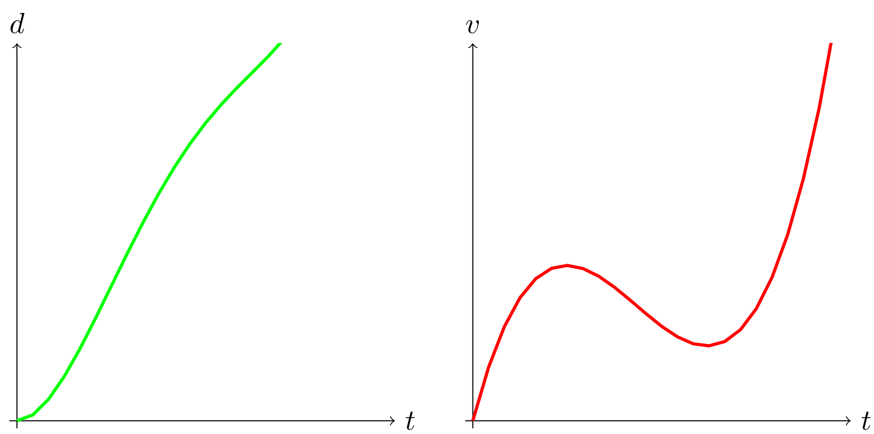


Figura 11. Funciones asociadas al cuentakilómetros y al tacómetro.

Ahora nos planteamos el siguiente problema: si uno de los dos (el tacómetro o el cuentakilómetros) está roto, ¿cómo podríamos obtener el correspondiente gráfico a partir del otro?

Por supuesto, en este nivel ya saben la respuesta, al menos para ir de izquierda a derecha: para obtener la velocidad a partir de la distancia, se toma la derivada con respecto al tiempo. Pero vamos a ver por qué es así desde el principio.

Empezamos con un caso sencillo, vamos a velocidad constante, y queremos saber la distancia. En ese caso, es muy fácil, porque la distancia viene dada por la fórmula típica $d = vt$, es decir, la distancia en función del tiempo es una recta de pendiente v, como se ve en la Figura 12.

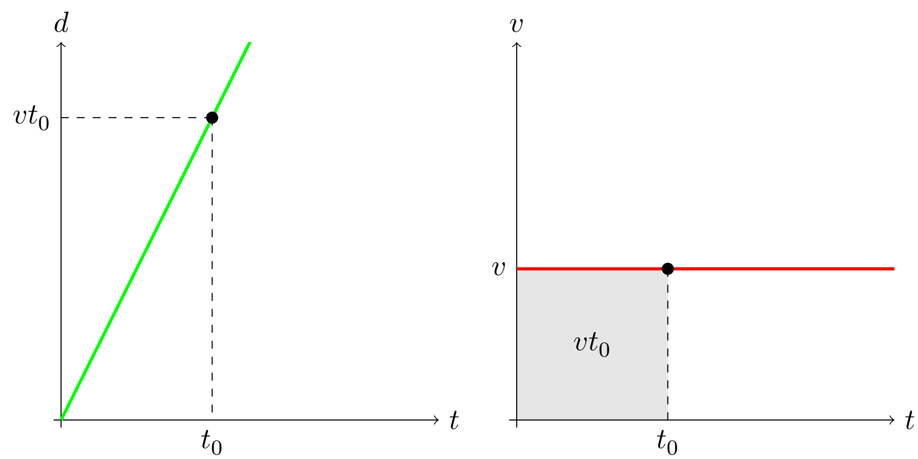


Figura 12. Cuentakilómetros y tacómetro a velocidad constante.

Es importante hacer que los alumnos vean que el valor de d en un tiempo t_0 es, precisamente, el área bajo la gráfica de v entre 0 y t_0, sombreada en la figura anterior. ¿Y qué pasa si la velocidad no es constante? En ese caso, el procedimiento a seguir es aproximar el movimiento como una sucesión de movimientos a velocidad constante, e ir calculando la distancia recorrida para cada uno de esos movimientos como el área bajo esa parte de la curva, y luego sumar esas distancias calculadas. El resultado sería una suma como la siguiente:

$$d \approx \sum_{i=0}^{n} v(t_i)\Delta t,$$

donde t_i son los diferentes tiempos en los que estamos dividiendo el movimiento, y Δt es la anchura de la división. Cuantos más movimientos a velocidad constante usemos para aproximar nuestro movimiento, mejor será nuestra aproximación de la distancia recorrida. Una sucesión de dichas aproximaciones está representada en los gráficos de la Figura 13.

En el límite, cuando la longitud de los rectángulos Δt tiende a cero, tendremos exactamente la distancia recorrida, la cual se corresponde, precisamente, con el área bajo la gráfica de la velocidad. Escribimos por tanto

$$d = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n} v(t_i)\Delta t := \int_0^{t_0} v\,\mathrm{d}t\,.$$

La última expresión la introducimos como una notación nueva, una forma de resumir el límite correspondiente.

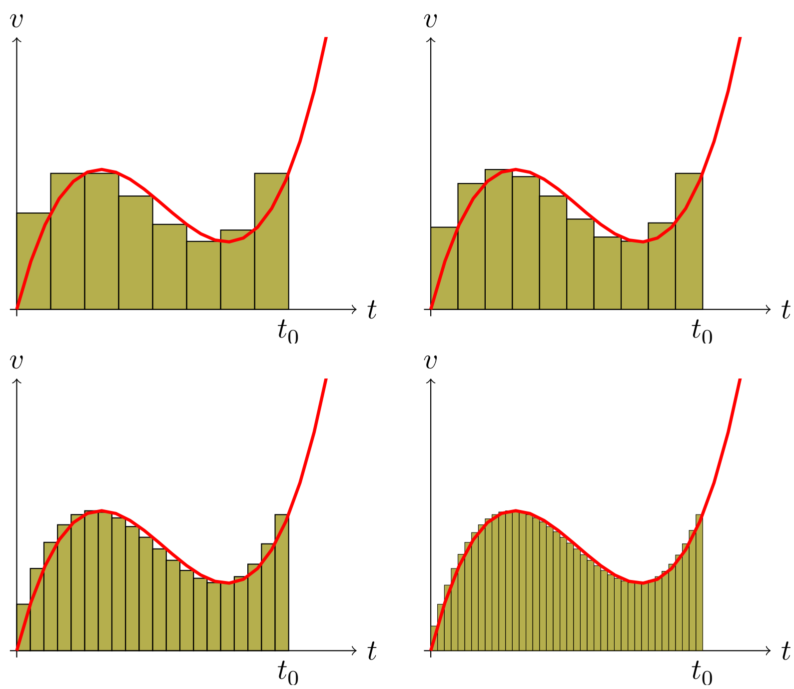


Figura 13. Aproximaciones de la función velocidad y del área bajo la curva.

¿Y en el sentido contrario? ¿Cómo obtenemos la velocidad a partir de la distancia? Volvamos al caso de velocidad constante. La distancia es simplemente una recta de pendiente v. Pues ahí está la solución: la velocidad viene dada por la pendiente de la gráfica de la distancia. Cuando la velocidad no es constante, esa pendiente va variando. Entendemos por pendiente de una gráfica que no es una recta, la pendiente de la recta tangente en ese punto. Una ilustración de este proceso se puede ver en la Figura 14.

Si queremos un poco más de rigor, también se puede aproximar el gráfico de la distancia como unión de líneas de pendiente constante (es decir, de

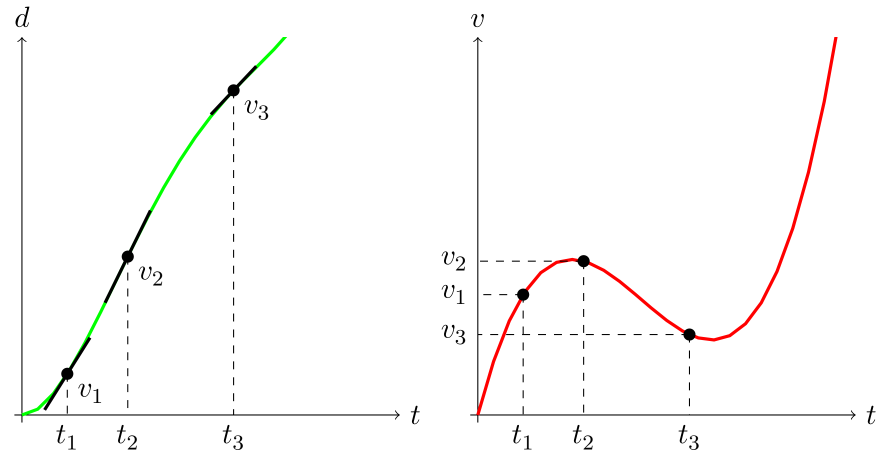


Figura 14. Función velocidad a partir de las pendientes de la función distancia.

segmentos), y en el límite cuando el número de segmentos tiende a infinito, se tiene la situación de la Figura 14.

Ahora sin el coche.

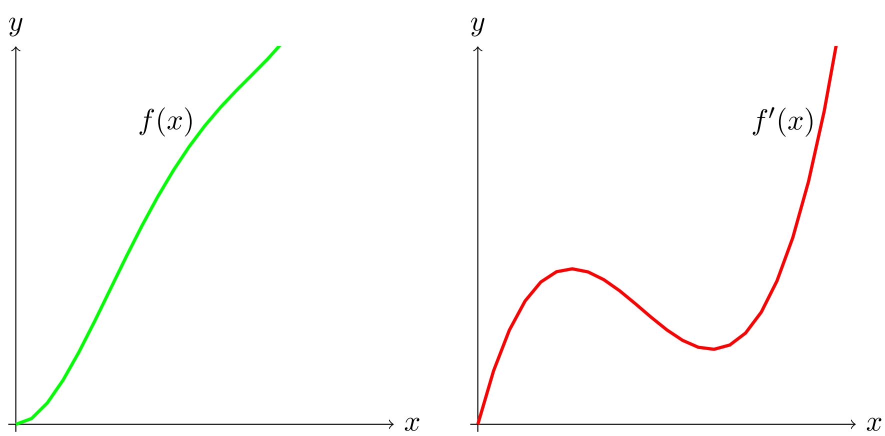


Figura 15. Caso general con una función y su derivada.

En general, el problema fundamental del cálculo infinitesimal consiste en pasar de izquierda a derecha, o de derecha a izquierda, en los gráficos que hemos mostrado hasta ahora. A la izquierda habrá una función $f(x)$, como se muestra en la Figura 15, y a la derecha la que llamaremos su derivada

$f'(x)$, que recordemos es la función que da la pendiente de la recta tangente en cada punto. Para pasar de derecha a izquierda, calculamos el área bajo la curva, que es el proceso inverso de derivar y se conoce como calcular una integral. El sorprendente hecho de que las derivadas y las integrales sean inversas la una de la otra, se conoce como **teorema fundamental del cálculo**.

Veamos ahora cómo obtener la derivada de una función cualquiera. La derivada es la pendiente de la recta tangente, pero ¿cómo calculamos esa pendiente? Consideremos la Figura 16, donde abusando un poco de notación usamos x para referirnos tanto a la variable como a un valor concreto de ésta.

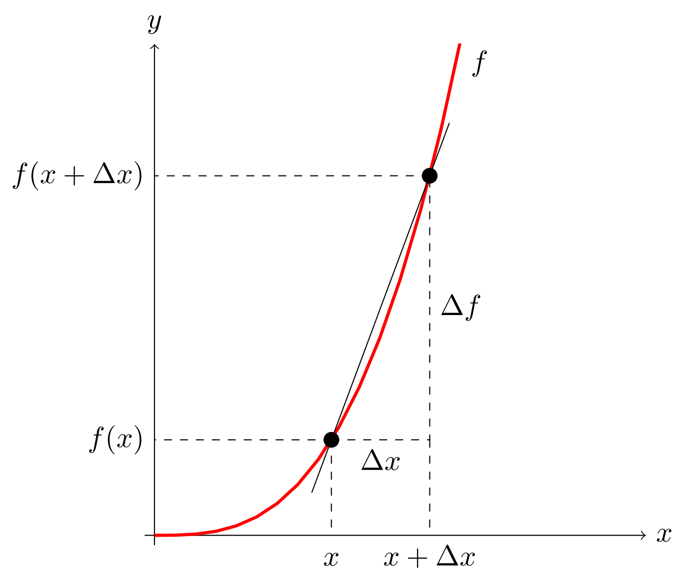


Figura 16. Primera aproximación a la recta tangente.

¿Cuál es la pendiente de la recta dibujada? Es

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ahora bien, queremos saber la pendiente de la recta tangente en x. La recta dibujada no es esa, sino la recta que corta a la función en x y $x + \Delta x$. No obstante, si vamos reduciendo Δx, nos iríamos acercando más y más a la verdadera recta tangente, como se muestra en las gráficas de la Figura 17.

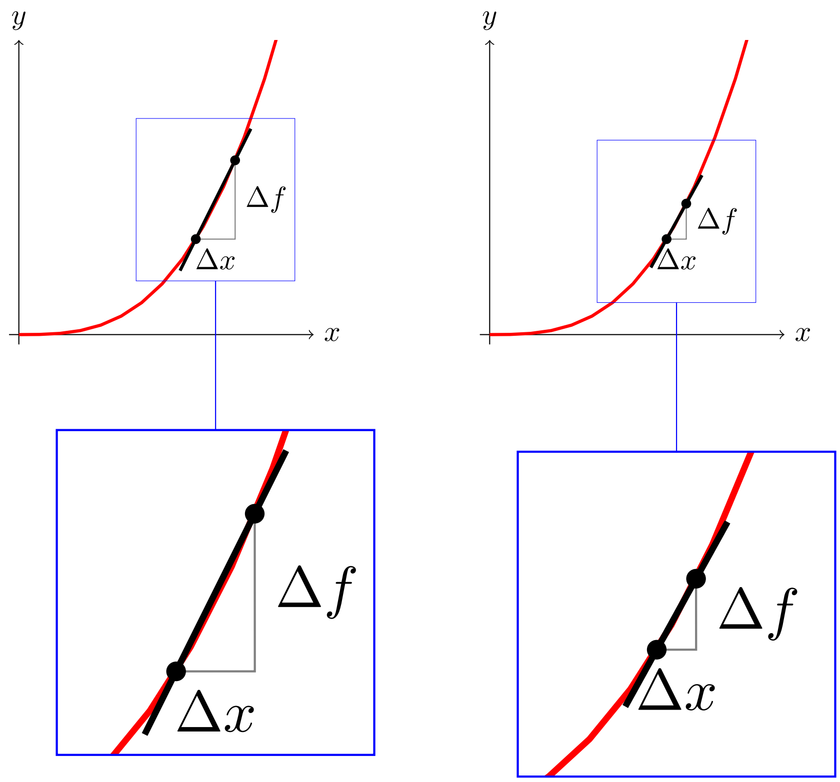


Figura 17. Aproximaciones sucesivas a la recta tangente. La segunda ya es prácticamente indistinguible de la función (y de la verdadera recta tangente), incluso al hacer zoom.

En el límite cuando Δx tiende a cero, tendríamos exactamente la pendiente de la recta tangente. Vamos a ver un ejemplo para que quede más claro, con la función $f(x) = x^2$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x \xrightarrow{\Delta x \to 0} 2x$$

Por tanto, la derivada de x^2 es $2x$.

Ahora que tenemos una definición de derivada, podemos dar una demostración directa del teorema fundamental del cálculo. Consideremos la Figura 18, donde está representada una función f, y donde queremos obtener el área bajo la gráfica entre 0 y x. A la función que da este área la llamamos $A(x)$.

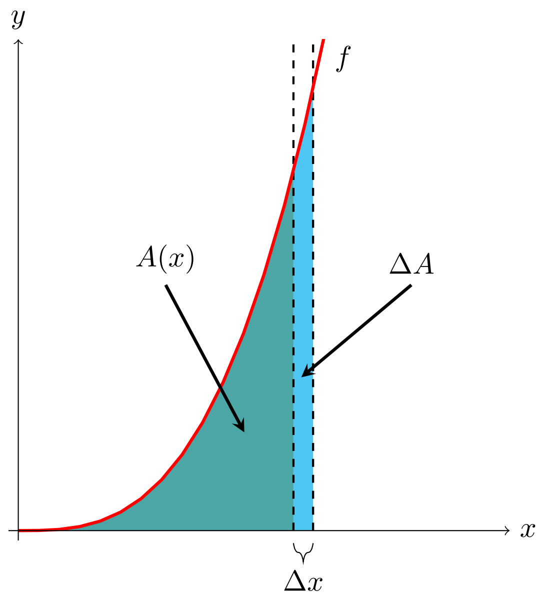


Figura 18. Ayuda visual en la demostración del teorema fundamental del cálculo.

Podemos preguntarnos, una pequeña diferencia en la variable Δx, ¿cómo altera a la función área? El área aumentará en una cantidad también pequeña, ΔA, como se muestra en la figura. Más aún, aunque ese área no es un rectángulo, lo podemos aproximar como uno, de base Δx y altura $f(x)$. La idea es que cuanto más pequeño sea Δx, mejor es esa aproximación. Tenemos por tanto:

$$\Delta A \approx f(x)\Delta x \quad \rightarrow \quad f(x) \approx \frac{\Delta A}{\Delta x}$$

En el límite cuando Δx tiende a cero, tendremos la igualdad:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x}$$

Hemos encontrado por tanto la relación fundamental entre la función que da el área bajo la gráfica, $A(x)$, y la función $f(x)$ en sí misma: $f(x)$ es la derivada de $A(x)$. De nuevo, este resultado es el teorema fundamental del cálculo.

¿Es esta demostración que hemos dado rigurosa? No del todo, pues tiene un hueco: no hemos demostrado que esa aproximación de ΔA como un rectángulo se vuelve arbitrariamente precisa según disminuimos Δx. Para demostrar eso se necesita maquinaria un poco más sofisticada (aunque no tanto si se asume la continuidad de f), que no considero adecuada para 2º de Bachillerato.

Por último, es bueno discutir un poco la notación para las derivadas, pues puede haber algo de confusión con eso. Hemos denotado la derivada de $f(x)$ como $f'(x)$. Esa es la conocida como notación de Lagrange, pero hay otras formas de denotar la derivada. La segunda más importante es la de Leibniz, que codifica muy bien la definición de derivada y se usa mucho en física:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Luego está la notación de Newton, que se usa a veces cuando la variable con respecto a la cual se deriva es el tiempo. Por ejemplo, si hablamos de la coordenada x en función del tiempo, $x(t)$, a la derivada se la denotaría con un punto arriba, $\dot{x}$. Notemos que en este caso es usual omitir la variable, es decir, no se suele poner $\dot{x}(t)$.

Además, en ocasiones se utiliza el símbolo D para denotar la acción de tomar la derivada de una función. Así, $f'(x) = (Df)(x)$. Y con esto concluiría la primera clase magistral.

6.2. Sesión 2: derivadas de funciones elementales

En la segunda clase vamos a demostrar las fórmulas de derivación de funciones elementales, así como las reglas usuales de derivación. Acercaremos a los alumnos al formalismo de las derivadas mediante apoyos visuales que muestren exactamente lo que estamos haciendo.

Empezamos viendo la derivada de x^2 otra vez, pero con el apoyo visual de la Figura 19, para que quede todavía más claro.

Utilizando argumentos y gráficos similares, la idea es demostrar las reglas de derivación de las funciones polinómicas y trigonométricas.

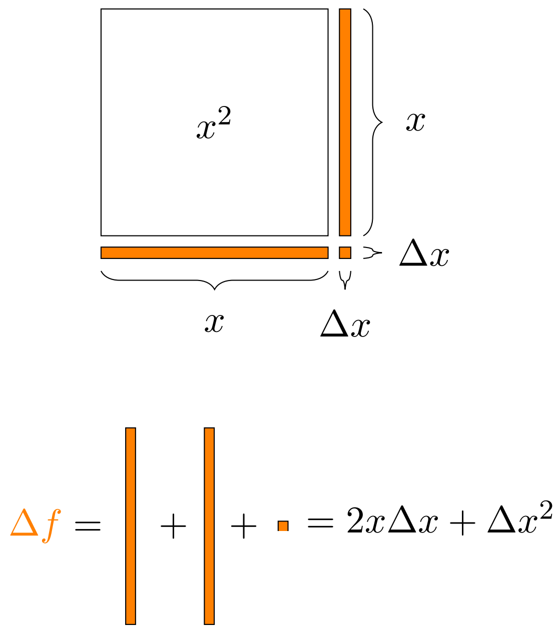


Figura 19. Ayuda visual para la derivada de x^2.

Para la regla de la cadena, haremos una demostración poco formal pero intuitiva:

$$\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(g(x))}{\Delta g(x)} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f(g)}{\mathrm{d}g} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x},$$

donde para ese último paso hemos usado que el límite de un producto es el producto de los límites (si existen). En realidad, esta demostración es válida siempre y cuando Δg no se anule, pero tener en cuenta ese caso requiere de más maquinaria. Haremos demostraciones similares de la regla de la suma y el producto.

El caso de las funciones exponenciales es un poco especial y lo vamos a tratar aparte. La derivada de una función exponencial $f(x) = a^x$ será

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Vemos que, por tanto, la derivada de la función a^x es ella misma pero multiplicada por una constante igual a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

¿Qué podemos decir de esa constante? Pedimos a los alumnos que intenten estimar esa constante para $a = 2$, poniendo valores pequeños para Δx en la calculadora. El resultado encontrado será aproximadamente 0,6931. Después hacemos lo mismo con $a = 3$. La constante correspondiente vale 1,0986. Parece razonable pensar que hay un número entre 2 y 3 tal que esa constante valga 1. Es decir, que hay un número, llamémosle e, entre 2 y 3, tal que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

A este número se le conoce como número de Euler. Y debido a esa característica que lo define, la derivada de e^x resulta ser exactamente e^x, es decir, la función exponencial de base e es su propia derivada. De nuevo, pedimos a los alumnos que intenten encontrar este número con la calculadora, tanteando valores en el límite anterior. Llegarán aproximadamente a 2,71828.

A la función inversa de e^x se la llama logaritmo natural, y se denota por $\ln(x)$. Es decir, $\ln(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{\ln x} = 1$. En este nivel, ya saben de logaritmos y sus propiedades, en particular, que $\ln a^b = b \ln a$. Sabiendo esto, podemos reescribir la función a^x de antes como $\mathrm{e}^{x \ln a}$. Aplicando la regla de la cadena su derivada será $\mathrm{e}^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$. Por tanto la constante misteriosa que nos aparecía antes era justamente $\ln a$.

Por último, calculamos las derivadas de las funciones inversas. En lugar de dar el caso general y luego aplicar la fórmula, enseñamos a los alumnos cómo razonar en cada caso con la regla de la cadena. Empezamos por el logaritmo:

$$\mathrm{e}^{\ln x} = x \quad \to \quad (\mathrm{e}^{\ln x})' = \mathrm{e}^{\ln x}(\ln x)' = 1 \quad \to \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Luego seguimos con las funciones trigonométricas, con ayudas visuales como la de la Figura 20. Para el seno, por ejemplo, tendríamos

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x \quad \to \quad \cos(\operatorname{arc\,sen} x)(\operatorname{arc\,sen} x)' = 1$$
$$\to \quad (\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}.$$

Y de la Figura 20 podemos deducir que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

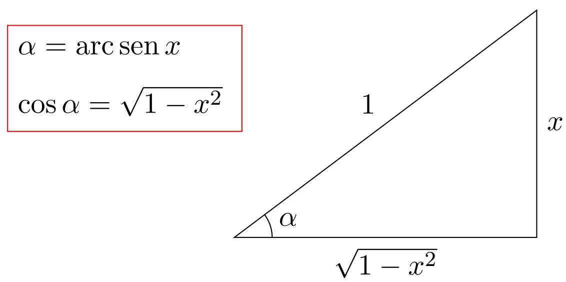


Figura 20. Ayuda visual para la derivada del arco seno.

6.3. Sesión 3: diferenciales y regla de L'Hôpital

Hasta ahora la notación para las derivadas $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ era solo eso, notación. Pero es posible darle una interpretación como cociente de diferenciales, y detrás de esa interpretación está el resultado más importante del cálculo diferencial.

Fijémonos en la Figura 21. Para un cierto x_0 y Δx están señaladas dos cantidades:

- Δf: el cambio en la función f al ir de x_0 a $x_0 + \Delta x$.
- $\mathrm{d}f$: una cantidad que llamaremos diferencial de f (en x_0), y que es igual al cambio en la coordenada y de la recta tangente a f en x_0, al pasar de x_0 a $x_0 + \Delta x$.

¿Cómo se calcula ese diferencial? La recta tangente tendrá una cierta ecuación $y(x)$, que podemos encontrar mediante la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Por supuesto, y_0 es simplemente el valor de f en x_0, y m, como ya hemos

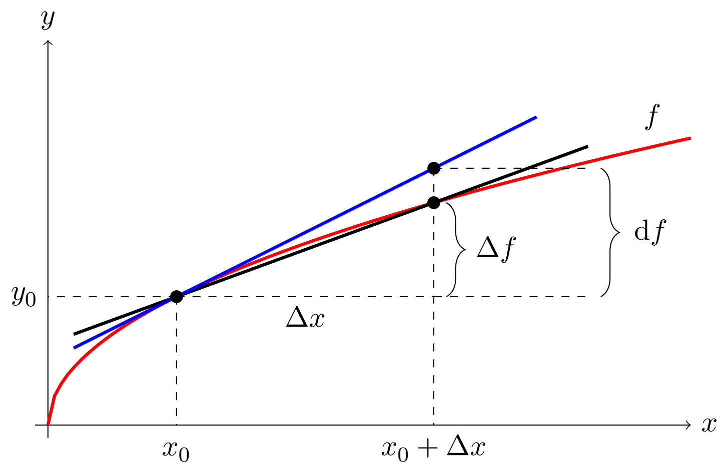


Figura 21. Gráfico de cómo la recta tangente aproxima la función.

visto, es la derivada de f en x_0. Por tanto:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Esta ecuación, aunque correcta, se vuelve mucho más iluminadora cuando escribimos x como $x_0 + \Delta x$. En este caso, vemos que $y - f(x_0)$ es justamente lo que hemos definido como diferencial de f. Usando la notación de Leibniz para las derivadas queda

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Delta x,$$

donde hay que tener presente que tanto el diferencial como la derivada son en un punto en concreto.

Un caso importante es cuando $f(x) = x$. En este caso, $\mathrm{d}f = \mathrm{d}x = \Delta x$. Por tanto se puede reescribir la fórmula anterior como

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

Esta es la fórmula que le da sentido a la notación de Leibniz y a la noción de derivada como cociente de diferenciales.

Más aún, la Figura 21 encierra un hecho **fundamental** del cálculo diferencial. Y es que la diferencia entre Δf y $\mathrm{d}f$ es pequeña. Y lo que es más importante, si vamos disminuyendo Δx, según nos acercamos a x_0, es cada vez más pequeña. Pero no solo es cada vez más pequeña, a base de acercarnos más y más a x_0, ¡podemos hacer que sea tan pequeña como queramos! Este hecho es, en cierto sentido, una forma de **definir** las derivadas. Y es que la recta tangente a una curva en un punto es, precisamente, la recta que más se parece a esa curva cerca de ese punto. Podemos escribir esta idea en una ecuación. Cerca de x_0, $\Delta f \approx \mathrm{d}f$, o lo que es lo mismo:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Esta es la ecuación más importante del cálculo diferencial, pues encierra la noción más general y potente de la derivada (más que como pendiente de la recta tangente, o como tasa de cambio), que puede usarse incluso como definición: la derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 es un número $f'(x_0)$ tal que la recta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es la mejor aproximación lineal de f cerca de x_0.

Obviamente esto es una idea intuitiva, y habría que precisarla. Vamos a hacer justo eso, para dar a los alumnos un entendimiento completo de las derivadas. Sea $y(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$. Diremos que m es la derivada de f en x_0 si, para toda recta $\tilde{y}(x)$, existe un δ tal que $|y(x) - f(x)| \leq |\tilde{y}(x) - f(x)|$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Dar esta definición con tanto detalle puede no ser viable si los alumnos no conocen la definición épsilon-delta de límite, por lo que si no les hemos explicado dicha definición anteriormente en el curso, sería mejor dejarlo en la idea intuitiva capturada por la fórmula (2).

Así mismo, esta noción de derivada, al contrario que la de la pendiente de la recta tangente, es trivial de generalizar a varias variables. La diferencial de una función $\vec{f}(\vec{x})$ en $\vec{x}_0$ es una matriz M tal que $\vec{f}(\vec{x}_0) + M(\vec{x} - \vec{x}_0)$ es la mejor aproximación lineal de $\vec{f}$ cerca de $\vec{x}_0$. Esto debe quedar como un comentario simplemente, pues análisis de varias variables no se da en bachillerato. Aun así, esto conecta con la idea de usar matrices para representar aplicaciones lineales, como hemos hecho en la parte del método Singapur.

Por último para esta sesión, vamos a ver cómo la fórmula (2) nos permite demostrar un resultado extremadamente útil en el cálculo de límites. Supongamos que queremos calcular el límite cuando x tiende a 0 de la función $\operatorname{sen}(x)/x$. Si intentamos sustituir el valor 0 en la x, nos encontramos con una indeterminación de la forma [0/0]. Pero hay un truquito que podemos hacer. La fórmula (2) nos dice que, cerca del 0,

$$\operatorname{sen}(x) \approx \operatorname{sen}(0) + \cos(0)(x-0) = x.$$

Como el límite que estamos tomando es precisamente en 0, podemos sustituir la parte de la izquierda por la de la derecha en el cálculo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

En este caso se dice que hemos usado una equivalencia para resolver el límite. Pero hay un caso particular que es tan importante que merece su propio nombre y demostración. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se hacen 0 en x_0. Entonces el límite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

conduce a una indeterminación. Pero sabemos que, cerca de x_0,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = f'(x_0)(x-x_0),$$

$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) = g'(x_0)(x-x_0).$$

Entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Este resultado se conoce como regla de L'Hôpital, y es bastante general, aunque nuestra demostración intuitiva solo sirve cuando el límite es finito, las derivadas de f y g son continuas en x_0, y $g'(x_0) \neq 0$. Las tres condiciones son innecesarias para que se cumpla la regla de L'Hôpital, pero la demostración sin ellas es más complicada.

Haciendo cambios de variable del tipo $v(x) = 1/f(x)$ o $t = 1/(x-x_0)$, se puede demostrar que la regla también aplica cuando la indeterminación es de la forma $[\infty/\infty]$ y cuando el límite es con x tendiendo a $\pm\infty$.

6.4. Evaluación

Aunque solo hemos considerado 3 sesiones, en ellas se explican algunos de los conceptos más importantes de todo el curso. La evaluación, por tanto, debe estar centrada en comprobar que los alumnos han adquirido esos conceptos y saben trabajar con ellos.

Para tal propósito, se propone una hoja de ejercicios que los alumnos deberán resolver en clase, por grupos (heterogéneos, como siempre). La discusión por grupos es fundamental para asentar los conceptos con la ayuda de sus pares, y nos permite evaluar la competencia específica 9. A parte de eso, los ejercicios evalúan sobre todo las competencias 2 y 3.

El ejercicio 4 puede requerir que recordemos nociones de continuidad del año anterior. Este ejercicio está pensado para que entiendan por qué los números reales son necesarios para tener nociones robustas de continuidad y derivabilidad. Ejercicios como el 5, el 6 y el 7 son imprescindibles para poder evaluar un abanico más amplio de competencias, en concreto la 1, la 5 y la 6, dedicadas al establecimiento de conexiones entre distintas áreas de las matemáticas y a la resolución de problemas de la ciencia y la tecnología.

Hoja de ejercicios:

1. Encuentra la n-ésima derivada de $x\mathrm{e}^{-x}$.
2. Calcula
$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x},$$
donde $P(x)$ es un polinomio de grado n.
3. Demuestra que
$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$
Pista: calcula el logaritmo de ese límite.
4. Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida a trozos como:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 < 2 \\ 2 & \text{si } x^2 > 2 \end{cases}$$

a) Demuestra que f es continua y derivable en todo $\mathbb{Q}$, y que su derivada es 0.

b) ¿No es eso un poco raro?

5. Consideremos el conjunto V de todos los polinomios de grado menor o igual que 2, es decir, $V = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Un elemento cualquiera de este conjunto, ax^2+bx+c, puede verse como un vector de coordenadas (a, b, c) en la base $\{x^2, x, 1\}$. ¿Cuáles son las coordenadas de su derivada? ¿Puedes encontrar una matriz que te lleve a cada vector a su derivada? ¿Por qué o por qué no es posible encontrar dicha matriz?

6. Durante su caída, un paracaidista experimenta tanto la fuerza de la gravedad mg como la resistencia al aire proporcionada por su paracaídas, que es proporcional a la velocidad. Es decir, la ecuación del movimiento $F = ma$ será

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \alpha v.$$

a) Demuestra que $v = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)$ es una solución de dicha ecuación.

b) ¿Cuál es la velocidad terminal del paracaidista?

7. Un estudio de marketing ha encontrado que el precio de una cena a la parrilla p (en euros) puede relacionarse con el número de cenas vendidas x mediante

$$p(x) = 9 - 0{,}03x, \quad 0 \leq x \leq 300.$$

a) ¿Cuáles son los ingresos $I(x)$?

b) Obtén los ingresos marginales, definidos como $IM(x) = I'(x)$.

c) Utiliza la función de ingresos marginales para aproximar los ingresos obtenidos de vender la cena número 101. Compara ese valor con el valor real de la venta.

7. Valoración de las metodologías y comparación entre ellas

Está claro que la lección magistral es la metodología más utilizada por un buen motivo: es excelente para transmitir una gran cantidad de información de manera estructurada y eficiente. Requiere de mucha menos preparación que otras metodologías por parte del profesor, y permite dar el mismo temario en menos tiempo. Pero la eficacia no lo es todo, y esta metodología tiene claras carencias.

Comparándola con el método Singapur, la base pedagógica no es ni de lejos tan sólida. En el método Singapur, hay un proceso, ya estudiado y de eficacia demostrada, de adquisición de conceptos matemáticos, yendo desde lo concreto a lo abstracto. Este proceso está ausente en una clase magistral tradicional, que no usa, por ejemplo, materiales manipulativos. Como resultado, no es de extrañar que los alumnos adquieran errores de concepto graves, y que acaben simplemente memorizando los algoritmos que les permiten alcanzar la respuesta correcta, en lugar de entender los conceptos subyacentes. Además, la lección magistral no prepara a los estudiantes para pensar y resolver problemas de manera autónoma, otro de los grandes desafíos de la educación contemporánea.

Asimismo, hemos visto que el método Singapur puede aplicarse a matemáticas mucho más allá de la educación primaria. En particular, la forma de entender el producto de matrices por vectores como el resultado de aplicar una transformación a un vector, en vez de simplemente dar una fórmula a memorizar, es muy característica de este método y encaja muy bien con el principio de comprensión relacional por encima de la comprensión instrumental.

Además, una de las desventajas más comunes de las metodologías menos tradicionales es el tiempo adicional que suelen requerir para dar el mismo temario, pero en nuestro caso con el método Singapur, hemos notado poca diferencia en el tiempo necesario para cubrir el contenido, comparado con el que se suele usar en una exposición tradicional de los conceptos trabajados. Adicionalmente, aunque el método Singapur requiere una mayor preparación inicial y un enfoque más interactivo en el aula, la profundidad y solidez de la comprensión adquirida por los estudiantes pueden reducir la necesidad de repaso y corrección de errores conceptuales más adelante. En otras palabras, la inversión de tiempo adicional en etapas tempranas podría compensarse con una mayor efectividad en el aprendizaje a largo plazo.

Por su parte, el aprendizaje basado en problemas es la metodología que más pone al estudiante en el centro del proceso educativo, y tiene la ventaja de desarrollar habilidades importantes como el pensamiento autónomo y el trabajo en equipo. Es la metodología más completa en cuanto al desarrollo de las competencias específicas, y acerca a los alumnos a lo que realmente supone hacer matemáticas.

Sin embargo, requiere de mucho tiempo tanto de planificación (encontrar problemas que sirvan adecuadamente para enseñar el temario es complicado) como de ejecución, requiriendo sesiones de planificación, coordinación y, por supuesto, investigación, que pueden alargar mucho el proceso y hacer casi imposible ver todo el temario en un tiempo razonable.

En cuanto a la aplicabilidad al temario, salta a la vista que el tema elegido no encaja del todo bien con la metodología del ABP. Es un tema que requiere de mucho desarrollo teórico, por lo que su enseñanza a través del ABP no es muy orgánica, como se ha podido ver en su correspondiente sección. Pero saber cuándo no funciona bien una metodología es tan importante como saber cuándo sí funciona bien, por lo que esta conclusión es igualmente muy valiosa.

8. Conclusiones

Es evidente que no hay una metodología única que sea la mejor en todos los contextos educativos. La clave está en la flexibilidad y la capacidad del docente para adaptar su enfoque a las necesidades y características específicas de sus estudiantes y del contenido a enseñar. La noción de que la lección magistral es la metodología por defecto y la que debería usarse en casi todas las situaciones debe desaparecer.

Con esto en mente, parece claro que nuestro sistema educativo tiene mucho que ganar si se deja influenciar por las ideas clave del método Singapur. Es un método que tiene el respaldo del sistema curricular entero de un país, y que ya ha demostrado resultados en pruebas internacionales. Sus fundamentos pedagógicos son sólidos y puede usarse para temas tan avanzados como incluso el de matrices en 2º de Bachillerato.

El aprendizaje basado en problemas, por su parte, es más difícil de adoptar, especialmente a la enseñanza de conceptos muy teóricos en matemáticas. Pero es una metodología muy completa y que hay que tener muy presente para las partes más aplicadas, aunque solo se enseñe una parte pequeña del temario usándola, debido a la alta cantidad de tiempo que puede llevar su correcta ejecución.

Bibliografía

Bligh, D. A. (1998). *What's the Use of Lectures?* Intellect.

Decreto 40/2022 de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León, 190.* (2022).

Gallo, H. G., Verón, C. A., & Herrera, C. G. R. (2019). Interpretation of linear transformations in the plane using GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, *24*, 32-37.

Hall, A. (1970). Genealogy of Pythagorean Triads. *The Mathematical Gazette*, *54*(390), 377-379.

Linares, A. Z. (2020). El método Singapur para el aprendizaje de las matemáticas. Enfoque y concreción de un estilo de aprendizaje. *Revista INFAD de Psicología. International Journal of Developmental and Educational Psychology*, *1*(2), 263-274.

Munz, P., Hudea, I., Imad, J., & Smith, R. (2009). When zombies attack!: mathematical modelling of an outbreak of zombie infection. Infectious Disease Modelling Research Progress, 133-150.

Problem-Based Learning. (s.f.). Universidad de Maastricht. Consultado el 26 de mayo de 2024, desde www.maastrichtuniversity.nl/education/why-um/problem-based-learning

Zambrano, C. A., & Gangotena, M. T. (2013). *Desarrollo de una estrategia de planteo y resolución de problemas de las operaciones matriciales por medio de la metodología del aprendizaje basado en problemas, para los alumnos de bachillerato* [Trabajo Fin de Grado]. Escuela Superior Politécnica del Litoral.