UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. de Matemática Aplicada

LAS MATEMÁTICAS DE LA EDUCACION SECUNDARIA OBLIGATORIA ESCONDIDAS EN EL ARTE DE LA PAPIROFLEXIA

Trabajo Final de Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Especialidad de Matemáticas.

Alumna: **Lucía Esteban González.**

Tutor: **Víctor Gatón Bustillo.**

Valladolid, julio 2024

ÍNDICE

1. Introducción

Durante el Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, se ha incidido mucho en el uso de diferentes recursos, herramientas y materiales didácticos como complemento en la educación y aprendizaje de las matemáticas. Sus aplicaciones van desde punto de partida en la construcción de conocimiento hasta como ayudas para una mejor atención a la diversidad. No obstante, ha sido realmente en las prácticas donde he podido darme cuenta de su gran importancia.

Por dicho motivo, con este Trabajo Fin de Máster (TFM) busco dar a conocer otras formas de enseñar las matemáticas más allá del uso exclusivo del libro de texto y las clases magistrales. Se pretende mostrar que hay otras formas de impartir conocimiento mediante el uso de diversos materiales y recursos didácticos y, aunque la evolución de la tecnología ha revolucionado numerosos ámbitos (incluidos el de la educación), no hace falta buscar lo más novedoso y/o caro para poder ofrecer a los alumnos materiales manipulativos en el aula, que ayuden a acercarles a los contenidos matemáticos.

Por ejemplo, el papel es un recurso al alcance de todos. Con la papiroflexia es posible conseguir que los alumnos sean creadores de su propio conocimiento mediante la manipulación, la observación y la investigación. Todo esto les ayuda a comprender mejor los conceptos abstractos de las matemáticas, ejercita su capacidad de atención y motivación, mejora su destreza manual, estimula la creatividad y favorece la memoria. En resumen, aporta un aprendizaje muy significativo.

Es por ello por lo que este TFM se orienta al empleo de la papiroflexia como recurso didáctico en las Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria.

El TFM se va a estructurar de la siguiente forma. En primer lugar, se comienza por una fundamentación teórica con una breve mención al origen e historia de la papiroflexia, los distintos tipos que existen y finalizando con sus aplicaciones en el mundo moderno. Así mismo, se establecerá una relación formal entre la papiroflexia y las matemáticas, a través de los axiomas de Hatori-Huzita, la simbología empleada y los plegados existentes.

Posteriormente, se describirá el papel de la papiroflexia como herramienta didáctica en la educación y, tomando la nueva Ley Orgánica de educación 3/2020 (LOMLOE), como punto de partida, se detallarán las competencias que se desarrollan, así como el uso de diferentes metodologías sin obviar las ventajas e inconvenientes que puedan presentar.

Tras analizar el currículo de matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), se propondrán una serie de actividades empleables en posibles situaciones de aprendizaje de diferentes niveles de la E.S.O.

Para finalizar, se hará una breve alusión al empleo de la papiroflexia durante una de mis intervenciones en las prácticas del Máster junto con una reflexión a modo de conclusiones.

Por último, quiero mencionar que para el desarrollo de este trabajo me ha sido de gran ayuda los conocimientos y competencias adquiridas a través de las diferentes asignaturas del Máster.

2. Fundamentación teórica

2.1. Historia y origen de la papiroflexia

Según la Real Academia de la lengua española, "la papiroflexia se define como el arte y habilidad de dar a un trozo de papel, doblándolo convenientemente, la forma de determinados seres u objetos". (Real Academia Española, s.f.). La palabra papiroflexia proviene del latín papyrus, "papel" y flexus, "doblado".

En muchos casos, las palabras papiroflexia y origami, se emplean para referirse indistintamente a un mismo concepto. Sin embargo, algunos señalan ligeras diferencias, ya que el origami se percibe como un arte con cierto carácter espiritual, en el que en el doblado del papel para elaborar una figura no pueden utilizarse otro tipo de herramientas (tijeras, pegamento, etc.), mientras que la papiroflexia sí que lo permite.

A pesar de que fue en Japón donde se comenzó a emplear la palabra origami, se cree que la historia de la papiroflexia se inició en China en torno al siglo I a.C, con los orígenes del papel, atribuido a Tsái Lun en el año 105 a.C. (Zaragoza, 2013)

La evolución del plegado del papel parece haberse desarrollado en paralelo tanto en oriente como en occidente, sin haberse producido influencias entre ellas hasta finales del siglo XIX, con la apertura de Japón al resto del mundo. En los plegados occidentales parecen predominar los pliegues en 45º, mientras que en los orientales los más comunes son en 22.5º. No obstante, es a partir de la década de los 90, con la llegada de internet y la globalización, se produce una mayor evolución de la papiroflexia.

Si nos centramos en la evolución en oriente, de China se conocen los folletos Dunhuang (907-960), donde aparecen diferentes formas de plegado de hojas para crear libros, pero no hay modelos concretos de plegado. De Japón se conoce que la escuela de etiqueta Ogasawara del periodo Muromachi (XIV-XVI) contaba con plegados protocolarios y ceremoniales del papel. En el siglo XVIII aparecen los primeros modelos documentados y se publica el primer libro *Hiden Sembazuru Orikata*, con cortes y modelos de cientos de grullas. Otro libro con desarrollos y modelos de gran belleza es *Kan-no-mado* del siglo XIX.

Mientras tanto en occidente, a través de las rutas comerciales como la ruta de la Seda, se trajo el papel en el siglo XI y XII. Pese a ello, se continuó utilizando ampliamente el pergamino y el papiro hasta que, por motivos económicos, el papel acabo sustituyendo a los anteriores y conviene reseñar que la papiroflexia llegaría más adelante.

El papel llegó en el siglo VIII al mundo islámico a través de Samarkanda y, desde allí, se fue extendiendo por Asia menor, el Norte de África, y Europa. Los plegados simbólicos en occidente son prácticamente inexistentes y predominan los utilitarios, a modo de envoltorios, mientras que el uso recreativo y artístico comienza a partir del siglo XVII. Se cree que por ser utilizado como un medio económico para la práctica y estudio del plegado de servilletas que se exhibía en las mesas aristocráticas del siglo XVI y XVII. (Mürice, 2012).

La primera documentación de modelos de papiroflexia en occidente viene de la mano del libro *Hocus Pocus improved* del s. XVIII.

Conviene mencionar a varios personajes europeos que destacaron en el plegado del papel, como es el caso del educador alemán Friedrich Fröbel (1782-1852), quien incorporó la papiroflexia a modo de juegos en la enseñanza para niños, reconociendo entonces el carácter enriquecedor para el desarrollo de los procesos cognitivos del aprendizaje. Sin embargo, fueron Akira Yoshizawa y Sand Randlett quienes plasmaron los pasos de la creación de sus figuras.

En lo que a España se refiere, quien realmente propulsó la papiroflexia fue el filósofo y escritor Miguel de Unamuno (1864, Bilbao). No perdía oportunidad de reclamar la importancia de la *cocotología*, como él la llamaba. En 1902 escribe *Amor y pedagogía*, y al final de la obra presenta unos apuntes para un tratado de cocotología; en el mismo año publicaría *Apuntes para un tratado de cocotología*. A él se le atribuye la construcción de la pajarita, referente en la papiroflexia en España.

Figura 1: Miguel de Unamuno.
(Fuente (PD): https://es.wikipedia.org)

2.2. Clasificación de los distintos tipos de papiroflexia

Existe una gran cantidad de tipologías de origami según el tipo de plegado, el papel que se utiliza, etc. Por ejemplo, si atendemos a la forma del papel, podemos clasificarlo en *tiras*, si se parte de una tira de papel*;* o *papel completo*, cuando se parte de un trozo de papel en forma cuadrangular, rectangular o triangular. (Lázaro, 2021).

Una clasificación bastante extendida es la siguiente:

- Origami clásico: Partiendo de un papel cuadrado, éste se transforma en una figura según su patrón de plegado. Según afirman los puristas, no se utiliza ni pegamento ni cortes.

- Origami de acción: En este tipo de origami se trabajan figuras que tienen movimiento cuando se manipulan, como aquellas que vuelan al ser lanzadas o saltan al ser manipuladas.

- Origami modular: Consiste en crear varios módulos idénticos que se acoplan entre si con el fin de crear una nueva figura única y compleja. En este tipo de origami se suele utilizar algún tipo de hilo o pegamento, aunque puede no ser necesario. El módulo Sonobè puede considerarse el punto de origen de la papiroflexia modular, cuyo fundador fue Mitsunobu Sonobè.

- Origami con plegado en húmedo: Se caracteriza porque se humedece el papel en busca de la creación de figuras con curvas. Al humedecerse, permite ser moldeado a la forma deseada y aportar mayor realismo.
- Origami puro o pureland: Solo se permite hacer un único pliegue a la vez, y no pueden utilizarse pliegues complejos. Es decir, solo se permiten pliegues únicos, no hay pliegues invertidos. (Ver Tabla 3).
- Origami teselado: Consiste en la repetición de figuras geométricas que cubren una superficie sin dejar huecos. Representa generalmente figuras abstractas que siguen un patrón determinado.

2.3. <u>Simbología y plegado</u>

Existe una simbología estándar, aceptada por la comunidad internacional, para describir los plegados de papel. (Pardo, 2003).

Respecto a la posición del papel, cuando el papel tiene un color distinto en cada cara, por ejemplo una cara blanca (color estándar) y la otra roja, si el doblez se quiere realizar cara blanca sobre cara roja, se indica como está representado en la imagen a la izquierda de la Figura 2 y, en caso contrario, como está indicado en la imagen central de la Figura 2. En el caso de que el papel sea monocromático, se indica simplemente el doblez como en la Figura 2 (derecha).

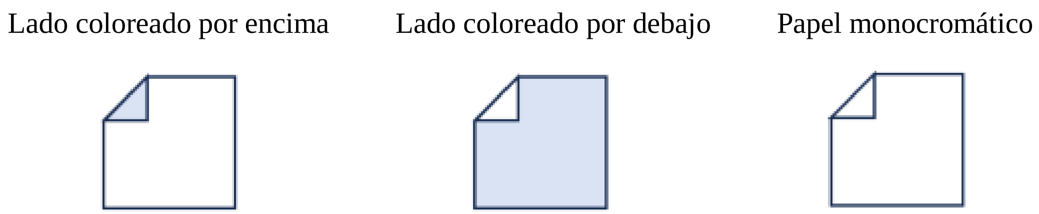


Figura 2: Simbología respecto la posición de papel. (Fuente: elaboración propia)

Los pliegues y las direcciones se representan mediante líneas y flechas. El significado de cada símbolo está recogido en la Tabla 1. (Ensamble, 2009)

	Bordes de una hoja de papel.
	Indica un pliegue. Lugar donde el papel se dobla y desdobla.
	Pliegue de valle, se hunde en el papel.
	Pliegue montaña, se levanta sobre el papel.
	Muestra la dirección en un pliegue valle.

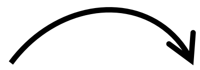
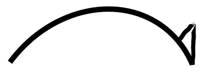
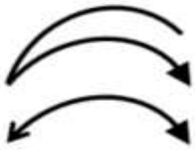
	Muestra la dirección con un pliegue valle o pliegue montaña.
	Muestra la dirección en los pliegues montaña.
	Doblar y desplegar.

Tabla 1: Líneas y flechas. (Fuente: elaboración propia)

A cada tipo de pliegue, se le asocia gráficamente un tipo de línea y flecha.

En relación a los diferentes dobleces, existen dos pliegues básicos que se deben conocer, los cuales se describen en la Tabla 2.

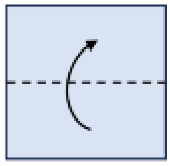
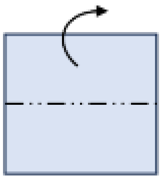
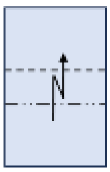
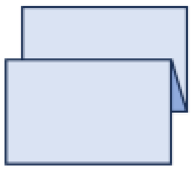
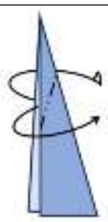
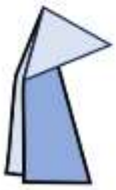
		Pliegue valle. Consiste en doblar el papel de forma que nos quede el “hundimiento” hacia abajo formando una “V”.
		Pliegue monte o pliegue montaña, es lo contrario de un pliegue valle.

Tabla 2: Pliegues básicos. (Fuente: elaboración propia)

A continuación, se destacan otros pliegues y símbolos que se deben concocer.

		Pliegue escalonado o en zig-zag
		Pliegue vuelto o invertido externo

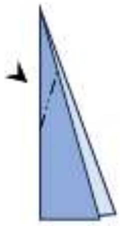
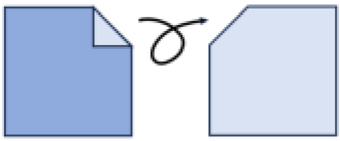
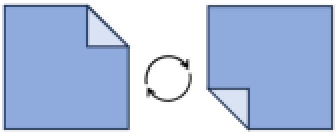
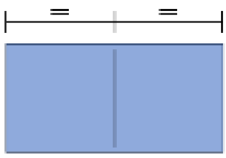
		Pliegue hendido, o hueco, o inverso interior, o invertido
		Dar la vuelta al papel
		Girar el papel
		Partes iguales

Tabla 3: Otros pliegues y símbolos importantes. (Fuente: elaboración propia)

2.4. <u>Aplicaciones de la papiroflexia en el mundo actual</u>

Actualmente, el arte del plegado de papel se ha convertido en inspiración para importantes innovaciones tecnológicas. Las características de la papiroflexia le atribuyen un enorme potencial en aplicaciones científicas y tecnológicas. Son sus principios matemáticos los que la hacen aplicable a la ciencia y la industria.

Las matemáticas detrás de los patrones de plegado abren un gran abanico de opciones para manipular la forma, el movimiento y las propiedades de numerosos materiales. Podemos encontrar sus aplicaciones en nuestro día a día; en las cajas de cartón; estructuras tipo panal que ayudan a proteger el contenido y a reducir vibraciones; el plegado de los airbags en los automóviles,

La capacidad de plegar estructuras de dos dimensiones en tres dimensiones es muy utilizada en proyectos espaciales, donde es crítico mantener cargas útiles pequeñas y se buscan dispositivos plegados y compactos que puedan expandirse llegado el momento. Por ejemplo, para desarrollar un escudo contra la radiación para proteger las naves espaciales tripuladas en el espacio. De la misma forma, los paneles de los satélites se han inspirado en origamis. El modelo de plegado más conocido para este uso es el pliegue de Miura.

Figura 3: Aura satelite (Fuente(PD):https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aura_satellite.jpg Autor:Nasa)

También se pueden encontrar aplicaciones en el campo de la medicina. Por ejemplo, endoprótesis vasculares, robots plegados dentro de pastillas que al ingerirse se despliegan y diversos dispositivos médicos. Más aún, basándose en los patrones de plegado y, junto con la inteligencia artificial, se busca comprender, por ejemplo, el plegamiento de las proteínas. (Sanchis, 2023).

Además, con la papiroflexia se estimula la salud físico-mental, ya que ayuda a mejorar la coordinación óculo-manual, la coordinación motora fina, la memoria, y la concentración. Es por ello por lo que se utiliza en diversos contextos terapéuticos, como la rehabilitación de lesiones y derrames cerebrales, debido a que el empleo de las manos estimula algunas áreas del cerebro.

2.5. <u>La papiroflexia y las matemáticas</u>

Como propone Royo-Prieto, (2022), podemos remarcar tres aspectos básicos donde las matemáticas aparecen en la papiroflexia:

-Axiomas de constructibilidad. Teoría de puntos construibles con origami, que va de la mano a la teoría existente de constructibilidad con regla y compás.

-Diseño de figuras. Métodos matemáticos para la creación de figuras en papiroflexia.

-Papiroflexia modular. representación de poliedros y figuras geométricas.

2.5.1. <u>Axiomas de constructibilidad.</u>

Hay una relación evidente entre la papiroflexia y las matemáticas. Una forma sencilla de darse cuenta de ello es desdoblando y abriendo una figura previamente plegada. De esta forma, podemos ver cómo hemos pasado de una hoja cuadrada inicial, sin nada, a un mapa o patrón de cicatrices que cumple unas ciertas propiedades, creando figuras geométricas. Aquí hay geometría y, por tanto, matemáticas.

Por ejemplo, deshaciendo una pajarita (ver Figura 4), se aprecia cómo aparecen distintos triángulos y cuadriláteros. (Ver Figuras 5 y 6). (Giménez, 2023).

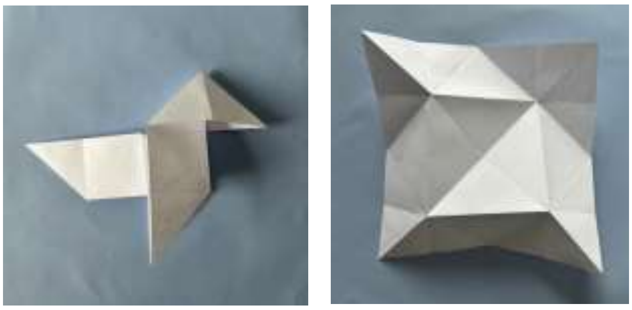


Figura 4: Pajarita de papel y su mapa de pliegues. (Fuente: elaboración propia)

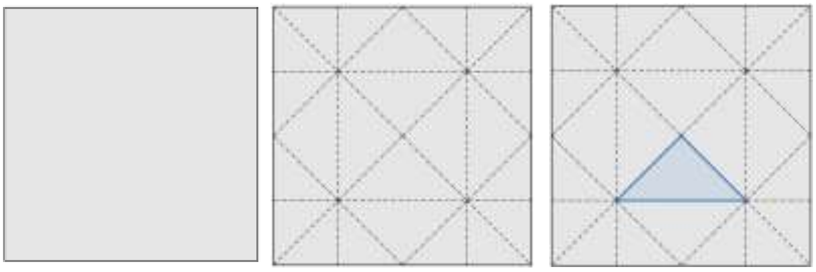


Figura 5: Mapa de pliegues de una pajarita de papel. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

En la Figura 6 (centro), se puede observar cómo ha aparecido un cuadrado de lado la mitad de la longitud del papel original (y área 1/4). Pero no son los únicos cuadrados. En la Figura 6 (izquierda) se puede observar que hay un cuadrado de lado $(\sqrt{2}/2)$ veces el lado del papel original y, en la Figura 6 (derecha) un cuadrado de lado la mitad de éste último.

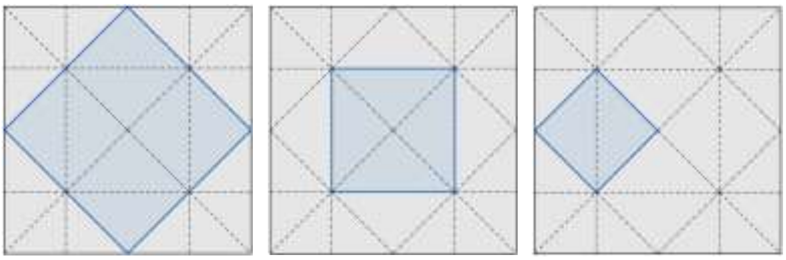


Figura 6: Mapa de pliegues de una pajarita de papel. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

También se puede observar el centro de una simetría central en la Figura 7 (izquierda) y los ejes de dos simetrías axiales en la Figura 7 (centro y derecha).

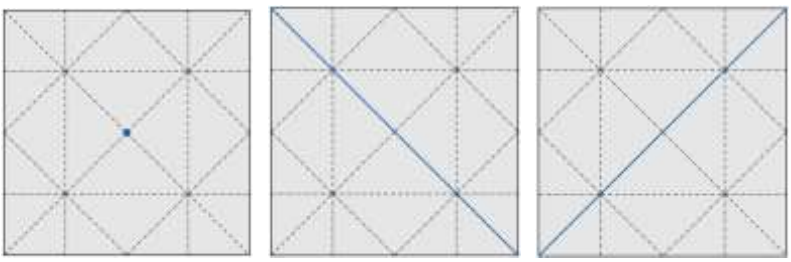


Figura 7: Mapa de pliegues de una pajarita de papel. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

La relación entre las matemáticas y la papiroflexia es bidireccional. Por ejemplo, cuando doblamos un cuadrado de papel, lo que se hace es usar propiedades geométricas del cuadrado para obtener nuestra pajarita.

Pero no solo las matemáticas nos ayudan a hacer papiroflexia como en este caso, sino que también con la papiroflexia podemos hacer matemáticas. Por ejemplo, cuando doblamos una hoja de papel creamos simetrías, donde cada pliegue es el eje de una simetría.

Para hacer matemáticas con papiroflexia hay que ser muy precisos y es importante interpretar geométricamente lo que se obtiene al realizar cada pliegue. Por ello es importante definir primero los procedimientos de plegado que permiten hacer matemáticas con papiroflexia. Esto está formalizado y recogido en los *Axiomas de Huzita-Hatori* siendo los seis primeros descritos por el matemático Humiaki Huzita en 1989 y el séptimo añadido por Koshiro Hatori en 2001.

Este conjunto de axiomas es completo. Es decir, no se pueden encontrar nuevas formas de definir más líneas de pliegue con un único doblez que no sean equivalentes al conjunto referido en los siete axiomas empleándose los pliegues referidos en ellos tantas veces cómo se necesiten. El primero en dar constancia a esto fue Lang (2004).

Axioma 1 (O_1): Dados dos puntos en la hoja P_1 y P_2, donde $P_1 \neq P_2$, doblamos la hoja como se indica en la Figura 8 para realizar el único pliegue posible que obtiene la **recta que pasa por** esos **dos puntos**.

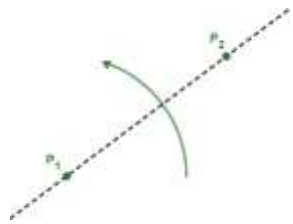


Figura 8: Axioma 1 (O_1). (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Axioma 2 (O_2): Axioma 2 (O_2): Dados dos puntos P_1 y P_2, siendo $P_1 \neq P_2$, doblamos en el único pliegue que existe llevando un punto sobre otro como se ve en la Figura 9 para obtener la **mediatriz del segmento que une P_1 y P_2.**

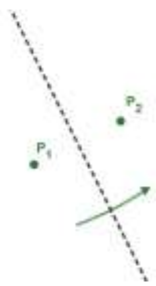


Figura 9: Axioma 2 (O_2). (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Si aplicásemos los axiomas (O_1 y O_2), se obtiene el punto medio del segmento $\underline{P_1P_2}$.

Axioma 3 (O_3): Dadas dos rectas (pliegues o borde de la hoja) l_1 y l_2, siendo $l_1 \neq l_2$, realizando el doblez que lleva l_1 sobre l_2 indicado en la Figura 10 se obtiene la **bisectriz de un ángulo**. Existen uno o dos posibles dobleces dependiendo de si las dos rectas son paralelas o secantes respectivamente.

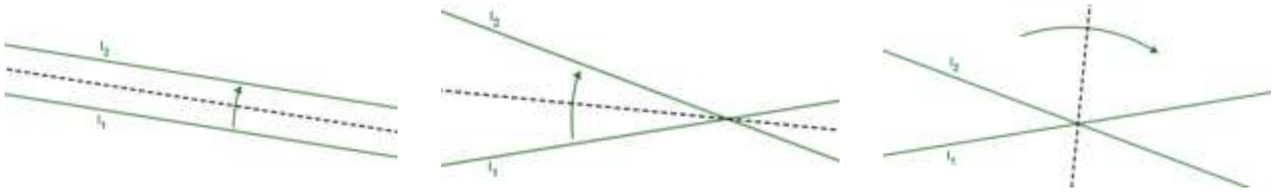


Figura 10: Axioma 3 (O_3). (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Axioma 4 (O_4): Dados un punto P_1 y una recta l_1, realizando el único pliegue perpendicular a l_1 y que pase por p_1, como se muestra en la Figura 11, se construye una **recta perpendicular** a l_1 y que pasa por P_1.

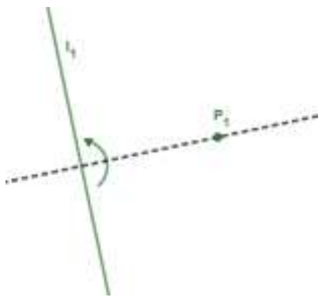


Figura 11: Axioma 4 (O_4). (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Axioma 5 (O_5): Dados dos puntos P_1 y P_2, siendo $P_1 \neq P_2$, y una recta l_1 con $P_1 \notin l_1$, realizando el pliegue que lleve P_1 sobre l_1 y pase por P_2 como se ve en la Figura 12, se obtienen las rectas que pasan por P_2 y son tangentes a la parábola de directriz l_1 y foco P_1. Según estén colocados los puntos y la recta, este pliegue podría no poderse realizar, o tener una o dos formas de hacerlo. Esto se debe a que P_2 se mantiene fijo, mientras que P1 se mueve sobre l_1, recorriendo un movimiento circular hasta coincidir con un punto sobre l_1. Debido a este motivo, existen tantas formas de realizar el pliegue, como puntos de intersección entre la circunferencia de centro P_2 y radio P_1P_2 con la recta l_1.

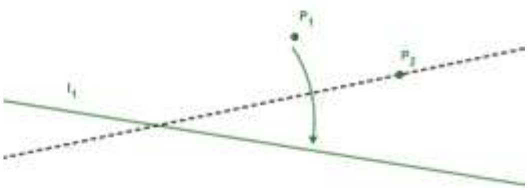


Figura 12: Axioma 5 (O_5). (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Axioma 6 (O_6): Dadas dos rectas l_1 y l_2, y dos puntos P_1 y P_2, siendo $P_1 \neq P_2$, con $P_1 \notin l_1$ y $P_2 \notin l_2$, realizando el pliegue que se muestra en la Figura 13, que lleva P_1 sobre l_1 y P_2 sobre l_2 se obtienen las rectas tangentes, por un lado a la parábola de directriz l_1 y foco P_1 y, por el otro, a la parábola de directriz l_2 y foco P_2. Puede haber 0, 1, 2 o 3 formas de hacerlo.

Por ejemplo, si las rectas son paralelas y los dos puntos están entre las dos rectas no hay solución posible.

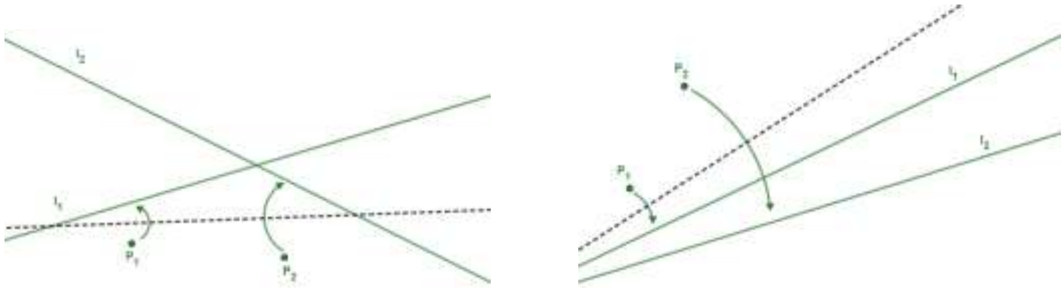


Figura 13: Axioma 6 (O_6). (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Axioma 7 (O_7): Dadas dos rectas l_1 y l_2, siendo $l_1 \neq l_2$ y un punto $P \notin l_1$, realizando el pliegue mostrado en la Figura 14, se obtiene la recta tangente a la parábola de directriz l_1 y foco P_1 que es perpendicular a l_2. Si las rectas son paralelas no se puede realizar este doblez y, en caso de no serlo, hay un único pliegue posible.

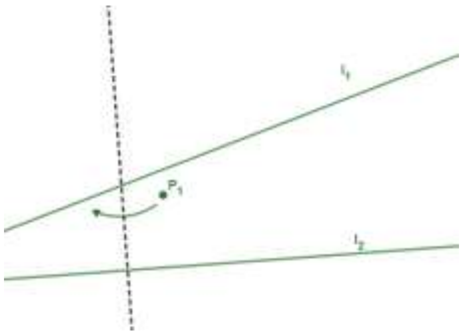


Figura 14: Axioma 7 (O_7). (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Si continuamos ilustrando esto con las construcciones geométricas elementales, ¿qué tipo de construcciones geométricas podemos realizar siguiendo estas reglas? Construimos una recta, una perpendicular a una recta dada, una paralela a una recta dada, la mediatriz de un segmento dado o de dos puntos, la bisectriz de un ángulo, etc. Sin entrar en detalle, se puede intuir que por origami los enteros ($\mathbb{Z}$) son construibles, así mismo los racionales ($\mathbb{Q}$) y que se podrá sumar y multiplicar números construibles por origami (aquellos números obtenibles mediante dobleces).

Los axiomas O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 y O_7, son equiparables a las construcciones de Geometría Euclídea realizadas con regla y compás. Es decir, si nos olvidamos del axioma O_6, la papiroflexia y la regla y compás son herramientas equivalentes, debido a que las construcciones geométricas que realizamos con ambas son las mismas.

Sin embargo, conviene señalar que la Geometría de regla y compás está incluida, pero no es equivalente a la Geometría obtenida con papiroflexia. El axioma (O_6) de la papiroflexia la convierte en una Geometría más "potente".

Esto se puede ver en el hecho de que hay problemas que se pueden resolver con origami, pero no con regla y compas. Así, de los tres problemas de la geometría clásica griega que no son resolubles con regla y compás: *Trisección del ángulo, Duplicación del cubo y Cuadratura del círculo*, gracias a este axioma O_6, puede darse solución a los dos primeros mediante la papiroflexia.

- Trisección del ángulo

Dividir un ángulo dado (delimitado por dos rectas) en tres ángulos iguales, en general no es posible utilizando solamente una regla y un compás.

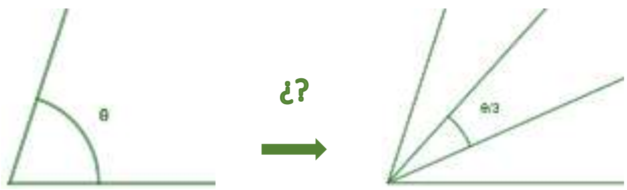


Figura 15: Trisección del ángulo (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Si partimos de un ángulo cualquiera θ, se quiere poder construir $\frac{\theta}{3}$. Por ejemplo, si pensamos en el caso particular donde $\theta = \frac{\pi}{3}$ (60º), el ángulo $\frac{\pi}{9}$ (20º) es el ángulo buscado. Este ángulo no es construible por regla y compás. Sin embargo, utilizando papiroflexia, este problema si se puede resolver. (Giménez, 2023).

Partiendo de una hoja rectangular (ver Figura 16), se fija el vértice inferior izquierda P_2 y se realiza un doblez de forma que P_2 esté en la recta obtenida. Se considera el ángulo θ formado por la recta obtenida del doblez y el lado inferior de la hoja.

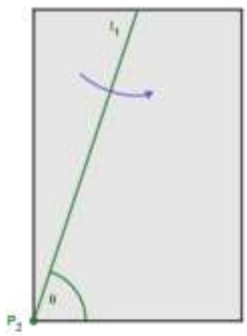


Figura 16: Trisección del ángulo. Paso 1. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Una vez definido el ángulo θ, se busca obtener un ángulo α, que será $\frac{1}{3}$ exacto del ángulo inicial.

Para ello se elige otro punto P_1 en el lateral izquierdo de nuestra hoja y se aplica el axioma O_4 para obtener un pliegue que sea perpendicular al borde izquierdo, como puede verse en la Figura 17. Por tanto, también será paralelo al borde inferior, y que pase por P_1.

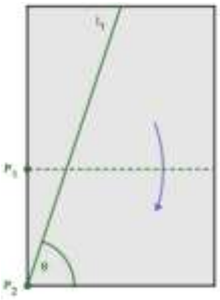


Figura 17: Trisección del ángulo. Paso 2. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

El siguiente paso se basa en construir una recta que sea paralela a igual distancia del último pliegue y el borde inferior de la hoja. Esto se consigue aplicando el axioma O_3 para obtener el pliegue también perpendicular al borde izquierdo, por tanto, paralelo al pliegue anterior, y que se sitúe a igual distancia del pliegue anterior y del borde inferior. Se denota este pliegue por l_2, tal y como se aprecia en la Figura 18.

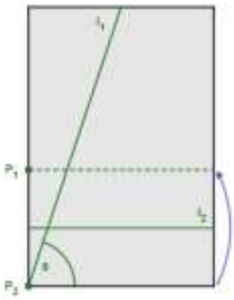


Figura 18: Trisección del ángulo. Paso 3. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Finalmente se aplica el axioma O_6 para llevar el punto P_2 sobre la recta l_2, y simultáneamente, el punto P_1 sobre la recta l_1 (ver Figura 19). Se denota por P_3 el punto de l_2 donde ha ido a parar P_2 y se puede afirmar que el ángulo α formado por la recta que une P_2 y P_3 y el borde inferior de la hoja es exactamente $\alpha = \frac{\theta}{3}$.

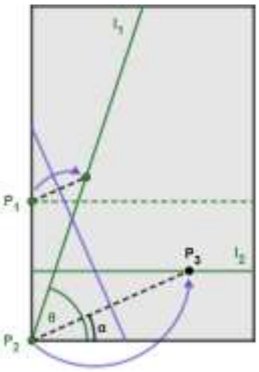


Figura 19: Trisección del ángulo. Paso 4. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Para poderlo justificar, se procede a localizar α en distintos lugares de la construcción, y a demostrar porque α es exactamente $\frac{1}{3}$ del ángulo inicial θ.

Como se tiene una recta oblicua secante con dos paralelas, se sabe que ese ángulo también es α, como se indica en la Figura 20.

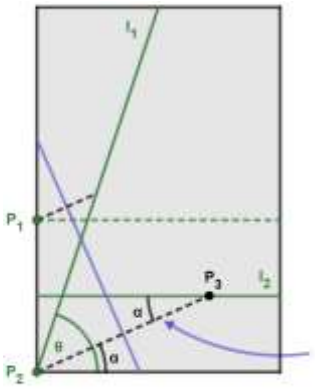


Figura 20: Trisección del ángulo. Paso 5. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Luego, como el pliegue horizontal l_2 es un eje de simetría, está a igual distancia de las otras dos paralelas, el ángulo α que está debajo, también se reproduce arriba. (Ver Figura 21).

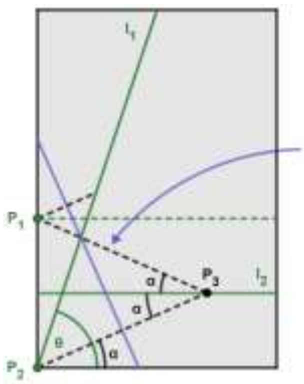


Figura 21: Trisección del ángulo. Paso 6. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Para finalizar, si se tiene en cuenta el pliegue del O_6 como eje de simetría, 2α se reproduce también en la esquina inferior izquierda, como se aprecia en la Figura 22, y se puede concluir que $2\alpha + \alpha = \theta$, es decir que $\alpha = \frac{\theta}{3}$, de tal manera que esta construcción es exacta y queda demostrado por el argumento anterior.

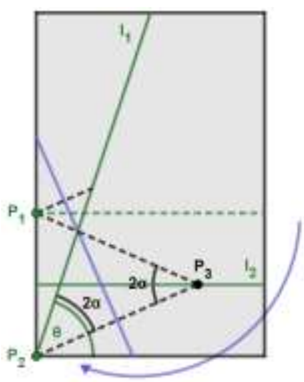


Figura 22: Trisección del ángulo. Paso 7. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

- Duplicación del cubo

En este problema, dado un cubo, se busca encontrar el lado de un nuevo cubo de volumen el doble del cubo original. Este problema es equivalente a, fijado un segmento al que se le asigna una longitud de 1, encontrar el segmento de longitud $\sqrt[3]{2}$.

Wantzel (1837), demuestra que no es construible con regla y compás. Sin embargo, si es posible mediante papiroflexia.

Partiendo de una hoja cuadrada, se divide en tres tiras del mismo con papiroflexia, y se lleva la esquina inferior izquierda sobre un punto del borde superior como se puede observar en la Figura 23, denotándolo como C, y el punto de abajo en el pliegue que delimita la primera tira, se lleva sobre el pliegue que delimita la segunda (y tercera) tira, obteniendo el punto I. Esto es de nuevo el axioma O_6. (Giménez, 2023)

Entonces, la proporción entre la distancia CA y la distancia BC es exactamente $\sqrt[3]{2}$. CA=$\sqrt[3]{2}$ x BC.

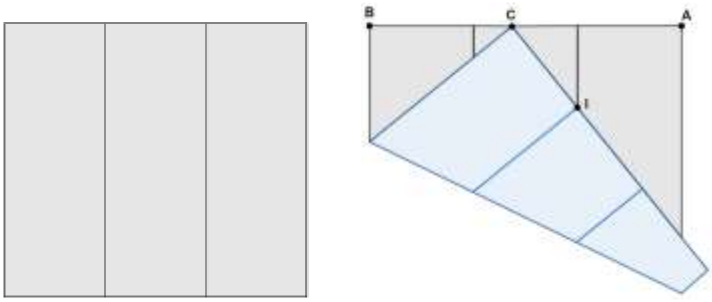


Figura 23: Duplicación del cubo. Paso 1. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Para poderlo justificar, si se tiene en cuenta la siguiente Figura 24, se supone BC=1, y se denota por X=CA. Hay que demostrar que $X^3 = 2$.

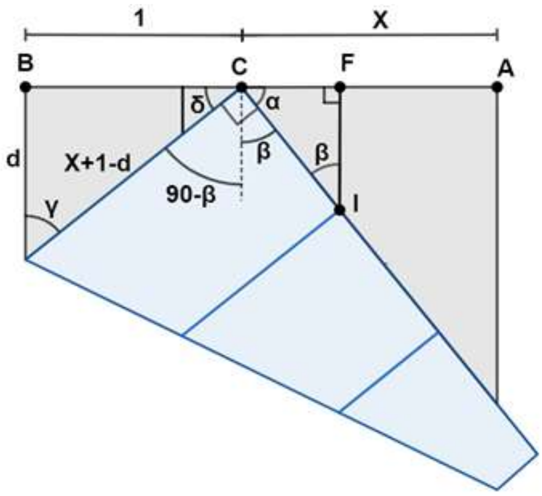


Figura 24: Duplicación del cubo. Paso 2. (Fuente: elaboración propia con Geogebra)

Se empieza calculando algunas de las distancias ya conocidas, AB=X+1 (lado del cuadrado), CI= $\frac{1}{3}$(X+1) y BF= $\frac{2}{3}$(X+1). De tal manera, CF=BF-BC = $\frac{2}{3}$(X+1) -1 = $\frac{1}{3}$(2X-1).

Si se denota BJ por *d*, se tiene que CJ = BC-BJ = X+1-d.

Se aplica Pitágoras de CBJ, $d^2 + 1 = (x + 1 - d)^2$ => $d^2 + 1 = (X + 1)^2 - 2(X + 1)d + d^2$

=> 2(X+1)d = $X^2 + 2X$ => $d = \frac{X^2+2X}{2(X+1)}$

Se aplica Thales ya que los triángulos CBJ y IFC son semejantes. (Ambos triángulos tienen dos ángulos iguales, por lo tanto, son semejantes. Se puede observar que δ= β; así también, α = 90-δ, y γ=90-δ, resultando α = γ).

=> $\frac{d}{X+1-d} = \frac{(2X-1)/_3}{(X+1)/_3} = \frac{2X-1}{X+1}$, sustituyendo el valor de *d* obtenido antes ($\frac{d}{X+1-d} = \frac{\frac{X^2+2X}{2(X+1)}}{X+1-\frac{X^2+2X}{2(X+1)}} = \frac{X^2+2X}{X^2+2X+2}$),

=> $\frac{X^2+2X}{X^2+2X+2} = \frac{2X-1}{X+1}$

=> $(X^2 + 2X)(X + 1) = (2X - 1)(X^2 + 2X + 2)$ =>$X^3 + 3X^2 + 2X = 2X^3 + 3X^2 + 2X - 2$ => $X^3 = 2$ queda justificado.

Detrás de todo esto, se encuentra una teoría del Álgebra, llamada Teoría de Galois, la cual explica con precisión que se puede hacer con regla y compás, y con papiroflexia, y lo que no se puede hacer.

Polígonos regulares que se pueden construir (regla y compas vs origami).

Un polígono es regular si todos sus lados y ángulos son iguales. Por ello, para construir un polígono regular de *n* lados ($n \geq 3$ ya que es el mínimo de lados para obtener un polígono) es lo mismo que dividir una circunferencia en *n* arcos idénticos.

Los polígonos regulares de *n* lados que son construibles depende de las herramientas (regla y compás vs origami) y el valor del *n*.

En el caso de la **regla y compas**, con $s \geq 0$, si *n* es de la forma:

$$n = 2^s \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$$

y $f_1, \ldots, f_r$ son, o bien 1 o bien números primos distintos de la forma (primos de Fermat) $2^{2^t} + 1$ (t ϵ N) el polígono regular será construible por regla y compás.

Por tanto, para n = 3,4,5,6,8,10,12,15,16,17,20, etc. los polígonos regulares correspondientes son construibles mediante regla y compás.

En el caso de la **papiroflexia**, con s, $t \geq 0$,

$$n = 2^s \cdot 3^t \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$$

y $p_1; \ldots; p_r$ son, o bien 1 o bien números primos distintos de la forma $2^u \cdot 3^v + 1$, u, v ϵ N, (primos de Pierpont) el polígono regular será construible.

Por tanto, para n = 3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15,16,17,18, etc. los polígonos regulares correspondientes son construibles mediante papiroflexia.

Es fácil ver que todo polígono construible con regla y compás puede construirse con papiroflexia, pero hay polígonos, por ejemplo el heptágono, que aunque es construible mediante papiroflexia, no lo es con regla y compas.

2.5.2. Papiroflexia modular

La papiroflexia modular consiste en el plegado de varias piezas de papel, llamados *módulos*, que se ensamblan para crear modelos tridimensionales más complejos. Los módulos, son generalmente idénticos, y tienen solapas y bolsillos que facilitan poder unirlos posteriormente entre sí.

Hay que tener en cuenta que es un recurso que no solo permite la creación de diferentes tipos de poliedros, si no que permite que los alumnos puedan manipular estas representaciones físicas, ayudándoles a comprender conceptos abstractos.

Así mismo, durante el plegado y unión de los módulos, se pueden apreciar los elementos y propiedades de los poliedros. Por ejemplo, número de aristas, vértices, tipo de polígonos de las caras que lo forman, etc.

Como se puede concluir, en este tipo de origami también están muy presentes las matemáticas.

Existen numerosos tipos de módulos y poliedros, que se pueden clasificar en función de las aristas, vértices y caras. En los módulos basados en aristas, cada módulo se corresponde con una arista.

En los módulos basados en los vértices, cada módulo da origen a un vértice, y se catalogan a su vez, según el grado del vértice que forman. Es decir, si reúnen aristas de tres en tres, de cuatro en cuatros, etc.

Sin embargo, en los módulos basados en las caras, las caras se juntan entre sí de dos en dos, y las aristas se van juntando en cada vértice. Dentro de esta clasificación, encontramos los módulos Sonobè, los cuales son probablemente los más conocidos y se deben al japonés Mitsunobo Sonobé. Tienen forma de un paralelogramo con ángulos de 45º y 135º. Estos módulos se agrupan de tres en tres generando una pirámide con base un triángulo equilátero y ángulos rectos en el vértice. (Royo-Prieto 2022)

A continuación, en la Tabla 4 se presenta, partiendo de una hoja de papel cuadrada, los diferentes pasos a seguir para la construcción de un módulo Sonobè. (TakakoOrigami, 2019a).

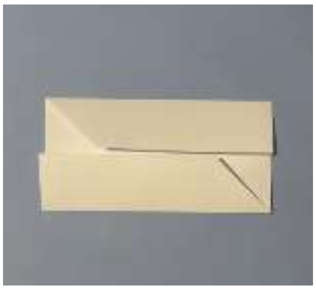
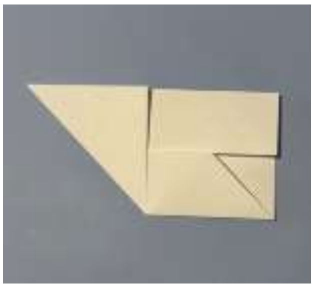
Paso 1 	Paso 2 	Paso 3 	Paso 4 
Paso 5 	Paso 6 	Paso 7 	Paso 8 
Paso 9 	Paso10 	Paso 11 	

Tabla 4: Construcción de la base del módulo Sonobè. (Fuente: elaboración propia)

Una vez construidos tres módulos de Sonobé, siguiendo los pasos indicados en la Tabla 5 que se indica a continuación, se puede formar el siguiente hexaedro. (TakakoOrigami, 2019b).

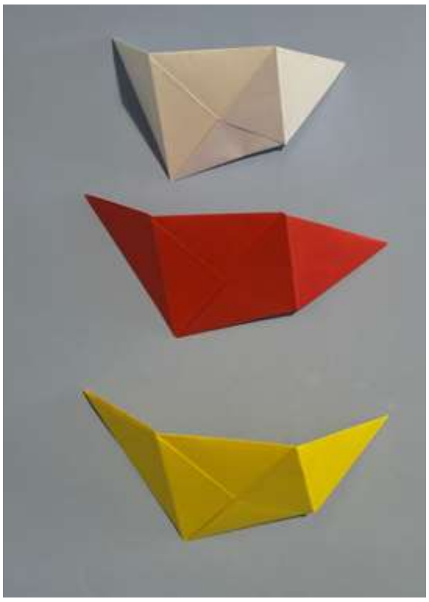
<table>
<tr><td rowspan="2">Paso 1
</td><td>Paso 2
</td><td>Paso 3
</td></tr>
<tr><td>Paso 4
</td><td>Paso 5
</td></tr>
</table>

Tabla 5: Construcción hexaedro utilizando tres módulos de Sonobè. (Fuente: elaboración propia)

2.5.3. <u>Diseño de figuras</u>

En el diseño de figuras con papiroflexia, también se emplean métodos matemáticos.

Si se tiene en cuenta el mapa de pliegues que se genera tras desdoblar una figura, como se indicaba al inicio del apartado 2.5.1., se observan las cicatrices del papel, con sus pliegues valle y montaña, donde en cada trozo pueden verse patrones geométricos.

Los modelos más sencillos y numerosos que encontramos son los modelos planos. Es decir, cuando su figura, al llevarla al plano (2D), no genera nuevos pliegues. En estos casos, para saber si estos mapas son un modelo de papiroflexia, hay una serie de propiedades que deben cumplir, destacando las siguientes, que se pueden encontrar en (Royo-Prieto, 2022).

- Teorema Maekawa.

La diferencia entre el número de pliegues hundidos y elevados utilizados en un vértice es siempre dos. Dicho de otra manera, según el teorema Maekawa-Justin (1980), en un mapa de cicatrices de un modelo plano, el número total de pliegues en un vértice cumple la siguiente igualdad. (Kasahara & Takahama, 1987).

$$|M - V| = 2$$

Siendo M, el número de pliegues elevados (montaña), y V, el número de pliegues hundidos (valle).

Por tanto, se puede concluir que el número total de pliegues en un vértice es par. Y si tenemos en cuenta las caras de un mapa de cicatrices, se puede colorear solo con dos colores sin que lleguen a juntarse en los pliegues. (Pivaral, 2021).

Cabe mencionar que las bases de la papiroflexia, son pliegues básicos de los que parten infinidad de figuras. En la Figura 25 puede verse la construcción del pliegue básico de bomba de agua y su mapa de pliegues.

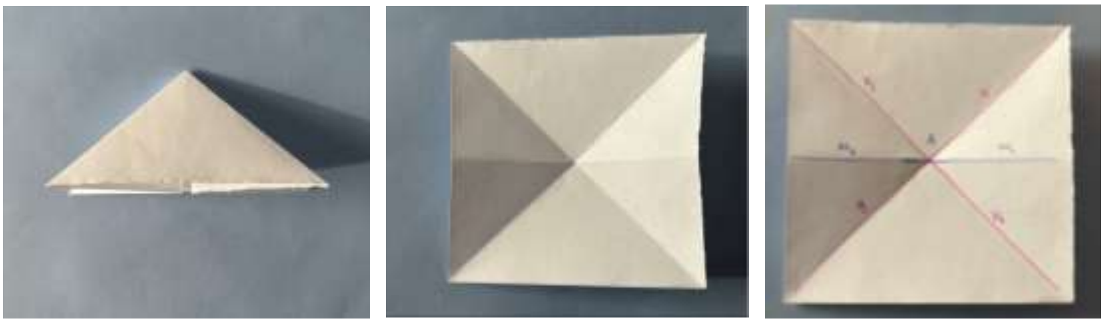


Figura 25: Mapa de pliegues de base de bomba de agua. (Fuente: elaboración propia)

$$| M - V | = | 2 - 4 | = 2$$

- Teorema de Kawaski o Teorema Kawaski-Justin.

La suma de los ángulos alternos alrededor de un vértice es 180º, y su recíproco también es cierto. Es decir, si la suma de los ángulos alternos de un vértice es 180º grados, es un modelo plano. (Kasahara & Takahama, 1987).

Es decir, siendo $\alpha_1,..,\alpha_{2k}$ todos los ángulos contiguos y concurrentes en un vértice, se obtiene:

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2k-1} = \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2k} = \pi$$

Continuando con el ejemplo anterior, en la Figura 26 se indican los ángulos del mapa de pliegue.

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 = 180º$$

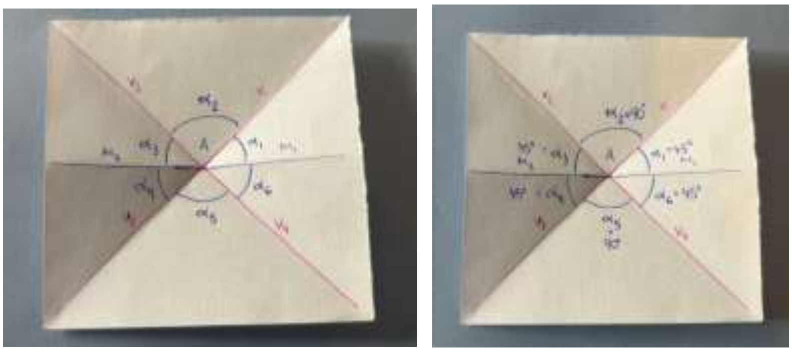


Figura 26: Ángulos en un mapa de pliegues de base de bomba de agua. (Fuente: elaboración propia)

3. La papiroflexia como recurso en la educación

La papiroflexia es un recurso que puede emplearse como herramienta didáctica, para complementar la tarea del docente, y favorecer el proceso de aprendizaje del alumno.

Como ya se mencionó en el apartado 2.1, Friedrich Fröbel, fue uno de los primeros pedagogos en reconocer el carácter enriquecedor del doblado del papel, y ponerlo en práctica en la etapa preescolar. Extendiéndose su influencia por todo el mundo.

Los métodos fröebelianos además de buscar enseñar la geometría de forma intuitiva, pretendía emplear sus formas, para acercar a los estudiantes el conocimiento del mundo exterior. Esto lo hacía generando una dinámica de preguntas y respuestas entre alumnos y docente, consiguiendo desarrollar el sentido crítico y la observación del estudiante.

Numerosas investigaciones como las que se mencionan a continuación, han demostrado que la papiroflexia como herramienta pedagógica puede influir positivamente en los procesos de aprendizaje de los alumnos.

Empleada en las primeras etapas escolares, los alumnos tendrán un mayor desarrollo cognitivo debido a que con la papiroflexia se practica la secuenciación y coordinación de la atención, el razonamiento espacial y la lógica. Todo ello mejora la percepción viso-espacial, y la motricidad fina, es decir la coordinación de pequeños movimientos musculares de las extremidades superiores con los ojos. (Riaño, 2006).

Carbonneau, Marley, & Selig. (2012) evidencian que el uso de materiales manipulativos, como la papiroflexia, son muy eficaces como métodos de enseñanza. Se reflejan también, los efectos positivos que se observan en la concentración y la atención de niños con dificultades de atención. Es una actividad motivadora, que arroja muchos otros beneficios. En el caso de la papiroflexia, ayuda a crear una forma de trabajo ordenada y con pautas establecidas.

Chang (2011) relaciona en su estudio las nuevas tecnologías y la papiroflexia, explicando cómo juntas abren un nuevo camino de posibilidades en la resolución de problemas matemáticos.

Ayala (2013), Mena (2016), Grabauskienė (2019), Cadasil (2016), Álvarez (2021), y Echeverría (2013), infieren que utilizando papiroflexia en las aulas, se consigue aumentar la atención e interés de los estudiantes, generar una mayor participación en las aulas, y constancia en el proceso de aprendizaje, que a su vez genera que quieran buscar, y crear nuevos origamis, potenciando así su autoestima y creatividad.

Para desarrollar esta actividad, puede emplearse una metodología individual o grupal, en el primer caso, el alumno pone a prueba sus habilidades y destrezas. En el segundo, al formar grupo con sus pares, el aprendizaje es más activo y dinámico, están más predispuestos, y trabajan la comunicación, tolerancia y respeto.

En ambos casos, el alumno es quien realiza la actividad mientras escucha las explicaciones y las pautas a seguir para realizar la tarea, lo que estimula el sentido del orden y, mientras manipula con sus propias manos, desarrolla habilidades y destrezas básicas, mejorará su confianza, pensamiento intuitivo y precisión manual.

Pero los beneficios no se limitan a una mayor motivación y habilidad, a través de las diferentes actividades y construcciones, pueden valorarse los componentes estéticos de los objetos y formas que las componen, a apreciar el arte, a ayudar a la concentración visual y mental, pudiendo emplearse como técnica de relajación.

Cabe mencionar que a pesar de que la mayoría de los estudios se enfocan en las etapas de primaria, esta técnica puede emplearse en todas las etapas escolares, incluyendo E.S.O y Bachillerato.

Puede aplicarse como recurso educativo en gran variedad de disciplinas, facilitando el aprendizaje de sus contenidos.

En Física, el plegado del papel puede ayudar a fundamentar el centro de gravedad, equilibrio, resistencia y comportamiento de un cuerpo ante diferentes fuerzas, etc.

En Dibujo Técnico, además de por su alta conexión con la geometría, la papiroflexia puede facilitar la visualización y aprendizaje del Sistema Diédrico, permitir construcciones que con regla y compás no pueden realizarse, etc.

En Química, apoyándose de la papiroflexia modular, se pueden crear moléculas y explicar sus propiedades. Se puede visualizar una estructura del ADN.

En Biología, se pueden representar ecosistemas realizando dioramas, generar las espirales de Fibonacci, secuencia matemática, oculta en la naturaleza, etc.

Respecto al uso de la papiroflexia como herramienta didáctica en la asignatura de Matemáticas, hay un gran potencial. Se muestran diferentes aplicaciones y actividades a lo largo de este Trabajo Fin de Máster.

3.1 Papiroflexia en las matemáticas. Materiales y metodologías.

Para adquirir los saberes básicos y alcanzar las competencias requeridas en cada etapa, es muy importante utilizar variadas y adecuadas metodologías y recursos.

Utilizando la papiroflexia en las aulas, además de todo lo mencionado anteriormente, se consigue un **aprendizaje activo,** donde el alumno es el protagonista de su propio aprendizaje.

La papiroflexia es el medio perfecto para poder representar conceptos abstractos matemáticos que ayuden a los alumnos a visualizarlos, mientras los manipulan y los aprenden.

En el desarrollo de actividades con origami, no sólo se desarrolla el pensamiento y visión espacial como puede parecer, sino que también los estudiantes desarrollan el cálculo numérico, el lenguaje matemático y la capacidad de resolución de problemas.

Los contenidos matemáticos que pueden trabajarse con papiroflexia son innumerables, no solo hay que limitarse a la Geometría, se pueden abarcar áreas que incluyen los números enteros, fracciones, identidades notables y diferentes partes del Álgebra, la Combinatoria, la Teoría de Números, la Topología o el Cálculo infinitesimal.

Este recurso tiene una elevada capacidad de adaptación, ya que una misma construcción con origami puede servir para trabajar contenidos de diferentes formas, en función de la etapa educativa en la que se encuentren los alumnos.

Otra ventaja a tener en cuenta es su gran flexibilidad y adaptación para ser introducido en las diferentes actividades, independientemente de las diferentes metodologías que se utilicen, ya sean colaborativas, cooperativas, aprendizajes basados en proyectos, etc, sin importar si son actividades individuales o grupales.

Si se tiene en cuenta que la mayoría de las construcciones solo requiere de una hoja de papel, resulta un recurso didáctico sostenible, económico y accesible, apto para trabajar en casa y en el aula de cualquier centro educativo.

Es cierto que, aunque la papiroflexia acepta diferentes tipos de papeles, es importante que sean flexibles, resistentes y mantengan los pliegues. Por ello, una buena opción es un formato cuadrado de no más de 25 cm de lado, y un gramaje menor a los $80 g/m^2$ que permite trabajar bien los detalles. Sin embargo, si buscamos un modelo rígido, con pocos dobleces, buscaremos un gramaje más alto que sigue siendo un recurso muy asequible.

El papel permite el uso de diferentes colores, texturas y formas, lo que puede ser un gran aliado de cara a la atención individual de los alumnos, por ejemplo, en el caso de alumnos con visión reducida.

Cabe mencionar que el Washi, el papel tradicional del origami, es fabricado en Japón desde hace siglos. Sus fibras largas entrelazadas le aportan ligereza ($60 g/m^2$), flexibilidad y solidez.

A pesar de los indudables beneficios que conlleva el uso de esta herramienta, su empleo en las aulas no está muy extendido. En muchos casos, esto es debido a la falta de tiempo en el aula, así como al esfuerzo y trabajo extra que a veces conlleva crear o implementar nuevas situaciones de aprendizaje adecuadas a cada nivel.

A pesar de la simplicidad de las técnicas vistas, hay que tener en cuenta a cada alumno individualmente, y a veces la complejidad de los modelos puede no ser válida para las capacidades psico-motrices de los estudiantes.

Otro inconveniente que parece existir es la falta de formación de los docentes en la técnica del plegado.

Lo más importante en cualquier práctica docente basada en la papiroflexia, para asegurar el éxito del aprendizaje por parte del alumno, es que antes de la actividad el profesor debe familiarizarse previamente con los pasos de plegado, siendo deseable que los haya realizado previamente. Al inicio de la actividad, si muestra la figura completa servirá para que los alumnos tengan una visión general de lo que se pretende conseguir con la actividad, además de servir de guía. Conviene explicar previamente en qué consiste la actividad, y qué conceptos matemáticos, y símbolos son los que están involucrados en la figura. Después, durante la actividad, el profesor además de hacer de guía y realizar su construcción a la par de forma que su hoja esté en la misma orientación que la de los alumnos, deberá realizar preguntas que generen en los alumnos un pensamiento de orden superior. Esto le ayudará a mantener la motivación y la atención del alumnado, dejándole saber quiénes están adquiriendo los conocimientos deseados y quién tiene problemas o va más retrasado. De esta forma puede dar tiempo, ayudar con las manipulaciones o comprensión de las instrucciones, etc. Al finalizar deberá repasar, a modo resumen la actividad y los conceptos y lecciones aprendidas.

3.2 Marco legislativo.

3.2.1 Contribución a las competencias

El diseño de las actividades con papiroflexia propuestas en el apartado cuatro, busca el desarrollo de las competencias clave y el carácter multidisciplinar de las situaciones de aprendizaje, que establece la Ley Orgánica de Educación 3/2020, de 29 de diciembre. LOMLOE.

A continuación, se detalla de que forma la papiroflexia puede desarrollar las siete competencias clave establecidas en el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, y el Decreto 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

- Competencia lingüística (CCL): Lectura de las instrucciones de un modelo o interpretación de las imágenes o gráficas del modelo de plegado, para la correcta realización de la figura. Comprensión de las instrucciones comunicadas de forma oral o escrita por el profesor; desarrollo de la comunicación verbal y escrita para describir los procesos seguidos; comprensión de los enunciados de las actividades, comunicación con los compañeros, desarrollo del lenguaje matemático, etc.

- Competencia plurilingüe (CP): A la hora de investigar y buscar otras ideas o modelos en papiroflexia, mucha de la información que aparece en internet, se encuentra en inglés. Además, la papiroflexia por si sola va acompañada de símbolos que los alumnos deben aprender y utilizar, lo que conlleva un intercambio de información en distintos lenguajes.

- Competencia digital (CD): Uso de las TICs como herramienta didáctica. Los alumnos tendrán que buscar información en la red, e investigar lo que se solicite en las actividades propuestas. De esta manera desarrollarán el análisis de datos, el pensamiento computacional y crítico. Una pequeña parte de las tareas a realizar, se basará en el uso de GeoGebra. También deberán poder manejarse en las aplicaciones esenciales de Microsoft. Por otra parte, existen softwares que permiten crear mapas de pliegues y modelos en tres dimensiones. Es fundamental que el alumno aprenda a utilizar correctamente las herramientas digitales a su disposición y las integre en su día a día.

- Competencia matemática y en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM): Es la competencia más favorecida en las actividades planteadas ya que se tratan y ayuda a comprender contenidos matemáticos como geometría, escalas, proporciones, etc. Sin embargo, también está ligada a otros ámbitos como el medio ambiente, la ingeniería, la física, etc. Se desarrolla el pensamiento matemático, la capacidad analítica, y se mejora la visión espacial.

- Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA): A través del origami los alumnos desarrollarán habilidades para seguir instrucciones pautadas, aprenderán a ser pacientes y perseverantes. Las actividades harán que sean protagonistas de su propio aprendizaje, profundizando tanto como deseen, y reflexionando sobre su proceso de aprendizaje, identificando errores y solventándolos. Por otro lado, la papiroflexia puede ayudar a la relajación, y a la concentración, favoreciendo la gestión emocional, y en los casos opuestos a la gestión de la frustración.

- Competencia ciudadana (CC): Es un recurso que puede realizarse en grupo, con otros alumnos, favoreciendo la tolerancia y respeto ante la diversidad, la comunicación afectiva, aprender a dialogar, desarrollo de diferentes roles, aprender a delegar. Las actividades que se propongan, pueden hacer de la papiroflexia un recurso para concienciar de la responsabilidad ambiental.

- Competencia emprendedora (CE): La resolución de las actividades propuestas con origami y los problemas, llevan consigo la planificación, gestión de tiempos, toma de decisiones razonadas, todo ello desarrolla dicha competencia. También se aumenta la confianza del alumno a la hora de enfrentarse a un problema, el alumno toma la iniciativa, se fomenta el desarrollo de ideas creativas, y se insta a buscar diferentes formas de dar solución a un mismo problema. En los trabajos grupales, se adquiere responsabilidad y compromiso.

- Competencia en conciencia y expresión cultural (CCEC): La papiroflexia es una forma de expresión artística, y profundizando en sus orígenes pueden explorarse otras culturas, y tradiciones. En las construcciones propuestas por los alumnos, se deberá mantener cierto sentido estético.

3.2.2. LOMLOE. El currículo de Matemáticas y papiroflexia.

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, tras su modificación por la ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, establece en el artículo 6.3 que el gobierno fijará, en relación con los objetivos, competencias, contenidos y criterios de evaluación, los aspectos básicos del currículo, que constituyen las enseñanzas mínimas.

Mediante el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, se establece la ordenación y enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, en cuyo artículo 13.3 determina que las administraciones educativas establecerán, conforme a lo dispuesto en este real decreto, el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, del que formarán parte en todo caso las enseñanzas mínimas fijadas en el mismo.

Según la organización de la etapa establecida en el capítulo III, artículo 15 del Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, indica que, en cada curso de los tres primeros cursos, todo el alumnado cursará la materia de Matemáticas. A mayores, se añadirá como materia optativa de refuerzo instrumental, Conocimiento de las Matemáticas. En el cuarto curso, los alumnos podrán decidir cursar Matemáticas A o Matemáticas B, existiendo también la materia optativa Conocimiento de las Matemáticas.

Las Matemáticas A se centran en la resolución de problemas, aplicando los conceptos matemáticos a situaciones cotidianas. Sin embargo, las Matemáticas B profundizan más en los procedimientos algebraicos e incorporan más contextos.

Indistintamente, su finalidad es proporcionar al alumno las herramientas necesarias para la resolución de problemas, y análisis e interpretación de datos que le permitan desenvolverse con éxito en los diferentes contextos que pueda encontrarse tanto dentro de su etapa educativa, como después.

La materia de Matemáticas está organizada de tal manera que permite al alumno alcanzar en mayor o menor grado, todas las capacidades y objetivos de la etapa de educación secundaria obligatoria. Contribuye a la adquisición de las distintas competencias clave que conforman el perfil de salida.

Las competencias específicas se relacionan entre sí, y basándose en su naturaleza, se agrupan en cinco bloques que son, resolución de problemas, (competencias específicas 1 y 2), razonamiento y prueba (competencias específicas 3 y 4), conexiones (competencias específicas 5 y 6), comunicación y representación (competencias específicas7 y 8) y destrezas socioafectivas (competencias específicas 9 y 10).

Para poder adquirir estas competencias específicas es necesario que los alumnos aprendan los contenidos establecidos, los cuales integran no solo conocimientos, si no también destrezas y actitudes. Dichos contenidos se disponen en seis bloques, denominados sentidos, según establece el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre.

El sentido numérico se refiere a la comprensión de los números, sus relaciones y las operaciones y a la capacidad para utilizarlos de manera flexible.

El sentido de la medida supone la comprensión y comparación de cualidades medibles, la adquisición de técnicas de medición y de estrategias de estimación de medida en objetos del mundo real, así como el uso adecuado de las unidades.

El sentido espacial se caracteriza por la habilidad para identificar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, establecer relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos.

El sentido algebraico conlleva explorar y reconocer patrones y funciones, establecer generalidades a partir de casos particulares formalizándolas en el lenguaje simbólico apropiado. En este sentido está incluido el pensamiento computacional.

El sentido estocástico aborda el análisis, uso e interpretación de datos para elaborar argumentos convincentes y decisiones informadas.

Teniendo en cuenta los contenidos de la materia de Matemáticas a lo largo de los cuatro cursos que componen la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria, y que la metodología didáctica que la nueva ley solicita busca un rol activo y participativo del alumnado, que se adapte a sus ritmos de aprendizaje, empleando materiales y recursos variados, y con un uso adecuado de la organización del espacio y tiempo, las situaciones de aprendizaje se convierten en una herramienta imprescindible.

Las cuales permiten a los alumnos adquirir las competencias específicas de la materia, así también las competencias clave del Perfil de salida y los objetivos de la etapa.

Son motivadoras, interdisciplinares, permiten un aprendizaje significativo y contextualizado, fomentan los principios del Diseño Universal para el aprendizaje, y desarrollan los desafíos del siglo XXI, etc.

La selección, diseño y planificación de las situaciones de aprendizaje se basa en los criterios de evaluación.

Por todo ello, la propuesta didáctica que se desarrolla a continuación, es una situación de aprendizaje.

Pero además, de acuerdo a la ley educativa, los materiales didácticos que deben seleccionar los centros, deben ser polivalentes, con capacidad de motivar, que potencien la manipulación, la observación, la investigación y la elaboración creativa. Se hará uso de material tradicional e innovador en diferentes soportes como materiales impresos, e informáticos. El profesorado elaborará sus propios recursos con el fin de posibilitar el acceso al aprendizaje a todo el alumnado.

Es aquí donde la papiroflexia como herramienta didáctica nos muestra su gran potencial, ayudándonos a trabajar los diferentes contenidos seleccionados del currículo de la materia de Matemáticas, a través de una serie de actividades propuestas.

4 Propuesta didáctica: situación de aprendizaje

A continuación, teniendo en cuenta lo reflejado en el apartado 3.2.2, se describe una propuesta didáctica para alumnos de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Se trata de una situación de aprendizaje donde a través de sus diferentes apartados, emplearán la papiroflexia como una herramienta más para adquirir las competencias específicas.

4.1 <u>Título y contextualización</u>

Se plantea la actividad *rehabilitación del jardín de una residencia para la tercera edad*, para los alumnos de 1º E.S.O. de un centro de secundaria público de Castilla y León.

La actividad es apta independientemente del entorno socioeconómico en el que se encuentre el centro escolar.

Se propone desarrollarla en la asignatura de Matemáticas durante el segundo o tercer trimestre del curso escolar, tras la proporcionalidad numérica, y antes o durante la parte de geometría.

Las actividades propuestas en esta situación de aprendizaje, se ambientan en el proyecto de rehabilitación del jardín de una residencia de la tercera edad. A lo largo de los diferentes apartados propuestos, los alumnos irán resolviendo las tareas encomendadas con ayuda de las matemáticas y la papiroflexia como herramienta principal, hasta conseguir el objetivo final de habilitar el jardín para el uso y disfrute de todos.

El enunciado de la situación de aprendizaje propuesta es el que se describe en la Tabla 6.

Situación de aprendizaje.
La residencia de la tercera edad colindante al colegio, dispone de un terreno, el cual lleva años abandonado y la maleza ha terminado por ocultarlo. Han decidido rehabilitarlo, y por ello nos han pedido ayuda para elaborar el proyecto más adecuado para que se convierta en un bonito jardín para uso y disfrute de todos. Todos los gastos para llevar a cabo la reconstrucción correrán a cargo de la residencia. Las personas que allí viven, están deseando que comience el taller de jardinería, pero necesitan los planos con unas instrucciones claras de cómo proceder. *La Figura 27 es el plano en planta del edificio de la residencia, donde aparece el terreno.*  *Figura 27: Plano en planta de la residencia. (Fuente: elaboración propia)*
Actividad 1. Diferentes áreas poligonales del terreno para plantar.
Actividad 2. Teselado del terreno. Maqueta y plano.
Actividad 3. ¿Qué y dónde plantar?
Actividad 4. Complementos para el jardín.
Actividad 5. Identidades notables *(alternativa curso superior)*

Tabla 6: Enunciado situación de aprendizaje.

4.2 Fundamentación curricular

Basada en la Ley Orgánica 3/2020, del 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación; y el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

4.2.1 Objetivos de la etapa

Se busca que los alumnos sean capaces a través de una misma situación de aprendizaje de trabajar los contenidos de la Tabla 7.

Profundizar en la papiroflexia y su relación con las matemáticas.	
Conocer las técnicas de plegado, y desarrollar habilidades de doblado de papel.	
Perímetros y áreas.	Teorema de Pitágoras.
Ampliación y reducción de figuras. Escalas.	Cuerpos geométricos. Poliedros. Áreas.
Teorema de Tales	Relación de Euler.
Semejanza	Identidades notables
Interpretación mapas y planos.	Números irracionales
Elementos del plano.	Mosaicos. Teselados.
Polígonos.	Resolución de problemas.

Tabla 7: Contenidos.

Además, se trabajarán las siguientes competencias y actitudes:

- Desarrollar el sentido y la visión espacial a través de representaciones geométricas.

- Desarrollar la reflexión crítica y el espíritu emprendedor con la resolución de problemas.

- Comprender y expresarse utilizando lenguaje matemático.

- Buscar información en las redes.

- Conocer el entorno.

- Trabajar en equipo y diferentes roles, educar en tolerancia e igualdad, y rechazo a cualquier discriminación.

- Utilizar las matemáticas para comprender y analizar situaciones cotidianas.

- Con el modelo educativo abierto, participará toda la clase; aprendiendo en comunidad y caminando hacia un logro común.

- Fomentar los siguientes desafíos del SXXI. (Álvarez, 2022):

  Resolver conflictos de forma pacífica.

  Cooperar y convivir

  Apreciar el valor de la diversidad.

  Formar parte de un proyecto colectivo.

  Adquirir confianza en el conocimiento como motor del desarrollo.

  Usar de manera ética y eficaz las tecnologías.

4.2.2 Descriptores operativos y competencias clave

Con las actividades propuestas se persigue que los alumnos no solo adquieran conocimientos, si no también habilidades y aptitudes que contribuyan al desarrollo de las ocho competencias clave, y las específicas de la materia para contribuir a lograr sus objetivos de la etapa.

La Tabla 8 se indican los descriptores operativos de cada competencia clave que se trabajarán durante la situación de aprendizaje propuesta.

Competencias clave	Descriptores operativos
Comunicación lingüística. (CCL)	CCL1, CCL2, CCL3
Competencia plurilingüe (CP)	CP1
Matemática y en ciencia, tecnología e ingeniería. (STEM)	STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, STEM5
Personal, social y de aprender a aprender. (CPSAA)	CPSAA1, CPSAA3, CPSAA5
Ciudadana. (CC)	CC2, CC3
Emprendedora. (CE)	CE3
Conciencia y expresión cultural. (CCEC)	CCEC1, CCEC4
Digital. (CD)	CD1, CD2, CD5

Tabla 8: Competencias clave y descriptores operativos.

4.2.3 Descriptores operativos vinculados a criterios de evaluación y competencias específicas.

Competencia específica	Criterios de evaluación	Descriptores operativos
1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.	1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana, organizando los datos dados y/o seleccionando información, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.	CCL1, CCL2, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4
	1.2 Aplicar diferentes herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.	STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CPSAA5, CE3.
	1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los métodos y conocimientos necesarios.	STEM1, STEM2, STEM3, CE3, CCEC4
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.	2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema recibiendo indicaciones cuando sea imprescindible.	STEM1, STEM2
	2.2 Comprobar, con algunas indicaciones de guía, la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.).	CCL2, STEM1, STEM4
3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.	3.2 Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos.	CCL1, STEM2
	3.3. Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.	CD1, CD2, CD5
4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.	4.1 Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación.	STEM1, STEM2.
5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.	5.1 Conocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.	STEM1
	5.2 Conocer y usar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.	STEM1
6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.	6.1 Identificar situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas usando los procesos inherentes a la investigación: medir, comunicar, clasificar y predecir.	CCL1, STEM1, STEM2, CE3
	6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados sencillos.	STEM2
	6.3 Reconocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.	STEM2, STEM5, CCEC1
7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.	7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos.	STEM3
	7.2 Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo de apoyo si es necesario.	STEM3

8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.	8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos, procedimientos y conclusiones.	CCL1, CP1, STEM2, STEM4
	8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión.	CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4
9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.	9.1 Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.	STEM5, CPSAA1
	9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	CPSAA1, CPSAA5
10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.	10.1 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones.	CCL5, CP3, STEM3, CPSAA3, CC2, CC3
	10.2 Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, y asumiendo el rol asignado.	CPSAA1

Tabla 9: Descriptores operativos

Para la actividad 5 planteada como una alternativa para cuatro de Educación Secundaria, se desarrollarán los descriptores operativos reflejados en la Tabla 10, vinculados a los criterios de evaluación y a las competencias específicas.

Competencia específica	**Criterios de evaluación**	**Descriptores operativos**
1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.	1.1 Reformular problemas matemáticos y de la vida cotidiana de forma verbal y gráfica, localizando y seleccionando información de distintas fuentes, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.	CCL2, CCL3, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.	2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos adecuados y necesarios.	STEM1, STEM2
5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y	5.1 Deducir relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.	STEM1, STEM3, CD2, CD3)

procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.	5.2 Analizar y poner en práctica conexiones entre diferentes procesos matemáticos, aplicando conocimientos y experiencias previas.	STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1
7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.	7.1 Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos visualizando, ideas y estructurando procesos matemáticos.	STEM3, STEM4, CD1, CD2
	7.2 Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo de apoyo si es necesario.	STEM3
8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.	8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos, procedimientos y conclusiones.	CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3)
	8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión.	CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4
9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.	9.1 Identificar y gestionar las emociones propias y ajenas y desarrollar el autoconcepto matemático, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.	STEM5, CPSAA1, CPSAA4
	9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas, aceptando la crítica razonada.	CPSAA1, CPSAA5, CE2, CE3
10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.	10.1 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa, tomando decisiones y realizando juicios informados.	CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3

Tabla 10: Descriptores operativos actividad 5.

4.2.4 Mapa de relaciones criteriales

La vinculación de los descriptores operativos del Perfil de salida con los criterios de evaluación de cada competencia específica viene representada por el siguiente mapa de relaciones criteriales.

Este mapa permite al profesor deducir el grado de consecución y desarrollo de las competencias clave y objetivos previstos del alumno.

Teniendo en cuenta la situación de aprendizaje propuesta, el mapa de relaciones criteriales es el que se muestra en el Anexo 7.1.

4.2.5 Contenido de la materia y saberes básicos.

Para desarrollar las competencias específicas se trabajan diferentes sentidos, dando una mayor relevancia al contenido del sentido espacial como se puede apreciar en la Tabla 11.

Nombre del bloque	Nombre del apartado	Saber básico
A.Sentido numérico.	1. Conteo	Adaptación del conteo al tamaño de los números en problemas de la vida cotidiana.
	2. Cantidad	Realización de estimaciones con la precisión requerida. Números naturales, enteros, fracciones, decimales y potencias de exponente natural en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana. Diferentes formas de representación de números naturales, enteros y racionales, incluida la recta numérica.
	3. Sentido de las operaciones	Operaciones con naturales, enteros, fracciones o decimales en situaciones contextualizadas. Relaciones inversas, entre las operaciones (adición y sustracción; multiplicación y división, elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada): comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas. Cálculos de manera eficiente con números naturales, enteros, fracciones y decimales, tanto mentalmente como de forma manual o con calculadora.
	4. Relaciones	Factores, múltiplos, divisores. estrategias y herramientas. Selección de la representación adecuada para una misma cantidad en cada situación o problema.
	5. Razonamiento proporcional	Razones y proporciones: comprensión y representación de relaciones cuantitativas.
B.Sentido de la medida.	1.Magnitud	Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida en el plano.
	2.Medición.	Longitudes, ángulos y áreas en formas planas: deducción, interpretación y aplicación. Representaciones de objetos geométricos planos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos.
	3. Estimación y relaciones	Formulación de conjeturas sobre medidas en el plano o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones.
		Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida en el plano.
C.Sentido espacial	1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones.	Figuras geométricas planas: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características.
		Elementos característicos de las figuras geométricas planas.
		Relación entre las posiciones relativas de circunferencias y/o rectas.
		Relaciones de congruencia y semejanza en figuras planas: identificación y aplicación. Teorema de Tales. Criterios de semejanza de triángulos y su aplicación a la resolución de problemas. Razón de proporcionalidad y escalas.
		Relación pitagórica en figuras planas: identificación y aplicación. .
		Construcción de figuras geométricas planas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada…).
	3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica	Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas en el plano.
D.Sentido algebraico	6. Pensamiento computacional	Estrategias útiles en la interpretación y/o modificación de algoritmos sencillos.

E.Sentido socioafectivo.	1.Creencias, actitudes y emociones	Esfuerzo y motivación: reconocimiento de su importancia en el aprendizaje de las matemáticas.
		Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación.
		Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.
		Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.
	2.Trabajo en equipo y toma de decisiones.	Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.
		Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.
	3.Inclusión, respeto y diversidad.	Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.
		La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...)

Tabla 11: Contenidos y saberes básicos.

En la Tabla 12 se reflejan los contenidos y saberes básicos que se tratan en la actividad 5, que es una alternativa para el curso de cuarto de la Educación Secundaria.

Nombre del bloque	Nombre del apartado	Saber básico
C.Sentido espacial	1.Figuras geométricas de dos y tres dimensiones	Propiedades geométricas de objetos matemáticos y de la vida cotidiana: investigación con programas de geometría dinámica.
	4.Visualización, razonamiento y modelización geométrica	Modelos geométricos: representación y explicación de relaciones numéricas y algebraicas en situaciones diversas.
D.Sentido algebraico	2.Modelo matemático	Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
	3. Variable	Variables: asociación de expresiones simbólicas al contexto del problema y diferentes usos (como incógnita en ecuaciones).
	4. Igualdad y desigualdad	Formas equivalentes de expresiones algebraicas (incluyendo factorización y fracciones algebraicas sencillas) en la resolución de ecuaciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas sencillas e irracionales, inecuaciones lineales y cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.
		Ecuaciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas sencillas e irracionales, inecuaciones lineales y cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el uso de la tecnología según el grado de dificultad.
F.Sentido socioafectivo.	1.Creencias, actitudes y emociones	Esfuerzo y motivación: reconocimiento de su importancia en el aprendizaje de las matemáticas.
		Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación.
		Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.
		Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.
	2.Trabajo en equipo y toma de decisiones.	Asunción de responsabilidades y participación activa, optimizando el trabajo en equipo. Estrategias de gestión de conflictos: pedir, dar y gestionar ayuda.

		Métodos para la gestión y la toma de decisiones adecuadas en la resolución de situaciones propias del quehacer matemático en el trabajo en equipo.
	3.Inclusión, respeto y diversidad.	Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.
		La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...)

Tabla 12: Contenidos y saberes básicos actividad 5.

La situación de aprendizaje aporta un aprendizaje interdisciplinar ya que se relaciona con diversas materias como Artes plásticas, Dibujo Técnico, Biología y Geología, Informática, Física, Geografía e Historia.

En el caso del Dibujo técnico, lo hace a través del manejo de planos y uso de la geometría. Es clave para el desarrollo del sentido espacial. Así también, a través de los mosaicos se estudiarán obras artísticas.

Respecto a Biología y Geología, las actividades se contextualizan en un tipo de terreno que deben rehabilitar como jardín, con su riego, diferentes tipos de plantas, etc.

Mediante el uso de la papiroflexia y aplicaciones informáticas como GeoGebra, se conectará con Informática.

Se conectará con la física mediante el baricentro como centro de gravedad de un triángulo.

A través de la actividad 3, se conocerá un poco de la historia, clima y geografía de su ciudad, y aprenderán sobre su comunidad autónoma. Todo ello relaciona conceptos de Geografía e Historia.

4.2.7 <u>Metodología</u>

En estas actividades, se les da continuidad a las matemáticas de años anteriores, facilitando la continuidad en el aprendizaje, siguiendo con el progreso cognitivo del alumnado.

Se va a proporcionar también, aunque en menor medida, un aprendizaje interdisciplinar.

Se empleará una metodología que busca empleando la papiroflexia, una progresión de lo concreto, a lo pictórico, para concluir en lo abstracto y puramente matemático. Se combinará con diferentes metodologías como la gamificación, aprendizaje basado en problemas, etc.

Para llevarlo a cabo, además de emplear la papiroflexia como recurso principal, se combinará con otros materiales manipulativos y digitales para complementar y diversificar el aprendizaje.

El profesor, al tratarse de 1º de la E.S.O. llevará al inicio un estilo más directivo en las primeras tareas, para fomentar la participación del alumnado en su propio aprendizaje a través de técnicas como el descubrimiento, la resolución de problemas, la argumentación, la investigación y el debate. Sin embargo, se busca que termine siendo un mero facilitador y guía durante la fase de desarrollo, ayudando a los alumnos, según se necesite.

Se ha tenido en cuenta el concepto del método Singapur en la elaboración de alguna de las actividades, partiendo de lo más concreto, a lo abstracto, pasando por la representación pictórica. Este aprendizaje progresivo de nuevos conceptos partiendo de los ya conocidos, deja atrás la memorización "sin sentido" y los excesos de cálculos tediosos. Es por eso que en algunas actividades se propone el uso de recursos manipulativos y representativos, ayudando al alumnado a entender los conceptos más abstractos.

Se combinarán tareas individuales y grupales, empleando grupos heterogéneos, para que puedan aprender unos de otros, ayudarse, relacionarse y cooperar. De esta manera, alumnos podrán resolver algunas tareas desde distintos puntos de vista, con lo que se trabajará la necesidad de escuchar y respetar las opiniones. Desarrollarán actitudes de tolerancia, cooperación y solidaridad.

Resolver las tareas, requiere de esfuerzo, lo que reforzará los hábitos de estudios. También se fomentará la creatividad, el sentido crítico y la toma de decisiones.

La situación de aprendizaje emplea una metodología de aprendizaje basada en proyectos. Se ha de conseguir rehabilitar el jardín de una residencia, y para conseguirlo se proponen diferentes actividades donde empleando otras metodologías, como el aprendizaje basado en problemas, cooperativo, etc. y mediante la integración de conocimientos, se resolverá el problema propuesto inicialmente.

En la Tabla 13 se indican las metodologías propuestas en las actividades. Se busca la mayor variedad posible para conseguir clases más dinámicas, interesantes y motivadoras, teniendo presente la atención a la diversidad.

Actividad	**Metodología**	**Agrupación**
Situación de aprendizaje	Aprendizaje basado en proyectos	Individual y grupal
Actividad 1	Clase magistral + Técnica de la pregunta Aprendizaje basado en problemas Aprendizaje cooperativo: Técnica puzzle	Grupos de cuatro
Actividad 2.	Pequeña investigación Aprendizaje basado en problemas	Grupos de cuatro
Actividad 3.	Pequeña investigación Clase magistral dirigida participativa Tarea cooperativa Gamificación. Técnica Uno para todos.	Individual Grupos de dos Grupos de cuatro

Actividad 4.	Aprendizaje basado en resolución de problemas Clase magistral dirigida + técnica de la pregunta	Individual
Actividad 5.	Clase magistral dirigida + técnica de la pregunta Resolución de problemas	Individual Grupal

Tabla 13: Metodologías propuestas.

Esta situación de aprendizaje se concibe como un aprendizaje basado en proyectos ya que implementa un conjunto de tareas basadas en resolución de problemas o retos, que permite a los alumnos ser partícipes de un proyecto mayor y motivador, con conciencia de su entorno. Mientras aprenden contenidos curriculares y ponen a prueba sus competencias clave, se culminará con un producto final presentado ante el resto de los alumnos.

La técnica "Uno para todos", es cooperativa y está recomendada para practicar loa nuevos conceptos aprendidos haciendo ejercicios, asegurando el procesamiento de la información. Se busca promover la ayuda entre alumnos, aclarar dudas y corregir errores, ayudando así a interiorizar los nuevos conceptos. (Pujolàs, s.f.)

La técnica "Puzzle" considera al alumnado el verdadero protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje. (Jiménez, s.f)

Las dos, como técnicas cooperativas que son, generan una interdependencia positiva entre los miembros del grupo, trabajando juntos de forma coordinada y con responsabilidad compartida. Se aplican para mejorar la motivación de los alumnos, aumentar su interés y satisfacción, disminuyendo la posible conflictividad en el aula y absentismo. Sobre todo, mejora la autoestima de los alumnos con bajo rendimiento académico.

Se han propuesto gamificaciones, intercalándolas con clases magistrales, para que los alumnos puedan comprender y practicar los conceptos explicados en clase. Los que ya los tengan asimilados tras la clase magistral, enseñarán a sus pares a interiorizarlos, y podrán construir un aprendizaje más profundo.

Se busca con las metodologías propuestas adquirir interiorizar los conceptos clave dentro del horario escolar.

El aprendizaje basado en problemas es una metodología activa que utiliza la resolución de problemas abiertos, relevantes para que el alumnado desarrolle los aprendizajes y competencias mediante la búsqueda de soluciones que no se requiere que sean reales. Los alumnos son en gran medida protagonistas de su aprendizaje.

Respecto a las tareas colaborativas llevadas a cabo, serán en grupos pequeños con el propósito de lograr una meta común. Se busca no solo que se adquieran conocimientos ayudándose entre pares, sino también desarrollar habilidades sociales y cognitivas.

Las clases magistrales que se impartirán, serán siempre participativas y aplicando la técnica de la pregunta. Se intentará partir de los conocimientos previos de los alumnos tras su valoración inicial, y hacer una exposición clara, con un lenguaje poco técnico, y destacando las ideas principales. Además, con la técnica de la pregunta, empleando varios tipos de ellas, se puede conseguir orientar a los alumnos, iniciar o redirigir un tema, verificar la adquisición de conceptos, crear un clima agradable, captar la atención de los alumnos que lo necesiten, motivar, desarrollar capacidad de análisis de los alumnos, etc.

Con este amplio rango de metodologías conseguimos atender a la diversidad del alumnado.

Para poder desarrollar la situación de aprendizaje, serán necesarios los recursos descrito en la Tabla 14, además de un aula cuya distribución de pupitres permita realizar tareas en grupo e individuales, generando ambiente colaborativo.

<table>
<tr><td>Actividad 1</td><td>Actividad 2</td><td>Actividad 3</td><td>Actividad 4</td><td>Actividad 5</td></tr>
<tr><td>Caja de polígonos planos. Geoplano y gomas.</td><td></td><td></td><td></td><td>Caja con regletas de Cuisenaire.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Hojas A4 en blanco y de colores, cuaderno de alumno, bolígrafos y rotuladores de colores, tijeras, pegamento, celo, hojas de enunciados y actividades, aula con pizarra, proyector y con ordenadores con acceso a internet y GeoGebra, y regla y compás para algunas comprobaciones finales.</td></tr>
</table>

Tabla 14: Recursos.

4.2.8 Planificación de actividades y tareas

La temporalización de las actividades se presenta recogida en la Tabla 15.

ACTIVIDAD	TIEMPO (min)
Explicación general de la actividad + temporalización Valoración inicial de los alumnos. Organización de los grupos. Clase magistral: técnicas de plegado de papel y axiomas.	30
Actividad 1: Diferentes áreas poligonales del terreno para plantar.	100
Actividad 2. Teselado del terreno. Maqueta y plano.	90

Actividad 3. ¿Qué y dónde plantar?	90
Actividad 4. Complementos para el jardín.	30
Actividad 5. Identidades notables *(alternativa curso superior)*	60
Presentación al grupo, valoración y evaluación	20

Tabla 15: Temporalización

Antes de comenzar la primera actividad, se explicará por parte del profesor en que consiste la situación de aprendizaje, los objetivos y contenidos a tratar.

A continuación, se realizará una encuesta como valoración inicial, para conocer el nivel de conocimientos de los alumnos, como base para crear los grupos de trabajo y poder realizar su seguimiento. Después se explicarán las técnicas de plegado de papel, símbolos, y axiomas de Huzita-Hatori, para dar comienzo la actividad 1.

4.2.8.1 Actividad 1: Diferentes áreas poligonales del terreno para plantar.

Al inicio de cada actividad, se leerá en alto el enunciado y se pondrá en común. El profesor explicará la metodología a utilizar, y aunque hará de guía durante todas las actividades, se informará al inicio de las construcciones de papiroflexia que serán necesarias emplear a lo largo de la resolución de las diferentes tareas. No implica que haya una única solución posible.

En la Tabla 16, se encuentra el enunciado de la actividad 1 que se deberá resolver. Las actividades están basadas en Hernandez (2021), Haga (2008), Hull, (2012), Johnson, (1995) y Muñoz (2023).

Actividad 1: Diferentes áreas poligonales del terreno para plantar.
Para diseñar vuestro jardín, tendréis que dividirlo previamente en diferentes áreas de terreno con forma de figuras geométricas planas, concretamente polígonos regulares. Para ser capaces de hacerlo, primero se deberán construir los polígonos regulares planos que se podrán emplear en la distribución del terreno. Empleando la papiroflexia, se deberán construir cinco polígonos regulares diferentes según el número de lados. Podrán ser de tres, cuatro, cinco, seis, y ocho lados. Estos serán los polígonos a utilizar en las actividades 2 y 3.

Resuelve: ¿Qué es un polígono? ¿Cuál es la clasificación de polígonos según sus ángulos? ¿y según su número de lados? ¿En qué se diferencia un polígono regular y otro irregular? ¿Cuáles son los elementos de un polígono? Observa las construcciones realizadas, ¿Cómo se relaciona el área de un triángulo con el de un rectángulo? Construir un rectángulo a través de un triángulo. ¿Cuál es el triángulo equilátero más grande que se puede construir dentro de un cuadrado? Demuestra que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º con ayuda de la papiroflexia. ¿Cuánto miden los ángulos interiores de los polígonos regulares? ¿y la suma de estos? (Divídelos en triángulos) Compruébalo con un transportador de ángulos. ¿Cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados?

Tabla 16: Actividad 1 (Fuente: elaboración propia)

Para poder separar el terreno en las diferentes áreas poligonales, los alumnos deberán comenzar por elaborar y conocer los diferentes tipos de polígonos regulares y profundizar en sus características.

Para realizar dicha actividad, se plantea la técnica puzzle, en grupos de 4 alumnos. Cada grupo recibirá la misma hoja con el enunciado de la actividad a resolver.

Cada integrante del grupo deberá encargarse del estudio de un polígono regular en su grupo de expertos, conocer cuáles son los elementos característicos de su polígono, sus diferentes clasificaciones, etc; para después construir mediante papiroflexia y las instrucciones dadas, dichos polígonos.

A lo largo de toda la actividad, los alumnos tendrán a su alcance por si fuese necesario polígonos como material manipulativo, y geoplanos.

Una vez todos los miembros del grupo de expertos lo tengan claro, regresarán a su grupo inicial, donde cada uno explicará al resto sus construcciones, y entre todos deberán dar respuestas a las preguntas recogidas en la Tabla 16.

A continuación, se resuelven las construcciones solicitadas en la actividad de diferentes formas.

- <u>Construcción de un triángulo equilátero.</u>

1) El primer grupo de expertos realizará la construcción de triángulos equiláteros. Comenzando con un DIN-A4, se realiza la mediatriz del lado menor del A4, formando un eje de simetría horizontal., como en la Figura 28 (derecha).

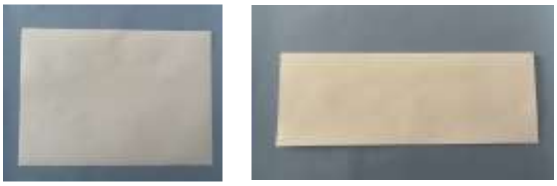


Figura 28: Paso 1. Mediatriz del lado menor del A4. (Fuente: elaboración propia)

2) Se lleva el vértice superior izquierda del lado menor de la hoja, al eje de simetría, haciendo que el doblez que se genera, pase por el vértice inferior izquierda. Ver Figura 29 (izquierda).

3) Se toma el otro vértice derecho superior, y se superpone sobre la línea del doblez anterior, como puede verse en la Figura 29 (centro).

4) Se oculta el sobrante para obtener así, el triángulo equilátero. Ver Figura 29 (derecha).

Figura 29: Paso 2, 3 y 4. (Fuente: elaboración propia)

Paso alternativo 2) Otra opción, antes de los pasos 3 y 4 previamente descritos, es tener en cuenta que, al llevar la distancia del lado menor sobre el eje de simetría, el lado menor es la altura del triángulo equilátero que se busca. Ver Figura 29 (izquierda). Por lo tanto, si se dobla por la altura del triángulo equilátero, cual eje de simetría como en la Figura 30 (izquierda), se obtiene el vértice inferior derecho del triángulo equilátero buscado. Y solo quedaría por realizarse los pasos 3, y 4 anteriores para “ocultar” el sobrante de papel.

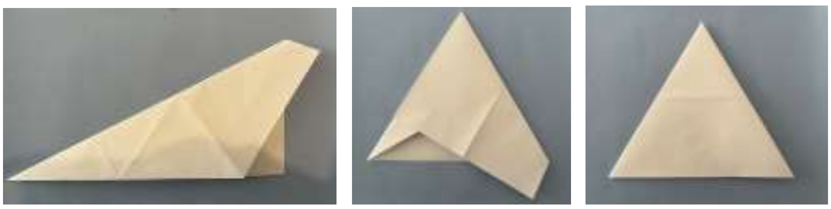


Figura 30: Paso alternativo 2, 3 y 4. (Fuente: elaboración propia)

Para que se cumpla que es un triángulo equilátero, sus lados y ángulos deben ser iguales.

En este caso, parto de un lado conocido (borde menor del A4), cuya distancia se lleva sobre el eje de simetría. De esta forma, ya se conocen dos de los vértices, un lado, y la altura del triángulo equilátero. Como esa altura, es el eje de simetría de un triángulo equilátero, si se dobla por ella, se obtendrá la figura deseada.

Se puede comprobar fácilmente que todos los ángulos y lados son iguales mediante dobleces, por tanto, el triángulo debe ser equilátero.

- <u>Construcción de un cuadrado partiendo de un A4.</u>

El segundo grupo de expertos trabajará el cuadrado.

1) Partiendo de un DIN-A4 como el de la Figura 31, se realiza la bisectriz de uno de los ángulos rectos. Este doblez es la diagonal del cuadrado, e indica los otros dos vértices.

2) Se realiza una paralela al lado menor del A4, de tal manera que el doblez pase por los puntos (vértices del cuadrado) obtenidos antes.

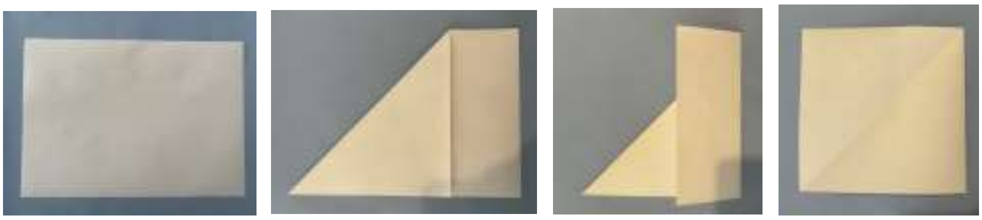


Figura 31: Construcción de un cuadrado. (Fuente: elaboración propia)

Para justificar que la figura es un cuadrado, se debe cumplir que los cuatro lados sean iguales, y los ángulos sean iguales de 90º. Como se ha partido de un folio rectangular, ya es conocido que los ángulos son rectos. En el paso 1, se ha llevado la distancia del lado menor, al mayor, generando la diagonal del cuadrado, de esta manera se obtienen los vértices del cuadrado faltantes, y los lados tienen la misma longitud.

- <u>Construcción de pentágono regular en A4.</u>

El tercer grupo de expertos se encargará de estudiar y analizar el pentágono regular.

1) Para obtener un pentágono regular, se debe recortar de la DIN-A4, una tira de 8 mm del lado mayor de la hoja como se aprecia en la Figura 32. De esta manera, se consiguen las proporciones adecuadas.

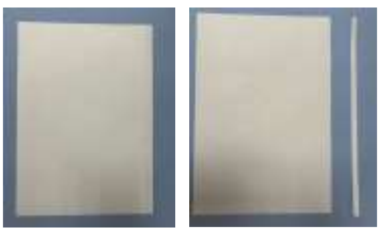


Figura 32: Paso 1. Construcción de un pentágono regular con un A4. (Fuente: elaboración propia)

2) Se realiza un doblez uniendo dos vértices opuestos del rectángulo. En este caso de la Figura 33 (izquierda), se unen los vértices A y B.

3) Se gira el papel y se realiza un doblez por el eje de simetría como en la Figura 33 (derecha). El ángulo entre el eje de simetría y uno de los lados del pentágono, lo llamaremos α.

Figura 33: Paso 2 y 3. Construcción de un pentágono regular. (Fuente: elaboración propia)

4) Se doblan los lados menores para hacerlos coincidir con el eje de simetría según la Figura 34.

Figura 34: Paso 4. Construcción de un pentágono regular. (Fuente: elaboración propia)

Para demostrar que la figura obtenida es un pentágono regular, sus ángulos interiores deben ser de 108º. Valor que se puede obtener de la siguiente forma:

Suma de los ángulos interiores de un polígono = (n – 2) · 180º, siendo n el número de lados del polígono.

La suma de los ángulos interiores de un pentágono regular, (5-2)*180º = 540º.

Al ser regular, todos los ángulos miden lo mismo, por lo tanto, 540º / 5 = 108º cada ángulo interior.

- Veamos si los ángulos interiores de nuestra construcción son 108º:

La proporción de los lados de un A4 es $\frac{297\,mm}{210\,mm}$, pero en nuestro caso como hemos reducido la longitud del lado corto 8 mm, queda una proporción $\frac{289\,mm}{210\,mm}$.

Teniendo en cuenta el ángulo α anteriormente mencionado, sabemos que tan α $\frac{289}{210}$; α≈54º.

Y como 2α son los ángulos interiores del pentágono, 2α≈108º. (Es aproximado porque habría que recortar exactamente a 289,04 para que fuese 108º. (tan 54º=x 210 ⟹x=210·tan 54º≈289,04 mm).

- <u>Construcción de pentágono regular con tira de papel</u>

Se puede construir polígonos regulares a través partiendo de un DIN A4, de una tira de papel, etc. A continuación, se propone la construcción de un pentágono regular con tiras de papel.

1) Se utiliza una tira de papel, realizándose un nudo con dicha tira, cuyo resultado puede verse en la Figura 35 (izquierda).

2) Ocultamos, doblándolas, las tiras sobrantes, como en la Figura 35 (derecha).

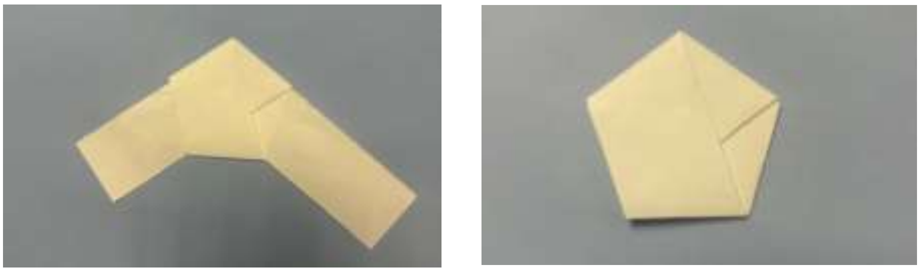


Figura 35: Paso 1 y 2. Construcción de pentágono regular con tira de papel. (Fuente: elaboración propia)

Es un pentágono regular, porque sus lados y ángulos son iguales. Se puede apreciar fácilmente desdoblando la figura, ya que se obtienen cuatro trapecios isósceles congruentes iguales (líneas verdes), que juntos forman un paralelogramo (línea rosa), (ver Figura 36). Los cuatro trapecios isósceles son iguales ya que al ser congruentes, sus ángulos son iguales.

Los lados del pentágono, lo forman las bases menores de los trapecios; y los ángulos interiores del pentágono coinciden con el ángulo que forma la base menor de los trapecios con uno de sus lados adyacentes.

Figura 36: Paso 1 y 2. Mapa de pliegues pentágono regular con tira de papel. (Fuente: elaboración propia)

- <u>Construcción de un hexágono regular partiendo de un cuadrado.</u>

El cuarto grupo de expertos será el responsable del estudio y construcción de un hexágono regular.

Se proponen diferentes alternativas, partiendo de un cuadrado, de un triángulo equilátero, y con tira de papel.

1) Partiendo de un papel A4, puedo obtener un cuadrado para comenzar con esta construcción. Se dobla para obtener cuatro partes iguales, realizando mediatrices hasta llegar a la Figura 37.

Figura 37: Paso 1. Construcción hexágono regular. (Fuente: elaboración propia)

2) Se doblan triángulos equiláteros como hemos visto en Figura 29, para localizar los puntos I, J, K, L indicados en la Figura 38 (izquierda).

Figura 38: Paso 1 y 2. Construcción hexágono regular. (Fuente: elaboración propia)

3) Dichos puntos, son vértices del hexágono. Doblamos hasta obtenerlo como en la Figura 39 (izquierda).

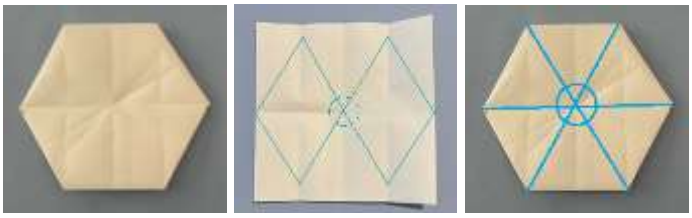


Figura 39: Paso 3. Construcción hexágono regular. (Fuente: elaboración propia)

- Justificación: Los triángulos equiláteros formados tienen 60 grados en su ángulo interior y, como hay 6 de ellos, suman 360 grados en total. (Ver Figura 39 (centro y derecha)).

▪ <u>Construcción de un hexágono regular partiendo de un triángulo equilátero.</u>

Partiendo del triángulo equilátero obtenido anteriormente, también se puede construir un hexágono regular.

1) Se obtienen las alturas del triángulo, realizando mediante dobleces la perpendicular de los lados pasando por sus vértices opuestos, Según las dos imágenes de la izquierda en la Figura 40.

2) Se doblan los tres vértices al punto donde se cortan las alturas (ortocentro), y obtenemos un hexágono. Podemos compararlo con nuestro hexágono anterior, y confirmar que ambos son regulares y semejantes. Ver las dos imágenes de la derecha en la Figura 40.

3) Como se partía de un triángulo equilátero, ortocentro, baricentro e incentro coinciden. Por tanto, si la altura del triángulo tiene distancia 1, el radio de la circunferencia inscrita tiene radio 1/3 (propiedad del baricentro) y la parte que va del incentro al vértice del triángulo mide 2/3. Al calcular su mediatriz, la longitud coincide con el radio de la circunferencia y, por tanto la circunferencia inscrita del triángulo original y del hexágono obtenido son la misma.

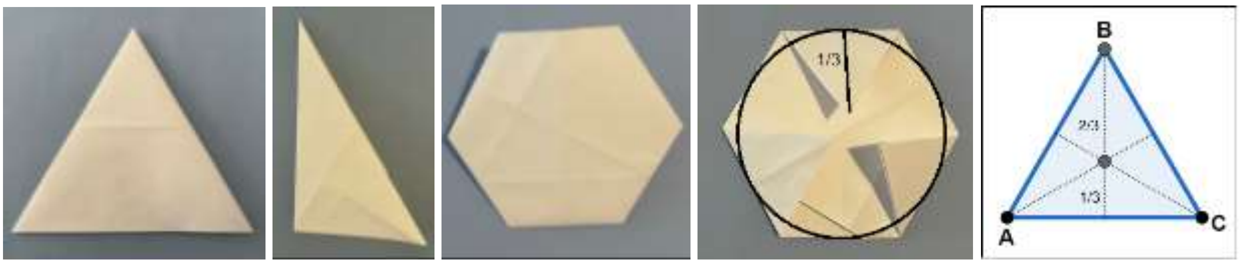


Figura 40: Contrucción hexágono regular. (Fuente: elaboración propia)

En la Figura 40 pueden observarse todos los pasos de la construcción y las justificaciones expuestas.

- Construcción de un hexágono regular con una tira de papel.

También se pueden construir hexágonos regulares con tiras de papel, aunque no cumple los Axiomas de Huzita-Hatori, como se detalla en la Figura 41.

1) Se parte de una tira de papel, y se dobla longitudinalmente.

2) Se lleva un vértice hasta el doblez realizado en el paso 1.

3) A continuación, se desplaza el otro vértice hasta donde se encuentra el primer vértice.

4) Se pliega perpendicularmente a la base de la tira, por el punto de la intersección de los vértices.

5) Se realizan los dobleces y se consigue el hexágono.

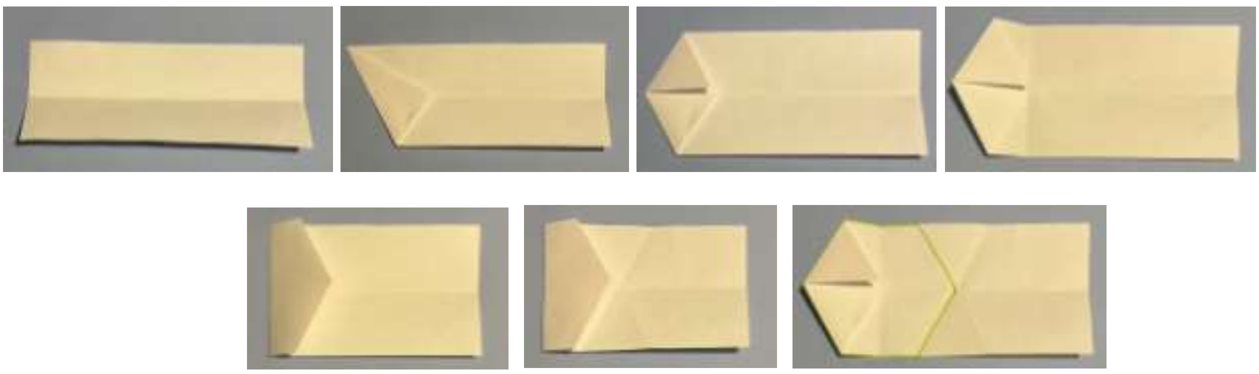


Figura 41: Contrucción hexágono regular con tira de papel. (Fuente: elaboración propia)

- <u>Construcción de un octógono regular.</u>

1) Se parte de un cuadrado y se realizan los dobleces por las diagonales del cuadrado. De esta manera se obtiene el centro de la circunferencia donde se va a inscribir el octógono.

2) Se realizan las bisectrices de las diagonales, según Figura 42 (izquierda).

3) Se lleva n dos vértices opuestos en forma de triángulo hacia abajo, y nos queda un cuadrado como en la Figura 42 (derecha), que es uno de los cuadrados formado por los dobleces del paso 2.

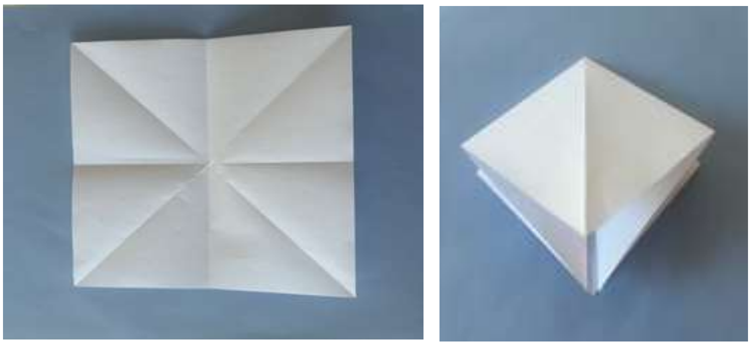


Figura 42: Paso 1, 2 y 3. Construcción octógono regular. (Fuente: elaboración propia)

4) Se dobla hacia la mitad la parte de arriba a la derecha, y se hace lo mismo con la parte de arriba a la izquierda. (Ver Figura 43 (izquierda)). Con estas bisectrices se obtienen los vértices del octógono.

5) El sobrante se dobla hacia dentro como se observa en la Figura 43 (derecha), para marcar parte de los lados del octógono.

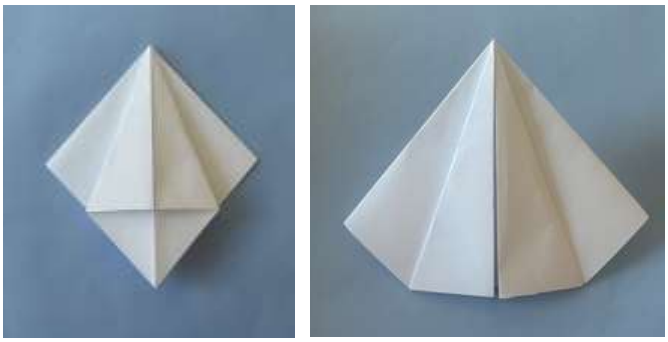


Figura 43: Paso 4 y 5. Construcción octógono regular. (Fuente: elaboración propia)

6) Se desdobla y se marcan los dobleces, obteniéndose el octógono de la Figura 44.

Figura 44: Paso 6. Construcción octógono regular. (Fuente: elaboración propia)

- Resolviendo preguntas de la ficha: ¿Cómo se relaciona el área de un triángulo con el de un rectángulo?

El rectángulo está formado por dos triángulos. Se puede justificar fácilmente mediante papiroflexia, ya que, si se divide diagonalmente un rectángulo, se observan los dos triángulos rectángulos que lo componen. Por lo tanto, el área de ese rectángulo equivale a la suma del área de esos dos triángulos.

Figura 45: Relación entre área de un triángulo y un rectángulo. (Fuente: elaboración propia)

- Resolviendo preguntas de la ficha: ¿Cuál es el triángulo equilátero más grande que se puede construir dentro de un cuadrado?

Hay numerosas posibilidades. Por lo que se les facilita un A4 a los alumnos, para que prueben a obtenerlo, mientras se les va guiando con preguntas en el proceso, para finalmente resolver como es.

Algunas de las posibles preguntas que puede ir realizando el profesor a modo de guía son, ¿Si se busca el triángulo mayor, uno de sus vértices tendrá que coincidir con uno de los vértices del cuadrado?.

Asumiéndolo como cierto, ¿los otros dos vértices deberán tocar los otros dos lados del triángulo?.

Los pasos para construir el triángulo equilátero más grande dentro de un cuadrado, serían los siguientes representados en la Figura 46.

1) Se parte de un cuadrado y se doblan ambos lados a la mitad, obteniendo los ejes de simetría, a través de las mediatrices de los lados.

2) Se dobla un vertice, mientras se lleva el vértice consecutivo a la meditriz.

3) Se realiza la misma operación con el vértice opuesto por la diagonal del cuadrado.

4) Se dobla el restante para obtener el triángulo equilátero mayor.

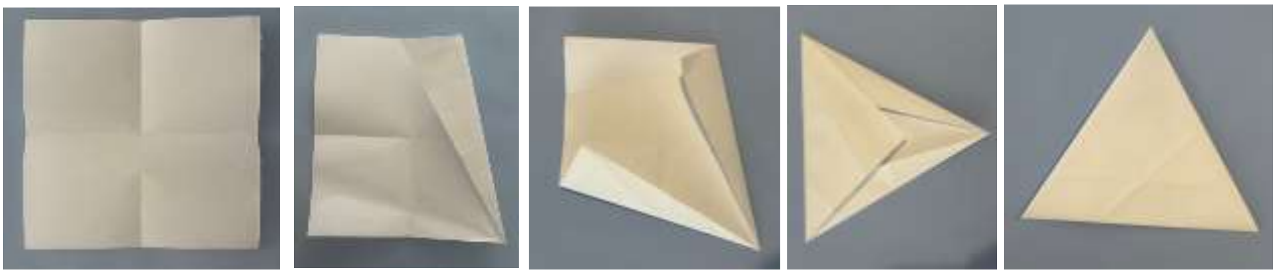


Figura 46: Triángulo equilátero más grande en un cuadrado. (Fuente: elaboración propia)

Para justificarlo matemáticamente, se puede buscar el triángulo con la mayor longitud de lado, por lo tanto, no hay que limitarse a que su lado sea el lado del cuadrado como el de la Figura 47. Sino que se busca que toquen ambos vértices los lados del cuadrado.

Figura 47: Triángulo equilátero. (Fuente: elaboración propia)

Teniendo en cuenta que, al ser un triángulo equilátero, los ángulos son de 60º y su simetría, se tiene que buscar un ángulo $0 \leq \theta \leq 15º$, y por consiguiente, $\alpha \leq 15º$, lo que lleva a buscar una posición del triángulo dentro del cuadrado como la de la Figura 48.

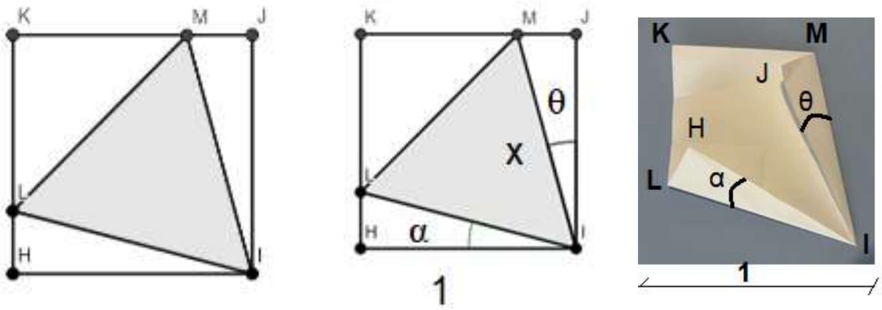


Figura 48: Justificación de triángulo equilátero más grande en un cuadrado. (Fuente: elaboración propia)

Esta actividad es apta también para cursos superiores, pudiendo realizarse en el primer curso de la educación secundaria, y retomarlo en cuarto para justificarlo mediante trigonometría. Para ello se calcula el área del triángulo, y se busca ponerlo en función de θ, en lugar de x, porque es la variable que dará la posición del triángulo dentro del cuadrado.

Por lo tanto,

$$A= {x.h}/_{2}= {\sqrt{3}}/_{4}\, sec^2\theta. \qquad \text{Siendo, } h^2 + (\tfrac{1}{2}x)^2 = x^2 \; ; h = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x$$

El máximo área se obtiene si θ = 15º = $\frac{\pi}{12}$, es decir, donde un vértice del triángulo es en una esquina del cuadrado y el triángulo es simetrico sobre la diagonal de cuadrado.

- Resolviendo preguntas de la ficha: ¿Cuánto miden los ángulos interiores de los polígonos regulares? ¿y la suma de estos? (Divídelos en triángulos) Compruébalo con un transportador de ángulos.

A continuación, se elabora con papiroflexia un transportador de ángulos:

1) Se parte de una hoja cuadrada y se dobla por uno de los ejes de simetría (mediatriz de un lado), y se desdobla.

2) Se toma un vértice y se lleva hasta el pliegue anterior (eje de simetría), haciendo que el nuevo pliegue pase además por el vértice contiguo como en la Figura 49.

Figura 49: Paso 2. Transportador de ángulos. (Fuente: elaboración propia)

3) Se toma el vértice superior izquierdo y se traslada hasta el pliegue de simetría, haciendo que el nuevo doblez pase también por el vértice superior derecho. (Ver Figura 50 (izquierda)).

4) Se dobla la base según se indica en la imagen de abajo. (Ver Figura 50 (derecha)).

Puede observarse en este punto que todos los triángulos que componen el grande, son triángulos rectángulos escalenos.

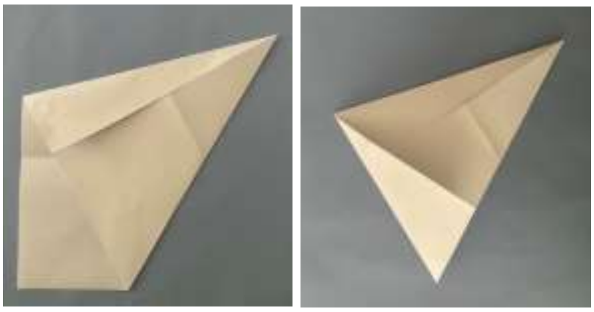


Figura 50: Paso 3 y 4. Transportador de ángulos. (Fuente: elaboración propia)

5) Se identifican los ángulos generados como en la Figura 51 (izquierda). Se desdoblan los pliegues y se analiza el mapa de pliegues. Los 30º indicados en dicha figura, se deducen del triángulo equilátero que se está generando en la Figura 49, similar a la creación de la Figura 29.

Una vez identificados los ángulos más sencillos, se pueden sacar el resto a través de relaciones entre triángulos, ángulos formados por rectas secantes, ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante, ángulos complementarios, ángulos suplementarios, etc. Hasta llegar a la Figura 51 (derecha).

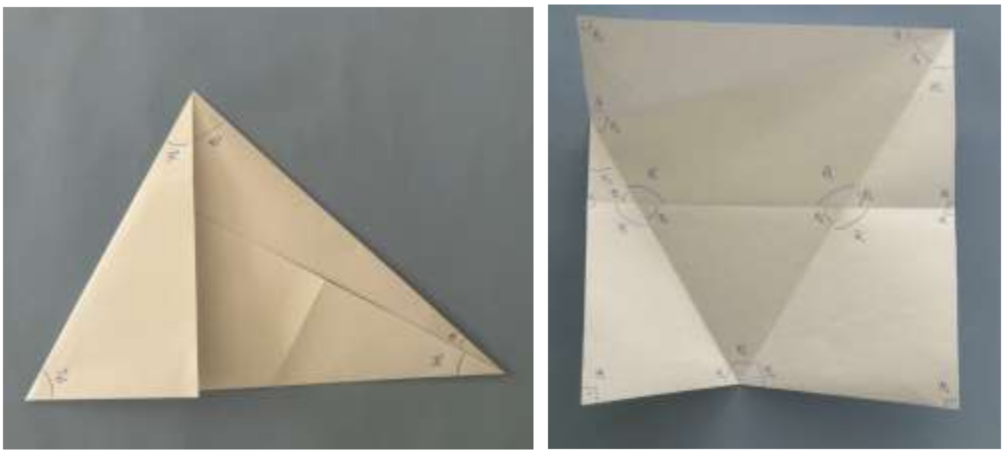


Figura 51: Transportador de ángulos. (Fuente: elaboración propia)

- Resolviendo preguntas de la ficha: Demuestra partiendo de un A4 que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º con ayuda de la papiroflexia.

Además de descubrir de forma manipulativa y visual la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo, con este ejercicio se busca que el alumno ponga en práctica la suma geométrica de ángulos.

1) El alumno debe construir un triángulo cualquiera doblando el papel A4, y recortar el sobrante para obtener su triángulo.

2) A continuación, se pueden recortar los vértices del triángulo y colocarlos uno a continuación del otro, para sumarlos.

Sin embargo, la opción que el profesor promoverá entre los distintos grupos es

1) Realizar la perpendicular del lado CB que pase por el vértice A. Es decir, el pliegue generado es una de las alturas del triángulo.

2) Se lleva el vértice A al punto de intersección de la altura con el lado del triángulo CB.

3) Se pliegan los vértices C y B, contiguos al vértice A, como en la Figura 52, demostrando que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º. Se puede comprobar con el transportador de ángulos construido previamente.

Como cada alumno parte de un triángulo cualquiera, se puede comprobar fácilmente, que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo siempre es 180º.

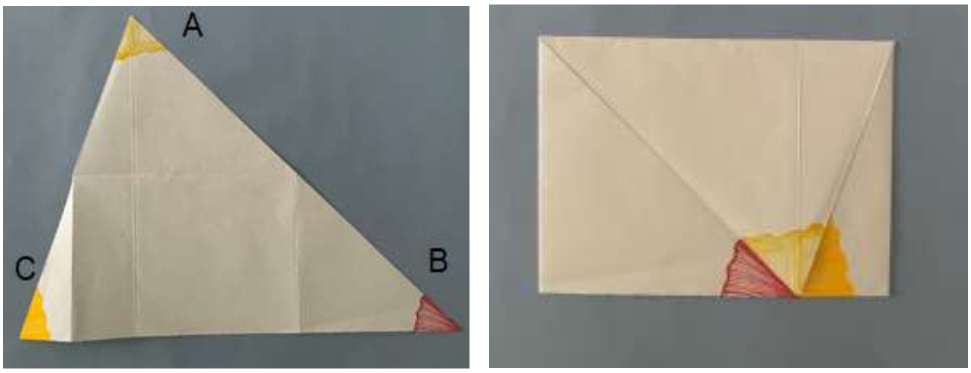
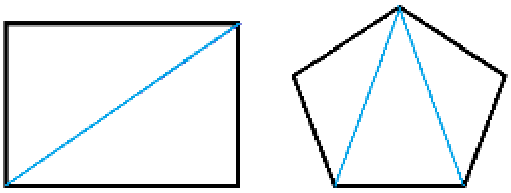


Figura 52: Demostración suma de los ángulos de un triángulo. (Fuente: elaboración propia)

Para comprobar matemáticamente, la suma de los ángulos interiores de un polígono, se trazan las diagonales interiores que parten de un vértice, formando un total de triángulos igual al número de lados menos dos. Es decir, *(n-2)* es el número de triángulos que se pueden formar desde un vértice con las diagonales. En la Figura 53 se muestra un rectángulo y un pentágono regular a modo de ejemplo.



$n = 4$ $\quad$ $n = 5$

$(n-2) = 2$ $\quad$ $(n-2) = 3$

Figura 53: Número de triángulos dentro de un rectángulo y un pentágono. (Fuente: elaboración propia)

Por lo tanto, la suma de los ángulos interiores de un polígono, siendo *n* el número de lados, es *180º·(n-2).*

En el caso de un triángulo, *180º·(n-2) = 180º·(3-2) = 180º* es la suma de los ángulos interiores.

4.2.8.2 Actividad 2: Teselado del terreno. Maqueta y plano.

Actividad 2. Teselado del terreno. Maqueta y plano.
Utiliza los polígonos regulares elaborados en la actividad 1 con papiroflexia (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, y octógono), para buscar diferentes formas de crear mosaicos. *Como plantaremos una planta diferente en cada figura geométrica, nos interesa elegir el teselado que sea capaz de cubrir el plano con mayor diversidad de figuras. Así se plantará un jardín más bonito.* *Para poder componer los diferentes mosaicos, es importante que el lado de todas las figuras mida lo mismo, por ello se deberán dibujar los polígonos regulares planos semejantes a los ya construidos en la actividad 1, pero cuyo lado mida 2 cm. Para cada polígono se deberá utilizar una hoja de papel de un color diferente. Ayúdate del Teorema de Tales.*
¿Qué son los mosaicos regulares? ¿y semiregulares?
¿Cuál es el número mínimo de polígonos regulares con el que se pueden formar mosaicos regulares?
¿Por qué algunos polígonos regulares no teselan el plano? ¿Sabrías demostrarlo matemáticamente?
De todas las combinaciones posibles nos quedaremos con la que emplea más polígonos diferentes. ¿Cuál es?.

Tabla 17: Actividad 2. (Fuente: elaboración propia).

En la actividad 2 enunciada en la Tabla 17, se propone aplicar Tales para dibujar polígonos semejantes a los ya construidos en la actividad 1, pero de lado de 2cm. Se insta a los alumnos a manipular dichos polígonos para diseñar las diferentes composiciones que pueden cubrir el plano, no todas las combinaciones de polígonos son válidas. Se deberá llegar a las conclusiones indicadas en la Tabla 18 y 19.

En esta actividad basada en Reyes-Iglesias (2023) y Muñoz (2023), se busca profundizar en los tipos de mosaicos regulares e irregulares. Conocer que los mosaicos regulares se forman con único polígono regular que se repite, mientras que en los semiregulares intervienen más de una clase de polígonos regulares, pero debe ocurrir que en cada vértice del mosaico la disposición sea la misma.

Posteriormente los alumnos podrán resolverlo matemáticamente.

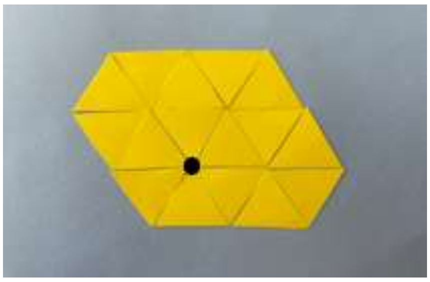
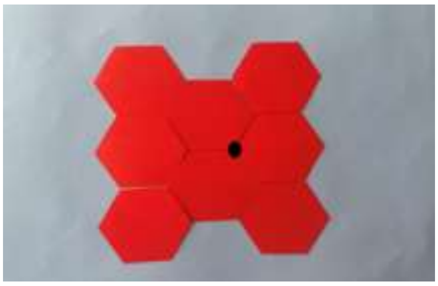
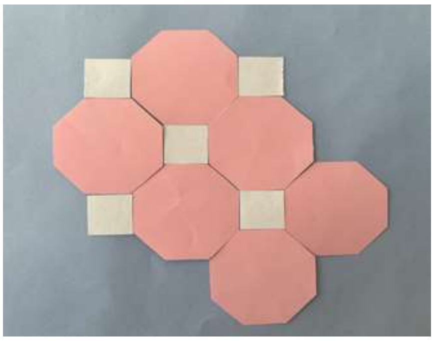
Mosaicos regulares		
Teselado de triángulos		(3,3,3,3,3,3)
Teselado de cuadrados		(4,4,4,4)
Teselado de pentágonos		No puede construirse un mosaico regular. No cubre el plano.
Teselado de hexágonos		(6,6,6)
Teselado de octógonos		No puede construirse un mosaico regular. No cubre el plano.

Tabla 18: Mosaicos regulares. (Fuente: elaboración propia).

Mosaicos semiregulares		
Teselado de octógonos y cuadrados		(4,8,8)
Teselado de hexágonos y triángulos	 	(3,6,3,6) (3,3,3,3,6)
Teselado de triángulos y cuadrados	 	(3,3,4,3,4) (3,3,3,4,4)

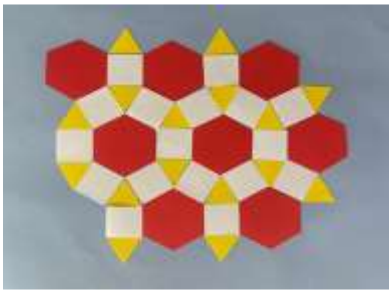
Teselado de triángulos, cuadrados y hexágonos		(3,4,6,4) Este teselado esta compuesto por tres diferentes polígonos, mientras el resto solo tiene dos o uno, por lo tanto es el que utilizaremos en nuestro jardín.

Tabla 19: Semiregulares. (Fuente: elaboración propia).

- Demostración de qué polígonos regulares son los que teselan el plano.

Para demostrar matemáticamente como se agrupan los polígonos alrededor de un vértice, es muy importante conocer el ángulo interior que me va a aportar cada polígono.

Para teselar el plano, los ángulos interiores de los polígonos en el vértice deben sumar 360º. Si fuese más se superpondrían; y si fuese menos, no podrían recubrir todo el plano.

En los mosaicos regulares,

Sea *k* el número de polígonos que rodean un vértice, sabemos que debe estar comprendido entre los siguiente valores $3 \leq k \leq 6$, porque $k \leq 3$ no es posible, ya que no hay ningún polígono cuyo ángulo interior mida 180º, por lo que no puede haber solo dos polígonos en un vértice. Tampoco puede haber 6 polígonos en un vértice ya que el triángulo equilátero es el polígono regular con menor ángulo interior y es de 60º. Es decir, $\frac{360}{60} = 6$.

Teniendo en cuenta el valor del ángulo interior del polígono regular:

$$k\frac{n-2}{n} \cdot 180º = 360º \Leftrightarrow k\frac{n-2}{n} = 2$$

Siendo n el número de lados del polígono regular.

Si k=3, entonces n=6, por lo que concurren 3 polígonos de 6 lados.

Si k=4, entonces n=4, por lo que concurren 4 polígonos de 4 lados.

Si k=5, entonces 3n=10, imposible.

Si k=6, entonces n=3, por lo que concurren 6 polígonos de 3 lados.

Por lo tanto, ya se ha demostrado que existen tres tipos de mosaicos regulares. Formado por triángulos, por cuadrados o por hexágonos.

4.2.8.3 Actividad 3: ¿Qué y dónde plantar?

Una vez seleccionado el teselado de siembra del jardín de la residencia, (3,4,6,4), se ha de decidir que plantar y donde ubicar las semillas, plantas o flores. Esto se desarrollará en la actividad 3 en dos partes con temporalización diferente. La primera parte uno se describe en la Tabla 20, y la parte dos en la Tabla 23.

Ambas partes están basadas en Manualidades (2020), Expediente (2017a), Expediente (2017b), Medina (2021) y Olson (1976).

Actividad 3. Parte I: ¿Qué se debe plantar?

Investigación:

¿En qué ciudad se encuentra la residencia y su jardín? ¿Cuál es el origen de tu ciudad?.

¿Sabrías a qué comunidad autónoma pertenece? ¿Podrías ubicarla en un mapa de la península ibérica? ¿Qué ríos y afluentes pasan por la ciudad?.

¿Qué tipo de clima tiene y cuáles son sus características? ¿Crees que hay relación entre su clima y su ubicación?.

Se necesitan seleccionar plantas y flores para sembrar en el jardín, ¿Qué tres plantas y flores resistirán mejor dicho clima? Puedes fijarte en tu entorno (parques públicos, rotondas, jardines particulares, etc.).

¿Qué características y cuidados necesitan las plantas y flores elegidas? ¿Cuál es la mejor época del año para plantarlas o sembrarlas? ¿Cada cuánto hay que regarlas?.

Realiza mediante papiroflexia la hoja de árbol de otoño que se propone en la Figura 54. Desdóblala y analiza su mapa de plegado, y resuelve las preguntas realizadas a continuación.

Figura 54: Hoja de árbol de otoño. (Fuente: elaboración propia)

¿Qué tipos de ángulos eres capaces de encontrar? ¿Rectos, agudos, obtusos, llanos y completos? ¿Convexos y cóncavos? ¿Complementarios y suplementarios?.

¿Qué relaciones hay entre ángulos y rectas?

Localiza ángulos formados por rectas secantes, y ángulos formados por una recta secante que corta dos rectas paralelas. ¿Qué características tienen? Mediatriz y bisectriz. Demuestra su definición. ¿Existe simetría? Localiza algún eje de simetría. ¿Cuál es la diferencia entre figuras semejantes y figuras idénticas? Encuentra ejemplos. ¿Cuántos tipos de triángulos distintos localizas en el mapa?

Tabla 20: Actividad 3. Parte I.

Individualmente, se realizará una pequeña investigación sobre el clima de su ciudad, condiciones de riego, etc., y se concluirá seleccionando tres plantas o flores que se consideran adecuadas para plantar en dicho jardín.

Se debe tener también en cuenta el tamaño de área de siembra disponible en cada parcela (Es decir, el área de cada polígono regular del teselado elegido en la actividad 2).

A continuación, en parejas, se realizará una figura en papiroflexia, siguiendo las instrucciones de doblado, guiados por el profesor. Después, se analizará su mapa de pliegues para conocer sus tipos de ángulos, relaciones entre rectas y ángulos, y tipos de triángulos.

- Resolviendo las preguntas del mapa de plegado de la hoja de árbol.

En primer lugar, construye la figura a partir de un cuadro de papel, siguiendo la hoja de instrucciones que el profesor facilitará.

Una vez obtenida la Figura 54, se deshacen todos los pliegues para poder realizar el resto de la actividad utilizando el mapa de pliegues de la Figura 55.

Figura 55: Mapa de pliegues. (Fuente: elaboración propia)

La primera pregunta que se propone a los alumnos es para profundizar en los tipos de ángulos, y que sean capaces de reconocerlos.

En la Tabla 21 se plantea una solución posible, pero no es la única posible. Hay muchas diferentes.

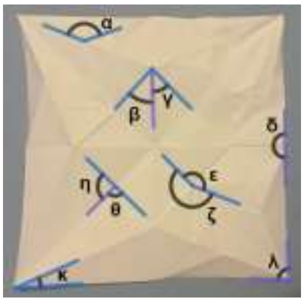
$\beta + \gamma = 90º$. Son ángulos complementarios.	$\kappa < 90º$. Es un ángulo agudo.	
$\eta + \theta = 180º$. Son ángulos suplementarios.	$\alpha > 90º$. Es un ángulo obtuso.	
ε es convexo	$\delta = 180º$. Es un ángulo llano.	
ζ cóncavo.	$\lambda = 90º$. Es un ángulo recto.	

Tabla 21: Tipos de ángulos. (Fuente: elaboración propia).

En la Tabla 22 se muestra un ejemplo de relaciones de ángulos y rectas localizados en el mapa de pliegues.

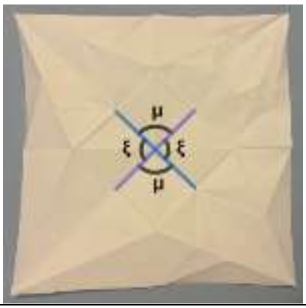
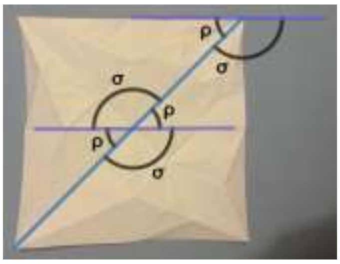
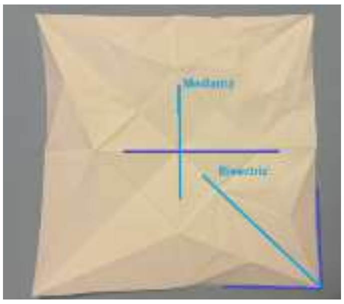
Relación ángulos formados por rectas secantes		Todos los ángulos tienen el mismo vértice. Lados de uno son prolongación del otro. Ángulos opuestos son iguales.
Relación ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante		Ángulos alternos internos son congruentes Ángulos alternos externos son congruentes Ángulos correspondientes son congruentes
Mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo.		Mediatriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos. La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas que forman el ángulo.

Tabla 22: Relación ángulos y rectas. (Fuente: elaboración propia).

Se pide calcular la mediatríz y bisectriz con papiroflexía, para absorver y comprender los nuevos conceptos. Lo cual, puede hacerse de la siguiente manera. (Barcenilla, 2023).

- Demostración de la mediatriz: Para poder demostrar que una mediatriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos, se puede comprobar con papiroflexia que todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del segmento, como puede verse en la Figura 56-derecha.

Figura 56: Mediatriz y demostración de la definición. (Fuente: elaboración propia).

- Demostración de la bisectriz: Para demostrar que la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas que forman el ángulo, se puede comprobar con papiroflexia que todos los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo, como puede verse en la Figura 57 (izquierda).

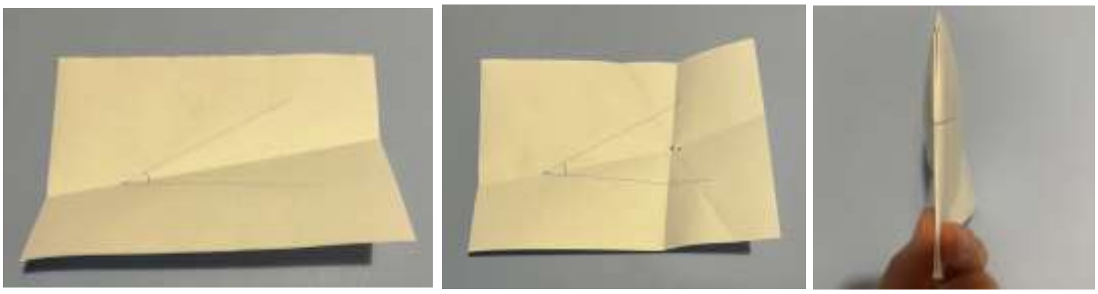


Figura 57: Bisectriz y demostración de la definición. (Fuente: elaboración propia).

Respecto a localizar figuras semejantes, no existe una única solución, pero se debe razonar correctamente que son semejantes porque tienen ángulos iguales y los lados proporcionales. Se proponen las soluciones de la Figura 58.

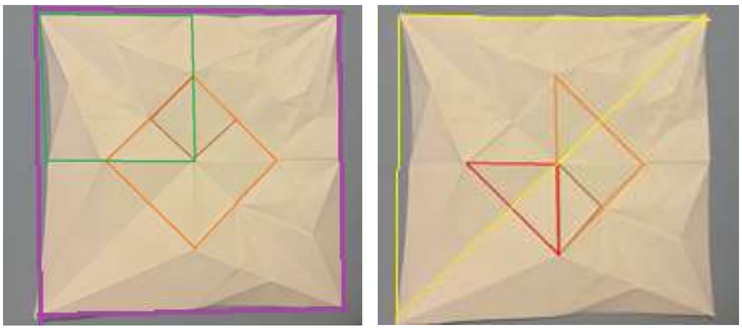


Figura 58: Figuras semejantes. (Fuente: elaboración propia).

También se pregunta por la simetría de figuras en el mapa de pliegues, debiendo ser capaces de localizar algún eje de simetría, e identificar figuras idénticas. Es decir, figuras que tienen sus lados y ángulos iguales. Como por ejemplo las que se indican a continuación en la Figura 59.

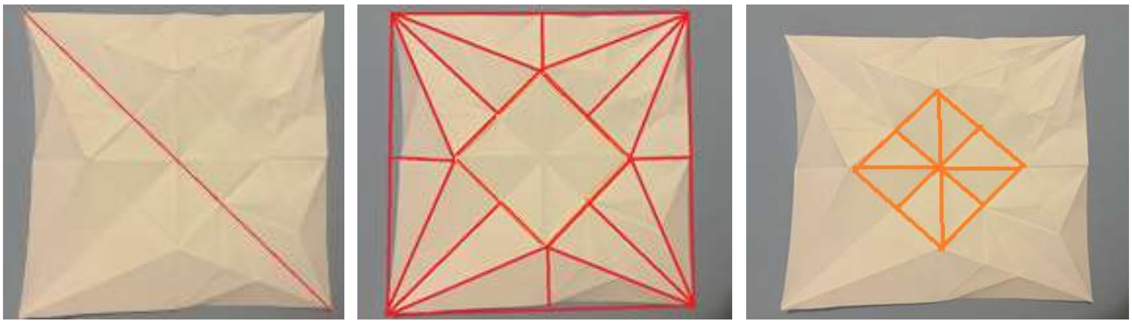


Figura 59: Ejemplo de eje de simetría y figuras idénticas. (Fuente: elaboración propia).

Dentro del mapa de pliegues, se pide localizar todos los tipos de triángulos que puedan. De esta manera, tendrán que profundizar en las clasificaciones de triángulos según sus lados y ángulos, para ser capaces de reconocerlos.

Tras la realización de dicho ejercicio, debería poder localizar distintos tipos de triángulos. Un ejemplo de ello se recoge en la Figura 60.

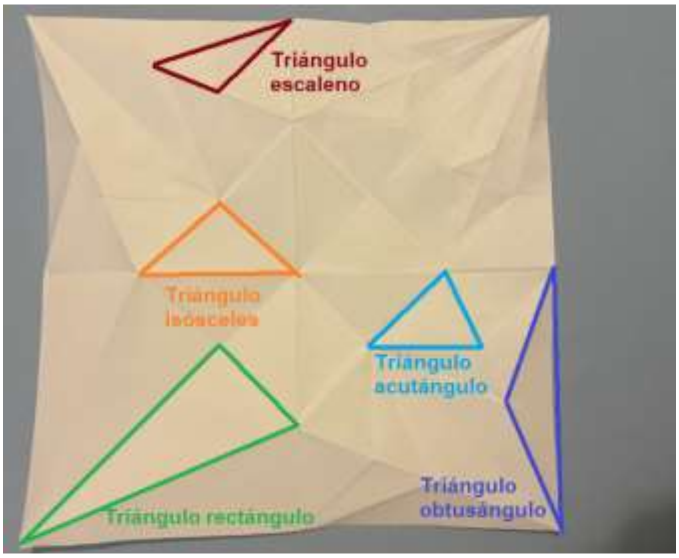


Figura 60: Tipos de triángulos según sus lados y ángulos. (Fuente: elaboración propia).

Ya se conocen los polígonos regulares empleados para la creación del teselado, es decir, las diferentes parcelas (actividad 2), y las plantas y/o flores a utilizar (actividad 3 parte I), solo queda saber dónde ubicarlas, y de eso trata la segunda parte de la actividad 3 descrita en la Tabla 23.

Actividad 3. Parte II: ¿Dónde plantar con papiroflexia?
Cada planta debe ubicarse en los siguientes puntos: *- Planta tipo 1. Ubicar en la parcela triangular. Como ya se ha visto en la actividad 2, se trata de un triángulo equilátero, y deberá plantarse en su ortocentro.* *- Planta tipo 2. Plantar en la parcela cuadrada. Concretamente se plantarán en el incentro de cada uno de los triángulos que aparecen tras trazar todas las diagonales internas del cuadrado.* *- Planta tipo 3. Serán las seleccionadas para la parcela hexagonal, cuyo perímetro es un hexágono regular, como ya se vio en la actividad anterior. Para conocer la posición exacta de la planta, primero se deben trazar las diagonales interiores del hexágono, y en los triángulos que se forman, si el triángulo es obtusángulo plantarla en el baricentro. Si no, en el circuncentro.* *Si en el mismo punto coinciden dos plantas, sembrar solo una.*
Responde: ▪ Realiza con papiroflexia las diferentes construcciones y localiza los puntos donde se ubican las plantas en cada uno de los triángulos que se forman dentro de los diferentes polígonos regulares del teselado, según se ha indicado en el enunciado. ▪ ¿Hay algún punto en el que vayan a coincidir dos plantas? Razónalo matemáticamente. ▪ En un triángulo obtusángulo, ¿podría plantarse la semilla en ortocentro o circuncentro? ¿Por qué? ¿En qué tipo de triángulo quedarían dentro del triángulo? Resuelve esto con GeoGebra. ▪ ¿Por qué no se planta en el ortocentro de los triángulos que se forman dentro del cuadrado? ▪ ¿Cuántos triángulos hay tras trazar las diagonales interiores dentro de los polígonos regulares empleados en los teselados de la actividad 2? Ayúdate con GeoGebra. ▪ ¿Qué tipo de triángulos se forman tras trazar las diagonales interiores de los polígonos regulares de 3, 4, 5 y 6 lados? Clasifícalos según sus ángulos, y según sus lados. Ayúdate con GeoGebra. ▪ ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de cada polígono? ▪ ¿Qué es la recta de Euler? Demuéstrala con papiroflexia en un triángulo acutángulo. ¿En qué triángulos queda definida dicha recta y en cuáles no? ▪ Investiga sobre los cuadriláteros. ¿Qué son? ¿Cómo se clasifican? Relaciona mediante papiroflexia, el área de los diferentes cuadriláteros con el área de un rectángulo o un cuadrado.

Tabla 23: Actividad 3. Parte II.

Antes del comienzo de la actividad, el profesor explicará en qué consiste e indicará su temporalización, al igual que se ha hecho en el resto de actividades.

Como en la parte I, ya se han activado los conocimientos de los tipos de triángulos según sus lados y ángulos, quedaría una introducción a los lugares notables del triángulo, que se realizará por parte del profesor con una clase magistral participativa a través de la técnica de la pregunta, donde empleando la pizarra, regla y una cuerda y tiza a modo de compas, explicará los conceptos de baricentro, incentro, ortocentro y circuncentro. Durante el desarrollo de la parte 2, esta información esquemática permanecerá en la pizarra a modo de ayuda.

En esta actividad se estarán trabajando los puntos y rectas notables de un triángulo, y se reforzarán los tipos de triángulos y cálculo de áreas y perímetros de los diferentes polígonos regulares planos.

Para poder resolverlo, los alumnos se agruparán de la misma forma que en la actividad 1 y 2, y se empleará la metodología cooperativa, propuesta por Pere Pujolàs, Uno para todos.

Para el desarrollo de esta técnica, primeramente, se proponen por parte del profesor unas preguntas y ejercicios a resolver, y en grupos, se comenzará a trabajar sobre el primer ejercicio o pregunta consensuando la respuesta y asegurándose de que todos han entendido y comprendido su resolución. Es fundamental, no pasar al siguiente ejercicio hasta que se comprenda por parte de todos los alumnos del grupo el ejercicio anterior. Una vez finalizado el tiempo, se pedirá a un alumno al azar de cada grupo, que explique el proceso seguido en cada ejercicio. La calificación de la exposición de ese alumno, será también la del resto del equipo.

Se propone el uso de GeoGebra como parte del proceso de aprendizaje para ayudarles a concluir que sus resoluciones con papiroflexia son correctas.

- <u>Resolviendo actividad 3 parte II.</u>

Se podrá partir de uno de los polígonos regulares ya construidos en la actividad 1 y 2 y utilizarlos como plantilla para obtener otro, o elaborar uno con regla y compas. Si se tiene en cuenta la clasificación de triángulos según los ángulos, sería un triángulo acutángulo.

- Triángulo equilátero

No tiene diagonales interiores, y la suma de sus ángulos interiores es 180º, el cual puede obtenerse por cualquiera de las diferentes formas explicadas en la actividad 1. Por ejemplo, se pueden cortar los vértices de un triángulo y posicionarlos de forma consecutiva; empleando la expresión algebraica $180° \times (n - 2)$.

En el ejercicio se pide obtener su ortocentro, como en la Figura 61 (derecha). Para obtenerlo, se deben realizar mediante pliegues, las diferentes alturas utilizando el axioma 4 (O4), (ver Figura 61 (centro)).

Figura 61: Ortocentro de un triángulo equilátero. (Fuente: elaboración propia).

- Cuadrado

Tras realizar la única diagonal interior según la Figura 62, se obtienen dos triángulos rectángulos idénticos si se tiene en cuenta la clasificación según sus ángulos, o dos triángulos isósceles según el número de lados.

La suma de los ángulos interiores es 360º.

Figura 62: Triángulos que se forman con la diagonal interior de un cuadrado. (Fuente: elaboración propia).

Se plantará en el incentro de cada triángulo según la Figura 63 (derecha). Para obtenerlo se deben trazar las bisectrices de cada uno de los ángulos interiores con el axioma 3, (O_3), como en la Figura 63 (centro).

Figura 63: Incentro de un triángulo. (Fuente: elaboración propia).

- Hexágono

Tras trazar las diagonales interiores de la Figura 64 (izquierda), se obtienen dos triángulos rectángulos idénticos y dos triángulos obtusángulos también idénticos, como se aprecia en la Figura 64 (derecha). Sin embargo, teniendo en cuenta la clasificación según el número de lados, son dos escalenos idénticos y dos isósceles.

La suma de los ángulos interiores es 720º.

Figura 64: Diagonales interiores de un hexágono. (Fuente: elaboración propia).

En el caso de los dos triángulos obtusángulos, para obterner los baricentros de la Figura 65, se deben realizar las medianas de cada lado del triángulo, Siendo la mediana el segmento que une un vértice con el punto medio de lado opuesto. Axioma 2 (O_2) para realizar la mediatriz de un segmento y así obtener el punto medio de cada lado, y axioma 1 (O_1) para realizar el pliegue que uno dos puntos dados.

Si se pone el bolígrafo sobre el baricentro, se sujeta el papel, porque es el punto donde se equilibra la masa. Es su centro de gravedad.

Figura 65: Baricentro de un triángulo obtusángulo. (Fuente: elaboración propia).

En los triángulos rectángulos, realizamos la mediatriz de cada uno de los lados, y obtenemos el circuncentro como en la Figura 66. Siendo este el centro de la circunferencia circunscrita al triangulo. Axioma 2 (O_2).

Figura 66: Circuncentro de un triángulo rectángulo. (Fuente: elaboración propia).

En este caso, al ser un triángulo rectángulo, el punto queda localizado en la hipotenusa. Al encontrarse dicho triángulo junto a su identico por la hipotenusa, ambos circuncentros coinciden en el mismo punto. Al coincidir dos plantas en el mismo punto, solo se sembrará una según se indica en el enunciado. De tal manera, los puntos donde se ubicarán las plantas serán los indicados en la Figura 67.

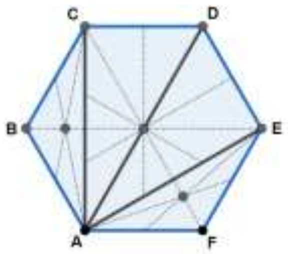


Figura 67: Localización de las plantas en las áreas hexagonales. (Fuente: elaboración propia).

- ¿Por qué no se puede poner la semilla en el circuncentro u ortocentro en un triángulo obtusángulo?

  Porque quedaría fuera del triángulo como se aprecia en la Figura 68, y estaríamos plantando la semilla en otra área de terreno que no le corresponde. Sin embargo, si fuese un triángulo acutángulo en ambos casos las semillas quedarían dentro de dicho triángulo.

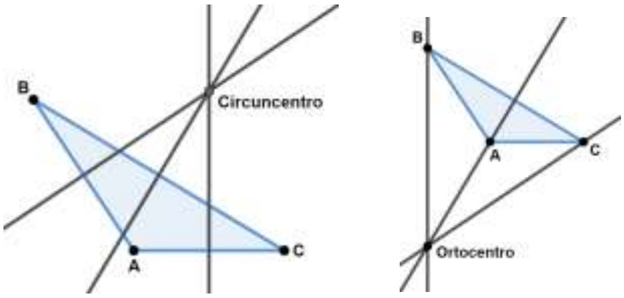


Figura 68: Circuncentro y ortocentro en un triángulo obtusangulo. (Fuente: elaboración propia).

- ¿Por qué en los triángulos que se forman en el cuadrado no se planta en el ortocentro?

Porque son triángulos rectángulos, y en este caso, el ortocentro quedaría en el vértice del ángulo recto, y afectaría al área poligonal de sembrado contigua, no respetando el espacio entre plantas.

- ¿Qué es la recta de Euler? Demuéstrala con papiroflexia en un triángulo acutángulo. ¿En qué triángulos queda definida dicha recta y en cuáles no?

La recta de Euler es la recta sobre la que quedan situados y alineados el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo, y quedaría como en la Figura 69 izquierda en un triángulo acutángulo.

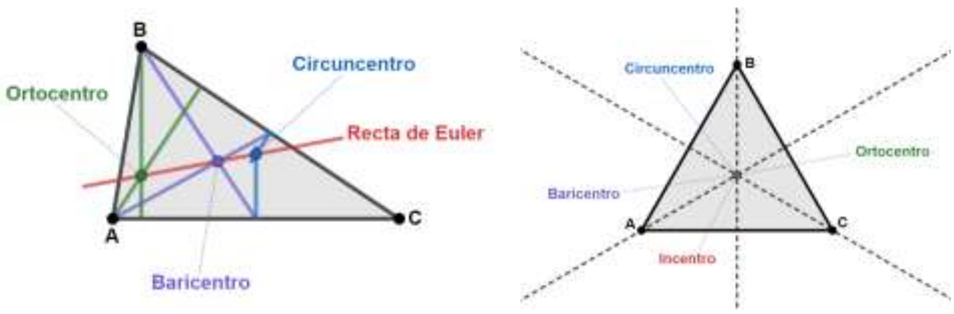


Figura 69: Recta de Euler. (Fuente: elaboración propia).

Cabe mencionar que, en un triángulo equilátero, todos los puntos notables del triángulo coinciden en el mismo punto, por lo que la recta de Euler no queda definida. Ver Figura 69 (derecha).

- Investiga sobre los cuadriláteros. ¿Qué son? ¿Cómo se clasifican? Relaciona mediante papiroflexia, el área de los diferentes cuadriláteros con el área de un rectángulo.

Se deberá elaborar una tabla con la clasificación de los cuadriláteros similar a la Tabla 24, por parte de los alumnos.

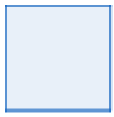
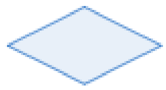
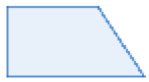
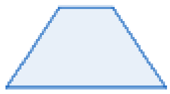
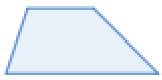
<table>
<tr><td rowspan="8">Cuadriláteros</td><td rowspan="4">Paralelogramos
(lados paralelos dos a dos)</td><td>Cuadrado</td><td></td><td>5 lados iguales
4 ángulos rectos</td></tr>
<tr><td>Rectángulo</td><td></td><td>Lados iguales 2 a 2
4 ángulos rectos</td></tr>
<tr><td>Rombo</td><td></td><td>4 lados iguales
Ángulos iguales 2 a 2</td></tr>
<tr><td>Romboide</td><td></td><td>Lados y ángulos iguales 2 a 2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Trapecios
(dos lados paralelos)</td><td>Trapecio rectángulo</td><td></td><td>Un lado, de los dos no paralelos, es perpendicular a los dos paralelos</td></tr>
<tr><td>Trapecio isósceles</td><td></td><td>Lados no paralelos son iguales</td></tr>
<tr><td>Trapecio escaleno</td><td></td><td>Lados no paralelos desiguales y no perpendiculares a los paralelos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Trapezoides (ningún lado paralelo)</td></tr>
</table>

Tabla 24: Clasificación de cuadrilateros. (Fuente: elaboración propia).

- Demostración área de un rombo:

Se parte de una DIN-A4 para obtener nuestro rombo, y se comienza doblando por la mitad de sus lados como en la Figura 70 (izquierda). Para obtener el rombo, se realiza un pliegue en cada esquina que pase por los puntos medios de los lados más cercanos.

A continuación, se separan los triángulos sobrantes, que nos servirán para comprobar que, si se superponen sobre el rombo original, se forma otro completamente idéntico. Ver Figura 70 (derecha).

De aquí se deduce que el área de estos triángulos es igual al área del rombo. Entonces con un rectángulo se dibujan dos rombos idénticos, por lo que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo.

Área del rombo = $\frac{\text{área del rectángulo}}{2} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$

Siendo D, la diagonal mayor del rombo, igual a b, base del rectángulo.

Siendo d, la diagonal menor del rombo, igual a h, altura del rectángulo.

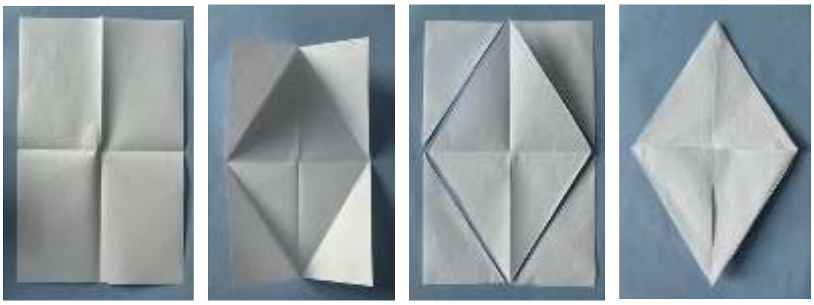


Figura 70: Demostración relación entre área de un rombo y un rectángulo. (Fuente: elaboración propia).

- Demostración área de un romboide:

Se pliega por una de las alturas del romboide, y se corta por el doblez, para llevar el triángulo obtenido al lado opuesto del romboide, y formar el rectángulo de la Figura 71 (derecha). (BuenExpediente, 2017).

Se sabe que el área de un rectángulo es $A=b \cdot h$, siendo b, la base; y h, la altura del rectángulo. Por lo tanto, el área del romboide será también $A=b \cdot h$.

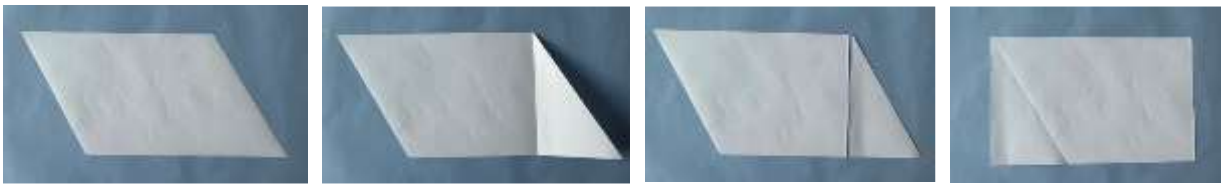


Figura 71: Demostración relación entre un romboide y un rectángulo. (Fuente: elaboración propia).

- Demostración área de un trapecio:

Se parte de dos trapecios cualesquiera idénticos.

Se dobla en uno de ellos por la altura de uno de sus lados, cortando el triángulo obtenido. Entonces se puede comprobar que juntos forman un rectángulo, cuya área es:

Área del rectángulo = b·h = (Base mayor del trapecio + base menor del trapecio)·h

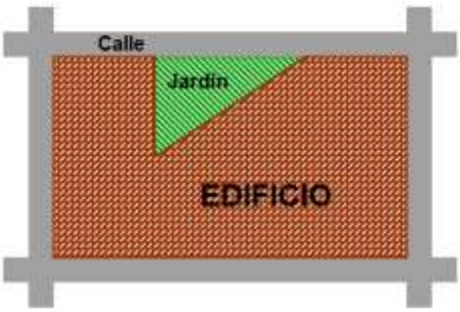
Por lo tanto, el área del trapecio será la mitad del área del rectángulo, porque con dos trapecios se ha construido el rectángulo de la Figura 72 (derecha).

$$\text{Área del trapecio} = \frac{\text{Área del rectángulo}}{2} = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

Figura 72: Demostración relación entre área de un trapecio y un rectángulo. (Fuente: elaboración propia).

4.2.8.4 Actividad 4: Complementos para el jardín.

Para completar el jardín se propone poner una serie de puntos de luz, y con ello la actividad 4 de la Tabla 25, donde se han tomado ideas de Sally & Sally (2007) y Papiromates (2014).

Actividad 4: Complementos para el jardín.
Para completar el jardín deberemos instalar seis pequeñas farolas en el lado del jardín que da a la calle. Es importante que todas las farolas estén a la misma distancia entre ellas. Plano en planta:  *Figura 73: Plano en planta de la residencia. (Fuente: elaboración propia).*

Parte I Observa el plano de la residencia. ¿Qué forma poligonal tiene el jardín de la residencia? ¿Cómo podemos saber a qué distancia poner una farola de otra si no podemos medir?
Parte II Al inicio del atardecer las farolas proyectarán una sombra de 1 metros de longitud sobre el jardín. Si la distancia desde la parte más alta de una farola al extremo más alejado de su sombra es de 2 metros. ¿Cuál es la altura de las farolas? ¿Qué tipo de número has obtenido al calcular la altura de la farola? ¿Sabrías obtener su medida con papiroflexia? *(Pregunta opcional. Conocimientos más elevados)* ¿Qué teorema has utilizado para resolver el ejercicio? ¿El Teorema de Pitágoras o el Teorema de Tales?. ¿Serías capaz de demostrarlo con papiroflexia?

Tabla 25: Actividad 4.

- ¿Cómo podemos saber a qué distancia poner una de otra si no podemos medir?

Se utilizará el Teorema de Tales para resolverlo, el cual establece que si dos rectas cualesquiera r_1 y r_2, son cortadas por rectas paralelas, t_1, t_2, t_3 y t_4, entonces los segmentos que resultan sobre una de las dos rectas son proporcionales a los correspondientes de la otra. Ver Figura 74.

Es decir, se cumple que $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GH}}$

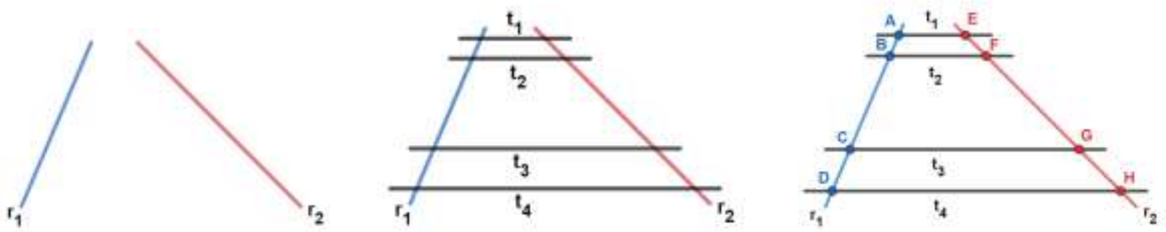


Figura 74: Teorema de Tales. (Fuente: elaboración propia).

Para resolver lo que nos piden, hay que fijarse en la información de partida. El jardín tiene forma de triángulo rectángulo y podemos interpretar la hipotenusa y el cateto contiguo a la calle, como dos rectas secantes.

Por lo tanto, para obtener la posición exacta de las farolas en el cateto del triángulo del jardín, se comienza tomando una medida cualquiera en la hipotenusa, P_1, como en la Figura 75.

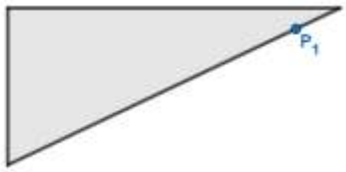


Figura 75: Paso 1. Actividad 4 Parte II. (Fuente: elaboración propia).

Se traslada dicha distancia sobre la hipotenusa mediante pliegues, hasta obtener los cinco segmentos de la Figura 76, ya que cada uno de los extremos indicará la posición de una de las seis farolas a instalar.

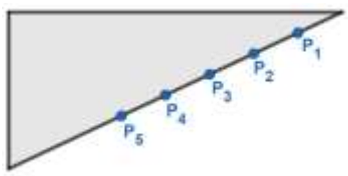


Figura 76: Paso 2. Actividad 4 Parte II. (Fuente: elaboración propia).

Una vez obtenidos, se realiza un pliegue que una el último de los puntos trasladados sobre la hipotenusa, con la esquina superior izquierda, siguiendo la Figura 77, ya que es dicho lado el que se quiere dividir en cinco partes iguales.

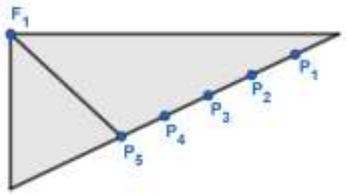


Figura 77: Paso 3. Actividad 4 Parte II. (Fuente: elaboración propia).

Realizamos un doblez paralelo al anterior y que a su vez pase por el extremo del siguiente segmento. Para ello se realiza el axioma O_4 dos veces, ya que para realizar una paralela, es la perpendicular de la perpendicular.

De esta forma hemos localizado, como en la Figura 78, los seis puntos donde ubicar las seis farolas que nos piden en el enunciado.

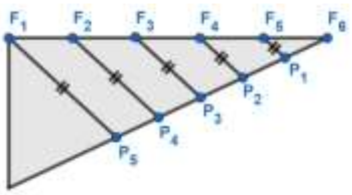


Figura 78: Paso 4. Actividad 4 Parte II. (Fuente: elaboración propia).

- ¿Cuál es la altura de las farolas?

Podemos representar lo que dice el enunciado como en la Figura 79.

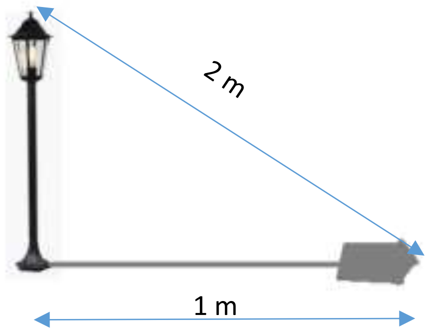
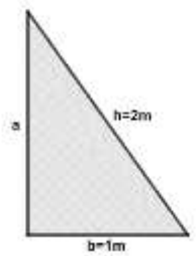


Figura 79: Representación del enunciado del ejercicio. (Fuente: elaboración propia).

Para resolverlo aplicaremos el teorema de Pitágoras, imaginando un triángulo rectángulo como el de la Figura 80, de modo que su altura *a* es la altura de la farola.



$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$2^2 = a^2 + 1^2$$
$$4 = a^2 + 1$$
$$a = \sqrt{3}$$
$$a \approx 1{,}732\ m$$

Figura 80: Solución aplicando Teorema de Pitágoras. (Fuente: elaboración propia).

Por lo tanto, la altura de la farola es, aproximadamente, 1,732 m.

- ¿Qué tipo de número has obtenido al calcular la altura de la farola?

Esta tarea se propone como opcional, para el caso en el que se quisieran tratar conocimientos más elevados, o adaptar dicha situación de aprendizaje a otros cursos superiores.

Se ha obtenido que la altura es $\sqrt{3}$, es decir un número irracional, los cuales se definen como los elementos de la recta real que no pueden expresarse mediante el cociente de dos enteros y se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales no periódicas.

En este caso, se puede obtener la medida $\sqrt{3}$ a través de la Espiral de Teodoro.

Como esta actividad es opcional, se podrá desde solo comentar la existencia de los números irracionales, hasta construir juntos la espiral de Teodoro con papiroflexia de la Figura 81, guiándose de las instrucciones marcadas por el profesor, obteniéndose así las medidas de los distintos números irracionales hasta $\sqrt{3}$.

Figura 81: Espiral de Teodoro. (Fuente: elaboración propia).

- ¿Qué teorema has utilizado para resolver el ejercicio? ¿El Teorema de Pitágoras o el Teorema de Tales?. ¿Serías capaz de demostrarlo con papiroflexia?

  Como en las actividades anteriores ya se han recordado las características de un triángulo rectángulo, se podrá realizar dicha la actividad con éxito.

  Se propone resolverlo con el Teorema de Pitágoras, y se comienza por enunciarlo, para a continuación demostrarlo.

  El teorema de Pitágoras establece que "en todo triángulo rectángulo se cumple que la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa". Es decir, si los lados del triángulo son a, b y c, como en la Figura 82, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$. (Sally & Sally, 2007).

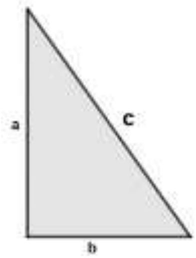


Figura 82: Triángulo rectángulo. (Fuente: elaboración propia).

  Para demostrarlo, se busca llegar a una expresión similar a $c^2 = a^2 + b^2$, doblando papel.

  Se parte de una hoja cuadrada y se pliega por una de sus diagonales como en el paso 1 de la Figura 83. A continuación, se desdobla y se trasladan los vértices de la diagonal a un punto cualquiera de dicha diagonal (Paso 2). Se pueden observar dos rectángulos, los cuales se dividirán en dos triángulos rectángulos cada uno (paso 3). A continuación, se desdoblan los dobleces realizados para obtener el mapa de pliegues (Paso 4), y se observan los dos cuadrados y cuatro triángulos rectángulos idénticos, de la Figura 83 derecha, cuyos catetos coinciden con los lados de los cuadrados formados.

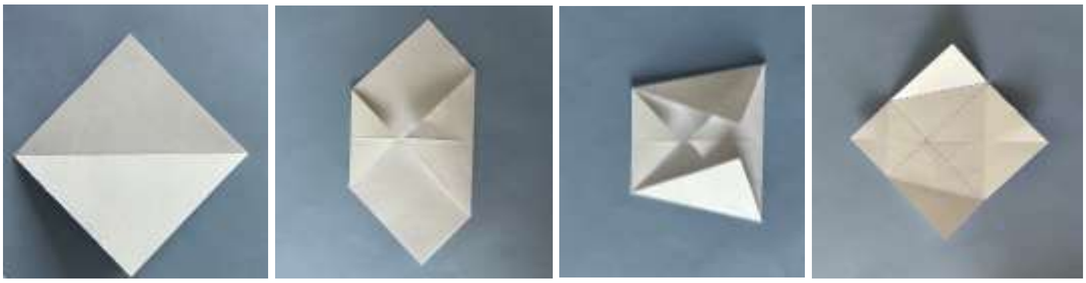


Figura 83: Pasos de 1 a 4. Demostración Teorema de Pitágoras. (Fuente: elaboración propia).

Se utilizará otra hoja cuadrada para ver que, si a esta nueva hoja se le quitan los cuatro triángulos rectángulos, se obtiene un cuadrado más grande de lado igual a la hipotenusa de dichos triángulos. (Ver Figura 84. Paso 5).

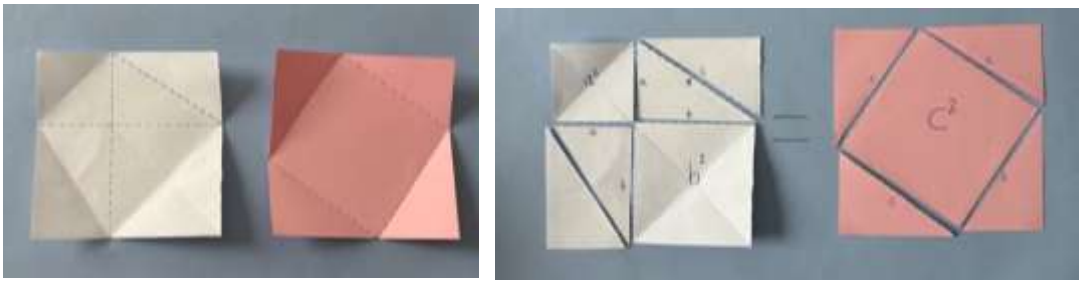


Figura 84: Paso 5. Demostración Teorema de Pitágoras. (Fuente: elaboración propia).

Además, si se quitan los cuatro triángulos rectángulos idénticos de la figura original, se obtienen dos cuadrados más pequeños, de lados a y b respectivamente. Por lo tanto, se comprueba fácilmente de forma visual, que el área de los cuadrados $a^2 + b^2$, es igual al área del otro cuadrado, c^2. Ver paso 6 en la Figura 85 (izquierda).

Por otro lado, se puede comprobar que los lados de los cuadrados, a, b y c, coinciden en longitud con los catetos e hipotenusa de los triángulos rectángulos. Se demuestra así en la Figura 85 (derecha), el Teorema de Pitágoras. (Paso 7).

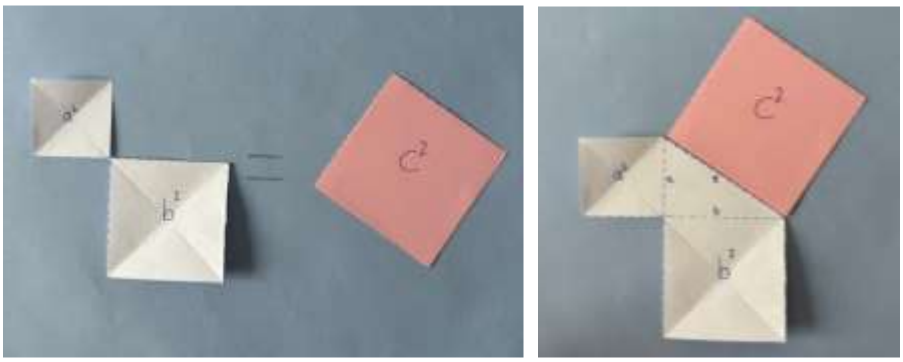


Figura 85: Paso 6 y 7. Demostración Teorema de Pitágoras. (Fuente: elaboración propia).

4.2.8.5 Actividad 5. Identidades notables (Alternativa. 4 ESO)

Como en todas las actividades que se han desarrollado hasta ahora se han enfocado en mayor medida los bloques Geometría y algo de Cálculo, se propone esta actividad como ejemplo de que la papiroflexia se puede emplear en otros campos, por ejemplo, en el Álgebra, y para abordar actividades de mayor grado de dificultad.

En este caso, para este apartado se desarrollan conceptos de tercero y cuarto de la Educación Secundaria, como puede verse en el enunciado descrito en la Tabla 26.

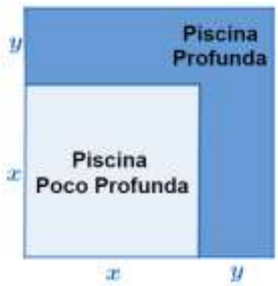
Actividad 5: Identidades notables
La residencia de ancianos cuenta con una piscina interior que ofrece múltiples beneficios y juega un papel fundamental en la salud en la tercera edad. Queremos conocer su área, pero solo conocemos los datos de la Figura 86.  *Figura 86: Plano en planta de la piscina. (Fuente: elaboración propia).*
¿Serías capaz de encontrar la expresión necesaria para obtener el área utilizando la papiroflexia?
¿Qué es una identidad notable? ¿Sabrías demostrar el cuadrado de una diferencia? ¿Y la suma por diferencia?

Tabla 26: Actividad 5.

Se propone demostrar con papiroflexia las identidades notables más utilizadas, siendo estas las operaciones con polinomios de la Tabla 27.

Cuadrado de una suma	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
Cuadrado de una diferencia	$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
Suma por diferencia	$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

Tabla 27: Identidades notables. (Fuente: elaboración propia).

Se busca que comprueben como se deducen las identidades notables, en lugar de aprendérselas de memoria sin razonar.

Para esta actividad, se comenzará con una clase magistral donde se explicará la actividad en una puesta en común, y algunos contenidos teóricos necesarios para su realización.

Además, se realizará por parte del profesor la demostración de la primera identidad notable propuesta, con regletas de Cuisenari o con papel basándose en dichas regletas, realizando una explicación más visual, en el caso de que tengan dificultades a la hora de identificar visualmente los términos correspondientes a x^2, y^2, o 2xy. (Malena, s.f.).

Para esta explicación se toma un rectángulo para *x* y otro de diferente color y tamaño para *y*, y se construye x^2 e y^2 mediante sus cuadrados, como en la Figura 87 (izquierda). El siguiente paso es construir *(x+y)*, y su correspondiente cuadrado $(x+y)^2$, al igual que en la Figura 87 (derecha).

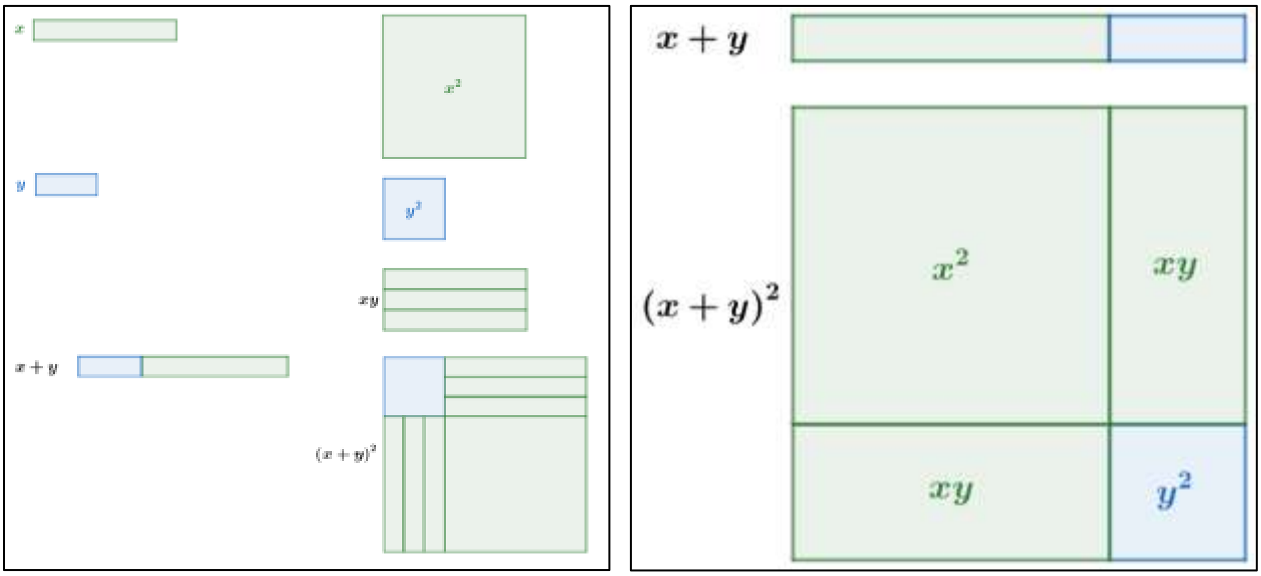


Figura 87: Explicación del cuadrado de la suma con regletas. (Fuente: elaboración propia).

- Cuadrado de una suma

Se comprueba tras doblar una hoja de papel y dividirla en cuadrados y rectángulos, la igualdad $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

1) Se parte de una hoja de papel cuadrada y se dobla por una de sus diagonales. (Axioma O_2). (Ver Figura 88 (izquierda)).

2) Se toma uno de los vértices de la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma y se traslada a un punto del cateto contiguo como en la Figura 88 (centro). (Axioma O_4).

3) Se desdobla y aparece un cuadrado pequeño en la esquina de la hoja cuadrada. A continuación, se dobla

horizontal y verticalmente por los lados de dicho cuadrado (axioma O_4), para formar dos rectángulos iguales y dos cuadrados de diferente tamaño, al igual que se aprecia en la Figura 88 (derecha).

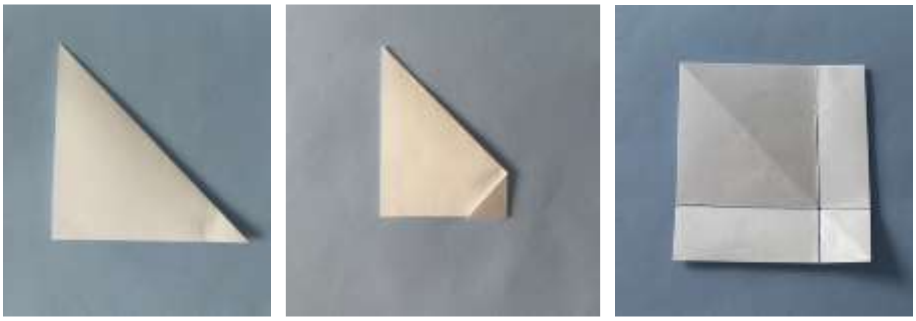


Figura 88: Primeros pasos demostración cuadrado de la suma. (Fuente: elaboración propia).

4) Los nombramos según el nombre de las incógnitas, *x* e *y*, de la igualdad que queremos demostrar. Siendo *x* el lado del cuadrado grande, e *y* los lados del triángulo pequeño, siguiendo la Figura 89.

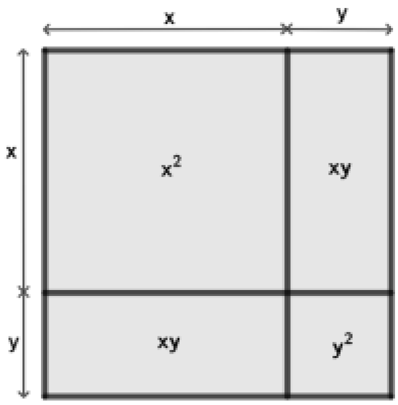


Figura 89: Cuadrado de la suma. (Fuente: elaboración propia).

De dicha figura de puede obtener que el área del cuadrado grande es la suma de todos los demás.

$$(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

A continuación, se puede demostrar en clase usando el algoritmo de la multiplicación.

- Cuadrado de una diferencia

Para llevarse a cabo, se utiliza el mismo proceso que en el caso anterior. Sin embargo, se nombra como en la Figura 90.

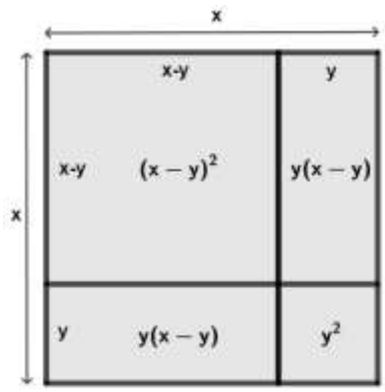


Figura 90: Cuadrado de la resta. (Fuente: elaboración propia).

De esta manera, la suma de todas las figuras resulta el área del cuadrado grande:

$$x^2 = (x-y)^2 + y(x-y) + y(x-y) + y^2$$

$$x^2 = (x-y)^2 + xy - y^2 + xy - y^2 + y^2$$

$$x^2 = (x-y)^2 + 2xy - y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

A continuación, se puede demostrar en clase usando el algoritmo de la multiplicación.

- Suma por diferencia

1) Se parte de una hoja de papel rectangular, como en la Figura 91 (izquierda), y se lleva su vértice superior izquierda al borde inferior según Figura 91 (derecha).

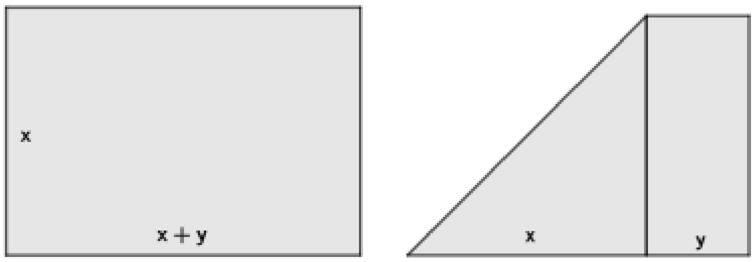


Figura 91: Paso 1. Suma por diferencia. (Fuente: elaboración propia).

2) Una vez se desdobla de acuerdo a la Figura 92 (izquierda), se traslada el vértice superior derecha tal y como puede verse en la Figura 92 (derecha), formando un triángulo rectángulo.

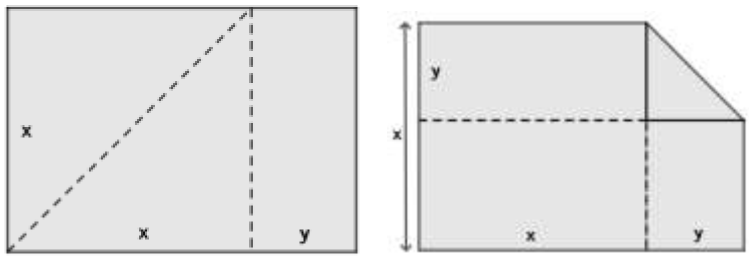


Figura 92: Paso 2. Suma por diferencia. (Fuente: elaboración propia).

3) A continuación se desdobla, y se dobla horizontal y verticalmente por los lados de dicho cuadrado, para formar tres rectángulos, dos de ellos iguales, y un cuadrado. Se indican las dimensiones de cada sección en la Figura 93

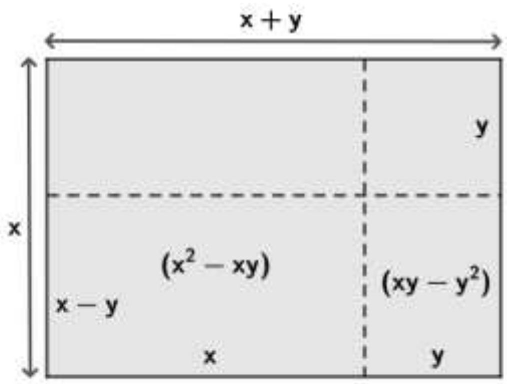


Figura 93: Paso 3. Dimensiones de cada sección. (Fuente: elaboración propia).

4) Si se tiene en cuenta el rectángulo azul determinado en la Figura 94, dicho rectángulo tiene unas dimensiones de lado $(x + y)$ y $(x - y)$. Por lo tanto, su área es la suma del área de las otras dos secciones que lo componen, resultando:

$$(x + y)(x - y) = (x^2 - xy) + (xy - y^2) = x^2 - y^2$$

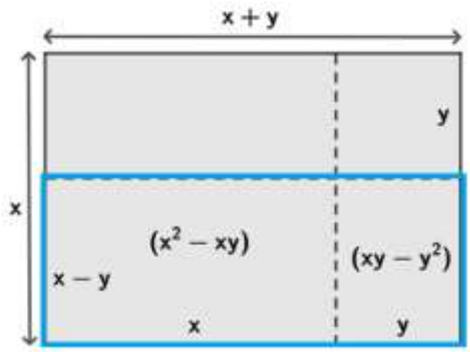


Figura 94. Paso 4. Dimensiones de cada sección. (Fuente: elaboración propia).

A continuación, se puede demostrar en clase usando el algoritmo de la multiplicación.

4.2.9 <u>Atención a las diferencias individuales</u>

Para la atención de tareas, además de todo lo anterior se ha tenido en cuenta la atención a la diversidad y la realización de actividades no repetitivas y mecánicas. Se incluyen ejemplos en contextos reales, para aumentar su motivación y comprensión.

Durante el desarrollo de las actividades, el docente será capaz de apoyar a los alumnos que tengan necesidades especiales, y adaptar las actividades a los requerimientos de dichos alumnos si fuese necesario. No obstante, al contener la situación de aprendizaje actividades abiertas, se permite que los alumnos puedan involucrarse todo lo que ellos consideren.

De esta manera, se puede autoadaptar. Así, los alumnos más avanzados no se aburrirán, pudiendo profundizar más, y en el caso opuesto o si existiesen necesidades especiales, se podrá realizar igualmente las tareas asignadas, pero profundizando menos, adaptándolas, o dirigiendo sus esfuerzos a la parte que más les motivé o que se consideré más beneficiosa para ellos.

Esta situación de aprendizaje se ha desarrollado tenido en cuenta los diferentes tipos de aprendizaje que puedan necesitar los alumnos siguiendo los principios DUA (Diseño Universal del Aprendizaje).

Se permite flexibilizar objetivos, métodos, tareas, y evaluación, según las diferentes necesidades.

Se combinan tareas individuales y grupales, empleándose diferentes dinámicas. Los grupos son diversos, mezclando alumnos con conocimientos más avanzados con los que no los tienen, o con necesidades especiales, para que puedan aprender unos de otros.

Con estas actividades cooperativas, y colaborativas, se espera conseguir motivar y evitar la falta de interés por la asignatura. Por ello se han buscado dinámicas interesantes, en contextos reales.

Es importante aportar diferentes tipos de materiales y recursos para los distintos tipos de aprendizaje, y es por ello que, aunque en la mayoría de actividades propuestas se recurre al uso de la papiroflexia, se emplean también otros recursos tanto manipulativos como no manipulativos como el uso de la regla y el compás, las regletas de Cuisenaire, se propone el uso de las TIC´s con GeoGebra, etc.

Con esta situación de aprendizaje, se podría permitie proporcionar múltiples formas de representación para ayudar a alumnos con baja visión, si los hubiese (Pulido, 2017)

- Se emplearán textos audiovisuales, y no solo escritos.

- Se ampliará el tamaño de la letra y/o sonidos.

- Se facilitará mayor tamaño de papel para las dinámicas.

- Favorecer la manipulación de objetos. Como es el caso de la papiroflexia como recurso didáctico.

- Se proporcionará una lámpara especial y lupa de lectura adaptable al pupitre.
- Si el grado baja visión fuese alto, se puede incorporar las lenguas de signos españolas para reforzar la inclusión.

Teniendo en cuenta a esos alumnos que aún no tienen una buena destreza del idioma, (Pulido, 2017).

- También les ayudará los textos audiovisuales
- Mostrar representaciones visuales de la información que se transmite. El origami es una herramienta que también lo facilita.
- Complementar con subtítulos o traducciones la información
- Incluir un glosario para ayudar con el vocabulario importante.
- Acceso a recursos de internet.

Para esos alumnos que puedan ser conflictivos,

- Fomentar las tareas grupales, para el aprendizaje de habilidades sociales, aprenderán a relacionarse y convivir con la comunidad educativa.
- En parte de las actividades se ha intentado darles a conocer el entorno en el que viven, y que formen parte de las actividades del colegio, para que se sientan parte de la comunidad, y que tienen una meta.
- Se buscará una máxima comunicación con las familias/tutores legales.

Además de todo ellos, se intentará, (Pulido, 2017)

- Incluir revisiones/recordatorios y/o notas aclaratorias de los conceptos claves aprendidos.
- Se habilitará un foro en la web del centro, con una sección de "intercambiar dificultades", para resolver dudas, pudiendo intercambiarlas con los compañeros, o el profesor.
- Utilizar el apoyo entre iguales y/o con docencia compartida.
- Retirar los apoyos de forma gradual a medida que aumenta la autonomía.
- Indicar desde el comienzo de la actividad las metas, y ofrecer las pautas a seguir.
- Hacer preguntas para guiar y mantener el interés.
- Facilitar el aprendizaje tanto con actividades digitales como analógicas.

- Inducir un ambiente de aprendizaje cooperativo y también para el aprendizaje individual.
- Diseñar actividades multinivel.
- Favorecer y promover la exploración y experimentación.
- Mantener un clima de apoyo y aceptación en el aula, para que los alumnos sientan confianza.
- Reforzar y animar a los alumnos, valorando su esfuerzo y perseverancia.
- Ser flexibles con los tiempos para que desarrollen las tareas e interioricen los conceptos aprendidos.
- Utilizar el rol-playing para el manejo de emociones.

Además, la papiroflexia es un recurso muy económico y accesible para todos los centros y alumnos.

Por otro lado, el doblado de papel tiene una serie de desventajas conocidas, por ello se proponen soluciones alternativas para paliarlas a aquellos alumnos que lo necesiten.

- Si un alumno presentase problemas de destreza psicomotriz fina durante el doblado del papel, puede ayudarse de una regla para realizar los pliegues, o podrá ayudarse de otro alumno si fuese necesario.
- El uso de rotuladores de colores puede ser una herramienta de ayuda a la hora de repasar los pliegues con ellos, y seguir mejor el proceso de plegado.
- Se les indicará a los alumnos las dimensiones correctas del cuadrado del papel en el comienzo de cada figura, para evitar que si es demasiado pequeño los pliegues resulten demasiado imprecisos, o si es demasiado grande, resulte complicado de manipular.

4.2.10 <u>Proceso de evaluación</u>

En la evaluación se prestará mayor atención a si se dominan los aspectos clave de los nuevos conceptos, evaluando con estrategias formales e informales. Se dará una gran importancia a la observación, se buscan respuestas que muestren el nivel de compresión de los conceptos que han alcanzado los alumnos.

A evaluar por el profesor:

- Autoevaluación de su desempeño.

- Para evaluar a los alumnos, no se calificarán tareas, sino que se evaluarán aprendizajes. Se analizará la evolución de cada alumno en relación a cada uno de sus aprendizajes. Para ello se elabora una rúbrica que evaluará el grado de competencias específicas adquirido en cada actividad, a través de los indicadores de logro descritos en las tablas del Anexo 7.2.

Dichos indicadores están graduados de cero a tres según los aprendizajes y destrezas adquiridas por el alumnado. Siendo tres, logrado con éxito; y cero, no alcanzado el mínimo necesario.

La calificación se obtendrá para cada criterio, y ésta representará el grado de logro alcanzado. Es decir, la calificación de cada competencia específica será la media de las de los indicadores de logro asociados, para todas las actividades. Siendo la calificación final la media aritmética de las calificaciones de todas las competencias específicas sobre diez. De esta manera, todas tendrán el mismo peso en el proceso de evaluación.

El propio alumno evaluará también:

- *Co-evaluación*, se evaluará la presentación de la solución de los problemas al grupo de clase.

- *Evaluación al docente* como facilitador del aprendizaje.

- Una *autoevaluación* de su aprendizaje.

4.2.11 Valoración de la situación de aprendizaje

Es importante analizar las situaciones de aprendizaje tanto durante, como al finalizar, y conocer si los resultados han sido los esperados para ambas partes, para poder mejorar en el futuro.

Los resultados de las diferentes actividades dentro de las situaciones de aprendizaje, no son fácilmente medibles, aunque si se puede conseguir un pequeño feedback inmediato, que permitiría, modificar o encauzar el resto de actividades de forma que se puedan solventar algunos de los problemas, o deficiencias que se vayan detectando.

La temporalización de las actividades es aproximada, ya que es difícil estimarla sin nunca haberla llevado a cabo.

Antes de comenzar la situación de aprendizaje, se realizará una valoración inicial de los conocimientos de cada alumno, sobre los conceptos que se van a tratar.

Al finalizar, se realizará una encuesta de satisfacción del alumnado, en la que valorarán los aspectos que consideran han sido más positivos, cuáles menos, y la forma de impartirlos.

Con toda la información recopilada, el docente realizará un informe en el que evaluará, teniendo en cuenta los resultados académicos, comportamiento/participación del alumnado y las valoraciones de los alumnos, los siguientes puntos:

- Valoración de las diferentes técnicas empleadas.

- Actividad que ha tenido más éxito, y la que menos.

- Si se ha cumplido la temporalización.
- Si las actividades han ayudado al desarrollo de las competencias matemáticas del alumno.
- Aspectos mejorados/sin cambios/pendientes de mejora.
- Valoración global de incidencia en el comportamiento del alumnado.
- Planteamiento de acciones de mejora que puedan introducirse.

Esta situación de aprendizaje puede ser adaptada para cursor superiores, partiendo del mismo contexto e incluso construcciones de papiroflexia, pero trabajando contenidos de mayor nivel.

4.3 Experiencia práctica en el aula

Durante el periodo de prácticas, tuve la oportunidad de llevar a cabo una pequeña parte de la propuesta didáctica I en la fase de intervención.

A continuación, se describe la intervención contextualizada al centro, y las reflexiones de la misma.

4.3.1 Contextualización

El centro de prácticas fue el Centro de Educación de Personas Adultas "San Jorge", el cual es un centro público de la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Tiene adscrita la Unidad educativa del Centro penitenciario La Moraleja de Dueñas.

Es uno de los cuatro centros Públicos de Educación de Personas Adultas que constituyen la red específica de centros de Educación de Personas Adultas de la provincia de Palencia.

Respecto a la organización de las enseñanzas, en lo referente a la educación secundaria para personas adultas (ESPA), se imparten los módulos I, II, III y IV en horario de mañana y tarde, todos con una estructura cuatrimestral.

En relación a los recursos, el departamento de matemáticas del centro no dispone de materiales manipulativos. Si hay una sala informática accesible a todo el alumnado, y todas las aulas disponen de pizarra virtual y portátil, además de la pizarra blanca.

En general los alumnos presentan un nivel socioeconómico y cultural medio-bajo. La mayor parte de ellos se encuentran desempleados y consideran la formación en este centro como una posibilidad de progresar económica y socialmente. El nivel sociocultural es diverso, hay alta tasa de extranjeros, en general con buen dominio del idioma.

Un elevado número de alumnos proceden de distintos IES y Centros privados como consecuencia del fracaso escolar en la ESO, que se matriculan en la Enseñanza Básica.

La actitud ante el estudio de un cierto número de alumnos es pasiva, no asumiendo las responsabilidades necesarias adquiridas con su propia matriculación. La mayoría de los problemas de convivencia en el Centro proceden del alumnado de ESPA, algunos de ellos menores autorizados, que proceden del fracaso escolar, sin hábitos de estudio y con muy baja implicación escolar.

El grupo en el que se llevó a cabo la intervención fue el grupo de tarde del módulo I. Su aula se encuentra en el primer piso con ventanas amplias que aportan luz natural, y tiene una capacidad de 22 alumnos, con los pupitres agrupados de dos en dos, dispuestos en tres columnas.

La asistencia en este grupo es del 50% aproximadamente, siendo ocho alumnos los que regularmente asisten a clase, frente a los 15 matriculados.

Algunos trabajan y otros tienen cargas familiares, que les impide mantener el ritmo de aprendizaje, y la realización de las tareas. En general a pesar de que alumnos tienen poca, o ninguna base de matemáticas, tienen una alta motivación en clase.

Hay buen ambiente de participación y colaboración en la clase. Todos muestran un esfuerzo por sacar la asignatura, aunque les cueste. Preguntan mucho en clase, aunque en general no realizan las tareas encomendadas para cada, ya que algunos trabajan, y otros tienen cargas familiares, y eso les impide mantener el ritmo de aprendizaje. A pesar de que los alumnos tienen poca o ninguna base de matemáticas, tienen una alta motivación.

Existe variedad de edades y de nacionalidades en el aula. Destaca una alumna extranjera, donde el Castellano es su segundo idioma y no tiene completo dominio. Hay una alumna repetidora.

4.3.2 Intervención

La intervención se realizó en tres sesiones.

Opté por una dinámica manipulativa rompiendo el ritmo de las clases magistrales que llevaban recibiendo hasta el momento, buscando estimularles y que fuesen más participativos debido a que dicha clase se imparte a última hora de la tarde. Decidí emplear la papiroflexia en parte de las sesiones, combinada con una metodología magistral participativa con técnica de la pregunta, ejercicios y problemas contextualizados que ayudasen a practicar y asimilar los conceptos vistos.

El diseño de las actividades fue determinado por los contenidos a impartir y los tiempos que me asignaron. A partir de ahí, se distribuyeron los contenidos siguiendo el orden en que aparecían en su libro, pero incorporando ejemplos diferentes contextualizados en el día a día, y alguna variación en las explicaciones, ya que en su libro se trataban algunos conceptos, indicando únicamente la definición, pero sin explicar en qué consistía, y sin ejemplos. La idea era dejar el libro como una segunda alternativa, para ayudarles en la comprensión.

Al ser el módulo I, hay mucha variedad en los conocimientos de los que parten los alumnos, no asumí ningún conocimiento previo en geometría, comenzando desde cero según marcaba el libro.

En la primera sesión, a través de la papiroflexia, se les explicaría los elementos del plano, los tipos de ángulos, la relación entre ángulos y rectas (ángulos formados por rectas secantes, ángulos formados por una recta secante que corta dos paralelas, mediatriz y bisectriz), explicándoles los dobleces básicos para poder trazar una recta por un punto, realizar una paralela, una perpendicular, etc.

En las otras dos sesiones también con apoyo del origami, se trabajaron las líneas poligonales, los polígonos, haciendo especial hincapié en los tipos de triángulos, sus rectas y puntos notables, cuadriláteros; y la circunferencia y el circulo.

4.3.3 <u>Resultados y reflexiones</u>

Durante las actividades que involucraban papiroflexia, los alumnos debían seguir las instrucciones que se les indicaban paso a paso, a la vez que realizaba en frente de ellos las mismas actividades, intentando mostrarles las figuras de forma no inversa a ellos, con tiempo de pasearme entre ellos para ver como avanzaban, y poder ayudarles en las dificultades.

Me sorprendió como una actividad previamente preparada y temporizada, se dilató en la puesta en el aula.

Por ejemplo, la primera sesión era una clase completa de 100 minutos con papiroflexia, en la que estimé 20 minutos para resolver dificultades y preguntas. Sin embargo, la duración fue mayor, porque hubo conceptos como la relación entre ángulos y rectas, que al ser explicada con origami, generó mayor confusión entre los alumnos, pasando a explicarlos en la pizarra. No obstante, otros conceptos como la mediatriz o la bisectriz fueron muy acertados, ya entendieron de una manera muy visual, que la distancia de cualquier punto de la mediatriz equidista de ambos extremos del segmento, como se muestra en la Figura 95.

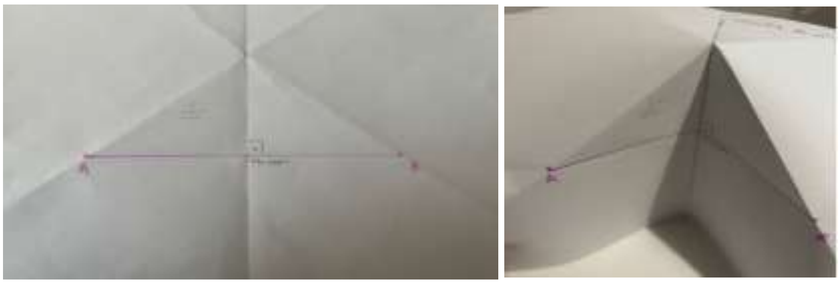


Figura 95: Mediatriz de un segmento. (Fuente: elaboración propia)

Es cierto que muchas cosas que pensé que se podrían explicar con bajo nivel matemático, tuve que representárselo también de manera gráfica y geométrica o hacerles razonar por partes. Esto hizo que fuese capaz de pasar del lenguaje geométrico al gráfico en las ocasiones en las que fue pertinente.

Por otro lado, la motivación no decayó durante los 100 minutos, a pesar de ser la última hora de la tarde y que estaban cansados. Lo que demuestra que es un buen recurso didáctico para motivar y conseguir mantener la atención y concentración. Durante el desarrollo, los alumnos se mostraron participativos, y aunque algunos ya conocían la técnica de la papiroflexia, a todos les resultó sorprendente su relación con las matemáticas.

Las impresiones que tuve durante mi intervención, sumadas a la de mis tutores, coinciden en que empleando esta herramienta, se consiguió desarrollar tareas matemáticas utilizando dos registros de representación diferentes al de la lengua materna.

Además, respecto a las anotaciones para nombrar a los diferentes elementos del plano que se iban generando, el alumnado no terminaba de ver su sentido y utilidad, y no terminaron de entender cuándo se usa de una manera concreta por convenio, ni la flexibilidad que esta ofrece. Algo que convendría trabajar para que se den cuenta de la importancia que tiene.

Me ayude del plegado del papel para enunciar y/o describir a través de ejemplos y contraejemplos, propiedades del objeto a definir.

Aunque los alumnos comprendían y seguían con bastante soltura las instrucciones y los pasos descritos, en ocasiones parecía que se centraban más en seguir el procedimiento de construcción que en lo que realmente se estaba haciendo, y por qué se estaba haciendo, matemáticamente hablando.

A través de esta herramienta conseguí mayor flexibilidad matemática, ya que me permitía presentar a los alumnos varias argumentaciones o estrategias de resolución para una misma tarea matemática, y de esta manera poder compararlas. Sin embargo, en lo que respecta a explicar diferentes métodos de resolución, me ha sorprendido que no son muy receptivos. Se agobiaban y preferían conocer solo un método y cuanto más mecánico mejor.

Me ayudó a plantear tareas abiertas y accesibles, para que exploraran, y en un contexto determinado donde debían poner en juego conocimientos adquiridos para dar respuesta a las demandas de la situación.

En general las acciones realizadas con el doblado de papel fueron adecuadas para el contenido matemático trabajado, haciendo que los alumnos trabajasen y reflexionasen. Aunque en ocasiones la psicomotricidad de los alumnos tomaba más protagonismo que la propia actividad matemática.

Las posibilidades de la papiroflexia son incontables, pero es un recurso que demanda mucho trabajo y tiempo. Este último, suele ser muy limitado debido a que el temario completo de la asignatura está ya de por sí muy concentrado.

Es importante dar más tiempo a los alumnos para tener la oportunidad de tomar sus propias decisiones, equivocarse y reflexionar sobre lo realizado.

5. Conclusiones

El primer objetivo del trabajo ha sido profundizar en la papiroflexia como recurso didáctico, y las matemáticas que esconde, prestando especial atención a los principios metodológicos y a las atenciones individuales. Para ello, se ha planteado una situación de aprendizaje compuesta de varias actividades, que desarrollan no solo el sentido espacial, sino también el numérico, el sentido de la medida, el algebraico, el estocástico y el socioafectivo.

Con el uso de la papiroflexia se busca pasar de lo más concreto a través de la manipulación, a lo abstracto, teniendo en cuenta lo gráfico y/o pictórico. Con este aprendizaje progresivo se evita la memorización sin sentido, y el aprendizaje rutinario de procedimientos sin su comprensión.

Con las situaciones de aprendizaje planteadas, se genera el interés de los alumnos, buscando la innovación y la motivación en el aprendizaje. Además, lo he combinado con diversos recursos metodológicos como la gamificación, aprendizaje basado en proyectos, etc, para aumentar su potencial.

Hay que tener en cuenta que el uso de la papiroflexia es un recurso que su mera utilización se acerca a este aprendizaje por gamificación. Es cierto, que no debe ser la una herramienta manipulativa a utilizar en el aula, ya que para atender a la diversidad se debe ofrecer mayor variedad de materiales didácticos.

Con las tareas en grupo, se busca un aprendizaje entre pares, facilitando la comprensión de nuevos conceptos y su aprendizaje. Los alumnos empiezan a tener interés en conseguir sus propios objetivos, y al formar parte de un grupo, también se preocupan de los logros de sus compañeros.

Esto, junto con el empleo de recursos manipulativos y visuales, y el planteamiento de problemas contextualizados en situaciones cotidianas, despertará el interés del alumnado. Además de ayudar al aprendizaje y a la compresión de conceptos abstractos. Se busca dejar atrás la memorización de procesos y reglas sin razonamientos.

Es necesario conseguir que el alumno sea participe de su propio aprendizaje, siendo el profesor un mero guía.

Se puede concluir que la papiroflexia es un recurso fantástico, sobre todo para los alumnos más jóvenes que comienzan a aprender conceptos más complejos, y requieren más materiales manipulativos. Con dicho material se pueden trabajar diferentes representaciones de un mismo concepto, y realizar comprobaciones.

Pero para llevar a cabo estas metodologías, se requiere de un alto compromiso e implicación por parte de los profesores. Se requiere un cambio drástico en la manera de trabajar con los alumnos, lo que implica un gran trabajo y esfuerzo por parte de todos.

6 Referencias

Álvarez, E. (2022). Obtenido de https://esteralvarez.es/que-son-los-desafios-del-siglo-XXI/

Álvarez, S. C. (2021). *El Origami como herramienta didáctica para favorecer el desarrollo de la motricidad fina en los niños de 5 y 6 años de edad de la institución Educativa Municipal Pedagógico de Pasto*. Universidad Santo Tomás.

Ayala Jaramillo, K. S. (2013). *El origami en el desarrollo de la motricidad fina de los niños y niñas.* UCE.

Barcenilla, R. M. (2023). *Didáctica de la Matemática.* Universidad de Valladolid.

BuenExpediente. (2017). *Youtube*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=ng8ua0Fg7sA

Cadasil. (2016). *Asociación Cadasi España.* Obtenido de https://cadasil.org/beneficios-del-origami-la-salud-fisica-mental

Carbonneau, Marley, & Selig. (2012).A Meta-Analysis of the Efficacy of Teaching Mathematics With Concrete Manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 380-400.

Chang, W. (2011). *Computer enhanced instruction: A case study of a series of creative math activities design. International* Journal of Technology Enhanced Learning.

Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. BOCyL (Boletín Oficial de Castilla y León),190, 30 de Septiembre de 2022, 48850- 49542.

Echeverría Ta*bango, J. G. (2013). Efecto del origami en las dificultades de atención en niños de 9 años de edad en la Unidad Educativa Municipal Alfredo Albuja Galindo. Guía de intervención en el aula con el origami.*

Ensamble, P. (2009). *Proyecto ensamble*. Obtenido de https://proyectoensamble.com/es-eng/blogs/tutoriales/simbolos-del-origami-para-principiante

Española, R. A. (s.f.). *Real academia española*. Obtenido de https://www.rae.es/

Expediente, B. (2017a). *Youtube*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=pIwT2ayrsqk

Expediente, B. (2017b). *Youtube*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=QI9lN-Rs3Is

Giménez, P. T. (2023). *Complementos de matemáticas*. Universidad de Valladolid.

Grabauskiene, V. (2019). *The Teaching of Pattern Comprehension in the 2nd Grade of Primary School Using Origami Applique.* Vilnius University.

Haga, K. (2008). *Origamics. Mathematical Explorations through Paper Folding* . Word Scientific.

Hernandez, J. d. (2001). *Matemáticas y Papiroflexia.* Asociación Española de Papiroflexia.

Hull, T. (2012). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics* . A K Peters, Ltd.

Jiménez, I. M. (s,f.). Obtenido de https://www.educa.jcyl.es/crol/es/experiencias-didacticas-innovadoras/experiencia-cooperativa-puzzle

Johnson, D. A. (1995). *Paper folding for the mathematics class*. National Council of Teachers of Mathematics.

Kasahara, K & Takahama, T. (1987). *Origami for the Connoisseur*. Japan Publications.

Lang, R. J. (2004). *Origami approximate Geometric constructions in tribute to a Mathemagician.*

Lázaro, B. (27/12/2021). *Libertad digital*. Obtenido de https://www.libertaddigital.com/chic/entretenimiento/2021-12-27/origen-del-origami-0e-6836088/

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE (Boletín Oficial del Estado), 349, de 30 de diciembre de 2020, 122868 -122953

Malena. (s.f.). Obtenido de Aprendiendo Matemáticas: https://aprendiendomatematicas.com/demostrando-las-identidades-notables/

Manualidades, T. (2020). *Youtube*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=R_3erqrg1DE

Medina, E. S. (2021). *La papiroflexia, una herramienta didáctica para aprender Matemáticas en la ESO.* Universidad de Valladolid.

Mena, M. A. (2016). *La técnica del origami y el desarrollo de la precisión motriz en niños y niñas de 5 a 6 años de la unidad educativa.* Universidad técnica de Ambato.

Muñoz, C. R. (2023). *La papiroflexia como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas en E.S.O. y Bachillerato.* Universidad de Valladolid.

Mürice. (2012). *Mürice restauración blog*. Obtenido de https://muricerestauracion.blogspot.com/2011/10/historia-del-origami.html

Olson, A. T. (1976). *Mathematics through Paper Folding* . University of Alberta.

Papiromates. (2014). Obtenido de Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=1kMP_0KwH0s

Pardo, J (2003) *Curso de papiroflexia*. Obtenido de https://www.isju.com.ar/biblioteca/iBxniMZI.pdf

Pivaral, A. (2021). *Youtube*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=W57wLOaHUoQ

Pujolàs, P. (s.f.) Obtenido de https://www.educa2.madrid.org/web/tecnorurales/aprendizaje-cooperativo/-/book/tecnicas-de-aprendizaje-cooperativo?_book_viewer_WAR_cms_tools_chapterIndex=60df99d4-b2af-47bc-a4b5-b19fb2f80c6b

Pulido, M. R. (11/12/2017). Junta de Extremadura. Consejería de Educación, Ciencia y Formación Profesional. Obtenido de https://emtic.educarex.es/224-emtic/atencion-a-la-diversidad/3020-diseno-universal-para-el-aprendizaje-porque-todos-somos-todos

Reyes-Iglesias, M. E. (2022-2023). *Modelos matemáticos*. Universidad de Valladolid.

Riaño, J. A. (2006). *Influencia De La Practica Del Origami Sobre El Desarrollo De La Percepción Viso-Espacial En Un Grupo De Origamistas Bogotanos.* Universidad Santo Thomas.

Royo-Prieto, J. I. (2022). *Matemáticas y papiroflexia*. Sigma 21.

Sally, J. D., & Sally, P. (2007). *Roots to Research: A Vertical Development of Mathematical Problems.* American Mathematical Society.

Sanchis, A. (2023). *xataka*. Obtenido de https://www.xataka.com/espacio/quieres-trabajar-nasa-aprende-origami-asi-se-ha-colado-ingenieria-arte-doblar-papel

TakakoOrigami. (2019a). *Youtube*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=J5Aj_-bGQiM

TakakoOrigami. (2019b). *Youtube*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=-HeovMbh1EI

Wantzel, P. (1837), Journal de Liouville, Volume II, pp. 366-372

Zaragoza, E. M. (2013). *Museo Origami Zaragoza*. Obtenido de http://www.emoz.es/QR/sala0esp.html?14,6

7 Anexos

7.1 Mapa de relaciones criteriales

	CCL					CP			STEM					CD					CPSAA					CC				CE			CCEC			
	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	1	2	3	4
Competencia específica 1.1	X	X							X	X	X	X																						
Competencia específica 1.2									X	X	X	X											X							X				
Competencia específica 1.3									X	X	X																			X				X
Competencia específica2.1									X	X																								
Competencia específica 2.2		X							X			X																						
Competencia específica 3.1																																		
Competencia específica 3.2	X									X																								
Competencia específica 3.3														X	X			X																
Competencia específica 4.1									X	X																								
Competencia específica 4.2																																		
Competencia específica 5.1									X																									
Competencia específica 5.2									X																									
Competencia específica 6.1	X								X	X																				X				
Competencia específica 6.2										X																								
Competencia específica 6.3										X			X																		X			
Competencia específica 7.1											X																							
Competencia específica 7.2											X																							
Competencia específica 8.1	X					X				X		X																						
Competencia específica 8.2	X		X			X				X		X																						
Competencia específica 9.1													X						X															
Competencia específica 9.2																			X				X											
Competencia específica 10.1					X			X			X										X				X	X								
Competencia específica 10.2																			X															

Tabla 28: Mapa de relaciones criteriales

A continuación, el mapa de relaciones criteriales de la Actividad 5.

	CCL					CP			STEM					CD					CPSAA					CC				CE			CCEC			
	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	1	2	3	4
Competencia específica 1.1	X	X	X						X	X	X	X																						
Competencia específica2.1									X	X																								
Competencia específica 5.1									X		X				X	X																		
Competencia específica 5.2									X		X				X	X															X			
Competencia específica 7.1											X	X		X	X																			
Competencia específica 7.2											X																							
Competencia específica 8.1	X		X			X				X		X			X	X														X			X	
Competencia específica 8.2	X		X			X				X		X																						
Competencia específica 9.1													X						X			X												
Competencia específica 9.2																			X				X						X	X				
Competencia específica 10.1					X			X			X										X				X	X								

Tabla 29: Mapa de relaciones criteriales Actividad 5.

7.2 Rúbricas

ACTIVIDAD 1: Diferentes áreas poligonales del terreno para plantar.					
Indicador de logro	**Criterio de evaluación**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**
1.1 Identifica los datos del problema.	1	No identifica los datos del problema.	Identifica algunos datos, pero no lo que pide resolver.	Identifica adecuadamente la mayor parte.	Identifica correctamente los datos del problema.
3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.	3	No comprueba sus soluciones.	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia, GeoGebra, regla y compás u otro método, pero con algún error.	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia, GeoGebra, regla y compás u otro método.	Comprueba todas sus soluciones con papiroflexia, GeoGebra, regla y compás u otro método.
5.1 Relaciona los diferentes contenidos matemáticos.	5	No relaciona contenidos.	Relaciona menos de la mitad de los contenidos implicado en la actividad.	Relaciona más de la mitad de los contenidos implicado en la actividad.	Relaciona todos los contenidos implicado en la actividad.
5.2 Aplica conocimientos previos.	5	No aplica conocimientos previos.	Aplica algún conocimiento previo pero de forma errónea.	Aplica algún conocimiento previo de forma correcta.	Aplica todos los conocimiento previos necesarios de forma correcta.
6.1 Identifica la relación de las matemáticas con la construcción de polígonos mediante papiroflexia.	6	No identifica ninguna relación .	Es capaz de relacionar algunas de las construcciones con papiroflexia con las matemáticas pero con errores.	Es capaz de relacionar algunas de las construcciones con papiroflexia con las matemáticas.	Es capaz de relacionar todas las construcciones obtenidas con papiroflexia con las matemáticas.
7.2. Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la resolución, usando material manipulativo de apoyo si es necesario.	7	No utiliza la papiroflexia.	Utiliza la papiroflexia pero de forma incorrecta.	Utiliza la papiroflexia de forma correcta e incorrecta.	Utiliza la papiroflexia de forma correcta.
8.1 Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos.	8	No explica los procesos ni os pasos seguidos en la resolución.	Comunica algo del contenido matemático pero sin un lenguaje apropiado.	Comunica la mayoría del contenido matemático con lenguaje apropiado.	Comunica todo del contenido matemático con lenguaje apropiado.
8.2 Comunica contenido matemático con precisión.	8	No comunica contenido matemático.	Comunica contenido matemático pero sin precisión.	Comunica algo de contenido matemático con procesión.	Comunica todo el contenido matemático con precisión.

9.1 Muestra interés y curiosidad por aprender y mejorar en matemáticas.	9	No muestra ningún interés.	Prácticamente no presenta interés.	Muestra interés la mayor parte del tiempo.	Muestra interés siempre.
9.2 Muestra una actitud positiva y perseverante a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	9	No muestra interés.	Tiene una actitud pasiva toda la actividad	Mantiene una buena actitud y participa la mayor parte del tiempo.	Mantiene buena actitud y participación.
10.1.Participa activamente en el trabajo en equipo.	10	No participa en el grupo.	Participa puntualmente en el grupo	Participa la mayor parte del tiempo.	Se integra y participa en el grupo.
10.1 Es tolerante y respeta las diferentes opiniones y propuestas de sus compañeros.	10	No respeta las opiniones de los compañeros.	Acepta las opiniones ajenas solo si coinciden con las suyas.	Respeta las opiniones ajenas en algunas decisiones.	Respeta siempre las opiniones ajenas.
10.2 Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, y asumiendo el rol asignado.	10	No asume su rol.	Identifica y asume su rol poco tiempo.	Identifica y asume su rol la mayor parte del tiempo.	Identifica y asume su rol.

Tabla 30: Rúbrica de evaluación para la actividad 1

ACTIVIDAD 2: Teselado del terreno. Maqueta y plano.					
Indicador de logro	**Criterio de evaluación**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**
1.1 Identifica los datos del problema y comprende las preguntas formuladas.	1	No identifica los datos del problema y no comprende las preguntas formuladas.	Identifica algunos datos, pero no lo que pide resolver.	Identifica adecuadamente la mayor parte y comprende las preguntas formuladas.	Identifica correctamente los datos del problema y comprende las preguntas.
1.3 Obtiene soluciones del problema.	1	No realiza ningún cálculo.	Los cálculos realizados son incompletos y con fallos.	Los cálculos realizados son correctos pero hay algún fallo.	Los cálculos son adecuados y correctos.
2.2 Razona la validez de las soluciones en función del contexto.	2	No razona la validez de las soluciones.	Intenta razonar las soluciones pero de forma errónea.	Razona algunas soluciones de forma correcta.	Comprueba la validez de las soluciones
5.2 aplica los conocimientos previos.	5	No aplica conocimientos previos.	Aplica algún conocimiento previo pero de forma errónea.	Aplica algún conocimiento previo de forma correcta.	Aplica todos los conocimiento previos necesarios de forma correcta.
6.1 Aplica escalas o Tales.	6	No reconoce la conexión de las matemáticas.	Reconoce la relación con las escalas o Tales pero no la sabe aplicar.	Reconoce la relación con las escalas o Tales, la aplica pero con errores.	Reconoce la relación con las escalas o Tales, y la aplica correctamente.
7.2. Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la resolución, usando material manipulativo de apoyo si es necesario.	7	No utiliza la papiroflexia.	Utiliza la papiroflexia pero de forma incorrecta.	Utiliza la papiroflexia de forma correcta e incorrecta.	Utiliza la papiroflexia de forma correcta.
8.1 Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos.	8	No explica los procesos ni os pasos seguidos en la resolución.	Explica los procesos sin utilizar lenguaje matemático.	Explica la mayoría de los procesos con lenguaje matemático.	Explica todos los procesos con lenguaje matemático de manera clara.
10.1.Participa activamente en el trabajo en equipo.	10	No participa en el grupo.	Participa puntualmente en el grupo.	Participa la mayor parte del tiempo.	Se integra y participa en el grupo.
10.2 Participar en el reparto de tareas, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, y asumiendo el rol asignado.	10	No asume su rol .	Identifica y asume su rol poco tiempo.	Identifica y asume su rol la mayor parte del tiempo.	Identifica y asume su rol.

Tabla 31: Rúbrica de evaluación para la actividad 2

ACTIVIDAD 3: ¿Qué y dónde plantar?					
Indicador de logro	**Criterio de evaluación**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**
1.1 Identifica los datos del problema y comprende las preguntas formuladas.	1	No identifica los datos del problema y no comprende las preguntas formuladas.	Identifica algunos datos, pero no lo que pide resolver.	Identifica adecuadamente la mayor parte y comprende las preguntas formuladas.	Identifica correctamente los datos del problema y comprende las preguntas formuladas.
1.1 Establece relaciones con los datos del problema.	1	No relaciona los datos del problema.	Relaciona datos pero alguno de forma incorrecta.	Relaciona más de la mitad de los datos correctamente.	Relaciona datos de forma correcta.
1.2 Utiliza una estrategia correcta para resolver los problemas.	1	No tiene estrategia.	La poca estrategia que utiliza es inadecuada.	Estrategia adecuada pero no desarrollada correctamente.	Estrategia adecuada.
1.3 Obtiene soluciones del problema.	1	No desarrolla ningún cálculo.	Las operaciones o están incompletas o con fallos.	Los cálculos son correctos pero contienen algún fallo.	Los cálculos son correctos.
3.1 Comprueba conjeturas de forma guiada.	3	No comprueba las conjeturas.	Comprueba la minoría.	Comprueba la mayoría.	Comprueba todas.
3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.	3	No comprueba sus soluciones.	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia, GeoGebra, regla y compás u otro método, pero con algún error.	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia, GeoGebra, regla y compás u otro método.	Comprueba todas sus soluciones con papiroflexia, GeoGebra, regla y compás u otro método.
4.1 Descompone el problema en partes más simples.	4	No descompone el problema.	Descompone alguna parte del problema.	Descompone la mayor parte del problema en otros simples	Descompone el problema en partes más simples.
4.1 Organiza y relaciona las pequeñas partes del problemas.	4	No organiza ni relaciona.	Relaciona algunas partes del problema de forma desorganizada.	Relaciona la mayor parte del problema de forma organizada.	Desarrolla las pequeñas partes de forma organizada y relacionada.
5.2 aplica los conocimientos previos.	5	No aplica conocimientos previos.	Aplica algún conocimiento previo pero de forma errónea.	Aplica algún conocimiento previo de forma correcta.	Aplica todos los conocimiento previos necesarios de forma correcta.
7.1 Representa conceptos o información de diferentes modos.	7	No representa los conceptos.	Representa conceptos de una única forma.	Representa algunos conceptos de diferente forma.	Representa los conceptos de diferente forma.

7.2. Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la resolución, usando material manipulativo de apoyo si es necesario.	7	No utiliza la papiroflexia.	Utiliza la papiroflexia pero de forma incorrecta.	Utiliza la papiroflexia de forma correcta e incorrecta.	Utiliza la papiroflexia de forma correcta.
8.1 Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos.	8	No explica los procesos ni os pasos seguidos en la resolución.	Explica los procesos sin utilizar lenguaje matemático.	Explica la mayoría de los procesos con lenguaje matemático.	Explica todos los procesos con lenguaje matemático de manera clara.
10.1.Participa activamente en el trabajo en equipo.	10	No participa en el grupo.	Participa puntualmente en el grupo.	Participa la mayor parte del tiempo.	Se integra y participa en el grupo.

Tabla 32: Rúbrica de evaluación para la actividad 3

ACTIVIDAD 4: Complementos para el jardín.					
Indicador de logro	**Criterio de evaluación**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**
1.1 Identifica los datos del problema y comprende las preguntas formuladas.	1	No identifica los datos del problema y no comprende las preguntas formuladas.	Identifica algunos datos, pero no lo que pide resolver.	Identifica adecuadamente la mayor parte y comprende las preguntas formuladas.	Identifica correctamente los datos del problema y comprende las preguntas formuladas
2.2 Razona la validez de las soluciones en función del contexto.	2	No razona la validez de las soluciones.	Intenta razonar las soluciones pero de forma errónea.	Razona algunas soluciones de forma correcta.	Comprueba la validez de las soluciones
3.1 Comprueba conjeturas de forma guiada.	3	No comprueba las conjeturas.	Comprueba la minoría.	Comprueba la mayoría.	Comprueba todas
3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.	3	No comprueba sus soluciones.	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia, GeoGebra, regla y compás u otro método, pero con algún error.	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia, GeoGebra, regla y compás u otro método.	Comprueba todas sus soluciones con papiroflexia, GeoGebra, regla y compás u otro método
4.1 Descompone el problema en partes más simples.	4	No descompone el problema.	Descompone alguna parte del problema.	Descompone la mayor parte del problema en otros simples	Descompone el problema en partes más simples.
4.1 Organiza y relaciona las pequeñas partes del problemas.	4	No organiza ni relaciona.	Relaciona algunas partes del problema de forma desorganizada.	Relaciona la mayor parte del problema de forma organizada.	Desarrolla las pequeñas partes de forma organizada y relacionada.
4.2 Identifica algoritmos para resolver problemas	4	No identifica ningún algoritmo.	Rara vez identifica algún algoritmo.	Identifica la mayoría de los algoritmos.	Identifica algoritmos.
5.1 Relaciona los diferentes contenidos matemáticos.	5	No relaciona contenidos.	Relaciona menos de la mitad de los contenidos implicado en la actividad.	Relaciona más de la mitad de los contenidos implicado en la actividad.	Relaciona todos los contenidos implicado en la actividad.
5.2 aplica los conocimientos previos.	5	No aplica conocimientos previos.	Aplica algún conocimiento previo pero de forma errónea.	Aplica algún conocimiento previo de forma correcta.	Aplica todos los conocimiento previos necesarios de forma correcta.
7.1 Representa conceptos o información de diferentes modos.	7	No representa los conceptos.	Representa conceptos de una única forma.	Representa algunos conceptos de diferente forma.	Representa los conceptos de diferente forma.

7.1 Representa procesos de diferentes modos.	7	No representa los procesos.	Representa alguno de los procesos de una única forma.	Representa alguno de los procesos de diferentes formas.	Representa los procesos.
8.1 Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos.	8	No explica los procesos ni os pasos seguidos en la resolución.	Explica los procesos sin utilizar lenguaje matemático.	Explica la mayoría de los procesos con lenguaje matemático.	Explica todos los procesos con lenguaje matemático de manera clara.
8.2 Reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana.	8	No reconoce el lenguaje matemático.	-	Reconoce parte.	Reconoce el lenguaje matemático.
10.1 Respeta las diferentes opiniones y propuestas de sus compañeros.	10	No respeta las opiniones de los compañeros.	Acepta las opiniones ajenas solo si coinciden con las suyas.	Respeta las opiniones ajenas en algunas decisiones.	Respeta siempre las opiniones ajenas.

Tabla 33: Rúbrica de evaluación para la actividad 4

ACTIVIDAD 5. Identidades notables (alternativa curso superior)					
Indicador de logro	**Criterio de evaluación**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**
1.1 Reformula problemas matemáticos de forma verbal y gráfica.	1	No es capaz de reformular problemas de forma verbal o gráfica.	-	En ocasiones reformula problemas ya sea verbal o gráficamente.	Es capaz de reformular problemas de forma verbal o gráfica.
2.1 Comprueba la corrección matemática de las soluciones de un problema.	2	No comprueba las soluciones del problema.	Comprueba alguna de las soluciones pero de forma incorrecta.	Comprueba alguna de las soluciones de forma correcta.	Comprueba las soluciones del problema.
5.1 Deducir relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.	5	No relaciona contenidos. No conoce ni maneja las identidades notables que se demuestran.	Relaciona menos de la mitad de los contenidos implicado en la actividad	Relaciona más de la mitad de los contenidos implicado en la actividad	Relaciona todos los contenidos implicados en la actividad. Conoce y maneja habitualmente las identidades notables que se van a demostrar.
5.2 Analizar y poner en práctica conexiones entre diferentes procesos matemáticos, aplicando conocimientos y experiencias previas.	5	No analiza ni realiza conexiones entre diferentes procesos matemáticos o conocimientos previos.	Rara vez realiza conexiones entre diferentes procesos matemáticos y conocimientos previos.	En ocasiones realiza conexiones entre diferentes procesos matemáticos y conocimientos previos.	Es capaz de relacionar las incógnitas de las ecuaciones con los cuadrados/rectángulos que se realizarán.
7.1 Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos visualizando, ideas y estructurando procesos matemáticos.	7	No representa los conceptos.	Representa conceptos de una única forma	Representa algunos conceptos de diferente forma.	Representa los conceptos de diferente forma.
7.2 Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo de apoyo si es necesario.	7	No elabora ni valora la utilización de demostraciones visuales.	Rara vez emplea el uso de demostraciones visuales.	Emplea en ocasiones pero valora la utilización de demostraciones visuales.	Elabora y valora positivamente la utilización de demostraciones más visuales.
8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos, procedimientos y conclusiones.	8	No explica los procesos ni os pasos seguidos en la resolución.	Explica los procesos sin utilizar lenguaje matemático.	Explica la mayoría de los procesos con lenguaje matemático.	Explica todos los procesos con lenguaje matemático de manera clara.
8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión.	8	No reconoce el lenguaje matemático.	-	Reconoce parte.	Reconoce el lenguaje matemático.

9.1 Identificar y gestionar las emociones propias y ajenas y desarrollar el autoconcepto matemático, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.	9	No muestra ningún interés y no gestiona sus emociones.	En ocasiones muestra interés y gestiona sus propias emociones.	Muestra interés ante nuevos retos la mayor parte del tiempo y gestiona las emociones la mayor parte del tiempo.	Muestra siempre interés ante nuevos retos y gestiona sus propias emociones y las ajenas.
9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas, aceptando la crítica razonada.	9	No muestra interés.	Tiene una actitud pasiva toda la actividad.	Mantiene una buena actitud y participa la mayor parte del tiempo.	Mantiene buena actitud y participación.
10.1 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa, tomando decisiones y realizando juicios informados.	10	No colabora, ni respeta las opiniones de los compañeros.	Acepta las opiniones ajenas solo si coinciden con las suyas, y a veces colabora.	Colabora, participa y respeta las opiniones ajenas en algunas decisiones.	Colabora activamente, participa y respeta las opiniones ajenas siempre.

Tabla 34: Rúbrica de evaluación para la actividad 5

7.3 Índice de Tablas

7.4 Índice de Figuras