Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

Introducción a los determinantes y cómo explicarlos en Bachillerato

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad Matemáticas y su Didáctica.

Alumno: Pedro Fidalgo Martínez

Tutores: Alberto Fernández Boix
Cesáreo Jesús González Fernández

Valladolid, junio 2024

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar el concepto de determinante de una matriz cuadrada. La idea fundamental es cómo llegar a planteárselo a los alumnos de 2º de Bachillerato para que les resulte lo más fácil de manejar y a la vez comprendan lo mejor posible las aplicaciones que tienen los determinantes dentro de los conceptos que ellos pueden llegar a utilizar. Es importante utilizar las metodologías adecuadas para hacer entender a los alumnos de 2º de Bachillerato los conceptos de determinantes y su posible uso en la resolución de sistemas lineales.

Palabras clave: Bachillerato, determinantes, matrices, innovación docente.

Abstract

The objective of this work is to study the concept of the determinant of a square matrix. The fundamental idea is how to present it to final-year high school students so that it is as easy as possible for them to handle while also helping them understand the applications of determinants within the concepts they might use. It is important to use appropriate methodologies to help final-year high school students understand the concepts of determinants and their possible use in solving linear systems.

Keywords: high school, determinants, matrices, educational innovation.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Como se dice en el resumen de este Trabajo Fin de Máster, el objetivo de esta memoria es describir cómo se explicarían los determinantes a una clase de 2º de Bachillerato, en particular 2º de Bachillerato tecnológico por la metodología seguida. Por tanto esto no es una situación de aprendizaje, solamente se va a exponer la forma de explicar los determinantes que hemos creído oportuna. Acompañando al planteamiento de esta metodología se incluirá también el contexto legal (Real Decreto 243/2022), (Decreto 40/2022) y la justificación de por qué esta metodología sigue las directrices de la nueva ley educativa. La inspiración para este trabajo ha sido el artículo (Dydak, 2023) que puso sobre la mesa el tutor Alberto Fernández Boix.

La actividad planteada, o más bien la secuencia de actividades, está diseñada para movilizar la competencia matemática profundamente. La forma de explicar el determinante ha sido seleccionada pensando en resultar lo más natural posible y de manera que estimule la capacidad de razonamiento del alumnado. Por ello, se explicará esta parte del temario de una manera parecida a la forma de descubrir el determinante: se empezará buscando una herramienta desconocida que resuelva sistemas de ecuaciones lineales. La única información de la que se partirá por lo tanto es que el determinante es la herramienta que satisface la regla de Cramer 3.4.6. A raíz de esta curiosa definición se deducirán las propiedades básicas del determinante y finalmente se descubrirán las formas de calcularlo, haciendo un análisis de cuál puede ser la mejor en cada momento.

La ventaja de esta forma de explicar el determinante es que al trabajar de base con sus propiedades, cuando llegue la hora de hacer cálculos ya sabrán manejar el determinante con mayor naturalidad y no solamente habrán memorizado la regla de Sarrus 3.7.6. Otra ventaja es que esta metodología les prepara para su futuro universitario.

Según mi experiencia, el alumnado que ingresa en un grado universitario donde se imparten asignaturas como Cálculo Infinitesimal o Álgebra Lineal no está muy preparado para el cambio de etapa. Muchos aprueban tras varios intentos, sintiendo mucha frustración y acostumbrándose por el camino difícil al cambio entre el instituto y universidad. Esto es porque no se les ha preparado para el salto. En el instituto se intenta que toda la clase entienda la materia, eligiendo en ocasiones el aprendizaje de reglas y fórmulas por la falta de tiempo. O peor todavía, en 2º de Bachillerato se acaban priorizando unas partes del temario para llegar a la mejor nota en el examen de ingreso a la universidad y se ignora por completo que se esté recibiendo un aprendizaje de calidad. Pero en la universidad las matemáticas se enseñan mediante el razonamiento y sin esperar a nadie. Creo habría que llegar a un consenso entre las dos posturas para garantizar una mejor continuidad entre las dos etapas. Esto es justo el objetivo tras la metodología seleccionada en esta memoria.

Se va a incluir una introducción histórica al determinante y las matrices en este mismo capítulo de introducción. Después, en el segundo capítulo se hará un repaso al currículo de Bachillerato. Se busca entender qué aspectos del determinante son necesarios en 2º de Bachillerato. También se compara con el currículo del año anterior y con el de la anterior legislación, ya que así llegaremos a un entendimiento más contextualizado de cómo se trata el temario del que vamos a hablar en la memoria.

El tercer capítulo de esta memoria contiene al completo la secuencia de actividades planteadas para enseñar los determinantes. Se explican los aspectos curriculares y metodológicos pertinentes y después se desarrolla el contenido matemático a tratar en las sesiones de la manera en la que le sería presentado a la clase. Tras esto se encuentran las conclusiones y las referencias.

Contribución del máster

Con el objetivo de explicitar en algún lugar cómo el máster ha influido en esta memoria, destaco aquí las aportaciones más importantes a este TFM de las asignaturas que he cursado en el máster:

Aprendizaje y desarrollo de la personalidad: Tras cursarla, conozco más a fondo el desarrollo cognitivo de un adolescente y comprendo a qué edad desarrolla la capacidad de abstracción. Por lo que considero adecuado el tratamiento de los determinantes en este TFM.

Didáctica de la matemática: Aunque se ha hecho más énfasis en el método Singapur, esto se puede extrapolar a cualquier proceso de aprendizaje-enseñanza. Por lo que he prestado atención a la forma de secuenciar lo que aprenden en cada momento para que resulte más natural. Incluso aunque no utilice el método Singapur en este trabajo por las peculiaridades del determinante, intento mostrar de forma visual el cálculo en el caso 2×2 antes de pasar a tamaños mayores.

Diseño curricular en Matemáticas: Se ha aprendido a consultar documentos legales como (Real Decreto 243/2022) y (Decreto 40/2022) para entender lo que es realmente el currículo de una materia.

Metodología y evaluación en Matemáticas: Como su nombre indica, se ha aprendido a comparar diferentes metodologías para escoger la idónea según el contexto. También se ha aprendido a evaluar siguiendo la nueva legislación. Esto se puede ver explícitamente reflejado en las páginas de este documento.

Innovación docente en Matemáticas: Al arriesgarme a enseñar los determinantes de una manera diferente porque creo que realmente puede funcionar es una aplicación de la inovación educativa.

Iniciación a la investigación educativa en Matemáticas: Dado que este no es un trabajo de investigación educativa, esta asignatura me aporta en esta memoria una mejora en el manejo de bibliografías.

Prácticas externas: Me aportan la dosis de realidad suficiente como para entender que la implementación de estas actividades en un segundo curso de bachillerato es complicado. Pero a la vez sé que puede merecer la pena por lo que les puede aportar en su futuro académico.

Antes de empezar con la memoria es conveniente resumir la historia de los conceptos de determinante y matriz. No solo porque si se enseña algo habría que conocerlo a fondo si no también porque la historia de las matemáticas es algo que se ignora casi siempre y puede motivar a algunos alumnos. Además, siendo las matemáticas una de las mejores invenciones humanas, merecen ser divulgadas, incluida su historia.

1.1. Historia Antigua

Es curioso cómo el concepto de determinante apareció primero como herramienta para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Después, cuando se empezó a investigar qué propiedades tiene la *tabla* de coeficientes nació el estudio de las matrices, que son madres de los determinantes en su interior. Las fuentes principales que se utilizan son (Grattan-Guinness, 2017) y MacTutor.

Los inicios de las matrices y los determinantes se remontan al siglo II a.C., aunque se pueden encontrar indicios que retroceden hasta el siglo IV a.C. Sin embargo, no fue hasta casi finales del siglo XVII cuando las ideas reaparecieron y el desarrollo realmente comenzó.

No es sorprendente que los comienzos de las matrices y los determinantes surgieran a través del estudio de sistemas de ecuaciones lineales. Los babilonios estudiaron problemas que conducían a sistemas de ecuaciones lineales y algunos de estos están preservados en tabletas de arcilla que han sobrevivido hasta nuestros días. Por ejemplo, una tableta que data alrededor del año 300 a.C. contiene el siguiente problema:

> «Hay dos campos cuya área total es 1800 varas cuadradas. Un campo produce grano a una tasa de $\frac{2}{3}$ de fanega por cada vara cuadrada mientras que el otro produce grano a una tasa de $\frac{1}{2}$ de fanega por vara cuadrada. Si la producción total son 1100 fanegas de grano, ¿cuál es el tamaño de cada campo?»

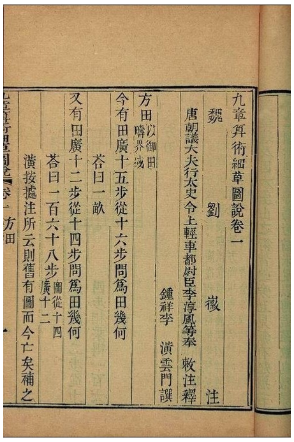

九章算術細草圖說卷一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋
鍾祥李 潢雲門譔
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
荅曰一百六十八步 圖從十四廣十二
潢按據注所云則舊有圖而今亡矣補之
九章算術細草圖說 卷一 方田

Figura 1.1: Primera página de los *Nueve Capítulos*.

Por su parte, los matemáticos de la China de los años 200 a.C. – 100 a.C. se acercaron mucho más a las matrices que los babilonios. De hecho, es justo decir que el texto de los Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático o *Jiuzhang Suanshu* escrito durante la dinastía Han proporciona el primer ejemplo conocido de métodos matriciales (Chen, 2018). Se planteó un problema similar al ejemplo babilonio anterior:

> «Hay tres tipos de maíz. Tres mazorcas del primero, dos del segundo y una del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y una del tercero hacen 34 medidas. Y una del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de maíz contiene una mazorca de cada tipo?»

Para resolver el problema, el autor sigue el siguiente método. Coloca los coeficientes del sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas en una tabla.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Nuestros métodos de finales del siglo XX nos habrían llevado a escribir las ecuaciones lineales como las filas de la matriz en lugar de las columnas, pero por supuesto, el método es idéntico. Ahora el autor, no olvidemos que data del año 200 a.C., multiplica la columna del medio por 3 y le resta la columna derecha tantas veces como sea posible, lo mismo hace luego al restar la columna derecha tantas veces como sea posible al triple de la primera columna. Esto da como resultado:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Después, la columna de la izquierda se multiplica por 5 y se le resta tantas veces como sea posible la columna central. Lo que nos da

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

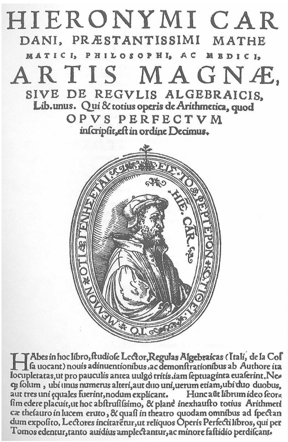
y a partir de ahí se puede encontrar la solución para el tercer tipo de maíz, luego para el segundo, y después para el primero mediante sustitución regresiva. Este método, ahora conocido como eliminación gaussiana, no será ampliamente conocido en Europa hasta principios del siglo XIX.

1.2. Edad Moderna en Europa

Cardano, en *Ars Magna* (1545), ofrece una regla para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales que él llama *regula de modo* (Gavagna, 2010). Esta regla da lo que esencialmente es la regla de Cramer para resolver un sistema 2×2. Por lo tanto, Cardano no llega a la definición de un determinante, pero podemos ver que su método sí conduce a la definición.

Muchos resultados estándar de la teoría elemental de matrices aparecieron mucho antes de que las matrices fueran objeto de investigación matemática. Por ejemplo Johan de Witt en *Elementa curvarum linearum* (de Witt, 2010), publicado como parte de los comentarios sobre la versión latina de 1660 de la *Géométrie* de Descartes, mostró cómo una transformación de los ejes reduce una ecuación dada para una cónica a su forma canónica. Esto equivale a diagonalizar una matriz simétrica, pero de Witt nunca pensó en estos términos.

La idea de determinante apareció en Japón antes de que apareciera en Europa (Morimoto, 2018). En 1683 Kōwa Seki describió métodos matriciales empleando la misma notación en tablas que la de los chinos. Aun sin tener ninguna palabra para la noción de determinante, Seki utilizó los determinantes y dio métodos generales para calcularlos basados en ejemplos. Además, Seki fue capaz de encontrar los determinantes de matrices 2×2, 3×3, 4×4 y 5×5 y los aplicó para resolver ecuaciones pero no para sistemas de ecuaciones lineales.



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni equales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſsimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Figura 1.2: Página de *Ars Magna*.

La primera aparición en Europa de un determinante fue 10 años más tarde. En 1693 Leibniz escribió a L'Hôpital que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0 \\ 20 + 21x + 22y &= 0 \\ 30 + 31x + 32y &= 0 \end{aligned}$$

tiene solución porque

$$\begin{aligned} &10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 \\ =&10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30 \end{aligned}$$

que equivale a que el determinante de la matriz de coeficientes tenga determinante nulo.

Es importante señalar que la notación de Leibniz expuesta arriba no indica números, sino que son dos caracteres que se traducirían a los actuales índices de las posiciones en una matriz. De esta manera 30 quiere decir $a_{3,0}$.

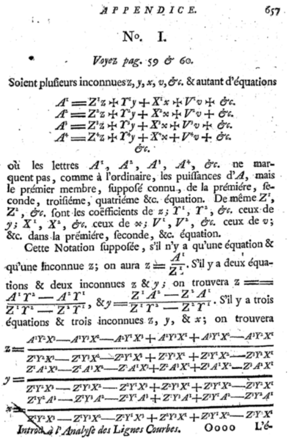
Leibniz estaba convencido de que una buena notación matemática era clave para progresar, por lo que experimentó con diferentes notaciones para sus sistemas de coeficientes. Sus manuscritos no publicados contienen más de 50 formas diferentes de escribir sistemas de coeficientes, en los que trabajó durante un período de 50 años comenzando en 1678. Solo dos publicaciones (1700 y 1710) contienen resultados sobre sistemas de coeficientes y estas utilizan la misma notación que en su carta a L'Hôpital mencionada anteriormente (Grattan-Guinness, 2017).

Leibniz utilizó la palabra *resultante* para ciertas sumas combinatorias de términos de un determinante (Knobloch, 2013). Probó varios resultados sobre resultantes, incluido lo que es esencialmente la regla de Cramer. También sabía que un determinante se podía expandir utilizando cualquier columna, lo que ahora se llama expansión de Laplace. Además de estudiar sistemas de coeficientes de ecuaciones que lo llevaron a determinantes, Leibniz estudió también sistemas de coeficientes de formas cuadráticas, que naturalmente condujeron a la teoría de matrices.

En la década de 1730, Maclaurin escribió *Treatise of Algebra* (MacLaurin, 1748), aunque no se publicó hasta 1748, dos años después de su muerte. Contiene los primeros resultados publicados sobre determinantes, demostrando la regla de Cramer para sistemas 2×2 y 3×3 e indicando cómo funcionaría en el caso 4×4.

Cramer dio la regla general para sistemas $n \times n$ en *Introduction a l'analyse de lignes courbes algébriques* (1750). Surgió del deseo de encontrar la ecuación de una curva plana que pase por varios puntos dados (Joffredo, 2019). La regla aparece en un apéndice del artículo pero no se da ninguna prueba:

> «Uno encuentra el valor de cada incógnita formando n fracciones cuyo denominador común tiene tantos términos como permutaciones de n cosas.»



APPENDICE. 657

No. I.

Voyez pag. 59 *&* 60.

Soient pluſieurs inconnues z, y, x, v, &c. & autant d'équations

$$A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \text{\&c.}$$
$$A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \text{\&c.}$$
$$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \text{\&c.}$$
$$A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \text{\&c.}$$
&c.

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, &c. ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puiſſances d'A, mais le prémier membre, ſuppoſé connu, de la prémiére, ſeconde, troiſiéme, quatriéme &c. équation. De même Z^1, Z^2, &c. ſont les coëfficients de z; Y^1, Y^2, &c. ceux de y; X^1, X^2, &c. ceux de x; V^1, V^2, &c. ceux de v; &c. dans la prémiére, ſeconde, &c. équation.

Cette Notation ſuppoſée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y; on trouvera $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$, & $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues z, y, & x; on trouvera

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

Introd. à l'Analyſe des Lignes Courbes. Oooo L'é-

Figura 1.3: Apéndice donde aparece la regla de Cramer.

Cramer explicó detalladamente cómo se calculan estos términos como productos de ciertos coeficientes de las ecuaciones y cómo se determina el signo. También explica cómo pueden encontrarse los n numeradores de las fracciones al reemplazar ciertos coeficientes de este cálculo por términos constantes del sistema.

A partir de entonces aparecen trabajos sobre determinantes de forma regular. En 1764, Bézout dio métodos para calcular determinantes, al igual que Vandermonde en 1771. En 1772, Laplace afirmó que los métodos introducidos por Cramer y Bézout no eran prácticos y, en un artículo donde estudiaba las órbitas de los planetas interiores, discutió la solución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando determinantes. Sorprendentemente, Laplace usó la palabra *resultante* para lo que ahora llamamos determinante. Y es sorprendente ya que es la misma palabra que utilizó Leibniz. Sin embargo, Laplace desconocía el trabajo de Leibniz. Laplace dio la expansión del determinante que ahora lleva su nombre.

Lagrange, en un artículo de 1773, estudió identidades para determinantes funcionales 3×3. Eso sí, esto se entiende en retrospectiva ya que Lagrange no vio ninguna conexión entre su trabajo y el de Laplace y Vandermonde sobre determinantes (Borgato, 2022). Sin embargo, este artículo de 1773 sobre mecánica contiene lo que ahora consideramos como la interpretación de volumen de un determinante por primera vez. Lagrange mostró que el tetraedro formado por los puntos $O(0,0,0)$, $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$ y $M''(x'',y'',z'')$ tiene volumen

$$\frac{1}{6}\Big(z(x'y'' - y'x'') + z'(yx'' - xy'') + z''(xy' - yx')\Big).$$

1.3. La definición de determinante y matriz

El término *determinante* fue introducido por primera vez por Gauss en *Disquisitiones arithmeticae* (1801) mientras estudiaba formas cuadráticas (Gauss, 1986). Utilizó el término porque el determinante determina las propiedades de la forma cuadrática. Sin embargo, el concepto no es exactamente el mismo que el de nuestro determinante actual. En la misma obra, Gauss presenta los coeficientes de sus formas cuadráticas en matrices rectangulares. Describe la multiplicación de matrices (que él considera como composición, por lo que aún no ha llegado al concepto de álgebra de matrices) y la inversa de una matriz en el contexto particular de las matrices de coeficientes de formas cuadráticas (Knobloch, 1994).

La eliminación gaussiana, que apareció por primera vez en los Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático escrito en el año 200 a.C., fue utilizada por Gauss al investigar la órbita del asteroide Pallas. Utilizando observaciones de Pallas tomadas entre 1803 y 1809, Gauss obtuvo un sistema de seis ecuaciones lineales en seis incógnitas. Gauss dio un método sistemático para resolver tales ecuaciones que es precisamente la eliminación gaussiana en la matriz de coeficientes (Knobloch, 1994).

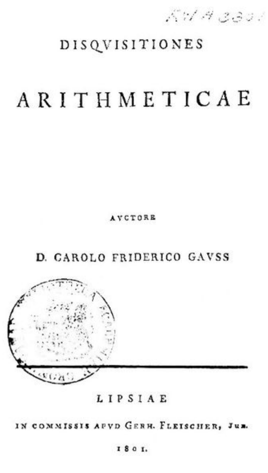


Figura 1.4: Primera edición de *Disquisitiones arithmeticae.*

Fue Cauchy en 1812 quien utilizó la palabra *determinante* en su sentido moderno. El trabajo de Cauchy es el más completo de los primeros tratados sobre determinantes. Volvió a probar los resultados anteriores y dio nuevos resultados propios sobre menores y adjuntos. En un artículo de 1812 Cauchy demostró por primera vez el teorema de multiplicación para determinantes (Knobloch, 1994). Aunque en la misma reunión del Institut de France, Binet también presentó un artículo que contenía una demostración del teorema de multiplicación, pero fue menos satisfactoria que la dada por Cauchy.

En 1826 Cauchy, en el contexto de formas cuadráticas en n variables, utilizó el término *tableau* para la matriz de coeficientes. Encontró los valores propios y dio resultados sobre la diagonalización de una matriz en el contexto de convertir una forma en la suma de cuadrados. Cauchy también introdujo la idea de matrices similares (pero no el término) y mostró que si dos matrices son similares, tienen la misma ecuación característica (la dada por el polinomio característico $|A - xI| = 0$). Además, nuevamente en el contexto de formas cuadráticas, demostró que cada matriz real simétrica es diagonalizable.

Jacques Sturm dio una generalización del problema de los valores propios en el contexto de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. De hecho, el concepto de un valor propio apareció 80 años antes, nuevamente en un trabajo sobre sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de D'Alembert, estudiando el movimiento de una cuerda con masas unidas a ella en varios puntos.

Debe destacarse que ni Cauchy ni Sturm se dieron cuenta de la generalidad de las ideas que estaban introduciendo y las vieron solo en los contextos específicos en los que estaban trabajando. Jacobi desde alrededor de 1830 y luego Kronecker y Weierstraß en los años 1850 y 1860 también examinaron resultados de matrices pero nuevamente en un contexto específico, esta vez la noción de una transformación lineal (Knobloch, 1994).

Jacobi publicó tres tratados sobre determinantes en 1841. Estos fueron importantes porque por primera vez la definición del determinante se hizo de manera algorítmica y las entradas del determinante no se especificaron, por lo que sus resultados se aplicaban tanto a casos donde las entradas eran números como a casos donde eran funciones (Knobloch, 1994). Estos tres artículos de Jacobi dieron a conocer ampliamente la idea de un determinante.

Cayley, también escribiendo en 1841, utilizó dos líneas verticales a cada lado de la matriz para denotar el determinante, una notación que ahora se ha vuelto estándar (Knobloch, 1994).

Eisenstein en 1844 denotó las matrices con una sola letra y mostró cómo sumar y multiplicarlas como números ordinarios excepto por la falta de conmutatividad. Es justo decir que Eisenstein fue el primero en pensar en las matrices como formando un álgebra (Grattan-Guinness, 2017), como se puede ver en esta cita de su artículo de 1844:

> «Un algoritmo para el cálculo puede basarse en esto: consiste en aplicar las reglas usuales para las operaciones de multiplicación, división y exponentiación a ecuaciones simbólicas entre sistemas lineales, siempre se obtienen ecuaciones simbólicas correctas, la única consideración siendo que el orden de los factores no puede ser alterado.»

El primero en usar el término *matriz* fue Sylvester en 1850. Sylvester definió una matriz como un arreglo oblongo de términos y lo vio como algo que engendra varios determinantes de matrices cuadradas contenidas dentro de ella. En 1851 Sylvester se hizo abogado y conoció a Cayley, un compañero abogado que compartía su interés por las matemáticas. Cayley rápidamente vio la importancia del concepto de matriz y para 1853, Cayley había publicado una nota dando, por primera vez, la inversa de una matriz.

Cayley publicó en 1858 *A Memoir on the Theory of Matrices* (Cayley, 1858), que es notable por contener la primera definición abstracta de una matriz. Muestra que los arreglos de coeficientes estudiados anteriormente para formas cuadráticas y para transformaciones lineales son casos especiales de su concepto general. Cayley dio un álgebra de matrices definiendo la adición, la multiplicación, la multiplicación escalar y las inversas. Dio una construcción explícita de la inversa de una matriz en términos del determinante de la matriz. Cayley también demostró que, en el caso de matrices 2×2, una matriz satisface su propia ecuación característica. Declaró que había verificado el resultado para matrices 3×3, indicando su prueba, pero dice:

> «No he considerado necesario emprender el trabajo de una prueba formal del teorema en el caso general de una matriz de cualquier orden.»

Que una matriz satisfaga su propia ecuación característica se llama en la actualidad teorema de Cayley-Hamilton, así que es razonable preguntarse qué tiene que ver Hamilton en esto. Y es que Hamilton también demostró un caso especial del teorema, el caso 4×4 en el transcurso de sus investigaciones sobre cuaterniones.

1.4. Investigaciones tras la definición

En 1870, apareció la forma canónica de Jordan en su *Traité des Substitutions et des Équations Algébriques* (Gray, 2018). Aparece en el contexto de una forma canónica para sustituciones lineales sobre un cuerpo finito de orden primo.

Frobenius escribió en 1878 *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, un trabajo importante sobre matrices (Frobenius, 1877). Aunque parecía no estar al tanto del trabajo de Cayley. Frobenius trata en este artículo con coeficientes de formas y no utiliza el término matriz. Sin embargo, demostró resultados importantes sobre matrices canónicas como representantes de clases de equivalencia de matrices. Cita a Kronecker y Weierstraß como habiendo considerado casos especiales de sus resultados en 1874 y 1868 respectivamente. Frobenius también demostró el resultado general de que una matriz satisface su ecuación característica. Este artículo de 1878 de Frobenius también contiene la definición del rango de una matriz que utilizó en su trabajo sobre formas canónicas y la definición de matrices ortogonales.

La nulidad de una matriz cuadrada (la dimensión de su núcleo) fue definida por Sylvester en 1884. Definió la nulidad $n(A)$ de la matriz A como el mayor entero i tal que todo menor de A de orden $n - i + 1$ es nulo. Y demostró que

$$\text{máx}\{n(A), n(B)\} \leq n(AB) \leq n(A) + n(B).$$

En 1896 Frobenius conoció *A Memoir on the Theory of Matrices* de Cayley de 1858 y después de esto comenzó a usar el término matriz. Aunque Cayley solo demostró el teorema de Cayley-Hamilton para matrices 2×2 y 3×3, Frobenius atribuyó el resultado a Cayley a pesar de haber sido el primero en demostrar el teorema general.

Weierstraß utilizó una definición axiomática del determinante en sus conferencias y después de su muerte fue publicada en 1903 en la nota *Zur Determinantentheorie*. En el mismo año, las conferencias de Kronecker sobre determinantes también fueron publicadas, nuevamente después de su muerte. Con estas dos publicaciones la teoría moderna de determinantes quedó sólidamente establecida (Knobloch, 1994).

Sin embargo, la teoría de matrices tardó un poco más de tiempo en convertirse en una teoría plenamente aceptada. Un texto importante que ubicó a las matrices en su lugar dentro de las matemáticas fue *Introduction to higher algebra* de (Bǫcher, 1907). Turnbull y Aitken escribieron textos influyentes en la década de 1930 y *An introduction to linear algebra* de (Mirsky, 1972) vio a la teoría de matrices alcanzar su papel actual importante.

1.5. El determinante en la actualidad

En la actualidad el determinante de una matriz $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ se entiende como una forma multilineal alternada sobre los n vectores columna de A y tal que vale 1 en la matriz identidad $I_n = (\delta_{i,j})$ (Lang, 2002). De hecho, esta es la caracterización a la que se llega en la propiedad 3.4.5.

Visto de manera más abstracta, podemos definir el determinante de un endomorfismo f de un espacio vectorial V en una base B como $\det(f) = \mathfrak{M}_{B,B}(f)$. Ya que tenemos un isomorfismo $\mathfrak{M}_{B,B} : \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales (Merino González y Santos Aláez, 2018).

De manera todavía más *universal*, en el lenguaje de la teoría de categorías podemos definir el determinante de un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ mediante la siguiente propiedad: $\det f$ es el único escalar que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} V^n \arrow[r, "\wedge"] \arrow[dr, "\wedge^n f"'] & \bigwedge^n V \arrow[d, dashed, "\det f"] \\ & \bigwedge^n V \end{tikzcd}$$

Donde $\wedge^n f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}_1) \wedge \cdots \wedge f(\mathbf{v}_n)$ y $\det f \in \mathbb{K}$ es una multiplicación por un escalar.

Capítulo 2

Los determinantes en 2º de Bachillerato

En este capítulo se pretende dar contexto sobre el currículo de 2º de Bachillerato. Se van a comparar los cambios entre la LOMCE y la LOMLOE respecto a los determinantes y el álgebra lineal. También se recuerda la parte del currículo de 1º de Bachillerato relativa al álgebra lineal, que recopila los conocimientos que el alumnado deberían haber adquirido el curso anterior.

2.1. Contextualización y objetivos

Las actividades que se van a plantear en el siguiente capítulo están pensadas para una clase de **segundo de Bachillerato tecnológico**. Es decir, un grupo formado por estudiantes que tengan pensado cursar una ingeniería o un grado científico como Física, Química o Matemáticas. No incluyo en esta clase ideal al alumnado de ciencias de la salud porque en sus estudios posteriores no cursarán asignaturas como Álgebra Lineal en la universidad de la misma forma que en las carreras ya mencionadas.

El Bachillerato se ha convertido en un curso de preparación al examen de ingreso a la universidad y no tanto a una preparación para lo que ocurre tras ingresar en la universidad. En mi experiencia, el nivel en matemáticas tras acabar el instituto no tiene nada que ver con lo que exige la universidad en cuanto a temario y también en cuanto a lenguaje. Si bien los estudiantes acaban adaptándose al sistema universitario tras fallar alguna vez, creo que podríamos preparar mejor a los futuros alumnos STEM.

Por lo tanto este trabajo pretende enseñar los contenidos relacionados con el determinante de una manera natural: a partir de una propiedad fundamental. En base a esta propiedad fundamental se pretende ir deduciendo el resto de propiedades y contenidos mediante demostraciones sencillas. De esta manera se implica al alumnado en el proceso de su propio aprendizaje y se le prepara para su siguiente etapa educativa. Estos objetivos están de acuerdo con el artículo 7 de (Real Decreto 243/2022):

> «*i)* Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida».
>
> «*j)* Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.»

2.2. Los determinantes en el currículo: LOMCE

En la anterior legislación (Orden EDU/363/2015) el currículo de la asignatura de Matemáticas de 2º de Bachillerato estaba más compartimentado. Los contenidos a tratar se dividen por bloques, coincidiendo en mayor o menor medida con las ramas de conocimiento de las Matemáticas como ciencia. En contraposición, en el nuevo marco legal (Decreto 40/2022) se dividen los contenidos en *sentidos*, planteando un acercamiento más pedagógico y resaltando las conexiones de los conocimientos dentro y fuera de la materia.

Aún así, los contenidos no hay cambiado mucho. Cabe destacar que en el primer bloque de la asignatura se incluyen una serie de conocimientos transversales a toda la materia. Como se puede comprobar, algunos de estos se han suprimido en la nueva ley.

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas:

- Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc.
- Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc.
- Razonamiento deductivo e inductivo.
- Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos.
- Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático.
- Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. (Orden EDU/363/2015)

Aunque bajo la nueva ley educativa se incita al razonamiento, se han suprimido los contenidos anteriores, que aunque probablemente no se impartieron por no preguntarse en las pruebas de acceso a la universidad, me parece uno de los contenidos más importantes que aporta la materia. Por lo que en esta propuesta se intentará inculcar en el alumnado un poco del arte de la demostración matemática, por supuesto adaptándolo a su nivel y circunstancias.

Bloque 2. Números y álgebra:

- Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Clasificación de matrices. Operaciones.
- Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.
- Determinantes. Propiedades elementales. Menor complementario y matriz adjunta.
- Rango de una matriz. Matriz inversa.
- Ecuaciones matriciales. Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, posiblemente dependientes de un parámetro.
- Método de Gauss. Teorema de Rouché-Frobenius. Regla de Cramer. Aplicación a la resolución de problemas. (Orden EDU/363/2015)

Como se puede apreciar, casi todos los contenidos relativos a los determinantes, las matrices y en general al álgebra lineal están listados dentro del bloque de número y álgebra. En cambio en (Decreto 40/2022) veremos que las distinciones son más precisas, de manera que en la actualidad se está matizando más el aprendizaje y las experiencias de la clase. Esto me parece un acierto, aunque a veces resulte confuso utilizar la clasificación de contenidos por sentidos, por ser tan nueva.

En cuanto a los contenidos no hay mucho cambio entre las dos leyes educativas. Me parece un acierto relacionar matrices con grafos, ya que puede ser una forma moderna y llamativa de mostrar las aplicaciones al mundo real de las matrices. Pero siendo realistas, mientras no se cambie el paradigma de que Bachillerato es un curso preparatorio para un examen, no se van a poder tratar estos contenidos correctamente.

Por otro lado, en el bloque de geometría de (Orden EDU/363/2015) también se incluyen contenidos que tienen relación con el álgebra lineal.

Bloque 4. Geometría:

- Vectores en el espacio tridimensional. Dependencia e independencia lineal. Base del espacio tridimensional.

- Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.

Ahora veremos cómo ha cambiado la distribución de los contenidos relativos a esta memoria con la nueva legislación.

2.3. Los determinantes en el currículo: LOMLOE

El currículo de Matemáticas de 2º de Bachillerato lista los siguientes contenidos relacionados con las matrices y los determinantes. Los divide en sentidos, como ya se ha comentado.

A. Sentido numérico:

1. Sentido de las operaciones.

    - Adición y producto de vectores y matrices: interpretación, comprensión y uso adecuado de las propiedades.
    - Inversa de una matriz.
    - Cálculo de determinantes: interpretación, comprensión y uso adecuado de sus propiedades.
    - Estrategias para operar con números reales, vectores y matrices: cálculo mental o escrito en los casos sencillos (como máximo orden 4) y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados.

2. Relaciones.

    - Conjuntos de vectores y matrices: estructura, comprensión y propiedades.

Como se puede apreciar (Decreto 40/2022) es bastante más detallado en cuanto a los conocimientos básicos que debe incluir el currículo. En el sentido numérico se hace referencia, aunque sin nombrarlo explícitamente, a la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y a la del álgebra de matrices. Esto casi ni se menciona, dándose por hecho, en el currículo planteado en (Orden EDU/363/2015).

C. Sentido espacial:

1. Formas geométricas de dos y tres dimensiones.

    - Objetos geométricos de tres dimensiones (vectores, rectas, planos): análisis de las propiedades y determinación de sus atributos.

- Resolución de problemas relativos a objetos geométricos en el espacio representados con coordenadas cartesianas, incluyendo posiciones relativas, incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos.

2. Localización y sistemas de representación.

   - Relaciones de objetos geométricos en el espacio: representación y exploración con ayuda de herramientas digitales.
   - Expresiones algebraicas de los objetos geométricos en el espacio: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver.

3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica.

   - Representación de objetos geométricos en el espacio mediante herramientas digitales o físicas.
   - Modelos matemáticos (geométricos, algebraicos, ...) para resolver problemas en el espacio. Conexiones con otras disciplinas y áreas de interés.
   - Conjeturas geométricas en el espacio: validación por medio de la deducción y la demostración de teoremas.
   - Modelización de la posición y el movimiento de un objeto en el espacio utilizando vectores. (Decreto 40/2022)

Es interesante cómo en el nuevo sentido espacial se incluyen bastantes contenidos relacionados con el álgebra lineal y sus aplicaciones al mundo real. Es un acierto acercar, siempre que se pueda, los contenidos matemáticos de forma más visual y contextualizada, incluso en esta etapa.

También me parece importante destacar la demostración de conjeturas. Eso sí, no es lo mismo demostrar una conjetura geométrica razonando, que aplicando un algoritmo ya aprendido como creo que se acaba haciendo. Se aprende más aprendiendo a construir los propios algoritmos y métodos de demostración que al aplicar una receta automatizada.

D. Sentido algebraico:

1. Patrones.

   - Generalización de patrones en situaciones diversas.

2. Modelo matemático.

   - Relaciones cuantitativas en situaciones complejas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas.

- Sistemas de ecuaciones: modelización de situaciones en diversos contextos.
- Técnicas y uso de matrices para, al menos, modelizar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones lineales o grafos.

3. Igualdad y desigualdad.

- Formas equivalentes de expresiones algebraicas en la resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones, mediante cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, y con herramientas digitales.
- Estudio de la compatibilidad de los sistemas lineales (Teorema de Rouché- Frobenius).
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas y un parámetro a lo sumo, en diferentes contextos y con métodos diversos (Cramer, Gauss).
- Resolución de ecuaciones y sistemas matriciales.

4. Pensamiento computacional.

- Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología empleando las herramientas o los programas más adecuados.
- Análisis algorítmico de las propiedades de las operaciones con matrices, los determinantes y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. (Decreto 40/2022)

El sentido algebraico ahora se distingue del numérico, aunque como ramas del conocimiento matemático estos términos tienen un significado totalmente distinto. Y dentro de este sentido se hacen distinciones que antes no existían. Mientras que en la ley anterior la resolución de un sistema de ecuaciones lineales se veía como un único proceso, ahora se separa en varios pasos: el concepto de sistemas de ecuaciones equivalentes y su importancia a la hora de simplificar un sistema siendo sus soluciones las mismas, el estudio de la compatibilidad de un sistema de ecuaciones, y por último la resolución en sí de un sistema de ecuaciones.

Destacar también que ahora los modelos matemáticos tienen más peso en el currículo. Creo que los modelos matemáticos (en nuestro caso relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales, determinantes y matrices) merecen ser estudiados en más profundidad. Y es que puede que las matemáticas que se aprenden no se apliquen en su futura vida profesional directamente, pero si un estudiante se desarrolla profesionalmente dentro del ámbito STEM seguramente utilice o necesite conocer algún modelo matemático.

Por último, es reseñable la inclusión de la generalización de patrones y el pensamiento computacional. Por un lado, el reconocimiento y la generalización de patrones se encuentra en el núcleo de la competencia matemática y el razonamiento abstracto. Por otro, el pensamiento computacional, que he descubierto cursando el Máster, es una competencia clave para el futuro de los alumnos STEM. No se trata solamente de aprender a programar o aplicar algoritmos, sino que se basa en ser competente a la hora de crear un algoritmo tras estudiar un problema concreto. Como creo en la importancia de esto, he decidido incluir unas pinceladas de pensamiento computacional dentro de esta memoria. Esto se debe a que a la hora de hacer cálculos con matrices se necesita una variedad de algoritmos, según la situación, y tiene mucho que ver con las nuevas tecnologías y la vida diaria. Es una pena que por la forma de plantearse el Bachillerato y la presión a la que están sometidos los alumnos no haya más tiempo para aprender.

2.4. El álgebra lineal de 1º de Bachillerato

Hay que tener en cuenta qué contenidos se incluyen en el currículo de 1º de Bachillerato para considerar los conocimientos que ya tiene la clase y a partir de dónde empezar a añadir lo nuevo. Como se puede ver en (Decreto 40/2022):

A. Sentido numérico:

1. Sentido de las operaciones.
    - Adición y producto escalar de vectores: propiedades y representaciones.
    - Estrategias para operar con números reales, complejos y vectores: cálculo mental o escrito en los casos sencillos y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados.
2. Relaciones.
    - Conjunto de vectores: estructura, comprensión y propiedades.

La parte citada del sentido numérico de Bachillerato nos muestra que en el segundo curso ya se debería conocer la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Por este motivo en la memoria de este trabajo solo incluyo la definición de espacio vectorial, que pone nombre a las propiedades que ya conocen y van a volver a manejar durante este curso.

C. Sentido espacial:

1. Formas geométricas de dos dimensiones.

- Objetos geométricos de dos dimensiones (vectores, rectas, lugares geométricos): análisis de las propiedades y determinación de sus atributos.
- Resolución de problemas relativos a objetos geométricos en el plano representados con coordenadas cartesianas.

2. Localización y sistemas de representación.

  - Relaciones de objetos geométricos en el plano: representación y exploración con ayuda de herramientas digitales o manuales.
  - Expresiones algebraicas de objetos geométricos: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver.

3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica.

  - Representación de objetos geométricos en el plano mediante herramientas digitales o manuales.
  - Modelos matemáticos (geométricos, algebraicos, grafos...) en la resolución de problemas en el plano. Conexiones con otras disciplinas y áreas de interés.
  - Conjeturas geométricas en el plano: validación por medio de la deducción y la demostración de teoremas.
  - Modelización de la posición y el movimiento de un objeto en el plano mediante vectores. (Decreto 40/2022)

Según el sentido espacial, la clase está familiarizada con la geometría analítica del plano. Incluso se ha aprendido alguna técnica de demostración o ejercicio de conjeturas geométricas. Esto último lo dudo por mi propia experiencia como alumno y profesor en prácticas. Simplemente no hay tiempo para abarcar todo el temario y se prioriza la entrada en la universidad.

D. Sentido Algebraico:

1. Igualdad y desigualdad.

  - Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas mediante el método de Gauss. (Decreto 40/2022)

La parte más destacable del currículo de primero de Bcahillerato es que los alumnos promocionan supuestamente conociendo el método de eliminación gaussiana. Se añade que es para sistemas 3×3, pero no hay mucha dificultad conceptual en hacerse para sistemas de otro tamaño. Tampoco se aprende mucho más por ser los sistemas mayores. Así que esta memoria no va incluir una explicación de cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss. Pero sí va a hacer uso de este método para simplificar los cálculos de determinantes, ejercitando de paso el pensamiento computacional: se elige un algoritmo que sea más eficiente.

2.5. Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

Aunque no son el grupo al que va destinado este trabajo, es interesante dar el contexto en el que se enseñan las Matemáticas en la modalidad de Ciencias Sociales. Por mi experiencia durante el periodo de prácticas, aunque no tengan mucha motivación en general por la asignatura, no es tan diferente a la modalidad del Bachillerato tecnológico. Veamos qué contenidos se incluyen en el currículo de esta asignatura en (Decreto 40/2022) para el segundo curso.

A. Sentido numérico:

1. Sentido de las operaciones.
    - Adición y producto de matrices: interpretación, comprensión y aplicación adecuada de las propiedades.
    - Estrategias para operar con números reales y matrices: cálculo mental o escrito en los casos sencillos (como mucho de orden 4) y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados.
2. Relaciones.
    - Conjuntos de matrices: estructura, comprensión y propiedades.

Como se ha podido leer, en esta asignatura se omite el concepto de inversa de una matriz y la importancia del determinante. Por lo tanto no se podría aplicar esta forma de enseñanza en esta modalidad.

Pero es cierto que prescindiendo de la inversa de una matriz y del determinante de una matriz se pueden seguir resolviendo sistemas de ecuaciones lineales. Solo si se busca un tratamiento en profundidad y con más teoría resultan necesarios estos dos apartados.

C. Sentido algebraico: (Decreto 40/2022)

1. Patrones
    - Generalización de patrones en situaciones diversas.
2. Modelo matemático
    - Relaciones cuantitativas en situaciones complejas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas.
    - Sistemas de ecuaciones: modelización de situaciones en diversos contextos.
    - Técnicas y uso de matrices para, al menos, modelizar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones lineales o grafos

   - Programación lineal bidimensional: modelización de problemas reales y resolución mediante herramientas digitales y manuales.

3. Igualdad y desigualdad

   - Formas equivalentes de expresiones algebraicas en la resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones, mediante cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, y con herramientas digitales. - Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas mediante el método de Gauss e inecuaciones lineales con dos incógnitas de forma gráfica, en diferentes contextos.
   - Pensamiento computacional
   - Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de las ciencias sociales empleando las herramientas o los programas más adecuados.
   - Análisis algorítmico de las propiedades de las operaciones con matrices y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En el sentido algebraico podemos ver una aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales: la programación lineal. El currículo de esta materia hace bastante hincapié en el modelo matemático y la programación lineal. Supongo que esta decisión se toma con vistas a que estos conocimientos se apliquen en ciencias sociales como la economía.

La enseñanza de modelos matemáticos y del pensamiento computacional en esta asignatura ponen de manifiesto que las matemáticas sí tienen aplicación en otras ciencias, incluidas las sociales. Es cierto que no es tan necesaria como para la gente que quiera trabajar en una carrera STEM, pero para algunos estudiantes las matemáticas van a ser importantes. Por eso es una asignatura optativa.

Por último, me parece curiosa la supresión total del sentido espacial en el currículo de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Entiendo que puede ser el más abstracto, pero me sorprende que no haya ningún contenido que haya merecido la pena no descartar.

2.6. Principios metodológicos

Las metodologías seleccionadas y descritas en el próximo capítulo siguen las indicaciones de la nueva legislación. Creo que se cumple perfectamente el siguiente principio metodológico de (Decreto 40/2022):

> «Los procesos de enseñanza-aprendizaje deben facilitar la construcción de aprendizajes significativos y funcionales. Es importante que cualquiera de las metodologías seleccionadas por los

> docentes se ajuste al nivel competencial inicial del alumnado y se planifique la enseñanza de nuevos aprendizajes a partir de lo que el alumno sabe y es capaz de hacer, creando las condiciones para incorporarlos en la estructura mental del alumno, lo que permitirá que sean aprendizajes consolidados y no aprendizajes mera o esencialmente memorísticos.»

Esto se consigue haciendo que la clase sea la protagonista de su propio proceso de aprendizaje, como se ha intentado en la medida de lo posible. Se enseñan los métodos de cálculo de determinantes pero como consecuencia de todo un trabajo previo ya hecho.

También se incluirá una reflexión sobre qué algoritmo de cálculo de determinantes es mejor para cada situación y de qué manera influyen en la vida moderna estos descubrimientos. Lo que está en sintonía con el principio metodológico siguiente:

> «El desarrollo del currículo requiere un enfoque globalizador e interdisciplinar que en la medida de lo posible tome como punto de partida temas de interés del alumnado, en torno a los cuales se articulen el conjunto de saberes curriculares, evitando de este modo la segmentación del aprendizaje y el conocimiento. En este sentido, se proporcionarán experiencias de aprendizaje basadas en la investigación, la reflexión y la comunicación, que favorezcan el desarrollo de la creatividad.»

El hecho de que sean los propios alumnos los que expongan una demostración al resto de la clase (actividad 3.4) puede resultar difícil de imaginar, pero enseñándoles el profesor primero cómo se hace y proporcionándoles el material necesario, que se explica en el apartado de contenido matemático de cada actividad, creo que es posible llevar a cabo esta actividad. Y así se está aplicando el siguiente principio metodológico de (Decreto 40/2022):

> «El proceso de aprendizaje favorecerá la capacidad del alumnado para aprender por sí mismo, la autonomía personal y el desarrollo de procesos de metacognición. En este sentido, se potenciará la resiliencia, la capacidad de adaptación, aprendiendo a afrontar situaciones de frustración, desarrollando la confianza en sí mismo, la gestión emocional, la escucha activa y el respeto de distintos puntos de vista o creencias de los demás. El trabajo en equipo y la colaboración serán principios esenciales en el aprendizaje, que favorezcan en el alumnado el desarrollo de habilidades sociales para afrontar su preparación al ámbito profesional. Además, el profesorado potenciará la realización de tareas cuya resolución suponga un reto y desafío intelectual para

> el alumnado, de manera que permitan movilizar su potencial cognitivo, incrementar su autonomía, su autoconcepto académico y la consideración positiva frente al esfuerzo.»

En resumen, la variedad de metodologías que se seguirán durante las actividades planeadas (clase magistral, aula invertida y técnica del puzzle) y la forma en la que involucran al alumnado, haciendo que tome un papel protagonista en su aprendizaje y conectándolo con las aplicaciones al mundo real y a su futuro académico y profesional demuestra que se están siguiendo las indicaciones de la nueva ley educativa:

> «Deben combinarse dentro del aula diversas estrategias metodológicas, que responderán a características muy definidas en su selección: en primer lugar, se adaptarán a las diferentes capacidades y estilos de aprendizaje del alumnado. En segundo lugar, deberán promover la motivación, para lo cual se optará por las que convierten al alumnado en protagonista, lo más autónomo posible, del proceso de aprendizaje. En tercer lugar, deberán potenciar la interacción entre los estudiantes, ayudando a generar un ambiente favorable dentro del aula que favorezca las estructuras de aprendizaje cooperativo, en las que, a través de la resolución conjunta de las tareas, los miembros del grupo compartan y construyan el conocimiento mediante el intercambio de ideas. Finalmente, las estrategias adoptadas deberán contribuir a que el alumnado transmita lo aprendido, como medio para favorecer la funcionalidad del aprendizaje adquirido.»

2.7. La evaluación

La evaluación se hará siguiendo la legislación actual, es decir, se hará de acuerdo a las guías de (Real Decreto 243/2022) y (Decreto 40/2022). Se seguirán unos criterios de evaluación seleccionados para cada actividad en la que ocurra una evaluación. La variedad de metodologías antes descritas garantizará la evaluación mediante una variedad de herramientas: a partir de una exposición oral (actividades 3.4 y 3.6) y de una memoria realizada en grupo tras un debate (actividad3.7).

Por supuesto, durante todo el proceso también se realizará la evaluación continua, dándoles consejos y retroalimentación a los alumnos. Y tras practicar con ejercicios y problemas después de las actividades explicadas en esta memoria tendrá lugar una prueba de rendimiento.

Capítulo 3

Desarrollo de las actividades

Cada sección de este capítulo engloba la descripción de una actividad. Antes de explicitar el contenido matemático en el formato en el que se pretende transmitir a la clase se desarrollan los aspectos curriculares, metodológicos y de evaluación, cuando esta corresponda.

Las tres primeras actividades son breves introducciones a cada uno de los pilares de este itinerario de actividades: la lógica, los espacios vectoriales y los determinantes. En estas sesiones se dan los conceptos fundamentales necesarios para el desarrollo de las siguientes tareas. Después es el turno de que el grupo sea el protagonista. En la actividad 3.4 los estudiantes demostrarán las propiedades fundamentales del determinante. Se hará una pequeña pausa entre las demostraciones para comprobar que el determinante 2×2 es el área de un romboide a través de un reto (actividad 3.5). Y se finalizará el periodo de demostraciones de la clase con las propiedades del determinante y las matrices en la actividad 3.6. Por último, se tratará el temario relativo a los algoritmos de cálculo de determinantes en la actividad 3.7, aplicando la técnica del puzzle.

3.1. Lógica y demostraciones

3.1.1. Contextualización

Con esta primera actividad se pretende que el alumnado adquiera una breve introducción a la forma de demostrar resultados en matemáticas, ya que se supone que durante el siguiente curso deberán enfrentarse a eso solos. Si suponemos que los estudiantes han superado satisfactoriamente la asignatura común de Filosofía el primer curso, según el currículo especificado en (Decreto 40/2022) deberían haber adquirido los siguientes contenidos:

> «Conocimiento y lenguaje. La importancia de la comunicación y su relación con el lenguaje. El problema del significado. Lenguaje cotidiano y lenguaje científico».

«Lógica informal: El razonamiento y la argumentación. La argumentación informal. La detección de falacias y sesgos cognitivos».

«Lógica Formal: Nociones de lógica formal. Métodos de razonamiento y paradojas lógicas. La lógica aristotélica: el silogismo. Lógica proposicional: formalización, tablas de verdad y cálculo de deducción natural».

3.1.2. Fundamentación curricular

Se va a poner en práctica la siguiente competencia específica: «CE8. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados para organizar y consolidar el pensamiento matemático.»

Se van a aprender los siguientes contenidos transversales: «Lógica Formal: Nociones de lógica formal. Métodos de razonamiento.»

3.1.3. Metodología

Se va a seguir la metodología de clase magistral, ya que se les está introduciendo a un tema nuevo. En las siguientes actividades participarán más dado que conocen lo aprendido en esta actividad.

En cuanto a la extensión en el tiempo, este pequeño seminario de divulgación está pensado para durar una clase. Se utilizará la pizarra y se les proporcionarán unas notas parecidas al material en el siguiente apartado. Participarán planteando sus dudas y sus ejemplos de enunciados lógicos al resto de la clase.

3.1.4. Contenido matemático

Las Matemáticas se diferencian de las ciencias experimentales: Física, Química, Biología, etc. Mientras que en las ciencias experimentales se suelen contrastar teorías mediante la observación del mundo real (razonamiento por *inducción*), en Matemáticas se razona utilizando la lógica a partir de unas definiciones y unas reglas de juego o *axiomas* (razonamiento por *deducción*).

Los enunciados que queremos demostrar como ciertos se llaman generalmente **proposiciones**. Deben ser enunciados claros que puedan ser ciertos o falsos. Una proposición del mundo real puede ser: «Está lloviendo»o «El campo está mojado», pero no «Hasta luego». Dentro de un texto matemático completo se resaltan la importancia y las implicaciones de las proposiciones cambiándoles el nombre:

- Un **teorema** es una proposición importante.

- Un **corolario** es una proposición que es consecuencia directa de un teorema o proposición, por lo que su demostración es breve.
- Un **lema** es una proposición auxiliar, no se le da mucho valor por sí mismo pero sirve para probar las siguientes proposiciones.

Esta clasificación es totalmente subjetiva. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras es un corolario del teorema del coseno. Depende del contexto donde se está exponiendo.

Cuando que una proposición p sea cierta obliga a que otra proposición q también lo sea diremos que p **implica lógicamente** a q y se escribe como $p \Rightarrow q$. Por ejemplo, «Está lloviendo»$\Rightarrow$ «El campo está mojado». La implicación lógica se puede decir de muchas formas equivalentes:

- Si p, entonces q.
- Solo si q, entonces p.
- p implica q.
- p es condición suficiente para q.
- q es condición necesaria para q.

Cuando tenemos $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$, se escribe como $p \Leftrightarrow q$ y se dice que p y q son **lógicamente equivalentes**. En el ejemplo anterior, que llueva implica que el campo esté mojado, pero el campo puede estar mojado porque ha sido regado de forma artificial, y que no esté lloviendo. Por lo que las dos proposiciones no son lógicamente equivalentes. Un ejemplo de equivalencia es «Nací antes que tú»$\Leftrightarrow$ «Eres más joven que yo». La equivalencia lógica también se expresa de varias maneras:

- p si y solo si q.
- p equivale a q.
- p es condición necesaria y suficiente para q.

Normalmente, una proposición o teorema en matemáticas está formado por unas proposiciones llamadas **hipótesis** que implican o equivalen a una consecuencia. Veamos un ejemplo.

Teorema 3.1.1 (de Pitágoras)**.** Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden c y d y cuya hipotenusa mide h, entonces se tiene que $c^2 + d^2 = h^2$.

Este teorema tiene la estructura $H \Rightarrow C$, donde la hipótesis H es «el triángulo es rectángulo»y la conclusión C es la fórmula «$c^2 + d^2 = h^2$». Del teorema de Pitágoras podemos deducir la siguiente proposición, es decir, es un corolario.

Corolario 3.1.2. Dado un triángulo rectángulo, se tiene que $h = \sqrt{c^2 + d^2}$.

Para saber si una proposición es verdadera hay que demostrarla por una serie de implicaciones lógicas a partir de lo que ya sabemos. Hay varias formas principales de demostración. Una demostración **directa** sería seguir el sentido de la proposición hasta el resultado que queremos. Como ejemplo de demostración directa del corolario 3.1.2:

1. Empezamos suponiendo que tenemos un triángulo rectángulo de catetos c, d e hipotenusa h.

2. Ya conocemos el teorema de Pitágoras 3.1.1, por lo que deducimos ($\Rightarrow$) que $h^2 = c^2 + d^2$.

3. Ahora podemos tomar su raíz cuadrada, ya que son número positivos, y tenemos que $h = \sqrt{h^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$, que es lo que queríamos probar.

Otra forma muy popular para demostrar proposiciones es la **reducción al absurdo**. Para demostrar $H \Rightarrow C$, suponemos que C es falso y se busca llegar a una contradicción con H (es decir, con lo que sabemos). Un ejemplo de demostración por reducción al absurdo del corolario 3.1.2:

1. Suponemos que los lados c, d y h forman un triángulo rectángulo. También suponemos que $h \neq \sqrt{c^2 + d^2}$.

2. h y $\sqrt{c^2 + d^2}$ son dos números positivos distintos, por lo que si los elevamos al cuadrado van a seguir sin ser iguales: $h^2 \neq c^2 + d^2$.

3. Esta última fórmula contradice el teorema de Pitágoras 3.1.1, que sabemos que es cierto. Y si quisiéramos resaltar todavía más la contradicción, podemos aplicar el teorema de Pitágoras y deducir que $h^2 \neq c^2 + d^2 = h^2$, que es absurdo.

Una forma de demostración parecida a la reducción al absurdo es la contraposición. Si queremos probar que $p \Rightarrow q$, a veces es más sencillo probar el enunciado **contrarrecíproco**: No $q \Rightarrow$ no p. Esto se puede utilizar porque los dos enunciados son lógicamente equivalentes. Es lo mismo decir «Está lloviendo»$\Rightarrow$ «El campo está mojado», que «El campo **no** está mojado»$\Rightarrow$ «No está lloviendo». Un ejemplo del contrarrecíproco utilizado en este texto es la propiedad 3.4.4). Una demostración por contrarrecíproco del corolario 3.1.2 es:

1. Suponemos que tenemos un triángulo en el que sus lados cumplen que $h \neq \sqrt{c^2 + d^2}$. (No C).

2. Al elevar al cuadrado los dos número positivos distintos, tenemos que $h^2 \neq c^2 + d^2$.

3. Si aplicamos el enunciado contrarrecíproco del teorema de Pitágoras 3.1.1: $h^2 \neq c^2 + d^2 \Rightarrow$ los lados c, d, h **no** forman un triángulo rectángulo. Esto es justo lo que queríamos probar: No H.

Cuando negamos una afirmación, es importante hacerlo correctamente. Si el enunciado p dice «Todos los chicos de clase saben francés», su negación no es q:«Ningún chico de clase sabe francés». La negación de p es «Algún chico de clase no sabe francés», mientras que q es la negación de «Algún chico de clase sabe francés». Otro ejemplo que tiene más que ver con las próximas secciones es que el enunciado «La función D vale 0 en todos los puntos»se niega como «Existe algún punto donde D no vale 0»y no como «La función D no vale 0 en ningún punto».

Otro comentario importante sobre lenguaje preciso. Vamos a definir el concepto de determinante como una función D que cumpla ciertas propiedades. Pero resulta que con esta definición hay más de un determinante, al igual que hay muchas funciones exponenciales a^x, aunque **la** función exponencial es e^x. Por lo tanto diremos que estamos trabajando con **un** determinante D. Eso sí, en la práctica vamos a escoger un determinante concreto que llamaremos det. Y cuando pasemos a trabajar con matrices A calcularemos **el** determinante $\det(A)$.

Para acabar una demostración y señalar que volvemos al texto normal antiguamente se escribía la frase «que era lo que se quería demostrar». La lengua usual para escribir Matemáticas y cualquier otra ciencia durante siglos fue el latín, por lo que se escribían las siglas Q.E.D. de *Quod erat demonstrandum*. En este texto se utilizará el símbolo $\boxed{\textbf{Q.E.D.}}$ en honor a esta tradición. Aunque en la actualidad el símbolo más popular es $\blacksquare$, el símbolo de Halmos. Este símbolo fue utilizado por primera vez en (Halmos, 1950).

3.2. Espacios vectoriales

3.2.1. Contextualización

Los espacios vectoriales son una estructura fundamental en matemáticas. Es una de las primeras en estudiarse por sus buenas propiedades y sus aplicaciones a diversos contextos como la resolución de ecuaciones lineales o los sistemas de coordenadas. Aunque para esta forma de dar clase se va a necesitar un tratamiento algo más abstracto, lo cierto es que los contenidos tratados en esta actividad están en el currículo de la materia y por lo tanto se deben impartir.

Los conceptos de independencia lineal, base, combinación lineal y espacio vectorial se suelen explicar como una parte de la teoría que no tiene más trascendencia. Si de verdad estos contenidos son importantes en el currículo de Bachillerato, hay que ponerlos en práctica de alguna manera. Por eso, la secuencia de actividades de esta memoria pretende que se utilicen y se compruebe la importancia que tienen, ejercitando el razonamiento y la capacidad de demostración. Lo que les será de utilidad en su futuro inmediato ya que, como se ha comentado anteriormente, el alumnado participante en esta actividad cursará una ingeniería o una carrera de ciencias y tecnología.

3.2.2. Fundamentación curricular

Durante esta actividad se movilizan las competencias específicas:

- CE5. Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.

- CE7. Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.

Por otro lado, los contenidos a tratar en esta actividad tal y como se listan en (Decreto 40/2022) son:

- Adición y producto de vectores: interpretación, comprensión y uso adecuado de las propiedades.

- Conjuntos de vectores y matrices: estructura, comprensión y propiedades.

3.2.3. Metodología

Durante esta actividad también se seguirá la metodología de clase magistral ya que, como en la anterior, estamos en la fase introductoria. Eso sí, aquí ya participarán más realizando pequeños ejercicios para fijar ideas. El alumnado estará distribuido en pequeños grupos, idealmente de tres integrantes, para así optimizar la resolución de dudas y la comprensión de las tareas.

Esta actividad está pensada para durar dos sesiones de clase. En realidad podría realizarse en una sesión perfectamente, pero la idea es que también participen y resuelvan algún ejercicio en equipo. El material que se utilizará es la pizarra y las notas proporcionadas en clase. El libro de texto también contiene la misma teoría pero escribo en el siguiente apartado el contenido matemático para especificar lo que se va a tratar.

3.2.4. Contenido matemático

Empezaremos dándole nombre al conjunto de propiedades básicas que sabemos que cumplen los vectores. Por eso, el conjunto de todos los vectores se llamará espacio vectorial, para resaltar la rica estructura que tiene.

Definición 3.2.1. El conjunto de vectores $\mathbb{R}^n$ junto a la suma de vectores $(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ y el producto por escalares reales $(\lambda\mathbf{v})$ es un *espacio vectorial.* Esto quiere decir que se cumplen las siguientes propiedades:

- La suma de vectores es *asociativa*: $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$.
- La suma de vectores es *conmutativa*: $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{w}+\mathbf{v}$.
- La suma de vectores tiene *elemento neutro*: $\mathbf{0} = (0,\dots,0)$.
- La suma de vectores tiene *elemento opuesto* para todo vector: $-\mathbf{v}$.
- El producto por un escalar cumple las siguientes propiedades:
  - $(\lambda+\mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{v}$,
  - $\lambda(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v}+\lambda\mathbf{w}$,
  - $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\cdot\mu)\mathbf{v}$,
  - $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

La acción más importante que se puede hacer con los vectores es, como no podría ser de otra manera, sumarlos y escalarlos. Y es que estas son las acciones que nos dan la estructura de espacio vectorial. Por lo tanto, cada vez que mezclemos (o combinemos) vectores lo llamaremos combinación lineal. El adjetivo lineal hace énfasis en que todo lo que se hace con vectores es lineal y no otra relación como la inversa, la exponencial, la cuadrática, etc.

Definición 3.2.2. Una *combinación lineal* de los vectores $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\}$ es un vector de la forma $\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_m\mathbf{v}_m$, con $\lambda_1,\dots,\lambda_m$.

Llamamos $\mathfrak{L}\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\}$ al conjunto de las combinaciones lineales de $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\}$, que de hecho es un espacio vectorial contenido en $\mathbb{R}^n$, es decir, un *subespacio vectorial.* Diremos que $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\}$ *generan* o *son generadores* de $\mathfrak{L}\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\}$.

Saber cuándo un vector es combinación lineal de otros es tener mucha información. De hecho, en cierto sentido es saber resolver sistemas de ecuaciones lineales, el tema central del álgebra lineal de Bachillerato. Pero cuando tenemos un conjunto de vectores generadores, a veces hay alguno que sobra. Es decir, tenemos la misma información sin este y lo podríamos descartar.

Por ejemplo, el conjunto $\{(1,0),(2,0),(0,1)\}$ genera el plano $\mathbb{R}^2$, ya que cualquier vector (a,b) se puede escribir como combinación lineal $a(1,0)+$

$b(0,1)$. Realmente $(2,0)$ también es combinación lineal $2(1,0)$ de otro vector de conjunto. Por lo que si quitamos este vector, $\{(1,0),(0,1)\}$ sigue generando el plano y no hay vectores que sobren.

Definición 3.2.3. Diremos que un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ (todos distintos de $\mathbf{0}$) es *linealmente dependiente* o que los vectores son *linealmente dependientes* si algún vector es combinación lineal de los otros. En el caso contrario diremos que los vectores son *linealmente independientes*.

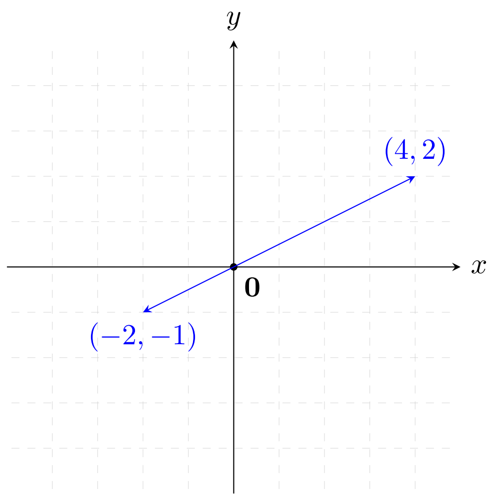


Figura 3.1: Dos vectores linealmente dependientes.

Ejemplo 3.2.4. Si dos vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ son linealmente dependientes es porque uno se puede escribir como combinación lineal del otro. Es decir $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$. O en otras palabras, los vectores son proporcionales: hemos multiplicado uno de ellos por un escalar para conseguir el otro.

Por ejemplo, los vectores $(4,2)$ y $(-2,-1)$ son linealmente dependientes porque $(4,2) = -2 \cdot (-2,-1)$. Ver figura 3.1.

Ejemplo 3.2.5. Veamos un ejemplo de tres vectores linealmente dependientes. Los vectores $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,2)$ cumplen la relación

$$(1,2) = (1,0) + 2 \cdot (0,1)$$

de dependencia lineal, por lo que son linealmente dependientes. Se puede ver en la figura 3.2.

Ahora vamos a demostrar que la dependencia lineal se puede expresar de una manera equivalente. Es importante prestar atención a esta demostración, ya que la forma en la que el profesor la va a exponer en clase va a servir de modelo para las futuras demostraciones que realicen los estudiantes en la clase.

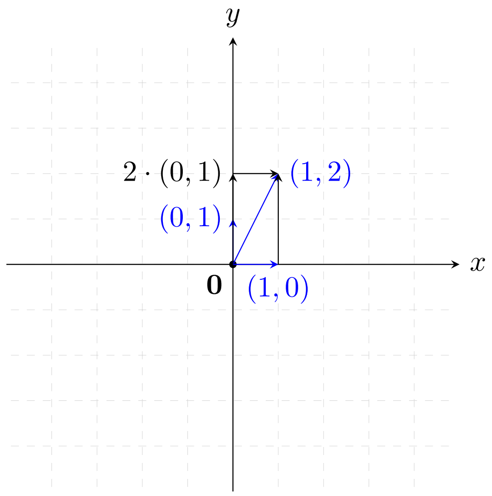


Figura 3.2: Vectores linealmente dependientes.

Proposición 3.2.6. Los vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ (todos distintos de $\mathbf{0}$) son linealmente independientes si y solo si la única combinación lineal $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m$ que da $\mathbf{0}$ es la *combinación lineal nula*: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Esto también se puede enunciar como que los vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ son linealmente dependientes si y solo si existe una combinación lineal $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m$ que da $\mathbf{0}$ y no es la combinación lineal nula: algún $\lambda_i \neq 0$. Este enunciado es el contrarrecíproco del anterior.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Veamos primero que si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es linealmente independiente, entonces la única combinación lineal que da $\mathbf{0}$ es la nula. Para ello veremos que si hay una combinación lineal que es $\mathbf{0}$ que no es la nula, entonces $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ son linealmente dependientes.

Estamos suponiendo que por lo menos $\lambda_i \neq 0$ en la combinación lineal que hemos dicho $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_i\mathbf{v}_i + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$. Entonces podemos despejar

$$\mathbf{v}_i = \frac{\lambda_1}{-\lambda_i}\mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i}\mathbf{v}_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + \frac{\lambda_m}{-\lambda_i}\mathbf{v}_m.$$

Esto quiere decir que

- o bien $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ si $\frac{\lambda_1}{-\lambda_i} = \ldots = \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i} = \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i} = \ldots = \frac{\lambda_m}{-\lambda_i} = 0$. Pero esto no puede pasar porque estamos suponiendo $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$.

- o bien $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ son linealmente dependientes porque hemos encontrado una combinación lineal del conjunto que es igual a $\mathbf{v}_i$. Esta es por tanto la consecuencia de suponer que $\lambda_i \neq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Veamos para acabar que si la única combinación lineal de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ que da $\mathbf{0}$ es la nula, entonces los vectores son linealmente independientes. Para ello veremos que si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ son linealmente dependientes, entonces hay una combinación lineal que es $\mathbf{0}$ que no es la nula.

Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ son linealmente dependientes, entonces existe un vector $\mathbf{v}_i$ que es combinación lineal de los otros:

$$\mathbf{v}_i = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + \lambda_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m.$$

Esto nos da la combinación no nula que buscábamos: $\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + (-1)\mathbf{v}_i + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m$. Es no nula porque por lo menos $\lambda_i = -1 \neq 0$. $\boxed{\textbf{QED}}$

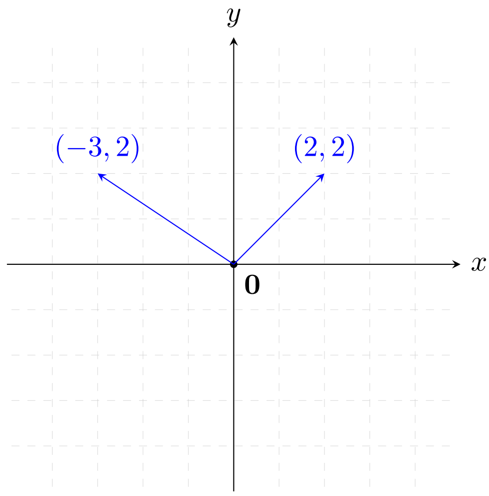


Figura 3.3: Dos vectores linealmente independientes.

Ejemplo 3.2.7. Ya sabemos por el ejemplo 3.2.4 que los vectores $(2,2)$ y $(-3,2)$ son linealmente independientes, ya que no son proporcionales. Pero veámoslo utilizando la proposición 3.2.6.

Para que $(2,2)$ y $(-3,2)$ sean linealmente independientes, la única combinación lineal $\lambda \cdot (2,2) + \mu \cdot (-3,2) = \mathbf{0}$ es la dada por $\lambda = \mu = 0$. Y esto es verdad porque de la ecuación

$$\lambda \cdot (2,2) + \mu \cdot (-3,2) = (2\lambda - 3\mu, 2\lambda + 2\mu) = (0,0)$$

despejamos $\lambda = \frac{3}{2}\mu$ y $\lambda = -\mu$. Y así deducimos que $\lambda = \mu = 0$.

Definición 3.2.8. Decimos que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es una *base* de $\mathbb{R}^n$ si son linealmente independientes y $\mathbb{R}^n = \mathfrak{L}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$. Dada una base, diremos que la *dimensión* de $\mathbb{R}^n$ es el número de elementos de la base.

La siguiente proposición muestra la importancia de las bases: sirven para expresar de forma única cualquier vector. Esta es la segunda y última proposición que el profesor va a demostrar en clase. Después, tras una breve motivación del determinante, se va a proceder a la demostración por parte del alumnado de las propiedades propuestas.

Proposición 3.2.9. Dada $\mathfrak{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$, cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se expresa de forma única como combinación lineal de $\mathfrak{B}$.

Demostración. Supongamos que existen dos formas de expresar

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \cdots \lambda_n \mathbf{b}_n = \mu_1 \mathbf{b}_1 + \cdots \mu_n \mathbf{b}_n$$

como combinación lineal de $\mathfrak{B}$. Veamos que estas dos combinaciones son de hecho la misma.

Como $\mathfrak{B}$ es un conjunto linealmente independiente cualquier combinación lineal que dé $\mathbf{0}$ como en el caso

$$\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{b}_1 + \cdots (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{b}_n$$

es la combinación lineal trivial. Es decir, $\lambda_1 = \mu_1$,...,$\lambda_n = \mu_n$, las dos combinaciones lineales son la misma. $\boxed{\textbf{QED}}$

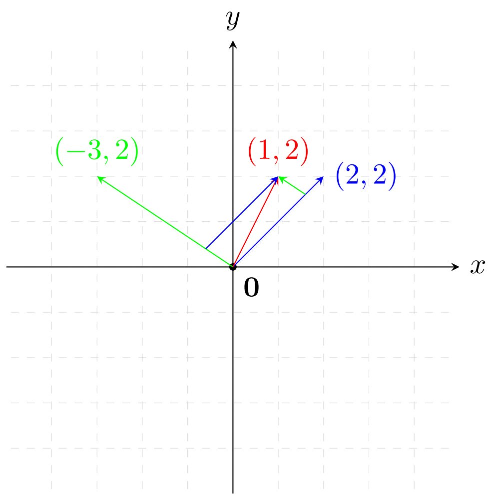


Figura 3.4: $(1, 2)$ en base $\mathfrak{C}$.

Ejemplo 3.2.10. La base $\mathfrak{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ se llama la base canónica de $\mathbb{R}^2$ por ser la más sencilla y útil. Como vimos en la figura 3.2, los vectores se expresan fácilmente en esta base: $(1, 2) = (1, 0) + 2(0, 1)$.

Pero $\mathfrak{C} = \{(2, 2), (-3, 2)\}$ también es una base (figura 3.3), por lo que debe existir una única forma de expresar $(1, 2)$ en base a $\mathfrak{C}$. Para ello hay que resolver la ecuación $\lambda(2,2)+\mu(-3,2) = (2\lambda-3\mu, 2\lambda+2\mu) = (1,2)$. Que en otras palabras es:

$$\begin{cases} 2\lambda - 3\mu = 1 \\ 2\lambda + 2\mu = 2 \end{cases}$$

La solución es $\lambda = \frac{4}{5}$ y $\mu = \frac{1}{5}$. Luego $(1,2) = \frac{4}{5}(2,2) + \frac{1}{5}(-3,2)$, que es combinación lineal de elementos de $\mathfrak{C}$ (figura 3.4), pero no es tan fácil de calcular como con $\mathfrak{B}$.

Nota. El teorema de la base (Merino González y Santos Aláez, 2018) dice que todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de elementos. Por tanto $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n, ya que eligiendo la *base canónica* (la más sencilla) vemos que tiene n elementos: $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,\ldots,0)$,..., $e_n = (0,\ldots,0,1)$.

Para acabar esta actividad, la clase realizará en grupos los siguientes ejercicios, que se corregirán al inicio de la siguiente actividad.

Ejercicio 3.2.11. Razona cuáles de las siguientes expresiones son combinaciones lineales de vectores y cuáles no:

- $3(0,2) - 9(1,0)$
- $6(2,3,7) - (1,1,1) + 10^2(0,4,2)$
- $(1,2) \cdot (0,3) = 6$

Ejercicio 3.2.12. Identifica los conjuntos de vectores linealmente dependientes o independientes.

$\{(1,2),(2,1)\}$

$\{(7,5,9),(3,6,3),(-1,-2,-1)\}$

$\{(1,9,4,6),(0,1,5,\pi),(0,0,1,-7),(0,0,0,1)\}$

Ejercicio 3.2.13. Expresa el vector $(0,9,4)$ como combinación lineal de las siguientes bases:

- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
- $\{(3,-1,7),(4,6,-5),(-2,1,-1)\}$

Ejercicio 3.2.14. El conjunto $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ genera el plano $\mathbb{R}^2$ pero no es una base porque es linealmente dependiente. Encuentra más de una forma de expresar el vector $(6,-2)$ como combinación lineal de este conjunto de vectores.

3.3. Motivación del determinante

3.3.1. Contextualización

Como se ha explicado en la introducción histórica y por la forma en la que se van a desarrollar los contenidos, el determinante no tiene por qué definirse con una fórmula. Resulta mucho más natural que surja como surgió las primeras veces: como herramienta para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Si bien el determinante no es la forma más eficiente de resolver un sistema de ecuaciones, este tiene más aplicaciones. Pero creo que la mejor forma de introducirlo es como una función que cumpla la regla de Cramer.

En esta breve sesión se dará la motivación para estudiar el determinante. Se enunciará su propiedad fundamental y se incitará a la clase a descubrir sus propiedades durante las próximas actividades.

3.3.2. Fundamentación curricular

Durante esta sesión se trabajarán las competencias específicas:

- CE1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones.
- CE5. Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático. (Decreto 40/2022)

Será necesario movilizar los siguientes contenidos de la materia:

- Generalización de patrones en situaciones diversas.
- Sistemas de ecuaciones.
- Resolución de ecuaciones y sistemas matriciales. (Decreto 40/2022)

3.3.3. Metodología

Esta actividad va a durar una sesión. Durante la primera parte de la sesión se corregirán los ejercicios planteados en la actividad anterior. Después, se dará la motivación de por qué se inventaron y se utilizan los determinantes. La metodología será, por última vez, una clase magistral. Esto se debe a que para introducir nuevas ideas de forma rápida, la clase magistral es la mejor opción. En las siguientes actividades se involucrará más al alumnado y se les evaluará su presentación. Ahí es donde se pretende que aprendan realmente a manejar una demostración y estos contenidos.

Por lo tanto, el contenido matemático que comento en el siguiente apartado será transmitido en una breve charla durante la última sesión de la semana. También se asignará a cada estudiante la propiedad que irá probando los próximos días frente a la clase.

3.3.4. Contenido matemático

Supongamos que tenemos un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas. Para entenderlo mejor supongamos $n = 4$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases} \tag{3.1}$$

Si pasamos este sistema a notación matricial tenemos que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Donde los vectores son

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Y la matriz definida por columnas es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 | \mathbf{a}_4\right).$$

También se puede ver este sistema de ecuaciones como una combinación lineal

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{b}.$$

Supongamos que tenemos una función real D que toma n (en nuestro caso 4) vectores, es decir, $D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \in \mathbb{R}$. Supongamos que D cumple la siguiente **propiedad fundamental**:

$$\begin{gathered} D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \cdot \mathbf{b} = \\ D(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)\cdot\mathbf{a}_1 + D(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)\cdot\mathbf{a}_2 + D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{a}_4)\cdot\mathbf{a}_3 + D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b})\cdot\mathbf{a}_4 \\ \text{para todos los } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{b} \text{ posibles.} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Para que no sea tan largo de escribir, denotaremos a partir de ahora

$$\begin{aligned} d &= D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \\ d_1 &= D(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \\ d_2 &= D(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \\ d_3 &= D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{a}_4) \\ d_4 &= D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}) \end{aligned}$$

para unos vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{b}$ elegidos. Y entonces la propiedad fundamental (3.2) pasa a escribirse como

$$d\mathbf{b} = d_1\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + d_3\mathbf{a}_3 + d_4\mathbf{a}_4.$$

Si $d \neq 0$ podemos despejar $\mathbf{b}$ como $\frac{d_1}{d}\mathbf{a}_1 + \frac{d_2}{d}\mathbf{a}_2 + \frac{d_3}{d}\mathbf{a}_3 + \frac{d_4}{d}\mathbf{a}_4$. Es decir, hemos resuelto el sistema de ecuaciones (3.1), la solución es:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \quad x_3 = \frac{d_3}{d}, \quad x_4 = \frac{d_4}{d}.$$

Nota. Fijémonos en que la función constante $D = 0$ también cumple (3.2) pero no nos deja resolver ecuaciones.

Definición 3.3.1. Diremos que D es *determinante* $n \times n$ si D es una función real no constante $D \equiv 0$ que toma n vectores $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y cumple la propiedad fundamental:

$$D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \cdot \mathbf{b} = D(\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{a}_n) \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}_n \tag{3.3}$$

para todos los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ posibles.

3.4. Propiedades del determinante

3.4.1. Contextualización

Esta es la primera actividad en la que la clase va a tener que demostrar un resultado matemático. Los resultados que aquí se presentan realmente están en el currículo de la asignatura, lo que cambia es la metodología de cómo se enseñan y se ponen en práctica, muy contraria a la tradicional. Estas exposiciones de la clase proporcionarán una evaluación que, para motivarles, servirá para subir la nota final y aliviar la presión que sienten durante esta etapa.

Las propiedades que se probarán son la propiedad multilineal y antisimétrica del determinante, la anulación del determinante en vectores linealmente dependientes, la no anulación del determinante en vectores linealmente independientes, la caracterización del determinante como función multilineal antisimétrica, la unicidad del determinante y el desarrollo del determinante por menores. Algunas de estas propiedades (la caracterización y la unicidad) son menos necesarias para una clase de Bachillerato, pero se utilizará en las próximas actividades y sí son necesarias si se quiere razonar cada paso. El resto de propiedades tienen aplicación directa en el calculo de determinantes y a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

3.4.2. Fundamentación curricular

Las competencias específicas de la materia que se van a movilizar durante esta actividad son las siguientes (Decreto 40/2022):

- CE3. Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.
- CE5. Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.
- CE7. Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.
- CE8. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.

Los criterios de evaluación seleccionados para evaluar las competencias específicas anteriores son (Decreto 40/2022):

- 3.1 Adquirir nuevo conocimiento matemático mediante la formulación, razonamiento y justificación de conjeturas y problemas de forma autónoma.
- 5.1 Demostrar una visión matemática integrada, investigando y conectando las diferentes ideas matemáticas.
- 7.1 Representar y visualizar ideas matemáticas, estructurando diferentes razonamientos matemáticos, seleccionando y valorando las tecnologías más adecuadas.
- 8.1 Mostrar organización al comunicar las ideas y razonamientos matemáticos, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados.
- 8.2 Reconocer, emplear y dominar el lenguaje y notación matemática en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor.

Dado que durante el desarrollo de la actividad se van a evaluar competencias específicas de la materia, estas aportarán información sobre los descriptores operativos (Real Decreto 243/2022). La relación entre los descriptores operativos se encuentra en el mapa de relaciones criteriales (Decreto 40/2022), y en resumen tenemos los siguientes descriptores operativos implicados:

- CCL1. Se expresa de forma oral, escrita, signada o multimodal con fluidez, coherencia, corrección y adecuación a los diferentes contextos sociales y académicos, y participa en interacciones comunicativas con actitud cooperativa y respetuosa tanto para intercambiar información, crear conocimiento y argumentar sus opiniones como para establecer y cuidar sus relaciones interpersonales.

- CCL3. Localiza, selecciona y contrasta de manera autónoma información procedente de diferentes fuentes evaluando su fiabilidad y pertinencia en función de los objetivos de lectura y evitando los riesgos de manipulación y desinformación, y la integra y transforma en conocimiento para comunicarla de manera clara y rigurosa adoptando un punto de vista creativo y crítico a la par que respetuoso con la propiedad intelectual.

- CP1. Utiliza con fluidez, adecuación y aceptable corrección una o más lenguas, además de la lengua familiar o de las lenguas familiares, para responder a sus necesidades comunicativas con espontaneidad y autonomía en diferentes situaciones y contextos de los ámbitos personal, social, educativo y profesional.

- STEM1. Selecciona y utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones propias de la modalidad elegida y emplea estrategias variadas para la resolución de problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.

- STEM2. Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar fenómenos relacionados con la modalidad elegida, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, planteándose hipótesis y contrastándolas o comprobándolas mediante la observación, la experimentación y la investigación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y limitaciones de los métodos empleados.

- STEM3. Plantea y desarrolla proyectos diseñando y creando prototipos o modelos para generar o utilizar productos que den solución a una necesidad o problema de forma colaborativa, procurando la participación de todo el grupo, resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir, adaptándose ante la incertidumbre y evaluando el producto obtenido de acuerdo a los objetivos propuestos, la sostenibilidad y el impacto transformador en la sociedad.

- STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de investigaciones de forma clara y precisa, en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos.) y aprovechando la cultura digital con ética y responsabilidad y valorando de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida para compartir y construir nuevos conocimientos.
- CD1. Realiza búsquedas avanzadas comprendiendo cómo funcionan los motores de búsqueda en internet aplicando criterios de validez, calidad, actualidad y fiabilidad, seleccionando los resultados de manera crítica y organizando el almacenamiento de la información de manera adecuada y segura para referenciarla y reutilizarla posteriormente.
- CD2. Crea, integra y reelabora contenidos digitales de forma individual o colectiva, aplicando medidas de seguridad y respetando, en todo momento, los derechos de autoría digital para ampliar sus recursos y generar nuevo conocimiento.
- CD3. Selecciona, configura y utiliza dispositivos digitales, herramientas, aplicaciones y servicios en línea y los incorpora en su entorno personal de aprendizaje digital para comunicarse, trabajar colaborativamente y compartir información, gestionando de manera responsable sus acciones, presencia y visibilidad en la red y ejerciendo una ciudadanía digital activa, cívica y reflexiva.
- CD5. Desarrolla soluciones tecnológicas innovadoras y sostenibles para dar respuesta a necesidades concretas, mostrando interés y curiosidad por la evolución de las tecnologías digitales y por su desarrollo sostenible y uso ético.
- CE3. Lleva a cabo el proceso de creación de ideas y soluciones innovadoras y toma decisiones, con sentido crítico y ético, aplicando conocimientos técnicos específicos y estrategias ágiles de planificación y gestión de proyectos, y reflexiona sobre el proceso realizado y el resultado obtenido, para elaborar un prototipo final de valor para los demás, considerando tanto la experiencia de éxito como de fracaso, una oportunidad para aprender.

En cuanto a los contenidos de las materia que se van a movilizar en esta actividad, tenemos:

- Adición y producto de vectores y matrices: interpretación, comprensión y uso adecuado de las propiedades.

- Conjuntos de vectores y matrices: estructura, comprensión y propiedades.
- Generalización de patrones en situaciones diversas. (Decreto 40/2022)

3.4.3. Metodología

Esta actividad está pensada para durar cinco sesiones. Tenemos un total de cinco propiedades básicas del determinante y tres teoremas, que se dividirán en diez partes, ya que en la propiedad multilineal 3.4.2 se demuestran dos asertos y en la propiedad 3.4.9 es algo larga y se puede dividir en dos partes. Aunque haya diez tareas, se les permitirá hacerlo por parejas por si se sienten más seguros frente a la clase, por lo que expondrán entre diez y veinte alumnos durante estas sesiones.

Esta metodología se ajusta bastante a lo que conocemos por *aula invertida* o *flipped classroom*, y tras esto una exposición de lo aprendido:

1. Se le encomienda a un alumno o pareja de estudiantes una de las diez tareas de esta actividad.
2. En casa leen y comprenden la demostración que se puede ver en el apartado 3.4.5.
3. Después en clase exponen la demostración al resto de sus compañeros, que no la han leído.

Los materiales utilizados para estas actividades serán los proporcionados por el profesor y la pizarra. Siempre podrán utilizar otros medios de representación pero no es bueno que utilicen una presentación digital de la que leer textualmente, ya que la idea es que sepan explicar con sus palabras un resultado matemático a sus compañeros.

Podemos decir que esta metodología está dentro del aprendizaje colaborativo, ya que no es simplemente un trabajo en grupo: también se le da mucha importancia a las relaciones de la clase, estableciendo diálogos cuando algo no se entiende. Esto se trata en la teoría del conflicto sociocognitivo, donde la resolución de dudas o problemas en grupo aporta a cada alumno lo que necesita para llegar al éxito. Este tipo de aprendizaje se suele denominar aprendizaje por desequilibrio.

La metodología de esta tarea sigue las indicaciones de (Decreto 40/2022) sobre la metodología apropiada para esta materia en esta etapa:

> «En esta etapa se debe fomentar la autonomía del alumnado en lo que se refiere a su aprendizaje, autonomía que ha ido adquiriendo de forma progresiva a lo largo de la etapa de ESO, para

convertirse en bachillerato en un aspecto importante para determinar el estilo de enseñanza del profesorado. Éste adaptará su intervención a las necesidades del alumnado, por lo que en algunos casos será un guía y en otros deberá dirigir más la actividad, siempre a través de preguntas que orienten la acción del alumnado.

En esta etapa la madurez del alumnado permite desarrollar un mayor número de tareas grupales, que a su vez fomentan la comunicación y el uso correcto del lenguaje ordinario y del lenguaje matemático, además de favorecer la componente emocional a nivel personal y social. »

3.4.4. Evaluación

El proceso de evaluación se llevará a cabo durante toda la actividad. El profesor y los alumnos aportarán sus dudas y recomendaciones para que la exposición se desarrolle de la mejor manera posible. De forma paralela, el profesor anotará las observaciones convenientes para después cumplimentar la rúbrica de evaluación 3.1, donde se explicitan indicadores de logro para cada criterio de evaluación y así tener una nota numérica final que aportar.

Tabla 3.1: Rúbrica con indicadores de logro.

Cr. Ev.	0 puntos	1 punto	2 puntos
3.1	No ha comprendido la demostración.	Ha entendido parte de la demostración.	Comprende todos los pasos de la demostración asignada.
5.1	No se hacen conexiones con el resto de resultados.	Aunque con errores, hace referencia a los resultados previos necesarios para la demostración.	Se aplican correctamente los resultados previos en los momentos necesarios de la demostración.
7.1	No utiliza correctamente el soporte visual durante su demostración.	Hay algún error en su expresión escrita durante su demostración.	La expresión escrita se utiliza correctamente.
8.1	No organiza de forma rigurosa y clara las ideas clave de la demostración.	Hay algún paso de la demostración que no se ordena de forma correcta.	Las ideas de la demostración están estructuradas de forma rigurosa y ordenada.
8.2	No se expresa correctamente en el lenguaje matemático.	La exposición oral contiene algún error de lenguaje matemático.	Utiliza correctamente el lenguaje matemático durante su exposición oral.

Antes de pasar al contenido matemático de esta actividad, expongo un breve resumen sobre los motivos para seleccionar cada criterio de evaluación:

- 3.1: Al exponer una demostración delante de la clase, el primer paso es comprender un razonamiento y saber razonarlo o explicarlo de vuelta.
- 5.1: Dentro de un texto matemático es muy importante apoyarse en los resultados previos. Hacerlo correctamente es clave para que el resultado final forme un todo coherente.
- 7.1: La representación de un razonamiento, en este caso en formato escrito en la pizarra, es imprescindible para que las ideas lleguen a los espectadores. No solamente en Matemáticas, en cualquier presentación es de vital importancia que el soporte visual ayude a entender lo que se quiere transmitir.
- 8.1: La organización al comunicar toma otro matiz al tratarse de una exposición matemática, ya que si no se realiza apropiadamente, una exposición puede resultar ininteligible.
- 8.2: Por último, creo necesario evaluar la notación matemática. Se tendrá en cuenta que es su primer contacto con los determinantes y las demostraciones, pero justamente por eso se espera que al concluir la actividad hayan adquirido nuevas competencias.

3.4.5. Contenido matemático

Solamente a partir de la propiedad fundamental del determinante (3.3) vamos a deducir las propiedades que tiene. Esto será útil cuando tengamos que hacer cálculos y cuando haya que aplicar alguna de estas propiedades en un problema.

Propiedad 3.4.1. Sea D determinante $n \times n$. Si los vectores $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ son linealmente dependientes, entonces $D(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) = 0$.

Demostración. Lo demostraremos razonando por reducción al absurdo. Supongamos que los vectores $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes y supongamos también que $d = D(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \neq 0$. Entonces, por la propiedad fundamental (3.3), para todo vector $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\mathbf{b} = \frac{d_1}{d}\mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{d_n}{d}\mathbf{v}_n.$$

Lo que quiere decir que $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ genera el espacio $\mathbb{R}^n$ al completo, y como son n vectores generando un espacio con $\dim \mathbb{R}^n = n$, son una base (ver nota 3.2.4). Por lo tanto son linealmente independientes.

Hemos llegado a una contradicción con la suposición inicial de que eran linealmente dependientes por culpa de asumir que $D(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \neq 0$. Por lo tanto la única opción es que $D(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ valga 0. **QED**

Propiedad 3.4.2. Los determinantes son *multilineales*, es decir, en cada posición $i = 1, 2, \ldots, n$ tenemos que:

1. $D(\ldots, \lambda\mathbf{v}_i, \ldots) = \lambda D(\ldots, \mathbf{v}_i, \ldots)$,
2. $D(\ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \ldots) = D(\ldots, \mathbf{v}_i, \ldots) + D(\ldots, \mathbf{w}_i, \ldots)$.

Demostración. $\boxed{\mathbf{1}}$ Elegimos unos vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y un vector $\mathbf{b}$. Denotamos d y d_i a los valores del determinante D en estos vectores. Para reducir la notación definimos:

$$\begin{aligned} d &= D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) \\ d_i &= D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{v}_n) \\ \tilde{d}_i &= D(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

Hagamos una suma de ecuaciones aplicando la propiedad fundamental (3.3) a los vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{b}\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \lambda\mathbf{b}\}$.

$$\begin{aligned} \lambda(d\mathbf{b}) &= \lambda(d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n) \\ -d(\lambda\mathbf{b}) &= -(\tilde{d}_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \tilde{d}_n\mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

$$\lambda d\mathbf{b} - d\lambda\mathbf{b} = 0 = (\lambda d_1 - \tilde{d}_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\lambda d_n - \tilde{d}_n)\mathbf{v}_n$$

Supongamos que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes. Por la proposición 3.2.6 la última igualdad solo puede ser cierta si todos los $\lambda d_i - \tilde{d}_i$ valen 0. Es decir, tenemos que

$$\lambda D(\ldots, \mathbf{b}, \ldots) = \lambda d_i = \tilde{d}_i = D(\ldots, \lambda\mathbf{b}, \ldots).$$

Como esto ocurre para todo $\mathbf{b}$, en particular también ocurre para $\mathbf{v}_i$, probando lo que queremos: $D(\ldots, \lambda\mathbf{v}_i, \ldots) = \lambda D(\ldots, \mathbf{v}_i, \ldots)$.

Y si los vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ fueran linealmente dependientes, tenemos que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ también lo son. Luego como vimos en la propiedad 3.4.1, el determinante da 0. Por lo que también se cumple la igualdad que queremos $D(\ldots, \lambda\mathbf{v}_i, \ldots) = 0 = \lambda 0 = \lambda D(\ldots, \mathbf{v}_i, \ldots)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Tomemos unos vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y también otros vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{w}_i$ para algún $1 \leq i \leq n$ fijo. Llamaremos

$$\begin{aligned} d &= D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) \\ d_j &= D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{v}_n) \\ d' &= D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) \\ d'_j &= D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{v}_n) \\ d'' &= D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

$$d''_j = D(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Hay que darse cuenta de que $d_i = d'_i = d''_i$ (solo en la posición i, donde cambiamos $\mathbf{v}_i$ por $\mathbf{w}_i$ y por $\mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i$) ya que estos valores no dependen de $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{w}_i$ ni $\mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i$, sino que solamente de $\mathbf{b}$. Restamos la ecuación fundamental (3.3) con d, d' y d''.

$$\begin{aligned} d\mathbf{b} &= d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_i\mathbf{v}_i + \cdots + d_n\mathbf{v}_n) \\ d'\mathbf{b} &= d'_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_i\mathbf{w}_i + \cdots + d'_n\mathbf{v}_n) \\ -d''\mathbf{b} &= -(d''_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_i(\mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i) + \cdots + d''_n\mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

$$(d + d' - d'')\mathbf{b} = (d_1 + d'_1 - d''_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + d_i \cdot 0 + \cdots + (d_n + d'_n - d''_n)\mathbf{v}_n$$

Esta última igualdad ocurre para todo $\mathbf{b}$ dados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$. Pero $n - 1$ vectores no pueden generar todo $\mathbb{R}^n$, por lo que debe ocurrir que $d+d'-d'' = 0$. Y la igualdad $d+d' = d''$ es lo que queríamos probar. $\boxed{\textbf{QED}}$

Propiedad 3.4.3. Los determinantes son *antisimétricos*, es decir,

$$D(\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots) = -D(\dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots)$$

para cada par de posiciones $i \neq j$ y para cualquier conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

Demostración. Tomamos unos vectores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y elegimos un par de ellos $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$. Por la propiedad 3.4.1 sabemos que

$$D(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

porque $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n\}$ son linealmente dependientes: se repite dos veces el vector $\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$ donde antes estaban los vectores $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_j$, luego tenemos una relación de dependencia lineal $(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) = 1 \cdot (\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i)$.

Ahora, como D es multilineal (propiedad 3.4.2) podemos separar la expresión anterior como

$$\begin{aligned} 0 &= D(\dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i, \dots) \\ &= D(\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i, \dots) + D(\dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i, \dots) \\ &= D(\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots) + D(\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_i, \dots) \\ &+ D(\dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_j, \dots) + D(\dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots). \end{aligned}$$

Pero cuando se repiten los vectores, el determinante se anula, por lo que nos queda solamente

$$0 = D(\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots) + D(\dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_j, \dots),$$

es decir, $D(\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots) = -D(\dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_j, \dots)$. $\boxed{\textbf{QED}}$

Propiedad 3.4.4. Sea D es determinante $n \times n$. Los vectores $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes si y solo si $D(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \neq 0$.

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Ya vimos en la propiedad 3.4.1 que si el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ son linealmente dependientes, entonces $d = 0$. Es decir, si $d \neq 0$ entonces $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes. Solo falta ver la implicación en el otro sentido.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes, veamos que D no puede valer 0. Razonamos por reducción al absurdo, ya que si D valiera 0 en $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$, veremos que D va a valer 0 en todos los vectores que le demos y esto incumple la definición de determinante al ser la función constante 0.

Como $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ es una base del espacio, dado otro conjunto de vectores $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$, cada uno de ellos se puede expresar en base a los otros vectores

$$\mathbf{w}_i = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n.$$

Por la propiedad multilineal (3.4.2) tenemos que

$$D(\ldots, \mathbf{w}_i, \ldots) = \lambda_1 D(\ldots, \mathbf{v}_1, \ldots) + \ldots + \lambda_n D(\ldots, \mathbf{v}_n, \ldots).$$

Y por la propiedad antisimétrica (3.4.3) podemos reordenar los vectores dentro de D cambiando solamente el signo del resultado. Por lo que llegamos a que podemos expresar el número $D(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)$ como suma en la que todos los sumandos tienen un factor $D(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$. Y entonces si $D(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) = 0$, D vale 0 siempre, llegando así a una contradicción (un determinante D no puede valer 0 siempre). **QED**

Hasta aquí sabemos que los determinantes $n \times n$ (funciones D que cumplen la propiedad fundamental (3.3) y no valen siempre 0) son multilineales y antisimétricos. Pero ahora vamos a ver que estas propiedades solo las cumplen los determiantes, por lo que tendremos una definición equivalente.

Propiedad 3.4.5. Si D es una función $n \times n$ no siempre nula, multilineal y antisimétrica, entonces D es determinante $n \times n$. Es decir, D cumple la propiedad fundamental (3.3).

Demostración. Para ver que se cumple la propiedad fundamental (3.3) dividimos la demostración en dos casos según sea $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ linealmente independiente o dependiente.

El caso fácil es si $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ son **linealmente independientes**, ya que entonces son una base de $\mathbb{R}^n$. Luego cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ puede escribirse como

$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$. Y podemos deducir las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} D(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{b} &= d \cdot \mathbf{b} \\ &= d \cdot (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n) && \mathbf{b} \text{ como combinación lineal} \\ &= \lambda_1 d \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n d \mathbf{v}_n && \text{por la propiedad asociativa} \\ &= D(\lambda_1 \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)\mathbf{v}_1 + \cdots + D(\mathbf{v}_1, ..., \lambda_n \mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n && \text{por la multilinealidad de } D \\ &= d_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + d_n \mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

La última igualdad se consigue sumando a cada $D(..., \lambda_i \mathbf{v}_i, \ldots)\mathbf{v}_i$ lo que falta para llegar a los $d_i \mathbf{v}_i$, que son determinantes con vectores repetidos y por tanto estamos sumando ceros.

Ahora queda probar la propiedad fundamental (3.3) cuando suponemos que los vectores $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ son **linealmente dependientes**. Veamos primero que si $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes, entonces $D(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) = 0$.

Cuidado, ahora solo estamos suponiendo que D es multilineal y antisimétrica, no sabemos todavía que es un determinante y por lo tanto no podemos aplicar la propiedad 3.4.1.

Si se repitieran algunos vectores, por ejemplo, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, por la propiedad antisimétrica 3.4.3 tenemos que

$$d = D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots) = -D(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \ldots) = -d.$$

Y la ecuación $d = -d$ implica que $d = 0$.

Dados los vectores $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ linealmente dependientes, entonces podemos suponer tras reordenarlos que existe una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ en base a los otros: $\mathbf{v}_1 = \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$. Sea otro vector $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ y denotemos d y d_i a los determinantes respectivos de la propiedad fundamental (3.3) como hemos hecho hasta ahora. Veamos cuánto valen:

$$\begin{aligned} d &= D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n) \\ &= D(\lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) && \text{desarrollamos } \mathbf{v}_1 \\ &= \lambda_2 D(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \ldots) + \cdots + \lambda_n D(\mathbf{v}_n, \ldots, \mathbf{v}_n) && \text{por la propiedad multilineal} \\ &= \lambda_2 0 + \cdots + \lambda_n 0 = 0 && \text{porque los vectores se repiten.} \end{aligned}$$

En principio no sabemos cuánto vale $d_1 = D(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n)$ pero para $1 < i \leq n$ tenemos que

$$\begin{aligned} d_i &= D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{v}_n) \\ &= D(\lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n, \ldots, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{v}_n) && \text{desarrollamos } \mathbf{v}_1 \\ &= \lambda_2 D(\mathbf{v}_2, \ldots) + \cdots + \lambda_n D(\mathbf{v}_n, \ldots) && \text{propiedad multilineal} \\ &= \lambda_2 0 + \cdots + \lambda_i D(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{v}_n) + \cdots + \lambda_n 0 && \text{vectores repetidos} \\ &= -\lambda_i D(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) = -\lambda_i d_1 && \text{propiedad antisimétrica.} \end{aligned}$$

Luego juntando todo lo que sabemos

$$
\begin{aligned}
d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n & \quad \text{queremos ver la propiedad fundamental} \\
= d_1(\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n) & \quad \text{desarrollando } \mathbf{v}_1 \\
-\lambda_2 d_1\mathbf{v}_2 + \cdots - \lambda_n d_1\mathbf{v}_n & \quad \text{y sabiendo que } d_i = -\lambda_i d_1 \\
= \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{b} = d\mathbf{b} & \quad \text{se cumple la propiedad fundamental (3.3).}
\end{aligned}
$$

QED

Una vez definidos los determinantes como herramienta para resolver sistemas de ecuaciones y ahora que ya conocemos sus propiedades básicas podemos estar seguros de que lo que hemos creado funciona y es, en cierto sentido, único.

Teorema 3.4.6 (Regla de Cramer)**.** Si D es un determinante $n \times n$ y $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes, entonces para cualquier vector $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$, el sistema

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{b}$$

tiene una única solución dada por la siguiente regla:

$$x_1 = \frac{D(\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{v}_n)}{D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}, \ldots, x_i = \frac{D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{v}_n)}{D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n)}, \ldots, x_n = \frac{D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{b})}{D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}.$$

Demostración. Como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes, por la propiedad 3.4.4 sabemos que $D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \neq 0$. Por lo que podemos despejar en la ecuación fundamental (3.3) y llegar a la fórmula que queremos probar.

Pero, ¿es la única solución? Si tenemos otra solución $x_i = \lambda_i$, hay que comprobar que es la misma que la dada por el determinante $x_i = \frac{d_i}{d}$. Podemos restar las dos soluciones al sistema en forma vectorial y obtenemos

$$\mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0} = (\frac{d_1}{d} - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\frac{d_n}{d} - \lambda_n)\mathbf{v}_n.$$

Como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes, la combinación lineal anterior solo puede ser la nula en todos los términos, es decir, $\lambda_i = \frac{d_i}{d}$, que es lo que queríamos probar. **QED**

Teorema 3.4.7 (Unicidad de los determinantes)**.** Si D_1 y D_2 son determinantes en $\mathbb{R}^n$, entonces existe $\lambda \neq 0$ real tal que $D_1 = \lambda D_2$. Es decir, para cualquier $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ tenemos que $D_1(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \lambda D_2(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Demostración. Elegimos un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ linealmente independiente. Como D_1 y D_2 son determinantes, por la propiedad 3.4.4 sabemos que $D_1(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \neq 0 \neq D_2(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Definimos entonces el número real $\lambda = \frac{D_1(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)}{D_2(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)} \neq 0$. Definimos también la función $D = D_1 - \lambda D_2$. Por las propiedades 3.4.2 y 3.4.3 tenemos que D es multilineal y antisimétrica.

Pero en los vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ elegidos, tenemos que

$$\begin{aligned}
&D(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = D_1(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) - \lambda D_2(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)\\
&= D_1(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) - \frac{D_1(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}{D_2(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)} D_2(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)\\
&= D_1(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) - D_1(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0.
\end{aligned}$$

Sabemos que D es multilineal y antisimétrica, pero D vale 0 en unos vectores linealmente independientes. Por lo que D no puede ser un determinante, y por la propiedad 3.4.5 tenemos que D es la función nula. Luego $D_1 = \lambda D_2$ en todos los vectores. $\boxed{\textbf{QED}}$

De entre todos los determinantes posibles (funciones que nos permiten aplicar la regla de Cramer) hay uno distinguido, el resto se diferencian por una constante λ. Este determinante distinguido es el que en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)\}$ vale 1. Otro determinante valdrá $1 \neq \lambda \neq 0$ en la base canónica.

Definición 3.4.8. Llamaremos $\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ al único determinante $n \times n$ tal que $\det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$. Dada una matriz cuadrada $A = (\mathbf{v}_1|\cdots|\mathbf{v}_n)$, definimos su determinante $\det(A)$ o también denotado $|A|$ como el valor $\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Entonces tenemos que $|I_n| = \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$.

Una forma de calcular determinantes es lo que se llama el desarrollo por menores o teorema de Laplace 3.7. Para ello, se reduce el problema de calcular un determinante a calcular varios determinantes de tamaño menor. Para eso vamos a necesitar la siguiente propiedad.

Nota. Pero primero hay que comentar que un vector $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ se puede incluir en $\mathbb{R}^{n+1}$ pensándolo como que en la dimensión extra tiene coordenada nula: $(0, a_1, \ldots, a_n)$. Y también podemos proyectar un vector $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre $\mathbb{R}^n$ gracias a la aplicación proyección dada por $p(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n)$, que elimina la primera coordenada. Escribiremos $(\mathbf{v})_0$ para referirnos a esa primera coordenada de un vector $\mathbf{v}$ que perdemos al proyectarlo $p(\mathbf{v})$.

Propiedad 3.4.9. Sea D un determinante en $\mathbb{R}^n$ y consideremos $\mathbb{R}^n$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ con la inclusión explicada antes. Para $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}\}$

vectores de $\mathbb{R}^{n+1}$ podemos definir la siguiente función:

$$\begin{aligned}\tilde{D}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}) = {} & (\mathbf{v}_1)_0 \cdot D(p(\mathbf{v}_2), \ldots, p(\mathbf{v}_{n+1})) \\ & - (\mathbf{v}_2)_0 \cdot D(p(\mathbf{v}_1), p(\mathbf{v}_3), \ldots, p(\mathbf{v}_{n+1})) \\ & + \cdots \\ & + (-1)^{n-1} \cdot (\mathbf{v}_n)_0 \cdot D(p(\mathbf{v}_1), \ldots, p(\mathbf{v}_{n-1}), p(\mathbf{v}_{n+1})) \\ & + (-1)^{n} \cdot (\mathbf{v}_{n+1})_0 \cdot D(p(\mathbf{v}_1), \ldots, p(\mathbf{v}_n))\end{aligned}$$

Entonces $\tilde{D}$ es un determinante en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demostración. Utilizando la definición equivalente del determinante (propiedad 3.4.5), solo necesitamos ver que $\tilde{D}$ es **multilineal**, **antisimétrico** y **no constantemente nulo**.

Para ver que **no se anula en todos los vectores**, probemos con la base canónica $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Tenemos que

$$\tilde{D}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}) = 1 \cdot D(p(\mathbf{e}_2), \ldots, p(\mathbf{e}_{n+1})) \neq 0$$

ya que $(\mathbf{e}_1)_0 = 1$ y para los demás vectores $(\mathbf{e}_i)_0 = 0$. Por otro lado, sabemos que $D(p(\mathbf{e}_2), \ldots, p(\mathbf{e}_{n+1}))$ no puede ser 0 porque D es un determinante, luego no se puede anular en $\{p(\mathbf{e}_2), \ldots, p(\mathbf{e}_{n+1})\}$, que es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Para ver que $\tilde{D}$ cumple la **propiedad antisimétrica** cambiemos de posición los primeros dos vectores, ya que en el resto de posiciones es lo mismo. Sumemos

$$\tilde{D}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots) + \tilde{D}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \ldots)$$

para ver que da 0. Esto probaría la propiedad antisimétrica. Así que vamos a desarrollarlo

$$\begin{aligned}& \tilde{D}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots) + \tilde{D}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \ldots) \\ & = (\mathbf{v}_1)_0 \cdot D(p(\mathbf{v}_2), \ldots) - (\mathbf{v}_2)_0 \cdot D(p(\mathbf{v}_1), p(\mathbf{v}_3), \ldots) \text{ (principio del primero)} \\ & + (\mathbf{v}_2)_0 \cdot D(p(\mathbf{v}_1), p(\mathbf{v}_3), \ldots) - (\mathbf{v}_1)_0 \cdot D(p(\mathbf{v}_2), \ldots) \text{ (principio del segundo)} \\ & + \cdots \text{ (El resto de términos se cancelan por ser } D \text{ antisimétrico).} \\ & + (-1)^{i-1} \cdot (\mathbf{v}_i)_0 \cdot D(p(\mathbf{v}_1), p(\mathbf{v}_2), \ldots, p(\mathbf{v}_{i-1}), p(\mathbf{v}_{i+1}), \ldots) \\ & + (-1)^{i-1} \cdot (\mathbf{v}_i)_0 \cdot D(p(\mathbf{v}_2), p(\mathbf{v}_1), \ldots, p(\mathbf{v}_{i-1}), p(\mathbf{v}_{i+1}), \ldots) \\ & = 0\end{aligned}$$

Por último veamos que $\tilde{D}$ es **multilineal**. Para ello veámoslo en la primera posición ya que en el resto es igual.

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n+1}) &= (\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1)_0\cdot D(p(\mathbf{v}_2),\ldots,p(\mathbf{v}_{n+1}))\\
\text{(Dado que}\quad &- (\mathbf{v}_2)_0\cdot D(p(\mathbf{v}_1)+p(\mathbf{w}_1),p(\mathbf{v}_3),\ldots,p(\mathbf{v}_{n+1}))\\
D,p,(\cdot)_0\quad &+\cdots\\
\text{son lineales}\quad &+(-1)^{n-1}\cdot(\mathbf{v}_n)_0\cdot D(p(\mathbf{v}_1)+p(\mathbf{w}_1),\ldots,p(\mathbf{v}_{n-1}),p(\mathbf{v}_{n+1}))\\
\text{podemos separar}\quad &+(-1)^{n}\cdot(\mathbf{v}_{n+1})_0\cdot D(p(\mathbf{v}_1)+p(\mathbf{w}_1),\ldots,p(\mathbf{v}_n))\\
\text{cada sumando.)}\quad &= ((\mathbf{v}_1)_0+(\mathbf{w}_1)_0)\cdot D(p(\mathbf{v}_2),\ldots,p(\mathbf{v}_{n+1}))\\
&- (\mathbf{v}_2)_0\cdot(D(p(\mathbf{v}_1),\ldots)+D(p(\mathbf{w}_1),\ldots))\\
&+\cdots\\
&+(-1)^{n-1}\cdot(\mathbf{v}_n)_0\cdot(D(p(\mathbf{v}_1),\ldots)+D(p(\mathbf{w}_1),\ldots))\\
&+(-1)^{n}\cdot(\mathbf{v}_{n+1})_0\cdot(D(p(\mathbf{v}_1),\ldots)+D(p(\mathbf{w}_1),\ldots))\\
&= \tilde{D}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n+1})+\tilde{D}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(\lambda\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n+1}) &= (\lambda\mathbf{v}_1)_0\cdot D(p(\mathbf{v}_2),\ldots,p(\mathbf{v}_{n+1}))\\
\text{(También aquí}\quad &- (\mathbf{v}_2)_0\cdot D(\lambda p(\mathbf{v}_1),p(\mathbf{v}_3),\ldots,p(\mathbf{v}_{n+1}))\\
\text{usamos la}\quad &+\cdots\\
\text{linealidad de}\quad &+(-1)^{n-1}\cdot(\mathbf{v}_n)_0\cdot D(\lambda p(\mathbf{v}_1),\ldots,p(\mathbf{v}_{n-1}),p(\mathbf{v}_{n+1}))\\
D,p,(\cdot)_0\quad &+(-1)^{n}\cdot(\mathbf{v}_{n+1})_0\cdot D(\lambda p(\mathbf{v}_1),\ldots,p(\mathbf{v}_n))\\
\text{para acabar.)}\quad &= \lambda(\mathbf{v}_1)_0\cdot D(p(\mathbf{v}_2),\ldots,p(\mathbf{v}_{n+1}))\\
&- (\mathbf{v}_2)_0\cdot\lambda D(p(\mathbf{v}_1),p(\mathbf{v}_3),\ldots,p(\mathbf{v}_{n+1}))\\
&+\cdots\\
&+(-1)^{n-1}\cdot(\mathbf{v}_n)_0\cdot\lambda D(p(\mathbf{v}_1),\ldots,p(\mathbf{v}_{n-1}),p(\mathbf{v}_{n+1}))\\
&+(-1)^{n}\cdot(\mathbf{v}_{n+1})_0\cdot\lambda D(p(\mathbf{v}_1),\ldots,p(\mathbf{v}_n))\\
&= \lambda\tilde{D}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n+1})
\end{aligned}$$

QED

3.5. El caso 2×2

3.5.1. Contextualización

Esta actividad va a ser un interludio entre las exposiciones teóricas de la clase. Se pretende que una vez conocidas las propiedades fundamentales del determinante y antes de pasar a calcularlo explícitamente la clase adquiera una ligera intuición de cómo calcularlo. Como hemos visto en las asignaturas del máster, especialmente en Didáctica de las Matemáticas, suele ser buena idea introducir los conceptos de forma manipulativa, pictórica y ya después manejar la abstracción. Aquí de momento estamos manejado un objeto abstracto que no sabemos calcular y mi idea es que antes de los cálculos y la memorización de fórmulas los estudiantes manipulen y adquieran un contacto más visual con el cálculo de determinantes.

Como se escribió en la introducción histórica, se conoce desde hace siglos la interpretación geométrica del determinante: sirve para calcular el volumen (con orientación) del paralelepípedo n-dimensional generado por los n vectores del determinante. Esto tiene aplicaciones muy importantes en las matemáticas, especialmente en la integración, como en el teorema del cambio de variable que seguramente los alumnos a los que va dirigida esta actividad estudien en su carrera universitaria.

En esta actividad vamos a ver que un determinante 2×2 nos da el área del paralelogramo (romboide) generado por los dos vectores columna dentro del determinante. Para ello se van a realizar manipulaciones básicas sobre figuras del plano.

3.5.2. Fundamentación curricular

Durante esta actividad se trabajarán las siguientes competencias específicas (Decreto 40/2022):

- CE2. Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.

- CE3. Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.

Los contenidos de la materia que van a tener que movilizar son los siguientes (Decreto 40/2022):

- Cálculo de determinantes: interpretación, comprensión y uso adecuado de sus propiedades.

- Cálculo de longitudes y medidas angulares en coordenadas cartesianas.

- Resolución de problemas que impliquen medidas de longitud, superficie o volumen en un sistema de coordenadas cartesianas.

- Conjeturas geométricas en el espacio: validación por medio de la deducción y la demostración de teoremas.

3.5.3. Metodología

La metodología a seguir para esta actividad consistirá en un pequeño reto. Lo que se podría llamar un aprendizaje basado en problemas. Se seguirá una estructura de cinco pasos basados en el método de las cinco fases creado en la universidad de Queen de Canadá:

1. Lectura inicial y comprensión del problema.
2. Lluvia de ideas y propuestas de hipótesis.
3. Identificación de los objetivos de aprendizaje.
4. Investigación individual.
5. Discusión final en grupo.

Se va a organizar al alumnado y al espacio del aula en dos agrupamientos, dentro de los cuales se podrán dividir en grupos razonables. Cada una de las dos partes de la clase atacará uno de los dos problemas propuestos, después se intercambiarán las posiciones. Los problemas a resolver son:

- Deducir una fórmula para el área del romboide generado por dos vectores.
- Deducir una fórmula para el cálculo del determinante de una matriz 2×2 utilizando la propiedad 3.4.9, que es el último resultado que se expuso en la actividad anterior.

La actividad durará una sesión, ya que los problemas no son complicados. Con esta sesión se pretende romper con la rutina de las exposiciones de la clase y aplicar lo ya aprendido. Al final de la sesión se llegará a la conclusión de que el determinante 2×2 tiene la interpretación geométrica del área de un romboide.

Los materiales necesarios para esta sesión son simplemente papel y material de escritura. Aunque para la parte geométrica también se les recomendará cortar papel o utilizar el soporte visual que permite la pizarra de tiza o la pantalla digital de la clase.

3.5.4. Problema: calcular el determiante 2×2

Hasta ahora la clase no ha calculado determinantes, solo ha demostrado sus propiedades. En el caso 2×2 se puede ver gráficamente que el determinante representa el área (orientada) de un paralelogramo del plano. Además nos da una pista de cómo se puede seguir para calcular determinantes en órdenes mayores.

Empecemos por mostrar cómo son los determinantes en el caso 1×1. Esta será la pista que se les dará al grupo que tenga el problema de calcular el determinante. Aunque es un caso tan sencillo que en la práctica no se utiliza, sirve para empezar a aplicar la propiedad 3.4.9 expuesta durante la sesión inmediatamente anterior.

El grupo debería llegar a deducir que los determinantes 1×1 sobre $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ son todos de la forma

$$D(x) = \lambda x$$

para cualquier $\lambda \neq 0$. Para llegar a esto, hay que empezar como siempre por la propiedad fundamental del determinante (3.3). En el caso 1×1 tenemos que para todos los vectores (que en este caso son también escalares) $x, b \in \mathbb{R}$, un determinante D debe cumplir

$$D(x)b = D(b)x.$$

Si tomamos un número b distinto de 0, entonces $D(b)$ no puede valer 0. Ya que si valiera 0, por la propiedad fundamental, D valdría 0 en cualquier otro número x, es decir, ocurriría que

$$D(x) = \frac{D(b)}{b} x = \frac{0}{b} x = 0 \cdot x = 0,$$

que es absurdo ya que un determinante D no puede valer 0 siempre. Y sabiendo que $D(b) \neq 0$ si $b \neq 0$, ahora se puede despejar en la propiedad fundamental

$$D(x) = \frac{D(b)}{b} x = \lambda x,$$

definiendo $\lambda = \frac{D(b)}{b} \neq 0$.

Ahora, sabiendo cómo es un determinante 1×1 y recordando la propiedad 3.4.9, la clase debe dar el paso final: calcular el determinante det en el caso 2×2, que es el determinante que cumple $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$. Los demás determinantes 2×2 con casi iguales (teorema 3.4.7) pero este es el que siempre se utiliza.

De esta manera llegarán a que *el* determinante det en el espacio $\mathbb{R}^2$ se calcula como:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Esto se comprueba tomando un determinante D para sistemas 1×1. Es decir, $D(x) = \lambda x$. Hay que aplicar la propiedad 3.4.9 para construir $\tilde{D}$ un determinante 2×2. Dados los vectores anteriores de $\mathbb{R}^2$, se aplica la propiedad 3.4.9.

$$\begin{aligned}\tilde{D}\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_0 \cdot D\left(p\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}_0 \cdot D\left(p\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)\\ &= a\cdot D\left(d\right) - c\cdot D\left(b\right)\\ &= a\lambda d - c\lambda b\\ &= \lambda(ad-cd)\end{aligned}$$

Para que $\tilde{D}$ sea det, $\tilde{D}$ debe valer 1 en la base canónica:

$$\tilde{D}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \lambda(1\cdot 1-0) = \lambda = 1.$$

Luego tomando $\lambda = 1$ se tiene que

$$\det\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix} = ad-bc.$$

Y se tiene la seguridad de que esta es la única opción, porque por el teorema 3.4.7 det es único.

3.5.5. Problema: el determinante 2×2 es el área de un romboide

Ahora mostraré cómo debería comprobar la clase que el determinante es exactamente el área de un paralelogramos generado por dos vectores del plano. Este área tiene signo ya que estamos suponiendo una *orientación* (distinguimos entre las dos caras de la figura: $+$ y $-$).

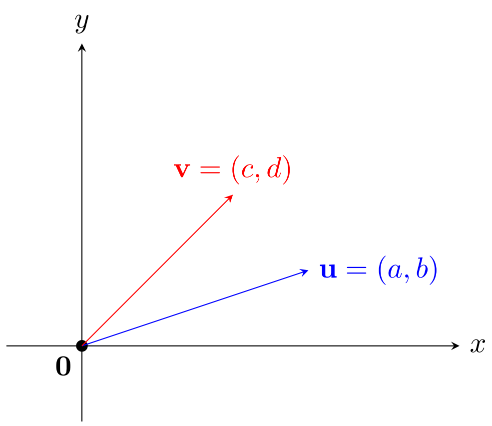


Figura 3.5: Dos vectores linealmente independientes.

Se le dirá a la clase que tomen unos vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ del plano (figura 3.5). Supondremos que son linealmente independientes ya que si no $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Esto tiene sentido geométrico ya que si son linealmente dependientes, los vectores son proporcionales y entonces no forman un paralelogramo (o forman uno de área 0).

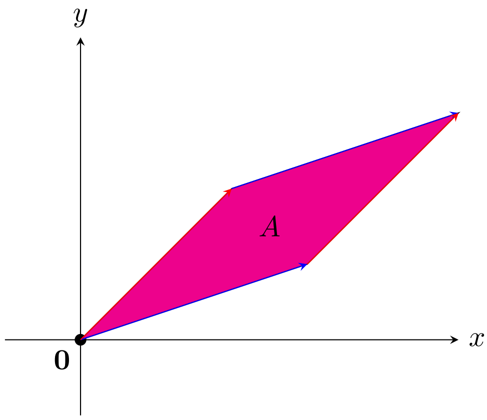


Figura 3.6: Área del paralelogramo.

Queremos ver que el área A del romboide definido por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el determinante de estos dos vectores. Para ello se debería construir una figura, ya sea dibujada o recortada, como la que se puede apreciar en la figura 3.7. Sabemos que el área total encerrada en ese rectángulo tipo Tangram es (base por altura)

$$(a + c) \cdot (b + d) = ab + ad + cb + cd.$$

Y también sabemos que el área A es menor que la total, ya que el paralelogramo está incluido en el rectángulo grande. De hecho, si sumamos el área de cada pieza deberíamos llegar al mismo área total

$$A + ab + 2bc + cd = (a + c) \cdot (b + d).$$

Si ahora se igualan las dos sumas de $(a + c) \cdot (b + d)$, se obtiene una ecuación para hallar A:

$$A + ab + 2bc + cd = ab + ad + cb + cd.$$

Luego la solución es $A = ad - bc$, que es justo el valor del determinante de los dos vectores que generan el romboide.

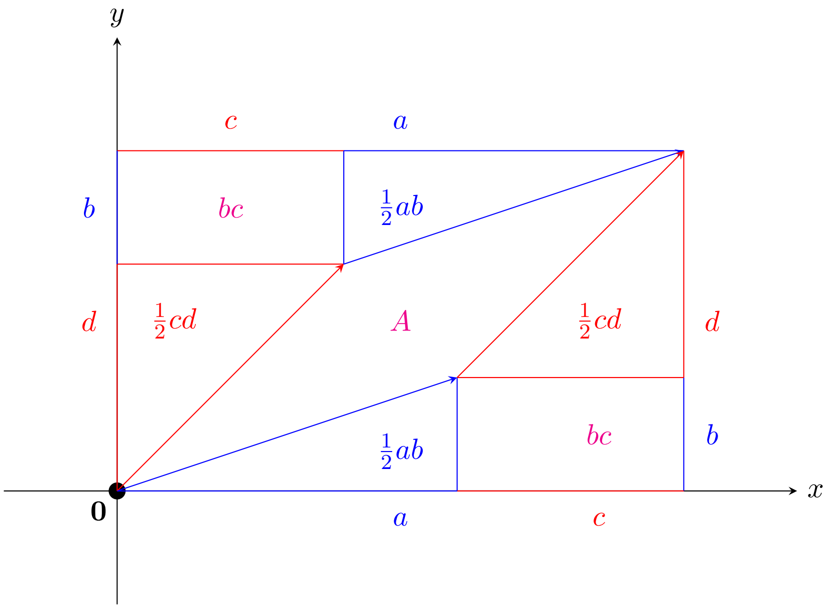


Figura 3.7: Cálculo gráfico del área A.

3.6. Determinantes de matrices

3.6.1. Contextualización

Esta actividad es continuación directa de la actividad 3.4: propiedades del determinante. Se seguirán las mismas metodologías y forma de evaluar, ya que como en la otra actividad no hay suficientes resultados para toda la clase se continúa aquí lo que se estaba haciendo hasta que todos los estudiantes hayan expuesto un resultado.

Mientras que en la actividad 3.4 se probaron las propiedades del determinante como consecuencia de la propiedad fundamental, aquí pasamos a ver aspectos del determinante de una matriz cuadrada y qué relación tiene con las propiedades de una matriz.

3.6.2. Fundamentación curricular

Las competencias específicas de la materia que se van a movilizar durante esta actividad son las siguientes (Decreto 40/2022):

- CE3. Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.
- CE5. Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedi-

mientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.

- CE7. Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.
- CE8. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.

Los criterios de evaluación seleccionados para evaluar las competencias específicas anteriores son (Decreto 40/2022):

- 3.1 Adquirir nuevo conocimiento matemático mediante la formulación, razonamiento y justificación de conjeturas y problemas de forma autónoma.
- 5.1 Demostrar una visión matemática integrada, investigando y conectando las diferentes ideas matemáticas.
- 7.1 Representar y visualizar ideas matemáticas, estructurando diferentes razonamientos matemáticos, seleccionando y valorando las tecnologías más adecuadas.
- 8.1 Mostrar organización al comunicar las ideas y razonamientos matemáticos, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados.
- 8.2 Reconocer, emplear y dominar el lenguaje y notación matemática en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor.

Dado que durante el desarrollo de la actividad se van a evaluar competencias específicas de la materia, estas aportarán información sobre los descriptores operativos (Real Decreto 243/2022). La relación entre los descriptores operativos se encuentra en el mapa de relaciones criteriales (Decreto 40/2022), y en resumen tenemos los siguientes descriptores operativos implicados:

- CCL1. Se expresa de forma oral, escrita, signada o multimodal con fluidez, coherencia, corrección y adecuación a los diferentes contextos sociales y académicos, y participa en interacciones comunicativas con actitud cooperativa y respetuosa tanto para intercambiar información, crear conocimiento y argumentar sus opiniones como para establecer y cuidar sus relaciones interpersonales.
- CCL3. Localiza, selecciona y contrasta de manera autónoma información procedente de diferentes fuentes evaluando su fiabilidad y pertinencia en función de los objetivos de lectura y evitando los riesgos

de manipulación y desinformación, y la integra y transforma en conocimiento para comunicarla de manera clara y rigurosa adoptando un punto de vista creativo y crítico a la par que respetuoso con la propiedad intelectual.

- CP1. Utiliza con fluidez, adecuación y aceptable corrección una o más lenguas, además de la lengua familiar o de las lenguas familiares, para responder a sus necesidades comunicativas con espontaneidad y autonomía en diferentes situaciones y contextos de los ámbitos personal, social, educativo y profesional.

- STEM1. Selecciona y utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones propias de la modalidad elegida y emplea estrategias variadas para la resolución de problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.

- STEM2. Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar fenómenos relacionados con la modalidad elegida, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, planteándose hipótesis y contrastándolas o comprobándolas mediante la observación, la experimentación y la investigación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y limitaciones de los métodos empleados.

- STEM3. Plantea y desarrolla proyectos diseñando y creando prototipos o modelos para generar o utilizar productos que den solución a una necesidad o problema de forma colaborativa, procurando la participación de todo el grupo, resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir, adaptándose ante la incertidumbre y evaluando el producto obtenido de acuerdo a los objetivos propuestos, la sostenibilidad y el impacto transformador en la sociedad.

- STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de investigaciones de forma clara y precisa, en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos.) y aprovechando la cultura digital con ética y responsabilidad y valorando de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida para compartir y construir nuevos conocimientos.

- CD1. Realiza búsquedas avanzadas comprendiendo cómo funcionan los motores de búsqueda en internet aplicando criterios de validez, calidad, actualidad y fiabilidad, seleccionando los resultados de manera crítica y organizando el almacenamiento de la información de manera adecuada y segura para referenciarla y reutilizarla posteriormente.

- CD2. Crea, integra y reelabora contenidos digitales de forma individual o colectiva, aplicando medidas de seguridad y respetando, en todo momento, los derechos de autoría digital para ampliar sus recursos y generar nuevo conocimiento.

- CD3. Selecciona, configura y utiliza dispositivos digitales, herramientas, aplicaciones y servicios en línea y los incorpora en su entorno personal de aprendizaje digital para comunicarse, trabajar colaborativamente y compartir información, gestionando de manera responsable sus acciones, presencia y visibilidad en la red y ejerciendo una ciudadanía digital activa, cívica y reflexiva.

- CD5. Desarrolla soluciones tecnológicas innovadoras y sostenibles para dar respuesta a necesidades concretas, mostrando interés y curiosidad por la evolución de las tecnologías digitales y por su desarrollo sostenible y uso ético.

- CE3. Lleva a cabo el proceso de creación de ideas y soluciones innovadoras y toma decisiones, con sentido crítico y ético, aplicando conocimientos técnicos específicos y estrategias ágiles de planificación y gestión de proyectos, y reflexiona sobre el proceso realizado y el resultado obtenido, para elaborar un prototipo final de valor para los demás, considerando tanto la experiencia de éxito como de fracaso, una oportunidad para aprender.

En cuanto a los contenidos de las materia que se van a movilizar particularmente durante esta actividad, tenemos (Decreto 40/2022):

- Adición y producto de vectores y matrices: interpretación, comprensión y uso adecuado de las propiedades.

- Cálculo de determinantes: interpretación, comprensión y uso adecuado de sus propiedades.

- Conjuntos de vectores y matrices: estructura, comprensión y propiedades.

- Generalización de patrones en situaciones diversas.

3.6.3. Metodología

Esta actividad está pensada para durar tres sesiones. Hay un total de seis propiedades pensadas para los alumnos que no pudieron exponer en la anterior actividad:

- Propiedad 3.6.1: el determinante de una matriz diagonal es el producto de sus elementos.

- Propiedad 3.6.3: el determinante de la matriz a la que le hemos multiplicado por un escalar una columna es el determinante de la matriz original multiplicado por el escalar.
- Propiedad 3.6.4: alternar dos columnas cambia el signo del determinante.
- Propiedad 3.6.5: realizar la tercera operación elemental no altera el determinante.
- Propiedad 3.6.10: el determinante del producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes.
- Propiedad 3.6.13: el determinante de la matriz traspuesta es el mismo que el de la matriz original.

Vamos a emplear la misma metodología de *aula invertida* o *flipped classroom* descrita en la sección 3.4.3. Los materiales utilizados para estas actividades serán los proporcionados por el profesor y la pizarra. Siempre podrán utilizar otros medio de representación pero no es bueno que utilicen una presentación digital de la que leer textualmente, ya que la idea es que sepan explicar son sus palabras un resultado matemático a sus compañeros.

Lo único que cambia respecto de la actividad 3.4.3 además del contenido matemático es que cuando se terminen las exposiciones, el resto de teoría se comentará brevemente. Ya no se empleará tanto tiempo, al no ser la clase la protagonista de la sesión. Los ejemplos serán expuestos por el profesor para fijar ideas y se comentan en el apartado de contenido matemático para mostrar cómo se explicaría de forma coherente a la clase.

3.6.4. Evaluación

El proceso de evaluación será idéntico al descrito en la actividad 3.4.4. Esto es porque se evaluará a la parte de la clase que quedó sin exponer en la otra actividad. Se planea que al terminar esta actividad todos los miembros de la clase hayan sido evaluados de esta manera.

Se recuerda la rúbrica (tabla 3.2) con los indicadores de logro que se utilizarán para evaluar los criterios de evaluación seleccionados para esta actividad.

Tabla 3.2: Rúbrica con indicadores de logro.

Cr. Ev.	0 puntos	1 punto	2 puntos
3.1	No ha comprendido la demostración.	Ha entendido parte de la demostración.	Comprende todos los pasos de la demostración asignada.
5.1	No se hacen conexiones con el resto de resultados.	Aunque con errores, hace referencia a los resultados previos necesarios para la demostración.	Se aplican correctamente los resultados previos en los momentos necesarios de la demostración.
7.1	No utiliza correctamente el soporte visual durante su demostración.	Hay algún error en su expresión escrita durante su demostración.	La expresión escrita se utiliza correctamente.
8.1	No organiza de forma rigurosa y clara las ideas clave de la demostración.	Hay algún paso de la demostración que no se ordena de forma correcta.	Las ideas de la demostración están estructuradas de forma rigurosa y ordenada.
8.2	No se expresa correctamente en el lenguaje matemático.	La exposición oral contiene algún error de lenguaje matemático.	Utiliza correctamente el lenguaje matemático durante su exposición oral.

3.6.5. Contenido matemático

Vamos a probar propiedades del determinante de una matriz cuadrada. Estas propiedades son consecuencia directa de las propiedades anteriores. Recordemos que hemos definido *el* determinante de una matriz cuadrada $A = \left(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n\right)$ como el único determinante $\det A = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ tal que $\det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \det I_n = 1$.

Propiedad 3.6.1. El determinante de una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

es $|D| = d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1} d_n$.

Demostración. Hay que darse cuenta de que la matriz D escrita arriba se puede escribir por columnas como

$$D = \left(d_1 \cdot \mathbf{e}_1 | d_2 \cdot \mathbf{e}_2 | \cdots | d_n \cdot \mathbf{e}_n\right).$$

Es decir, son los vectores de la base canónica multiplicados por una constante

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_1 \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = d_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = d_n \cdot \mathbf{e}_n.$$

De esta manera utilizamos la propiedad multilineal 3.4.2 y deducimos que

$$\begin{aligned} |D| &= \det(d_1 \cdot \mathbf{e}_1, d_2 \cdot \mathbf{e}_2, \ldots, d_n \cdot \mathbf{e}_n) \\ &= d_1 \det(\mathbf{e}_1, d_2 \cdot \mathbf{e}_2, \ldots, d_n \cdot \mathbf{e}_n) \\ &= d_1 d_2 \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, d_n \cdot \mathbf{e}_n) \\ &= \cdots \\ &= d_1 d_2 \cdots d_n \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \\ &= d_1 d_2 \cdots d_n |I_n| = d_1 d_2 \cdots d_n \end{aligned}$$

QED

Definición 3.6.2. Hay tres tipos de *operaciones elementales* que podemos realizar sobre las columnas $(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_i|\cdots|\mathbf{a}_n)$ (o también sobre las filas) de una matriz:

- **Multiplicar por un escalar:** $(\mathbf{a}_1|\cdots|\lambda\mathbf{a}_i|\cdots|\mathbf{a}_n)$.
- **Intercambiar dos elementos:** $(\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$.
- **Sumar un múltiplo de otro elemento:** $(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_i+\lambda\mathbf{a}_j|\cdots|\mathbf{a}_n)$.

Veamos qué efecto tienen sobre el determinante estas tres operaciones elementales.

Propiedad 3.6.3. Si a una matriz $A = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$ le multiplicamos una de sus columnas por un escalar $\tilde{A} = (\mathbf{a}_1|\cdots|\lambda\mathbf{a}_i|\cdots|\mathbf{a}_n)$, entonces tenemos que

$$\det \tilde{A} = \lambda \det A.$$

Demostración. Esto es por la propiedad multilineal 3.4.2 de los determinantes. Ya que si la aplicamos en la columna i-ésima tenemos

$$\begin{aligned}\det \tilde{A} &= \det(\mathbf{a}_1,\dots,\lambda\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)\\ &= \lambda\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)\\ &= \lambda\det A\end{aligned}$$

QED

Propiedad 3.6.4. Si a una matriz $A = (\cdots|\mathbf{a}_i|\cdots|\mathbf{a}_j|\cdots)$ le intercambiamos dos de sus elementos $\tilde{A} = (\cdots|\mathbf{a}_j|\cdots|\mathbf{a}_i|\cdots)$, entonces tenemos que

$$\det \tilde{A} = -\det A.$$

Demostración. Esto es por la propiedad antisimétrica 3.4.3 de los determinantes. Ya que si la aplicamos en este caso concreto tenemos

$$\begin{aligned}\det \tilde{A} &= \det(\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_i,\dots)\\ &= -\det(\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_j,\dots)\\ &= -\det A.\end{aligned}$$

QED

Propiedad 3.6.5. Si a una matriz $A = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_i|\cdots|\mathbf{a}_n)$ le sumamos a una de sus columnas un múltiplo de otra columna $\tilde{A} = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_i+\lambda\mathbf{a}_j|\cdots|\mathbf{a}_n)$, entonces tenemos que

$$\det \tilde{A} = \det A.$$

Demostración. Utilicemos la propiedad multilineal 3.4.2 de los determinantes para descomponer el determinante de $\tilde{A}$ como suma de dos determinantes.

$$\begin{aligned}\det \tilde{A} &= \det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i+\lambda\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_n)\\ &= \det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)+\det(\mathbf{a}_1,\dots,\lambda\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_n)\\ &= \det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)+\lambda\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_n)\\ &= \det A + 0\end{aligned}$$

Como en el segundo determinante el vector columna $\mathbf{a}_j$ se repite en la posición i-ésima y j-ésima, es un conjunto linealmente dependiente y por la propiedad 3.4.4 sabemos que el determinante se anula. **QED**

Dadas dos matrices cuadradas A y B de tamaño $n \times n$, definimos su multiplicación $C = A \cdot B$ como $(c_{i,j})$ donde cada elemento de la matriz producto vale

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + a_{i,3}b_{1,3} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j}.$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,j} & \cdots & c_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i,1} & c_{i,2} & \cdots & \boxed{c_{i,j}} & \cdots & c_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,j} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} = A \cdot B$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,j} & \cdots & b_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,j} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.6.6. La multiplicación de matrices por matrices (o vectores) se puede entender también de una manera visual. De hecho esta es una aplicación muy importante de las matrices: las transformaciones lineales.

Tomemos los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ que se muestran en la figura 3.5. Si definimos la matriz cuadrada A como

$$A = (\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

veamos qué efecto tiene su multiplicación.

Primero la multiplicaremos por los vectores de la base canónica, por ser el caso más sencillo:

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}$$

$$A\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \mathbf{v}$$

Como la base canónica $\mathfrak{B}$ es base, tenemos un forma muy sencilla de multiplicar el resto de vectores de $\mathbb{R}^2$, ya que estos se pueden expresar de forma única como combinación lineal de los elementos de la base (proposición 3.2.9). Veamos un ejemplo con el vector

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2.$$

Multiplicando $A\mathbf{w}$ se cumple la propiedad distributiva y tenemos:

$$\begin{aligned} A \cdot \mathbf{w} &= (\mathbf{u}|\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) = (\mathbf{u}|\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_1 + 2(\mathbf{u}|\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se puede ver en la figura 3.8 cómo A transforma todo el plano al mismo tiempo, donde aparecen dibujados los vectores que hemos visto.

Para multiplicar matrices por matrices en vez de vectores es lo mismo, solo que ahora se hace la transformación sobre todas las columnas de la segunda matriz a la vez. Veamos como ejemplo lo que acurre con la matriz identidad:

$$\begin{aligned} A \cdot I_2 &= (\mathbf{u}|\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) \\ &= ((\mathbf{u}|\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_1|(\mathbf{u}|\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= (\mathbf{u}|\mathbf{v}) = A \end{aligned}$$

Por eso de llama matriz identidad, es el elemento neutro para la multiplicación, como ocurre con el número 1 en la multiplicación usual.

Conociendo la multiplicación de matrices podemos ver las operaciones elementales (sobre columnas o sobre filas) como multiplicar por ciertas matrices.

Definición 3.6.7. Una *matriz elemental* $n \times n$ es el resultado de realizar una operación elemental sobre la matriz identidad I_n. Es decir, es de una de

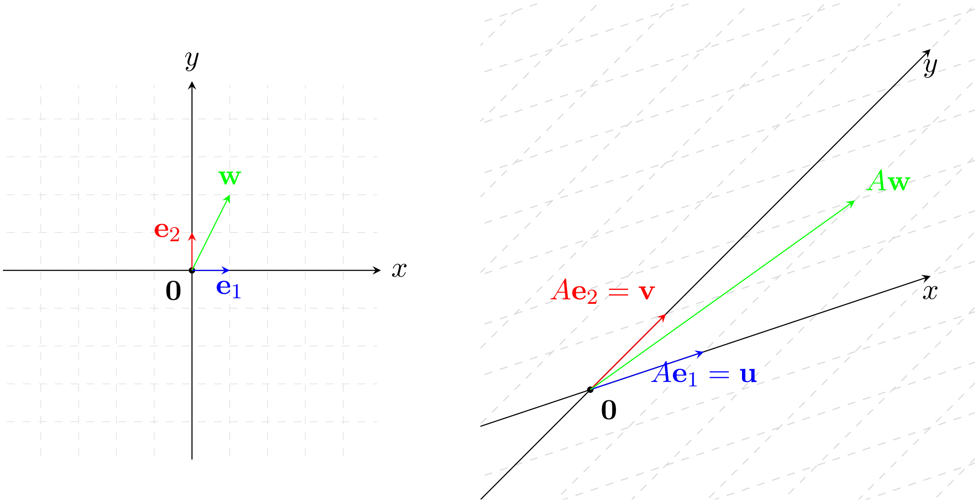


Figura 3.8: Transformación del plano dada por A.

las siguientes formas:

$$E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} E_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & \lambda & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos una matriz A por una matriz elemental E como estas, $A \cdot E$ es lo mismo que realizar la operación elemental en las columnas de A.

La siguiente propiedad no la demostrará ningún estudiante porque es consecuencia directa de los resultados que ellos mismos han probado.

Propiedad 3.6.8. Por las propiedades 3.6.3, 3.6.4 y 3.6.5 sabemos que para una matriz A y unas matrices elementales ocurre:

$$\begin{aligned} |E_{i,j}| &= -1, & |A\cdot E_{i,j}| &= |A|\cdot|E_{i,j}| \\ |E_i(\lambda)| &= \lambda, & |A\cdot E_i(\lambda)| &= |A|\cdot|E_i(\lambda)| \\ |E_{i,j}(\lambda)| &= 1, & |A\cdot E_{i,j}(\lambda)| &= |A|\cdot|E_{i,j}(\lambda)| \end{aligned}$$

Esta propiedad tampoco se va a demostrar en clase, ya que es algo más complicada y no entra dentro del currículo. Pero se utilizará para los próximos resultados así que se enuncia para que se pueda aplicar.

Propiedad 3.6.9. Dada una matriz A cuadrada $n\times n$, $\det A\neq 0$ si y solo si A es producto de matrices elementales $E_1\cdot E_2\cdots E_m$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $\det A\neq 0$, por la regla de Cramer (teorema 3.4.6) sabemos que podemos resolver sistemas de ecuaciones $n\times n$ dados por A y cualquier vector $\mathbf{b}$. Es decir, podemos hacer operaciones por filas sobre A y $\mathbf{b}$ y despejar las incógnitas. Esto equivale a hacer operaciones por filas sobre A para llegar a I_n. Además podemos hacer el proceso en orden inverso: obtener A realizando operaciones elementales sobre la identidad. Así conseguimos

$$A = E_1\cdots E_m\cdot I_n = E_1\cdots E_m.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si suponemos que $A = E_1\cdots E_m$, por la propiedad 3.6.8 tenemos que

$$|A| = |E_1E_2\cdots E_m| = |E_1||E_2|\cdots|E_m|\neq 0.$$

QED

Propiedad 3.6.10. Dadas A y B dos matrices $n\times n$, entonces $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

Demostración. Si $|A|=0$ o $|B|=0$ tenemos que ver que $|AB|=0$. Para ello supondremos que $|A|=0$ y para el caso $|B|=0$ pasará lo mismo por la propiedad 3.6.13. Luego si $\det A = \det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)=0$, la propiedad 3.4.4 nos dice que $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ son linealmente dependientes. Es decir, $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ no generan $\mathbb{R}^n$. Ahora como las columnas de AB son combinaciones lineales de las columnas de A, tenemos que estas tampoco pueden generar $\mathbb{R}^n$: son linealmente dependientes. Aplicando de nuevo la propiedad 3.4.4 tenemos que $|AB|=0$.

Si $|A|\neq 0\neq|B|$, por la propiedad 3.6.9 tenemos que $A=E_1\cdots E_k$ y $B=E_{k+1}\cdots E_m$. Y por lo tanto aplicamos la propiedad 3.6.8 para terminar

$$|A\cdot B| = |E_1\cdots E_m| = |E_1\cdots E_k|\cdot|E_{k+1}\cdots E_m| = |A|\cdot|B|.$$

QED

Antes de terminar esta sección es importante hablar sobre el determinante y la traspuesta. La consecuencia del próximo resultado es que **todo lo que hemos hecho hasta ahora por columnas se aplica también para filas**, se cumplen todos los resultados: operaciones elementales, propiedades multilineal, antisimétrica, independencia lineal, etc.

Definición 3.6.11. Dada una matriz $A = (a_{i,j})$, llamamos *matriz traspuesta* de A a la matriz $A^t = (a_{j,i})$. Para entenderlo mejor, dada $A = (\mathbf{a}_1|\dots|\mathbf{a}_n)$ por columnas, la traspuesta de A se define por filas como:

$$A^t = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^t \\ - \\ \vdots \\ - \\ \mathbf{a}_n^t \end{pmatrix}.$$

El siguiente lema es una propiedad importante, pero no entra dentro de la lista de resultados a probar en clase, ya que no creo que les aporte mucho. Se incluye la demostración por ser la forma en la que el profesor la explicaría en clase.

Lema 3.6.12. $(AB)^t = B^tA^t$

Demostración. Se puede comprobar viendo la fila y la columna resaltadas anteriormente para definir la multiplicación. Al trasponer el producto tenemos que $B^t \cdot A^t =$

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & \cdots & b_{j,1} & \cdots & b_{n,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & \cdots & b_{j,2} & \cdots & b_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,i} & b_{2,i} & \cdots & b_{j,i} & \cdots & b_{n,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,n} & b_{2,n} & \cdots & b_{j,n} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{j,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{j,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,i} & a_{2,i} & \cdots & a_{j,i} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{j,n} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

donde $c_{i,j}$ es el elemento (i,j) de la matriz $B^t \cdot A^t$ pero $c_{j,i}$ es el elemento (i,j) de la matriz $A \cdot B$. Y esto quiere decir que $(A \cdot B)^t = B^tA^t$. **QED**

Propiedad 3.6.13. El determinante de la matriz traspuesta es el mismo que el de la matriz original: $|A| = |A^t|$.

Demostración. Si $|A| \neq 0$, entonces gracias a la propiedad 3.6.9 A es producto de matrices elementales $E_1 \cdots E_m$. Luego por 3.6.12 tenemos que $A^t = E_m^t \cdots E_1^t$. Y utilizando la propiedad 3.6.8 llegamos a que

$$|A^t| = |E_m^t| \cdots |E_1^t| = |E_1| \cdots |E_m| = |A|.$$

Pero si $|A| = 0$, tenemos que ver que también $|A^t| = 0$. Razonemos por reducción al absurdo. Si $|A^t| \neq 0$, entonces A^t es producto de matrices elementales. Pero como acabamos de ver, esto quiere decir que A también es producto de matrices elementales y que $|A| \neq 0$. Luego hemos llegado a una contradicción **QED**

3.7. Calculando determinantes

3.7.1. Contextualización

Durante esta sesión se van a aprender las principales formas de cálculo de determinantes: la regla de Laplace, la regla de Sarrus y la eliminación gaussiana. Para involucrar a los alumnos y que no solo memoricen la regla de Sarrus se introducirán los tres algoritmos más básicos de cálculo de determinantes mediante la técnica del puzzle. Se buscará que tengan un debate de las ventajas y desventajas de cada método y así ejercitar el pensamiento computacional.

A partir de esta actividad ya podrán calcular determinantes practicando con los ejercicios propuestos en el libro de texto. Pero como se dice en el resumen de este TFM, nos estamos centrando en cómo explicar los determinante y no tanto en cómo ejercitarlos. Ese proceso empieza ahora y no le daremos mucha atención, aunque también es importante. Habrá algunos ejemplos en la sección de contenido matemático para ejemplificar cómo se harían los primeros ejercicios en clase.

3.7.2. Fundamentación curricular

Se van a tomar en cuenta en esta actividad los siguientes criterios de evaluación que aparecen listados en (Decreto 40/2022):

- 5.1 Demostrar una visión matemática integrada, investigando y conectando las diferentes ideas matemáticas.

- 6.2 Analizar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad valorando su contribución en la propuesta de soluciones a situaciones complejas y a los retos científicos y tecnológicos que se plantean en la sociedad.

- 8.1 Mostrar organización al comunicar las ideas y razonamientos matemáticos, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados.

- 9.2. Mostrar y transmitir una actitud positiva y perseverante, aceptando y aprendiendo de la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.

- 9.3 Trabajar en tareas matemáticas de forma activa en equipos heterogéneos, respetando las emociones y experiencias de los demás. escuchando su razonamiento, aplicando las habilidades sociales más propicias y fomentando el bienestar grupal y las relaciones saludables.

A partir de los criterios de evaluación seleccionados podemos decir que se están movilizando las siguientes competencias específicas de la materia:

- CE5. Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.

- CE6. Descubrir los vínculos de las Matemáticas con otras áreas de conocimiento y profundizar en sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.

- CE8. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.

- CE9. Utilizar destrezas personales y sociales, identificando y gestionando las propias emociones, respetando las de los demás y organizando activamente el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje y afrontando situaciones de incertidumbre, para perseverar en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas. (Decreto 40/2022)

Utilizando el mapa de relaciones criteriales (Decreto 40/2022) obtenemos que esta actividad aporta información sobre el grado de desarrollo de los siguientes descriptores operativos:

- CCL1. Se expresa de forma oral, escrita, signada o multimodal con fluidez, coherencia, corrección y adecuación a los diferentes contextos sociales y académicos, y participa en interacciones comunicativas con actitud cooperativa y respetuosa tanto para intercambiar información, crear conocimiento y argumentar sus opiniones como para establecer y cuidar sus relaciones interpersonales.

- CCL3. Localiza, selecciona y contrasta de manera autónoma información procedente de diferentes fuentes evaluando su fiabilidad y pertinencia en función de los objetivos de lectura y evitando los riesgos de manipulación y desinformación, y la integra y transforma en conocimiento para comunicarla de manera clara y rigurosa adoptando un punto de vista creativo y crítico a la par que respetuoso con la propiedad intelectual.

- CP1. Utiliza con fluidez, adecuación y aceptable corrección una o más lenguas, además de la lengua familiar o de las lenguas familiares, para responder a sus necesidades comunicativas con espontaneidad y autonomía en diferentes situaciones y contextos de los ámbitos personal, social, educativo y profesional.

- STEM1. Selecciona y utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones propias de la modalidad elegida y emplea estrategias variadas para la resolución de problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario

- STEM3. Plantea y desarrolla proyectos diseñando y creando prototipos o modelos para generar o utilizar productos que den solución a una necesidad o problema de forma colaborativa, procurando la participación de todo el grupo, resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir, adaptándose ante la incertidumbre y evaluando el producto obtenido de acuerdo a los objetivos propuestos, la sostenibilidad y el impacto transformador en la sociedad.

- STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de investigaciones de forma clara y precisa, en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos.) y aprovechando la cultura digital con ética y responsabilidad y valorando de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida para compartir y construir nuevos conocimientos.

- STEM5. Planea y emprende acciones fundamentadas científicamente para promover la salud física y mental, y preservar el medio ambiente y los seres vivos, practicando el consumo responsable, aplicando principios de ética y seguridad para crear valor y transformar su entorno de forma sostenible adquiriendo compromisos como ciudadano en el ámbito local y global.

- CD2. Crea, integra y reelabora contenidos digitales de forma individual o colectiva, aplicando medidas de seguridad y respetando, en todo momento, los derechos de autoría digital para ampliar sus recursos y generar nuevo conocimiento.

- CD3. Selecciona, configura y utiliza dispositivos digitales, herramientas, aplicaciones y servicios en línea y los incorpora en su entorno personal de aprendizaje digital para comunicarse, trabajar colaborativamente y compartir información, gestionando de manera responsable sus acciones, presencia y visibilidad en la red y ejerciendo una ciudadanía digital activa, cívica y reflexiva.

- CPSAA1.1 Fortalece el optimismo, la resiliencia, la autoeficacia y la búsqueda de objetivos de forma autónoma para hacer eficaz su aprendizaje.
- CPSAA1.2 Desarrolla una personalidad autónoma, gestionando constructivamente los cambios, la participación social y su propia actividad para dirigir su vida.
- CPSAA3.1 Muestra sensibilidad hacia las emociones y experiencias de los demás, siendo consciente de la influencia que ejerce el grupo en las personas, para consolidar una personalidad empática e independiente y desarrollar su inteligencia.
- CPSAA3.2 Distribuye en un grupo las tareas, recursos y responsabilidades de manera ecuánime, según sus objetivos, favoreciendo un enfoque sistémico para contribuir a la consecución de objetivos compartidos.
- CC2. Reconoce, analiza y aplica en diversos contextos, de forma crítica y consecuente, los principios, ideales y valores relativos al proceso de integración europea, la Constitución Española, los derechos humanos, y la historia y el patrimonio cultural propios, a la vez que participa en todo tipo de actividades grupales con una actitud fundamentada en los principios y procedimientos democráticos, el compromiso ético con la igualdad, la cohesión social, el desarrollo sostenible y el logro de la ciudadanía mundial.
- CC3. Adopta un juicio propio y argumentado ante problemas éticos y filosóficos fundamentales y de actualidad, afrontando con actitud dialogante la pluralidad de valores, creencias e ideas, rechazando todo tipo de discriminación y violencia, y promoviendo activamente la igualdad y corresponsabilidad efectiva entre mujeres y hombres.
- CC4. Analiza las relaciones de interdependencia y ecodependencia entre nuestras formas de vida y el entorno, realizando un análisis crítico de la huella ecológica de las acciones humanas, y demostrando un compromiso ético y ecosocialmente responsable con actividades y hábitos que conduzcan al logro de los Objetivos de Desarrollo Sostenible y la lucha contra el cambio climático.
- CE2. Evalúa y reflexiona sobre las fortalezas y debilidades propias y las de los demás, haciendo uso de estrategias de autoconocimiento y autoeficacia, interioriza los conocimientos económicos y financieros específicos y los transfiere a contextos locales y globales, aplicando estrategias y destrezas que agilicen el trabajo colaborativo y en equipo, para reunir y optimizar los recursos necesarios, que lleven a la acción una experiencia o iniciativa emprendedora de valor.

Durante esta actividad se van a tratar los siguientes contenidos de la materia (Decreto 40/2022):

- Análisis algorítmico de las propiedades de las operaciones con matrices, los determinantes y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Adición y producto de vectores y matrices: interpretación, comprensión y uso adecuado de las propiedades.
- Cálculo de determinantes: interpretación, comprensión y uso adecuado de sus propiedades.
- Estrategias para operar con números reales, vectores y matrices: cálculo mental o escrito en los casos sencillos (como máximo orden 4) y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados.
- Conjuntos de vectores y matrices: estructura, comprensión y propiedades.

3.7.3. Metodología

Como se ha comentado en la contextualización, con esta actividad se pretenden introducir los principales métodos de cálculo de determinantes a mano:

- La regla de Laplace 3.7.2.
- La regla de Sarrus 3.7.6.
- La eliminación gaussiana (explicada después de los anteriores).

Aunque se quiere que sepan calcular determinantes a mano, gracias al punto de vista del pensamiento computacional se les animará al análisis de cada algoritmo y las implicaciones que tiene en el mundo real.

Se va a seguir una metodología parecida a la técnica del puzzle. Es decir, se van a seguir los siguientes pasos:

1. El profesor tiene dividido el temario en tres partes: cada una de las tres reglas de cálculo. Estos tres temas serán repartidos entre los miembros de la clase.
2. Se divide a la clase en grupos de tres integrantes. En cada grupo debe haber un representante de cada uno de los tres temas. Individualmente van a leer, entender e incluso investigar sobre su tema.
3. Después tendrá lugar la reunión de expertos de cada tema. La finalidad de esta reunión es que, por un lado cada alumno se haga experto en su tema por medio del debate que ocurra y por otro, que juntos diseñen un plan común para comunicar ese tema a su grupo asignado.

4. Tras las reuniones de expertos, cada alumno explicará al resto de su grupo de tres miembros el tema del que se ha informado. Se seguirá el orden recomendado en la sección siguiente de contenido matemático.

5. La última parte de la actividad consistirá en evaluar el aprendizaje logrado. Para ello, a modo de evidencia se va a recoger un registro escrito del debate y las ideas compartidas en cada grupo. Este documento va a ser lo que permita la evaluación de cada alumno en esta actividad.

Esta actividad está pensada para durar dos sesiones. En la primera se les presentará el material y se dividirá en grupos la clase. Después tendrá lugar la fase de lectura y la reunión de expertos. La segunda sesión consistirá en la reunión de los grupos para las explicaciones y el debate. Tras esta sesión empezarán a practicar el cálculo de determinantes.

3.7.4. Evaluación

Como se ha comentado en la sección anterior, esta actividad se va a evaluar utilizando el documento recogido del grupo y la rúbrica (tabla 3.3) donde se han desarrollado los indicadores de logro de cada criterio de evaluación.

Tabla 3.3: Rúbrica con indicadores de logro.

Cr. Ev.	0 puntos	1 punto	2 puntos
5.1	No se hacen conexiones con el resto de resultados.	Aunque con errores, hace referencia a los resultados previos dentro de los algoritmos.	Se aplican correctamente los resultados previos en los momentos necesarios del análisis de los algoritmos.
6.2	No existe un análisis de las aplicaciones de estos algoritmos.	Se incluye un pequeño análisis con errores de las aplicaciones de los algoritmos.	El análisis sobre las aplicaciones de los algoritmos estudiados es satisfactorio.
8.1	No organiza de forma rigurosa y clara las ideas clave en el documento.	Hay alguna idea que no se ha ordenado de forma correcta.	Las ideas en el análisis de los algoritmos están estructuradas de forma rigurosa y ordenada.
9.2	No ha participado en el debate y análisis de los algoritmos.	Ha participado poco en el debate y análisis de los algoritmos.	Su participación en el debate y análisis de los algoritmos queda claramente plasmada en el documento grupal entregado.
9.3	No ha respetado el orden de palabra en las conversaciones grupales.	Ha hecho alguna aportación respetando el turno de palabra.	Su aportación a los debates ha sido beneficiosa para el grupo y se ha respetado el turno de palabra.

3.7.5. Contenido matemático

Veamos una primera forma de calcular determinantes que a veces incluso se utiliza como definición. Aunque en nuestro caso es una consecuencia de nuestra definición (propiedad 3.4.9).

Definición 3.7.1. Dada una matriz cuadrada $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, llamamos *menor complementario* i,j-ésimo $m_{i,j} = |A_{i,j}|$ al determinante de la matriz $A_{i,j}$ que resulta al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. Llamamos i,j-ésimo a *menor adjunto* $\alpha_{i,j} = (-1)^{i+j}m_{i,j}$.

Teorema 3.7.2 (Desarrollo de Laplace por filas)**.** Si tenemos una matriz A cuadrada $n \times n$, entonces podemos calcular su determinante desarrollando el determinante por su i-ésima fila:

$$\det A = a_{i,1}\alpha_{i,1} + a_{i,2}\alpha_{i,2} + \cdots + a_{i,n}\alpha_{i,n}.$$

Ejemplo 3.7.3. Vamos a calcular desarrollando por la primera fila el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},\ A_{1,1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},\ A_{1,2} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},\ A_{1,3} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el desarrollo de Laplace 3.7.2 y dado que sabemos calcular determinantes 2×2, los cálculos son:

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^{1+1}a_{1,1}|A_{1,1}| + (-1)^{1+2}a_{1,2}|A_{1,2}| + (-1)^{1+3}a_{1,3}|A_{1,3}| \\
&= 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= (45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) \\
&= -3 + 12 - 9 = 0
\end{aligned}$$

Hay que darse cuenta de que cuando un determinante se anula, por la propiedad 3.4.4 sabemos que debe haber una relación de dependencia lineal entre los vectores columna

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Si encontramos una relación de dependencia lineal ya sabremos que un determinante vale 0 y por lo tanto no hará falta hacer más cálculos. En algunos casos es más sencillo: si hay vectores repetidos o proporcionales. Aquí podemos darnos cuenta de que $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2$, ya que para pasar de una columna a otra estamos sumando 1 en cada coordenada. Y si despejamos llegamos a que $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_3$, o en otras palabras $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$: dos formas equivalentes de decir que los vectores anteriores son linealmente dependientes.

Corolario 3.7.4 (Desarrollo de Laplace por columnas)**.** Gracias a la propiedad 3.6.13 sabemos que $\det A = \det A^t$. Aplicándolo al teorema de Laplace por filas 3.7.2 deducimos que también podemos desarrollar los determinantes por columnas:

$$\det A = a_{1,i}\alpha_{1,i} + a_{2,i}\alpha_{2,i} + \cdots + a_{n,i}\alpha_{n,i}.$$

Ejemplo 3.7.5. Desarrollemos el determinante de la matriz A del ejemplo anterior por las segunda columna para ver que también funciona. Ahora las submatrices son

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},\ A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},\ A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Luego el desarrollo del determinante por la segunda fila es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^{1+2}a_{1,2}|A_{1,2}| + (-1)^{2+2}a_{2,2}|A_{2,2}| + (-1)^{3+2}a_{3,2}|A_{3,2}| \\
&= -2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\
&= -2(36-42) + 5(9-21) - 8(6-12) \\
&= 12 - 60 + 48 = 0
\end{aligned}$$

Vale 0 como en el ejemplo anterior. Y como por la propiedad 3.6.13 el determinante es el mismo que el de la traspuesta podemos volver a aplicar la propiedad 3.4.4. Es decir, debería haber una relación de dependencia lineal entre los vectores fila de A:

$$\mathbf{f}_1 = (1,2,3),\ \mathbf{f}_2 = (4,5,6),\ \mathbf{f}_3 = (7,8,9).$$

Podemos fijarnos en que $\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1 = (3,3,3)$. Así podemos despejar y deducir la combinación lineal $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_3$ o equivalentemente la relación de dependencia lineal $\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 = \mathbf{0}$.

Nota. A la hora de calcular un determinante a mano mediante un desarrollo de Laplace es recomendable reflexionar sobre dos cuestiones:

1. **¿Existe alguna dependencia lineal en las filas o columnas de A?** Porque si la encontramos no haría falta hacer más: el determinante vale 0. Si no encontramos relaciones de manera fácil no quiere decir que los vectores sean linealmente independientes, puede ser que exista una relación de dependencia lineal complicada.

2. **¿Hay alguna fila o columna que evite hacer muchas operaciones?** Por ejemplo si hay alguna fila o columna que tenga muchos elementos nulos, esto ahorraría calcular el menor complementario asociado a cada elemento nulo.

La regla de Laplace no es la única ni la mejor forma de calcular determinantes. Existen muchos algoritmos, y como ante cualquier otro problema, hay que pensar antes de aplicar ciegamente un algoritmo, ya que pueden existir opciones mejores.

Por ejemplo, cuando una matriz muy grande es dispersa o *sparse* (casi todas sus entradas son nulas) se puede tener en cuenta y almacenarse en memoria de forma especial, aplicándole algoritmos de forma distinta. De esta manera se puede ahorrar mucho tiempo de computación, espacio de memoria, electricidad, etc. Las matrices dispersas están mucho más cerca de nosotros de lo que pensamos. Y es que la información (*el grafo*) de quién sigue a quién en una red social o la relación entre las búsquedas de distintos usuarios se puede almacenar en una de estas matrices. Uno de los casos más famosos es el algoritmo *page rank*. Sin algoritmos de este tipo las búsquedas en la web serían mucho más lentas de lo que estamos acostumbrados.

Empecemos por la regla de Sarrus, que es simplemente una forma mnemotécnica de calcular el determinante de una matriz 3×3. La ventaja de esta regla es que suele ser más fácil de recordar y calcular que el desarrollo por menores, pero solo sirve para el caso 3×3.

Corolario 3.7.6 (Regla de Sarrus)**.** Dada una matriz A 3×3, el determinante de A es

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - afh - bdk - ceg.$$

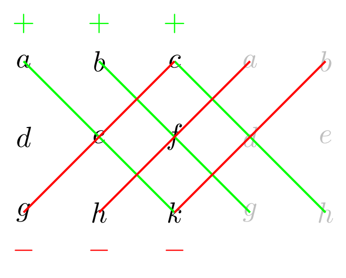


Figura 3.9: Regla de Sarrus de forma visual

Ejemplo 3.7.7. La regla de Sarrus **solamente** sirve para matrices 3×3. Las *falsas reglas de Sarrus* en matrices más grandes no funcionan. Es decir, *sumar las 4 diagonales positivas y restar las 4 diagonales negativas* de una matriz 4×4 no nos da el determinante. Calculemos una falsa regla de Sarrus

4×4:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 2^4 + 3^4 - 9 - 0 - 9 - 0 = 80.$$

Pero utilizando la regla de Laplace 3.7.2 combinada con la regla de Sarrus 3.7.6 nos da que el resultado real es:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -(1 + 12 - 9) + 2(8 - 6 - 6) - 3(27 + 4 - 3) \\ &= -4 - 8 - 84 = -96. \end{aligned}$$

¿Hay alguna fórmula que muestre el determinante explícitamente? Sí, la fórmula de de Leibniz nos dice exactamente todos los términos de un determinante en una única suma, sin menores o pasos intermedios. El problema que tiene es que en su versión general puede asustar a los estudiantes. Además, no nos dice nada que no sepamos, pero tiene la ventaja de representar todas las operaciones en una línea:

$$\det A = \det(a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} = \sum_{\sigma \in S_n} \left(s(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right).$$

Donde S_n es el conjunto de todas las permutaciones σ de n elementos y $s(\sigma)$ es el signo de la permutación ($s(\sigma) = (-1)^i$ según el número i de intercambios que haga). Un ejemplo de permutación $\sigma \in S_4$ se puede ver en la figura 3.7.5, que tiene signo $s(\sigma) = -1$ y está definida por

$$\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 4,\ \sigma(4) = 1.$$

El conjunto S_n está formado por $n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$ permutaciones. Por lo que cuando n es grande hay que realizar muchas sumas y multiplicaciones, y la fórmula de Leibniz no proporciona un método eficiente de cálculo de determinantes.

Mientras que la fórmula de Leibniz es una de las formas más costosas (coste de operaciones) de calcular un determinante, la siguiente es una manera de ahorrar operaciones: utilizar eliminación gaussiana. Y es que si aplicamos operaciones elementales (por filas o columnas), recordando cómo afecta al determinante, podemos reducirlo al caso de una matriz triangular superior (o inferior).

Propiedad 3.7.8. El determinante de una matriz triangular es la multiplicación de los elementos de su diagonal.

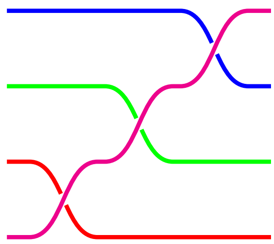


Figura 3.10: Ejemplo del cambio de filas si $i = 4$ (la fila 4 es la magenta).

Ejemplo 3.7.9. Veamos cómo se puede calcular de forma más rápida un determinante utilizando eliminación gaussiana. En el ejemplo 3.7.7 vimos que para matrices 4×4 la regla de Sarrus no aporta todos los sumandos del determinante: solo da 8 y debería haber $4! = 24$ según la fórmula de Leibniz.

Hagamos operaciones por filas, teniendo en cuenta que pueden alterar el valor del determinante y así llegar a una matriz triangular superior.

$$\begin{aligned}
\text{(cambiamos las filas 1 y 4)} \quad & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
(\mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3 - 2\mathbf{f}_1) \quad & = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
\text{(cambio de las filas 2 y 4)} \quad & = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} \\
(\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_3 + 6\mathbf{f}_1) \quad & = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} \\
(\mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_3) \quad & = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = -4 \cdot 24 = -96
\end{aligned}$$

De esta manera hemos tenido que hacer unas 10 multiplicaciones, mientras que con el desarrollo de Laplace hicimos unas 20 multiplicaciones. Además, en matrices $5{\times}5$ o mayores la diferencia es todavía mayor: resulta mucho más sencillo calcular determinantes ayudándonos de la eliminación gaussiana.

Capítulo 4

Conclusiones

Como conclusiones, este Trabajo Fin de Máster ha logrado cumplir con el objetivo de describir de manera detallada y fundamentada la metodología adecuada para explicar el determinante a una clase de 2º de Bachillerato tecnológico. A través de un enfoque que prioriza el razonamiento y la comprensión profunda de conceptos matemáticos, se ha diseñado una secuencia de actividades que moviliza la competencia matemática del alumnado de forma efectiva. La metodología propuesta no solo sigue las directrices de la nueva ley educativa, sino que también pretende ser innovadora y que al alumnado le resulte lo más natural y útil posible.

Se puede reflexionar sobre varios aspectos de los determinantes. Por un lado, suelen resultar complicados por la forma tan poco natural de introducirlos. Si surgen de un problema sencillo de comprender puede que se capte algo más la atención de la clase. Además, dado que se dan en 2º de Bachillerato, los determinantes resultan una herramienta de usar y tirar que no se interioriza y dará problemas en el futuro universitario de los estudiantes. Por esto se ha intentado contextualizar el determinante y sus propiedades como algo más natural. Se finaliza con una reflexión sobre los aspectos computacionales del cálculo de los determinantes, que vuelve a ligar los contenidos teóricos con el mundo real. Tratando estos contenidos mediante metodologías que den más protagonismo a la clase hará posible una mejora en el aprendizaje del determinante.

Hay que añadir que el análisis comparativo del currículo de Bachillerato actual con la legislación anterior y el curso anterior ha permitido contextualizar mejor los contenidos y objetivos educativos relacionados con los determinantes. Este enfoque proporciona una visión global que refuerza la relevancia y la aplicabilidad de la metodología propuesta.

En resumen, este trabajo no solo ofrece una forma innovadora de enseñar los determinantes, sino que también plantea una reflexión sobre la necesidad de una mayor coherencia entre las etapas educativas. La metodología aquí presentada es una respuesta a la demanda de preparar mejor a los estudiantes para el tránsito a la educación superior, asegurando un aprendizaje de calidad que trascienda la mera preparación para exámenes.

Legislación

Orden EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León, *núm. 86*, de 8/5/2015. Consejería de educación. `https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/orden-edu-363-2015-4-mayo-establece-curriculo-regula-implan.ficheros/549395-BOCYL-D-08052015-5.pdf`.

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, *núm. 82*, de 06/04/2022. `https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/04/05/243/con`.

Decreto 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el curr'iculo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León, *núm. 190*, de 30/9/2022. Consejería de educación. `https://bocyl.jcyl.es/boletines/2022/09/30/pdf/BOCYL-D-30092022-4.pdf`.

Referencias

Bǫcher, M. (1907). *Introduction to higher Algebra.* Dover Publications, Inc., New York.

Borgato, M. T. (2022). Lagrange's mathematical life in Berlin and Paris. A reappraisal. En *In foreign lands: the migration of scientists for political or economic reasons* (pp. 19–53). Birkhäuser/Springer, Cham. Descargado de `https://doi.org/10.1007/978-3-030-80249-3_2` doi: 10.1007/978-3-030-80249-3_2

Cayley, A. (1858). A Memoir on the Theory of Matrices. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, *148*, 17-37. Descargado de `https://doi.org/10.1098/rstl.1858.0002`

Chen, J.-P. J. (2018). A systematic treatment of linear algebra in 17th-century China. *College Math. J.*, *49*(3), 169–179. Descargado de `https://doi.org/10.1080/07468342.2018.1448670` doi: 10.1080/07468342.2018.1448670

de Witt, J. (2010). *Jan de Witt's Elementa curvarum linearum, liber secundus* (A. W. Grootendorst, J. Aarts, M. Bakker, y R. Erné, Eds.). Springer-Verlag London, Ltd., London. Descargado de `https://doi.org/10.1007/978-0-85729-142-4`

Dydak, J. (2023). *Unifying Linear Algebra.* Descargado de `arXiv:2306.01490`

Frobenius, G. (1877). Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *84*, 1-63. Descargado de `http://eudml.org/doc/148343`

Gauss, C. F. (1986). *Disquisitiones Arithmeticae.* Springer New York, NY. Descargado de `https://doi.org/10.1007/978-1-4939-7560-0`

Gavagna, V. (2010). Medieval heritage and new perspectives in Cardano's Practica arithmetice. *Boll. Stor. Sci. Mat.*, *30*(1), 61–80. Descargado de `http://opac.regesta-imperii.de/id/2031448`

Grattan-Guinness, I. (2017). *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences.* New York: Routledge.

Gray, J. (2018). Jordan's Traité. En *A History of Abstract Algebra: From algebraic equations to modern Algebra* (pp. 149–161). Cham: Springer International Publishing. Descargado de `https://doi.org/10.1007/978-3-319-94773-0_13`

Halmos, P. R. (1950). *Measure Theory*. Descargado de https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9440-2

Joffredo, T. (2019). Une analyse genetique de l'Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques de Gabriel Cramer (1750). *Rev. Histoire Math.*, *25*(2), 235–289. Descargado de https://doi.org/10.24033/rhm.226 doi: 10.24033/rhm.226

Knobloch, E. (1994). From Gauß to Weierstraß: Determinant Theory and its Historical Evaluations. En *The Intersection of History and Mathematics.* Birkhäuser Basel. Descargado de https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7521-9_5

Knobloch, E. (2013). Leibniz's theory of elimination and determinants. En *Seki, founder of modern mathematics in Japan* (Vol. 39, pp. 229–244). Springer, Tokyo. Descargado de https://doi.org/10.1007/978-4-431-54273-5_17 doi: 10.1007/978-4-431-54273-5_17

Lang, S. (2002). Matrices and linear maps. En *Algebra* (pp. 503–552). New York, NY: Springer. Descargado de https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0_13 doi: 10.1007/978-1-4613-0041-0_13

MacLaurin, C. (1748). *A treatise of algebra.* Millar and Nourse.

Merino González, L. M., y Santos Aláez, E. (2018). *Álgebra lineal con métodos elementales* (1ª ed.). Madrid: Paraninfo.

Mirsky, L. (1972). *An introduction to Linear Algebra.* Dover Publications, Inc., New York.

Morimoto, M. (2018). Some remarks on Volume 17 of the Taisei Sankei. En *The study of the history of mathematics 2016* (Vol. B69, pp. 109–124). Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto.