



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. de Matemática Aplicada

**LOS MATERIALES MANIPULATIVOS Y
LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN
SECUNDARIA OBLIGATORIA**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria
Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.
Especialidad de Matemáticas.**

Estudiante: Álvaro Gallego Díaz

Tutor: Víctor Gatón Bustillo

Valladolid, julio de 2024

ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN	5
1.1	MOTIVACIONES PERSONALES RECOGIDAS DURANTE EL MÁSTER	5
1.2	SITUACIONES DE APRENDIZAJE: ¿UNA MALDICIÓN O UNA OPORTUNIDAD?	6
1.3	ESTRUCTURA DEL TRABAJO	7
2	MARCOS DE REFERENCIA	9
2.1	MARCO LEGISLATIVO	9
2.2	MARCO TEÓRICO	10
2.3	MARCO METODOLÓGICO	12
2.4	MARCO SOCIAL	13
3	EL USO DE MATERIALES MANIPULATIVOS EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO	15
3.1	HISTORIA DE LOS MATERIALES MANIPULATIVOS	15
3.2	VENTAJAS E INCONVENIENTES DE LOS MATERIALES MANIPULATIVOS	17
3.3	MATERIALES MANIPULATIVOS PARA TRABAJAR EN SECUNDARIA	22
4	EL USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS COMO RECURSO DE APRENDIZAJE	24
4.1	LA FUNCIÓN DIDÁCTICA DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS	24
4.2	EL I CHING: EL PRIMER LIBRO BASADO EN EL SISTEMA BINARIO	25
4.2.1	RESUMEN DE LA HISTORIA DEL I CHING	25
4.2.2	LAS MATEMÁTICAS DEL I CHING	26
4.3	LAS FRACCIONES DEL OJO DE HORUS	32
4.4	EL CÓDIGO BRAILE	33
5	SITUACIÓN DE APRENDIZAJE PARA 2º DE ESO: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD A TRAVÉS DE LOS ELEMENTOS DEL LIBRO I CHING	35
5.1	TÍTULO	35
5.2	CONTEXTUALIZACIÓN	35
5.3	FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	36
5.3.1	OBJETIVOS DE ETAPA	36
5.3.2	COMPETENCIAS CLAVE Y DESCRIPTORES OPERATIVOS	37
5.3.3	COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	38
5.3.4	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	39
5.3.5	CONTENIDOS	42
5.3.6	ELEMENTOS TRANSVERSALES	43
5.4	METODOLOGÍA	44
5.4.1	MÉTODOS: ESTILOS, ESTRATEGIAS Y TÉCNICAS	44
5.4.2	ORGANIZACIÓN DEL ALUMNADO Y AGRUPAMIENTOS	44
5.4.3	CRONOGRAMA Y ORGANIZACIÓN DEL TIEMPO	45
5.4.4	ORGANIZACIÓN DEL ESPACIO	46
5.4.5	MATERIALES Y RECURSOS	46
5.5	PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDADES Y TAREAS	47
5.5.1	ACTIVIDAD 1-LAS TRES MONEDAS	47

5.5.2	ACTIVIDAD 2-LAS CUATRO LETRAS CHINAS	51
5.5.3	ACTIVIDAD 3-LOS TRIGRAMAS Y HEXAGRAMAS DEL I CHING.....	54
5.5.4	ACTIVIDAD 4-MATEMÁTICAS CHINAS	59
5.6	ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES	62
5.7	PROCESO DE EVALUACIÓN	63
5.8	VALORACIÓN DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE	64
6	OTRAS PROPUESTAS DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE PARA 1º Y 3º DE ESO.....	65
6.1	PROPUESTA DE SITUACIÓN DE APRENDIZAJE PARA 1º DE ESO: LAS FRACCIONES Y EL OJO DE HORUS	65
6.1.1	TÍTULO	65
6.1.2	CONTEXTUALIZACIÓN	65
6.1.3	FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	66
6.1.4	METODOLOGÍA.....	69
6.1.5	PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDADES Y TAREAS.....	70
6.1.6	ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES.....	74
6.1.7	PROCESO DE EVALUACIÓN	75
6.1.8	VALORACIÓN DE A SITUACIÓN DE APRENDIZAJE.....	75
6.2	PROPUESTA DE SITUACIÓN DE APRENDIZAJE PARA 3º DE ESO: EL CÓDIGO BINARIO Y LA ACCESIBILIDAD UNIVERSAL.....	75
6.2.1	TÍTULO	75
6.2.2	CONTEXTUALIZACIÓN	75
6.2.3	FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR	76
6.2.4	METODOLOGÍA.....	78
6.2.5	PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDADES Y TAREAS.....	79
6.2.6	ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES.....	84
6.2.7	PROCESO DE EVALUACIÓN	84
6.2.8	VALORACIÓN DE A SITUACIÓN DE APRENDIZAJE.....	84
7	CONCLUSIONES	85
8	BIBLIOGRAFÍA	88
9	ÍNDICE DE FIGURAS.....	90

1.1 MOTIVACIONES PERSONALES RECOGIDAS DURANTE EL MÁSTER

Este Trabajo Final de Máster (TFM), además de una puesta en escena de muchos de los conocimientos y recursos adquiridos durante el Máster, pretende ser también una síntesis de algunas de las reflexiones personales más representativas recogidas a lo largo de esta formación, tanto de las surgidas en el transcurso de las distintas asignaturas cursadas como aquellas recogidas durante la experiencia vivencial de las prácticas externas.

A lo largo de las distintas asignaturas se ha podido apreciar que existe, en los últimos años, un panorama educativo en España en constante cambio, motivado principalmente por un acelerado cambio social y por las modas en auge de innovadores movimientos educativos en edades tempranas (Montessori, Waldorf, Home Schooling, Khan Academy, etc.). Otro motor de estos cambios ha sido la entrada en vigor de la ley educativa LOMLOE (Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, 2020), que también ha agitado y puesto en duda los modelos clásicos de aprendizaje en el aula. Estos hechos también han traído consigo nuevos planteamientos en la docencia de las Matemáticas, materia de la que se podría decir, por unanimidad social y atemporal, que siempre ha resultado especialmente difícil a los estudiantes de Secundaria por la complejidad y abstracción de sus conceptos y por el razonamiento que exige su comprensión en esa etapa madurativa del alumnado.

Durante este Máster, ha sido posible recibir una gran cantidad de información acerca de innovadores recursos para el aprendizaje de las Matemáticas, los cuales han ido apareciendo para enriquecer enormemente las posibilidades y caminos en el aprendizaje de esta disciplina. Es por ello que, desde el convencimiento de que la innovación es un buen camino a tomar ante estos cambios y necesidades sociales, durante el Máster se ha intentado poner en práctica estos recursos, aplicándolos en los trabajos realizados en las diferentes asignaturas y llevándolos a cabo con atrevimientos en algunas tareas durante el Prácticum en la fase de intervención.

Particularmente interesantes han sido dos de los recursos que se han conocido: la posibilidad de usar los materiales manipulativos en el aula, por un lado, y por otro, descubrir que el propio conocimiento de la Historia de las Matemáticas puede ayudar exponencialmente en muchos de los casos a la comprensión de los nuevos conceptos matemáticos en las etapas de Secundaria y Bachillerato. Es por todo ello que este trabajo versa principalmente sobre la aplicación de estos dos recursos educativos en las propuestas didácticas. Es importante apuntar que, aun siendo elementos con los que se cuenta desde hace mucho tiempo y sobre los que han reflexionado numerosos autores en la Historia de la didáctica de la Matemática, estos recursos se han venido usando poco en nuestras aulas, y su aplicación puede ser vital en los nuevos enfoques de aprendizaje para responder a las nuevas necesidades de la sociedad.

Además de estos recursos, y en medio de la vorágine en la que la mayor parte de los docentes se han visto envueltos estos dos últimos años con las llamadas situaciones de aprendizaje exigidas por la LOMLOE, el uso de problemas y retos matemáticos vinculados a las nuevas necesidades de nuestra sociedad y en consonancia con la vida cotidiana y los intereses de los estudiantes, parece poder ser una fuente inagotable de ideas, tanto para el diseño de estas situaciones de aprendizaje, como para enfocar el interés del alumnado y conseguir el éxito en el aprendizaje significativo de las Matemáticas.

1.2 SITUACIONES DE APRENDIZAJE: ¿UNA MALDICIÓN O UNA OPORTUNIDAD?

Durante las asignaturas y conferencias del Máster se ha podido apreciar cómo muchos de los agentes educativos se han mostrado reticentes a los cambios introducidos en la nueva ley educativa de la LOMLOE, que como viene siendo habitual en este país, se ha redactado sin su participación activa y sin su asesoramiento. En el ámbito docente, este descontento ha estado focalizado principalmente por un nuevo cambio del sistema de evaluación a una evaluación por competencias, y la incorporación de las llamadas situaciones de aprendizaje, en las que los alumnos/as tienen que poder poner de manifiesto esas competencias a través de un complejo entramado de elementos curriculares.

Tal y como se ha podido corroborar en la comunidad educativa del mismo centro en el cual se ha realizado el Prácticum, muchos de los docentes en Castilla y León no comparten el planteamiento de la nueva ley, y han decidido simplificar su planificación anual adaptando las antiguas unidades didácticas previas de la LOMCE y su antiguo sistema de evaluación a un nuevo formato para cumplir con la nueva Ley de cara a la inspección educativa, sin plantearse los nuevos horizontes educativos que se proponen.

Al margen de este interesante debate político y educativo, que no es objeto de este trabajo, sí se ha podido observar que, la mayor parte de los docentes de la etapa de Secundaria y Bachillerato, sí conocen o empiezan a conocer numerosos recursos innovadores para la docencia de las Matemáticas e intentan aplicarlos cuando les es posible. El uso de los materiales manipulativos, las metodologías basadas en proyectos y problemas, o métodos de aprendizaje como el método Singapur, entre otras muchas metodologías, empiezan a usarse tanto en centros privados y concertados como en algunos centros públicos como mejor camino a seguir. Los principales problemas de la aplicación de algunos de estos recursos innovadores parecen radicar, entre otros factores, en que éstos demandan demasiado tiempo dentro del planteamiento habitual en el aula, y de que no suelen ir acompañados de un sistema de evaluación adecuado, por lo que los estudiantes no parecen mostrar demasiado interés en todo aquello que no entre en la prueba escrita que marcará su puntuación. Realizando una prueba escrita, el docente asegura un documento firme de cara a justificar las evaluaciones al centro, a las familias, a la inspección educativa, y claro está, al propio estudiante. Pero con esta visión acotada se pierde la gran oportunidad de usar las llamadas situaciones de aprendizaje e incorporar otros recursos, así como de disponer de retos interesantes vinculados a la sociedad actual y a los Objetivos de Desarrollo Sostenible en las que los estudiantes puedan poner en marcha todas las competencias que van adquiriendo, e incluso, durante el propio desarrollo de la situación de aprendizaje, mejorar dichas competencias.

No se debe olvidar nunca que la evaluación es también un recurso educativo y que, por tanto, también es una oportunidad para desarrollar el aprendizaje. Un ejemplo claro de ello es la metodología del “portafolio”, siendo éste un sistema que permite la evaluación por parte del profesor/ay la autoevaluación por parte del estudiante de forma paralela, haciendo partícipe a este último en su progreso en el aprendizaje.

Además, en estas situaciones de aprendizaje tiene cabida plantear retos o problemas que demanden el interés de la mayor parte de los estudiantes, eligiendo temas de su vida diaria y de su entorno social, y situaciones que además de responder a los nuevos objetivos del milenio aseguren la puesta en práctica de las competencias Matemáticas que se van adquiriendo, buscando siempre los mejores caminos para ser evaluadas. La metodología de aprendizaje a través del razonamiento y resolución de problemas es capital para el aprendizaje en las Matemáticas, por lo que el adecuado diseño de estas situaciones de aprendizaje es una gran oportunidad para conseguir un aprendizaje significativo frente al aprendizaje memorístico más tradicional.

Son muchas las razones de que el foco principal de este trabajo sean los materiales manipulativos en Matemáticas. Obviamente, estos materiales son un recurso más de los docentes y no aseguran en ningún caso el éxito en la docencia, pero sí puede justificarse, en base al desarrollo de las teorías de aprendizaje y los

nuevos planteamientos educativos, que son un elemento clave a incorporar para que los estudiantes alcancen un aprendizaje significativo y un aprendizaje a largo plazo en los distintos contenidos de las Matemáticas. Como ya se ha indicado, a este recurso principal para diseñar este trabajo, se ha incorporado también la idea de usar la Historia de las Matemáticas como temática y trasfondo del contenido por tres razones: Por un lado, es una parte cultural, fundamental en el conocimiento de cualquier materia, por otro, suscita el interés del alumnado y, por último, ayuda a estructurar el conocimiento.

1.3 ESTRUCTURA DEL TRABAJO

Dejando a un lado esta introducción y los apartados correspondientes a la bibliografía y al índice de figuras de este documento, este trabajo se ha organizado en las siguientes partes principales.

La primera de ellas, que comprende el apartado número dos, corresponde con todos los referentes teóricos generales de este trabajo.

En el punto 2.1 se revisa el marco legislativo, a través de un recorrido de los documentos de la ley educativa vigente, que incluye el Currículo de la materia de Matemáticas en los cursos de la ESO y algunas orientaciones de la ley acerca de algunos aspectos como la metodología, la evaluación o el diseño de las situaciones de aprendizaje.

En el punto 2.2, correspondiente al marco teórico, se han anotado algunas referencias al constructor de aprendizaje significativo, que es el objetivo principal que se busca con la aplicación de las metodologías y recursos elegidos.

En el punto 2.3, se desglosan algunas referencias a las metodologías usadas en el trabajo para el diseño de las situaciones de aprendizaje: en primer lugar, el uso de los materiales manipulativos, en segundo lugar, la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico y, en tercer lugar y con menor importancia en el planteamiento, el uso del aprendizaje matemático a través de la resolución de problemas.

En el último apartado de este bloque, el punto 2.4, se han incluido algunas referencias y apuntes sobre el marco actual social y temporal de los estudiantes como un aspecto muy importante a tener en cuenta en el diseño y adaptabilidad de las propuestas de aprendizaje.

La segunda parte, correspondiente a los puntos 3 y 4, conforma una pequeña síntesis de los dos recursos principales usados en el trabajo: los materiales manipulativos y la Historia de las Matemáticas.

En el punto 3 se desarrolla un pequeño resumen de la historia de los materiales manipulativos en la docencia de las Matemáticas. Además, se recogen algunas de las ventajas e inconvenientes del uso de este recurso didáctico y se enumeran algunos de los materiales más usados en la etapa de Secundaria. En el apartado de ventajas e inconvenientes se ha incluido un pequeño resumen de las anotaciones y reflexiones recogidas en la puesta en práctica del uso de este tipo de materiales didácticos durante la fase de intervención en el Prácticum.

Por otro lado, en el punto 4, se hace referencia al uso de la Historia de las Matemáticas como recurso educativo en el aula, y se desarrollan más detalladamente dos de las referencias históricas usadas en el trabajo: La primera referencia corresponde al libro tradicional chino de carácter oracular que versa sobre el sistema binario, el I Ching, que es la referencia de la situación de aprendizaje para el curso de 2º de ESO desarrollada en este trabajo; la segunda referencia la constituyen las fracciones egipcias del llamado Ojo de Horus, elemento simbólico perteneciente a la cultura egipcia de la antigüedad que se ha usado para la propuesta de situación de aprendizaje de 1º de ESO; y por último, se ha incluido una referencia al código Braille usado también como referencia en la propuesta de situación de aprendizaje para el curso de 3º de ESO.

La tercera parte, y parte principal del trabajo, comprende los puntos 5 y 6, en los cuales, y ya de una forma propositiva, se ha diseñado una situación de aprendizaje y se han esbozado otras dos, usando principalmente los materiales manipulativos y la Historia de las Matemáticas como recursos didácticos principales en ellas.

En el punto 5 se ha desarrollado una situación de aprendizaje completa para el curso de 2º de ESO y para los contenidos del Currículo de los bloques de estadística y probabilidad a través de los elementos del libro *I Ching*, que en este caso se usa como foco cultural y secuencial. La situación de aprendizaje se ha desarrollado siguiendo las orientaciones del *DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre (DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación Secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León - Portal de Educación de la Junta de Castilla y León, s. f.)*. Esta propuesta pretende también plantear un cambio en el sistema de evaluación tradicional y poner el énfasis a través de la evaluación por competencias en todas las actividades de la situación de aprendizaje, tanto en las tareas de trabajo individual como en aquellas de trabajo en parejas y pequeños grupos, aplicando también de esta forma las orientaciones de la ley.

En el punto 6 se han incluido dos pequeñas propuestas de situaciones de aprendizaje: una diseñada para el curso de 1º de ESO, orientada al bloque de contenido de las fracciones y usando el elemento de la Historia de las Matemáticas del Ojo de Horus de la cultura egipcia; y otra, destinada al curso de 3º de ESO, para los contenidos de sistema binario y pensamiento computacional usando en la aplicación de estos contenidos el sistema Braille, y relacionándolos éstos con la accesibilidad universal como un elemento destacado dentro de los Objetivos de Desarrollo Sostenible del nuevo milenio. Aunque solo se ha esbozado un esquema inicial para cada una de estas situaciones de aprendizaje, se han seguido para su desarrollo, aunque resumidos y sintetizados, los mismos apartados que en el caso de la situación anterior del punto 5.

En la última parte correspondiente al punto 7, se desarrollan las conclusiones y reflexiones finales más significativas del trabajo, incluyendo además una reflexión acerca de la puesta en práctica de los recursos manipulativos y la Historia de las Matemáticas que se realizó durante la fase de intervención del Prácticum de este Máster.

2.1 MARCO LEGISLATIVO

Las situaciones de aprendizaje propuestas en la etapa de Secundaria para los centros educativos de la Comunidad de Castilla y León, tienen como marco legislativo general en el ámbito nacional la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre (Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, 2020). Como concreción de ésta ley, en la etapa de Secundaria Obligatoria en la comunidad de Castilla y León, el DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre (*DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación Secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León - Portal de Educación de la Junta de Castilla y León*, s. f.), incluye todas las diligencias para aplicar todos los elementos curriculares en esta comunidad autónoma.

Las situaciones de aprendizaje se han diseñado siguiendo las indicaciones de estos documentos mencionados, siendo de especial interés para el desarrollo y la planificación de éstas los documentos Anexos al decreto. En los Anexos IA, IB y IC del Decreto se explican las competencias clave, el perfil de salida con los objetivos y los distintos descriptores de las competencias y la correspondencia entre estos objetivos y descriptores. En consonancia a este perfil de salida, en la situación de aprendizaje desarrollada en este trabajo, se han marcado todos los objetivos y descriptores, marcando en una tabla similar a la que aparece en el Decreto, lo correspondiente a aplicar en esta propuesta didáctica.

En los Anexos IIA, IIB y IIC del Decreto se reflejan los principios metodológicos de la etapa, las orientaciones para la evaluación y unas orientaciones para el diseño de situaciones de aprendizaje, respectivamente. Este último documento de orientaciones para su diseño ha resultado especialmente interesante, debido a la gran incertidumbre que provocó la ley en su primer año de aplicación. Para formalizar las situaciones de aprendizaje del trabajo se ha seguido rigurosamente el índice que incluye este documento. En este índice se reflejan los contenidos mínimos que debe tener una situación de aprendizaje así como la secuencia que se debe seguir en su desarrollo. A raíz de las dudas surgidas inicialmente acerca de cómo abordar su diseño completo, todas las comunidades autónomas elaboraron documentos como guía sobre cómo planificarlas y ejemplos prácticos de ayuda a los docentes. La comunidad de Castilla y León dispone en su web de numerosos recursos a este respecto, y en este trabajo también se ha consultado como referencia el documento de apoyo de “Diseño de situaciones de aprendizaje con TICA” elaborado por la profesora de Educación Secundaria, Bárbara González Fernández. En cuanto a los otros dos documentos del Anexo II del Decreto, también muy útiles en la programación, describen de forma general los principios de las metodologías a usar y las orientaciones para el sistema de evaluación. En cuanto a la metodología, cabe destacar en estas orientaciones, de la inclusión del uso de materiales manipulativos y de las TICS, así como el uso de agrupamientos para el trabajo en distintas disposiciones, alternando el trabajo individual, en pareja, en pequeños grupos y en gran grupo. Respecto a las orientaciones de evaluación, el documento describe cómo usar los criterios de evaluación descritos en el currículo de cada Materia, así como las indicaciones del qué, el cómo y el cuándo se evalúa. El documento dispone que existan diversos indicadores que sean capaces de adaptarse a la diversidad del alumnado. Todas estas indicaciones y orientaciones se han tenido cuenta en el diseño de la propuesta de este trabajo.

En el Anexo III del Decreto, se describe el currículo de cada materia de la educación Secundaria Obligatoria en Castilla y León. En cada materia se desarrolla el perfil de salida con las competencias clave, las competencias específicas y sus descriptores, y los contenidos de cada curso con sus criterios de evaluación correspondientes. Los contenidos tratados en la situación de aprendizaje son algunos de los indicados en el curso de 2º de ESO, junto con sus competencias específicas y criterios de evaluación en base al perfil de

salida. En las otras dos situaciones de aprendizaje propuestas no se ha profundizado en los elementos curriculares, pero se han desarrollado contenidos de los cursos 1º y 3º de ESO.

El Anexo IV del Decreto lo configuran una serie de tablas de relaciones competenciales que ponen en conexión, en cada una de las materias, las competencias claves y sus descriptores con las competencias específicas. En el caso de la situación de aprendizaje desarrollada en este trabajo para 1º de ESO, es de especial interés en la tabla de la materia de Matemáticas, la competencia STEM y la competencia CPSAA.

Finalmente, el Anexo V, marca los periodos semanales de las distintas materias y cursos, correspondiendo para los cursos de 1º, 2º y 3º de ESO para la materia de Matemáticas un total de cuatro sesiones semanales.

2.2 MARCO TEÓRICO

El marco teórico principal del trabajo se corresponde con el constructor conocido como “aprendizaje significativo”. La elección de los materiales manipulativos como recurso principal para el diseño de las actividades de la propuesta didáctica, y la Historia de las Matemáticas como recurso metodológico secundario, tienen como fin último potenciar el aprendizaje significativo y el aprendizaje a largo plazo de los contenidos del Currículo a tratar, y elevar, durante el proceso de aprendizaje, las competencias adquiridas por los estudiantes.

El psicólogo y pedagogo J. Bruner desarrolló una teoría de aprendizaje constructivista denominada aprendizaje por descubrimiento (Bruner, 1987). Esta teoría, basada en el aspecto receptivo del aprendizaje, sostiene que el estudiante adquiere el conocimiento por sí mismo y que, por tanto, la labor del profesorado no es explicar los contenidos, sino proporcionar el material adecuado para despertar la curiosidad del alumnado, y guiarles en ese proceso exploratorio.

La teoría inicial del aprendizaje significativo, también de corte constructivista, fue propuesta por el psicólogo y pedagogo David Ausubel. Según su teoría, tanto en la vida académica como en la vida cotidiana de los estudiantes, el aprendizaje se produce cuando los nuevos conocimientos adquiridos por éstos se relacionan con los que ya poseen previamente (Ausubel, 2002). Para que el aprendizaje sea significativo deben cumplirse tres condiciones: que el material de aprendizaje sea coherente y organizado, que este material tenga una cierta relación con el conocimiento previo del estudiante, y que exista interés por el aprendizaje por parte del alumnado. Como consecuencia de esta visión, en la teoría de Ausubel, tiene también gran importancia el aprendizaje verbal y el aprendizaje simbólico para alcanzar esa significatividad.

En una visión más actual del término “aprendizaje significativo”, podemos encontrar enfoques más humanistas y dinámicos, y más vinculados a la idea de aprendizaje como proceso frente a la idea de aprendizaje como resultado acabado. Uno de estos enfoques extiende el término de “aprendizaje significativo” al de “aprendizaje significativo crítico”, el cual supone poner en valor el cuestionamiento y la implicación del que aprende, en una actitud reflexiva que conlleva que el estudiante se plantee las preguntas del qué aprender, el porqué aprenderlo y el para qué aprenderlo, tanto en el inicio del proceso de aprendizaje como en el trascurso del mismo (Moreira, 2005).

Desde estas teorías de aprendizaje, se ha intentado aplicaren la propuesta de este trabajo algunas de estas condiciones para que los/as alumnos/as puedan alcanzar ese aprendizaje significativo. Por ello se ha prestado especial atención a la importancia de elegir adecuadamente los materiales y recursos de aprendizaje, buscando el interés y la curiosidad de los estudiantes. Por otro lado, y desde la consciencia de que los contenidos del Currículo elegidos en la situación de aprendizaje diseñada para el curso de 2º de ESO son mayormente novedosos para los/as alumnos/as que empiezan en este curso el bloque de probabilidad y

estadística, se ha intentado realizar una secuencia de trabajo sumativa y constructiva del conocimiento, buscando siempre conectar los nuevos contenidos con contenidos previos, e ir consolidando en cada actividad los contenidos trabajados en actividades anteriores.

En el ámbito de las Matemáticas, otro marco teórico importante a destacar en este trabajo, es la propuesta del matemático húngaro Zoltan P. Dienes, a través de sus principios y etapas de aprendizaje, principalmente diseñadas para la etapa de educación infantil (Dienes, 1997). Sus principios se enumeran de la siguiente forma: principio dinámico, principio de construcción, principio de variabilidad perceptiva y principio de la variabilidad matemática. En ellos se describe la importancia del proceso completo de aprendizaje de la Matemática, que abarca desde la experimentación con los materiales manipulativos y el juego, pasando por la variabilidad perceptiva y matemática para entender el concepto, hasta llegar por último a la abstracción del pensamiento y al simbolismo matemático. Si bien, esta estructura del proceso de aprendizaje está orientada a las edades tempranas previas a la etapa de Secundaria, es importante trasladar este proceso a la etapa de Secundaria, especialmente en los primeros cursos, en la que dentro de un mismo grupo de alumnos/as, se suelen tener estudiantes en distintos momentos de su proceso madurativo. Además de esta razón, la abstracción de los conceptos matemáticos aumenta exponencialmente en cada curso, siendo muy útil tener en cuenta los principios y secuencias de aprendizaje mencionados. Además de aplicar los materiales manipulativos, se ha intentado incorporar en la situación de aprendizaje, la máxima variabilidad perceptiva y matemática, y se ha puesto énfasis en crear un paralelismo entre la experimentación y manipulación de los materiales y la traslación de los conceptos matemáticos al lenguaje algebraico.

En conexión a las teorías anteriores de aprendizaje, es acertado también destacar la pirámide de la educación matemática creada por Ángel Alsina (Alsina i Pastells, 2010). Debajo, en la Figura 1, podemos ver una Pirámide realizada en base a la figura original de Alsina:



FIGURA 1 – Pirámide realizada en base a la Pirámide de la Educación Matemática de Alsina

Fuente: https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Piramide-de-la-educacion-matematica_fig1_374685444

Licencia: Creative Commons

En esta pirámide se han sintetizado los distintos recursos disponibles para el aprendizaje de las Matemáticas, proponiendo la frecuencia de uso más recomendable para los mismos. Se puede observar en la figura, que el mayor peso lo tiene el uso de las situaciones correspondientes a la vida cotidiana, en el nivel inferior con mayor peso en el tiempo de dedicación, y a continuación los recursos manipulativos, en el siguiente nivel superior. Ya más arriba de la figura, aparece el nivel de los recursos literarios, en los que se podría incluir algunos de los recursos de la Historia de las Matemáticas.

Estas últimas referencias aquí apuntadas se enlazan con el siguiente apartado del marco metodológico, aunque es importante indicar que la situación de aprendizaje desarrollada en este trabajo sigue estas líneas teóricas expuestas en su diseño, y que, los materiales manipulativos, tendrán un peso importante en el proceso planteado, buscando siempre favorecer el aprendizaje significativo de los estudiantes.

2.3 MARCO METODOLÓGICO

Este trabajo se basa principalmente en la aplicación, dentro de la propuesta de la situación de aprendizaje, de los materiales manipulativos como uno de los recursos potenciales en el aprendizaje de las Matemáticas. En torno al uso de estos materiales, en este trabajo se han propuesto varias metodologías y diversidad de agrupamientos para el trabajo en el aula, además de proponer alguna tarea para realizar en casa por parte de los/as alumnos/as para reforzar el trabajo individual. Unido a este recurso, este trabajo propone también el uso de la Historia de las Matemáticas como marco cultural y matemático de las actividades, buscando además de esta forma un interés real por parte de los estudiantes para realizar las actividades, además de estructurar los contenidos. Además de estos dos recursos principales, se han utilizado otras metodologías complementarias: el uso de la metodología a través de problemas para potenciar el razonamiento matemático y el uso de las TICS y la comunicación como referentes actuales en los nuevos planteamientos educativos. A todo ello se une la pretensión continua de buscar, a través de la alternancia del trabajo individual y el trabajo en equipo, el fomento del desarrollo socioemocional de los/as alumnos/as.

El concepto de material manipulativo puede englobarse dentro del concepto más general de recurso didáctico, en este caso referente a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Desde esta visión, Díaz Godino clasifica los recursos didácticos en dos grupos, las “ayudas al estudio” y los “materiales manipulativos”, y define éstos últimos como “Objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como gráficos, palabras específicas, sistemas de signos etc., que funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático.” (Díaz Godino et al., 2003, p.128). Este autor presenta algunas reflexiones interesantes sobre los materiales manipulativos, y destaca algunas precauciones en su uso, para no confundir los estudiantes, aclarándoles en todo momento que los objetos tangibles que les presentamos no representan los conceptos matemáticos, sino que son solo un medio para entender dichos conceptos a través de la manipulación y la experimentación.

Por otro lado, y en referencia a la Historia de las Matemáticas, es posible observar que en libros de texto que se diseñan actualmente para la etapa de Secundaria, independientemente de la editorial, se suele incluir con mayor o menor abundancia referencias a la Historia de las Matemáticas y a personajes matemáticos relevantes, e incluso en algunos casos, incluyen actividades vinculadas a estas referencias. A pesar de ello, y ya sea por falta de tiempo, interés o desconocimiento, los docentes no suelen usar estos recursos en su programación. Para Nolla (Ramon & Nolla, 2006), los conceptos matemáticos en la etapa de Secundaria se presentan a los estudiantes generalmente de una forma acabada, obviando que el desarrollo de las Matemáticas en la Historia se ha producido para dar respuesta a problemas de la propia Matemática o de otras disciplinas. Esta reflexión abre una gran oportunidad a usar la Historia de las Matemáticas como un recurso de aprendizaje para enmarcar los conceptos matemáticos y entender cómo y por qué se ha llegado hasta ellos. Aunque en este trabajo se haya usado la Historia de las Matemáticas como un marco cultural y una fuente de ideas para las propias actividades, este recurso puede abrir también un sinfín de medios en muchos momentos de necesidad a lo largo del curso, desde situaciones en las que sea necesario referenciar un bloque de contenido matemático para ayudar a comprender los propios conceptos, hasta situaciones donde los estudiantes puedan también beneficiarse del marco cultural de las Matemáticas, como pueden ser trabajos de investigación y monográficos de personajes y movimientos, a través de medios de difusión y cultura como libros, películas y podcast, o para trabajar algunos objetivos concretos durante el curso, como por ejemplo, el empoderamiento de la mujer en la Historia de la humanidad.

Por último, el uso de la metodología a través de la resolución de problemas, se presume fundamental para el fomento del razonamiento y del pensamiento abstracto en todos los contenidos matemáticos y en todos los niveles de la enseñanza de las Matemáticas. Es importante proponer tareas de diferentes niveles de dificultad para potenciar el positivismo y la confianza en los estudiantes y proponer también problemas con diferentes pasos donde éstos sean capaces de usar sus conocimientos previos, afianzar los nuevos conocimientos que

van adquiriendo y poner en relación distintos contenidos matemáticos, activando su capacidad de conexión de los contenidos. Los autores Smith y Stein reflejan cuatro niveles diferentes de demanda cognitiva para valorar la complejidad del razonamiento requerido para resolver una tarea o problema, siendo importante trabajar en el aula todos los niveles (Smith & Stein, 1998). En cuanto a la resolución de problemas, existen muchos métodos que pueden servir de base para ayudar a los estudiantes en el proceso de razonamiento y resolución. Como ejemplos podemos mencionar el método de Pólya que consta de cuatro etapas: entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás (Polya, 2004), el método de Mason-Burton-Stace y que consta de tres fases: abordaje, ataque y revisión (Mason et al., 1982) o el método de Miguel de Guzmán a través de la búsqueda de estrategias diversas (Guzmán, 2006). En la situación de aprendizaje se ha usado la metodología basada en problemas, tanto en el trabajo individual, como en el de equipo, a través de parejas y pequeños grupos, para potenciar en todos los casos el razonamiento y el aprendizaje significativo frente al aprendizaje memorístico.

2.4 MARCO SOCIAL

Se ha querido reflejar un último marco a destacar, en el planteamiento del trabajo, por su importancia en la actualidad ante el planteamiento de cualquier propuesta docente: el marco social. En esta sociedad del consumo, de la sobre información, de la inmediatez, de las redes sociales y del constante cambio social, parece que cada año escolar se presenta como un nuevo y complejo reto para los docentes de Secundaria.

Desde el momento en que se prolongó la escolaridad obligatoria en España, el profesorado de Secundaria comenzó una etapa con la premisa de tener que controlar a un alumnado con gran diversidad. Muchos de los/as alumnos/as no desean estudiar y se niegan a permanecer en el aula por muy diversos motivos. A esta circunstancia, se ha unido una notable pérdida de la autoridad de los profesores en los últimos años frente al ya necesario auge de los derechos de niños y adolescentes. En este escenario, la sociedad ha dejado solas a las familias y a la comunidad educativa en la difícil tarea de conducir y educar a niños y jóvenes (Garreta i Bochaca & Llevot Calvet, 2007).

Ante la gran dificultad de mantener a todos los/as alumnos/as dentro de esta etapa educativa obligatoria, la comunidad educativa ha elaborado numerosos recursos a través de planes, programas, y disponiendo a profesionales especializados, buscando la inclusión educativa de cada alumno/a. Ejemplos de estos recursos son las medidas y planes de atención a la diversidad en todos sus elementos y grados, los planes de convivencia en los centros educativos, los planes de acción tutorial en los grupos de aula, los planes de orientación académica y profesional y los programas de apoyo y refuerzo educativo, entre otros. Además, la programación educativa se ha ido renovando con los nuevos tiempos a través de la introducción de las TICs, de los idiomas, de las redes sociales y de la digitalización, de los nuevos recursos educativos que se elaboran desde los centros de investigación educativa ante los cambios sociales y de la interacción educativa a través de redes, proyectos cooperativos e intercambios internacionales de estudiantes.

A pesar de todos estos recursos, la labor docente es realmente complicada por todos los requisitos que impone la ley educativa, desde las exigencias de aprendizaje y de atención a la diversidad en grupos de estudiantes que suelen llegar al ratio máximo pasando por complejos sistemas de evaluación y elementos curriculares, y, en otros casos, por el gran volumen de contenidos del Currículo en algunas materias. Ante todo este universo, en muchos de los casos, es imposible mantener el interés deseado por el profesor de algunos de los alumnos/as durante el curso, hasta el punto de que en muchos cursos de la ESO, ya sea por las características de su edad madurativa o porque sus intereses se alejan de las materias, los estudiantes crean una tendencia destructiva en el aula que se extiende a sus compañeros/as difícil de invertir para el profesorado.

La llamada generación Z en España, compuesta por las personas nacidas entre 1997 y 2012, ha sido la primera generación digital, es decir, la primera en crecer usando las nuevas tecnologías e internet. Este uso masivo de los medios digitales como el móvil, las redes sociales, los videojuegos, etc., parece haber traído consigo una merma alarmante en la capacidad de atención de estos jóvenes (*La epidemia silenciosa*, 2023).

Este aspecto acontece en las clases de los alumnos/as que están cursando estos últimos años la etapa de Secundaria, y ha podido ser corroborado en la fase del Prácticum en los primeros cursos de ESO. En los cursos de 1º y 2º de ESO, los estudiantes tienen un periodo de atención máximo al docente de unos diez minutos, a partir del cual y de forma general, empiezan a distraerse si no se cambia de dinámica en la clase. Esta circunstancia, lejos de ser juzgada como negativa, sí que pone en jaque la tradicional metodología de la clase magistral en esta etapa educativa. Parece que de esta manera se justifica más aún, en estos tiempos, el uso de metodologías activas y también el jerarquizar y estructurar de forma adecuada los contenidos en las clases más teóricas que se pretenden transmitir a los estudiantes, usando otros medios como esquemas, mapas conceptuales o marcando distintos momentos para que ellos sean capaces de priorizar y sintetizar las partes más importantes frente a lo superfluo o secundario.

Tal y como se indicaba en el marco legislativo, las nuevas orientaciones metodológicas de la ley educativa siguen una buena línea frente a este perfil de estudiantes, potenciando los trabajos en distintos agrupamientos, a través del uso de diversidad de recursos didácticos y metodologías activas y buscando siempre relacionar los contenidos didácticos con la vida cotidiana de los/as alumnos/as y sus intereses reales.

Un último aspecto a destacar es la importancia de la adaptación de los docentes a los cambios de la sociedad y al conocimiento por parte de éstos, de los nuevos recursos digitales y de las TICS. La dinámica social tiende hacia el uso masivo de los medios digitales y, hoy en día, es fundamental para cualquier persona, saber manejarse en las redes digitales para poder funcionar de la mejor manera posible en el día a día de nuestra sociedad. Acciones habituales como los trámites bancarios, la declaración de la renta anual, el pago de los impuestos municipales y/o cualquier otro trámite administrativo, por no hablar de compras de todo tipo de productos y contratar transportes y viajes, se realizan ya únicamente a través de internet. Por otro lado, la mayor parte de los trabajos en el mundo laboral, requieren ya unos conocimientos mínimos de ofimática y, lo que es más importante, las relaciones sociales se han transformado hasta el punto de ser necesarios los móviles para poder acceder diariamente a los chats para mantener la vida social con compañeros/as de trabajo, amigos y familiares. Por ello es importante la formación continua de los docentes y que éstos velen en todo momento por innovar su propuesta educativa para incluir estos medios, sin olvidar otros complementarios de los cuales tampoco deben prescindir, así como enseñar también a los estudiantes a hacer el uso más adecuado y seguro de los medios digitales.

Estas herramientas digitales, muchas veces valoradas de forma negativa por algunos docentes, han sido claves en algunos casos, como durante el periodo de afección de la pandemia del COVID-19, en la que se convirtieron en una alternativa real para no cancelar el curso académico (Bansak & Starr, 2021). En otras situaciones también comienzan a ser muy útiles, como en los casos de alumnos/as que no pueden asistir al centro educativo por enfermedad y/o hospitalización y necesitan más medios de refuerzo, aunque dispongan de un profesor o profesora de apoyo, o en los casos de alumnos/as con altas capacidades que necesitan ser estimulados por otros medios. En todos estos casos, los medios digitales se convierten en un camino para posibilitar el trabajo autónomo del estudiante. Otros valores añadidos son la capacidad de estos medios para permitir la comunicación educativa y la difusión de los proyectos educativos, que cada vez cobran más importancia en los nuevos modelos sociales y en la globalización.

3.1 HISTORIA DE LOS MATERIALES MANIPULATIVOS

Desde los inicios de nuestra civilización, se han usado diversos materiales para la realización de operaciones matemáticas, en su mayoría a raíz de las necesidades de resolver problemas prácticos vinculados a las actividades humanas. Un ejemplo de esta aplicación es la cuerda de los doce nudos que usaban los agrimensores egipcios para medir los campos debido a las inundaciones periódicas del Nilo, y que les permitía realizar ángulos de 90 grados a través del triángulo de Pitágoras compuesto por lados de longitudes 3, 4 y 5, siendo el valor de la unidad la correspondiente a la medida entre nudo y nudo en la cuerda.

A continuación, en la Figura 2, se puede observar una reproducción de Charles Wilkinson (1897-1986) de una pintura egipcia de la tumba del escriba Menna, datada hacia el 1.400-1.352 a.C., donde se observa la cuerda de los doce nudos portada por algunos operarios:



FIGURA 2 – Harvest Scenes, Tomb of Menna, Charles Wilkinson
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Rope_stretching.jpg
Licencia: Creative Commons

En otros casos, las Matemáticas y algunos materiales se han vinculado a propósitos religiosos o filosóficos, como es el caso del libro I Ching, traducido al castellano como “Libro de las Mutaciones”, perteneciente a los orígenes de la cultura china cuyos primeros textos están datados hacia el 1.200 a.C., y que fue escrito con un propósito oracular a través de la lectura de sus elementos. Este libro se ha elegido como referencia para diseñar la situación de aprendizaje de 2º de ESO y será explicado con mayor profundidad el apartado 4.2 de este documento.

Un material manipulativo a destacar desde las civilizaciones más antiguas es el ábaco, que permite establecer una correspondencia entre la escritura de números y sus operaciones. Este elemento, que aparece ya en el inicio de diversas culturas, puede tener su origen en el periodo de 1.000 a.C. y el 500 a.C., siendo muy probable que sus primeras versiones fueran a través de líneas dibujadas en el suelo y piedras.

En el siglo XVII, el teólogo, filósofo y pedagogo Jan Amós Comenius, considerado el padre de la pedagogía, tenía el convencimiento de que la educación tenía un papel primordial en el desarrollo de las personas. En su obra “Orbis Sensualium Pictus”, que puede considerarse como el primer material didáctico, planteó que una de las claves del aprendizaje es presentar directamente la realidad a través de imágenes y modelos preparados previamente para la enseñanza.

Ya en el siglo XVIII, el pedagogo suizo Pestalozzi, propuso un nuevo aprendizaje de la aritmética a través de tres tablas basadas en la descomposición de un cuadrado en partes iguales. También, el pedagogo alemán Friedrich Fröbel, precursor del concepto de jardín de infancia, introdujo el juego como recurso educativo en el aprendizaje de niños y niñas de edades tempranas.

Otros autores, como Jean Itard (1774-1836) y Édouard Séguin (1812-1880), se interesaron en sus respectivos campos de estudio por los estudiantes con dificultades de aprendizaje, aplicando en sus métodos, materiales didácticos basados en los sentidos.

Frente a otras teorías que apostaban por la facultad intelectual como punto de partida del proceso, algunos autores entienden que el aprendizaje debe iniciarse en lo concreto y desde la respuesta de los sentidos. Uno de estos autores, Decroly (1871-1932), no apuesta por materiales artificiales, sino que basa su planteamiento del aprendizaje en la observación analítica de la realidad por parte del estudiante. En contraposición a éste, María Montessori propone el uso de materiales artificiales diseñados para el aprendizaje como punto de partida del proceso (Montessori, 1994).

El psicólogo Jean Piaget (1896-1980), quien observó el crecimiento de los niños y estudió su desarrollo cognitivo, escribiendo numerosos estudios de psicología infantil, entiende el material como medio de aprendizaje, destacó sobre el proceso de aprendizaje que “es la acción de la que procede el pensamiento en su mecanismo esencial, constituido por el sistema de operaciones lógicas y matemáticas” (Chamorro, 2005).

El matemático español Puig Adam (1900-1960), que fue uno de los precursores de la didáctica de las Matemáticas en España, centró sus esfuerzos en modernizar la docencia para acercar esta disciplina a la vida cotidiana de los estudiantes.

En el siglo XX, muchos autores investigaron el juego como actividad propia de la educación, así como medio de aprendizaje de las Matemáticas. Junto al juego aparece también la idea de los materiales manipulativos como material didáctico para el desarrollo de los conocimientos matemáticos a través de la manipulación y la experimentación.

En 2008, Alsina y Planas, plantean que el aprendizaje mediante el juego no es sólo una manera más divertida de aprender, sino que es más eficaz, aunque no tenga por qué ser la más rápida. Otro punto de vista de su planteamiento es la autonomía que se les concede a los estudiantes, interviniendo únicamente el docente en momentos puntuales y claves del proceso.

Por último, en este pequeño resumen histórico, se destaca por su importancia a las figuras ya anotadas de la médica italiana María Montessori y el matemático español Ángel Alsina.

Montessori sostiene que el aprendizaje de los conceptos se desarrolla por medio de la experimentación de los objetos y de recursos manipulativos y en su libro “La mente absorbente” escribe: “El desarrollo de la habilidad de la mano se halla ligado en el hombre al desarrollo de la inteligencia y, si consideramos la Historia, al desarrollo de la civilización” (Montessori Pierson, 1949).

Alsina en su libro “Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años” escribe: “La manipulación es un paso necesario e indispensable para la adquisición de competencias matemáticas. Pero no es la manipulación lo más importante sino la acción mental que ésta estimula cuando los niños tienen la posibilidad de tener los objetos y los distintos materiales en sus manos y utilizan el juego como recurso de aprendizaje. Sólo después de un trabajo lúdico-manipulativo pueden usarse progresivamente recursos más elaborados de representación matemática, como la simulación virtual o el trabajo escrito con lápiz y papel” (Hernández Domínguez & Ángel Alsina, 2005).

3.2 VENTAJAS E INCONVENIENTES DE LOS MATERIALES MANIPULATIVOS

En la actualidad, en la educación de los niños y niñas en edades tempranas, el uso de materiales manipulativos es generalizado. En su manual “Ideas generales sobre mi Método. Manual práctico”, María Montessori indicaba algunos beneficios y desventajas sobre el uso de los materiales manipulativos. Como beneficios, destaca el papel activo del niño en el aprendizaje, el fomento del aprendizaje personalizado para cada alumno y la oportunidad del desarrollo espontáneo de las funciones cognitivas. En cuanto a las desventajas, apunta a que hay posibilidad de saltarse otros aprendizajes, la limitación del desarrollo personal en otros entornos y la contradicción entre la libertad del niño y la autoridad del profesor.

Esta reflexión invita a tener en cuenta, como en cualquier otro recurso de aprendizaje, las ventajas y los inconvenientes del uso de materiales manipulativos en el aula de Matemáticas en la etapa de Secundaria.

Jiménez y Espinosa en 2018, en un artículo de avance de una investigación llevada a cabo para valorar el éxito del material manipulativo como fortalecimiento del pensamiento matemático, enumeran las siguientes ventajas y desventajas observando la reacción de los estudiantes después de su uso:

“-Ventajas:

- El uso de material manipulativo favorece la conceptualización de contenidos matemáticos.
- Son muy estimulantes para los estudiantes, ojalá si son de colores vivos.
- Favorece el trabajo en grupo.
- Permite mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

-Desventajas:

- No hay suficiente capacitación en el manejo de material manipulativo.
- No se cuenta con suficiente material para todos los estudiantes, por lo que se dificulta emplearlo en el desarrollo de las actividades.
- Algunos estudiantes terminan “jugando” con el material, sin usarlo para lo que realmente se necesita.
- La planeación, elaboración y ejecución de actividades con material demanda mucho tiempo.
- Para trabajar en aula multigrado, mientras unos estudiantes de un grado usan el material, los estudiantes de los demás grados se distraen con el mismo material.”

(Jiménez & Espinosa, 2019)

Además, añaden unas estrategias interesantes para solventar las desventajas, como son la formación al profesorado, asegurar la cantidad de material o trabajar en grupos, asegurar su buen uso, organizar a educadores para elaborar el material necesario y ofrecer una orientación clara a los estudiantes sobre el material, que les permita tener las mismas oportunidades de usarlo.

Desde otro de vista más teórico de la formación del profesorado de Secundaria, se pueden exponer algunas pautas generales a tener en cuenta en el uso de estos materiales. En primer lugar hay que hablar del principio de prudencia a la hora de usar los materiales didácticos, tomando conciencia, a la hora de decidirse a usarlo en el aula, de que no es suficiente con que el material sea atractivo o divertido, sino que es necesaria una planificación previa exhaustiva a través de la bibliografía y de la documentación para adaptar los materiales a los propósitos didácticos, además de comenzar siempre a utilizar este recurso usando materiales que ya hayan sido testados.

Es adecuado también remarcar, aunque de forma muy sintetizada, algunos consejos y precauciones para el uso de los materiales manipulables. Algunos a tener en cuenta son los siguientes:

- Fomentar la discusión.
- Que el material sea para el alumno.
- Disponer de una guía de la actividad.
- Disponer de una evaluación de la actividad.
- Fomentar la responsabilidad de su cuidado por parte de los estudiantes.
- Remarcar que son una herramienta y no un fin en sí mismos.
- No olvidar el formalismo al plasmar las conclusiones.

En cuanto a las precauciones se proponen las siguientes:

- Evitar la excesiva complejidad.
- Asegurar su uso por parte de los estudiantes.
- Asegurar la cantidad necesaria ya que algunos materiales necesitan trabajarse de forma individual.
- Evitar la inadecuación del material por contenido matemático o edad.
- De nuevo, tener en cuenta que solo es una herramienta más.

Como conclusión, se puede destacar que el uso de materiales manipulativos es un recurso más para el aprendizaje de las matemáticas, y que, como tal, debe ser aplicado en los momentos más adecuados y para algunos contenidos propicios dentro de la programación, teniendo claro que son siempre una herramienta más para alcanzar los objetivos didácticos en cada caso. La planificación, las referencias y la experiencia en el uso de este recurso, parecen fundamentales para asegurar el éxito de su implementación. Tal y como se describe a continuación, en las conclusiones de la puesta en práctica de algunos materiales durante la intervención de las prácticas externas del Máster, parece también que es vital, al igual que en cualquier acción docente, analizar previamente las características del grupo al que se destine el material para prever las posibles dificultades y obstáculos en el aula.

Es posible también que este sea un recurso poco desarrollado en los últimos años en el aula por los docentes de Secundaria, y al igual que cualquier metodología o recurso, lo ideal sería que no se use solo de forma aislada, sino que su práctica se realice de forma más habitual y generalizada, y pueda ayudar a cada docente a facilitar su incorporación a la programación y que los departamentos en todos los centros puedan contar con materiales suficientes para ello.

Experiencia personal acerca del uso de materiales manipulativos durante la fase de intervención del Prácticum en los cursos de 1º, 3º y 4º de ESO

En este punto se pretende exponer algunas de las reflexiones y conclusiones tras poner en práctica en algunas actividades el uso de materiales manipulativos durante la fase de intervención del Prácticum. El éxito de las intervenciones fue desigual, e influyó notablemente el comportamiento habitual de los estudiantes en los grupos destinatarios. Se procede a explicar resumidamente las intervenciones y los materiales utilizados, así como las conclusiones en cada intervención.

Curso de 1º de ESO – Contenido: Decimales – Material manipulativo: Bloques 10

Planificación

Se realizó la misma actividad en dos grupos distintos de 1º de ESO. Los/as alumnos/as comenzaban el tema de decimales, después de haber finalizado el tema de fracciones, el cual resultó realmente difícil para la mayoría de ellos/as obteniendo calificaciones muy bajas en su evaluación. Se dedicó una sesión para introducir el tema de los decimales, repasando la base 10 del sistema decimal a través de los múltiplos, con ayuda del material manipulativo de los bloques. Posteriormente se continuó con los submúltiplos de base 10 y las divisiones entre números, relacionando todo el contenido con las fracciones intentando afianzar también el contenido del bloque anterior. En uno de los grupos, ya de forma previa a la actividad, la cuarta parte de

los estudiantes ya no hacía nada en clase y habían abandonado la asignatura. En el otro grupo, los estudiantes tenían habitualmente un comportamiento general bastante malo que obligaba a separar a los estudiantes unos de los otros. La actividad con los materiales manipulativos, además de formar parte del proceso de aprendizaje, pretendía volver a enganchar al curso a aquellos estudiantes más desmotivados a través del interés de trabajar con un material manipulativo y cambiando la dinámica habitual al trabajo en pequeños grupos.

Desarrollo:

Para la actividad, se realizó un material de bloques 10 en cartulina de gran tamaño, ante la imposibilidad de disponer de material individual para cada estudiante o grupo. Se optó por realizar los diferentes bloques en distintos colores para mayor claridad. A los estudiantes se les agrupó en equipos de tres, sentándose en grupos alrededor de la mesa del material, y disponiendo cada grupo del mismo material de bloques en pequeñas cartulinas para realizar las operaciones y manipulación por grupos. Alternativamente se ponía en común cada operación saliendo uno de los estudiantes a manipular los grandes bloques y escribiendo en la pizarra la formalización matemática de las acciones manipulativas.

Abajo, en la Figura 3, puede observarse una fotografía del material de bloques 10, elaborado para la actividad, con los bloques tridimensionales para trabajar en gran grupo, y las cartulinas para trabajar en pequeños grupos:



FIGURA 3 – Material manipulativo de bloques 10. Bloques tridimensionales y cartulinas.

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones:

El comportamiento de los estudiantes fue desigual, siendo uno de los grupos mucho más receptivo y participativo que el otro. Esto reflejó el comportamiento también desigual de los grupos diariamente, por lo que se concluye que en grupos en los que existe mal comportamiento general es difícil realizar este tipo de actividades en grupo. La idea inicial de trabajar en grupos pretendía también romper dinámicas destructivas por parte de algunos/as alumnos/as, pero solo se consiguió parcialmente.

A pesar de haber planificado la actividad y contando con las referencias de otros docentes, hubo momentos en los que era difícil mantener el control de la sesión, quizá por la falta de experiencia y porque era la primera vez que se realizaba esta actividad. En ocasiones era difícil alternar el trabajo manipulativo con las anotaciones en la pizarra sin que los estudiantes perdieran el hilo.

Parece que lo ideal para esta actividad, sería que cada estudiante o al menos cada grupo hubieran tenido un material tridimensional o haber realizado la actividad con otro tipo de recurso equivalente como podría ser un recurso web con una aplicación de bloques 10 en la que cada alumno/a dispusiera de un ordenador o tablet.

Algunos de los docentes del departamento que dan clases a los de 1º de ESO, comentaron que las pocas veces que usan materiales manipulativos, los usan menos de 15 minutos al inicio o al final de la sesión porque los estudiantes se descontrolan trabajando en grupos y/o con materiales.

Curso de 3º de ESO – Contenido: Movimientos en el plano – Material manipulativo: Geoplanos

Planificación

Los/as alumnos/as comenzaban el tema de movimientos en el plano. Se pretendía dedicar dos sesiones para explicar a través del uso de geoplanos y gomas de colores los vectores en la primera sesión, y los movimientos de traslación, simetría y giro en la segunda. Se trataba de un grupo en el que la mayor parte de los estudiantes habían perdido el interés por la asignatura y se esperaba motivarles con este tema de geometría y las actividades y el material manipulativo propuestos.

Desarrollo:

Se colocó a los estudiantes por parejas y se repartió un geoplano a cada pareja, junto con algunas gomas de colores. No necesitaban apuntar nada, ya que los contenidos se les habían facilitado mediante unos apuntes resumidos y claros. Se trataba de que fueran practicando, colocando las gomas en los geoplanos a través de las indicaciones y ejemplos del profesor en prácticas, para ir trabajando los distintos conceptos del tema. La primera sesión fue un desastre porque no se tomaron la actividad en serio, por lo que después de hablar con la profesora y tutora de prácticas, hubo que recoger el material y cambiar de planteamiento para la sesión siguiente.

Conclusiones:

El comportamiento de los estudiantes fue malo, hasta el punto de tener que cancelar el uso del material manipulativo. En este caso parece que no era el recurso adecuado para el grupo destinatario.

Es cierto que en general los estudiantes no habían trabajado en equipos y el hecho de agruparse para ellos en ese momento madurativo, puede significar posibilidad de desconectar y hablar con sus compañeros/as. Cuando se realiza una actividad fuera de la dinámica habitual, parece existir un riesgo de que fracase, y más aún en ciertos grupos en los que los estudiantes no participan.

Curso de 4º de ESO – Contenido: Cuerpos geométricos: volúmenes y superficies – Material manipulativo: Construcción de esculturas mediante cuerpos geométricos

Planificación

Los/as alumnos/as terminaban el tema de volúmenes y superficies de cuerpos geométricos. Por falta de tiempo en cursos anteriores, era la primera vez que se abordaba el contenido de geometría en tres dimensiones. Se pretendía dedicar dos sesiones para que realizaran una escultura neoplasticista con varios cuerpos geométricos, realizando sus desarrollos con papeles y materiales reutilizados y calculando y escribiendo en la escultura el volumen y la superficie de los cuerpos geométricos que la componían. De esta manera se pretendía trabajar la capacidad espacial y que conocieran los métodos y fórmulas de cálculo de superficies y volúmenes a través de su desarrollo y construcción. Se trataba de un grupo de alumnos/as con un comportamiento siempre ejemplar, con buena participación e implicación.

Desarrollo:

En el final de la sesión previa, se les pidió que se colocaran por parejas para explicarles la actividad que se iba a realizar y que pensarán por equipos el diseño y los cuerpos geométricos a utilizar, ya que con la escultura tenían que transmitir un pensamiento o sentimiento. En la siguiente sesión trajeron el material y les dio tiempo a realizar las esculturas, desarrollando los cuerpos geométricos y pegándolos. También hubo tiempo, aunque escaso, para que pudieran exponerlas al resto de sus compañeros/as, explicando su significado. Pero por falta de tiempo no fue posible realizar una sesión para que calcularan los volúmenes y tareas, como estaba previsto inicialmente.

A continuación, en la Figura 4, puede observarse el resultado de las esculturas de dos de los equipos, expresando a través de los volúmenes, la desigualdad social y el trabajo en equipo respectivamente:



FIGURA 4 – Esculturas realizadas por equipos de alumnos/as de 3º de ESO
Fuente: Elaboración propia con fotografías propias de los trabajos realizados.

Conclusiones:

El comportamiento de los estudiantes fue muy bueno, y la actividad, a pesar de no poder ser terminada según estaba planificada, fue un éxito.

El objetivo era que los estudiantes desarrollaran su capacidad espacial a través de la realización de la realización del desarrollo de los volúmenes, lo cual se consiguió. Además, se aprovechó para trabajar ligeramente el desarrollo emocional y fue sorprendente la creatividad y buenas ideas que mostraron para diseñar las esculturas.

Una reflexión de la tutora de las prácticas, fue que este tipo de actividades estaban bien, pero que en general para los docentes son más difíciles de evaluar que una prueba escrita.

Desde otro punto de vista, en la planificación de la actividad, se barajó la idea de crear una situación de aprendizaje completa, extendiendo la idea de realizar la escultura como un proyecto empresarial, en la que podría incluirse distintas actividades con materiales y precios diversos, temporalización, gastos y beneficios, etc., y realizando las esculturas en un tamaño mayor para exponerlas en el centro educativo. De esta forma podrían llegar a trabajarse varios bloques de contenido del Currículo, realizando la situación de aprendizaje de forma continua en paralelo a los contenidos, o en el final del curso como resumen y síntesis.

3.3 MATERIALES MANIPULATIVOS PARA TRABAJAR EN SECUNDARIA

Son muchos los materiales manipulativos que pueden usarse en el aula en las distintas etapas educativas. Muchos de ellos, como ya se ha indicado anteriormente, se usan en la etapa de primaria para el aprendizaje de las Matemáticas. El salto a la etapa de Secundaria supone en muchos casos un gran cambio en el uso de estos los materiales para los estudiantes, ya que los docentes de los cursos de ESO han venido usando poco o nada estos materiales en las últimas décadas. Los motivos de su poco uso han sido diversos: el poco tiempo en el curso disponible para todos los contenidos que incluye el Currículo, el desconocimiento de estos materiales por parte de los docentes de Secundaria al tratarse de profesionales de otras disciplinas ajenas a la educación, o la dificultad de incluirlos en la programación por las distintas dificultades que estos plantean si no se trabajan de forma habitual.

Afortunadamente, esta situación está cambiando, y las nuevas metodologías de aprendizaje, como el Método Singapur, están fomentando el uso de estos materiales. Muchos centros están comenzando a poner en valor este recurso en su proyecto educativo. En algunos centros públicos de Castilla y León se está llevando a cabo como experimento piloto el Plan para el Desarrollo del Razonamiento Matemático en Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad de Castilla y León (*ORDEN EDU/919/2021, de 19 de julio, por la que se regula el Plan para el Desarrollo del Razonamiento Matemático en Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad de Castilla y León - Portal de Educación de la Junta de Castilla y León, 2021*) que incluye, entre otros muchos recursos innovadores, el uso de los materiales manipulativos. Actualmente, empiezan a existir centros de exposición y préstamo de estos materiales como el EMMA, Espacio Matemático de Madrid (*Museo de matemáticas en Madrid, s. f.*)

Desde otro enfoque, a través del mundo digital y las TICS, cabe decir que ya existen muchas webs y recursos gratuitos que trasladan muchos de los materiales manipulativos tangibles a modelos virtuales, que facilitan enormemente su uso a través de ordenadores, tablets y móviles. Si bien es cierto que el proceso de experimentación es diferente, ya que no existe manipulación real de los objetos, estas nuevas posibilidades abren un mundo nuevo de recursos que, junto a nuevas metodologías como la gamificación o programas con fines educativos como Geogebra, hacen que el panorama en la educación matemática contemple ya los medios digitales como recursos indispensables.

A continuación, se enumeran algunos de los materiales manipulativos más usados para los contenidos de la etapa de Secundaria y los contenidos matemáticos asociados a cada material:

- **Tablas de fracciones:** fracciones.
- **Bloques de base 10:** sistema decimal.
- **Bloques de base 2:** sistema binario.
- **Regletas de Cuisenaire:** números, operaciones numéricas, fracciones, geometría.
- **Regletas:** números, operaciones numéricas, fracciones, geometría.
- **Policubos:** números, operaciones numéricas, fracciones, geometría.
- **Balanzas algebraicas:** sistemas de ecuaciones.
- **Tanmgram y puzles:** geometría plana.
- **Cuerpos geométricos:** geometría en tres dimensiones.
- **Poliedros con aristas y bolas:** geometría en tres dimensiones.
- **Polydron:** geometría en tres dimensiones.
- **Media esfera, cono y cilindro de agua:** cálculo de volúmenes.
- **Cono de Apolonio:** cónicas.
- **Geoplanos:** geometría plana, gráficas de funciones, movimientos en el plano.
- **Geoespacios:** geometría analítica, geometría en tres dimensiones.

- **Pajifiguri:** geometría plana, geometría en tres dimensiones.
- **Papiroflexia:** contenidos matemáticos diversos.
- **Teselas:** movimientos en el plano, teselados, mosaicos.
- **Libro de espejos:** geometría plana, movimientos en el plano, teselados, mosaicos.
- **Monedas y dados:** probabilidad y estadística.
- **Máquina de Galton:** probabilidad y estadística.
- **Calculadora:** operaciones numéricas, comprobaciones.

Abajo, en la Figura 5, puede observarse las fotografías de algunos materiales manipulativos que se encuentran en el laboratorio de la Facultad de Educación y Trabajo Social de la Universidad de Valladolid y que pueden ser usados en la etapa de Secundaria:

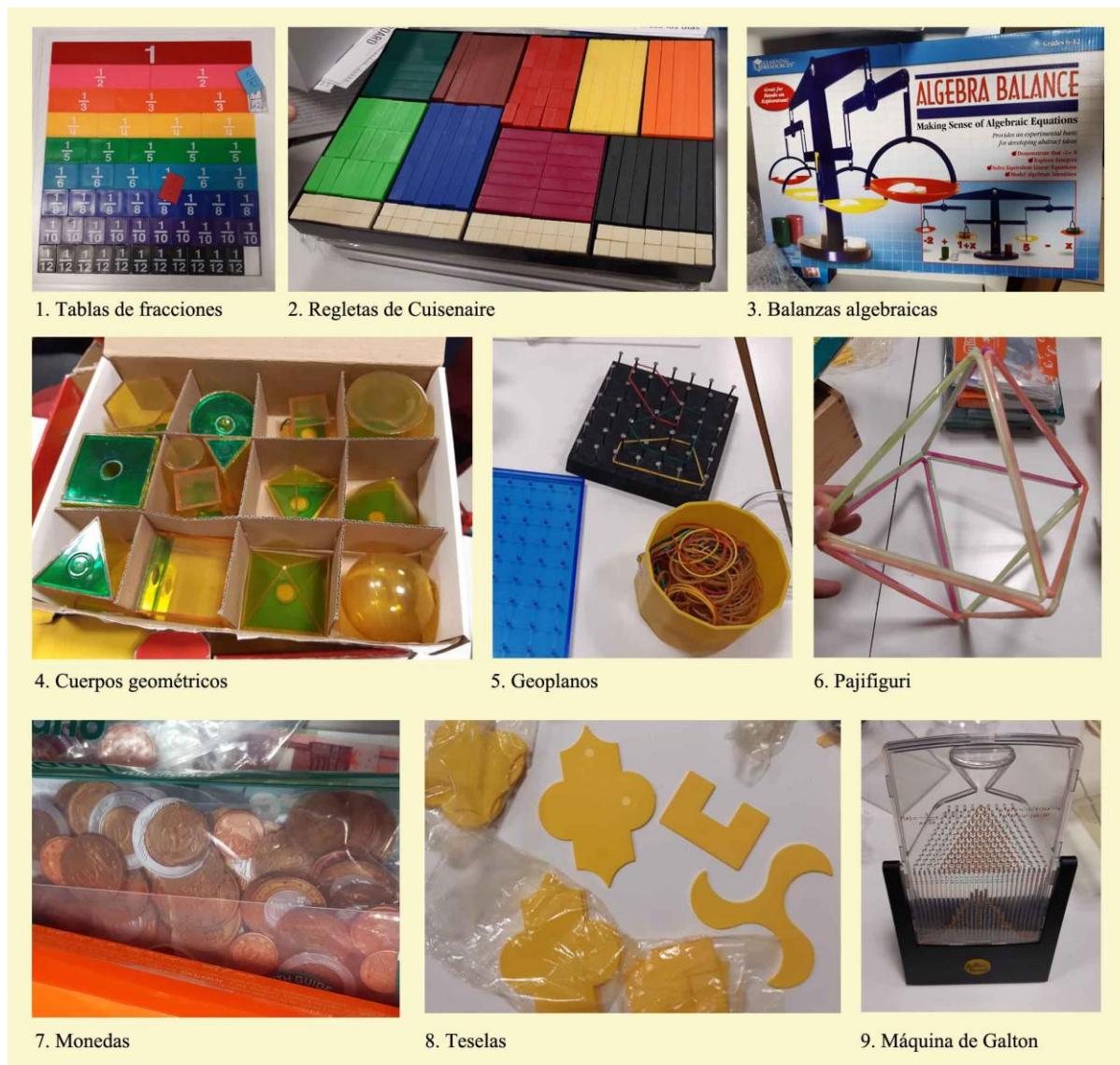


FIGURA 5– Materiales manipulativos del laboratorio de la FEyTS de la Universidad de Valladolid

Fuente: Elaboración propia con fotografías propias realizadas en el taller de la asignatura de Didáctica de la Matemática del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas en la Especialidad de Matemáticas.

4.1 LA FUNCIÓN DIDÁCTICA DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

La Historia de las Matemáticas puede tener una función didáctica dentro del aprendizaje desde varios enfoques: como instrumento de comprensión de los contenidos matemáticos, como fuente de inspiración, autoformación y orientación en la actividad docente, y como legado histórico que permite enriquecer la enseñanza de la materia y su integración con el resto de saberes científicos, artísticos y humanísticos que constituyen la Cultura (González Urbaneja, 2004).

Se dice en muchos ámbitos de la vida que es necesario conocer el pasado para comprender el presente y poder planificar el futuro. En cualquier trabajo de investigación, el primer paso es conocer todo el conocimiento que se ha producido sobre el tema a investigar, y así poder planificar adecuadamente la investigación, enriqueciéndose con el conocimiento que ya existe y planteándose las preguntas adecuadas para el fin buscado. Esta reflexión nos ayuda en el proceso de aprendizaje para proyectarnos hacia delante en nuestra formación, y adquirir habilidades para saber buscar y encontrar los conocimientos previos que necesitamos. En la actualidad, esta búsqueda cobra gran importancia con los medios digitales e internet, donde es importante conocer las herramientas adecuadas de búsqueda, y saber discernir entre las distintas fuentes de conocimiento e información, eligiendo aquellas fiables y más representativas del conocimiento.

Además de este planteamiento general de acceso al conocimiento disponible para el aprendizaje, son varias las razones para justificar el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico, y son también diversos los caminos en los que esta herramienta puede ayudar en la labor docente.

En primer lugar, hay que indicar que la Historia de las Matemáticas ayuda a conocer el origen de los conceptos matemáticos que en muchas ocasiones se exponen a los estudiantes de una forma acabada y perfecta, sin referencia alguna. El conocer los aspectos históricos como son el por qué se llega a esos conceptos, qué problemas se pretendían resolver, el marco social y cultural de ese momento histórico, los personajes y sus inquietudes, los lenguajes y anotaciones, etc., ayudan a entender el paso de las intuiciones o ideas a los conceptos y teorías matemáticas. En su texto sobre la Historia de las Matemáticas, Kline (1908-1992) expone que en los cursos docentes habituales no se muestran los conflictos y las frustraciones del camino matemático hasta poder construir una estructura importante, y, cómo el conocer estas dificultades, puede ayudar a cualquier principiante en la investigación (Kline, 1992).

En segundo lugar, a través de su historia se pretende poner en valor la Matemática, no solo como ciencia, sino como arte y como técnica. El matemático L. Santaló, en su obra “La matemática: una filosofía y una técnica”, apunta a la encomiable tarea de desentrañar de una forma fascinante la esencia de la Matemática en todas sus percepciones (Santaló & Pagès, 1994). Algunos ejemplos de la importancia de las Matemáticas la encontramos dentro de las distintas disciplinas de la Historia del arte, como son la pintura, la escultura y la arquitectura, así como en su aplicación dentro otras disciplinas de carácter técnico como son la ingeniería y la física, entre otras muchas. En muchos de los contenidos del Currículo de Secundaria y Bachillerato es posible ayudarse de algunas referencias históricas para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, en el caso del bloque de geometría de movimientos en el plano de 3º de ESO, es oportuno destacar los mosaicos de la Alhambra de Granada, o la obra pictórica de Maurits Cornelis Escher (1898-1972) a raíz de visitar éste ese monumento y conocer estos elementos geométricos. Estas referencias pueden resultar motivadoras y alentadoras en el aprendizaje, especialmente para los/as alumnos/as a los que les resulta más difícil esta materia o para aquellos que no tienen un interés particular en la misma. En estos casos, en los que es posible usar estas referencias, es importante tener en cuenta la transversalidad de algunos contenidos con otras asignaturas en el mismo curso y coordinar el aprendizaje con los docentes de otros departamentos.

En tercer lugar, y en favor de un aprendizaje crítico y abierto, es importante citar aquí que, frente a la idea la Matemática como un todo que se ha desarrollado linealmente a lo largo de la Historia, nutriéndose de los avances matemáticos a lo largo del tiempo, algunos autores, como el filósofo e Historiador alemán Oswald Spengler (1880-1936), hablan de que cada época y cada cultura tienen su propia Matemática y que, por lo tanto, hay tantas Matemáticas como culturas. Este enfoque, en contraposición a la idea de la Matemática como una doctrina universal e intemporal, vincula la Matemática a una cultura y época determinadas.

En cuarto lugar, y ya desde una concepción más moderna, es posible hablar de la importancia de la difusión de las Matemáticas en la sociedad. Parte de esta difusión la constituyen todos los medios, tanto físicos como digitales, que son capaces de hacer llegar el conocimiento matemático a todos los/as ciudadanos/as. Muchos de estos materiales de difusión, ya sean estos libros, artículos, noticias, webs, charlas, congresos, exposiciones, vídeos...etc., versan en muchos de los casos sobre algún tema de la Historia de la Matemática como parte principal como marco temporal del objeto de difusión. Además, a la velocidad que avanza hoy el mundo, cualquier documento o material que se elabora se convierte pronto en parte de la Historia, hasta el punto que es a veces difícil marcar una línea temporal que marque el punto de actualidad en muchos de los temas. Hoy en día, el uso de la Historia de la Matemática en la difusión de esta disciplina parece ser fundamental.

En último lugar, y no menos importante, la Historia de la Matemática, al igual que en el resto de disciplinas, es un valor cultural en sí misma, y así está contemplado en la ley educativa. Aunque en otras asignaturas se haga referencia a personajes históricos vinculados a las Matemáticas, parece que es deber de los docentes de esta materia asumir la responsabilidad de transmitir unos saberes mínimos de cultura general de la Matemática, tanto de los propios contenidos matemáticos, como de su Historia y de sus personajes más representativos.

El uso de la Historia de la Matemática como recurso didáctico parece no ser fácil por varios motivos. Por un lado, es necesario seleccionar qué saberes de la Historia se pretende transmitir a los estudiantes, y por otro lado, hay que interpretar ese pasado con los instrumentos actuales de nuestra visión sociocultural, nuestro lenguaje y nuestra notación y terminología matemática actuales. A pesar de estos obstáculos, la Historia de las Matemáticas puede ser una fuente de motivación e inspiración, tanto para los docentes en su propia formación, como para los estudiantes en su aprendizaje, y debe ser un recurso más a tener en cuenta en las metodologías y contenidos de la programación de la etapa de Secundaria.

4.2 EL I CHING: EL PRIMER LIBRO BASADO EN EL SISTEMA BINARIO

4.2.1 RESUMEN DE LA HISTORIA DEL I CHING

El I Ching, o como se ha traducido en castellano, libro de las mutaciones, es una obra clásica de la cultura china y fuente de las sabidurías taoísta y confuciana, y uno de los libros más antiguos en la historia de la humanidad. El propósito del libro es oracular, es decir, responder de forma adivinatoria a una pregunta formulada por una persona acerca de su devenir en función de su presente. El origen del libro se desconoce, aunque se estima que el libro data aproximadamente del siglo VIII a.C., y se conformó como una serie de textos escritos en un entorno agrícola. El libro adquirió la forma tal y como hoy se conoce al final de la dinastía Chou (1046 a.C.-256 a.C.), convirtiéndose en uno de los textos fundamentales del canon confuciano.

El texto del libro propone, a través de sus elementos, un universo regido por el cambio y la relación entre los dos opuestos: el Yin y el Yang. En este universo los cambios se suceden de manera cíclica como las estaciones del año. Entre los siglos X y III a.C., era frecuente que las personas de las clases más altas

realizaban consultas al libro sobre su futuro mediante una ceremonia con tallos de aquileia. Posteriormente este sistema fue sustituido por el lanzamiento de tres monedas chinas de bronce con un agujero cuadrado en su centro y con una inscripción en una de las dos caras.

La llegada del I Ching a occidente, según los documentos históricos, se produce en el siglo XVII a través de los viajes a China de los misioneros Jesuitas. El misionero italiano Martino Martini realizó en 1658 una descripción del I Ching en su obra “Sinicae Historiae Decas Prima”, e hizo llegar a Europa el primer diagrama con los 64 hexagramas del I Ching. El filósofo y matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) se interesó por el libro y mantenía correspondencia acerca de éste con Joaquim Bouvet, misionero jesuita y profesor de matemáticas que realizó un estudio exhaustivo del libro e instruyó al emperador chino Kangxi en álgebra y geometría occidental. En la Figura 6 se puede observar un diagrama de hexagramas del I Ching en dos disposiciones distintas, enviado por Bouvet a Leibniz en 1701:

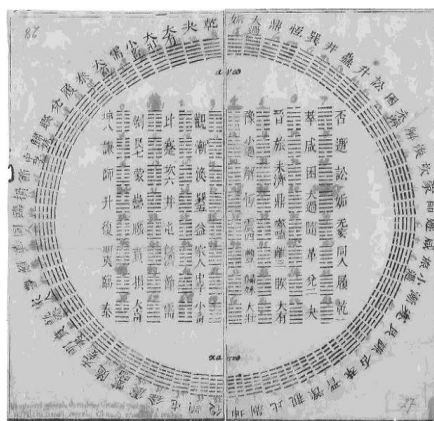


FIGURA 6 – Diagrama de hexagramas enviado por Bouvet a Leibniz en 1701

Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram_of_I_Ching_hexagrams_owned_by_Gottfried_Wilhelm_Leibniz_1701.jpg

Licencia: Public Domain

Leibniz escribió sobre el I Ching y realizó analogías entre los elementos del libro y el sistema binario. Él estaba convencido de que en mundo podía ser entendido a través de las Matemáticas, y que el acto de creación del universo había sido realizado en base 2, y que a partir del 0 y el 1, se habría creado toda la materia.

La primera traducción completa del libro al latín se realiza en el año 1723 y fue guardada en la Biblioteca Real de París, hasta ser de nuevo editada en el año 1830 por el estudioso alemán de la cultura oriental Julius von Mohl. La fama que adquiere el libro a nivel mundial se produce en 1924 con la posterior traducción del libro de Richard Wilhem y con la traducción al inglés en 1950 por Cary F. Baynes. El libro en la actualidad sigue teniendo gran fama, y muchas personas lo siguen usando como libro de adivinación, mientras que otras siguen encontrando en él un foco de sabiduría ancestral.

4.2.2 LAS MATEMÁTICAS DEL I CHING

El divulgador de la Matemática estadounidense Martin Gardner (1914-2010) escribió en enero de 1974 en la revista Scientific American, un artículo sobre el I Ching con el título de “Mathematical Games. The combinatorial basis of the I Ching, the Chinese book of divination and wisdom”(Gardner, 1974). En este artículo, Gardner, además de describir el sistema de consulta para predecir el futuro, desgana los elementos del libro con un enfoque matemático y analiza la base combinatoria de los mismos, siendo este uno de los textos matemáticos más interesantes y completos de referencia para diseñar algunas actividades didácticas para los estudiantes de Secundaria.

Los elementos del I Ching se configuran a través de los dos elementos de la dualidad básica de la metafísica china: el Yin, que corresponde al principio femenino y se representa con una línea horizontal cortada, y el Yang, correspondiente al principio masculino y que se representa con una línea horizontal continua. También existe un símbolo que representa el Yin y el Yang asociado al taoísmo y al neoconfucionismo, llamado Taijitu, y que se ha representado a lo largo de la historia en la iconografía china principalmente mediante tres figuras diferentes: El XiantianTaijitu, el Taijitu de Zhou Dunyi, y el Taijitu de LaiZhide o Laishitaijitu. El más conocido en occidente es el XiantianTaijitu, representado por dos formas entrelazadas llamadas peces y representa la alternancia entre los qi, energía vital, el Yin y el Yang. En la iconografía europea se tienen evidencias de este símbolo en diferentes culturas, formando parte de la iconografía celta, etrusca y romana.

En la Figura 7 se puede observar el símbolo del Xiantian Taijitu representado con la alineación de los puntos en orientación horizontal:



FIGURA 7 – Símbolo del Xiantian Taijitu
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Yin_yang.svg
Licencia: Public Domain

Si se toman las líneas de Yin y Yang de dos en dos, es decir, si formamos bigramas con las líneas, tenemos $2^2 = 4$ maneras de combinarlas. Si tomamos las líneas de tres en tres, es decir, formando trigramas, tenemos $2^3 = 8$ maneras de combinarlas y, por lo tanto, ocho trigramas distintos. Estos ocho trigramas tienen nombres chinos y también distintos significados simbólicos cada uno.

En la Figura 8 se puede observar la formación de los bigramas y trigramas a partir de los dos elementos de Yin y Yang:

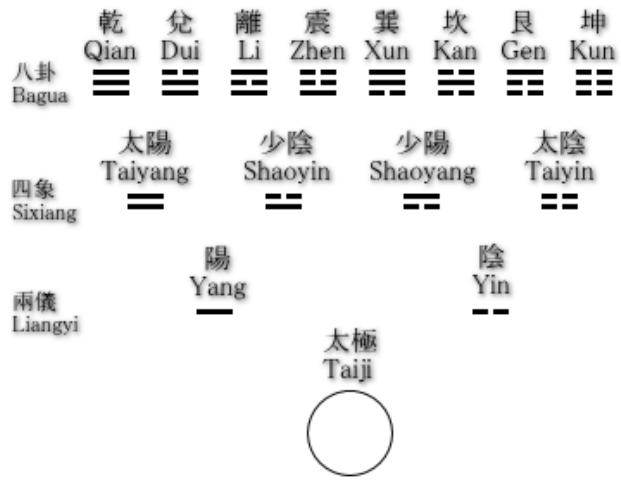


FIGURA 8 – Formación de bigramas y trigramas a partir de los elementos Yin y Yang
Fuente: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Xiantianbagua.png>
Licencia: Public Domain

En la historia del I Ching, han existido dos maneras de presentar estos ocho trigramas en un círculo. La más antigua, conocida como Fu Hsi, dispone los ocho elementos de forma que los pares opuestos son complementarios, tanto en sentido matemático como en significado simbólico. Si se sustituyen las líneas de Yin por las del Yang y las del Yang por las del Yin, se obtiene el trigramma opuesto en la disposición. Esta composición circular u octogonal, circunda normalmente el símbolo del Taijitu del Yin y el Yang, y se usa como amuleto de la fortuna en China, Japón y Corea.

En la Figura 9 se puede observar la presentación de los trigramas según la disposición Fu Hsi:



FIGURA 9 – Formación de bigramas y trigramas a partir de los elementos Yin y Yang
Fuente: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bagua-name-earlier.svg>
Licencia: Creative Commons

Si se toman las líneas de Yin y Yang de cuatro en cuatro, tendremos $2^4 = 16$ tetragramas distintos. Si las tomamos de cinco en cinco, tendremos $2^5 = 32$ pentagramas. Y si se forman hexagramas, tendremos $2^6 = 64$ elementos distintos. Estos hexagramas configuran la base del sistema de adivinación del I Ching. Al igual que los trigramas, cada uno tiene un nombre chino y un significado. La manera más antigua de representar los 64 hexagramas es la conocida como secuencia del Rey Wen, y este es el orden en el que aparecen en el libro I Ching. En esta disposición, los hexagramas se agrupan en cada fila en parejas de dos. El hexagrama adjunto es el simétrico de su pareja, o, en el caso de que el hexagrama sea ya simétrico, su pareja es su complementario.

En la Figura 10 se puede observar la disposición de los hexagramas en la secuencia del Rey Wen:

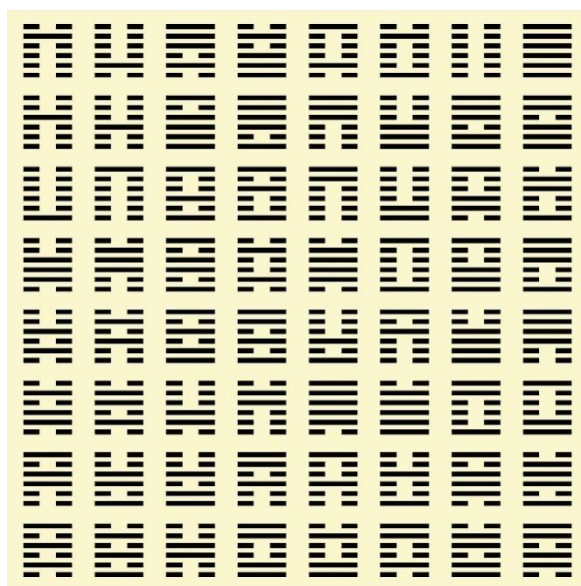


FIGURA 10 – Disposición de los hexagramas según la sucesión del Rey Wen
Fuente: Elaboración propia, en base al dibujo de Martin Gardner incluido en su artículo “Mathematical Games. The combinatorial basis of the I Ching, the Chinese book of divination and wisdom”(Gardner, 1974)

También es posible representar esta sucesión partiendo de una línea en el inicio de las divisiones, y realizar una sucesión de forma que cada división parte cada división anterior en dos, obteniendo las 64 partes en la sexta división.

En la Figura 11 se puede observar la representación geométrica de esta sucesión con las seis divisiones sucesivas:

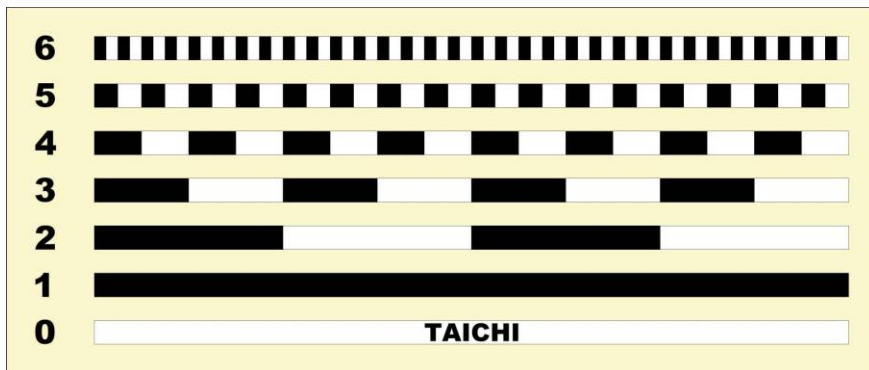


FIGURA 11 – Representación lineal de la sucesión de formación de hexagramas

Fuente: Elaboración propia, en base al dibujo de Martin Gardner incluido en su artículo “Mathematical Games. The combinatorial basis of the I Ching, the Chinese book of divination and wisdom”(Gardner, 1974)

Hasta el siglo XI, no se descubrió una manera atractiva de ordenar los hexagramas. Esta nueva ordenación, atribuida a Fu Hsi, corresponde a la ordenación de los trigramas en el orden numérico binario. La correspondencia entre la representación gráfica de los hexagramas mediante los símbolos de Yin y Yang, y los números binarios es la siguiente: se asignan valores binarios a los hexagramas de la siguiente forma: la posición de la línea superior de cada hexagrama tiene valor 1, la siguiente línea inferior a la anterior tiene valor 2, las siguientes, sucesivamente, tienen valor de 4, 8, 16, siendo, el valor asignado a la posición inferior de 32. Se toma el valor para cada posición cuando en dicha posición aparece la línea discontinua o Yin, mientras que cuando en la posición aparece la línea continua o Yang, el valor de esta posición se toma con valor de 0. Sumando los valores asignados a cada línea en cada hexagrama, obtenemos el número asignado al mismo.

En esta disposición de los hexagramas, se comienza abajo a la derecha con el número 0, que representa el “t'ai chi”, es decir, el estado del universo sin forma y vacío, y sigue a la izquierda con el 1, el 2, etc., hasta el 7 como último hexagrama a la izquierda de la fila inferior. Se continúa después con el 8 en la posición de la fila siguiente superior, pero a la derecha de nuevo sobre el número 0. El último número arriba a la izquierda es el número binario 63. Esta correspondencia fue la que descubrió Leibniz, quien creía antes de ello, haber inventado el sistema binario. De esta manera, se empezó a considerar la sucesión de Fu Hsi como isomórfica a la notación aritmética binaria de Leibniz.

En la Figura 12, a continuación, se muestra un esquema explicativo del valor asignado a cada posición de las líneas según aparezca Yin o Yang, así como algunos ejemplos de hexagramas, con el valor de cada una de sus líneas según su posición y el número asignado al hexagrama, que es igual a la suma total de sus líneas. También se muestra la equivalencia de cada número en notación binaria:



FIGURA 12 – Esquema explicativo del valor asignado en sistema binario a las líneas Yin y Yang en los hexagramas
Fuente: Elaboración propia

En la Figura 13, se muestra la disposición de los hexagramas de Fu Hsi, con ordenación binaria. El número asignado en cada hexagrama corresponde a su número binario:

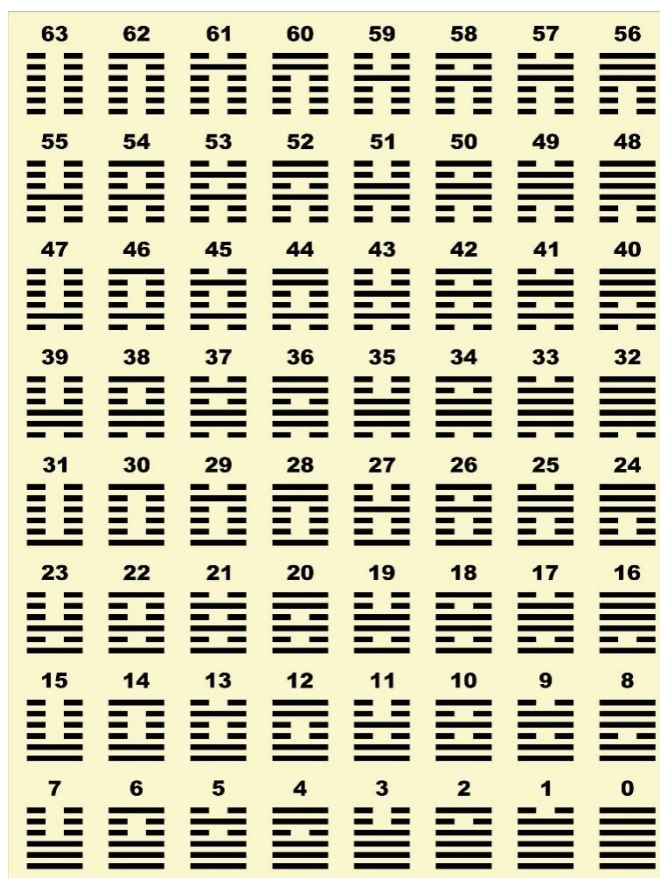


FIGURA 13 – Disposición de los hexagramas de Fu Hsi, con ordenación binaria
Fuente: Elaboración propia, en base al dibujo de Martin Gardner incluido en su artículo “Mathematical Games. The combinatorial basis of the I Ching, the Chinese book of divination and wisdom”(Gardner, 1974)

Dado que las potencias de 2 se manifiestan en la mayor parte de las estructuras de la naturaleza y el cosmos, no parece extraño que los chinos explicaran el universo con este sistema y Leibniz pensara en él como base de la creación.

Por otro lado, Z.D. Sung, en su libro “The Symbols of Yi King”(Sung, 1934), asimila los ocho trigramas a los vértices de un cubo de un sistema de coordenadas de ejes x, y, z, con el origen en uno de los vértices del cubo y longitud del lado del cubo la unidad, quedando las coordenadas de estos vértices igual a los números binarios correspondientes a los ocho trigramas si se sigue la misma pauta del sistema binario de los hexagramas explicado antes.

En la Figura 14, se muestra la representación planteada Z.D. Sung de los 8 trigramas situados en los vértices del cubo de lado la unidad en un sistema de coordenadas x, y, z, con uno de los vértices en el origen de coordenadas. Las coordenadas del sistema de cada vértice corresponden al número binario de cada trígrama:

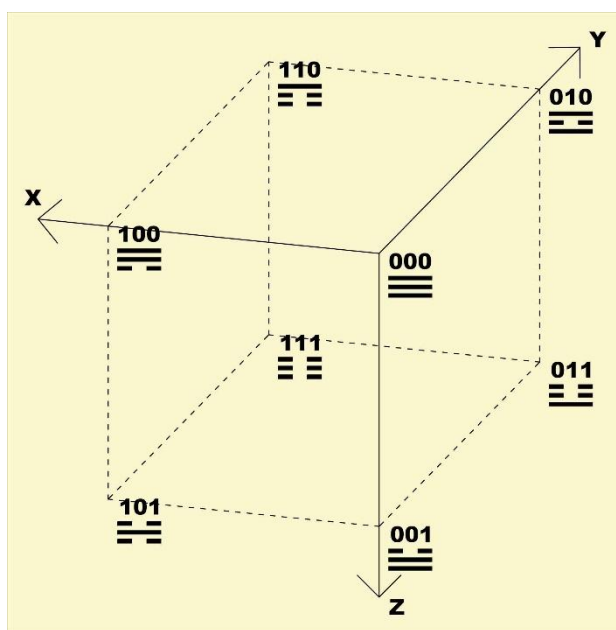


FIGURA 14 – Disposición de los trigramas en los vértices del cubo planteado por Z.D. Sung

Fuente: Elaboración propia, en base al dibujo de Martin Gardner incluido en su artículo “Mathematical Games. The combinatorial basis of the I Ching, the Chinese book of divination and wisdom”(Gardner, 1974)

Si se extrapola este planteamiento a un polígono superior, los 64 hexagramas, correspondientes a los números binarios de seis dígitos, estarán situados en los vértices de un hipercubo de seis dimensiones. Para poder representar los hexagramas, Sung divide el cubo en 64 cubos más pequeños, a los cuales identifica con los 64 modos del silogismo clásico. La premisa mayor, la premisa menor y la conclusión de un silogismo pueden ser de 4 formas distintas por los que resultan 64 modos posibles.

4.3 LAS FRACCIONES DEL OJO DE HORUS

A través de algunos documentos que se han conservado a lo largo de la historia, como son el papiro de Moscú (1890 a.C.) o el Papiro de Ahmes (1680 c.C.-1620 a.C.), ha sido posible conocer la matemática egipcia, que estaba dedicada principalmente a aspectos prácticos como a la medición de tierras, al cálculo de impuestos, al cálculo de depósitos y volúmenes, a la astronomía, etc.

El sistema de numeración egipcio era un sistema decimal no posicional. Las unidades y sus múltiplos en base diez estaban representados por símbolos jeroglíficos, y el resto de números enteros podían representarse como acumulación de los anteriores. En la Figura 15, puede apreciarse los símbolos correspondientes al 1, al 10, al 100 y al 1000:

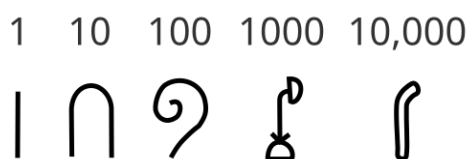


FIGURA 15 – Símbolos de los números egipcios
Fuente:https://commons.m.wikimedia.org/wiki/File:Hieroglyph_numerals.svg
Licencia: Creative Commons

Las operaciones de los productos y divisiones entre números estaban basadas en la duplicación. Además, los egipcios conocían y usaban las fracciones unitarias ($\frac{1}{n}$), y además conocían las fracciones ($\frac{2}{3}$) y ($\frac{3}{4}$). Las fracciones se representaban mediante otro símbolo más correspondiente al numerador de valor 1 que tenía forma de boca abierta.

El Ojo de Horus, llamado, que significa el ojo sano o que está completo, es un símbolo de la mitología arcaica egipcia que representa a través de sus partes las primeras fracciones de las potencias de ($\frac{1}{2}$) usadas principalmente en medidas agrarias.

En la Figura 16 puede apreciarse la representación del Ojo de Horus en una fotografía de una pintura en la Tumba TT3 de Pashedu, situada en Deir el-Medina:

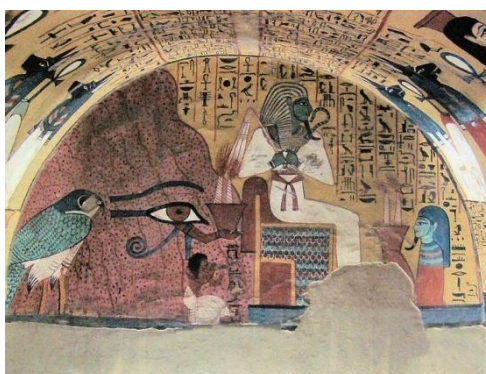


FIGURA 16 – Pintura en la Tumba TT3 de Pashedu
Fuente: [https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Tomb_TT3_of_Pashedu_\(Kairoinfo4u\).jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Tomb_TT3_of_Pashedu_(Kairoinfo4u).jpg)
Licencia: Creative Commons

La mitología relata las luchas entre Horus, el hijo de dios Osiris, y Seth hermano de Osiris. Osiris fue asesinado por su hermano Seth, y Horus queriendo vengar a su padre, perdió el ojo izquierdo en los combates con Seth. Gracias a la intervención de Thot, el ojo de Horus fue sustituido por el Udyat para que

este pudiera recuperar la vista. A este símbolo se le atribuyen propiedades mágicas y es usado como amuleto desde la antigüedad.

En su obra “El Ojo de Horus y otras historias científicas sobre las matemáticas y las religiones”, Vicente Meavilla explica, de forma muy sintetizada, el relato mitológico y las fracciones (Seguí, 2014) Por su parte, el historiador Ildefonso Robledo Casanova desarrolla un profundo análisis de la mitología de este elemento y sus significados en un artículo de la revista Número 17 de enero de 2010 de la revista “Arte, Arqueología e Historia” (Robledo Casanova, 2010).

Como ya se ha indicado, cada parte de este símbolo corresponde a una fracción. En la Figura 17 puede apreciarse cada parte del Ojo de Horus y su fracción correspondiente.

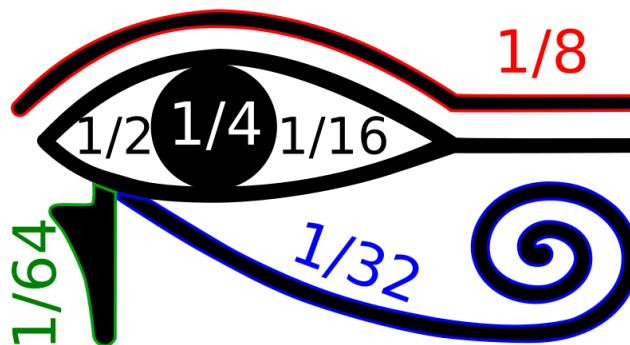


FIGURA 17 – Fracciones del Ojo de Horus
Fuente: [https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Eye_of_Horus_\(fractions\).svg](https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Eye_of_Horus_(fractions).svg)
Licencia: Creative Commons

De esta forma, las fracciones del Ojo de Horus son:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}$$

Si sumamos todas ellas, obtenemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

Por lo tanto, para establecer la unidad faltaría sumar $\frac{1}{64}$ al resultado final. Según la mitología, esta parte que falta es la que fue procurada mágicamente por Thot cuando consiguió encontrar y reunir el ojo despedazado para completarlo.

4.4 EL CÓDIGO BRAILLE

El código Braille es un sistema de lectura y escritura táctil para las personas ciegas que fue ideado en 1825 por el pedagogo y educador francés Louis Braille (1809-1852). Cuando contaba con la edad de tres años, Louis Braille sufrió un accidente en el taller de su padre con un punzón que le dañó uno de los ojos. Después de este accidente se le infectó el ojo dañado, pasando la infección al otro ojo y quedando ciego a la edad de cinco años. Hasta la edad de diez años, estudió en la escuela de su localidad natal, siendo a pesar de su ceguera uno de los alumnos más aventajados.

Con diez años consiguió una beca para estudiar en el Real Instituto para la Juventud Ciega (RIJC) de Francia, una de los primeros centros especializados en este campo. Las clases, en general, se impartían de forma oral, aunque el fundador de la escuela, Valentin Haüy, había desarrollado un sistema de impresión de libros con los caracteres en relieve para permitir la lectura táctil. Este sistema exigía una impresión individualizada en cobre para cada letra y además los alumnos, aunque podían identificar las letras con las yemas de los dedos, no eran capaces de reproducirlas por sí solos mediante la escritura.

En 1821, el oficial del ejército Charles Barbier de la Serre, presentó en el instituto un nuevo sistema de lectura táctil usado por los soldados para comunicarse sin hablar en las trincheras, a través de puntos y guiones en relieve, pensando en que podía ser útil para introducirlo en el sistema educativo del centro. Los alumnos lo probaron, pero no les convenció por algunas razones de peso: no se incluían mayúsculas ni puntuación, las palabras estaban escritas como se pronunciaban y no a través de la ortografía, etc.

En contraposición a su compañeros/as, Louis Braille tomó este sistema y lo fue estudiando y afinando para simplificarlo hasta dar con una solución que fuera capaz de reproducir adecuadamente la fonética básica. Esta solución solo requería el uso de seis puntos en relieve. Continuó trabajando en el sistema hasta desarrollar códigos para la enseñanza de otras materias, como las matemáticas y la música, finalizando su investigación a los quince años.

Braille se convirtió en profesor y ganó el reconocimiento social, aunque al morir a la edad de 43 años enfermo de tuberculosis, no tuvo oportunidad de ver cómo su sistema adquiría una gran acogida en todos los países y extendía por todo el mundo.

El código Braille es un sistema universal de lectoescritura para personas ciegas, en la que cada idioma adapta sus palabras y tipografías a la base del código, transcribiendo cada letra a los seis puntos de cada celda.

En la Figura 18 se puede observar la transcripción del alfabeto español al código Braille, obtenido de la web de la Organización Nacional de Ciegos Españoles:

Alfabeto braille

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
⠁	⠃	⠉	⠑	⠅	⠋	⠎	⠈	⠇	⠊
k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
⠅	⠇	⠍	⠏	⠕	⠎	⠑	⠗	⠚	⠞
u	v	x	y	z	ñ		w		
⠥	⠦	⠨	⠣	⠵	⠞		⠦		

FIGURA 18 – Alfabeto Braille Español

Fuente: <https://www.once.es/servicios-sociales/braille>

Licencia: Permitida su reproducción total o parcial con fines docentes o de investigación

Las combinaciones posibles de los seis puntos son 64, incluyendo la que no tienen ningún punto que se usa como espacio en blanco entre caracteres.

5 SITUACIÓN DE APRENDIZAJE PARA 2º DE ESO: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD A TRAVÉS DE LOS ELEMENTOS DEL LIBRO I CHING

5.1 TÍTULO

Estadística y probabilidad a través de los elementos del libro I Ching.

5.2 CONTEXTUALIZACIÓN

Contexto

Se plantea esta situación de aprendizaje para el curso de 2º de ESO dentro de la etapa de Secundaria. En la planificación de la misma no se ha considerado una situación real concreta, por lo que la situación de aprendizaje podría aplicarse en la asignatura de Matemáticas del curso 2º de ESO en cualquier centro educativo de la comunidad de Castilla y León. Se ha estimado que el grupo medio de destinatarios sería de 20 estudiantes. En el apartado de la atención a la diversidad se han detallado algunas adaptaciones de las actividades frente a los condicionantes más habituales que pueden aparecer en el aula de forma genérica, atendiendo a lo que algunos profesores han comentado en algunas de las asignaturas del Máster y según las notas de observación tomadas en situaciones reales de grupos de la ESO durante el Practicum.

Elección de contenidos

Los contenidos a abordar en esta situación de aprendizaje son los contenidos de introducción a la probabilidad y a la estadística que contempla el Currículo para el curso de 2º de ESO para la materia de Matemáticas. La elección de este contenido tiene diversas razones:

-Por un lado, se trata de unos contenidos que en muchos de los casos no se llegan a tratar por falta de tiempo y por estar situados temporalmente al final del calendario académico; Por ello, se pretende poner énfasis en la importancia de esta rama de las Matemáticas que, además de ser de gran interés y curiosidad para muchos de los estudiantes, abre el camino profesional de muchas futuras oportunidades laborales para los/as alumnos/as en la actualidad.

-Por otro lado, se trata de un contenido que permite la experimentación y el uso de materiales manipulativos, además de propiciar la inclusión de la Historia de las Matemáticas como un adecuado recurso de aprendizaje en este bloque de la materia. De esta forma es posible poner en relevancia estos recursos educativos y las intenciones previas personales de este trabajo. En este caso, el foco de la Historia de las Matemáticas se centra en la cultura China, y, concretamente, en el libro I Ching que está datado en el año 1200 a.C. y que contiene elementos que permiten trabajar todos los contenidos de este bloque del curso.

Temporalización

Conociéndose la secuencia habitual en la programación anual en la materia de las Matemáticas dentro de los cursos de la etapa de Secundaria, en la que se suele situar el bloque de estadística y probabilidad hacia el final del curso académico, se plantea en este trabajo la realización de esta situación de aprendizaje en el último trimestre. La situación de aprendizaje se desarrollará paralelamente al desarrollo teórico de los contenidos y a la realización de ejercicios y problemas. De esta forma se intercalarán las actividades de la situación de aprendizaje con las sesiones teóricas, tal y como viene reflejado en el punto 6.4.3 de cronograma y organización del tiempo de esta situación de aprendizaje.

5.3 FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

Según las indicaciones del Anexo II.B, del Currículo de Educación Secundaria de Castilla y León sobre las “Orientaciones para el diseño de situaciones de aprendizaje”, se procede a continuación a describir de forma secuencial los elementos del Currículo que comprende esta situación de aprendizaje.

5.3.1 OBJETIVOS DE ETAPA

De los objetivos establecidos en el artículo 7 del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, para esta situación de aprendizaje se han tenido en cuenta los siguientes:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a las demás personas, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con las demás personas, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Desarrollar las competencias tecnológicas básicas y avanzar en una reflexión ética sobre su funcionamiento y utilización.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la comunidad autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la Historia propias y de las demás personas, así como el patrimonio artístico y cultural.
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

5.3.2 COMPETENCIAS CLAVE Y DESCRIPTORES OPERATIVOS

Esta situación de aprendizaje contemplará las siguientes competencias clave y los siguientes descriptores operativos señalados en cada una de ellas:

- **Competencia en comunicación lingüística (CCL)**

Descriptores operativos: CCL1, CCL2, CCL3.

- **Competencia plurilingüe (CP)**

Descriptores operativos: CP1, CP3.

- **Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)**

Descriptores operativos: STEM 1, STEM2, STEM4.

- **Competencia digital (CD)**

Descriptores operativos: CD1, CD2.

- **Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA)**

Descriptores operativos: CPSAA1, CPSAA3, CPSAA5.

- **Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC)**

Descriptores operativos: CCEC1, CCEC4.

En la siguiente tabla se relacionan los descriptores operativos con los objetivos de etapa de la situación de aprendizaje:

OBJETIVOS DE ETAPA	DESCRPTORES OPERATIVOS DEL PERFIL DE SALIDA																																			
	CCL					CP			STEM					CD					CPSAA					CC				CE			CCEC					
	CCL1	CCL2	CCL3	CCL4	CCL5	CP1	CP2	CP3	STEM1	STEM2	STEM3	STEM4	STEM5	CD1	CD2	CD3	CD4	CD5	CPSAA1	CPSAA2	CPSAA3	CPSAA4	CPSAA5	CC1	CC2	CC3	CC4	CE1	CE2	CE3	CCEC1	CCEC2	CCEC3	CCEC4		
Real Decreto 217/2022	a				✓			✓									✓			✓																
	b										✓		✓						✓		✓		✓					✓		✓						
	c					✓														✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓							✓		
	d								✓										✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓						✓		
	e	✓	✓							✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓																✓		
	f		✓								✓	✓	✓								✓	✓	✓	✓	✓											
	g	✓	✓									✓	✓	✓					✓	✓	✓	✓	✓	✓				✓	✓	✓						
	h	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓		✓							✓	✓	✓	✓	✓	✓							✓	✓	✓		
	i						✓	✓	✓																											
	j	✓																								✓	✓	✓				✓	✓	✓	✓	
	k	✓					✓				✓			✓						✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓							✓	✓	
	l																																✓	✓	✓	✓
Decreto 39/2022	a				✓																			✓	✓	✓					✓	✓				
	b												✓				✓										✓	✓	✓		✓					
	c			✓								✓	✓	✓						✓							✓	✓	✓							

5.3.3 COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

Esta situación de aprendizaje contemplará las siguientes competencias específicas de la materia de Matemáticas y estructuradas en cinco bloques competenciales:

- **Competencias específicas del bloque de resolución de problemas:**

1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las Matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.

- **Competencias específicas del bloque de razonamiento y prueba:**

3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.
4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.

- **Competencias específicas del bloque de conexiones:**

5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las Matemáticas como un todo integrado.
6. Identificar las Matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas.

- **Competencias específicas del bloque de comunicación y representación:**

7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.
8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas Matemáticas.

- **Competencias específicas del bloque de destrezas socio afectivas:**

9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las Matemáticas.
10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de Matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.

En la siguiente tabla se relacionan las competencias específicas y los descriptores operativos contemplados en esta situación de aprendizaje:

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	DESCRIPTORES OPERATIVOS DEL PERFIL DE SALIDA																																		
	CCL					CP			STEM					CD					CPSAA					CC				CE			CCEE				
	CCL1	CCL2	CCL3	CCL4	CCL5	CP1	CP2	CP3	STEM1	STEM2	STEM3	STEM4	STEM5	CD1	CD2	CD3	CD4	CD5	CPSAA1	CPSAA2	CPSAA3	CPSAA4	CPSAA5	CC1	CC2	CC3	CC4	CE1	CE2	CE3	CCEC1	CCEC2	CCEC3	CCEC4	
BLOQUE 1	1	✓	✓	✓					✓	✓	✓	✓			✓	✓							✓			✓									✓
	2	✓							✓	✓		✓			✓	✓						✓				✓				✓					
BLOQUE 2	3	✓	✓						✓	✓				✓	✓			✓												✓					
	4								✓	✓	✓				✓	✓	✓	✓												✓					
BLOQUE 3	5								✓		✓				✓	✓																✓			
	6	✓							✓	✓	✓		✓			✓		✓											✓	✓	✓	✓			
BLOQUE 4	7										✓	✓		✓	✓			✓												✓				✓	
	8	✓	✓			✓			✓		✓	✓			✓	✓														✓			✓		
BLOQUE 5	9												✓						✓			✓	✓					✓	✓						
	10				✓		✓				✓								✓	✓					✓	✓									

5.3.4 CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Los criterios de evaluación del curso de 2º de ESO a aplicar en el sistema de evaluación de la situación de aprendizaje y en relación a las competencias específicas serán los siguientes:

- **Competencia específica 1**

1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana, organizando los datos dados y/o seleccionando información, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.

1.2 Aplicar diferentes herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.

1.3 Obtener soluciones Matemáticas de un problema, activando los métodos y conocimientos necesarios.

- **Competencia específica 2**

2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema recibiendo indicaciones cuando sea imprescindible.

2.2 Comprobar, con algunas indicaciones de guía, la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.).

- **Competencia específica 3**

3.1 Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.

3.2 Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos.

- **Competencia específica 4**

4.1 Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación.

4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando y modificando algoritmos.

- **Competencia específica 5**

5.1 Conocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias Matemáticas, formando un todo coherente.

5.2 Conocer y usar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.

- **Competencia específica 6**

6.1 Identificar situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias Matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las Matemáticas usando los procesos inherentes a la investigación: medir, comunicar, clasificar y predecir.

6.3 Reconocer la aportación de las Matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.

- **Competencia específica 7**

7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos.

7.2 Elaborar representaciones Matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo de apoyo si es necesario.

- **Competencia específica 8**

8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión.

- **Competencia específica 9**

9.1 Gestionar las emociones propias, desarrollar el auto concepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.

9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las Matemáticas.

- **Competencia específica 10**

10.1 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las Matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones.

10.2 Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, y asumiendo el rol asignado.

En la siguiente tabla se relacionan los criterios de evaluación y los descriptores operativos de esta situación de aprendizaje:

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	DESCRPTORES OPERATIVOS DEL PERFIL DE SALIDA																																				
	CCL					CP			STEM					CD					CPSAA					CC				CE			CCEE						
	CCL1	CCL2	CCL3	CCL4	CCL5	CP1	CP2	CP3	STEM1	STEM2	STEM3	STEM4	STEM5	CD1	CD2	CD3	CD4	CD5	CPSAA1	CPSAA2	CPSAA3	CPSAA4	CPSAA5	CC1	CC2	CC3	CC4	CE1	CE2	CE3	CCEC1	CCEC2	CCEC3	CCEC4			
BLOQUE 1	1.1	✓						✓	✓	✓	✓																										
	1.2		✓					✓	✓	✓	✓												✓			✓											
	1.3							✓	✓	✓	✓														✓											✓	
	2.1							✓	✓	✓	✓																										
	2.2							✓	✓			✓																									
BLOQUE 2	3.1	✓						✓	✓	✓						✓																					
	3.2	✓							✓	✓																											
	3.3								✓																												
	4.1							✓	✓	✓							✓	✓																			
	4.2							✓	✓		✓						✓	✓																			
BLOQUE 3	5.1							✓	✓																												
	5.2							✓	✓								✓																				
	6.1							✓	✓																												
	6.2								✓																												
	6.3							✓						✓																							✓
BLOQUE 4	7.1										✓						✓	✓																			
	7.2										✓						✓	✓																			
	8.1	✓						✓	✓		✓						✓																				
	8.2	✓		✓				✓	✓		✓						✓																				
	9.1													✓						✓																	✓
BLOQUE 5	9.2																		✓																		✓
	10.1					✓		✓		✓										✓						✓	✓										
	10.2									✓										✓																	

5.3.5 CONTENIDOS

Los contenidos del Currículo del curso de 2º de ESO a tratar en la situación de aprendizaje son principalmente los del bloque E, correspondiente al sentido estocástico, y los del bloque F, correspondiente al sentido socio afectivo. Además, de forma transversal y a través de las actividades, también se trabajan otros contenidos del Currículo. A continuación, se enumeran todos los contenidos que engloba la situación de aprendizaje:

A. Sentido numérico

1. Cantidad

- Números grandes y pequeños: notación exponencial y científica y uso de la calculadora.
- Números enteros, fracciones, decimales, potencias de exponente entero y raíces sencillas en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana.

2. Sentido de las operaciones

- Efecto de las operaciones aritméticas con fracciones, expresiones decimales, potencias de exponente entero y raíces sencillas.

3. Relaciones

- Comparación y ordenación de fracciones, decimales y porcentajes: situación exacta o aproximada en la recta numérica.
- Selección y utilización de la representación más adecuada de una misma cantidad (decimal, fracción, representación gráfica, incluida la representación en la recta) en cada situación o problema.

4. Razonamiento proporcional

- Porcentajes: comprensión y resolución de problemas.
- Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas (repartos)

D. Sentido algebraico

1. Patrones

- Patrones, pautas y regularidades: observación, predicción y determinación de la regla de formación en casos sencillos, mediante palabras, gráficas, tablas o reglas simbólicas.

2. Modelo matemático

- Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando material manipulativo y representaciones Matemáticas para llegar al lenguaje algebraico.
- Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.
- Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.

6. Pensamiento computacional

- Estrategias útiles en la interpretación y/o modificación de algoritmos.
- Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.

E. Sentido estocástico

1. Incertidumbre

- Fenómenos deterministas y aleatorios: identificación. Espacio muestral y sucesos.
- Experimentos simples: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada.
- Asignación de probabilidades mediante experimentación, el concepto de frecuencia relativa y la regla de Laplace.

F. Sentido socio afectivo

1. Creencias, actitudes y emociones

- Esfuerzo y motivación: reconocimiento de su importancia en el aprendizaje de las Matemáticas.
- Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las Matemáticas. Autoconciencia y autorregulación.
- Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las Matemáticas.
- Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.

2. Trabajo en equipo y toma de decisiones

- Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.
- Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.

3. Inclusión, respeto y diversidad

- Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.
- La contribución de las Matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...).

5.3.6 ELEMENTOS TRANSVERSALES

La situación de aprendizaje aborda los siguientes contenidos transversales:

- Focos de culturas de la antigüedad y su relación con los conceptos matemáticos a tratar: cultura china y elementos matemáticos del libro I Ching.

5.4 METODOLOGÍA

De forma general, se apuesta en esta situación de aprendizaje por una participación activa de los estudiantes en las distintas actividades, a través de la manipulación y experimentación, el razonamiento y la prueba y error frente a retos y problemas, así como la puesta en común en los pequeños grupos y en el gran grupo a través del lenguaje verbal y el lenguaje matemático. Por todo ello, y ya sea con trabajo individual o por equipos, la metodología será a través de tareas experimentales y participativas que tendrán siempre como punto de referencia la reflexión y el razonamiento personal.

La última actividad de la situación se plantea como una pequeña investigación en parejas que luego los estudiantes tendrán que exponer en el aula a sus compañeros/as y con cuyos materiales se elaborará una pequeña exposición visual dentro del centro educativo como difusión cultural.

5.4.1 MÉTODOS: ESTILOS, ESTRATEGIAS Y TÉCNICAS

En esta situación de aprendizaje se usarán varias metodologías y recursos distintos:

- Uso de la Historia de las Matemáticas como foco de interés.
- Trabajo manipulativo y experimental.
- Trabajo individual, por parejas y en pequeños grupos.
- Lección magistral participativa.
- Resolución de ejercicios y problemas.
- Uso de las TICS, a través de un trabajo de investigación personal.
- Exposición oral al resto de estudiantes.
- Exposición visual de difusión cultural.

5.4.2 ORGANIZACIÓN DEL ALUMNADO Y AGRUPAMIENTOS

Durante las distintas actividades y tareas se trabajará de forma diversa. En algunas tareas se ha optado por el trabajo de forma individual y en otras se fomentará el trabajo en equipo por parejas en algunos de los casos y en pequeños grupos de cuatro estudiantes en otros. En el trabajo individual se busca que los estudiantes afronten las tareas, los problemas y los retos de forma autónoma buscando su razonamiento y reflexión personal en el aprendizaje. En el trabajo en parejas y pequeños grupos se busca que aprendan a trabajar en pequeños grupos, a cooperar, a escucharse los unos a los otros, a respetarse, a aportar y justificar sus ideas y finalmente a tomar decisiones conjuntas.

Al realizarse la situación de aprendizaje en el último trimestre del curso, estos agrupamientos se podrán elegir de forma equilibrada conociendo a priori los perfiles de los estudiantes para que el trabajo en equipo sea cooperativo y productivo para cada uno de ellos. En el trabajo por parejas se fomentarán los grupos mixtos para fomentar los valores de la coeducación y la igualdad de género, poniendo en énfasis la participación equitativa de alumnas y estudiantes. En los casos de disponer de estudiantes con alguna dificultad especial de aprendizaje se buscará agrupar a éstos con otros estudiantes capaces de ayudarles y apoyarles durante las actividades.

5.4.3 CRONOGRAMA Y ORGANIZACIÓN DEL TIEMPO

La situación de aprendizaje se encaja dentro del bloque de estadística y probabilidad, y transcurrirá en paralelo a las clases teóricas complementando a éstas y retroalimentándose de la formalización de los conceptos. Esto ayuda también a focalizar los momentos de formalización y poder estructurar mejor el conocimiento en el aprendizaje.

En el siguiente cronograma del bloque completo se han separado las actividades de la situación de aprendizaje de las clases teóricas.

CRONOGRAMA DEL BLOQUE DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD						
SESIÓN EN EL AULA DE 50 MIN.	CLASES TEÓRICAS Y EJERCICIOS	ACTIVIDADES DE LA SITUACIÓN DE APREDIZAJE	METODOLOGÍA PRINCIPAL	GRUPOS	TAREAS EN EL AULA	TAREAS PARA CASA
1ª SESIÓN		Actividad 1 Las tres monedas	Experimentación con manipulativos	En parejas		
2ª SESIÓN	Fenómenos deterministas y aleatorios, espacio muestral, frecuencias y definiciones de probabilidad		Lección magistral Ejercicios de práctica	En gran grupo		Ejercicios de práctica
3ª SESIÓN		Actividad 1 Las tres monedas	Experimentación con manipulativos	En parejas		
4ª SESIÓN		Actividad 2 Las cuatro letras chinas	Experimentación con manipulativos	Individual		
5ª SESIÓN	Introducción a la combinatoria Esquemas en árbol		Lección magistral Ejercicios de práctica	En gran grupo		Ejercicios de práctica
6ª SESIÓN		Actividad 3 Los trigramas y hexagramas del I Ching	Experimentación con dibujos	En parejas		Problema de los Hexagramas
7ª SESIÓN		Actividad 3 Los trigramas y hexagramas del I Ching	Experimentación con dibujos	En grupos de cuatro		
8ª SESIÓN		Actividad 4 Matemáticas Chinas	TICS	En parejas /individual		Trabajo de investigación
9ª SESIÓN		Actividad 4 Matemáticas Chinas	TICS	En parejas		Preparar exposición oral
10ª SESIÓN		Actividad 4 Matemáticas Chinas	Exposición oral al grupo Exposición visual en el centro educativo	En parejas /individual		Preparar panel de exposición visual

Además, en el cronograma se han reflejado tres aspectos importantes:

-Por un lado, las metodologías a utilizar en la sesión.

-Por otro lado, si el tipo de trabajo a realizar en la sesión es individual, en parejas, en pequeños grupos o en gran grupo.

-Y, por otro lado, se han indicado las tareas para casa que se usan desde tres caminos distintos: como práctica de las clases teóricas con ejercicios, como planteamiento de un problema complejo para fomentar el razonamiento individual y como tiempo para acabar un trabajo de investigación a través de las TICS.

5.4.4 ORGANIZACIÓN DEL ESPACIO

El espacio del aula se organizará dependiendo de los agrupamientos. En el trabajo individual, el aula se dispondrá de forma tradicional, con los pupitres en filas y aislados y orientados hacia la pizarra.

En el trabajo por parejas, los pupitres se dispondrán como en el caso anterior, pero agrupándolos de dos en dos.

En el trabajo en grupos de cuatro estudiantes, se juntarán los cuatro pupitres en rectángulos de dos por dos, con los estudiantes enfrentados dos a dos, y con la orientación a la pizarra en un lateral de la disposición para que todos ellos se giren únicamente noventa grados para atender a la pizarra.

Con esta disposición del espacio lo que se pretende es trabajar la experimentación a través del material manipulativo, alternando estas tareas con la puesta en común en la clase y la atención a las aclaraciones y correcciones de la pizarra. El hecho de disponer un pupitre por estudiante en todos los casos de agrupamiento tiene su razón de ser en que en todas las tareas todos los estudiantes tendrán que cumplimentar la hoja de instrucciones que se les facilitará, de forma que, aunque el trabajo sea por equipos, las notas serán personales y evaluables.

5.4.5 MATERIALES Y RECURSOS

- Pizarra de tiza o digital.
- Ordenador y proyector en el aula habitual.
- Hojas de instrucciones de las actividades y tareas para cada estudiante.
- Material manipulativo.
 - Juego de tres monedas Yin-Yang para cada pareja de estudiantes.
 - Juego de cuatro tarjetas para cada estudiante. Las tarjetas tendrán escritas en uno de sus lados cuatro letras chinas correspondientes a cuatro elementos I Ching con su traducción en castellano debajo de cada letra.
- Cuaderno cuadriculado, bolígrafos y rotuladores, y calculadora de cada estudiante. La calculadora podrá ser compartida entre dos estudiantes.
- Sala de informática con un ordenador con acceso a internet por estudiante,
- Ordenador personal con acceso a internet para trabajar en casa. Si no tuvieran todos los estudiantes uno en su casa, se les facilitará el uso de un ordenador del centro o se realizará la tarea íntegra en el aula de informática en horario de clase.
- Una cartulina para cada pareja de estudiantes para los paneles de exposición visual en el centro.

5.5 PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDADES Y TAREAS

Se trata de una secuencia de actividades relacionadas el I Ching, un libro chino con propósito oracular datado en el año 1.200 a.C. y que formaliza, a través de la combinatoria y del sistema binario, los elementos y conceptos en los que se basa su filosofía. Desde este foco cultural es posible trabajar con los estudiantes los contenidos del Sentido Estocástico del Currículo de 2º de ESO. En las distintas actividades y tareas se abordarán los distintos conceptos incluidos en los contenidos del Currículo como son la introducción al campo de la probabilidad y las primeras nociones de combinatoria. A través de los dos símbolos del I Ching, el Yin y el Yang, y con la ayuda de materiales manipulativos de monedas, fichas y dibujos de trigramas y hexagramas, los estudiantes irán trabajando los diferentes contenidos alternando actividades individuales, en parejas y en pequeños grupos. La actividad final consiste en una pequeña investigación de la cultura Matemática China, para elaborar un pequeño trabajo por parejas usando los recursos TICS y realizando posteriormente una pequeña exposición a través de paneles expositivos de los trabajos, desarrollando así otros objetivos de etapa relacionados con la expresión y la comunicación.

5.5.1 ACTIVIDAD 1-LAS TRES MONEDAS

Contenidos matemáticos:

-Fenómenos deterministas y aleatorios:

Un fenómeno o experimento determinista es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en su realización, el resultado es siempre el mismo.

Un fenómeno o experimento aleatorio es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en su realización, el resultado no es siempre el mismo, es decir, no es posible predecir su resultado.

-Espacio muestral, sucesos, sucesos elementales, frecuencias absolutas y frecuencias relativas:

Al conjunto de resultados de un experimento aleatorio se le denomina espacio muestral.

Espacio muestral (Ω)

A los elementos del espacio muestral se les llama sucesos elementales.

Un suceso es un elemento del espacio muestral

Suceso ($A \in \Omega$)

La frecuencia absoluta de un suceso es el número de veces que se ha obtenido ese suceso en diversos experimentos.

La frecuencia relativa de un suceso se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el número total de experimentos.

-Definiciones de probabilidad:

Definición clásica de probabilidad. Regla de Laplace:

“La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles”

$$P(A) = \frac{\text{N}^\circ \text{ de casos favorable al suceso A}}{\text{N}^\circ \text{ de casos posibles}}$$

Donde $P(A)$ es la probabilidad del suceso A

Y se cumple que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Definición frecuentista de probabilidad. Ley de los grandes números:

“La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente”

$$P_n(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$$

Metodologías:

- Uso de la Historia de las Matemáticas como foco de interés.
- Trabajo manipulativo y experimental.
- Trabajo por parejas.
- Lección magistral participativa.

Organización del alumnado y agrupamientos:

Se trata de una tarea a realizar por parejas, por lo que previamente los estudiantes colocarán sus pupitres en grupos de dos según las indicaciones del profesor, quien previamente habrá pensado en cómo organizar los grupos de forma equitativa. Preferentemente se trabajará en grupos mixtos para fomentar la coeducación y el respeto y la igualdad de género.

Duración y organización del tiempo:

La duración de la tarea será la de una sesión de 50 minutos. Es importante remarcar los tiempos para el trabajo por parejas y ser ágiles en la puesta en común para poder realizar la totalidad de la tarea y que los estudiantes no se despisten.

Material y recursos:

- Hoja de instrucciones y anotaciones para cada estudiante.
- Juego de tres monedas con símbolos de Yin y Yang para cada pareja de estudiantes.
- Un tapete o tela en su defecto por pareja para poder lanzar las monedas sobre la mesa.
 - Cuaderno cuadriculado, bolígrafos y rotuladores, y calculadora de cada estudiante. La calculadora podrá ser compartida entre dos estudiantes.
- Pizarra para las explicaciones

Antecedentes y objeto de la actividad:

Esta actividad de experimentación consta de dos partes que se intercalarán con una sesión teórica. La primera parte es de introducción previa a la formalización de los conceptos y pretende ser una experimentación de

carácter deductivo. La segunda parte es posterior a la sesión teórica y pretende ser una experimentación con un carácter más inductivo. En todas las tareas se pretende que los estudiantes consigan expresar los resultados de manera gráfica y algebraica.

Desarrollo:

Esta actividad comprende dos sesiones intercaladas por una sesión teórica. De esta forma, los experimentos uno y dos de la primera sesión son una introducción al campo de la probabilidad y el experimento tres de la tercera sesión del bloque es una profundización en los contenidos después de la sesión teórica en la cual se formalizarán las definiciones y leyes.

1ª SESIÓN:

Se dispondrá a los estudiantes por parejas, preferiblemente mixtas, y se les repartirá una hoja individual a modo de instrucciones para que cada uno vaya escribiendo las notas de los experimentos y anotando las soluciones y las correcciones posteriores que tendrán que entregar al finalizar la sesión. Además, se repartirá a cada pareja el tapete o tela y tres monedas de 5 céntimos para poder realizar los experimentos. Cada moneda tendrá una pegatina rectangular en cada lado con los nombres del Yin y el Yang, y sus representaciones correspondientes de línea continua y quebrada para que vayan familiarizándose con estos elementos que se usarán a lo largo de todas las actividades.

En la Figura 19 se puede observar un ejemplo de este material manipulativo. Las pegatinas con forma rectangular remiten a las monedas de bronce chinas con el agujero cuadrado en su centro que se usan en la ceremonia de consulta del I Ching.

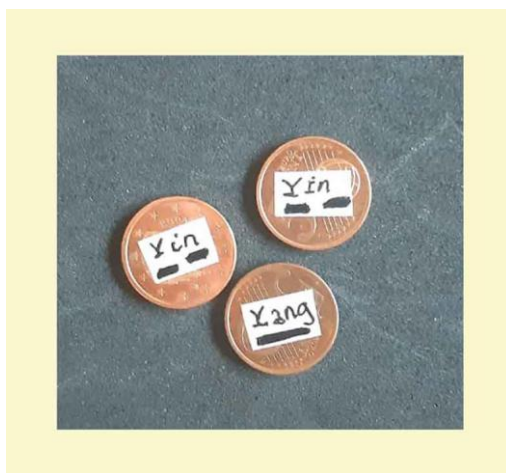


FIGURA 19 – Material manipulativo. Monedas con Yin y Yang
Fuente: Elaboración propia

Antes de realizar el experimento, se les presentará los símbolos del Yin y el Yang, y su significado dentro del libro chino I Ching. A continuación, se les explicará que tendrán que durante la sesión tendrán proceder realizando una serie de experimentos y que tendrán que ir cumplimentando individualmente la hoja que han recibido con los resultados obtenidos por ellos mismos y por los de su compañero/a.

• TAREA 1.1-Primer experimento:

Deben lanzar una moneda al aire unas cuantas veces y se les hará dos preguntas que tendrán en la hoja:

¿Caerá siempre la moneda hacia abajo después de ser lanzada hacia arriba si solo tiene aire a su alrededor?

¿Si la moneda cae después de ser lanzada puedo saber si saldrá Yin (cara) o Yang (cruz)? ¿Por qué?

De esta forma se distinguirá entre sucesos deterministas y aleatorios y se introducirá el concepto de probabilidad.

- **TAREA 1.2-Segundo experimento:**

Ahora cada uno lanzará una única moneda al aire 20 veces y anotará el número de veces que sale Yin y el número de veces que sale Yang. A continuación, compararán los resultados con su compañero/a, y después con otros compañeros de otras parejas.

De esta forma se introducirá el concepto de frecuencia absoluta y frecuencia relativa, y calcularán las frecuencias relativas y absolutas empíricas de sus resultados en el experimento. A continuación, realizarán la media aritmética de las frecuencias relativas de sus resultados con las de su compañero/a

Después de este cálculo, y ya en el gran grupo, se enunciará la Ley de Laplace y se escribirá en la pizarra, y tendrán que calcular por parejas la probabilidad teórica de que al tirar la moneda salga Yin o salga Yang, anotándolo en la hoja. Posteriormente analizarán cuánta diferencia existe entre esta probabilidad teórica y las frecuencias relativas obtenidas en sus resultados reales y lo comentarán. Para finalizar esta parte, se sumarán en grupo todos los resultados obtenidos para hallar la frecuencia relativa de todas las tiradas realizadas por todos los estudiantes de la clase. Se comparará también este resultado con la probabilidad teórica para que reflexionen y entiendan la definición frecuentista de probabilidad.

Al finalizar la sesión, los estudiantes entregarán el material en la mesa del profesor y la hoja individual de las notas recogidas con su nombre y apellidos.

2ª SESIÓN

Clase teórica de formalización de los contenidos y ejercicios.

3ª SESIÓN

De igual forma que en la 1ª sesión, se dispondrá a los estudiantes en parejas y se les repartirá a la hoja individual a modo de instrucciones para cumplimentar. Además, se repartirá a cada pareja el tapete o tela y las tres monedas de la primera sesión para poder realizar los experimentos.

- **TAREA 1.3-Tercer experimento**

En esta sesión se les pedirá que realicen el experimento de lanzar las tres monedas 20 veces y que anoten los distintos resultados de las tiradas. Una vez hayan concluido, se pondrá en común los resultados, preguntándoles qué tipo de resultados distintos han obtenido, cuáles se han repetido más y qué resultados se han repetido menos. De esta forma se introducirán los conceptos de experimento, espacio muestral, sucesos y probabilidad.

En una segunda parte de la tarea, se les pedirá que analicen el espacio muestral, es decir, todos los resultados posibles en la tirada de las tres monedas. Además, tendrán que apuntar en forma de fracción unitaria y de porcentaje, la probabilidad teórica de cada posible suceso. A continuación, se pondrá en común y se corregirá, atendiendo las dudas de los estudiantes.

De igual forma que en la primera sesión, al finalizar la sesión, los estudiantes entregarán el material y la hoja individual de las notas recogidas.

Documentos para la evaluación:

-Evaluación por parejas, con notas del profesor, analizando el comportamiento, interés y participación, así como la relación entre los compañeros.

- Evaluación individual, a través de la hoja de anotaciones entregada por cada estudiante.

Atención a la diversidad:

En este tipo de actividades por parejas es posible gestionar la atención a los estudiantes que tengan más dificultades o menos interés en la materia, organizando los grupos de forma adecuada y juntando a estudiantes de perfiles y roles complementarios. En el caso de la necesidad de una mayor atención a algún estudiante en particular, es posible disponer a algún grupo o grupos a los que el profesor pueda apoyar personalmente durante el transcurso del trabajo en equipo. Los materiales se pueden adaptar para casos concretos de algunos estudiantes que precisen una mayor claridad, como son aumentar el tamaño de la tipografía o de imágenes, uso de colores explicativos, uso de monedas más grandes, o a través de una introducción previa a la sesión.

Documentos para la valoración:

Notas de evaluación general después de la sesión por parte del profesor, valorando objetivos conseguidos, comportamiento e interés general y anotando posibles mejoras y reseñas destacadas.

5.5.2 ACTIVIDAD 2-LAS CUATRO LETRAS CHINAS

Contenidos matemáticos:

Introducción a la combinatoria.

-Variaciones sin repetición.

Definición:

Variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n , $V_{m,n}$, siendo $n \leq m$, son los grupos que se pueden formar con los m elementos con las siguientes condiciones:

-En cada grupo entran n elementos distintos (sin repetición).

-Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de éstos.

Formulación:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

-Permutaciones sin repetición.

Definición:

Permutaciones sin repetición de n elementos, P_n , son los grupos que se pueden formar con los n elementos con las siguientes condiciones:

-En cada grupo están los n elementos distintos (sin repetición).

-Dos grupos son distintos si se diferencian únicamente en el orden de colocación de éstos.

Formulación:

$$P_n = V_{n,n} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-n+1) = n!$$

-Combinaciones sin repetición.

Definición:

Combinaciones de m elementos tomados de n en n , $C_{m,n}$, siendo $n \leq m$, son los grupos que se pueden formar con los m elementos con las siguientes condiciones:

-En cada grupo entran n elementos distintos (sin repetición).

-Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento, pero no en el orden de colocación de éstos

Formulación:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \binom{m}{n}$$

Metodologías:

- Uso de la Historia de las Matemáticas como foco de interés.
- Trabajo manipulativo y experimental.
- Trabajo individual.
- Lección magistral participativa.
- Uso del dibujo como medio de análisis computacional y matemático.

Organización del alumnado y agrupamientos:

A diferencia de la actividad anterior, los estudiantes trabajarán en esta sesión individualmente, adquiriendo una mayor responsabilidad en su trabajo y reflexión. Los pupitres se dispondrán de uno en uno mirando hacia la pizarra desde el inicio de la clase.

Duración y organización del tiempo:

La duración de la tarea será la de una sesión de 50 minutos. Se estructurará el tiempo para las distintas tareas para que los estudiantes puedan abordar todas ellas y haya tiempo suficiente para el trabajo individual, la reflexión personal y la puesta común y su corrección.

Material y recursos:

-Hoja de instrucciones y anotaciones para cada estudiante.

-Juego de cuatro tarjetas para cada estudiante. Las tarjetas tendrán escritas en uno de sus lados cuatro letras chinas correspondientes a cuatro elementos I Ching con su traducción en castellano debajo de cada letra.

-Pizarra para las explicaciones

Antecedentes y objeto de la actividad:

Esta actividad de experimentación consta de tres tareas dentro de una misma sesión y pretende ser una introducción al campo de la combinatoria en la que los estudiantes profundizarán más en los cursos de 3º y 4º de ESO. Como en la primera parte de la actividad anterior, esta actividad pretende ser de carácter deductivo, en este caso de forma individual, comparando los tres casos propuestos para que puedan llegar a saber distinguir entre las variaciones, las permutaciones y las combinaciones.

También se requiere que los estudiantes expresen sus resultados de forma gráfica y algebraica, y se acostumbren a expresar sus conclusiones y dudas al resto del grupo. Al tratarse de una introducción, se formalizarán las fórmulas del contenido para que las conozcan, pero no se les exigirá aprenderlas o trabajarlas más allá de la propia actividad. En esta sesión aparece en la formulación la operación factorial, y puede ser un buen momento si el nivel del grupo lo permite, para introducirla y explicarla a los estudiantes. El binomio de Newton, que también aparece en la formulación, puede ser ya demasiado complicado en este

curso, pero podría barajarse su inclusión en el caso de facilitar una ampliación de contenido a estudiantes de altas capacidades.

Desarrollo:

4ª SESIÓN

Se dispondrá a los estudiantes de forma individual y se les repartirá la hoja a modo de instrucciones para que cada uno vaya escribiendo las notas de los experimentos y anotando las soluciones y las correcciones posteriores. Además, se le repartirá a cada uno, un juego de cuatro tarjetas. En uno de los lados de cada tarjeta estará escrita una letra china, con su traducción en castellano, correspondientes a cuatro significados de los trigramas del libro I Ching: el cielo, la tierra, el agua y el viento. En el otro lado, las tarjetas tendrán las letras A, B, C y D, para facilitar la transcripción del experimento al lenguaje algebraico.

En la Figura 20 se puede observar un ejemplo de estas tarjetas, con los dos lados de cada una de ellas:



FIGURA20 – Material manipulativo. Tarjetas con cuatro letras chinas correspondientes a cuatro de los trigramas del I Ching.
Fuente: Elaboración propia

A través de las tareas de esta actividad, se introducirá a los estudiantes los conceptos de variaciones, permutaciones y combinaciones.

- **TAREA 2.1-Primer experimento:**

Los estudiantes tendrán que manipular las tarjetas y, pudiendo elegir entre las cuatro letras, tendrán que deducir dibujando las letras chinas en su papel todas las posibles agrupaciones en línea usando tres letras distintas. Para ello se les darán unos 10 minutos. Después lo pondrán en común con los compañeros y se corregirá. Se les explicará lo que son las variaciones sin repetición además del método de cálculo de posibles según la posición de los elementos. Este método les permitirá conocer el número de agrupamientos posibles sin necesidad de manipular las tarjetas. Después, se escribirá la fórmula y se comprobará su resultado en la pizarra.

- **TAREA 2.2-Segundo experimento:**

Procediendo como en el caso anterior, los estudiantes tendrán que manipular las tarjetas y calcular el número de agrupaciones posibles, esta vez dibujando en línea las cuatro tarjetas distintas en sus distintas combinaciones. Para ello se les darán unos 5 minutos. Después como en la tarea anterior se pondrá en común y se corregirá en la pizarra aplicando el método de cálculo explicado anteriormente. Se les explicará lo que son las permutaciones sin repetición, como un caso particular de las variaciones, y se escribirá su fórmula para comprobar después el resultado de este ejemplo en la pizarra.

- **TAREA 2.3-Tercer experimento:**

En este caso se les propondrá calcular el número de agrupaciones o montones posibles y distintos de tarjetas sin importar el orden. Para ello se les darán unos 4 minutos. Ante la dificultad que puede conllevarles, se les aconsejará que usen las letras A, B, C y D del otro lado de las tarjetas para ayudarse a pensar en las distintas combinaciones posibles. Después se pondrá en común y se explicará la diferencia entre las combinaciones y las variaciones y permutaciones. Ayudándose de un método en árbol, se buscará el número de combinaciones y se escribirá su fórmula para comprobar el resultado.

Si hubiera tiempo se propondrá varios casos para que los estudiantes analicen si se trata de variaciones, permutaciones o combinaciones. Al finalizar la sesión, los estudiantes entregarán el material adecuadamente en la mesa del profesor y la hoja con las notas y correcciones.

Documentos para la evaluación:

-Evaluación individual, con notas del profesor analizando el comportamiento, interés y participación dentro del grupo.

- Evaluación individual, a través del trabajo en la hoja de anotaciones entregada por cada estudiante.

Atención a la diversidad:

En este tipo de actividades individuales, no siempre es posible atender las necesidades personales, ya sea porque algún estudiante se pierda durante las actividades, o requiera de una explicación más extensa. Estos casos se tratarán con un aplazamiento al estudiante en cuestión, para reforzarle o explicarle en otro momento o/y facilitarle algún recurso que pueda consultar en casa. Como en la tarea anterior, los materiales se pueden adaptar para casos concretos, o optando por la posibilidad de agrupar a algunos estudiantes en parejas para que puedan apoyarse en el desarrollo. Para casos de estudiantes de altas capacidades esta actividad es una buena oportunidad de facilitarles una ampliación del contenido con la formulación, incluyendo la operación factorial y el binomio de Newton, así como los casos de variaciones, permutaciones y combinaciones con repetición.

Documentos para la valoración:

Notas de evaluación general después de la sesión por parte del profesor, valorando objetivos conseguidos, comportamiento e interés general y anotando posibles mejoras y reseñas destacadas.

5.5.3 ACTIVIDAD 3-LOS TRIGRAMAS Y HEXAGRAMAS DEL I CHING

Contenidos matemáticos:

-Contenidos de probabilidad y combinatoria de las anteriores actividades.

-Diagramas en árbol.

Metodologías:

-Uso de la Historia de las Matemáticas como foco de interés.

-Trabajo individual, por parejas y en pequeños grupos de cuatro estudiantes.

-Lección magistral participativa.

-Resolución de problemas.

-Uso del dibujo como medio de análisis computacional y matemático.

Organización del alumnado y agrupamientos:

Se trata de una actividad compuesta de dos sesiones y una tarea a realizar en casa. En la actividad se trabajará en distintos agrupamientos: individualmente, en parejas y en grupos de cuatro, dependiendo del momento de la actividad.

En la primera sesión, se trabajará por parejas, preferiblemente en equipos mixtos. Después de esta primera sesión, se pedirá una tarea individual para casa que consistirá en la búsqueda de posibles soluciones a un problema abierto que se formulará a los estudiantes. En la siguiente sesión, se abordará este problema en grupos de cuatro estudiantes para que puedan comentar y argumentar las posibles soluciones dentro del grupo y llegando a un acuerdo de equipo de solución o procedimiento para el problema. Posteriormente, estas soluciones de equipos serán puestas en común y corregidas dentro del gran grupo. En las dos sesiones, se alternará el trabajo en equipos con la puesta en común de respuestas y soluciones por parte de los estudiantes con las explicaciones del profesor desde la pizarra al gran grupo.

Duración y organización del tiempo:

La duración de la actividad será de dos sesiones de 50 minutos, además de la tarea que se mandará para casa. Se facilitará más tiempo de trabajo en grupos para que los propios estudiantes puedan conjeturar y dar posibles soluciones a los problemas planteados, dando en esta actividad menor importancia a la propia corrección del profesor.

Material y recursos:

-Hojas individuales de instrucciones en papel cuadriculado.

-Pizarra para las explicaciones.

Antecedentes y objeto de la actividad:

Esta actividad pretende ser una síntesis de los contenidos trabajados ya en las dos actividades anteriores y que los estudiantes sean capaces de poner en prácticas los mecanismos aprendidos. Además, se propone trabajar desde todas las formas de agrupamiento posibles para dar pie, por un lado al razonamiento individual, pero también, para facilitar la interacción en grupo ante la búsqueda de la resolución de un problema de mayor complejidad. Los estudiantes tendrán ya los materiales y apuntes de las actividades y clases teóricas anteriores, dándoles en esta actividad más independencia y autonomía en su proceso de razonamiento y resolución. Únicamente se reserva una pequeña parte del tiempo a una explicación sobre el método en árbol, como recurso de resolución, ya que les habrá sido explicado en una sesión teórica previa. La metodología principal de la actividad será la de resolución de problemas, basados éstos en la probabilidad y la combinatoria a través de los trigramas y hexagramas del libro I Ching.

Las hojas de instrucciones, al igual que en las actividades anteriores, serán de papel cuadriculado, facilitando el dibujo, la escritura, la jerarquía y el orden en el proceso de reflexión y razonamiento de los estudiantes.

Desarrollo:

6ª SESIÓN:

Se dispondrá a los estudiantes por parejas, preferiblemente mixtas. Se le repartirá a cada uno la hoja con las instrucciones de la tarea para que puedan realizar sus reflexiones, dibujos y anotaciones algebraicas en el desarrollo de la sesión. En la hoja, que será de papel cuadriculado para ayudar al dibujo en el proceso, vendrán dibujados como ayuda inicial los símbolos del Yin y el Yang.

- **TAREA 3.1-Búsqueda de bigramas y trigramas:**

Se proporcionará a cada estudiante la hoja de instrucciones de papel cuadriculado con los dos símbolos del Ying y el Yang del I Ching, y se les recordará su significado. Se les explicará el concepto de n-grama, poniendo algún ejemplo que puedan conocer, como el pentagrama musical, y después se pondrá un ejemplo de unigrama, bigrama, trigrama, etc. Después se les pedirá que con ayuda de su compañero/a busquen los posibles bigramas distintos que se pueden formar con los dos símbolos del Yin y el Yang, pudiendo usar más de una vez cada símbolo. Después se pondrá en común y se dibujarán en la pizarra los cuatro bigramas posibles. Se aprovechará esta explicación para recordar el método de árbol, usado en probabilidades, que en este caso puede usarse como método deductivo de todos los dibujos posibles que se piden.

A continuación, se procederá de forma similar para que consigan deducir los posibles trigramas usando los dos elementos iniciales recalando que cada elemento puede repetirse las veces que se quiera. En esta parte se les dará más tiempo, ya que lo interesante es que haya interacción entre los dos estudiantes de cada pareja y lleguen a una solución común.

Concluido el tiempo de trabajo se pondrá en común y se corregirá mediante el método de árbol en la pizarra, pero analizando además qué métodos han seguido en los equipos y si dicho método les ha dado un buen resultado y no han olvidado ningún elemento de los posibles. Es conveniente que puedan expresar sus opiniones y dudas en este punto. En este momento también se les explicará, con una pequeña presentación proyectada que estos ocho elementos constituyen la base principal del oráculo descrita en el I Ching y que se corresponde a una serie de elementos que ellos podrán escribir en sus hojas junto a la solución.

En la Figura 21, se muestra una posible deducción de los trigramas a través del método en árbol, y la ayuda del papel cuadriculado para poder realizar los dibujos:

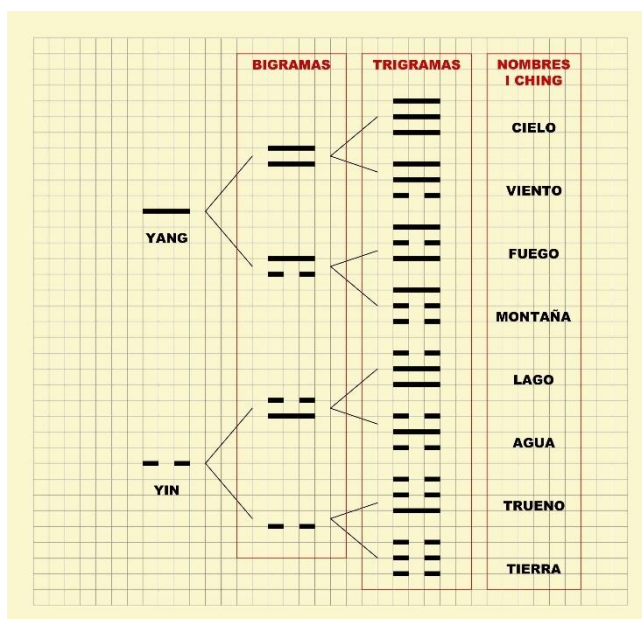


FIGURA 21 – Ejemplo de deducción de los trigramas del I Ching por medio del método en árbol
Fuente: Elaboración propia

- **TAREA 3.2-Comparación de procesos de monedas y trigramas:**

En esta segunda parte de la sesión, se les recordará a los estudiantes el experimento de las tres monedas realizado en una actividad anterior proyectando la hoja de soluciones de esta tarea ya realizada por ellos.

En dicho experimento, los estudiantes habían calculado la probabilidad teórica en la tirada de las tres monedas de los posibles resultados distintos. Se les preguntará qué similitudes y diferencias hay entre los dos procedimientos, monedas y dibujos, ya que ambos parten de los mismos dos elementos de Yin y Yang, y también se configuran en ambos casos grupos de tres elementos donde puede haber repetición. Se recalcará que el número de cuatro resultados distintos de las monedas, 3 Yin, 3 Yang, 2 Yin y 1 Yang, 2 Yang y 1 Yin, es distinto a los ocho trigramas posibles que acaban de deducir. Se trata de que se den cuenta de que hay diferencia entre que los elementos se diferencien por su orden o no. De esta forma, se extiende también la tarea a valorar los resultados desde el punto de vista de la combinatoria, como combinaciones con repetición donde el orden no importa, o como variaciones con repetición, donde el orden si importa.

Después se recogerán las hojas de notas de los estudiantes. Al finalizar la sesión se les repartirá la tarea individual para realizar en casa y se les explicará su contenido.

- **TAREA 3.3-TAREA PARA CASA-Lenguaje algebraico y búsqueda de hexagramas:**

La tarea para casa tratará de dos partes en conexión con las tareas 3.1 y 3.2 de la sesión anterior.

El primer apartado de la tarea consistirá en asignar una letra a los elementos Yin y Yang del I Ching, por ejemplo, N al Yin y G al Yang, y tendrán que escribir el espacio muestral de todas las probabilidades teóricas posibles de grupos de dos y tres elementos, con y sin repetición. Esta parte no se corregirá en clase, sino que será valorada por el profesor una vez que entreguen la hoja en la siguiente sesión.

El segundo apartado consiste en que piensen cuántos hexagramas distintos pueden formarse con los dos elementos y qué método o métodos seguirían para calcularlo de la mejor forma y ahorrando el mayor tiempo y número de cuentas y dibujos posibles. Este planteamiento de problema abierto busca que razonen y den respuesta de forma individual, para luego ponerla en común en el trabajo en pequeños grupos de la siguiente sesión.

7ª SESIÓN:

Durante esta sesión, se dispondrá a los estudiantes en grupos de cuatro. Cada estudiante tendrá su hoja de la tarea 3.3 realizada en casa y, además, se le repartirá a cada uno la hoja con las instrucciones de la tarea de esta sesión. Lo interesante en este caso es que anoten las reflexiones y decisiones del grupo en el que trabajarán.

- **TAREA 3.4-Búsqueda de hexagramas:**

Los estudiantes tendrán un largo tiempo de la sesión para compartir sus soluciones individuales al problema, valorarlas, y decidirse en grupo por un único método de resolución a seguir, el cual pondrán posteriormente en común con el resto de la clase. En este caso, se estructurará el tiempo del grupo en dos partes: una primera en el que todos/as deben compartir su solución y/o razonamiento con sus compañeros/as y una segunda parte de opinión y toma de decisiones. Se asignará un rol de mediador a uno de los estudiantes en cada grupo para que ayude en el turno de la palabra para el cambio de opiniones y valoraciones. Todos los miembros del grupo anotarán las opiniones de los demás en su hoja y la decisión final con el método elegido y la solución al problema. Después de esto, y por turnos, un portavoz de cada grupo expondrá la solución de su grupo al resto de la clase. El profesor irá anotando los distintos caminos y soluciones de los grupos en la pizarra para que todos/as puedan visualizarlos.

Después corregirá y valorará las distintas respuestas, y expondrá tres métodos con los que se podría llegar a la solución: a través del método en árbol, a través del cálculo de variaciones con repetición, y a través de una tabla de doble entrada de conjugación entre los ocho trigramas posibles para formar los hexagramas.

En la Figura 22, se muestra una posible deducción del número de hexagramas a través del método en árbol, partiendo de los trigramas:

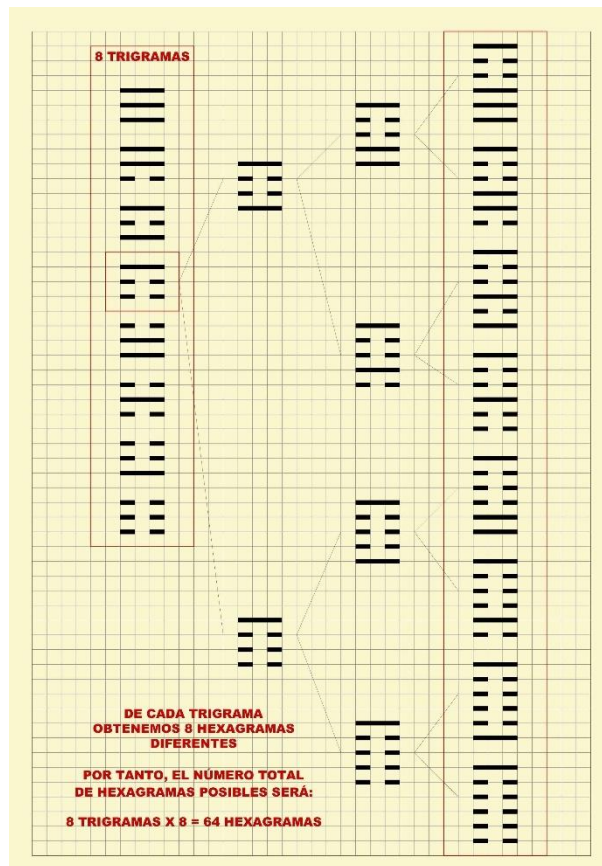


FIGURA 22 – Ejemplo de deducción de los hexagramas del I Ching a través de los trigramas por medio del método en árbol
Fuente: Elaboración propia

En la Figura 23, se muestra otra posible deducción del número de hexagramas a través de una tabla de doble entrada, partiendo de los trigramas:

	CIELO	TIERRA	TRUENO	AGUA	MONTAÑA	VIENTO	FUEGO	LAGO
CIELO	☰☰	☰☷	☰☳	☰☵	☰☶	☰☴	☰☲	☰☱
TIERRA	☷☰	☷☷	☷☳	☷☵	☷☶	☷☴	☷☲	☷☱
TRUENO	☳☰	☳☷	☳☳	☳☵	☳☶	☳☴	☳☲	☳☱
AGUA	☵☰	☵☷	☵☳	☵☵	☵☶	☵☴	☵☲	☵☱
MONTAÑA	☶☰	☶☷	☶☳	☶☵	☶☶	☶☴	☶☲	☶☱
VIENTO	☴☰	☴☷	☴☳	☴☵	☴☶	☴☴	☴☲	☴☱
FUEGO	☲☰	☲☷	☲☳	☲☵	☲☶	☲☴	☲☲	☲☱
LAGO	☱☰	☱☷	☱☳	☱☵	☱☶	☱☴	☱☲	☱☱

FIGURA 23 – Ejemplo de deducción de los hexagramas del I Ching a través de una tabla de doble entrada de los trigramas
Fuente: Elaboración propia

Al finalizar, se les recogerán las hojas de notas de la tarea 3.3 que se mandó para casa y de la tarea 3.4 realizada en la sesión.

Documentos para la evaluación:

-Evaluación por parejas, con notas del profesor, analizando el comportamiento, interés y participación, así como la relación entre los compañeros.

- Evaluación individual, a través de la hoja de anotaciones entregada por cada estudiante en todas las tareas, y en la tarea para casa.

-Evaluación por parejas, con notas del profesor, analizando el comportamiento, interés y participación, así como la relación entre los compañeros.

Atención a la diversidad:

En esta secuencia de actividades en la que se incluye el trabajo en pequeños grupos y en las que se concede cierta autonomía a los estudiantes para que interactúen entre ellos, es importante controlar que los grupos están funcionando y todos los estudiantes participen durante la sesión. En el caso de que, a pesar de diseñar los grupos para asegurar el buen funcionamiento de los mismos y exista un mediador, se prevea que puedan surgir conflictos o que algún estudiante no participará, se podría recurrir a introducir algún tipo de dinámica de turnos para asegurar la participación de todos/as. Un ejemplo de estas dinámicas son las fichas de tiempo para hablar, para que los/as alumnos/as estén obligados a participar y gastar sus fichas y participen por igual.

En el caso de estudiantes con altas capacidades, como en la actividad anterior, esta actividad es muy interesante para ofrecerles material y recursos para que amplíen sus conocimientos en la introducción a la combinatoria. Por ejemplo, podría facilitárseles algún video tipo podcast de difusión matemática.

Documentos para la valoración:

Notas de evaluación general después de la sesión por parte del profesor, valorando objetivos conseguidos, comportamiento e interés general en las parejas y dentro de los grupos y anotando posibles mejoras y reseñas destacadas. En el caso de que los estudiantes no hayan alcanzado de forma suficiente los conocimientos trabajados en la primera sesión de la actividad, habría que replantearse modificar el planteamiento, reduciendo los contenidos y expectativas en la segunda sesión.

5.5.4 ACTIVIDAD 4-MATEMÁTICAS CHINAS

Contenidos matemáticos:

Aquellos que los estudiantes elijan en su trabajo de investigación.

Metodologías:

-Uso de la Historia de las Matemáticas como foco de interés.

-Trabajo individual y por parejas.

-TICS a través de un trabajo de investigación personal.

-Exposición oral al resto de estudiantes.

-Difusión de sus trabajos a través de una exposición visual en el centro educativo.

Organización del Alumnado y Agrupamientos:

Se trata de una tarea a realizar individualmente y por parejas. En la primera sesión, los estudiantes se organizarán por parejas para trabajar en el aula de informática. Tendrán que elegir un tema de investigación matemática sobre la cultura china y se repartirán el trabajo para desarrollarlo entre ambos. En la siguiente sesión, acabarán y juntarán su trabajo, y prepararán una pequeña presentación visual para exponerlo en la tercera sesión de la actividad. Después de exponer su trabajo en la tercera sesión, a cada pareja se le facilitará una cartulina para que realicen, también en pareja y como trabajo para casa, un panel expositivo para organizar con todos ellos una pequeña exposición de difusión cultural-matemática en las zonas comunes del centro educativo.

Duración y organización del tiempo:

La duración de la actividad será de tres sesiones de 50 minutos. En las dos primeras sesiones se repartirá el tiempo para el trabajo en parejas y el trabajo individual. En la tercera sesión, cada pareja dispondrá de 4 minutos para su exposición.

Material y recursos:

- Links preparados por el docente de contenidos de la Matemática en la cultura china y lista de posibles contenidos para que elijan tema de investigación.
- Sala de informática con un ordenador para cada estudiante.
- Ordenador y proyector en el aula.
- Cartulinas para la exposición. Una por pareja de estudiantes.

Antecedentes y objeto de la actividad:

Esta actividad, frente a las anteriores, busca trabajar otro tipo de objetivos vinculados con el ámbito cultural de las Matemáticas, las TICS y la comunicación y difusión. Es una oportunidad para trabajar a través de internet y aprovechar la formación que los estudiantes reciben a lo largo del año de cómo trabajar en entornos seguros dentro de la red, y también para que aprendan a buscar referencias de un tema matemático. Se ha decidido que el trabajo sea por parejas y se vayan repartiendo las tareas progresivamente, aunque eso no es motivo para que no adquieran una gran responsabilidad individual para que las tareas en equipo puedan finalizarse adecuadamente. En línea con las orientaciones de las situaciones de aprendizaje marcadas por la ley educativa en Castilla y León, que aconseja incluir un punto final de difusión del conocimiento, se ha incluido como terminación de la situación de aprendizaje, una exposición visual a modo de difusión cultural y matemática de sus trabajos.

Desarrollo:

8ª SESIÓN:

• TAREA 4.1-Búsqueda de información y reparto del trabajo

Se llevará a los estudiantes a la sala de informática y se les repartirá por parejas en los ordenadores. Cada estudiante dispondrá de un ordenador. Se explicará la tarea a realizar durante las sesiones, la cual consistirá en un trabajo de investigación sobre las Matemáticas en la cultura china. Las tareas a realizar constarán de un trabajo escrito a ordenador entre los dos estudiantes de cada equipo, una exposición oral sobre el trabajo al resto de la clase también por parejas y, finalmente, cada equipo tendrá que realizar un panel explicativo para crear una exposición visual en alguna zona común del centro educativo para que puedan verla todos los/as usuarios/as del centro.

Se aprovechará la plataforma Teams, o plataforma similar con la que habitualmente trabajen en la asignatura, para colgar en la red a los estudiantes una lista de temas de investigación posibles, de los cuales tendrán que elegir por turnos uno de ellos, para que haya variedad temática en los trabajos. Además, se les pasará una plantilla de trabajo con distintos puntos a desarrollar en el trabajo escrito. Después se explicará brevemente cómo pueden buscar la información. El docente dispondrá ya de algunos enlaces y contenidos para facilitarles la búsqueda, en el caso de que no consigan encontrar información suficiente.

Una vez tengan los enlaces web de la información, tendrán que repartirse el trabajo para escribir, el cual lo realizarán en la segunda parte de la sesión y posteriormente como tarea para casa. Si existiera la posibilidad, cada estudiante trabajará en red para que el profesor pueda ir evaluando el trabajo individual y por parejas de cada equipo.

- **TAREA 4.2-TAREA PARA CASA-Realización escrita del trabajo individual.**

Cada miembro del equipo acabará de desarrollar su parte del trabajo en casa, por lo que es muy importante que al final de la sesión anterior copien en la plataforma los links que han encontrado y la plantilla del trabajo con los puntos a desarrollar por cada miembro de la pareja. Deben terminar su parte de trabajo en casa para juntar ambas partes en el inicio de la siguiente sesión.

9ª SESIÓN:

- **TAREA 4.3-Reunir las partes del trabajo y maquetación. Presentación para exposición oral.**

Al igual que en la sesión anterior, los estudiantes trabajarán en la sala de informática y se les repartirá por las parejas en los ordenadores. Esta vez usarán un solo ordenador por pareja. Cada equipo juntará el trabajo realizado en una plantilla de entrega y lo maquetarán, incluyendo algunas imágenes o figuras para entregarlo en la primera parte de la sesión. En la segunda parte tendrán que organizarse para realizar la presentación oral de la siguiente sesión en la que ambos tendrán que explicar el trabajo realizado. Para ello, en el resto de esta sesión realizarán juntos una pequeña presentación para proyectar en su exposición. Si no diera tiempo a acabarla se dejará la posibilidad de que la acaben en casa poniéndose de acuerdo entre los componentes de cada equipo.

10ª SESIÓN:

- **TAREA 4.4-Exposición oral para el resto de la clase**

Se llevará a cabo en la clase habitual, en la que se dispondrá de un ordenador y un proyector para que la clase pueda visualizar las presentaciones realizadas por cada equipo mientras exponen su trabajo. Se le asignará 4 minutos a cada equipo y tendrán que hablar los dos miembros del mismo. En esta actividad se realizará una evaluación del profesor, una autoevaluación del equipo de su propia exposición y una evaluación individual de los/as compañeros/as de la clase.

En la última parte de la clase, se repartirá a cada pareja una cartulina para que trabajando por parejas ya en casa, realicen un pequeño panel para una exposición visual de difusión de sus investigaciones en el centro educativo.

TAREA 4.5-TAREA PARA CASA-Realización de panel expositivo

Para realizar los paneles expositivos con la cartulina tendrán técnica libre, dándoles algunas ideas: mapas conceptuales, collage, fotografías impresas, dibujos, recortes de texto, etc. Se les dejará una semana para que puedan organizarse y realizar el panel. Pasado ese tiempo, se recogerán los paneles y se montará la exposición en el centro, realizando una pequeña inauguración en el recreo y subiendo las fotos a las redes sociales del centro para mayor difusión y los estudiantes puedan realizar comentarios.

Documentos para la evaluación:

- Evaluación individual y por parejas, con notas del profesor analizando el trabajo en equipo, el comportamiento, el interés y la participación, así como la relación entre los compañeros.
- Evaluación individual y por parejas del trabajo escrito en el ordenador, tanto del proceso, como del resultado final.
- Evaluación por parejas de la presentación para la exposición.
- Evaluación individual de la exposición oral, a través de la evaluación del profesor, de su autoevaluación y de la evaluación de sus compañeros/as.
- Evaluación por parejas de la realización del panel de exposición.

Atención a la diversidad:

Se prestará especial atención a las necesidades de los estudiantes en el trabajo de ordenador y se intentará equilibrar las parejas para que los estudiantes con más habilidades en este campo trabajen con los que menos habilidades tienen. Si no se conociera el nivel de sus habilidades, se consultará con otros profesores de informática o tecnología para conocer estos aspectos de cara a la planificación. Es importante que antes de realizar la actividad, los estudiantes hayan recibido formación en la navegación segura en red y existan los correspondientes filtros para las búsquedas seguras de la información. También es importante que se organice bien la plataforma educativa, con orden y jerarquía en las carpetas, y tareas para facilitar el trabajo a los estudiantes, y que de esta manera también aprendan a ordenar sus trabajos en los medios digitales.

Documentos para la valoración:

En esta actividad se dispondrá de mucho material para realizar una valoración de las distintas tareas y de la repercusión que pueda tener la fase de difusión final en el proceso de aprendizaje. Será importante valorar si la actividad ha sido atrayente para los estudiantes, si han mostrado curiosidad y si se han implicado en ella, y si les ha servido para aumentar su conocimiento sobre las Matemáticas y su historia. Será también importante valorar qué aspectos son mejorables, y si el tiempo dedicado ha merecido la pena o podría haberse hecho esta tarea como trabajo a realizar en casa, tanto de forma individual o en equipos, y restar el menor tiempo posible de docencia.

5.6 ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES

Tal y como se ha comentado ya en el apartado de atención a la diversidad de cada actividad, será importante disponer de recursos para poder atender a todos los perfiles de los estudiantes según marca el diseño universal de aprendizaje (DUA).

Las hojas de instrucciones que se han previsto en cada tarea, puedan ayudar a muchos perfiles de estudiantes que requieran una explicación más personalizada a través de ampliar las explicaciones, usar colores, tamaños más grandes, etc. Estas hojas de instrucciones se han diseñado como el papel cuadriculado que usan habitualmente los estudiantes, ya que una de las dificultades generales observadas durante el Prácticum ha sido la realización de las pruebas escritas por parte de los estudiantes en papel blanco al que no están acostumbrados en el día a día del aula, dificultando la realización de los ejercicios y problemas y entorpeciendo el orden y jerarquización de la escritura matemática. Además, el uso de los problemas como metodología de aprendizaje es una buena herramienta en la que pueden usarse pistas y ayudas para fomentar el interés y razonamiento en las Matemáticas para todos los perfiles de estudiantes, sea cual sea su nivel.

La ventaja de trabajar en pequeños grupos permite ayudarse de algunos estudiantes para equilibrar la demanda de atención de otros, y además permiten dotar al profesor de mayor tiempo de atención en los grupos que lo requieran. Es primordial también el contacto continuo con el tutor o tutora del grupo, para conocer las posibles necesidades de los estudiantes o sus situaciones familiares para poder adecuar las tareas, especialmente las tareas para casa para que resulten motivadores no produzcan resultados opuestos en los estudiantes. En el caso de estudiantes con altas capacidades, es más difícil crear situaciones en el aula donde puedan desarrollar todas sus inquietudes y expectativas, por lo que es más fácil disponer de recursos adecuados para ampliar contenidos a estos estudiantes y que puedan trabajarlos durante la clase o en las tareas para casa. El papel de estos estudiantes en los trabajos en parejas y pequeños grupos puede ser interesante para ellos y sus compañeros.

Por otro lado, y como ya se ha explicado, la ventaja de ubicar esta situación de aprendizaje en el último trimestre permite tener un conocimiento más profundo del grupo y de los estudiantes individualmente para poder adoptar las medidas necesarias en cada momento. Aunque no se ha concretado un marco real y específico para el desarrollo de la situación de aprendizaje, se ha decidido realizar la última actividad de investigación a través de las TICS en el centro educativo, dejando solo como tarea para casa rematarla, puesto que en muchos casos las familias no disponen de medios adecuados en casa que permitan realizar este tipo de tareas.

5.7 PROCESO DE EVALUACIÓN

El proceso de evaluación se realizará a través de los documentos de evaluación de las distintas actividades para valorar los criterios de evaluación correspondientes a la situación de aprendizaje. Se elaborará una rúbrica a través de cuatro logros o niveles para cada criterio de evaluación contemplado en la situación de aprendizaje. Los logros corresponderán a los siguientes niveles: Insuficiente con valor de 1 punto, mejorable con valor 2 de dos puntos, satisfactorio con valor de 3 puntos y excelente con valor 4 puntos. En cada actividad se valorará cada criterio que le corresponda a través de estos cuatro niveles.

En la siguiente tabla, se ha plasmado un ejemplo de documento de evaluación de una de las actividades con la correspondencia los criterios de evaluación a valorar en verde, y los cuatro niveles o logros.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN		ACTIVIDAD 1 LAS TRES MONEDAS			
		4 EXCELENTE	3 SATISFACTORIO	2 MEJORABLE	1 INSUFICIENTE
BLOQUE 1	1.1				
	1.2				
	1.3				
	2.1				
	2.2				
BLOQUE 2	3.1				
	3.2				
	4.1				
	4.2				
BLOQUE 3	5.1				
	5.2				
	6.1				
	6.3				
BLOQUE 4	7.1				
	7.2				
	8.1				
	8.2				
BLOQUE 5	9.1				
	9.2				
	10.1				
	10.2				

Al finalizar la situación de aprendizaje se sumarán los valores numéricos de cada criterio para hacer una media ponderada para obtener la calificación final de cada criterio sobre 4 puntos. En la evaluación final se tendrá en cuenta las indicaciones del departamento del centro para del valor de cada criterio y de cada bloque, realizando la media adecuada para la calificación final del alumno.

En la siguiente tabla, se ha plasmado la correspondencia entre los criterios de evaluación a evaluar reflejados en el punto 5.3.4 de este documento para toda la situación de aprendizaje, y las actividades de la situación de aprendizaje en la que se aplican éstos con la marca en la que estos son de aplicación:

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDAD 1 LAS TRES MONEDAS			ACTIVIDAD 2 LAS CUATRO LETRAS CHINAS			ACTIVIDAD 3 LOS TRIGRAMAS Y HEXAGRAMAS DEL I CHING				ACTIVIDAD 4 MATEMÁTICAS CHINAS				
	TAREA 1.1	TAREA 1.2	TAREA 1.3	TAREA 2.1	TAREA 2.2	TAREA 2.3	TAREA 3.1	TAREA 3.2	TAREA 3.3	TAREA 3.4	TAREA 4.1	TAREA 4.2	TAREA 4.3	TAREA 4.4	TAREA 4.5
BLOQUE 1	1.1	X	X	X											
	1.2	X	X	X	X	X	X	X	X	X					
	1.3	X	X	X	X	X	X	X	X	X					
	2.1	X	X	X	X	X	X	X	X		X				
	2.2	X	X	X	X	X	X	X	X		X				
BLOQUE 2	3.1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X				
	3.2	X	X	X											
	4.1							X	X	X	X				
	4.2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X				
BLOQUE 3	5.1				X	X	X	X	X	X	X				
	5.2				X	X	X	X	X	X	X				
	6.1	X	X	X											
	6.3										X	X	X	X	X
BLOQUE 4	7.1				X	X	X	X	X	X	X				
	7.2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X				
	8.1							X	X		X	X	X	X	X
	8.2							X	X		X	X	X	X	X
BLOQUE 5	9.1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	9.2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	10.1	X	X	X				X	X	X	X	X	X	X	X
	10.2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

5.8 VALORACIÓN DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

La valoración de la situación de aprendizaje se realizará durante todo el transcurso de la misma. El docente dispondrá de unas hojas o diario donde apuntar los aspectos más relevantes de las sesiones: aspectos relevantes positivos y negativos, dinámica general, gestión de los tiempos, contenidos planificados que no haya dado tiempo a dar, implicación de los estudiantes, etc. Es vital reflejar estos aspectos en la finalización de cada sesión a través de sus propias impresiones, pero también teniendo en cuenta las del alumnado, por lo que es importante también mantener una comunicación activa y de confianza con el grupo.

En la corrección de los trabajos y tareas reflejará también en la valoración los resultados objetivos obtenidos, así como el reflejo de la incidencia positiva o negativa de las propuestas de aprendizaje en el trabajo personal de cada estudiante. En esta propuesta didáctica será muy importante valorar el potencial del trabajo en pareja y en grupo, evaluando su comportamiento, y si esta modalidad contribuye a mejorar o no el progreso de los estudiantes con más dificultades en la materia.

Al finalizar la situación de aprendizaje, se elaborará una pequeña síntesis de los resultados obtenidos, marcando claramente los puntos a mejorar y a consolidar, y compartir este documento en el departamento para futuras aplicaciones por el mismo o por otros docentes de este curso.

Las dos siguientes propuestas, de situaciones de aprendizaje orientadas a los cursos de 1º y 3º de ESO, únicamente se han esbozado, sin llegar a profundizar en su desarrollo curricular. En ambos casos, al igual que en la situación de aprendizaje del apartado anterior, incluyen el uso de los materiales manipulativos y la Historia de las Matemáticas como recursos notables para alcanzar el aprendizaje significativo. Desde este enfoque de anteproyecto de una situación de aprendizaje, el desarrollo se ha entendido más como un conjunto de ideas de actividades flexibles y abiertas, tanto en los contenidos matemáticos a incluir en ellas, como en el tiempo de dedicación previsto para su realización.

6.1 PROPUESTA DE SITUACIÓN DE APRENDIZAJE PARA 1º DE ESO: LAS FRACCIONES Y EL OJO DE HORUS

6.1.1 TÍTULO

Las fracciones y el Ojo de Horus.

6.1.2 CONTEXTUALIZACIÓN

Contexto

Se plantea esta situación de aprendizaje para el curso de 1º de ESO, dentro de la etapa de Secundaria. Los grupos de 1º de ESO, especialmente en los centros públicos, suelen ser grupos heterogéneos de estudiantes que provienen de la etapa de Primaria, muchas veces de centros y situaciones personales muy diferentes, y que empiezan en su vida una nueva etapa académica llena de cambios, retos y esfuerzos. Es por ello, que la atención personalizada y la atención a la diversidad en este curso tiene mayor importancia si cabe. El uso de los materiales manipulativos, que es un recurso de uso generalizado en la etapa de Primaria, ayuda a los estudiantes de este curso inicial de Secundaria en su aprendizaje, y a adecuarse al requerimiento del razonamiento abstracto que la etapa de Secundaria supone. En estos grupos de 1º de ESO, al principio de curso, además de realizar actividades y pruebas de diagnóstico del nivel previo con el que cuentan los estudiantes, es vital recoger información acerca de los centros de los que provienen los mismos, para anticiparse a las lagunas de contenidos que estos pudieran manifestar, realizando una correcta programación del curso y elaborando un planteamiento adecuado de los contenidos del Currículo.

Elección de contenidos

Los contenidos a abordar en esta situación de aprendizaje son principalmente los contenidos del bloque de fracciones del Currículo para el curso de 1º de ESO de la materia de Matemáticas. La elección de este contenido tiene su justificación en la dificultad que entraña este bloque para los estudiantes de 1º de ESO, y más si no se ha trabajado de forma adecuada anteriormente en la etapa de Primaria. Este es uno de los contenidos básicos sobre los que se cimientan todos los contenidos matemáticos posteriores. Debido a esta importancia, se ha decidido abordar este contenido por medio de la Historia de las Matemáticas con el llamado Ojo de Horus y sus fracciones unitarias, en el que los/as alumnos/as podrán realizar conexiones entre distintos contenidos matemáticos dentro de un foco cultural atrayente para ellos, además de incluir el uso de material manipulativo a través de una actividad de kirigami.

Temporalización

Esta situación de aprendizaje está pensada para incluirse dentro del bloque de contenido de fracciones, u, opcionalmente, en otro momento posterior a este bloque, como síntesis y refuerzo de esta unidad en conexión también con otros contenidos matemáticos del curso como son las potencias, la geometría o los porcentajes.

La primera de las actividades denominada “Las fracciones del Ojo de Horus” se trata de una actividad sencilla de una sola sesión sobre fracciones unitarias, pero a la vez, es una actividad flexible que puede acortarse o extenderse en conexión con otros contenidos matemáticos a una segunda sesión, según lo requiera el grupo o lo predisponga el docente.

Es conveniente que antes de realizar la segunda actividad llamada “Los Graneros del Faraón”, se haya desarrollado el bloque de geometría plana y espacial, o en su defecto, se realice un repaso previo básico con los estudiantes sobre unos mínimos de contenido de perímetro, área y volumen de prismas rectos. Esta condición tiene su razón de ser en la complejidad de la actividad, que usa la geometría como un medio de comprensión de las fracciones y sus operaciones, y que, sin esos conocimientos mínimos de los estudiantes no tendría sentido realizarla.

6.1.3 FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

En esta propuesta no se ha profundizado en el desarrollo Curricular, por lo que solo se hace referencia a los contenidos del Currículo del curso de 1º de ESO incluidos en la situación de aprendizaje, y a los elementos transversales que se trabajan en la misma. En el caso de llevarse a cabo, este anteproyecto de situación de aprendizaje tendría que desarrollarse a través de todos los elementos curriculares, modificando o ampliando las actividades indicadas para adecuarlas a los objetivos de etapa y el perfil de salida así definidos. A pesar de ello, es importante remarcar que esta situación de aprendizaje pretende trabajar sus contenidos principalmente a través del bloque de conexiones de las competencias específicas del Currículo.

Contenidos:

A. Sentido numérico

1. Conteo

- Investigación del origen de las cifras actuales, desde cuándo se usan y su comparación con otras provenientes de otras civilizaciones y culturas.

2. Cantidad

- Números naturales, enteros, fracciones, decimales y potencias de exponente natural en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana.

- Diferentes formas de representación de números naturales, enteros y racionales, incluida la recta numérica.

3. Sentido de las operaciones

- Operaciones con naturales, enteros, fracciones o decimales en situaciones contextualizadas.

- Relaciones inversas, entre las operaciones (adición y sustracción; multiplicación y división, elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada): comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas.

- Efectos de las operaciones aritméticas con naturales, enteros, fracciones, expresiones decimales, potencias de exponente natural y raíces sencillas.

4. Relaciones

- Reflexión sobre el potencial del sistema de numeración decimal posicional para los números naturales y sobre el origen de la numeración.

- Evaluación de las ventajas de un sistema posicional tanto para la lectura de las cantidades como para realizar operaciones

- Factores, múltiplos, divisores, m.c.d. y m.c.m.. Factorización en números primos para resolver problemas: estrategias y herramientas.

- Selección de la representación adecuada para una misma cantidad en cada situación o problema.

5. Razonamiento proporcional

- Razones y proporciones: comprensión y representación de relaciones cuantitativas.

- Porcentajes: comprensión y resolución de problemas. Expresión del porcentaje que representa una cantidad respecto a otra y cálculo del porcentaje de una cantidad.

-Relación con fracciones y razones.

- Situaciones de proporcionalidad directa en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas. Igualdad entre razones y método de reducción a la unidad.

B. Sentido de la medida

1. Magnitud

- Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos en el plano: investigación y relación entre los mismos.

- Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida en el plano.

2. Medición

- Longitudes, ángulos y áreas en formas planas: deducción, interpretación y aplicación.

- Representaciones de objetos geométricos planos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos.

C. Sentido espacial

1. Figuras geométricas de dos dimensiones

- Elementos característicos de las figuras geométricas planas.

- Construcción de figuras geométricas planas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada...).

3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica

- Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas en el plano.

D. Sentido algebraico

1. Patrones

- Patrones, pautas y regularidades: observación, dando el elemento siguiente o el elemento anterior y explicando de forma verbal cómo se generan patrones numéricos y geométricos.

2. Modelo matemático

- Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando material manipulativo y representaciones matemáticas para llegar al lenguaje algebraico con expresiones sencillas.

- Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico con expresiones sencillas.

- Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de una situación de la vida cotidiana una vez modelizada.

E. Sentido socioafectivo

1. Creencias, actitudes y emociones

- Esfuerzo y motivación: reconocimiento de su importancia en el aprendizaje de las matemáticas.

- Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas.

Autoconciencia y autorregulación.

- Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.

- Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.

2. Trabajo en equipo y toma de decisiones

- Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.

3. Inclusión, respeto y diversidad

- Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.

- La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...)

Elementos transversales:

En esta situación de aprendizaje se incluirá un elemento de la Historia de las Matemáticas, el Ojo de Horus y sus fracciones, como conocimiento cultural a la vez que como contenido propiamente matemático. La segunda actividad de la situación de aprendizaje no versa directamente sobre el Ojo de Horus, pero se ha enmarcado en el ámbito cultural del antiguo Egipto, haciendo referencia a la agricultura y los sistemas de medida usados por los egipcios.

6.1.4 METODOLOGÍA

Métodos, Estilos, estrategias y técnicas:

- Uso de la Historia de las Matemáticas como foco de interés.
- Trabajo manipulativo y experimental a través del kirigami.
- Trabajo por parejas.
- Resolución de problemas.

Organización del alumnado y agrupamientos:

En esta situación de aprendizaje, que consta de dos actividades, se trabajará individualmente durante la primera actividad correspondiente a una sesión y en parejas en la segunda actividad que comprenderá la tercera y cuarta sesión. Se ha optado por diversificar el trabajo y enfocar el trabajo en equipo para la actividad más compleja, basada en preguntas y problemas, para fomentar la cooperación y la comunicación entre los estudiantes. Si bien es cierto que siempre es importante elegir bien los equipos para asegurar que exista un buen comportamiento y una dinámica constructiva, en el caso del curso de 1º de ESO, este aspecto es crucial y es conveniente tener la máxima información del perfil de los estudiantes a nivel individual y de su funcionamiento en grupo antes de realizar este tipo de trabajo.

Duración y organización del tiempo:

La duración de la situación de aprendizaje durará tres sesiones de 50 minutos cada una, una para la primera actividad de trabajo individual y dos para la segunda. Como ya se indicó anteriormente, la primera actividad es flexible y podría durar menos tiempo acotando sus tareas, o extenderla a otra sesión a través de más contenidos transversales al bloque principal de las fracciones.

Materiales y recursos:

- Hojas individuales de instrucciones con un cuadrado, con una retícula inscrita de 64 cuadrados, para la actividad del Ojo de Horus.
- Hojas de colores impresas para la actividad de papiroflexia del Ojo de Horus.
- Hoja de papel milimetrado para cada estudiante para realizar la actividad de kirigami.
- Tijeras, bolígrafo y regla de cada alumno
- Pizarra para las explicaciones.

Antecedentes y objeto de la actividad:

Durante el Prácticum de este Máster, en la que se realizó una fase de intervención en el curso de 1º de ESO, se observó la falta de comprensión y la gran dificultad que mostraban los estudiantes al contenido de fracciones, y cómo esta dificultad, se mostraba en cursos superiores a la hora de operar con estos números como fue el caso del grupo de 3º de ESO. Es por ello, que esta situación de aprendizaje, a modo de medio de prevención para evitar estas situaciones, pretende proponer actividades a través de la Historia de las Matemáticas y los materiales manipulativos para facilitar la comprensión de esta clase de números en el primer curso de Secundaria.

6.1.5 PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDADES Y TAREAS

Se trata de dos actividades independientes pero conectadas por la temática de las fracciones unitarias del Ojo de Horus.

En la primera de las actividades, centrada en el foco cultural egipcio y su mitología, los estudiantes irán descubriendo las fracciones unitarias usadas por los egipcios y representadas en el símbolo del Ojo de Horus. Además de trabajar los contenidos y las operaciones con fracciones, se repasarán las potencias, porcentajes, máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

En la segunda actividad, los estudiantes, por parejas, trabajarán en equipo para elaborar un kirigami con tres cubos de distintos tamaños en relación a las fracciones del Ojo de Horus. Se trata de que los estudiantes puedan comprender mejor las fracciones y sus operaciones a través de la geometría y las medidas.

6.1.5.1-Actividad 1-Las fracciones del Ojo de Horus.

Se trata de una actividad a realizar en una sesión, salvo que se quiera ampliar, poniendo en conexión las fracciones con otros contenidos matemáticos en la tarea 1.2.

En primer lugar, se les repartirá a los estudiantes una hoja de instrucciones de la actividad con el dibujo del Ojo de Horus, sin las fracciones. Esta hoja, con las instrucciones de la actividad, incluirá el dibujo de un cuadrado con una cuadrícula inscrita en el mismo de 64 cuadrados. Este cuadrado será del mismo tamaño que el cuadrado impreso en la hoja de color para cada estudiante, que se les repartirá junto con la hoja de instrucciones. A lo largo de las tareas irán descubriendo las fracciones unitarias y al finalizar las escribirán en el Ojo.

En la Figura 24, se muestra el símbolo del Ojo de Horus a incluir en la hoja de instrucciones de la actividad y las fracciones correspondientes a sus partes que escribirán los estudiantes al final de la actividad:

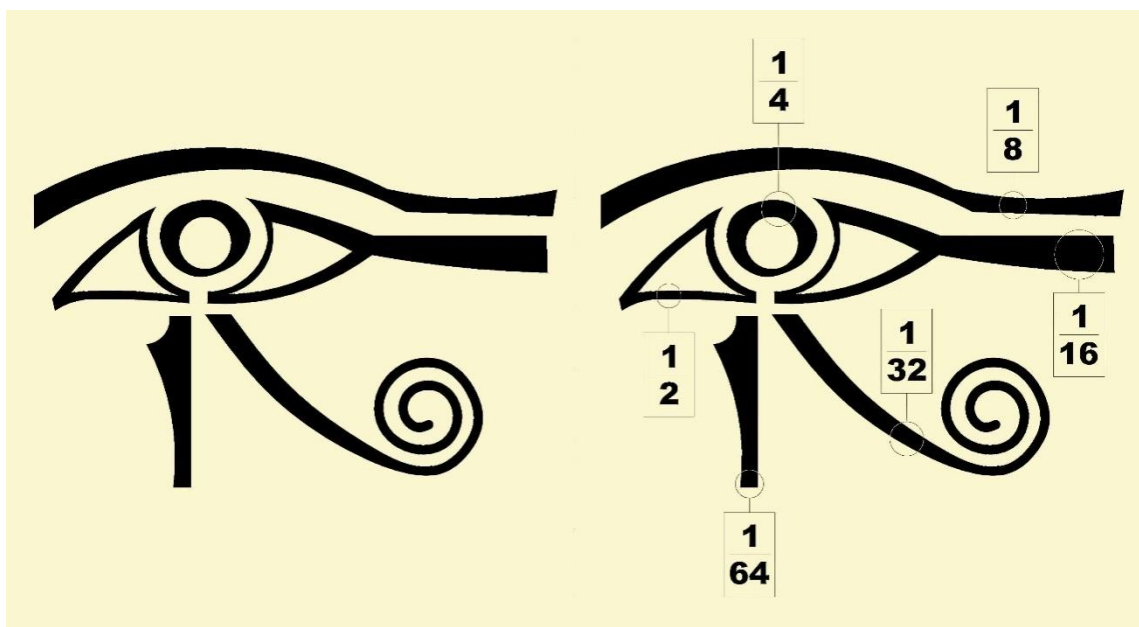


FIGURA 24– Símbolo del Ojo de Horus sin fracciones y con las fracciones correspondientes a sus partes
Fuente: Elaboración propia

En primer lugar, el docente leerá el relato de la mitología egipcia acerca del Ojo de Horus. Si hubiera posibilidad, puede causar mayor efecto de interés para los alumnos poner un video de poca duración que cuente la historia.

A partir de ese momento se dará comienzo a la secuencia de las tareas:

-TAREA 1.1-Fracciones a través de la papiroflexia:

Cada alumno cortará el cuadrado de papel de color que coincidirá con la plantilla cuadrículada de la hoja de instrucciones de la actividad. Se les indicará que el cuadrado corresponde a una unidad, es decir a la fracción $\frac{1}{1}$, la cual escribirán a la izquierda del cuadrado de la hoja de instrucciones en el campo preparado para tal fin. A continuación, cada estudiante procederá doblando el papel cuadrado de color por la mitad. Después superpondrá el papel doblado en el cuadrado con la cuadrícula de la hoja y marcará en la cuadrícula y con rotulador, una línea siguiendo la línea de la partición. A la derecha del cuadrado, calculará la fracción correspondiente a esta área del doblez dividiendo la anterior fracción entre 2, en este caso $\frac{1}{1} : 2 = \frac{1}{2}$, y escribirá el resultado debajo de la anterior y en el centro del área del papel doblado que tapaba parte del cuadrado de la hoja. Procederá de igual forma, doblando el papel, superponiéndolo y escribiendo el resultado de la división de dividir la fracción anterior entre 2, hasta seis veces. A la derecha del cuadrado quedarán realizadas las divisiones de cada paso, y dentro del cuadrado quedarán marcadas las áreas de cada doblez con su fracción escrita en el interior respecto al total del cuadrado.

En la Figura 25, se muestra el cuadrado impreso en la hoja de instrucciones con su retícula de 64 cuadrados y el resultado final después de realizar la tarea de papiroflexia:

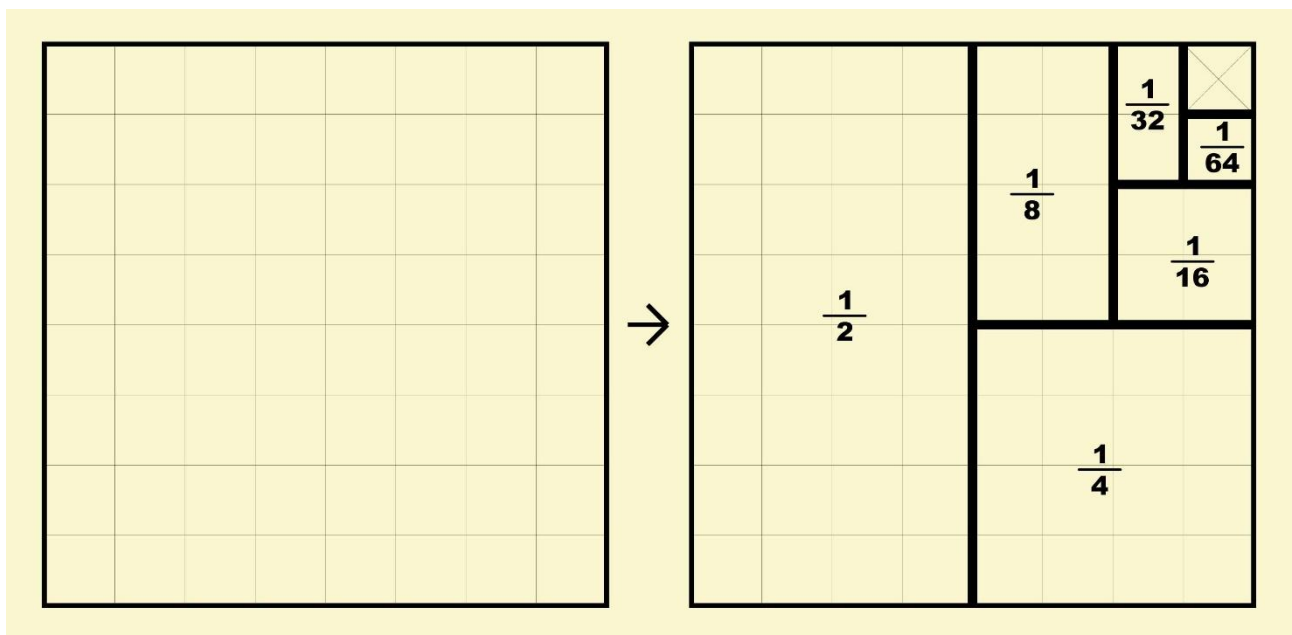


FIGURA 25– Cuadrado con cuadrícula en hoja de instrucciones de la tarea, antes y después de realizarla
Fuente: Elaboración propia

De esta forma se les explicará que hemos obtenido las fracciones del Ojo de Horus:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}$$

-TAREA 1.2- Relaciones entre las fracciones del Ojo de Horus.

En esta tarea se pueden realizar algunos ejercicios de conexiones de las fracciones con otros contenidos. Dependiendo de la duración que se le quiera dar, se pueden plantear preguntas a los estudiantes, como que en cuántas partes está dividido el cuadrado por los dobleces si se desdobra completamente, o qué relación existe entre las fracciones obtenidas, o qué harían para dividir una barra de pan en 8 partes, etc.

Además, es posible trabajar las potencias en la sucesión de los denominadores, y preguntarles cómo sabrían cuántas partes se obtienen si se pudiera doblar el papel dos veces más.

También posible trabajar los porcentajes del total, en tanto por cien, y que realicen las operaciones pertinentes, o que busquen el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de los denominadores.

-TAREA 1.3- Suma de las fracciones.

En esta última tarea, en primer lugar, los estudiantes escribirán las fracciones en las partes del ojo según las indicaciones del docente. Después, se leerá un texto sobre la mitología del Ojo de Horus, expresando su significado como el ojo sano o que está completo, pidiendo después a los alumnos que sumen todas las fracciones para ver si el resultado está completo.

Si sumamos todas ellas, obtenemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

Los alumnos las sumarán para comprobar que dicha suma no es la unidad, pero se aproxima a ella, obteniendo $\frac{63}{64}$. En este punto nos haremos la pregunta de cómo el símbolo mitológico de la totalidad puede tener este error, y contestaremos que Thot, quien reconstruye el Ojo de Horus, añade esa parte con su magia.

6.1.5.2-Actividad 2-Los graneros del Faraón.

Se trata de una actividad basada en la metodología de resolución de problemas, en la que los estudiantes, trabajando en parejas, irán construyendo individualmente en la primera sesión un kirigami de tres cubos como medio de comprensión de las fracciones y sus operaciones. Al trabajar en parejas pueden ayudarse unos a otros y colaborar en razonar las respuestas a las preguntas formuladas a lo largo de la tarea.

En una segunda sesión se plantearán preguntas sobre los graneros a modo de problemas a los que los estudiantes, en los equipos, intentarán dar respuesta.

-TAREA 2.1-Construcción del kirigami. Relaciones entre perímetro, superficie, volumen y operaciones de fracciones.

Los alumnos se agruparán en parejas juntando los pupitres para trabajar en equipo, aunque la realización del kirigami será individual. En primer lugar, se explicará de forma rápida el sistema decimal egipcio y algunas de sus unidades, incluyendo la vara, que equivale aproximadamente a 18 metros, que será la medida a utilizar en los dibujos de la actividad.

Se planteará el problema del Faraón:

“El Faraón necesita guardar su grano de trigo antes de la crecida del Nilo, y, para asegurar la protección de su grano almacenado, necesita construir tres graneros siguiendo las fracciones del Ojo de Horus. El faraón desea conocer el volumen de estos depósitos de forma cúbica y la superficie que ocuparán los mismos en la ciudad, aplicando para sus diseños la fracción del Ojo de Horus a la medida usada habitualmente para ello: la vara.”

Para poder resolver el problema, los estudiantes necesitan diseñar 3 graneros con la longitud de sus lados correspondientes a las tres primeras fracciones unitarias de la vara: $\frac{1}{2}v$, $\frac{1}{4}v$, $\frac{1}{8}v$;

De esta forma, empezarán a dibujar un eje horizontal en el centro de la hoja de papel milimetrado colocada de forma apaisada, y en el eje dibujarán las tres líneas del kirigami correspondientes a los lados de los cubos de los tres graneros en s proporción. Es decir, el lado del segundo granero medirá la mitad que la del primero y el doble que la del tercero. Se indicará a los estudiantes qué medida deben tomar con la regla equivalente a la mitad de la vara para reproducir el lado del granero más grande, para asegurar la correcta construcción de los graneros en el papel. Apuntarán en los lados las fracciones $\frac{1}{2}v$, $\frac{1}{4}v$ y $\frac{1}{8}v$.

Es importante que apunten la unidad con una v, y recordarles que se trata de una medida geométrica. Se les preguntará qué proporción matemática hay entre los lados, haciéndoles ver la equivalencia con las propias fracciones.

Seguidamente, a través del primer lado de cada granero, se formarán tres cuadrados, y se procederá a calcular sus superficies anotándolas en el papel. Al multiplicar las fracciones se les hará notar, que, en este caso geométrico, el producto de los dos números es una superficie, y la unidad v estará elevada al cuadrado. Así calcularán la superficie que ocupe cada granero. Una vez calculadas también se les preguntará qué proporción existe entre las superficies de los distintos graneros, y si hay diferencia con la proporción entre los lados de los mismos. El lado del granero más grande era el doble que la del mediano, pero su superficie es cuatro veces mayor al realizar este producto entre fracciones. Esto lo pueden visualizar geoméricamente con el kirigami.

El último paso es realizar el volumen del kirigami y calcular el volumen de los tres graneros. Para ello tendrán que dibujar otros tres cuadrados debajo de los anteriores y doblar el papel por el eje inicial. Una vez doblado, cortarán con la tijera las líneas perpendiculares al eje para luego desdoblarlo y doblar las superficies entre cortes hacia el lado opuesto, consiguiendo así el kirigami.

En la Figura 26, se muestra el proceso de construcción del kirigami:

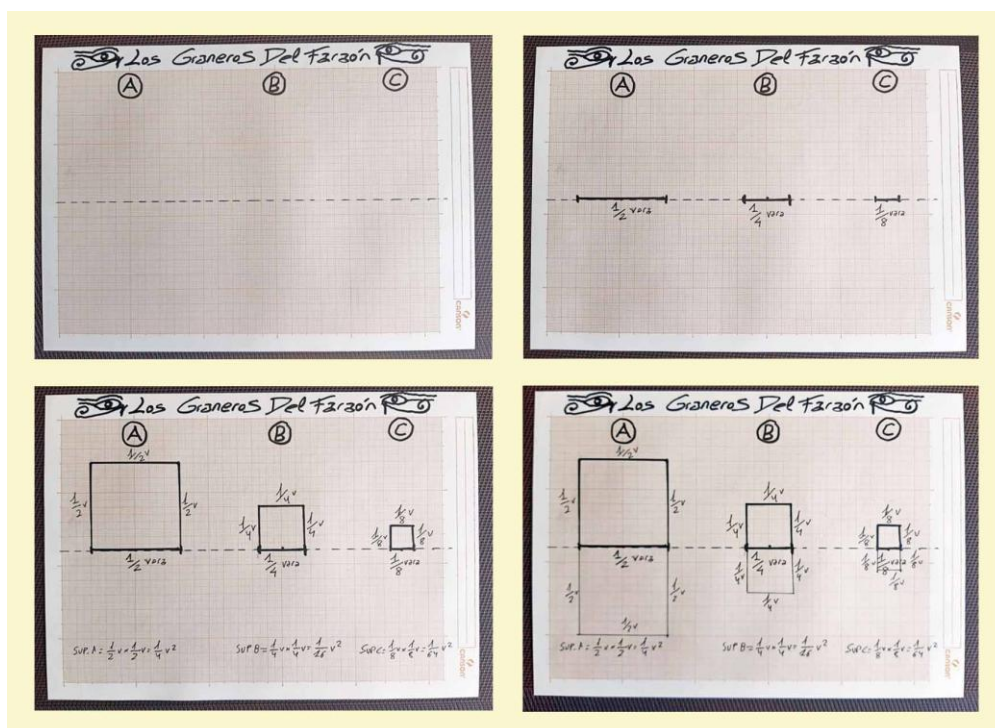


FIGURA 26 – Proceso de realización del kirigami para la actividad sobre fracciones “Los Graneros del Faraón”
Fuente: Elaboración propia

Llegados a este punto, los estudiantes podrán observar los volúmenes, y los calcularán multiplicando la superficie anterior por la altura correspondiente al lado, obteniendo el resultado con la unidad en varas al cubo.

De la misma forma que antes, buscarán la proporción entre volúmenes y lo compararán con la proporción entre superficies y entre lados. Se trata de que visualicen geoméricamente la equivalencia del producto de las fracciones y su significado e este caso concreto.

En la Figura 27, se muestra el resultado final con el cálculo de superficies y volúmenes del granero:

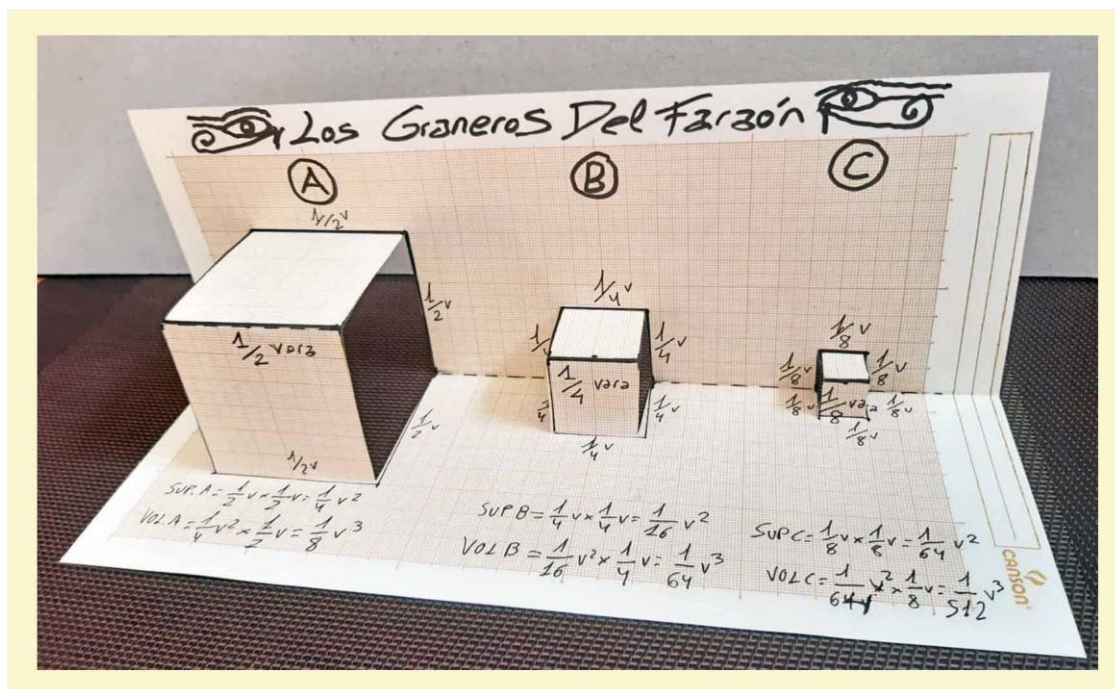


FIGURA 27 – Resultado final del kirigami para la actividad sobre fracciones “Los Graneros del Faraón”
Fuente: Elaboración propia

Los estudiantes escribirán su nombre en el kirigami, y el docente los recogerá al finalizar la clase.

-TAREA 2.2-Preguntas sobre los graneros.

Esta tarea es una extensión de la anterior, y se planteará como una secuencia de problemas relacionados con los graneros y las fracciones, en la que se irá aumentando progresivamente la dificultad.

El docente repartirá los kirigamis para que los estudiantes, en parejas, puedan realizar los razonamientos a los problemas y buscar en equipo la solución al mismo. No se han diseñado los problemas en este caso, pero es muy sugerente trabajar los cambios de unidades y equivalencias entre sistema egipcio y métrico, porcentajes, relaciones y proporciones.

6.1.6 ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES

Como se indicó anteriormente es importante conocer el grupo en el curso de 1º de ESO, y adaptar las actividades al perfil del grupo y al individual de algunos estudiantes. La complejidad de la segunda actividad requiere que los estudiantes se sientan cómodos con el trabajo con el papel, y esto puede observarse en la actividad anterior y decidir y realizar la segunda actividad o no. En el proceso del kirigami hay un paso difícil que es el último doblado del papel para sacar los volúmenes, en que seguramente haya que ayudar a los estudiantes, o enseñar a algunos para que ayuden a otros.

6.1.7 PROCESO DE EVALUACIÓN

La evaluación de estas actividades se podría realizar a través del trabajo de la hoja en la primera actividad, y del kirigami en la segunda, evaluando también la implicación y participación y el trabajo en equipo a través de un diario de observación.

6.1.8 VALORACIÓN DE A SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

La valoración de este tipo de actividades es fundamental para testar si el material manipulativo está ayudando o no a entender los conceptos, pues es el objetivo principal de esta situación de aprendizaje. Se puede mandar realizar ejercicios para casa a los/as alumnos/as, antes y después de la situación de aprendizaje, que entreguen y comprobar si ha existido alguna evolución a raíz de la realización de las actividades.

6.2 PROPUESTA DE SITUACIÓN DE APRENDIZAJE PARA 3º DE ESO: EL CÓDIGO BINARIO Y LA ACCESIBILIDAD UNIVERSAL

6.2.1 TÍTULO

El código binario y la accesibilidad universal.

6.2.2 CONTEXTUALIZACIÓN

Contexto

Se plantea esta situación de aprendizaje para el curso de 3º de ESO, dentro de la etapa de Secundaria. En el curso de 3º de ESO, los estudiantes se encuentran en un proceso madurativo de importantes cambios y de asimilación de su propia autonomía. En este momento, comienzan a tomar decisiones, a elegir a sus amigos, a definir sus gustos y a desarrollar ampliamente su campo socioafectivo. Es, en este momento, donde se está desarrollando el pensamiento abstracto tan vinculado a la Matemática, y es por ello, que los nuevos contenidos matemáticos del Currículo incluyen en este curso el pensamiento computacional como un bloque importante del conocimiento a adquirir.

Elección de contenidos

En el contexto incierto, de esta etapa madurativa, se han elegido los contenidos del sistema binario y el pensamiento computacional para fomentar el pensamiento abstracto en desarrollo de los estudiantes. Estos contenidos se asocian, en esta situación de aprendizaje, a un tema que hoy en día se encuentra en la base de toda educación de las sociedades modernas: la accesibilidad universal. Este tema, que aparece en varios de los Objetivos de Desarrollo Sostenible para el 2030, se antoja interesante para los estudiantes de 3º de ESO, que, al margen de la manifiesta oposición a la autoridad por parte de muchos de ellos propia de su edad, también desarrollan en esta etapa gran parte de su capacidad socioafectiva y empática. La inclusión de todas las personas en la sociedad es un objetivo común que empieza desde la educación a los más jóvenes. Al margen de que una persona tenga o no problemas de accesibilidad, o cuente con algún familiar o amigo con estas dificultades, entender por todos y para todos, los sistemas disponibles para asegurar esta accesibilidad universal, es una labor que promueve la responsabilidad, la solidaridad y finalmente, la inclusión.

Temporalización

Esta situación de aprendizaje puede incluirse en cualquiera de los momentos del curso. Aunque podría asociarse al bloque de estadística y probabilidad, o también al bloque numérico, por su afinidad de contenidos, no se considera necesario un conocimiento previo más allá del que los estudiantes han adquirido en los cursos anteriores de 1º y 2º de ESO.

Más que definir un momento académico del curso, o una posición curricular dentro de la secuencia de contenidos para su realización, es importante destacar que, dado el carácter transversal y el componente socioafectivo que pretenden dos de las tres actividades propuestas, el mejor momento para realizar esta situación de aprendizaje sería en un momento tranquilo y despreocupado para los estudiantes, para que de esta manera puedan interesarse por el contenido transversal, sin tensiones ni preocupaciones. En caso de ser posible y viable, esta actividad podría realizarse en el mismo momento en el que los estudiantes trabajen el tema de la accesibilidad universal en otras asignaturas o durante la tutoría, o incluso, si reciben alguna charla de alguna organización o asociación vinculada a ello.

6.2.3 FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

Al igual que en la propuesta de la situación de aprendizaje anterior para el curso de 1º de ESO, en esta situación de aprendizaje tampoco se ha profundizado en el desarrollo curricular, por lo que en el siguiente desarrollo, solamente se hace referencia a los contenidos del Currículo del curso de 3º de ESO y a los elementos transversales que se trabajan en la misma. Como ya se ha indicado, en el caso de desarrollar esta situación de aprendizaje, se tendrían que modificar las actividades y sus características, para adecuar, de la mejor forma posible, su planteamiento a los objetivos perseguidos.

Contenidos:

A. Sentido numérico

1. Conteo

- Estrategias variadas de recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana (diagramas de árbol, técnicas de combinatoria, etc.) llegando solo si es necesario al uso de fórmulas.

3. Sentido de las operaciones

- Relaciones inversas entre las operaciones: comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas.

- Propiedades de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación): cálculos de manera eficiente con números racionales tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora u hoja de cálculo.

C. Sentido algebraico

1. Patrones

- Patrones, pautas y regularidades: observación, predicción, búsqueda de términos que faltan y determinación de la regla de formación en casos sencillos, mediante palabras, gráficas, tablas o reglas simbólicas.

- Fórmulas y términos generales: obtención mediante la observación de pautas y regularidades sencillas y su generalización.

2. Modelo matemático

- Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando, representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico.
- Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.
- Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.

6. Pensamiento computacional

- Generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas (como abstracción, pensamiento algorítmico y descomposición en partes) a otras situaciones, como pueden ser prácticas con datos, modelización y prácticas de simulación y de resolución de problemas computacionales.
- Estrategias útiles en la interpretación y modificación de algoritmos incluyendo los que se usan para operar con expresiones algebraicas (Ruffini), resolver ecuaciones y representar funciones.
- Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.

E. Sentido socioafectivo

1. Creencias, actitudes y emociones

- Esfuerzo y motivación: reconocimiento de su importancia en el aprendizaje de las matemáticas.
- Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas.

Autoconciencia y autorregulación.

- Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.
- Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.

2. Trabajo en equipo y toma de decisiones

- Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.
- Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.

3. Inclusión, respeto y diversidad

- Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.
- La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...)

Elementos transversales:

En esta propuesta de aprendizaje se incluirá la accesibilidad universal como elemento transversal en consonancia con los Objetivos de Desarrollo Sostenible del nuevo milenio. En la segunda actividad propuesta, se han relacionado las tareas con los distintos símbolos o carteles de señalización sobre accesibilidad para que los estudiantes puedan conocerlos. En la tercera actividad, se abordará el código Braille como uso particular del sistema binario, y los estudiantes, a través de un material manipulativo que realizarán ellos mismos, podrán ponerse en el papel de una persona invidente que necesita desenvolverse en nuestra sociedad.

6.2.4 METODOLOGÍA

Métodos, Estilos, estrategias y técnicas:

- Uso de la Historia de las Matemáticas como foco de interés.
- Trabajo manipulativo y experimental a través de bloques y tarjetas para sistema binario.
- Trabajo manipulativo y experimental a través de tarjetas con código Braille creadas por los propios estudiantes.
- Codificación y decodificación de códigos.
- Trabajo por parejas.
- Flipped classroom.
- Debate con colectivo de personas ciegas.

Organización del alumnado y agrupamientos:

Esta situación de aprendizaje consta de tres actividades. Se trabajará individualmente durante la primera actividad, de forma mixta en la segunda, y en parejas en la tercera. En la primera actividad, a pesar de trabajar con material manipulativo, se busca una mayor profundización de cada estudiante de los contenidos del sistema binario y se ha considerado la mejor manera de usar el material es de forma individual. Por el contrario, en las otras dos actividades de carácter cooperativo, se trabajará en parejas, aunque en la segunda actividad haya también una sesión de trabajo individual previo.

Duración y organización del tiempo:

La duración de la situación de aprendizaje será de cuatro sesiones de 50 minutos cada una, con una sesión para la primera actividad de uso del material manipulativo para sistema binario, dos sesiones para la segunda actividad de códigos y codificación, y una sesión para la tercera actividad de código Braille. Si en la última actividad, la creación de material manipulativo por parte de los estudiantes conllevara demasiado tiempo, se podría ampliar esta actividad con otra sesión, o, si se prevé este aspecto, mandar realizar este material a los estudiantes como tarea para casa y que traigan el material preparado para la actividad.

Materiales y recursos:

- Hojas individuales de instrucciones de la actividad de material manipulativo de sistema binario.
- Material manipulativo de sistema binario, bloques para todo el grupo y tarjetas para cada estudiante.
- Hojas individuales de instrucciones de la actividad de imágenes en código.

- Cartulinas duras cortadas en pequeños rectángulos para crear el código Braille.
- Fotocopias guía de líneas y puntos para crear el código Braille.
- Fotocopias con alfabeto Braille.
- Punzón para cada estudiante para crear el código Braille.
- Planchas de goma eva como base de las cartulinas a la hora de realizar los agujeros y crear el código Braille.
- Pizarra para las explicaciones.
- Calculadora de cada estudiante.

Antecedentes y objeto de la actividad:

Durante el Prácticum de este Máster, se realizó parte de la fase de intervención en el curso de 3º de ESO. Se observó que en este curso, y por el momento madurativo de los alumnos/as, se realizaban a menudo varias charlas de carácter socioafectivo, cultural y solidario en las sesiones de tutoría. Esta circunstancia se ha tenido en cuenta a la hora de diseñar la situación de aprendizaje como una oportunidad de trabajar el ámbito socioafectivo del Currículo.

6.2.5 PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDADES Y TAREAS

La situación de aprendizaje pretende trabajar simultáneamente los contenidos del sistema binario y el pensamiento computacional del Currículo para este curso. Se han diseñado tres actividades para ello a través del material manipulativo y a través de incluir la accesibilidad universal como tema transversal a los contenidos anteriores.

La primera actividad, a través del material manipulativo del sistema binario, pretende introducir a los estudiantes en este contenido, explicando la base 2 y manipulando cada estudiante el material a través de distintos ejemplos, pasando del sistema binario al decimal y viceversa.

En la segunda actividad se trabajará la codificación y decodificación a través del sistema binario y de imágenes pixeladas a través de retículas con celdas en blanco y negro vinculadas a los códigos. En la primera sesión se trabajará de forma individual y en la segunda de forma cooperativa.

La tercera actividad se centrará en el código Braille como sistema universal de lectoescritura para personas invidentes. Los/as alumnos/as realizarán un pequeño material manipulativo de código Braille a través de cartulinas agujeradas siguiendo las pautas universales de este código. Posteriormente, manipularán los mensajes para ponerse en el lugar de las personas invidentes, decodificando dichos mensajes.

Actividad 1-Sistema binario con material manipulativo:

Esta actividad constará de una sesión en la que se trabajará el sistema binario con el material manipulativo, y una tarea para casa a través de la realización de ejercicios de conversión del sistema decimal a binario y viceversa para practicar los conocimientos adquiridos.

En la primera tarea se trata de introducir la explicación del sistema binario y su representación mediante un material manipulativo de bloques y cartas. Se realizará individualmente y de forma simultánea a través de las indicaciones del docente al grupo completo. Para casa se mandará la segunda tarea, a través de una hoja de ejercicios para practicar la conversión del sistema binario a decimal y del decimal al binario.

-TAREA 1.1-Uso de material manipulativo para compresión de sistema binario

Se separará a los alumnos el material manipulativo consistente en unas tarjetas con dibujo de los bloques en tres dimensiones, las tarjetas de las potencias de dos equivalentes a los bloques, las tarjetas del resultado de dichas potencias, y algunas tarjetas con 0 y 1. Si es posible, las tarjetas serán de distintos colores para ayudar a los estudiantes a separar y colocar las tarjetas en la mesa.

Se facilitará una hoja a cada alumno con el esquema de la tarea para que realicen en ella las operaciones. Esta hoja la tendrán que entregar al finalizar la sesión. De esta forma, además los estudiantes se tomarán en serio la tarea y el uso del material manipulativo.

Siguiendo las indicaciones del profesor/a, cada estudiante dispondrá las tarjetas en la mesa, como aparece en la Figura 28. El profesor/a, por su parte, colocará el material manipulativo de los volúmenes correspondientes a las tarjetas de los estudiantes en una mesa a la vista de todos/as. Delante de este material, en el caso del docente, o delante de las tarjetas que lo representa en el caso de los alumnos/as, se dispondrán las tarjetas de las potencias de 2, y delante de estas los resultados de calcular dichas potencias. Los volúmenes representan geoméricamente las potencias en base 2.

En la Figura 28, se muestra el orden en el que debe disponerse el material:

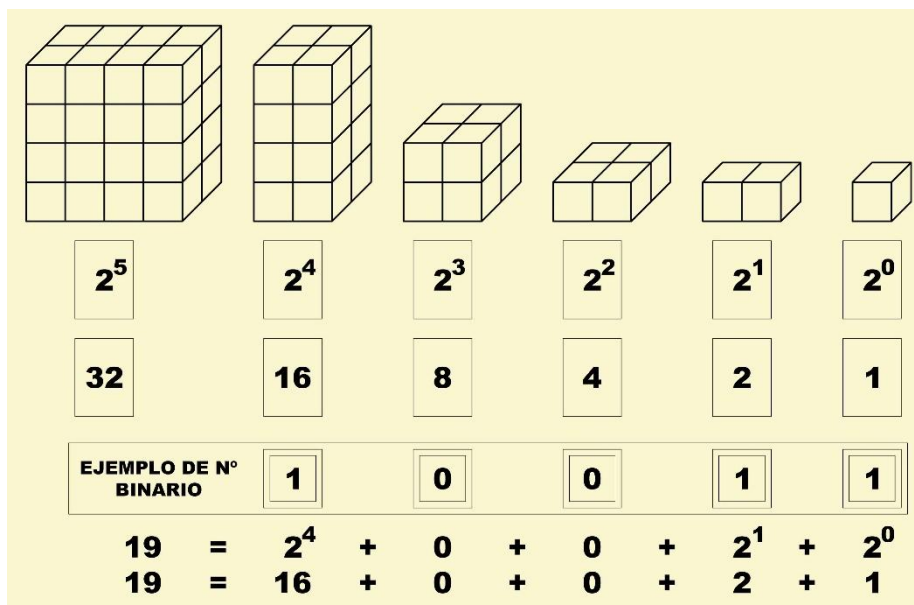


FIGURA 28 – Material manipulativo para el sistema binario y ejemplo de aplicación
Fuente: Elaboración propia

Una vez que los estudiantes hayan colocado correctamente las tarjetas y hayan entendido la relación entre ellas, el docente ejecutará un ejemplo a través de las tarjetas de 1 y 0, exponiendo a los estudiantes que es la forma de escribir el sistema binario. A través del material manipulativo, explicará cómo calcular el número decimal a partir del número binario. Después de que lo hayan entendido, procederá a la inversa, ayudándose del método de división escribiendo en la pizarra y mostrándolo a través del material. Los estudiantes realizarán todas estas acciones de forma paralela y despacio, y resolviendo sus dudas.

Una vez lo hayan entendido y se les pedirá que realicen algunas conversiones de números para que practiquen con el material. Las operaciones las reflejarán en la hoja que se les había facilitado para tal fin.

Al final de la clase entregarán la hoja, pero se quedarán con el material para poder usarlo en los ejercicios de la tarea que se les mandará para casa.

-TAREA1.2-Tarea para casa-Ejercicios de conversión decimal-binario

Se les facilitará de tarea para casa una hoja de ejercicios sobre cambio de sistema decimal a binario y viceversa. En la siguiente sesión se corregirán los ejercicios. Esta tarea es interesante para fomentar el uso autónomo del material manipulativo de las tarjetas que han aprendido a usar en la tarea anterior.

Actividad 2-Imágenes en código

Se trata de una actividad a realizar en dos sesiones. En la primera sesión, los estudiantes trabajarán de forma individual, descodificando un número binario a través de una imagen pixelada de un icono de accesibilidad universal. En la segunda sesión, los estudiantes trabajarán individualmente los primeros 30 minutos, dejando 20 minutos para trabajar en parejas.

-TAREA 2.1-Descodificación de código binario en iconos de accesibilidad universal

Se les explicará a los alumnos como transcribir en código a través de filas de unos y ceros, una imagen pixelada dentro de una cuadrícula de cuadrados blancos y negros. Una vez lo hayan entendido, se les facilitará una hoja con la cuadrícula en blanco y el código que tendrán que descodificar. Procederán pintando de negro los cuadrados de la retícula correspondientes con los números 1 de cada código de cada fila de la cuadrícula. Cuando terminen todas las filas podrán ver la imagen, que corresponderá a la imagen de un icono de la accesibilidad universal. Se realizarán al menos cuatro hojas distintas con cuatro iconos diferentes.

Se comentarán los diferentes iconos y su significado, preguntado a los estudiantes si los conocían y si los han visto en el instituto o en algún sitio. También se les puede preguntar dónde creen que deberían instalarse estos carteles. Después los estudiantes, con ayuda de la calculadora, tendrán que realizar la conversión de los números binarios a números decimales usando las potencias de base 2.

En la Figura 29, se muestra el resultado final con el cálculo de superficies y volúmenes del granero:

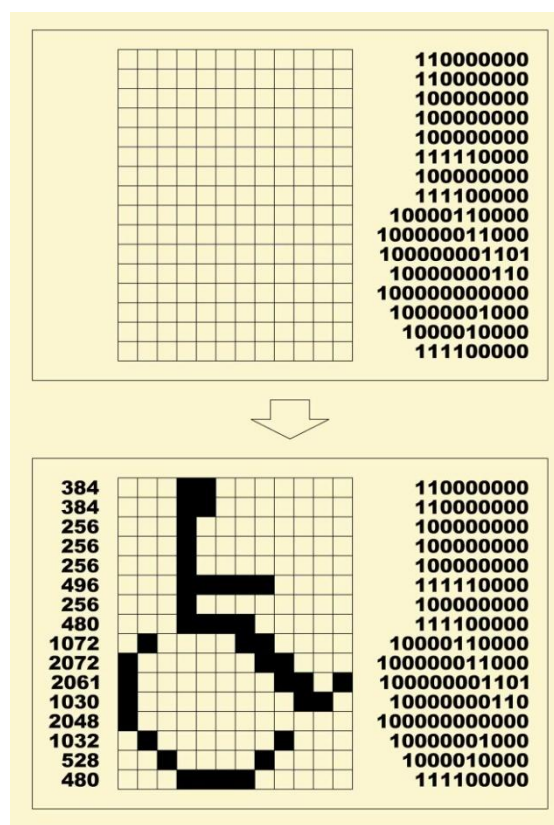


FIGURA 29 – Ejemplo de tarea de descodificación de código y conversión de binario a decimal

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 30, se muestran cuatro de los iconos de accesibilidad universal



FIGURA 30 – Iconos de accesibilidad universal

Fuente:https://es.wikipedia.org/wiki/Dise%C3%B1o_universal#/media/Archivo:Disability_symbols.svg

Licencia: Public Domain

-TAREA 2.2-Codificación y descodificación entre estudiantes

En esta tarea se facilitará una hoja con dos cuadrículas en blanco a los estudiantes, primero de forma individual, pinten celdas negras en la cuadrícula para formar una imagen relacionada con el fomento de la accesibilidad universal a modo de mensaje que van a enviar a un/a compañero/a. En otro papel codificarán la imagen a través de filas de unos y ceros. Después se intercambiarán los códigos con otro/a compañero/a sin mostrar la imagen y cada uno/a descifrará en otra cuadrícula en blanco el código que les han pasado. Finalmente comprobarán con el compañero la imagen y si no coinciden, tendrán que comprobar juntos dónde se han equivocado.

Actividad 3-Código Braille

Esta actividad, sin contar la actividad previa para cada una a través de Flipped Classroom, se desarrollará en una sola sesión, salvo que se alargue el tiempo de realización del material manipulativo, por lo que habría que dedicar parte de otra sesión posterior. Tal y como se indica más adelante, la actividad puede ampliarse con otra actividad de difusión y una actividad complementaria de debate con un colectivo de personas ciegas.

Se trata de una actividad manipulativa con gran implicación socioafectiva. El objetivo principal es el fomento de la empatía y que entiendan cómo funciona la comunicación táctil de las personas invidentes a través del código Braille, realizando primero un material manipulativo de código Braille, y posteriormente, realizando tareas de descodificación a través de la lectura táctil intercambiando los materiales manipulativos realizados con los/as compañeros/as.

Finalmente, se plantea una extensión de la actividad con gran repercusión en el centro educativo a través de la realización de placas identificativas en Braille por parte de los alumnos para colocar en distintos espacios representativos del centro. Como ampliación de esta actividad, también se propone una visita de alumnos

invidentes para que los alumnos puedan intercambiar, a modo de debate, experiencias y dificultades en su día a día.

-TAREA 1.1-Tarea para casa-Introducción al código Braille

Esta tarea se realizará con la metodología Flipped Classroom. Antes de la primera sesión, se les mandará una tarea para casa a través de la plataforma digital con unos enlaces a páginas web sobre la figura de Louis Braille y el código que creó. Se facilitará una hoja de instrucciones con algunas tareas a cumplimentar para que entreguen en la siguiente sesión. Se realizarán al menos 6 links distintos para que los estudiantes consulten diferentes contenidos y puedan intercambiarlos en la siguiente sesión con sus compañeros/as.

En la primera sesión, antes de empezar con el material manipulativo, cada uno/a compartirá lo más destacado del contenido consultado en casa a través del link.

-TAREA 1.2-Realización del material manipulativo

Se trata de que realicen individualmente un material manipulativo de código Braille a través de agujerar unas cartulinas duras sobre goma eva con un punzón y ayudados por una fotocopia con una guía de líneas y puntos de las dimensiones de las celdas Braille universales. Además, contarán con una fotocopia del alfabeto Braille español, para crear un mensaje con pocas palabras a través del código y poder intercambiarlos para decodificarlos en la siguiente tarea.

En la Figura 27, se muestra el resultado final con el cálculo de superficies y volúmenes del granero:

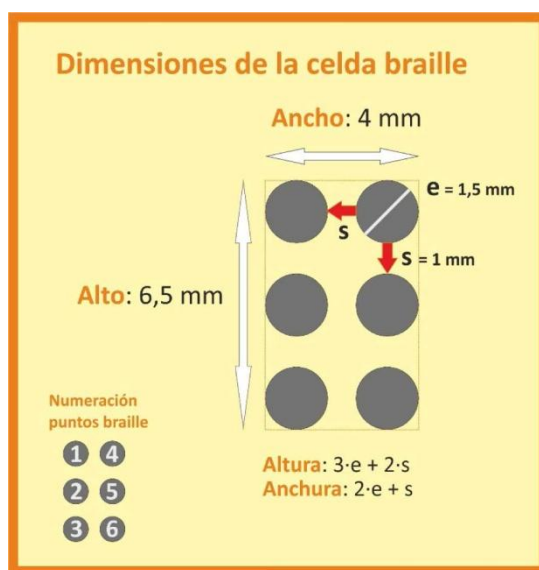


FIGURA31 – Dimensiones de celda Braille

Fuente: <https://www.once.es/servicios-sociales/braille/comision-braille-espanola/documentos-tecnicos/documentos-tecnicos-relacionados-con-el-braille/documentos/b1-parametros-dimensionales-del-braille-2/view>

Licencia: Permitida su reproducción total o parcial con fines docentes o de investigación

-TAREA 1.3-Lectura táctil

Se trata de que se agrupen en parejas y se intercambien los códigos, para que ayudados por la hoja del alfabeto, intenten leer el código creado por su compañero/a. Si es posible, es mejor que cierren los ojos cuando estén tocando el código, para ponerse de verdad en el lugar de una persona invidente.

Al finalizar la sesión, se dedicará un poco de tiempo a que puedan expresar cómo se han sentido, si ha sido fácil decodificar el código, y qué piensan de cómo es el día a día de la vida de una persona ciega.

En la Figura 27, se muestra el resultado final con el cálculo de superficies y volúmenes del granero:



FIGURA32 – Ejemplo de elaboración de material manipulativo para código Braille
Fuente: Elaboración propia

-TAREA 1.4-Ampliación-Realización de códigos para colocar en el centro educativo

Se trata de que realicen algunos letreros informativos de los espacios del centro, para colocarlos y ser usados en el futuro, de esta manera están actuando de forma directa en la mejora de la accesibilidad de su centro.

-TAREA 1.5-Ampliación-Visita a la sede de la ONCE para debate con personas ciegas

Se trata de organizar una actividad complementaria, acudiendo a la sede de la ONCE para crear un debate sobre el día a día de las personas ciegas, desde el punto de vista de estas personas y la visión que tienen los estudiantes de ello. Además, en la sede les pueden mostrar muchos materiales y recursos, no solo para personas invidentes, sino para personas con diversos problemas vinculados a la accesibilidad.

6.2.6 ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES

En la actividad del material manipulativo, se prestará especial atención a que todos los estudiantes entiendan la dinámica y participen en la actividad. En el caso de que se prevea que algunos estudiantes puedan crear un conflicto, el docente se encargará de ayudarles en los tiempos de manipulación para fomentar su implicación. El hecho de crear hojas de instrucciones a entregar después de las tareas ayudará a que los estudiantes se impliquen en las actividades.

Si algún alumno/a tuviera algún problema en cuestión de accesibilidad, podría ser una buena oportunidad hablar con él para crear un debate en clase y que sus compañeros/as conozcan sus dificultades.

6.2.7 PROCESO DE EVALUACIÓN

La evaluación se realizará a través de los documentos entregados por los estudiantes, y a través de la participación activa en las tareas de carácter socioafectivo

6.2.8 VALORACIÓN DE A SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

La valoración de esta situación de aprendizaje tiene dos enfoques. El del contenido, que se valorará a través de la evolución en el aprendizaje, y la de la parte socioafectiva, que se percibirá más a través de la participación y la expresión de las emociones por parte de los estudiantes.

7 CONCLUSIONES

El Máster de formación para el profesorado es una puerta que abre un nuevo camino profesional dentro de la educación, y como tal, refleja también muchos de los aspectos negativos y positivos a valorar en la decisión de seguir adelante como docente. Los profesores y profesoras de Secundaria suelen ser profesionales de otras disciplinas alejadas del ámbito educativo que, en un determinado momento y por muy diversos motivos, deciden emprender un cambio de su vida laboral hacia este desempeño. No es necesario recalcar que la docencia es un fin vocacional, y que, si no se cuenta con esta vocación e ilusión, difícilmente se disfrutará de este trabajo y se realizará el mismo de la forma adecuada para tal fin, debido, principalmente, a la gran implicación que este trabajo demanda.

Por todo ello, la primera gran reflexión general a señalar es la de que, este Máster, a través de sus asignaturas y contenidos, de la realización de sus prácticas en el centro educativo, y de la elaboración de este documento de trabajo final, más allá de instruir de forma suficiente a los futuros docentes, constituye la muestra de una visión general y útil de lo que será realmente el desarrollo de esta profesión. Este aspecto es muy importante para personas que ya cuentan con un bagaje laboral y personal, y que, tanto desde la responsabilidad social como del convencimiento propio, deben tomar la decisión más adecuada de si seguir o no este camino en su futuro.

En la planificación de este trabajo se han realizado muchas reflexiones de todo lo acontecido durante el Máster. Son muchas las críticas que, desde varios ámbitos sociales, ponen en duda la extensión y el contenido que, desde las instituciones, se ha asignado a esta formación en contraposición a lo que se exigía hace unos años. Más allá de debates políticos e intereses varios, el Máster ofrece una preparación básica y necesaria para afrontar el cometido de profesor/a de Secundaria. No es justificable mantener que es suficiente el poseer un buen conocimiento de los contenidos a impartir para saber transmitirlos de la forma adecuada a jóvenes y adolescentes. En esta sociedad de cambios constantes, conocer la didáctica y la psicología necesarias para la enseñanza, así como los recursos de aprendizaje adecuados, tanto generales como específicos de cada materia, son primordiales para poder comenzar un trabajo en el que siempre se está aprendiendo y que fluctúa con cada cambio legislativo. Por ello, la segunda conclusión general a destacar en este apartado es que este Máster no enseña a ser profesor/a, sino más bien y como algo imprescindible, facilita los medios y las guías para poder empezar a serlo.

La materia de Matemáticas es esa asignatura que muchos de los niños, adolescentes y jóvenes estudiantes empaquetan en el bloque de las asignaturas difíciles de aprobar, como un obstáculo inevitable a superar en cada curso. Es, seguramente por ello, por lo que los docentes de las asignaturas de Matemáticas tienen mayor dificultad en la enseñanza de estos contenidos frente a los de otras materias más atractivas para los/as alumnos/as, y quizá, es también esa la razón del porqué los estudiantes y padres juzgan a estos/as profesores/as de Matemáticas de una forma más inflexible. Esta dificultad detectada a lo largo de la formación recibida y sumada, por un lado a la gran atención a la diversidad del alumnado que es necesario cubrir y, por otro, a los requisitos temporales y curriculares de la programación cada año escolar, hacen que sea imprescindible disponer del mayor número de recursos de aprendizaje y experiencias didácticas en esta materia.

Afortunadamente, frente al tradicional método de clase magistral, la difusión de nuevos recursos y metodologías de aprendizaje de las Matemáticas se están extendiendo, poniéndose en práctica en numerosos centros y testándose para modificar o mejorar todo lo necesario para alcanzar la mayor calidad en la enseñanza. En esos últimos años, los educadores y profesionales centrados únicamente en la innovación educativa, están elaborando nuevas propuestas educativas siguiendo las líneas del panorama internacional.

Esto es un gran apoyo para los docentes que, debido a la gran cantidad de gestiones y funciones que tienen que realizar más allá de la propia docencia, no disponen del tiempo suficiente para investigar e innovar en su propia aula sin ayuda externa. El conocer estos medios de cara a la actividad profesional es otra de las reseñas a destacar de forma general.

El hecho de que esta formación de preparación del profesorado sea a través del ámbito universitario, posibilita para los/as alumnos/as del Máster el conocer de primera mano estos innovadores recursos de aprendizaje y situarse en la vanguardia educativa antes de incorporarse al cuerpo del profesorado. De todos estos recursos y metodologías, y ya refiriéndose propiamente a este trabajo final del Máster, dentro de las temáticas para dicho trabajo ofertadas por los profesores y profesoras de la especialidad de Matemáticas, se optó por elegir los materiales manipulativos como foco principal del trabajo y de la propuesta de situación de aprendizaje a elaborar. La elección de este tema vino motivada por la asignatura de Didáctica de la Matemática, en la que fue posible conocer todas las posibilidades que la gran diversidad de estos materiales ofrece en el aprendizaje de las Matemáticas, especialmente en los primeros cursos de Secundaria, en los que los estudiantes desarrollan su pensamiento abstracto y necesitan ser guiados en la adquisición de muchos de los nuevos conceptos matemáticos que no han conocido previamente en la etapa de Primaria.

Este interés por estos materiales, que surge desde el convencimiento personal de su utilidad por las experiencias personales vividas, se ha puesto de manifiesto en algunos de los trabajos realizados en las asignaturas y en su uso durante la fase de intervención del Prácticum. Los resultados obtenidos durante la fase de intervención de las prácticas en el centro educativo, reflejados éstos en este trabajo en el apartado sobre las ventajas y desventajas del uso de estos materiales, fue desigual, reflejando claramente el potencial que estos pueden tener, pero también reflejando la dificultad de su puesta en práctica y la precaución que se debe asumir siempre a la hora de su implementación. El uso del trabajo en grupo con estos materiales, muchas veces sugerente para el docente en su uso, parece que puede resultar un fracaso si este tipo de metodología no se usa adecuadamente, o si no es usada habitualmente en el aula y se plantea como una actividad puntual. También se ha podido comprobar que comportamiento de los estudiantes y sus circunstancias influyen directamente en que exista, o no, una dinámica adecuada para poder incorporar estas metodologías. Por otro lado, se ha podido constatar que las infraestructuras y los recursos con los que cuenta el centro, tanto materiales como personales, así como el funcionamiento de los departamentos didácticos y los proyectos educativos, juegan un papel muy importante para poder planificar adecuadamente este tipo de actividades de aprendizaje.

En cuanto a los materiales manipulativos, tal y como se ha indicado también a lo largo de este trabajo, hay que decir que con las TICs, aún siendo un camino diferente de aprendizaje al manipulativo, se abre un mundo virtual que abre infinitas posibilidades con grandes ventajas: el acceso inmediato a ellos a través de los medios digitales sin necesidad de contar con materiales físicos, el acortamiento de los tiempos de preparación y planificación de las actividades, la posibilidad de compartir las actividades ya diseñadas con otros docentes de forma universal, conocer los resultados de las experiencias de otros, etc. Incluso aunque el camino a seguir sea el uso de materiales tangibles, el uso de las redes en internet permite investigar lo necesario para su puesta en práctica, e incluso, encontrar centros de apoyo o de préstamo de estos materiales.

Otro aspecto importante a destacar de los materiales manipulativos es la importancia social que han adquirido estos últimos años a través de los movimientos educativos en edades tempranas, en las que los padres y madres cada vez se implican más en la educación de sus hijos/as. Cada vez es más habitual que los tutores recopilen abundante información sobre las metodologías de aprendizaje para elegir aquella que creen más adecuada para asegurar la calidad de la educación de los niños/as. Esta es otra razón para que se promueva el uso de los materiales manipulativos en las primeras etapas de aprendizaje, al menos hasta que los estudiantes alcancen el pensamiento abstracto y puedan comprender el conocimiento matemático sin necesidad de disponer de más recursos que los que ya han adquirido.

Por lo tanto, otra conclusión de este trabajo, es que el uso de los materiales manipulativos es adecuado y aconsejable dentro de los primeros cursos de Secundaria, siendo menos necesario en los cursos superiores de Bachillerato y estudios universitarios.

Además del marco referencial de los materiales manipulativos, en este trabajo se ha incluido otro recurso de aprendizaje recopilado en las asignaturas del Máster: La Historia de las Matemáticas. En la asignatura que versa sobre este tema, dentro de las asignaturas del bloque específico de Matemáticas de este Máster, se ha podido comprobar el gran potencial que tiene este recurso para el aprendizaje de los contenidos matemáticos así como su gran capacidad para despertar la curiosidad y el interés en los estudiantes. Es por estas razones que se decidió incluirlo desde el ideario del trabajo como un segundo foco de referencia y relevancia en las propuestas didácticas. Además de facilitar la comprensión de nuevos conceptos matemáticos, a través de su historia y de sus personajes y autores, este recurso permite en muchos de los casos, estructurar el contenido matemático, facilitando de esta forma el aprendizaje significativo y a largo plazo deseado.

Tal y como se muestra en la asignatura del Máster mencionada, son muchas las maneras de utilizar este recurso de la historia en el aula, desde una simple anotación histórica con motivo de un contenido, pasando por el uso de relatos, desarrollos matemáticos y trabajos de investigación, hasta el uso de películas y medios de difusión matemática y cultural. Durante la intervención del Prácticum, para buscar el interés del alumnado, se usó este recurso a través la proyección de la escena de una película sobre la vida de Carl. F Gauss para introducir el tema de las sucesiones en 3º ESO. Este recurso fue muy bien recibido por parte del grupo de estudiantes, que de forma habitual solían mostrar mal comportamiento y desinterés por las Matemáticas. Este pequeño apunte pretende ilustrar como es necesario conocer una gran diversidad de recursos de aprendizaje para poder usarlos, siempre desde la experiencia, según las necesidades de los grupos destinatarios, ya que no todos los recursos de aprendizaje funcionan en todos los casos y en todos los momentos del curso.

En cuanto al marco legislativo y normativo, es de agradecer la línea seguida en las distintas asignaturas del Máster, siempre referencial a la ley vigente, desglosando a través de las asignaturas todos sus elementos para poder alcanzar a tener una visión global de la misma y de los elementos más importantes a tener en cuenta para el futuro docente. A pesar de que existen muchas críticas a la ley educativa LOMLOE, en el trabajo se ha destacado un aspecto a su favor a través de las situaciones de aprendizaje. Este elemento curricular es un elemento didáctico flexible que permite adaptar las diversas metodologías, incorporar temáticas variadas y en relación a la vida cotidiana de los estudiantes y sugiere la transversalidad de los contenidos. Por ello, y a pesar de la complejidad del sistema curricular y de evaluación vigente, las situaciones de aprendizaje son una oportunidad para la innovación educativa y responder así a los nuevos tiempos y a las necesidades de nuestra sociedad. Un referente para incluir en las temáticas de estas situaciones de aprendizaje son los Objetivos de Desarrollo Sostenible como fuente inagotable de ideas que además conectan en muchos casos con los intereses de los estudiantes.

Por último, y en relación a lo anterior, las temáticas elegidas en el trabajo para la propuesta de las actividades, guardan siempre una relación directa con la Historia de las Matemáticas, ya sea de forma directa o de forma transversal, y con los materiales manipulativos como recurso principal en los nuevos contenidos matemáticos de la etapa de Secundaria. El marco matemático del I Ching para tratar los contenidos de probabilidad y combinatoria de 2º de ESO, el marco cultural del antiguo Egipto con el Ojo de Horus para ayudar en la dificultad de aprendizaje en las fracciones en 1º de ESO y el marco socioafectivo en torno a la accesibilidad universal y el código Braille para trabajar los contenidos de sistema binario y pensamiento computacional en 3º de ESO, pretenden, en este trabajo, abrir en el aprendizaje de las Matemáticas nuevos horizontes creativos para adaptarse a las nuevas necesidades educativas y conseguir por parte de los estudiantes un aprendizaje significativo en esta materia.

- Alsina i Pastells, Á. (2010). La «pirámide de la educación matemática»: Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de innovación educativa*, 189, 12-16.
- Ausubel, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento: Una perspectiva cognitiva*. Paidós Ibérica. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=30372>
- Bansak, C., & Starr, M. (2021). Covid-19 shocks to education supply: How 200,000 U.S. households dealt with the sudden shift to distance learning. *Review of Economics of the Household*, 19(1), 63-90. <https://doi.org/10.1007/s11150-020-09540-9>
- Bruner, J. S. (1987). *La importancia de la educación*. Grupo Planeta (GBS).
- Chamorro, M. del C. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*. Pearson Educación. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=7729>
- DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León—Portal de Educación de la Junta de Castilla y León. (s. f.). Recuperado 29 de junio de 2024, de <https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/decreto-39-2022-29-septiembre-establece-ordenacion-curricul>
- Díaz Godino, J., Font Moll, V., & Batanero Bernabeu, M. del C. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=79578>
- Dienes, Z. P. (1997). *Propuestas para una renovación de la enseñanza de las matemáticas a nivel elemental*. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=447291>
- Gardner, M. (1974, enero 1). *Mathematical Games, January 1974*. Scientific American. <https://www.scientificamerican.com/article/mathematical-games-1974-01/>
- Garreta i Bochaca, J., & Llevot Calvet, N. (2007). *La relación-familia escuela: ¿una cuestión pendiente?* 9-12. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2327459>
- González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 45, 17-28.
- Guzmán, M. de G. (2006). *Para pensar mejor: Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Ediciones Pirámide.
- Hernández Domínguez, J., & Ángel Alsina. (2005). Ángel Alsina. Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años. Narcea Ediciones. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 1, 107-108.
- Jiménez, L. R., & Espinosa, C. I. (2019). Aprovechamiento del material manipulativo para fortalecer el pensamiento matemático en aula multigrado. *Educación y Ciencia*, 23, Article 23. <https://doi.org/10.19053/0120-7105.eyc.2019.23.e10268>
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=170206>

- La epidemia silenciosa: Cómo la falta de atención está impactando a la Generación Z.* (2023, diciembre 5). La Vanguardia. <https://www.lavanguardia.com/vida/formacion/20231205/9418012/problemas-atencion-asi-plaga-afecta-juventud-mkt-emg.html>
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, Pub. L. No. Ley Orgánica 3/2020, BOE-A-2020-17264 122868 (2020). <https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3>
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley.
- Montessori, M. (1994). *Ideas generales sobre el método: Manual práctico*. CEPE Ciencias de la Educación Preescolar y Especial. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=209500>
- Montessori Pierson, M. (1949). *La Mente absorbente del niño*. <https://www.mumuchu.com/la-mente-absorbente-del-nino-de-maria-montessori.html>
- Moreira, M. A. (2005). Aprendizaje significativo crítico: (Critical meaningful learning). *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación*, 6, Article 6. <https://doi.org/10.37382/indivisa.vi6.379>
- Museo de matemáticas en Madrid.* (s. f.). Espacio Matemático de Madrid. Recuperado 2 de julio de 2024, de <https://emma.smpm.es/>
- ORDEN EDU/919/2021, de 19 de julio, por la que se regula el Plan para el Desarrollo del Razonamiento Matemático en Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad de Castilla y León—Portal de Educación de la Junta de Castilla y León.* (2021). <https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/orden-edu-919-2021-19-julio-regula-plan-desarrollo-razonami>
- Polya, G. (2004). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.
- Ramon, N., & Nolla, R. (2006). *Estudis i activitats sobre problemes clau de la història de la matemàtica*. Institut d'Estudis Catalans.
- Robledo Casanova, I. (2010). El ojo de Horus. *Arte, arqueología e historia*, 17, 219-224.
- Santaló, L. A., & Pagès, J. (1994). *La matemática: Una filosofía y una técnica*. Ariel España. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=21479>
- Seguí, V. M. (2014). *Matemática sagrada: El Ojo de Horus y otras historias científicas sobre las matemáticas y las religiones*. <https://documat.unirioja.es/servlet/libro?codigo=607214>
- Smith, M. S., & Stein, M. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research To Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*. <https://www.semanticscholar.org/paper/Selecting-and-Creating-Mathematical-Tasks%3A-From-To-Smith-Stein/1b2ba6ed88268c50b56f78aedeedd429250b395d>
- Sung, Z. D. (1934). *The Symbols of Yi King* (H. Chatley, Ed.). Paragon Book Reprint.

- **FIGURA 1** – Pirámide realizada en base a la Pirámide de la Educación Matemática de Alsina
Fuente: https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Piramide-de-la-educacion-matematica_fig1_374685444
Licencia: Creative Commons

- **FIGURA 2** – Harvest Scenes, Tomb of Menna, Charles Wilkinson
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Rope_stretching.jpg
Licencia: Creative Commons

- **FIGURA 3** – Material manipulativo de bloques 10. Bloques tridimensionales y cartulinas.
Fuente: Elaboración propia.

- **FIGURA 4** – Esculturas realizadas por equipos de alumnos/as de 3º de ESO
Fuente: Elaboración propia con fotografías propias de los trabajos realizados.

- **FIGURA 5** – Materiales manipulativos del laboratorio de la FEyTS de la Universidad de Valladolid
Fuente: Elaboración propia con fotografías propias realizadas en el taller de la asignatura de Didáctica de la Matemática del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas en la Especialidad de Matemáticas.

- **FIGURA 6** – Diagrama de hexagramas enviado por Bouvet a Leibniz en 1701
Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram_of_I_Ching_hexagrams_owned_by_Gottfried_Wilhelm_Leibniz,_1701.jpg
Licencia: Public Domain

- **FIGURA 7** – Símbolo del XiantianTaijitu
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Yin_yang.svg
Licencia: Public Domain

- **FIGURA 8** – Formación de bigramas y trigramas a partir de los elementos Yin y Yang
Fuente: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Xiantianbagua.png>
Licencia: Public Domain

- **FIGURA 9** – Formación de bigramas y trigramas a partir de los elementos Yin y Yang
Fuente: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bagua-name-earlier.svg>
Licencia: Creative Commons

- **FIGURA 10** – Disposición de los hexagramas según la sucesión del Rey Wen
Fuente: Elaboración propia, en base al dibujo de Martin Gardner incluido en su artículo “Mathematical Games. The combinatorial basis of the I Ching, the Chinese book of divination and wisdom”

- **FIGURA 11** – Representación lineal de la sucesión de formación de hexagramas
Fuente: Elaboración propia, en base al dibujo de Martin Gardner incluido en su artículo “Mathematical Games. The combinatorial basis of the I Ching, the Chinese book of divination and wisdom”

- **FIGURA 12** – Esquema explicativo del valor asignado en sistema binario a las líneas Yin y Yang en los hexagramas
Fuente: Elaboración propia

- **FIGURA 13** – Disposición de los hexagramas de Fu Hsi, con ordenación binaria
Fuente: Elaboración propia, en base al dibujo de Martin Gardner incluido en su artículo “Mathematical Games. The combinatorial basis of the I Ching, the Chinese book of divination and wisdom”

- **FIGURA 14** – Disposición de los trigramas en los vértices del cubo planteado por Z.D. Sung
Fuente: Elaboración propia, en base al dibujo de Martin Gardner incluido en su artículo “Mathematical Games. The combinatorial basis of the I Ching, the Chinese book of divination and wisdom”
- **FIGURA 15** – Símbolos de los números egipcios
Fuente: https://commons.m.wikimedia.org/wiki/File:Hieroglyph_numerals.svg
Licencia: Creative Commons
- **FIGURA 16** – Pintura en la Tumba TT3 de Pashedu
Fuente: [https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Tomb_TT3_of_Pashedu_\(Kairoinfo4u\).jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Tomb_TT3_of_Pashedu_(Kairoinfo4u).jpg)
Licencia: Creative Commons
- **FIGURA 17** – Fracciones del Ojo de Horus
Fuente: [https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Eye_of_Horus_\(fractions\).svg](https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Eye_of_Horus_(fractions).svg)
Licencia: Creative Commons
- **FIGURA 18** – Alfabeto Braille Español
Fuente: <https://www.once.es/servicios-sociales/braille>
Licencia: Permitida su reproducción total o parcial con fines docentes o de investigación
- **FIGURA 19** – Material manipulativo. Monedas con Yin y Yang
Fuente: Elaboración propia
- **FIGURA 20** – Material manipulativo. Tarjetas con cuatro letras chinas correspondientes a cuatro de los trigramas del I Ching.
Fuente: Elaboración propia
- **FIGURA 21** – Ejemplo de deducción de los trigramas del I Ching por medio del método en árbol
Fuente: Elaboración propia
- **FIGURA 22** – Ejemplo de deducción de los hexagramas del I Ching a través de los trigramas por medio del método en árbol
Fuente: Elaboración propia
- **FIGURA 23** – Ejemplo de deducción de los hexagramas del I Ching a través de una tabla de doble entrada de los trigramas
Fuente: Elaboración propia
- **FIGURA 24**– Símbolo del Ojo de Horus sin fracciones y con las fracciones correspondientes a sus partes
Fuente: Elaboración propia
- **FIGURA 25**– Cuadrado con cuadrícula en hoja de instrucciones de la tarea, antes y después de realizarla
Fuente: Elaboración propia
- **FIGURA 26** – Proceso de realización del kirigami para la actividad sobre fracciones “Los Graneros del Faraón”
Fuente: Elaboración propia
- **FIGURA 27** – Resultado final del kirigami para la actividad sobre fracciones “Los Graneros del Faraón”
Fuente: Elaboración propia
- **FIGURA 28** – Material manipulativo para el sistema binario y ejemplo de aplicación
Fuente: Elaboración propia

- **FIGURA 29**– Ejemplo de tarea de descodificación de código y conversión de binario a decimal
Fuente: Elaboración propia
- **FIGURA 30** – Iconos de accesibilidad universal
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Dise%C3%B1o_universal#/media/Archivo:Disability_symbols.svg
Licencia: PublicDomain
- **FIGURA 31** – Dimensiones de celda Braille
Fuente: <https://www.once.es/servicios-sociales/braille/comision-braille-espanola/documentos-tecnicos/documentos-tecnicos-relacionados-con-el-braille/documentos/b1-parametros-dimensionales-del-braille-2/view>
Licencia: Permitida su reproducción total o parcial con fines docentes o de investigación
- **FIGURA 32** – Ejemplo de elaboración de material manipulativo para código Braille
Fuente: Elaboración propia