Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

LA APLICACIÓN DE BOREL EN CLASES ULTRADIFERENCIABLES

Autor: Roberto Lobón Vecín
Tutor: Javier Sanz Gil
Año: 2024

Índice general

Introducción

Uno de los teoremas clásicos de E. Borel, conocido hoy en día como de Peano-Borel por el descubrimiento posterior de la contribución del primer autor al problema, afirma que dada una sucesión cualquiera $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos, se puede encontrar una función f de clase $\mathscr{C}^{\infty}$ en el intervalo $[-1,1]$ (o en toda la recta real) de modo que $f^{(j)}(0) = a_j$ para cada $j \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$. En otras palabras, la aplicación, denominada de Borel, que envía cada función de $\mathscr{C}^{\infty}([-1,1])$ en la sucesión de sus derivadas sucesivas en 0 es sobreyectiva sobre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. La demostración de este resultado se puede encontrar por ejemplo en el libro de C.Zuily [10], y fue incluida en mi Trabajo Fin de Grado [6].

La memoria que presentamos tiene como objetivo profundizar en este tipo de resultados mediante el estudio de la sobreyectividad de la aplicación de Borel, y la existencia de inversas por la derecha para la misma, cuando se la restringe a las llamadas clases ultradiferenciables, constituidas por funciones complejas indefinidamente derivables en un intervalo compacto y cuyas derivadas sucesivas admiten cotas globales expresadas en términos de una sucesión numérica $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$ prefijada. Como se verá, dependiendo de la consideración en las acotaciones que definen las clases de un cuantificador universal o existencial, estas se dividen en dos tipos, de Beurling o de Roumieu. Los ejemplos más conocidos de cada una de ellas son la de las restricciones de funciones enteras (tipo Beurling) y la de las funciones analíticas con cotas globales en un intervalo (tipo Roumieu), que aparecen cuando $M_p = p!$, la sucesión de factoriales. Puesto que estas clases de funciones enteras o analíticas ya han sido parcialmente estudiadas en el Grado en Matemáticas de la Univeridad de Valladolid (UVa), en particular en la asignatura de "*Variable Compleja*" de tercer curso, nos centraremos aquí en aquellas clases intermedias entre la de funciones indefinidamente derivables y la de funciones analíticas.

Los resultados fundamentales de la memoria establecerán condiciones necesarias y suficientes sobre la sucesión $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$ para que el operador de Borel, en la clase ultradiferenciable asociada y con el espacio de llegada correspondiente, sea sobreyectivo, o para que, dotados los espacios correspondientes de funciones o sucesiones numéricas de topologías adecuadas y naturales, dicho operador admita una inversa lineal y continua por la derecha. Este último operador recibe el nombre de operador de extensión, pues dada una sucesión numérica proporciona una función definida e indefinidamente derivable en todo $[-1,1]$ cuya sucesión de derivadas sucesivas en 0 es la dada de partida. De este modo, se extienden los datos, concentrados en un único punto del intervalo, para construir una función en todo él que los incorpora adecuadamente, manteniendo al mismo tiempo el control global sobre el crecimiento de sus derivadas en los mismos términos impuestos sobre los valores originales.

Pasamos a describir el contenido de los diferentes capítulos en los que se divide la memoria.

En el primer capítulo, se realiza una revisión de todos los resultados de la teoría general de espacios vectoriales topológicos que vamos a usar, y que dividiremos a su vez en tres partes. La primera sección se va a centrar en aspectos generales de los espacios vectoriales topológicos, y en especial en los espacios localmente convexos. Dada la naturaleza topológica de las clases de funciones que nos interesan, se desarrollará adecuadamente la teoría de los conocidos como espacios de Fréchet y de los espacios límite inductivo. Será necesario realizar también una revisión de los principales resultados relacionados con los filtros, una herramienta topológica que sirve para tratar los conceptos de convergencia y completitud en este marco general en el que los espacios no tiene porqué ser metrizables (es decir, su topología puede no coincidir con la dada por métrica alguna en el espacio). En la segunda parte del capítulo se recogen una serie de resultados relativos al conocido como teorema de categorías de Baire, concluyendo con los teoremas de la Aplicación Abierta y del Grafo Cerrado, que se vieron en la asignatura de "*Introducción a los espacios de Funciones*" de cuarto curso del Grado en Matemáticas de la UVa, en el contexto de espacios de Banach. El último apartado se centra en la demostración del teorema de factorización de Grothendieck, que será de gran utilidad en el último capítulo de la memoria cuando se estudien las condiciones necesarias para la existencia de operador de extensión en el caso de las clases de tipo Roumieu, cuya topología natural es la de límite inductivo de espacios de Banach. Para este capítulo nos hemos basado principalmente en los textos clásicos de Hórvath [5] y Meise y Vogt [7]. Algunos resultados han sido presentados sin demostración por encontrarse incluida en mi Trabajo Fin de Grado [6].

En el segundo capítulo nos centramos en el estudio de diversas propiedades para la sucesión $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$, consistente en los cocientes entre términos consecutivos de la sucesión $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$ a partir de la cual se definen las clases funcionales bajo consideración. Como se indicará, algunas de estas propiedades pueden ser asumidas sin pérdida de generalidad en el estudio del problema, como son la convexidad logarítmica (de acuerdo con resultados de H. Cartan [2] y A. Gorny [3]) y la no casianaliticidad (esto debido a un resultado de T. Carleman [1] que se puede encontrar también en un trabajo más reciente de V. Thilliez [9]). Otras propiedades presentadas y estudiadas serán precisamente las que caractericen la sobreyectividad de la aplicación de Borel y la existencia de inversas por la derecha para la misma. En particular, se probará que la propiedad de no casianaliticidad fuerte, que caracteriza la sobreyectividad, admite varias formulaciones equivalentes que facilitarán su manejo en los siguientes capítulos. La referencia que se ha seguido para esta parte de la memoria es el artículo de H.-J. Petzsche [8].

En el siguiente capítulo, comenzamos definiendo los espacios de funciones de Beurling y Roumieu asociados a la sucesión $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$ en un intervalo compacto $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ y los espacios de sucesiones correspondientes. Dichos espacios tienen una naturaleza topológica distinta: mientras que los primeros son de forma natural espacios de Fréchet, para los segundos es adecuada una topología de límite inductivo. En consecuencia, dividiremos la presentación de los resultados que proporcionan condiciones suficientes sobre la sucesión $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ para que la aplicación de Borel sea sobreyectiva, o para que el operador extensión E exista, según el tipo de espacio en el que nos encontremos. Para este capítulo, se utilizará de nuevo de forma principal el artículo de Petzsche [8], completado con algunos resultados del libro de L. Hörmander [4].

En el cuarto capítulo, se probará que las condiciones suficientes introducidas en el estudio previo son de hecho también necesarias para la sobreyectividad o para que exista el operador de extensión. En estos resultados será vital utilizar la maquinaria desarrollada en el primer capítulo, en concreto se usará el teorema de factorización de Grothendieck para los espacios de Roumieu y el Teorema de la Aplicación Abierta en el caso de los espacios de Beurling. Las referencias [8] y [4] vuelven a ser las fuentes principales para el tratamiento de estos resultados finales.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recogeremos los distintos resultados de la teoría general de espacios vectoriales topológicos que serán de aplicación a lo largo del Trabajo de Fin de Máster. Se dividirá en tres secciones. En la primera, y con el objetivo de hacer el trabajo relativamente autocontenido, se realizará una revisión de todas las definiciones y resultados elementales en el ámbito de los espacios vectoriales topológicos en general, para centrarnos a continuación en los espacios de Fréchet y en los espacios límite inductivo. Se demostrará gran parte de los resultados, eludiendo solo algunas cuestiones que ya desarrollé en mi Trabajo de Fin de Grado [6], y para las que se dará además la referencia pertinente donde se puedan encontrar.
En la segunda parte, se presentarán resultados relativos al conocido como teorema de categoría de Baire, que se expondrá en el marco de los conocidos como espacios de Baire. Estos resultados ya fueron presentados, en un contexto algo menos general, en la asignatura de "*Introducción a los espacios de funciones*"de cuarto curso del Grado en Matemáticas de la UVa.
Por último, daremos una demostración del conocido como teorema de factorización de Grothendieck, que se aplicará al estudio de aplicaciones sobreyectivas entre espacios con estructura de límite inductivo.

1.1. Espacios vectoriales topológicos

En esta sección, se recogerán todos los resultados que necesitaremos relativos a los espacios vectoriales topológicos, comenzando con definiciones generales de estos espacios para luego centrarnos en dos tipos particulares de estos, los espacios de Fréchet y los de límite inductivo.

1.1.1. Definiciones y espacios vectoriales localmente convexos

Definición 1.1 (**Espacio vectorial topológico**)**.** Un *espacio vectorial topológico* X sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, que en nuestro caso será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ que también es un espacio topológico en el que las operacióne suma y producto por un escalar, definidas como $(x, y) \in X \times X \mapsto x + y \in X$ y $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X \mapsto \lambda \cdot x \in X$ respectivamente, son continuas, considerando en $X \times X$ y $\mathbb{K} \times X$ la topología producto.

Observación 1.2. Como la suma en un espacio vectorial topológico es continua, tenemos que las traslaciones son continuas, y como la inversa de una traslación es una traslación, se tiene que las traslaciones son homeomorfismos.
Por lo tanto, solo con estudiar el sistema fundamental de entornos del 0 nos sirve, ya que trasladando esta base de entornos conseguimos un sistema fundamental de cualquier punto.

Definimos a continuación diversas propiedades de un conjunto que nos van a interesar más adelante.

Definición 1.3. Sea X un espacio vectorial.

1. Se dice que un conjunto $A \subseteq X$ es *absorbente* si para cada $x \in X$, A absorbe a $\{x\}$, es decir, para cada $x \in X$ existe $r > 0$ tal que $x \in cA$ para cada $c \in \mathbb{K}$, $|c| \geq r$.
2. Se dice que un conjunto $C \subseteq X$ es *equilibrado* si $aC \subseteq C$ para cada $a \in \mathbb{K}$, $|a| \leq 1$.
3. Se dice que un conjunto $T \subseteq X$, con X un espacio vectorial topológico, es un *tonel* si es cerrado, convexo, equilibrado y absorbente.
4. Se dice que un espacio vectorial topológico es un *espacio tonelado* si cumple que todo tonel es un entorno del 0.

Tras ver estas definiciones, daremos una serie de lemas técnicos, que nos servirán para la sección 1.2 y para asegurar la existencia de entornos del 0 que verifiquen unas determinadas condiciones.

Lema 1.4. *Sea X un espacio vectorial topológico. Entonces todo entorno del origen contiene a un entorno equilibrado del origen.*

Demostración. Sea U un entorno de 0_X. Como la aplicación $\mathbb{K} \times X \to X$ definida como $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ es continua, en particular lo es en $(0, 0_X) \in \mathbb{K} \times X$, luego existe $W \subseteq X$ abierto, con $0_X \in W$ y $r > 0$ tal que $B(0, r) \cdot W \subseteq U$.
Sea $V := \cup_{\lambda \in \mathbb{K}, 0 < |\lambda| < r} \lambda \cdot W$. Comprobemos que V era el entorno que buscábamos:

1. V es un entorno de 0_X ya que W lo es, luego para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \cdot W$ sigue siéndolo.

2. Veamos que $V \subseteq U$. Sea $x \in V$, luego existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $0 < |\lambda| < r$ tal que $x \in \lambda \cdot W \subseteq \overline{B}(0, |\lambda|) \cdot W \subseteq B(0, r) \cdot W \subseteq U$.

3. Veamos que V es equilibrado. Sea $\mu \in \mathbb{K}$, $|\mu| \leq 1$.

   a) Si $\mu = 0$, $\mu \cdot V = \{0_X\} \subseteq \frac{r}{2} \cdot W \subseteq V$.

   b) Si $\mu \neq 0$. Sea $x \in \mu \cdot V$, se tiene que $\frac{x}{\mu} \in V$, luego existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $0 < |\lambda| < r$ tal que $\frac{x}{\mu} \in \lambda \cdot W$, es decir, $x \in \lambda\mu \cdot W$ y $0 < |\lambda\mu| \leq |\lambda| < r$, por lo que $x \in V$.

$\square$

Lema 1.5. *Sea X un espacio vectorial topológico. Entonces dado un entorno U del origen, existe V entorno equilibrado del origen tal que $V + V \subseteq U$.*

Demostración. Como la aplicación $X \times X \to X$ definida como $(x, y) \mapsto x + y$ es continua, en particular lo es en $(0, 0) \in X \times X$, luego existen U_1, U_2 entornos del origen tales que $U_1 + U_2 \subseteq U$.
Sea $U_0 := U_1 \cap U_2$, que es entorno de 0. Por el lema 1.4 se tiene que existe $V \subseteq U$ entorno equilibrado del 0, luego $V + V \subseteq U_0 + U_0 \subseteq U_1 + U_2 \subseteq U$. $\square$

Lema 1.6. *Sea X un espacio vectorial topológico y sea U un entorno del 0_X. Si $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números estrictamente positivos que cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$, entonces $X = \cup_{n=1}^{\infty} r_n U$.*

Demostración. Sea $x \in E$. Como la aplicación $f_x : \mathbb{K} \longrightarrow X$, definida como $f_x(\lambda) := \lambda x$, es continua, lo es en 0_X luego $f_x^{-1}(U) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda x \in U\} = I$ es un entorno abierto de $0_{\mathbb{K}}$. Por otro lado, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{r_n} = 0$, por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\frac{1}{r_n} \in I$ y $\frac{x}{r_n} \in U$, deduciéndose así que $x \in r_{n_0} U$. $\square$

Recordamos seguidamente el concepto de espacio localmente convexo y algún resultado importante.

Definición 1.7. Un espacio vectorial topológico X es *localmente convexo* si el 0 admite un sistema fundamental de entornos convexos.

Definición 1.8. Sea $\{p_i\}_{i\in I}$ una familia de seminormas en X, siendo X un espacio vectorial e I un conjunto de índices no vacío.

La *topología generada por* $\{p_i\}_{i\in I}$ en X es aquella que tiene como sistema fundamental de entornos del 0 a los conjuntos de la forma $\{V_{J,\varepsilon}\}_{J\subseteq I,\varepsilon>0}$, de manera que J es finito, definidos como

$$V_{J,\varepsilon} = \{x \in X : p_j(x) < \varepsilon, \forall j \in J\}.$$

El siguiente resultado relaciona el concepto de espacio vectorial topológico localmente convexo con el hecho de que su topología esté generada por una familia de seminormas.

Proposición 1.9. *Sea X un espacio vectorial topológico. Entonces X es localmente convexo si y solo si existe una familia $\{p_i\}_{i\in I}$ de seminormas en X que generan la topología de X.*

Demostración. Se puede ver en el libro de J. Horváth [5] en las páginas 89 y 95. □

A continuación, nos vamos a centrar en dos resultados que nos permiten demostrar cuándo un espacio cociente y un espacio localmente convexo son de Hausdorff.
Comencemos con el primero, fijando la notación que usaremos a lo largo del trabajo y dando un lema con el que podremos probar este resultado.

Notación 1.10. Dado X un espacio vectorial topológico y M un subespacio vectorial de X, denotamos como $p : X \to X/M$ a la aplicación cociente asociada, de manera que $\widehat{g}$ es la clase del espacio cociente que tiene a g como representante. Además, $f \in \widehat{g}$ si y solo si existe $h \in M$ tal que $f = g + h$.

A continuación definiremos la topología que usaremos para dar al espacio X/M estructura de espacio vectorial topológico, la conocida como topología cociente.

Definición 1.11. Sea X un espacio vectorial topológico y M un subespacio vectorial de X. Se define la *topología cociente* de X/M como la topología más fina entre todas las que hacen que X/M sea un espacio vectorial topológico y que hacen que p sea continua.

Observación 1.12. Esta topología existe porque es la intersección de todas las topologías que hacen que X/M sea un espacio vectorial topológico y que hacen que p sea continua, que es a su vez una topología, siendo este conjunto de topologías no vacío al estar la topología grosera.

A su vez, a partir de una seminorma q de X se puede definir una asociada del espacio X/M como sigue.

Definición 1.13. Si X es un espacio vectorial, M es un subespacio de X y q es una seminorma en X, se define *la seminorma cociente asociada a* q, $\widehat{q}$, como $\widehat{q}(\widehat{f}) := \inf_{f\in\widehat{f}} q(f)$.

Observación 1.14.

1. Fácilmente se puede comprobar que $\widehat{q}$ es una seminorma en X/M a partir del hecho de que q es una seminorma en X.

2. Si X es localmente convexo, existe una familia de seminormas $\{q_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ que generan la topología. Veamos que la topología de X/M está generada por la familia de seminormas $\{\widehat{q}_i\}_{i\in\mathbb{I}}$.
   Si U es un entorno de $0 \in X/M$, existe W abierto de X/M tal que $0 \in W \subseteq U$, luego $p^{-1}(W)$ es abierto y $0 \in p^{-1}(W)$, por lo que existe $J \subseteq \mathbb{I}$ finito y $\varepsilon > 0$ tal que $0 \in V_{J,\varepsilon} \subseteq p^{-1}(W)$, donde $V_{J,\varepsilon} := \{x \in X : q_j(x) < \varepsilon \ \forall j \in J\}$, obteniéndose así que $0 \in p(V_{J,\varepsilon}) \subseteq p(p^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq U$.
   Por último, se tiene que $p(V_{J,\varepsilon}) = \{\widehat{x} : \widehat{q}_j(\widehat{x}) < \varepsilon \ \forall j \in J\}$ ya que si $\widehat{x} \in p(V_{J,\varepsilon})$, existe $x_0 \in V_{J,\varepsilon}$ tal que $p(x_0) = p(x)$, obteniéndose así que para cada $j \in J$, $\widehat{q}_j(\widehat{x}) = \inf_{x\in\widehat{x}} q_j(x) \leq q_j(x_0) < \varepsilon$. Análogamente se llega a la otra contención.

Lema 1.15. *Un espacio vectorial topológico X es un espacio de Hausdorff si para cada $a \neq 0$, existe un entorno V de 0 tal que $a \notin V$.*

Demostración. Comencemos observando que basta probar que si $a \neq 0$, entonces existe un entorno U de 0 y otro W de a tal que $U \cap W = \emptyset$, ya que si tenemos esto y $a \neq b$, entonces $a - b \neq 0$ y aplicando lo anterior podemos encontrar un entorno U de 0 y otro W de $a - b$ tal que $U \cap W = \emptyset$.
Por lo tanto, $U + b$ es un entorno de b y $W + b$ es un entorno de a y $(U + b) \cap (W + b) = \emptyset$, ya que si $x \in (U + b) \cap (W + b)$, $x - b \in U \cap W$, lo cual es absurdo.
Sea $a \neq 0$, por hipótesis existe V entorno de 0 de manera que $a \notin V$. Por el lema 1.5, existe un entorno equilibrado U del 0 tal que $U + U \subseteq V$, luego $U + a$ es un entorno de a y $U \cap (U + a) = \emptyset$ ya que si existe $x \in U \cap (U + a)$, entonces encontramos $y \in U$ tal que $x = y + a \in U$. Al ser U equilibrado, se tiene que:

$$a = x - y \in U + U \subseteq V,$$

llegando a un absurdo pues $a \notin V$. □

Proposición 1.16. *Sea X un espacio vectorial topológico y M un subespacio de X. Entonces X/M es de Hausdorff si y solo si M es cerrado.*

Demostración. $\Rightarrow$) Al ser X/M de Hausdorff, se tiene que $\{\widehat{x}\}$ es cerrado para cada $\widehat{x} \in X/M$, por lo que $\{\widehat{0}\}$ es cerrado. Podemos concluir observando que p es continua y que $M = p^{-1}(\{\widehat{0}\})$.

$\Leftarrow$) Supongamos que M es cerrado y sea $\widehat{x} \in X/M$ distinto de $\widehat{0}$. Como p es sobreyectiva, existe $x \in X$, $x \notin M$ tal que $p(x) = \widehat{x} \neq \widehat{0}$.
Por lo que al ser M cerrado, existe U un entorno de x tal que $U \cap M = \emptyset$, luego existe V abierto tal que $\widehat{x} \in V \subseteq p(U)$ ya que $p(U)$ es un entorno de $\widehat{x}$.
Además, $\widehat{0} \notin p(U)$, ya que si no existe $x \in U$ tal que $p(x) = \widehat{0}$ pero entonces $x \in M$, entrando en una contradicción con el hecho de que $U \cap M = \emptyset$. Luego $\widehat{x} - p(U)$ es un entorno de 0 que verifica que $\widehat{x} \notin \widehat{x} - p(U)$, ya que si se diese lo contrario, se tendría que $\widehat{0} \in p(U)$, por lo que por el lema 1.15 X/M es de Hausdorff.

$\square$

El segundo criterio será para los espacios vectoriales localmente convexos. Comenzamos por una definición previa.

Definición 1.17. Se dice que una familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}$, definidas en un espacio vectorial X, es *separada* si para cada $x \in X \setminus \{0\}$, existe $i \in I$ tal que $p_i(x) \neq 0$. Observemos que esto es equivalente a que si para cada $i \in I$, $p_i(x) = 0$, entonces $x = 0$.

Teorema 1.18. *Un espacio localmente convexo X es de Hausdorff si su topología puede generarse por una familia $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}$ separada de seminormas.*

Demostración. Se puede encontrar en el libro de J. Horváth [5, p. 96], y fue incluida en [6, p. 34]. $\square$

El último resultado de este apartado, válido para espacios localmente convexos, nos dará una manera sencilla de comprobar cuando una aplicación lineal es continua. Requiere de la siguiente definición.

Definición 1.19. Diremos que una familia de seminormas $\mathcal{P}$ de un espacio vectorial X es *saturada* si para cualquier subfamilia finita $\{p_i\}_{i \in I}$ de seminormas de $\mathcal{P}$, se tiene que $\max p_i \in \mathcal{P}$.

Es sencillo comprobar que la topología de todo espacio localmente convexo se puede considerar generada por una familia saturada de seminormas.

Proposición 1.20. *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo cuya topología está generada por una familia saturada $\{q_i\}_{i \in I}$ de seminormas continuas de X y sea Y otro espacio vectorial topológico localmente convexo cuya topología está generada por una familia de seminormas continuas $\{r_l\}_{l \in L}$ de Y. Entonces, una aplicación lineal $f : X \to Y$ es continua en X si y solo si para cada $l \in L$ existen un $i \in I$ y $M > 0$ tales que $r_l(f(x)) \leq M q_i(x)$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Se puede encontrar en el libro de J. Horváth [5, p. 97], y fue desarrollada en [6, p. 35]. □

1.1.2. Filtros

Una vez que hemos mencionado distintas definiciones y propiedades relativas a los espacios vectoriales topológicos, y en particular a los espacios localmente convexos, para hablar de completitud de espacios vectoriales topológicos, y en particular de los espacios de Fréchet, vamos a necesitar el concepto de filtro, que es lo que vamos a desarrollar en esta sección.

Definición 1.21. Sean X un conjunto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, el conjunto de las partes de X, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Se dice que $\mathcal{F}$ es un *filtro* en X si satisface las siguientes propiedades:

1. Si $A \subseteq X$ y existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \supseteq B$, entonces $A \in \mathcal{F}$.

2. La intersección de una familia finita de elementos de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$.

3. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Observación 1.22. De las propiedades que debe de cumplir un filtro $\mathcal{F}$ se deducen las siguientes propiedades:

1. La segunda propiedad de la definición anterior es equivalente, por inducción, a que la intersección de dos elementos de $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{F}$, es decir, si A, $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

2. A partir de la segunda y de la tercera propiedad, se deduce que la intersección de una familia finita de elementos de $\mathcal{F}$ nunca es vacía.

3. Como $\mathcal{F} \neq \emptyset$, por la primera propiedad de filtro llegamos a que $X \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 1.23. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. El conjunto de todos los entornos de x, $\mathcal{E}(x)$, es un filtro en X.

De hecho, $\mathcal{E}(x) \neq \emptyset$ pues $X \in \mathcal{E}(x)$; la intersección finita de entornos de x es un entorno de x; si $A \supseteq B$ y B es un entorno de x, entonces A lo es también y, por último, el conjunto vacío no puede ser un entorno de x porque $x \notin \emptyset$.

Introducimos un concepto que se usa también con el mismo significado cuando se comparan dos topologías de un mismo espacio topológico y que será de gran importancia cuando hablemos de convergencia en términos de filtros.

Definición 1.24. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos filtros de un mismo conjunto X. Diremos que $\mathcal{F}_1$ es *más fino* que $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2$.

A continuación, veremos un resultado donde dado un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ con unas propiedades particulares, siendo X un conjunto cualquiera, podremos construir un filtro con especial interés.

Definición 1.25. Sean X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ no vacío.
Diremos que $\mathcal{B}$ es una base de filtro en X si cumple estas dos propiedades:

1. Si $A,B \in \mathcal{B}$, entonces existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $A \cap B \supseteq C$.

2. $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

Proposición 1.26. *Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro en X, entonces el conjunto $\mathcal{F}$ formado por todos los subconjuntos de X que contienen a algún elemento de $\mathcal{B}$ es un filtro.*

Demostración. Comencemos observando que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Una vez hecho este comentario, veamos que se cumplen las tres propiedades mencionadas en la definición 1.21.

1 Sean $A \subseteq X$ y $B \in \mathcal{F}$ que verifica que $A \supseteq B$. Como $B \in \mathcal{F}$, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $B \supseteq C$, por lo que $A \supseteq C$, es decir, $A \in \mathcal{F}$.

2 Por la observación 1.22.1 basta ver que si A, $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
Dado que A, $B \in \mathcal{F}$, se tiene que existen C, $D \in \mathcal{B}$ tales que $A \supseteq C$ y $B \supseteq D$, luego $A \cap B \supseteq C \cap D$. Por otro lado, por la primera propiedad que cumple $\mathcal{B}$, existe $E \in \mathcal{B}$ tal que $A \cap B \supseteq C \cap D \supseteq E$, deduciéndose así que $A \cap B \in \mathcal{F}$.

3 Razonemos por reducción al absurdo. Si $\emptyset \in \mathcal{F}$, entonces existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq \emptyset$, por lo tanto $A = \emptyset$, llegando a una contradicción, pues $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

$\square$

Definición 1.27. En las condiciones de la proposición 1.26, diremos que $\mathcal{F}$ es *el filtro generado por $\mathcal{B}$*.
Dos bases de filtro $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ diremos que son *equivalentes* si generan el mismo filtro.

Veremos a continuación un ejemplo significativo que estará presente en lo que tratemos relativo a filtros, el filtro de Fréchet.

Ejemplo 1.28 (**Filtro de Fréchet**). En este caso $X = \mathbb{N}$ y consideraremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $S_n := \{m : m \geq n\}$. Veamos que $\mathcal{S} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de filtro. Fácilmente se ve que $\mathcal{S}$ no es vacío y que $\emptyset \notin \mathcal{S}$.
Por otro lado, sean n, $m \in \mathbb{N}$. Consideramos $S_n \cap S_m = \{z : z \geq \text{máx}\{n, m\}\}$, por lo que si $N \geq \text{máx}\{n, m\}$, entonces $S_n \cap S_m \supseteq S_N$.
De este modo, por la proposición 1.26, $\mathcal{S}$ es una base de filtro, y el filtro $\mathcal{F}$ que genera se conoce como *filtro de Fréchet*.

Para acabar de darle sentido a la importancia del filtro de Fréchet, necesitaremos el siguiente resultado, el cual nos proporciona una manera sencilla de generar filtros a partir de una base de filtro teniendo una aplicación.

Proposición 1.29. *Sean X e Y dos conjuntos, $\mathcal{B}$ una base de filtro en X y $f : X \to Y$ una aplicación. Entonces $f(\mathcal{B})$ es una base de filtro en Y.*

Demostración. Tenemos que comprobar si $f(\mathcal{B})$ satisface las dos condiciones de la proposición 1.26.
Sean $A, B \in \mathcal{B}$, al ser $\mathcal{B}$ base de filtro, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $A \cap B \supseteq C$, por lo que $f(A) \cap f(B) \supseteq f(A \cap B) \supseteq f(C)$.
Como $\mathcal{B} \neq \emptyset$, entonces $f(\mathcal{B}) \neq \emptyset$. Por otro lado, puesto que $\emptyset \notin \mathcal{B}$, entonces para cada $A \in \mathcal{B}$, $f(A) \neq \emptyset$, luego $\emptyset \notin f(\mathcal{B})$. $\square$

Veremos en el siguiente ejemplo un caso de aplicación relacionado de manera directa con el filtro de Fréchet.

Ejemplo 1.30 (**Filtro elemental asociado a una sucesión**). Sea X un conjunto y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X. Usando el ejemplo 1.28 y la aplicación $\mathbb{N} \to X$ definida como $n \in \mathbb{N} \mapsto x_n$, llegamos a que $\sigma = \{\mathcal{S}_n : n \in \mathbb{N}\}$, con $\mathcal{S}_n := \{x_m : m \geq n\}$, es una base de filtro en X.
Al filtro que genera la base σ se le conoce como *filtro elemental asociado a la sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y lo denotaremos como $\mathcal{F}(\{x_n\})$.

Hasta ahora, en todos los resultados presentados no pedíamos ninguna condición al conjunto X. Lo siguiente que vamos a hacer es imponer al conjunto X que tenga una estructura de espacio topológico, empezando con las siguientes definiciones.

Definición 1.31. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de filtro en X. Diremos que $x \in X$ es *adherente a* $\mathcal{B}$ si para cada $A \in \mathcal{B}$, $x \in \overline{A}$.
Además, si $\mathcal{F}$ es un filtro, diremos que $x \in X$ es *adherente a* $\mathcal{F}$ si para cada $A \in \mathcal{F}$, $x \in \overline{A}$.

Definición 1.32. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que una base de filtro $\mathcal{B}$ es un *sistema fundamental de entornos de* x si genera el filtro de todos los entornos de x, $\mathcal{E}(x)$.

Esta última definición será de gran utilidad en los distintos conceptos y resultados relativos a la convergencia de filtros, aspecto en el que nos centraremos a continuación.

Definición 1.33. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que *un filtro* $\mathcal{F}$ *en* X *converge a* x si $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}(x)$.
Una *base de filtro* $\mathcal{B}$ *converge a* x si lo hace el filtro que genera.

La noción de convergencia de sucesiones se puede dar en términos de convergencia de los filtros asociados a la sucesión presentados en el ejemplo 1.30. Para ello, en primer lugar introduciremos la definición de convergencia de sucesiones en términos de entornos y después comprobaremos que es equivalente a la convergencia anteriormente mencionada.

Definición 1.34. Sean X un espacio topológico, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X. Diremos que la sucesión *converge a* $x \in X$ si para cada entorno $V \in \mathcal{E}(x)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para cada $n \geq n_0$.

Observación 1.35.

1. La definición anterior es equivalente a afirmar que para cada $V \in \mathcal{E}(x)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V \supseteq \mathcal{S}_{n_0}$, deduciéndose así que $\mathcal{F}(\{x_n\}) \supseteq \mathcal{E}(x)$.
Por lo tanto, la convergencia de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hacia x no es más que la convergencia hacia x del filtro elemental asociado a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Si además X es localmente convexo, sabemos por la proposición 1.9 que su topología está generada por una familia $\{p_i\}_{i \in I}$ de seminormas.
Por lo tanto, tenemos que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$ y consideramos $j \in I$ y $\varepsilon > 0$, $V_{j,\varepsilon} + x$ pertenece al sistema fundamental de entornos de x. Como además, se tiene que $\mathcal{F}(\{x_n\}) \supseteq \mathcal{E}(x)$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ $V_{j,\varepsilon} + x \supseteq \mathcal{S}_n$, ya que $\mathcal{S}_n \supseteq \mathcal{S}_{n+1}$, es decir para cada $n \geq n_0$, $p_j(x_n - x) < \varepsilon$, y reciprocamente.
Por lo tanto, en un espacio localmente convexo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x si y solo si para cada $j \in I$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_j(x_n - x) < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$.

A lo largo del Grado en Matemáticas, el concepto de convergencia de una sucesión viene con frecuencia asociado con el de sucesión de Cauchy, por lo que vamos a definir el significado de sucesión de Cauchy en términos de un tipo de filtros, los filtros de Cauchy, donde necesitaremos además que el espacio X sea un espacio vectorial topológico.

Definición 1.36. Sean X un espacio vectorial topológico. Diremos que un filtro $\mathcal{F}$ en X es *de Cauchy* si para cada entorno V de 0 en X, existe $U \in \mathcal{F}$ tal que $U - U \subseteq V$, es decir para cada x, $y \in U$, $x - y \in V$.
Diremos que una *sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *de Cauchy* si $\mathcal{F}(\{x_n\})$ es de Cauchy.

Observación 1.37. . Análogamente a lo realizado en la observación 1.35, se tiene que si X es localmente convexo, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy si para cada $j \in I$, y $\varepsilon > 0$ se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_j(x_n - x_m) < \varepsilon$ si $n,m \geq n_0$.

Veremos ahora un resultado que tendrá como consecuencia directa que toda sucesión convergente de elementos de un espacio vectorial topológico X es de Cauchy.

Proposición 1.38. *Sean X un espacio vectorial topológico y $\mathcal{F}$ un filtro en X que converge a $b \in A$. Entonces $\mathcal{F}$ es de Cauchy en A.*

Demostración. Sea V un entorno de 0 en X y sea U un entorno equilibrado del 0 que verifica que $U + U \subseteq V$ que sabemos que existe por el lema 1.5.
Al ser U un entorno de 0, $b + U$ es un entorno de b y como $\mathcal{F}$ converge a $b \in A$, entonces existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $W \subseteq U + b$. Sean y, $w \in W$, al ser U equilibrado tenemos que:

$$x - y = x - b - (y - b) \in U + U \subseteq V.$$

Por lo que $W - W \subseteq V$, luego $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy. □

Corolario 1.39. *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.*

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior al filtro $\mathcal{F}(\{x_n\})$. □

Veremos ahora un lema que usaremos para probar un resultado central de esta sección, el teorema 1.48.

Lema 1.40. *Sean X un espacio vectorial topológico y $x \in X$. Si x es adherente a un filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $A \subseteq X$, entonces $\mathcal{F}$ converge a x.*

Demostración. Sea V un entorno del 0 y sea W un entorno del 0 que verifique que $W + W \subseteq V$. Al ser $\mathcal{F}$ de Cauchy, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A - A \subseteq W$.
Como x es adherente a $\mathcal{F}$, entonces $x \in \overline{A}$, por lo que $A \cap (x + W) \neq \emptyset$. Sea $y \in A \cap (x + W)$, se tiene que si $z \in A$, $z - y \in W$, por lo que:

$$z \in y + W \subseteq x + W + W \subseteq x + V,$$

luego $A \subseteq x + V$ y al ser $\mathcal{F}$ un filtro, deducimos que $x + V \in \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}(x)$, concluyéndose así que $\mathcal{F}$ converge a x. □

1.1.3. Espacios de Fréchet

Un tipo de espacios localmente convexos que merece la pena destacar son los espacios de Fréchet, que son un tipo particular de espacio metrizable, que será definido a continuación.

Definición 1.41. Se dice que un espacio vectorial topológico X es *metrizable* si existe una métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que induce la topología de X.

Observación 1.42. Obviamente un espacio vectorial topológico metrizable siempre es de Hausdorff.

A continuación, daremos una caracterización de los espacios localmente convexos metrizables.

Proposición 1.43. *Un espacio localmente convexo X es metrizable si y solo si es de Hausdorff y su topología está generada por una familia numerable de seminormas.*

Demostración. Se puede encontrar en el libro de J. Horváth [5] en las páginas 110-116. □

Definiremos la completitud en términos de filtros en el caso de que el espacio en el que estemos sea vectorial topológico.

Definición 1.44. Un espacio vectorial topológico X es *completo* si cada filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en X converge a un punto $x \in X$.

Definición 1.45. Un espacio vectorial topológico localmente convexo X se dice que es un *espacio de Fréchet* si es metrizable y completo.

Observación 1.46. Si el espacio vectorial topológico X es metrizable, para probar que X es completo, bastaría probar que cada sucesión de Cauchy de elementos de X converge a un elemento de X. La demostración de este hecho se puede encontrar en el libro de J. Horváth [5, p. 135].

Concluiremos esta sección dando dos teoremas, que nos indicarán que el espacio cociente con la topología cociente definida en 1.11, con M un subespacio cerrado del de partida, es metrizable y completo cuando lo sea el original.

Teorema 1.47. *Sean X un espacio vectorial topológico y M un subespacio cerrado de X. Si X es metrizable, entonces X/M es metrizable.*

Demostración. Como X es metrizable, se tiene que su topología está generada por una familia numerable de seminormas $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por la observación 1.14, tenemos que la topología de X/M está generada por la familia de seminormas $\{\widehat{q}_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Por otro lado, al ser M cerrado por el lema 1.16, tenemos que X/M es de Hausdorff, concluyendo que X/M es metrizable. □

Teorema 1.48. *Sean X un espacio vectorial topológico y M un subespacio cerrado de X. Si X es metrizable y completo, entonces X/M es metrizable y completo.*

Demostración. Comenzamos indicando que por el teorema 1.47, sabemos que X/M es metrizable, por lo que por la observación 1.46 para probar que X/M es completo basta comprobar que toda sucesión de Cauchy es convergente.
Para ello, sea $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema fundamental de entornos de $0 \in X$, que se puede tomar numerable al ser X metrizable, que verifica que $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que sabemos que existe por el lema 1.5.
Definimos para $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{V_n}$ como $\widehat{V_n} := p(V_n)$, entonces $\{\widehat{V_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema fundamental de entornos de $\widehat{0}$ por la proposición 1.29.
Sea $\{\widehat{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X/M. Entonces por la definición de sucesión de Cauchy, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\widehat{x}_k - \widehat{x}_l \in \widehat{V_n}$ para cada $k,l \geq k_n$, por lo que podemos extraer una subsucesión $\{\widehat{x}_{k_l}\}_{l=0}^{\infty}$ de la de partida que verifique que $\widehat{x}_{k_l} - \widehat{x}_{k_m} \in V_n$ si l, $m \geq n$.
Sean $n \in \mathbb{N}$, y, $z \in X$ tales que $y \in \widehat{x}_{k_l}$ y $z \in \widehat{x}_{k_m}$ con $l, m \geq n$. Por lo tanto, $\widehat{y} - \widehat{z} \in \widehat{V_n}$, es decir, $y - z \in V_n + M$. Luego si $l, m \geq n$ y $z \in \widehat{x}_{k_m}$, entonces $\widehat{x}_{k_l} \cap (z + V_n) \neq \emptyset$, ya que si $y \in \widehat{x}_{k_l}$, se tiene que $y \in z + V_n + M$, deduciéndose que existen $v \in V_n$ y $u \in M$ tales que $y - u = z + v \in z + V_n$ y además $\widehat{y - u} = \widehat{y} = \widehat{x}_{k_l}$, o dicho de otro modo, $y - u \in \widehat{x}_{k_l}$.
Definimos de manera inductiva la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ que satisfaga que $x_0 \in \widehat{x}_0$ y supongamos que ya elegimos los elementos x_i con $1 \leq i \leq n$ de manera que $x_i \in \widehat{x}_{k_i}$. Elegiremos si $p > 0$, $x_{n+p} \in X$ que cumpla que $x_{n+p} \in \widehat{x}_{k_{n+p}} \cap (x_{n+p-1} + V_{n+p-1}) \subseteq x_{n+p-1} + V_{n+p-1}$. Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+p} &\in x_{n+p-1} + V_{n+p-1} \subseteq x_{n+p-2} + V_{n+p-2} + V_{n+p-1} \subseteq \ldots \\ &\subseteq x_n + V_n + V_{n+1} + \ldots + V_{n+p-1} \subseteq x_n + V_{n-1}. \end{aligned}$$

De este modo, se concluye que si $p > 0$ y $n > 1$, $x_{n+p} - x_n \in V_{n-1}$, por lo que la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en X. Como este espacio es completo, existe $x \in X$ tal que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge hacia x, luego la sucesión $\{p(x_n) = \widehat{x}_{k_n}\}_{n=0}^{\infty}$ converge hacia $p(x) = \widehat{x}$.
Al darse esta convergencia y ser X/M metrizable, se tiene que $\widehat{x}$ es adherente a $\mathcal{F}(\{\widehat{x}_n\})$,

que es de Cauchy, por lo que aplicando el lema 1.40 se concluye que $\{\widehat{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge a $\widehat{x}$. □

1.1.4. Espacios límite inductivo

Procedemos ahora al estudio de otro tipo de estructuras, los espacios límite inductivo de una familia de espacios localmente convexos.

Definición 1.49. Sean $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales localmente convexos, E un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $j_i : E_i \to E$, $i \in I$, lineal.
Se dice que son un *sistema inductivo* si $\cup_{i\in I} j_i(E_i) = E$ y se denotará como $(j_i : E_i \to E)_{i\in I}$.
Además, se dice que E tiene la *topología de límite inductivo* si dotamos a E con la topología más fina entre todas las que hacen que E sea localmente convexo y que las j_i sean continuas.

Observación 1.50. La topología de límite inductivo siempre existe porque es la intersección de todas las topologías que hacen que E sea localmente convexo y que las j_i sean continuas, y este conjunto de topologías es no vacío porque la topología grosera cumple estas condiciones.

Definición 1.51. Un sistema inductivo $(j_n : E_n \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que es un *espectro encajado* (en inglés *embedding spectrum*) si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene lo siguiente:

1. E_n es un subespacio vectorial de E y $j_n = i_n : E_n \hookrightarrow E$ es la inclusión.

2. $E_n \subseteq E_{n+1}$ y la inclusión $E_n \hookrightarrow E_{n+1}$ es continua.

Diremos que E es el límite inductivo de $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y lo denotamos como $E = \operatorname{ind} E_n$.

A continuación, vamos a dar un ejemplo de un espacio muy común al que se le suele dotar de topología de límite inductivo.

Ejemplo 1.52. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es el límite inductivo de $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidos como $E_n := \{f \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}) : \operatorname{sop}(f) \subseteq [-n, n]\}$, considerando en estos espacios la topología de la convergencia uniforme de la función y de todas sus derivadas, que los convierte en espacios de Banach.

Nos interesa caracterizar a continuación cuándo una aplicación entre límites inductivos va a ser continua, de un modo similar a lo que hicimos en la proposición 1.20.

Definición 1.53. Se define la *envolvente convexa* de un conjunto P como el menor convexo que contiene a P y lo denotaremos como $C(P)$.

Observación 1.54. Dado un conjunto P, la envolvente convexa siempre existe porque es la intersección de todos los convexos que contienen a P: dicha familia de convexos es no vacío al ser el espacio ambiente un convexo, y la intersección de conjuntos convexos es convexa.

Lema 1.55. *Sea $(j_i : E_i \to F)_{i\in I}$ un sistema inductivo y dotemos a F de la topología de límite inductivo. Entonces un conjunto equilibrado, absorbente y convexo $V \subseteq F$ es un entorno del 0 en F si y solo si $j_i^{-1}(V)$ es un entorno del 0 en E_i para cada $i \in I$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Basta observar que las j_i son continuas y V es un entorno del 0.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{B}$ la familia de los conjuntos absorbentes, equilibrados y convexos U de F tales que $j_i^{-1}(U)$ es un entorno del 0 en E_i para cada $i \in I$. Es sencillo comprobar que $\mathcal{B}$ es una base de filtro, y que es sistema fundamental de entornos de 0 para una topología τ en F. Dicha topología es compatible con la estructura vectorial, localmente convexa, y hace claramente continuas a todas las j_i, de modo que, por definición, esta topología es menos fina que la topología límite inductivo. Veamos la contención recíproca.

Sea U un entorno del 0 en F de la topología límite inductivo. Por la construcción de esta topología, existe una colección $\{\tau_k\}_{k=1}^n$ de topologías que hacen que F sea localmente convexo y que las j_i sean continuas, de manera que $U \supseteq \cap_{k=1}^n W_k$, de manera que $W_k \in \tau_k$ es un entorno equilibrado, absorbente y convexo del 0 en F.

Observemos que $W = \cap_{k=1}^n W_k \in \mathcal{B}$ al ser equilibrado, absorbente y convexo y para cada $i \in I$, se tiene que $j_i^{-1}(W) = \cap_{k=1}^n j_i^{-1}(W_k)$ es un entorno del 0 en E_i. Por lo tanto, $U \in \tau$.

Por otro lado, para cada $i \in I$, sea $\mathcal{R}_i$ un sistema fundamental de entornos del 0 en E_i. Veamos que $\mathcal{S} := \{C(\cup_{i\in I} j_i(U_i)) : U_i \in \mathcal{R}_i\}$ es una familia de entornos del 0 en F. Sea $U \in \mathcal{S}$. Entonces U es equilibrado, absorbente, convexo y para cada $i \in I$, $j_i^{-1}(U) \supseteq U_i$. Es decir, $U \in \mathcal{B}$.

Procederemos a continuación a probar la implicación pedida. Como j_i es lineal y $j_i^{-1}(V)$ es un entorno de 0 en E_i, $0 \in j_i(j_i^{-1}(V)) \subseteq V$ para cada $i \in I$. Por lo tanto, al ser V convexo, $V \supseteq C(\cup_{i\in I} j_i(j_i^{-1}(V)))$.

Como, por hipótesis, para cada $i \in I$, $j_i^{-1}(V)$ es un entorno del 0 en E_i y $\mathcal{S}$ es una familia de entornos del 0 en F, V es un entorno del 0 en F.

$\square$

El siguiente resultado caracteriza cuándo una aplicación de un sistema inductivo a un espacio localmente convexo es continua.

Proposición 1.56. *Sea F un espacio localmente convexo y sea $(j_i : E_i \to E)_{i\in I}$ un sistema inductivo, donde a E se le dota de la topología de límite inductivo. Si $f : E \to F$ es lineal, entonces f es continua si y solo si para cada $i \in I$, $f_{|E_i} : E_i \to F$ es continua.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si f es continua y el sistema inductivo $(j_i : E_i \to E)_{i\in I}$ tiene la topología de límite inductivo, j_i es continua para cada $i \in I$, luego $f \circ j_i$ es continua para cada $i \in I$.

$\Leftarrow$) Sea V un entorno absorbente, equilibrado y convexo de 0_F de un sistema fundamental de entornos convexos de 0_F, el cual sabemos que existe al ser F localmente convexo. Tenemos que $f^{-1}_{|E_i}(V)$ es un entorno de 0 para cada $i \in I$, luego $j_i^{-1}(f^{-1}(V))$ es un entorno de 0 para cada $i \in I$.
Como f es lineal, nos basta comprobar que $f^{-1}(V) = \{x \in E : f(x) \in V\}$ es convexo, ya que lo cual es cierto ya que si $x, y \in f^{-1}(V)$, entonces para cada $t \in [0,1]$, $f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y) \in V$ al ser V convexo, por lo que $tx + (1-t)y \in f^{-1}(V)$.
Aplicando el lema 1.55, deducimos que $f^{-1}(V)$ es un entorno de 0, concluyendo que f es continua en 0 y como f es lineal, f es continua.

□

Concluiremos con esta colección de resultados relativos a la continuidad en sistemas inductivos, con uno que nos permite comprobar si una aplicación entre límites inductivos es continua.

Proposición 1.57. *Sean $E = ind\, E_n$ y $F = ind\, F_m$ dos límites inductivos y sea $f : E \to F$ una aplicación lineal que verifica que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(E_n) \subseteq F_m$ y $f_{|E_n} : E_n \to F_m$ es continua, entonces f es continua.*

Demostración. Observemos que F es localmente convexo y que como $f_{|E_n} : E_n \to F_m$ es continua, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_{|E_n} \circ i_m : E_n \to F$ es continua, por lo que por la proposición 1.56, f es continua. □

1.2. Espacios de Baire

Esta sección recogerá resultados relativos al conocido como teorema de categoría de Baire, ya visto para espacios métricos en la asignatura de "*Introducción a los espacios de funciones*" de cuarto curso del Grado en Matemáticas de la UVA. Nosotros generalizaremos este resultado para los conocidos como espacios de Baire.

Una vez hecho esto, también generalizaremos el Teorema de la Aplicación Abierta y del Grafo Cerrado para espacios metrizables y completos, es decir, de Fréchet.

1.2.1. Espacio de Baire y Teorema de Baire

Comenzaremos recordando las definiciones de conjunto raro y conjunto de primera y segunda categoria.

Definición 1.58. Sea X un espacio topológico.

1. $A \subseteq X$ es raro si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

2. $A \subseteq X$ es de primera categoría en X si existe $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos raros tales que $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

3. $A \subseteq X$ es de segunda categoría en X si no es de primera categoría.

4. Un espacio topológico X se dice que es de Baire si todo subconjunto $A \subseteq X$ abierto es de segunda categoría.

A partir de estas definiciones, se pueden deducir algunas propiedades, que aparecen recogidas en la siguiente observación.

Observación 1.59. 1. De la definición de conjunto raro, se deduce que si $A \subseteq X$ es raro, entonces $\overline{A}^c$ es denso en X, ya que $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

2. Si $A \subseteq B$ y B es raro, entonces A es raro ya que $\text{int}(\overline{A}) \subseteq \text{int}(\overline{B}) = \emptyset$

3. Si X es un espacio de Baire, se puede deducir del hecho de que X es abierto que X no se puede expresar como unión numerable de conjuntos raros. Por lo tanto, si $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, de manera que F_n es cerrado para cada n, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_m) \neq \emptyset$.

El siguiente resultado nos permite caracterizar cuándo un espacio topológico es de Baire, que será usado en el teorema de Baire.

Proposición 1.60. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es de Baire si y solo si para cada sucesión $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ de abiertos y densos en X, se tiene que $\overline{\cap_{n=1}^{\infty} G_n} = X$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Sea $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, de manera que ,por la observación 1.59, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A_n}^c$ es denso y abierto,al ser el complementario de un cerrado, en X.

Entonces por hipótesis, $\overline{\left(\cup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}\right)^c} = \overline{\cap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}^c} = X$, es decir $\left(\cup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}\right)^c$ es denso en X.

Observemos que $A \subseteq \cup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}$, luego $\emptyset = A \cap \left(\cup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}\right)^c$, deduciéndose así del hecho de que $\left(\cup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}\right)^c$ es denso en X que A no puede ser un abierto de X, por lo que X es de Baire.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es de Baire y sea $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos en X.

Sea $A_n := G_n^c$, entonces A_n es cerrado y raro ya que:

$$\operatorname{int}(A_n) = \operatorname{int}(X \setminus G_n) = X \setminus \operatorname{cl}(G_n) = X \setminus X = \emptyset.$$

Por lo tanto, $A := \cup_{n=1}^{\infty}A_n$ no tiene puntos interiores, porque de tenerlos existiría $V \subseteq A$ abierto y entonces como $V \cap A_n$ es raro para cada $n \in \mathbb{N}$, se tendría que $V = \cup_{n=1}^{\infty}V \cap A_n$. Es decir, $\operatorname{int}(A) = \emptyset$.

Podemos concluir observando que $A^c = \cap_{n=1}^{\infty}A_n^c = \cap_{n=1}^{\infty}G_n$, luego se tiene que $\overline{\cap_{n=1}^{\infty}G_n} = \operatorname{cl}(X \setminus A) = X \setminus \operatorname{int}(A) = X$.

□

Daremos a continuación una notación que usaremos a lo largo de lo que queda de capítulo.

Notación 1.61. Sea X un espacio y sea d una distancia en X. Dados $a \in X$ y $r > 0$, denotaremos como $B_r(a) := \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$ a la bola cerrada de centro a y radio r y como a $U_r(a) := \{x \in X : d(x,a) < r\}$ a la bola abierta de centro a y radio r.

Estamos ahora en condiciones de probar el Teorema de Baire.

Teorema 1.62. ***(de Baire)*** *Un espacio topológico metrizable y completo es de Baire.*

Demostración. Sea X un espacio completo y metrizable y sea d una distancia que induce la topología en X.

Sea $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos de X y sea H un abierto no vacío de X. Hay que probar que $H \cap \left(\cap_{n=0}^{\infty} G_n\right) \neq \emptyset$, y por la proposición 1.60, X será de Baire.

Para ello, vamos a determinar de manera inductiva una sucesión $\{B_{r_n}(a_n)\}_{n=0}^{\infty}$, donde se verifica que $B_{r_0}(a_0) \subseteq H$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_{r_n}(a_n) \subseteq B_{r_{n-1}}(a_{n-1}) \cap G_{n-1}$ y $r_n \leq \frac{1}{n}$.

Supongamos que ya tenemos elegidas $B_{r_i}(a_i)$, para $0 \leq i \leq n-1$. Entonces se tiene que $\operatorname{int}(B_{r_{n-1}}(a_{n-1})) \cap G_{n-1}$ es un abierto no vacio, al ser G_{n-1} denso., por lo que existe $a_n \in \operatorname{int}(B_{r_{n-1}}(a_{n-1})) \cap G_{n-1}$ y $r_n \leq \frac{1}{n}$ tal que $a_n \in B_{r_n}(a_n) \subseteq \operatorname{int}(B_{r_{n-1}}(a_{n-1})) \cap G_{n-1}$.

Podemos deducir que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy, ya que para $n, m \geq k$, $a_n, a_m \in B_{r_k}(a_k)$, luego $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a_k) + d(a_k, a_m) \leq \frac{2}{k} \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow \infty$, luego como X es completo, existe $a \in X$ tal que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a a, que pertenece a cada bola $B_{r_n}(a_n)$, por la construcción de estas, por lo que:

$$a \in \cap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(a_n) \subseteq B_{r_0}(a_0) \cap \Big(\cap_{n=0}^{\infty} G_n \Big) \subseteq H \cap \Big(\cap_{n=0}^{\infty} G_n \Big),$$

de lo que se deduce que $H \cap \Big(\cap_{n=0}^{\infty} G_n \Big) \neq \emptyset$, que es lo que queríamos. $\square$

Concluimos esta sección probando que los espacios de Fréchet son, por ser de Baire, tonelados.

Proposición 1.63. *Un espacio localmente convexo X que sea de Baire es tonelado.*

Demostración. Sea T un tonel, entonces T es cerrado, convexo, equilibrado y absorbente. Como T es absorbente, se tiene que $X = \cup_{n=1}^{\infty} nT$. Puesto que la aplicación $x \mapsto mx$ es un homeomorfismo, X es unión numerable de cerrados, luego dado que X es de Baire, se tiene que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que mT tiene un punto interior y por lo tanto, se tiene que T tiene un punto interior x_0. Sea V un entorno equilibrado de 0 tal que $x_0 + V \subseteq T$, entonces al ser T equilibrado, se tiene que $-x0 + V \subseteq T$. De aquí se deduce que $V \subseteq T$, ya que si $x \in V$, entonces $x = \frac{x_0+x}{2} + \frac{-x_0+x}{2} \in T$, al ser T convexo.
Por lo tanto, T es un entorno del 0 y X es tonelado. $\square$

Corolario 1.64. *Todo espacio de Fréchet es de Baire y, por lo tanto tonelado.*

1.2.2. Teorema de la Aplicación Abierta y del Grafo Cerrado

Esta sección pretende generalizar los teoremas de la aplicación abierta y del grafo cerrado, que se ven en la asignatura de "*Introducción a los espacios de funciones*" de cuarto curso del Grado en Matemáticas de la UVa, para el caso en que sean espacios vectoriales topológicos metrizables y completos.

Lema 1.65. *Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos y sea $f : X \to Y$ lineal, continua y sobreyectiva. Si Y es un espacio de Baire, entonces para cada entorno U de 0_X, $\overline{f(U)}$ es un entorno de 0_Y.*

Demostración. Por el lema 1.5, existe un entorno equilibrado V de O_X tal que $V + V \subseteq U$. Por otro lado, por el lema 1.6, $X = \cup_{n=1}^{\infty} nV$ y como f es sobreyectiva y lineal, se deduce que $Y = f(X) = \cup_{n=1}^{\infty} nf(V)$.

Como Y es de Baire, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{mf(V)}$ tiene un punto interior y dado que la aplicación $x \mapsto mx$ es un homeomormismo, $\overline{f(V)}$ tiene un punto interior x_0.
V es equilibrado, es decir si $a \in \mathbb{K}$, con $|a| \leq 1$, $aV \subseteq V$, entonces al ser f lineal, se tiene que $a\overline{f(V)} = \overline{f(aV)} \subseteq \overline{f(V)}$, luego $\overline{f(V)}$ es equilibrado, por lo que $-x_0 \in \overline{f(V)}$.
Por lo tanto, $0_Y = x_0 + (-x_0)$ es un punto interior de $\overline{f(V)} + \overline{f(V)} \subseteq \overline{f(V) + f(V)} = \overline{f(V+V)} \subseteq \overline{f(U)}$, es decir 0_Y es un punto interior de $\overline{f(U)}$, concluyendo así que $\overline{f(U)}$ es un entorno de 0_Y. $\square$

Lema 1.66. *Sean X, Y dos espacios métricos donde X es completo y por simplicidad denotaremos a las distancias de los dos espacios como d. Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua que verifica la siguiente propiedad:*

$$\textit{Para cada } r > 0, \textit{ existe } \rho > 0 \textit{ tal que para cada } x \in X, f(B_r(x)) \textit{ es denso en } B_\rho(f(x)). \tag{1.1}$$

Entonces para cada $a > r$, $f(B_a(x)) \supseteq B_\rho(f(x))$.

Demostración. Sean $a > r$ y $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números estrictamente positivos tal que $r_1 = r$ y $a = \sum_{n=1}^{\infty} r_n$. Por la condición (1.1), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\rho_n > 0$ tal que $\rho_1 = \rho$ y para cada $x \in X$, $f(B_{r_n}(x))$ es denso en $B_{\rho_n}(f(x))$. Observemos que como $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Sea $z_0 \in X$ e $y \in B_\rho(f(z_0))$, tenemos que probar que $y = f(x)$ para $x \in B_a(z_0)$. Para ello construimos por inducción una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $x_0 = z_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$ y $f(x_n) \in B_{\rho_{n+1}}(y)$.
Supongamos que ya hemos conseguido los x_i, con $i = 0, 1, \ldots n-1$ satisfaciendo lo anterior. Entonces $f(x_{n-1}) \in B_{\rho_n}(y)$, o lo que es lo mismo, $y \in B_{\rho_n}(f(x_{n-1}))$. Además, puesto que $f(B_{r_n}(x_{n-1}))$ es denso en $B_{\rho_n}(f(x_{n-1}))$, para cada abierto U de $B_{\rho_n}(f(x_{n-1}))$, se tiene que $U \cap f(B_{r_n}(x_{n-1})) \neq \emptyset$.
Tómese $U = \operatorname{int}(B_{\rho_{n+1}}(y)) \cap B_{\rho_n}(f(x_{n-1}))$, entonces existe $x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$ tal que $f(x_n) \in B_{\rho_{n+1}}(y)$. Por lo que se tiene la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que buscábamos, que es de Cauchy ya que:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} r_{n+k+1},$$

y como $a = \sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} r_{n+k+1} < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. Por lo que, dado que X es completo, existe $x \in X$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ y que verifica que $x \in B_a(x_0)$ ya que:

$$d(x, x_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r_k = \sum_{n=1}^{\infty} r_n = a.$$

Concluimos observando que f es continua, por lo que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ y que $d(f(x), y) = \lim_{n\to\infty} d(f(x_n), y) \leq \lim_{n\to\infty} \rho_{n+1} = 0$, por lo que $y = f(x)$, que es lo que queríamos probar. □

Una vez probado estos lemas, estamos en condiciones de probar los teoremas de la Aplicación Abierta y del Grafo Cerrado.

Teorema 1.67. ***(Teorema de la Aplicación Abierta)*** *Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos metrizables y completos y $f : X \to Y$ lineal, continua y sobreyectiva. Entonces f es abierta.*

Demostración. Equipemos a X y a Y con la distancia invariante por traslaciones compatible con sus topologías, al ser ambos metrizables. Observemos que para cada $r > 0$, $B_r(0_X)$ es un entorno de 0_X, luego por el lema 1.65 $\overline{f(B_r(0_X))}$ es un entorno de 0_Y. Por lo que existe $\rho > 0$ tal que $0_Y \in B_\rho(0_Y) \subseteq \overline{f(B_r(0_X))}$, de donde se puede deducir que $f(B_r(0_X))$ es denso en $B_\rho(0_Y)$.
Puesto que la métrica es invariante por traslaciones, se tiene que para cada $x \in X$, $f(B_r(x))$ es denso en $B_\rho(f(x))$ y como X es completo, aplicando el lema 1.66 a $x = 0$, se tiene que para cada $a > r$, $f(B_a(0_X)) \supseteq B_\rho(0_Y)$, es decir, $f(B_a(0_X))$ es un entorno de 0_Y para cada $a > r$, luego para cada $x \in X$ y cada $r > 0$, $f(B_r(x))$ es un entorno de $f(x)$.
De aquí se deduce que f es abierta porque si $U \subseteq X$ es un abierto de X y $x \in U$, entonces existe $r > 0$ tal que $f(x) \in f(B_r(x)) \subseteq f(U)$, luego $f(U)$ es abierto al ser entorno de todos sus puntos. □

Como corolario de este teorema se tiene el conocido como Teorema del Isomorfismo, que vamos a usar en la demostración del Teorema del Grafo Cerrado.

Corolario 1.68. ***(Teorema del Isomorfismo)*** *Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos metrizables y completos y $f : X \to Y$ lineal, continua y biyectiva. Entonces f^{-1} es continua.*

Demostración. Como f es sobreyectiva, por el teorema 1.67, se tiene que f es abierta. Luego tenemos una aplicación biyectiva, continua y abierta, por lo que por un resultado de topología general, f es un homeomorfismo, es decir, f^{-1} es continua. □

Procederemos a continuación a demostrar el Teorema del Grafo Cerrado.

Teorema 1.69. ***(Teorema del Grafo Cerrado)*** *Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos metrizables y completos y $f : X \to Y$ lineal. Entonces f es continua si y solo si su grafo, $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, es cerrado.*

Demostración. $\Rightarrow)$ Este es un resultado conocido de topología general.

$\Leftarrow)$ Supongamos que $G(f)$ es cerrado. Como f es lineal, se tiene que $G(f)$ es un subespacio vectorial cerrado de $X \times Y$, que es completo y metrizable, por lo que $G(f)$ lo es también. Definamos $\pi_1 : G(f) \to X$ y $\pi_2 : G(f) \to Y$ como $\pi_1((x, f(x))) := x$ y $\pi_2((x, f(x))) := f(x)$. Observemos que π_1 es lineal, continua y biyectiva, luego por el corolario 1.68, se tiene que π_1^{-1} es continua.
Por otro lado, $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, ya que si $x \in X$, se tiene que $\pi_2(\pi_1^{-1}(x)) = \pi_2((x, f(x))) = f(x)$, por lo que f es composición de funciones continuas, deduciéndose así que f es continua.

□

1.3. Teorema de factorización de Grothendieck

La sección final de este capítulo tendrá como objetivo probar el conocido como teorema de factorización de Grothendieck. Para ello, comenzaremos probando una serie de lemas auxiliares.

Lema 1.70. *Sean X e Y espacios métricos de manera que X es completo y $f : X \longrightarrow Y$ continua que verifica que:*

$$\text{Para cada } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que para cada } x \in X, \overline{f(U_\varepsilon(x))} \supseteq U_\delta(f(x)). \tag{1.2}$$

Entonces f es abierta.

Demostración. Para probar que f es abierta, basta demostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $x \in X$, $f(U_\varepsilon(x)) \supseteq U_{\delta_1}(f(x))$.
Sea $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon_n := \frac{\varepsilon}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Por la condición (1.2), se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_n > 0$ tal que para cada $x \in X$, $\overline{f(U_{\varepsilon_n}(x))} \supseteq U_{\delta_n}(f(x))$.
Observemos que podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n \leq \frac{1}{n}$, ya que si $y \in U_\tau(f(x))$, $\tau \leq \frac{1}{n} \leq \delta_n$, entonces $d(y, f(x)) < \tau \leq \delta_n$, por lo que $y \in U_{\delta_n}(f(x))$, obteniéndose así que $U_{\delta_n}(f(x)) \supseteq U_\tau(f(x))$.
Sea $x_0 \in X$ e $y \in U_{\delta_1}(f(x_0))$ arbitrario. Veamos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que verifica que $d(f(x_n), y) < \delta_{n+1}$ y $d(x_n, x_{n-1}) < \varepsilon_n$:
Supongamos que se ha escogido x_n que cumple lo pedido, entonces por (1.2), se tiene lo siguiente:

$$y \in U_{\delta_{n+1}}(f(x_n)) \subseteq \overline{f(U_{\varepsilon_{n+1}}(x_n))} \subseteq \cup_{a \in U_{\varepsilon_{n+1}}(x_n)} U_{\delta_{n+2}}(f(a)), \tag{1.3}$$

donde la última contención se debe a que si $y \in \overline{f(U_{\varepsilon_{n+1}}(x_n))}$, entonces existe $a \in f(U_{\varepsilon_{n+1}}(x_n))$ tal que $d(f(a), y) < \delta_{n+2}$.
De (1.3), se tiene que existe $x_{n+1} \in U_{\varepsilon_{n+1}}(x_n)$ de manera que $y \in U_{\delta_{n+2}}(f(x_{n+1}))$, obteniéndose lo que queríamos probar.
Por lo tanto, tenemos $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que verifica que $d(x_n, x_{n-1}) < \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$, es decir, esta sucesión de Cauchy. Como X es completo, se tiene que existe $x \in X$ tal que $x = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n$ y a partir de las propiedades de la distancia se deduce lo siguiente:

$$d(x_0, x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_0, x_n) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} d(x_k, x_{k-1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

lo que implica que $x \in U_\varepsilon(x_0)$.
Por otro lado, se tiene que como f es continua y para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(f(x_n), y) < \frac{1}{n+1}$:

$$y = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = f(x),$$

deduciéndose así que $y \in f(U_\varepsilon(x_0))$, es decir, $f(U_\varepsilon(x_0) \supseteq U_{\delta_1}(f(x_0))$. $\square$

En el caso de que la aplicación sea además lineal es suficiente con comprobar que se cumpla en el punto 0, como veremos en el siguiente lema.

Lema 1.71. *Sean E y F dos espacios métricos de manera que E es completo. Sea $A : E \longrightarrow F$ lineal y continua que verifica que:*

$$\textit{Para cada } \varepsilon > 0, \textit{ existe } \delta > 0 \textit{ tal que } \overline{A(U_\varepsilon(0))} \supseteq U_\delta(0). \tag{1.4}$$

Entonces A es abierta y sobreyectiva.

Demostración. Como E es completo, por el lema 1.70, A es abierta si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in E$ se tiene que $\overline{A(U_\varepsilon(x))} \supseteq U_\delta(A(x))$.
Sea $\varepsilon > 0$, entonces $x + U_\varepsilon(0) = U_\varepsilon(x)$ para cada $x \in E$. Para ε, escogemos $\delta > 0$ que verifique (1.4). Como $y + U_\delta(0) = U_\delta(y)$ para cada $y \in F$, entonces para todo $x \in E$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\overline{A(U_\varepsilon(x))} &\supseteq \overline{A(x + U_\varepsilon(0))} = \overline{A(x) + A(U_\varepsilon(0))} = A(x) + \overline{A(U_\varepsilon(0))} \\ &\supseteq A(x) + U_\delta(0) \supseteq U_\delta(A(x)).\end{aligned}$$

Por lo que A es abierta.
Veamos que A es sobreyectiva. Como $0 \in \mathrm{Im}(A)$ y A es continua, existe $\delta > 0$ tal que $0 \in U_\delta(0) \subseteq \mathrm{Im}(A)$. Puesto que $U_\delta(0)$ es un entorno de 0 y A es lineal, $F = \cup_{n=1}^{\infty} n U_\delta(0) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, luego A es sobreyectiva. $\square$

Lema 1.72. *Sean E y F espacios métricos y $A : E \longrightarrow F$ lineal y continua. Si $A(E)$ es de segunda categoría en F, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\overline{A(U_\varepsilon(0))} \supseteq U_\delta(0)$.*

Demostración. Puesto que la aplicación $f : E \times E \longrightarrow E$ definida como $f(x, y) := x - y$ es continua, para cada $\varepsilon > 0$, existe $V \subseteq E$ entorno del 0 tal que $V - V \subseteq U_\varepsilon(0)$.
Entonces $E = \cup_{n=1}^{\infty} nV$ y $A(E) = \cup_{n=1}^{\infty} nA(V)$, al ser A lineal. Como A es de segunda categoría en F, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{n_0 A(V)}$ contiene a un punto interior y, debido a que la aplicación $x \mapsto n_0 x$ es un homeomorfismo, entonces $\overline{A(V)}$ contiene a un punto interior x_0.
Entonces

$$\overline{A(V)} - x_0 = \overline{A(V) - x_0} \subseteq \overline{A(V) - A(V)} = \overline{A(V - V)} \subseteq \overline{A(U_\varepsilon(0))}. \tag{1.5}$$

De aquí se deduce que $0 = x_0 - x_0$ es un punto interior de $\overline{A(V)} - x_0 \subseteq \overline{A(U_\varepsilon(0))}$, luego existe $\delta > 0$ tal que $U_\delta(0) \subseteq \overline{A(U_\varepsilon(0))}$. □

Como consecuencia de estos resultados, se puede demostrar la siguiente proposición, que será el resultado que usemos para la demostración del teorema de factorización de Grothendieck.

Proposición 1.73. *Sean E y F dos espacios métricos y $A : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua. Si E es completo y $A(E)$ es de segunda categoria en F, entonces A es abierta y sobreyectiva.*

Teorema 1.74 (Teorema de factorización de Grothendieck). *Sean E un espacio localmente convexo, F y F_n, $n \in \mathbb{N}$, espacios de Fréchet y $u \in \mathscr{L}(F, E)$ y $u_n \in \mathscr{L}(F_n, E)$, $n \in \mathbb{N}$.*
Si $u(F) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} u_n(F_n)$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $u(F) \subseteq u_m(F_m)$.
Además, si u_m es inyectiva, existe $v \in \mathscr{L}(F, F_m)$ tal que $u = u_m \circ v$.

Demostración. Sea $H_n := \{(x, y) \in F \times F_n : u(x) = u_n(y)\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Observemos que como u y u_n son continuas, H_n es un subespacio cerrado del espacio $F \times F_n$. Fácilmente se puede comprobar que $F \times F_n$ es un espacio de Fréchet, por lo que H_n es un espacio de Fréchet.
Sea $p_n : H_n \longrightarrow F$ definida como $p_n(x, y) := x$. Veamos que $F = \cup_{n=1}^{\infty} p_n(H_n)$. Sea $z \in F$, como $u(F) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} u_n(F_n)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $u(z) \in u_m(F_m)$, por lo que existe $y \in F_m$ tal que $u(z) = u_m(y)$, luego $(z, y) \in H_m$ y, de aquí se deduce que $p_m(z, y) = z$ y que $z \in p_m(H_m)$.
Por lo tanto, por el teorema 1.62, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $p_m(H_m)$ es de segunda categoría ya que si todos los $p_n(H_n)$ fuesen de primera categoría, entonces F sería de primera categoría,

entrando en contradicción con dicho teorema. Luego como p_m es lineal y continua, aplicando la proposición 1.73 se tiene que p_m es sobreyectiva, es decir, $p_m(H_m) = F$.
Concluyamos viendo que $u(F) \subseteq u_m(F_m)$. Sea $x \in F$, entonces existe $y \in F_m$ tal que $u(x) = u_m(y)$, luego $u(x) \in u_m(F_m)$.
Supongamos ahora que u_m es inyectiva, entonces $u_m : F_m \longrightarrow u_m(F_m)$ es biyectiva y como $u(F) \subseteq u_m(F_m)$, se tiene que $v := u_m^{-1} \circ u : F \longrightarrow F_m$ está bien definida.
Veamos que v es lineal, es decir, que para cada $x, y \in F$ y para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $v(\lambda x + \mu y) = \lambda v(x) + \mu v(y)$. Puesto que u_m es inyectiva, lo anterior es equivalente, componiendo con u_m, a que $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$, lo cual es cierto.
Probemos que v es continua usando el teorema 1.69. Sea $(x, y) \in \overline{G_v}$, entonces existe una sucesión $\{(x_n, v(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de G_v tales que $x_n \longrightarrow x$ y $v(x_n) \longrightarrow y$. Como u_m y u son continuas, se tiene que:

$$u(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} u(x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_m(v(x_n)) = u_m(y),$$

de donde se obtiene que $u(x) = u_m(y)$ y por lo tanto, $y = (u_m^{-1} \circ u)(x) = v(x)$. Podemos concluir que G_v es cerrado y por el teorema del grafo cerrado, v es continua. $\square$

Capítulo 2

Condiciones para las sucesiones

Como se verá en los siguientes capítulos, estudiaremos clases de funciones complejas indefinidamente derivables en un intervalo cuyas derivadas estén acotadas en términos de una sucesión numérica prefijada.
En este capítulo, introduciremos una serie de propiedades que pueden satisfacer las sucesiones de números positivos con la que vamos a trabajar. Además, una vez definidas estas condiciones, el resto del capítulo constará en demostrar una serie de implicaciones entre ellas que serán realmente útiles para simplificar las demostraciones de los capítulos 3 y 4, y además propondremos en numerosas ocasiones contraejemplos de aquellas implicaciones que no se den.

Notación 2.1. Denotaremos por $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Dada una sucesión $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ de números positivos tal que $m_0 = 1$, consideramos las sucesiones $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$ y $\{m_p^*\}_{p=0}^{\infty}$ definidas como $M_p := \displaystyle\prod_{k=0}^{p} m_k$ si $p \in \mathbb{N}_0$ y $m_p^* := \frac{m_p}{p}$ si $p \in \mathbb{N}$ y $m_0^* = 1$.
A su vez, y en sentido inverso, si se parte de una sucesión $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$, a la sucesión $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ definida como $m_p := \frac{M_p}{M_{p-1}}$ si $p \geq 1$, y $m_0 = 1$, se le llama *sucesión de cocientes* de $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$. Como se ve, el conocimiento de una de las dos sucesiones, $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$ o $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$, determina la otra sin ambigüedad.

Vamos a definir una serie de condiciones sobre sucesiones como las anteriores, que serán de utilidad más adelante.

Definición 2.2 (Condiciones para las sucesiones).

(α) $m_p \uparrow \infty$, es decir, $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente que tiende a ∞.

Diremos que $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$ es *logarítmicamente convexa* si su sucesión de cocientes es creciente.

(α_1) $m_p^* \uparrow \infty$.

(β_1) Existe $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tal que $\liminf_{p\to\infty} \dfrac{m_{kp}^*}{m_p^*} > 1$.

(β_1^0) $\inf_{p\geq 1} \dfrac{m_{2p}^*}{m_p^*} > 1$.

(β_2) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tal que $\limsup_{p\to\infty} \left(\dfrac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}} \dfrac{1}{m_{kp}} \leq \varepsilon$.

(β_2^0) Existe $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tal que $\lim_{p\to\infty} \dfrac{m_{kp}}{m_p} = \infty$.

(γ) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{m_p} < \infty$.

Si la sucesión $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$ correspondiente es logarítmicamente convexa, esta condición se denomina de *no casianaliticidad*, como se explicará más adelante, e implica que se cumple (α).

(γ_1) $\displaystyle\sup_{p\in\mathbb{N}_0} m_p^* \sum_{j\geq p} \frac{1}{m_j} < \infty$.

De nuevo, siempre que la sucesión $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$ correspondiente sea logarítmicamente convexa, esta condición se llama de *no casianaliticidad fuerte*.

(γ_2) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\lim_{p\to\infty} m_p^* \sum_{j\geq kp} \frac{1}{m_j} = 0$.

Nuestro objetivo a lo largo de este capítulo es establecer implicaciones y equivalencias entre estas condiciones y, además, proponer contraejemplos de las implicaciones que no se den.

Proposición 2.3. *Se dan las siguientes implicaciones:*

1. (α_1) $\Rightarrow$ (α).

2. (β_1^0) $\Rightarrow$ (β_1).

3. (β_2^0) $\Rightarrow$ (β_1).

4. (γ_1) $\Rightarrow$ (γ).

5. *Si* $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ *verifica* (α), $(\gamma_2) \Rightarrow (\gamma_1)$.

Demostración.

1 Como $m^*_{p+1} \geq m^*_p$, por la definición de m^*_p se tiene que $\frac{m_{p+1}}{m_p} \geq \frac{p+1}{p} > 1$. Por lo tanto, $m_{p+1} \geq m_p$.

Por último, razonaremos por reducción por reducción al absurdo suponiendo que $\lim\limits_{p\to\infty} m_p = l < \infty$, entonces $\lim\limits_{p\to\infty} m^*_p = \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{m_p}{p} = 0 \neq \infty$, en contra de (α_1).

2 Observemos que $\liminf\limits_{p\to\infty} \dfrac{m^*_{2p}}{m^*_p} = \sup\{\inf\{\dfrac{m^*_{2p}}{m^*_p} : p \geq n\} : n \geq 0\}$ y, como se tiene que $\inf\{\frac{m^*_{2p}}{m^*_p} : p \geq 1\} > 1$, se tiene que $\liminf\limits_{p\to\infty} \dfrac{m^*_{2p}}{m^*_p} > 1$.

3 Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tal que $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{m_{kp}}{m_p} = \infty$, entonces para cada $M > 0$, existe $p_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\frac{m_{kp}}{m_p} \geq M$ para cada $p \geq p_0$.

Por lo tanto, para cada $p \geq p_0$, $\frac{m^*_{kp}}{m^*_p} = \frac{m_{kp}}{kp}\frac{p}{m_p} = \frac{1}{k}\frac{m_{kp}}{m_p} \geq \frac{M}{k}$, deduciéndose de este modo que $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{m^*_{kp}}{m^*_p} = \infty$.

4 Supongamos que $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}_0} m^*_p \sum\limits_{j\geq p} \dfrac{1}{m_j} < \infty$, por lo tanto $m^*_0 \sum\limits_{j\geq 0} \dfrac{1}{m_j} < \infty$, luego como $m^*_0 = 1$, se tiene que $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{1}{m_j} < \infty$.

5 Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{p\to\infty} m^*_p \sum\limits_{j\geq kp} \dfrac{1}{m_j} = 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $p_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $m^*_p \sum\limits_{j\geq kp} \dfrac{1}{m_j} < \varepsilon$ para cada $p \geq p_0$.

Por lo tanto, si $p \geq p_0$, se tiene que

$$m^*_p \sum_{j\geq p} \frac{1}{m_j} \leq m^*_p \sum_{j=p}^{kp-1} \frac{1}{m_j} + \varepsilon. \tag{2.1}$$

Como la sucesión $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ cumple (α), de (2.1) se obtiene que:

$$m^*_p \sum_{j\geq p} \frac{1}{m_j} \leq \frac{m^*_p}{m_p}(k-1)p + \varepsilon = k - 1 + \varepsilon.$$

De aquí, podemos concluir que

$$\sup_{p\in\mathbb{N}_0} m_p^* \sum_{j\geq p} \frac{1}{m_j} \leq$$

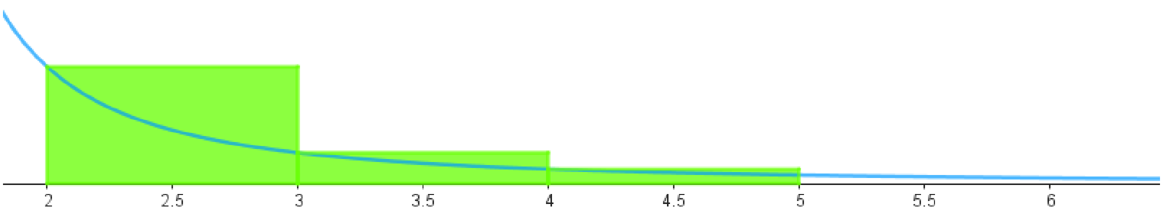
$$\sup\{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m_j}, m_1^* \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j}, m_2^* \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{m_j}, \ldots, m_{p_0-1}^* \sum_{j=p_0-1}^{\infty} \frac{1}{m_j}, k-1+\varepsilon\} < \infty.$$

□

Observación 2.4. Vamos a introducir dos contraejemplos para demostrar que $(\alpha) \not\Rightarrow (\alpha_1)$ y que $(\gamma) \not\Rightarrow (\gamma_1)$. Para lo primero, simplemente basta con considerar la sucesión $\{m_p\}_{p=1}^{\infty}$ definida como $m_p := p$, para la cual es fácil ver que verifica (α) pero no (α_1).
Para lo segundo, consideramos la sucesión $\{m_p\}_{p=2}^{\infty}$ definida como $m_p := p(\log p)^s$, $s > 1$. Esta sucesión verifica (γ), ya que $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{m_p}$ es una serie de Bertrand con $s > 1$. Además, se tiene que $m_p^* = (\log p)^s$ y que

$$\sum_{j\geq p} \frac{1}{m_j} = \sum_{j\geq p} \frac{1}{j(\log j)^s} \geq \int_p^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\log^s x} = \frac{1}{(s-1)\log^{s-1}(p)},$$

donde en la última igualdad usamos que $s > 1$ y en la primera desigualdad hemos usado que la suma del área de los rectángulos de base 1 y altura $\frac{1}{j(\log j)^s}$ con $j \geq 2$ es mayor que el área que está por debajo de la función $f(x) = \frac{1}{x\log^s x}$ en $(2, \infty)$, como se puede ver en la siguiente imagen, donde tomamos $s = 2$.



Por lo tanto, para cada $p \geq 2$,

$$m_p^* \sum_{j\geq p} \frac{1}{m_j} \geq \frac{\log^s(p)}{(s-1)\log^{s-1}(p)} = \frac{\log(p)}{s-1} \to \infty \text{ si } p \to \infty.$$

Por lo que $\{m_p\}_{p=2}^{\infty}$ no cumple (γ_1).

Definición 2.5. Diremos que dos sucesiones de números positivos $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ y $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ son *equivalentes*, que denotaremos por $m_p \sim n_p$, si

$$0 < \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{n_p} \leq \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{n_p} < \infty.$$

Esto también se puede escribir de la siguiente manera: $m_p \sim n_p$ si existen $a, b > 0$ tales que $an_p \leq m_p \leq bn_p$ para cada $p \in \mathbb{N}_0$.

Observación 2.6. A partir de la definición 2.5, resulta obvio que si $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ y $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifican que $m_p \sim n_p$ entonces:

1. Si $\{c_p\}_{p=0}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos, entonces $c_p m_p \sim c_p n_p$.

2. Si $k > 0$, entonces $km_p \sim n_p$.

3. Si $\lim_{p\to\infty} m_p = \infty$, entonces $\lim_{p\to\infty} n_p = \infty$.

Probemos que $\sim$ es, efectivamente, una relación de equivalencia.

Proposición 2.7. *$\sim$ es una relación de equivalencia.*

Demostración.

1. $m_p \sim m_p$ ya que $0 < \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{m_p} = 1 = \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{m_p} < \infty$.

2. Supongamos que $m_p \sim n_p$, entonces $0 < \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{n_p} = I \leq \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{n_p} = S < \infty$.

   Por lo tanto, se tiene que $\inf_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{n_p}{m_p} = \frac{1}{\sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{n_p}} = \frac{1}{S}$ y $\sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{n_p}{m_p} = \frac{1}{\inf_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{n_p}} = \frac{1}{I}$, y de aquí se deduce que $n_p \sim m_p$.

3. Supongamos que $m_p \sim n_p$ y $n_p \sim z_p$, entonces $0 < \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{n_p} \leq \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{n_p} < \infty$ y $0 < \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{n_p}{z_p} \leq \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{n_p}{z_p} < \infty$.

   Luego $0 < \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{n_p} \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{n_p}{z_p} \leq \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{z_p} \leq \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{z_p} \leq \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p}{n_p} \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{n_p}{z_p} < \infty$, es decir, $m_p \sim z_p$.

□

Lema 2.8. *1. (β_2^0) es invariante bajo $\sim$, es decir, si $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ cumple la condición (β_2^0) y $m_p \sim n_p$, entonces $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (β_2^0).*

2. (γ_1) es invariante bajo $\sim$, es decir, si $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ cumple la condición (γ_1) y $m_p \sim n_p$, entonces $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (γ_1).

Demostración. *1* Sea $S = \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \dfrac{m_p}{n_p} < \infty$ e $I = \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \dfrac{m_p}{n_p} > 0$. Simplemente basta observar que $\dfrac{n_{kp}}{n_p} = \dfrac{n_{kp}}{m_{kp}}\dfrac{m_{kp}}{m_p}\dfrac{m_p}{n_p} \geq \dfrac{I}{S}\dfrac{m_{kp}}{m_p}$ y que como $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ cumple la condición (β_2^0), se tiene que $\lim_{p\to\infty} \dfrac{m_{kp}}{m_p} = \infty$, luego $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (β_2^0).

2 Como $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (γ_1), existe $C > 0$ tal que para cada $p \in \mathbb{N}_0$,

$$\frac{m_p}{p}\sum_{j\geq p}\frac{1}{m_j} \leq C. \tag{2.2}$$

Además, puesto que $m_p \sim n_p$, existen $a, b > 0$ tales que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $an_p \leq m_p \leq bn_p$ y por lo tanto, de (2.2) se tiene que si $p \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{an_p}{b\cdot p}\sum_{j\geq p}\frac{1}{n_j} \leq \frac{m_p}{p}\sum_{j\geq p}\frac{1}{m_j} \leq C \Rightarrow n_p^*\sum_{j\geq p}\frac{1}{n_j} \leq \frac{bC}{a}.$$

Por lo tanto, $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (γ_1).

□

Lema 2.9. *Sea $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ una sucesión creciente de términos estrictamente positivos que converge a ∞ y que verifica que $\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{1}{m_p} < \infty$, entonces $\lim_{p\to\infty}\dfrac{p}{m_p} = 0$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, como $\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{1}{m_p} < \infty$ por el criterio de Cauchy, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $p, q \in \mathbb{N}_0$ con $p > q \geq p_0$ de manera que:

$$\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_{p-1}} + \ldots + \frac{1}{m_{q+1}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Ahora bien, como $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ es creciente y converge a ∞, se tiene que $\{\frac{1}{m_p}\}_{p=0}^{\infty}$ es decreciente y converge a 0. De este hecho, se tiene que si $p \geq p_0$ y usando (2.3) lo siguiente:

$$\frac{2p}{m_{2p}} = 2\Big(\frac{1}{m_{2p}} + \frac{1}{m_{2p}} + \ldots + \frac{1}{m_{2p}}\Big) \leq 2\Big(\frac{1}{m_{2p}} + \frac{1}{m_{2p-1}} + \ldots + \frac{1}{m_{p+1}}\Big) < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{2p+1}{m_{2p+1}} \leq \frac{2(p+1)}{m_{2p+1}} &= 2\Big(\frac{1}{m_{2p+1}} + \frac{1}{m_{2p+1}} + \ldots + \frac{1}{m_{2p+1}}\Big) \\ &\leq 2\Big(\frac{1}{m_{2p+1}} + \frac{1}{m_{2p}} + \ldots + \frac{1}{m_{p+1}}\Big) < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned} \tag{2.5}$$

A partir de (2.4) y (2.5), se tiene que si $p \geq \frac{p_0}{2}$ y p es par o impar, entonces $\frac{p}{m_p} < \varepsilon$, deduciéndose así que $\lim_{p\to\infty}\dfrac{p}{m_p} = 0$, que es lo que queríamos probar. □

Proposición 2.10. *Supongamos que* $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ *satisface* (α). *Entonces:*

1. *Las condiciones* (β_2^0) *y* (γ_2) *son equivalentes.*

2. *Son equivalentes:*

   (a) $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ *verifica* (γ_1).

   (b) $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ *verifica* (β_1).

   (c) *Existe* $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$, $n_p \sim m_p$, *que verifica* (α_1) *y* (β_1^0).

Demostración.

1 $(\gamma_2) \Rightarrow (\beta_2^0)$. Sea k el proporcionado por (γ_2).
Sea $A_p^{-1} := m_p^* \sum_{j \geq kp} \frac{1}{m_j}$, luego $\frac{1}{m_p^*} = A_p \sum_{j \geq kp} \frac{1}{m_j}$.
Por lo tanto,por la definición de A_p, se tiene que para ese k, $\lim_{p \to \infty} A_p = \infty$. Por lo tanto, como se ha supuesto (α),

$$\frac{m_{2kp}^*}{m_p^*} = m_{2kp}^* A_p \sum_{j \geq kp} \frac{1}{m_j} \geq m_{2kp}^* A_p \sum_{j=kp+1}^{2kp} \frac{1}{m_j} \geq \frac{m_{2kp}^*}{m_{2kp}} kpA_p = \frac{A_p}{2}.$$

Luego $\frac{m_{2kp}}{m_p} \geq kA_p$, y de aquí se deduce que $\lim_{p \to \infty} \frac{m_{2kp}}{m_p} = \infty$.

$(\beta_2^0) \Rightarrow (\gamma_2)$. Sea k el dado por (β_2^0).
Para cada $q > 1$ existe $p_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que para cada $p \geq p_0$:

$$\frac{m_{kp}^*}{m_p^*} = \frac{1}{k} \frac{m_{kp}}{m_p} \geq q. \tag{2.6}$$

Si $p \geq p_0$, se tiene que, como $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ verifica (α):

$$\sum_{j \geq kp} \frac{1}{m_j} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=k^l p}^{k^{l+1}p-1} \frac{1}{m_j} \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m_{k^l p}} k^l p(k-1) = (k-1) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m_{k^l p}^*}. \tag{2.7}$$

Aplicando l veces (2.6) en (2.7), obtenemos que:

$$\sum_{j \geq kp} \frac{1}{m_j} \leq \frac{k-1}{m_p^*} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^l = \frac{k-1}{m_p^*}(\frac{q}{q-1} - 1) = \frac{k-1}{m_p^*} \frac{1}{q-1}.$$

Luego $m_p^* \sum_{j \geq kp} \frac{1}{m_j} \leq \frac{k-1}{q-1}$. Haciendo tender q a infinito, tenemos que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (γ_2).

2 $(b) \Rightarrow (a)$
Como $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_1), se tiene que $\sup\{\inf\{\frac{m_{kp}^*}{m_p^*} : p \geq n\} : n \geq 0\} > 1$, luego existen $q > 1$ y $p_0 \in \mathbb{N}_0$ tales que $\frac{m_{kp}^*}{m_p^*} \geq q > 1$ para cada $p \geq p_0$.
Haciendo lo mismo que hacíamos en $(\beta_2^0) \Rightarrow (\gamma_2)$, obtenemos que si $p \geq p_0$, $m_p^* \sum_{j \geq kp} \frac{1}{m_j} \leq \frac{k-1}{q-1}$.
Por lo tanto, si $p \geq p_0$, como $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (α), se tiene lo siguiente:

$$m_p^* \sum_{j \geq p} \frac{1}{m_j} \leq m_p^* \sum_{j=p}^{kp-1} \frac{1}{m_j} + \frac{k-1}{q-1} \leq m_p^* \frac{k-1}{m_p} p + \frac{k-1}{q-1} = \frac{(k-1)q}{q-1}.$$

Entonces

$$\sup_{p \in \mathbb{N}_0} m_p^* \sum_{j \geq p} \frac{1}{m_j} \leq \sup\{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m_j}, m_1^* \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j}, \ldots, m_{p_0-1}^* \sum_{j=p_0-1}^{\infty} \frac{1}{m_j}, \frac{(k-1)q}{q-1}\} < \infty,$$

por lo que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (γ_1).

$(a) \Rightarrow (c)$
Sea $\tau_p := \frac{1}{m_p^*} + \sum_{k \geq p} \frac{1}{m_k}$, con $p \in \mathbb{N}_0$. Comenzamos observando que la sucesión $\{\tau_p\}_{p=0}^{\infty}$ es decreciente ya que:

$$\frac{1}{m_{p+1}^*} + \sum_{k \geq p+1} \frac{1}{m_k} \leq \frac{1}{m_p^*} + \sum_{k \geq p} \frac{1}{m_k} \Leftrightarrow \frac{p+1}{m_{p+1}} \leq \frac{1}{m_p^*} + \frac{1}{m_p} = \frac{p+1}{m_p} \Leftrightarrow m_{p+1} \geq m_p,$$

lo cual es cierto, ya que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (α).
Como $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (γ_1), se tiene que $M = \sup_{p \in \mathbb{N}_0} m_p^* \sum_{j \geq p} \frac{1}{m_j} < \infty$ y además si $A = 1 + M \geq 1$, se puede ver que para cada $p \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{1}{\frac{1}{m_p^*} + \sum_{k \geq p} \frac{1}{m_k}} \leq m_p^*. \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{1}{\frac{1}{m_p^*} + \sum_{k \geq p} \frac{1}{m_k}} = \frac{m_p^*}{1 + m_p^* \sum_{k \geq p} \frac{1}{m_k}} \geq \frac{m_p^*}{A}. \tag{2.9}$$

A partir de estas dos desigualdades, se deduce que $\frac{1}{\tau_p} \sim m_p^*$ y por la observación 2.6.1 y 2.6.2, es claro que la sucesión $\{s_p\}_{p=0}^{\infty}$ definida como $s_0 := 1$ y $s_p := \frac{p\tau_1}{\tau_p}$ si $p \in \mathbb{N}$, verifica que $s_p \sim m_p$, por lo que por el lema 2.8.2, $\{s_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (γ_1).
Por otro lado, obviamente $\{s_p\}_{p=0}^{\infty}$ y $\{s_p^*\}_{p=0}^{\infty}$ son crecientes al ser $\{\tau_p\}_{p=1}^{\infty}$ decreciente. Además, como $s_p \sim m_p$, por la observación 2.6.3 y puesto que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$

satisface (α), entonces $\lim_{p\to\infty} s_p = \infty$.
Entonces podemos aplicar el lema 2.9, teniendo que $\lim_{p\to\infty} \frac{p}{s_p} = 0$, es decir $\lim_{p\to\infty} s_p^* = \infty$, concluyendo que $\{s_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (α_1).
Por lo tanto, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (α_1) y (γ_1), ya que si no lo hace, trabajamos con la sucesión $\{s_p\}_{p=0}^{\infty}$.
Usando la misma definición introducida anteriormente sea $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ la sucesión definida como $n_0 := 1$ y $n_p := \frac{p\tau_1}{\tau_p}$, si $p \in \mathbb{N}$. Ya vimos anteriormente que $m_p \sim n_p$, ahora vamos a demostrar que cumple (β_1^0).
Si $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{n_{2p}^*}{n_p^*} &= \frac{\tau_p}{\tau_{2p}} = \frac{\frac{1}{m_p^*} + \sum_{k\geq p} \frac{1}{m_k}}{\frac{1}{m_{2p}^*} + \sum_{k\geq 2p} \frac{1}{m_k}} \geq \frac{\frac{1}{m_{2p}^*} + \sum_{k\geq p} \frac{1}{m_k}}{\frac{1}{m_{2p}^*} + \sum_{k\geq 2p} \frac{1}{m_k}} \\
&= 1 + \frac{\sum_{k=p}^{2p-1} \frac{1}{m_k}}{\frac{1}{m_{2p}^*} + \sum_{k\geq 2p} \frac{1}{m_k}} = 1 + \frac{\sum_{k=p}^{2p-1} \frac{1}{m_k}}{\tau_{2p}} \\
&\geq 1 + \frac{p \cdot m_{2p}^*}{A \cdot m_{2p}} = 1 + \frac{1}{2A},
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $m_k \leq m_{2p}$ si $k \in \{p, \dots, 2p-1\}$, ya que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ cumple (α), y que $\frac{1}{\tau_{2p}} \geq \frac{m_{2p}^*}{A}$.
Por lo tanto, llegamos a que $\inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{n_{2p}^*}{n_p^*} \geq 1 + \frac{1}{2A} > 1$, es decir, $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_1^0).

$(c) \Rightarrow (b)$
Como $m_p \sim n_p$, existen S, I, con $0 < I \leq S < \infty$ tales que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $I \leq \frac{m_p}{n_p} \leq S$, luego $I \leq \frac{m_p^*}{n_p^*} \leq S$, es decir, $In_p^* \leq m_p^* \leq Sn_p^*$.
Sea H que verifique que

$$\frac{n_p^*}{H} \leq m_p^* \leq Hn_p^*, \tag{2.10}$$

o lo que es lo mismo, que $H \geq \max\{S, \frac{1}{I}\}$. Además como $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_1^0), existe $q > 1$ tal que para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n_{2p}^*}{n_p^*} \geq q. \tag{2.11}$$

Por lo tanto, si $l \in \mathbb{N}$, $l > \frac{2\log(H)}{\log(q)}$, aplicando en primer lugar (2.10) y a continuación l veces (2.11), se tiene que para cada $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{m_{2^l p}^*}{m_p^*} \geq \frac{1}{H^2} \frac{n_{2^l p}^*}{n_p^*} \geq \frac{1}{H^2} q^l > 1.$$

Por lo tanto, $\liminf_{p\to\infty} \dfrac{m^*_{2^l p}}{m^*_p} \geq \inf_{p\in\mathbb{N}} \dfrac{m^*_{2^l p}}{m^*_p} > 1$, deduciéndose que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_1).

$\square$

Corolario 2.11. *Supongamos que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (α). Entonces:*

1. *Si $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (γ_1), entonces existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$, con $m_p \sim n_p$ tal que la sucesión $\{r_p\}_{p=0}^{\infty}$, definida como $r_0 := 1$ y $r_p := n_p p^{-\varepsilon}$ si $p \in \mathbb{N}$, verifica (γ_1) y (α_1).*

2. *Si $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (γ_2), entonces la conclusión de 1 se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$.*

Demostración.

1 Supongamos que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (γ_1), entonces por la proposición 2.10, existe $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$, con $m_p \sim n_p$ que verifica (α_1) y (β_1^0), luego esta sucesión verifica (α_1) y (β_1).
Por lo tanto, existen $q > 1$ y $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ tales que $\liminf_{p\to\infty} \dfrac{n^*_{kp}}{n^*_p} = q > 1$.
Sea $\varepsilon > 0$, observemos que la sucesión $\{r_p\}_{p=0}^{\infty}$ definida como está en el enunciado verifica lo siguiente:

$$\liminf_{p\to\infty} \frac{n^*_{kp} k^{-\varepsilon} p^{-\varepsilon}}{n^*_p p^{-\varepsilon}} = q \cdot k^{-\varepsilon} > 1 \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{\log(q)}{\log(k)}.$$

Luego si $0 < \varepsilon < \frac{\log(q)}{\log(k)}$, $\{r_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_1), luego por la proposición 2.10, $\{r_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (γ_1).
Por la proposición 2.10, existe $\{t_p\}_{p=0}^{\infty}$ de manera que $t_p \sim r_p$ y que cumple (α_1) y (β_1^0).
Puesto que $t_p \sim r_p$, existen $a, b > 0$ tales que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $ar_p \leq t_p \leq br_p$. Además, se tiene que $\lim_{p\longrightarrow\infty} \dfrac{t_p}{p} = \infty$, por lo que para cada $M > 0$, existe $p_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\frac{t_p}{p} \geq bM$ si $p \geq p_0$. Luego, para cada $p \geq p_0$, $\frac{br_p}{p} \geq \frac{t_p}{p} \geq bM$, deduciéndose así que $\lim_{p\longrightarrow\infty} \dfrac{r_p}{p} = \infty$, es decir, $\{r_p\}_{p=0}^{\infty}$ cumple la condición (α_1).

2 La demostración se hace de manera análoga a la anterior, dándose cuenta de que si se cumple (γ_2), se verifica (β_2^0) por la proposición 2.10.1 y por lo tanto, también satisface (β_1) por la proposición 2.3.3.
Además, por el lema 2.8, tenemos que (β_2^0) es invariante bajo $\sim$, luego $\lim_{p\to\infty} \dfrac{n^*_{kp}}{n^*_p} = \infty$, por lo que $\liminf_{p\to\infty} \frac{n^*_{kp} k^{-\varepsilon} p^{-\varepsilon}}{n^*_p p^{-\varepsilon}} = \infty$ para cualquier $\varepsilon > 0$, es decir no tenemos ninguna condición sobre $\varepsilon > 0$.

□

Corolario 2.12. *1. Si $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (γ_1), entonces existe $s>1$ tal que $\inf_{p\in\mathbb{N}} \dfrac{m_p}{p^s} > 0$.*

2. Si $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_2^0), entonces para cada $s>1$ se tiene que $\inf_{p\in\mathbb{N}} \dfrac{m_p}{p^s} > 0$.

Demostración.

1 Por el corolario 2.11.1, existe $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$, $n_p \sim m_p$ tal que $\{r_p\}_{p=0}^{\infty}$ definida para algún $\varepsilon>0$ como se indica en dicho corolario, cumple (α_1) y (γ_1) . Por lo tanto, se deduce que $\inf_{p\in\mathbb{N}} \dfrac{n_p p^{-\varepsilon}}{p} = 1 > 0$. Sea $I = \inf_{p\in\mathbb{N}} \dfrac{m_p}{n_p} > 0$ y sea $s = 1+\varepsilon$, entonces se tiene que:

$$\inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{m_p}{p^s} \geq \inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{m_p}{n_p} \inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{n_p}{p^s} \geq I \inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{n_p}{p^s} = I > 0.$$

2 Se razona análogamente a *1* usando el corolario 2.11.2.

□

A continuación, presentaremos una nueva relación de equivalencia, más débil que la que definimos en 2.5, que utilizaremos más adelante.

Definición 2.13. Diremos que dos sucesiones de números positivos $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ y $\{n_p\}_{p=0}^{\infty}$ son *débilmente equivalentes*, y lo denotaremos como $m_p \approx n_p$, si

$$0 < \inf_{p\in\mathbb{N}} \left(\frac{M_p}{N_p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{p\in\mathbb{N}} \left(\frac{M_p}{N_p}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Equivalentemente, como $M_0 = N_0 = 1$, se puede decir que $m_p \approx n_p$ si existen $A, B > 0$ tales que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $A^p N_p \leq M_p \leq B^p N_p$.

Mencionaremos que $\approx$ es, efectivamente, una relación de equivalencia y después diremos porqué hemos dicho que eran débilmente equivalentes.

Proposición 2.14. *$\approx$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Se hace análogamente a la prueba de la proposición 2.7. □

Proposición 2.15. *Si $m_p \sim n_p$, entonces $m_p \approx n_p$.*

Demostración. Como $m_p \sim n_p$, existen $a, b > 0$ tales que $a n_p \leq m_p \leq b n_p$ para cada $p \in \mathbb{N}_0$.
Por otro lado, como $m_0 = n_0 = 1$ y $M_p = \prod_{k=0}^{p} m_k$, se tiene que $M_p \leq b^p \prod_{k=0}^{p} n_k = b^p N_p$ y $M_p \geq a^p \prod_{k=0}^{p} n_k = a^p N_p$ para cada $p \in \mathbb{N}_0$. Es decir, $m_p \approx n_p$. □

Observación 2.16. El recíproco no es cierto, es decir $m_p \approx n_p \not\Rightarrow m_p \sim n_p$. Veámoslo con un ejemplo.
Sea $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ la sucesión definida como $m_0 := 1$ y si $j \in [k^2+1, (k+1)^2]$, con $k \in \mathbb{N}_0$, entonces $m_j := k!$. Por otro lado, sea $\{l_p\}_{p=0}^{\infty}$ la sucesión dada por $l_p := m_{p+1}$ si $p \in \mathbb{N}_0$.
Para facilitar su estudio, pondremos a continuación los 17 primeros elementos de las dos sucesiones:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
m_p	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	6	6	6	6	6	6	6	24
l_p	1	1	1	1	2	2	2	2	2	6	6	6	6	6	6	6	24	24

Observemos que si $p \in [k^2, (k+1)^2)$, entonces

$$1 \leq \frac{L_p}{M_p} = \frac{\prod_{j=0}^{p} l_j}{\prod_{i=0}^{p} m_i} = \frac{l_{2^2} l_{3^2} \dots l_{k^2}}{m_{2^2} m_{3^2} \dots m_{k^2}} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 24 \dots k!}{1 \cdot 2 \cdot 6 \dots (k-1)!} = k! \leq 2^{k^2} \leq 2^p.$$

De este modo se deduce que $M_p \leq L_p \leq 2^p M_p$, es decir $m_p \approx l_p$.
Veamos que $m_p \not\sim l_p$, observando que para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{l_{k^2}}{m_{k^2}} = \frac{k!}{(k-1)!} = k$, por lo que $\sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{l_p}{m_p} = \infty$, es decir $m_p \not\sim l_p$.

En los siguientes resultados, daremos implicaciones que involucran a la condición (β_2), que es la condición que nos quedaba sin ligar con las otras.

Lema 2.17. *Supongamos que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (α). Entonces:*

1. *La función $f(j,p) = \left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{p-j}}$, con $0 \leq j < p$ es una función creciente en j y creciente en p.*

2. *Son equivalentes:*

   (a) *$\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (β_2).*

   (b) *Existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $0 < \beta < 1$ y $p_0 \in \mathbb{N}_0$ de manera que para cada $p \geq p_0$, existe j con $\beta p \leq j < p$ que cumple que $\left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{p-j}} \leq \varepsilon m_{lp}$.*

   (c) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $0 < \beta < 1$ y $p_0 \in \mathbb{N}_0$ de manera que para cada $p \geq p_0$ se cumple que $\max\limits_{j \leq \beta p} \dfrac{M_p}{M_j} \dfrac{1}{m_p^{p-j}} \leq \varepsilon^p$.*

Demostración. *1* Como $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (α), se tiene que la línea poligonal cuyos vértices son los definidos como $(p, \log(M_p)) = (p, \sum_{j=0}^{p} \log(m_j))$, con $p \in \mathbb{N}_0$, es convexa.

Esto se debe a que como $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (α), es creciente y puesto que la función log es creciente, entonces $\{\log(m_p)\}_{p=1}^{\infty}$ es creciente, y esta sucesión no es otra que la sucesión de las pendientes de los segmentos de la línea poligonal ya que para cada $p \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{\log(M_{p+1}) - \log(M_p)}{p+1-p} = \sum_{j=0}^{p+1} \log(m_j) - \sum_{j=0}^{p} \log(m_j) = \log(m_{p+1}).$$

Por el hecho de que la línea poligonal sea convexa, se tiene que la pendiente de la recta secante que une dos puntos aumenta si uno de los puntos se mueve a la derecha. Por lo tanto, si $p < p'$ o $j < j'$ o si se dan las dos condiciones a la vez, se tiene que:

$$\frac{\log(M_p) - \log(M_j)}{p-j} \leq \frac{\log(M_{p'}) - \log(M_{j'})}{p'-j'},$$

deduciéndose así que $\frac{1}{p-j}\log(\frac{M_p}{M_j})$ es creciente en j y p, concluyendo entonces que $\left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{p-j}}$ es creciente en j y p.

2 $(a) \Rightarrow (b)$

Veremos que se cumple (b) para $l = 2$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ cumple (β_2), existe $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ de manera que se tiene $\limsup_{p\to\infty} \left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}} \frac{1}{m_{kp}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, de donde existe $\tilde{p}_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $p \geq \tilde{p}_0$, $\left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}} \frac{1}{m_{kp}} < \varepsilon$.

Sean $\beta = \frac{1}{k}$ y $p_0 = k\tilde{p}_0$. Tenemos que se cumple que si $p \leq kj < 2p$, entonces $\beta p \leq j < 2\beta p \leq p$. Además, si $p \geq p_0$, existe j que verifique que $\beta p \leq j < p$ porque

$$p - \beta p = \frac{k-1}{k}p \geq \frac{k-1}{k}p_0 = (k-1)\tilde{p}_0 \geq 1,$$

donde en la ultima desigualdad se ha usado que tanto $k-1$ como p_0 eran números naturales.

Por lo tanto usando el primer apartado de este lema y (α), concluimos que para $p \geq p_0$ y j que verifique que $\beta p \leq j < p$:

$$\left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{p-j}} \frac{1}{m_{2p}} \leq \left(\frac{M_{kj}}{M_j}\right)^{\frac{1}{j(k-1)}} \frac{1}{m_{kj}} < \varepsilon.$$

$(b) \Rightarrow (c)$

Sea $\varepsilon < 1$ y sea $l \in \mathbb{N}$ el proporcionado por (b). Vamos a aplicar (b) con ε^{3l}. Además, podemos suponer que $j \leq \tilde{\beta}p$, con $\tilde{\beta} < \frac{1}{2l}$ ya que por (b), se tiene que existe l tal que existe $0 < \beta < 1$ y $p_0 \in \mathbb{N}_0$ de manera que para cada $p \geq p_0$, existe j con $\beta p \leq j < p$ que cumple que $\left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{p-j}} \leq \varepsilon^{3l} m_{lp}$.

Ahora bien, si $j \leq \tilde{\beta} p$ ya tenemos lo que queremos, pero si $j > \tilde{\beta} p$, entonces consideramos j_0 de manera que $j_0 \leq \tilde{\beta} p < j$ y por el primer apartado de este lema, tenemos que $\left(\frac{M_p}{M_{j_0}}\right)^{\frac{1}{p-j_0}} \leq \varepsilon^{3l} m_{lp}$. Por lo que podemos suponer que $j \leq \tilde{\beta} p$, con $\tilde{\beta} < \frac{1}{2l}$.

Sea $q := \lfloor \frac{p}{l} \rfloor$, luego $\frac{p-l}{l} \leq q \leq \frac{p}{l} \leq p$. Se tiene que, si $p \geq \max(p_0 \, l, 6l)$ y para cada $\varepsilon < 1$:

$$\left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{p-j}} \frac{1}{m_p} = \left(\frac{M_p}{M_j} \frac{1}{m_p^{p-j}}\right)^{\frac{1}{p-j}} \leq \left(\frac{M_q}{M_j} \frac{1}{m_{lq}^{q-j}}\right)^{\frac{1}{p-j}} \leq \varepsilon^{\frac{3l(q-j)}{p-j}} < \varepsilon^{\frac{p}{p-j}}, \tag{2.12}$$

donde la última desigualdad se debe a que $\varepsilon < 1$ y a que:

$$q - j \geq \frac{p-l}{l} - \tilde{\beta} p > \frac{p-l}{l} - \frac{p}{2l} = \frac{p-2l}{2l} = \frac{p}{2l} - 1,$$

luego $3l(q-j) > 3(\frac{p}{2} - l) \geq p$, ya que $p \geq 6l$.

A su vez, en la primera desigualdad se ha usado que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (α), que $\frac{M_p}{M_j} = \frac{M_q}{M_j} \prod_{k=q+1}^{p} m_k$, que $p \geq p_0 \, l$ y que

$$\frac{\prod_{k=q+1}^{p} m_k}{m_p^{p-j}} \leq \frac{1}{m_p^{q-j}} \frac{m_p^{p-q}}{m_p^{p-q}} = \frac{1}{m_p^{q-j}}.$$

Por lo tanto para p suficientemente grande, $\frac{M_p}{M_j} \frac{1}{m_p^{p-j}} \leq \varepsilon^p$ para cada $j \leq \tilde{\beta} p$ y para cada $\varepsilon < 1$.

Para concluir, si $\varepsilon_0 \geq 1$, entonces si fijamos $\varepsilon < 1$, para cada p suficientemente grande y para cada $j \leq \tilde{\beta} p$, $\frac{M_p}{M_j} \frac{1}{m_p^{p-j}} \leq \varepsilon^p \leq \varepsilon_0^p$.

$(c) \Rightarrow (a)$

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} \leq \beta$, es decir, que $k \geq \frac{1}{\beta} > 1$.

Aplicando (c) en el caso de que $p = kj$ a partir de un j suficientemente grande y $\varepsilon \leq 1$, se tiene que:

$$\frac{M_{kj}}{M_j} \frac{1}{m_{kj}^{j(k-1)}} \leq \varepsilon^{kj} \Rightarrow \left(\frac{M_{kj}}{M_j}\right)^{\frac{1}{j(k-1)}} \frac{1}{m_{kj}} \leq \varepsilon^{\frac{kj}{j(k-1)}} = \varepsilon^{\frac{k}{k-1}} \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, como se cumple para todo $\varepsilon \leq 1$ y desde un j suficientemente grande, se tiene que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_2).

□

Con este resultado, vamos a poder dar un ejemplo de una familia de sucesiones que no verifican (β_2).

Observación 2.18. Las sucesiones de Gevrey $\{G_p\}_{p=0}^{\infty}$ definidas como $G_0 := 1$ y $G_p := p^s$ si $p \geq 1$, con $s > 1$ satisfacen (β_1), pero no satisfacen (β_2).

Demostración. Es sencillo probar que $\{G_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_1) pues si $p \in \mathbb{N}$, $G_p^* = p^{s-1}$ y además, para cada $p \in \mathbb{N}$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, $\frac{G_{kp}^*}{G_p^*} = k^{s-1} > 1$ ya que $s > 1$.
Usando el lema 2.17.2.c, se tiene que (β_2) es equivalente a que para cada $\varepsilon > 0$, existe $0 < \beta < 1$ y $p_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\max\limits_{j \leq \beta p} \dfrac{M_p}{M_j} \dfrac{1}{m_p^{p-j}} \leq \varepsilon^p$ para cada $p \geq p_0$.
Tomando $j = 0$ se llega a que para todo $\varepsilon > 0$, existe $p_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\frac{M_p}{m_p^p} \leq \varepsilon^p$ si $p \geq p_0$, o lo que es lo mismo, que $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{M_p^{\frac{1}{p}}}{m_p} = 0$.
Sin embargo, podemos ver que $M_p = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} k^s = (p!)^s$, luego

$$\lim_{p\to\infty} \frac{M_p^{\frac{1}{p}}}{m_p} = \lim_{p\to\infty} \left(\frac{(p!)^{\frac{1}{p}}}{p}\right)^s = \lim_{p\to\infty} \left(\frac{pe^{-1}(2\pi p)^{\frac{1}{2p}}}{p}\right)^s = e^{-s} \neq 0,$$

por lo que para cada $s > 1$, la sucesión $\{G_p\}_{p=0}^{\infty}$ no satisface (β_2). $\square$

Para concluir con este capítulo, vamos a relacionar (β_2) con (β_2^0) y (β_1), acabando con un ejemplo donde observaremos que no siempre son equivalentes (β_2) y (β_2^0). Para ello, empezaremos con dos lemas que nos van a proporcionar características de las sucesiones que verifican (β_2).

Lema 2.19. *(β_2) es equivalente a (β_2^*), que es la siguiente condición:*

(β_2^*) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tal que* $\limsup\limits_{p\to\infty} \left(\dfrac{M_{kp}^*}{M_p^*}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}} \dfrac{1}{m_{kp}^*} \leq \varepsilon$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $k > 1$ tal que $\limsup\limits_{p\to\infty} \left(\dfrac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}} \dfrac{1}{m_{kp}} \leq \dfrac{\varepsilon}{e}$.
Observemos que

$$\left(\frac{M_{kp}^*}{M_p^*}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}} \frac{1}{m_{kp}^*} = \left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}} \frac{1}{m_{kp}} \left(\frac{p!}{(kp)!}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}} kp, \tag{2.13}$$

luego de aquí se tiene que:

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to\infty} \left(\frac{M_{kp}^*}{M_p^*}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}} \frac{1}{m_{kp}^*} &\leq \frac{\varepsilon}{e} \cdot \limsup_{p\to\infty} \left(\frac{p!}{(kp)!}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}} kp \\ &= \frac{\varepsilon}{e} \cdot \lim_{p\to\infty} \left(\frac{p!}{(kp)!}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}} kp = \varepsilon \cdot k^{\frac{-1}{k-1}},\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha aplicado la fórmula de Stirling. Por lo tanto, llegamos a que $\limsup_{p\to\infty}\left(\frac{M^*_{kp}}{M^*_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}}\frac{1}{m^*_{kp}} \leq \varepsilon\cdot k^{\frac{-1}{k-1}} \leq \varepsilon$, obteniéndose (β_2^*).

$\Leftarrow$) Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $k > 1$ tal que $\limsup_{p\to\infty}\left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}}\frac{1}{m_{kp}} \leq \frac{\varepsilon\cdot e}{2}$.
Por otro lado, a partir de (2.13) se tiene que:

$$\left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}}\frac{1}{m_{kp}} = \left(\frac{M^*_{kp}}{M^*_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}}\frac{1}{m^*_{kp}}\left(\frac{(kp)!}{p!}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}}\frac{1}{kp}. \tag{2.14}$$

Luego a partir de esa igualdad, se deduce que:

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to\infty}\left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}}\frac{1}{m_{kp}} &\leq \frac{\varepsilon\cdot e}{2}\cdot\limsup_{p\to\infty}\left(\frac{(kp)!}{p!}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}}\frac{1}{kp}\\ &= \frac{\varepsilon\cdot e}{2}\cdot\lim_{p\to\infty}\left(\frac{(kp)!}{p!}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}}\frac{1}{kp} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot k^{\frac{1}{k-1}},\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha aplicado la fórmula de Stirling. Por lo tanto, llegamos a que $\limsup_{p\to\infty}\left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}}\frac{1}{m_{kp}} \leq \frac{\varepsilon}{2}\cdot k^{\frac{1}{k-1}} \leq \varepsilon$, obteniéndose (β_2).

□

Notación 2.20. Dado un conjunto $N = \{n_1, n_2, ...\}$, $n_j \in \mathbb{N}$ para cada j, donde se cumple que $n_{j+1} > n_j$, se define $R(N)$ como $R(N) := \limsup_{j\to\infty}(n_{j+1} - n_j)$.

Presentaremos ahora un lema que será de utilidad para poder probar el último resultado de este capítulo.

Lema 2.21. *Dada una sucesión $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ que verifique (β_2) y (α), definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$, el conjunto $\{q_l : l \in \mathbb{N}\}$, como $q_l := \frac{m_{n^l}}{m_{n^{l-1}}}$, entonces para cada $C > 1$, se tiene que $R(\{l \in \mathbb{N} : q_l > C\}) < \infty$.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existen $n > 1$ y $C > 1$ tales que $R(\{l \in \mathbb{N} : q_l > C\}) = \infty$, verificando $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ (β_2) y (α).
Sea ε con $0 < \varepsilon < \frac{1}{C^2}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$, con $k > 1$ tal que existe $p_0 \in \mathbb{N}_0$ de manera que se tiene que $\left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{p(k-1)}}\frac{1}{m_{kp}} < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $p \geq p_0$.
Además, podemos suponer que $k = n^r$, con $r \in \mathbb{N}$. Definamos $\alpha_l := n^l(n-1)$ y $\beta_{l+j} := \sum_{i=0}^{j-1}\alpha_{l+i} = n^l(n^j - 1)$, si $j = 1, 2, \ldots r$ y $l \in \mathbb{N}$.

Con l suficientemente grande, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \Big(\frac{M_{n^{l+r}}}{M_{n^l}}\Big)^{\frac{1}{\beta_{l+r}}} \frac{1}{m_{n^{l+r}}} = \frac{1}{m_{n^{l+r}}}\Big(\prod_{j=n^l+1}^{n^{l+r}} m_j\Big)^{\frac{1}{\beta_{l+r}}} \\
&= \frac{1}{m_{n^{l+r}}}\Big(\prod_{j=n^l+1}^{n^{l+1}} m_j \cdot \prod_{j=n^{l+1}+1}^{n^{l+2}} m_j \ldots \prod_{j=n^{l+r-1}+1}^{n^{l+r}} m_j\Big)^{\frac{1}{\beta_{l+r}}} \\
&\geq \frac{1}{m_{n^{l+r}}}\Big(m_{n^l}^{\alpha_l} m_{n^{l+1}}^{\alpha_{l+1}} \ldots m_{n^{l+r-1}}^{\alpha_{l+r-1}}\Big)^{\frac{1}{\beta_{l+r}}} = \Big[\big(\frac{m_{n^l}}{m_{n^{l+r}}}\big)^{\alpha_l}\big(\frac{m_{n^{l+1}}}{m_{n^{l+r}}}\big)^{\alpha_{l+1}} \ldots \big(\frac{m_{n^{l+r-1}}}{m_{n^{l+r}}}\big)^{\alpha_{l+r-1}}\Big]^{\frac{1}{\beta_{l+r}}} \\
&= \Big[\big(q_{l+r}q_{l+r-1}\ldots q_{l+1}\big)^{-\alpha_l}\big(q_{l+r}q_{l+r-1}q_{l+2}\big)^{-\alpha_{l+1}} \ldots \big(q_{l+r}q_{l+r-1}\big)^{-\alpha_{l+r-2}} q_{l+r}^{-\alpha_{l+r-1}}\Big]^{\frac{1}{\beta_{l+r}}} \\
&= \Big[q_{l+r}^{-\sum_{j=0}^{r-1}\alpha_{l+j}} q_{l+r-1}^{-\sum_{j=0}^{r-2}\alpha_{l+j}} \ldots q_{l+2}^{-\sum_{j=0}^{1}\alpha_{l+j}} q_{l+1}^{-\alpha_l}\Big]^{\frac{1}{\beta_{l+r}}} = \Big[q_{l+r}^{-\beta_{l+r}} q_{l+r-1}^{-\beta_{l+r-1}} \ldots q_{l+2}^{-\beta_{l+2}} q_{l+1}^{-\beta_{l+1}}\Big]^{\frac{1}{\beta_{l+r}}}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, observemos que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{r} \beta_{l+j} &= n^l(n^r + n^{r-1} + \ldots n + 1 - (r+1)) = n^l(\frac{n^r - 1}{n-1} - (r+1)) \\
&\leq n^l(n^r - 2) \leq 2n^l(n^r - 1) = 2\beta_{l+r}.
\end{aligned}
$$

Por lo que $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \beta_{l+j} \leq 2\beta_{l+r}$ y como supusimos que $R(\{l \in \mathbb{N} : q_l > C\}) = \infty$, existe l suficientemente grande que verifica que $q_{l+j} \leq C$ para $j = 1, 2, \ldots r$, obteniéndose que $\varepsilon \geq \frac{1}{C^2}$, llegando a un absurdo. $\square$

Proposición 2.22. *Se verifica lo siguiente:*

1. (β_2^0) *y* $(\alpha) \Rightarrow (\beta_2)$.

2. (β_2) *y* $(\alpha_1) \Rightarrow (\beta_1)$.

Demostración. 1. Como $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ cumple (β_2^0), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $q > 1$, existe $p_0 \in \mathbb{N}_0$ de manera que para cada $p \geq p_0$, $\frac{m_{kp}}{m_p} \geq q$.

Observemos que se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{M_{2kp}}{M_p}\Big)^{\frac{1}{p(2k-1)}} \frac{1}{m_{2kp}} &= \Big(\prod_{j=p+1}^{2pk} m_j\Big)^{\frac{1}{p(2k-1)}} \frac{1}{m_{2kp}} \leq (m_{2p}^{p} m_{2pk}^{p(2k-2)})^{\frac{1}{p(2k-1)}} \frac{1}{m_{2kp}} \\
&= \Big(\frac{m_{2p}}{m_{2pk}}\Big)^{\frac{1}{2k-1}},
\end{aligned}
$$

donde en la desigualdad hemos usado que $m_j \leq m_{2p}$ para cada j con $p+1 \leq j \leq 2p$ y que $m_j \leq m_{2pk}$ para cada j con $2p+1 \leq j \leq 2pk$ al verificar $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ (α).

Por lo tanto, para cada $p \geq p_0$, se tiene que

$$\left(\frac{M_{2kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{p(2k-1)}} \frac{1}{m_{2kp}} \leq \frac{1}{q^{\frac{1}{2k-1}}}.$$

Como q se puede tomar arbitrariamente grande, $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_2).

2. Como $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_2), por el lema 2.19 se tiene que esta sucesión cumple (β_2^*) y razonando como en el lema 2.21 se tiene que para cada $q > 1$, $R(\{j \in \mathbb{N} : m^*_{2^{j+1}} > qm^*_{2^j}\}) = r < \infty$. Luego para p suficientemente grande, se tiene que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $p < 2^{j+1} \leq 2^r p$ y como se verifica (α_1), se cumple que:

$$\frac{m^*_{2^r p}}{m^*_p} = \frac{m^*_{2^r p}}{m^*_{2^{j+1}}} \cdot \frac{m^*_{2^{j+1}}}{m^*_{2^{j+1}-1}} \cdot \frac{m^*_{2^{j+1}-1}}{m^*_p} \geq q,$$

luego $\liminf\limits_{p\to\infty} \dfrac{m^*_{2^r p}}{m^*_p} \geq q$, por lo que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_1).

□

Concluiremos este capítulo dando un ejemplo de una sucesión $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ que cumple (β_2) pero no (β_2^0).

Observación 2.23. Sea $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ una sucesión que verifica que $m_0^* := 1 =: m_1^*$ y que $m_p^* := m^*_{2^{j-1}} q_j$ si $2^{j-1} < p \leq 2^j$, donde los q_j están definidos como sigue:
Sean $1 < a_1 < a_2 < a_3 \uparrow \infty$ y sea $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ la biyección dada por $\beta(1) = (1,1)$, $\beta(2) = (2,1)$, $\beta(3) = (1,2)$, $\beta(4) = (3,1)$, $\beta(5) = (2,2)$, $\beta(6) = (1,3)$,... Definimos $q_j := a_{\beta_j}$, donde β_j es la segunda componente de $\beta(j)$. Observemos que $\inf\limits_{j\in\mathbb{N}} q_j > 1$.
Comenzaremos probando que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ cumple (α_1) y (β_1^0). Si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $2^{j-1} < p < 2^j$, entonces es claro que $m^*_{p+1} \geq m^*_p$ y si existe $j \in \mathbb{N}$ de manera que $p = 2^j$, podemos ver que $m^*_{p+1} = m^*_{2^j} q_{j+1} = m^*_{2^{j-1}} q_j q_{j+1} \geq m^*_{2^{j-1}} q_j = m^*_p$, por lo que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (α_1).
Por otro lado, si $p \geq 1$, se tiene que como $\inf\limits_{j\in\mathbb{N}} q_j > 1$:

$$\frac{m^*_{2p}}{m^*_p} = \frac{m^*_{2^j} q_{j+1}}{m^*_{2^{j-1}} q_j} = \frac{m^*_{2^{j-1}} q_j q_{j+1}}{m^*_{2^{j-1}} q_j} = q_{j+1} > 1,$$

deduciéndose de este modo que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ cumple (β_1^0).
Ahora si $k \in \mathbb{N}$, se puede calcular que:

$$\frac{m^*_{2^{k+j}}}{m^*_{2^j}} = \frac{m^*_{2^{k+j}}}{m^*_{2^{k+j-1}}} \frac{m^*_{2^{k+j-1}}}{m^*_{2^{k+j-2}}} \cdots \frac{m^*_{2^{j+1}}}{m^*_{2^j}} = q_{k+j} q_{k+j-1} \cdots q_{j+1}.$$

Pero si j es suficientemente grande y cumple que $\beta_j = 1$, llegamos a que $\frac{m^*_{2^{k+j}}}{m^*_{2^j}} = a_2 a_3 \dots a_k$, luego $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{m_{2^{k+j}}}{m_{2^j}} = a_2 a_3 \dots a_k 2^k < \infty$, por lo que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ no verifica (β_2^0).
Por otro lado, si definimos $\alpha_{j+n} := 2^{j+n}$, llegamos a que:

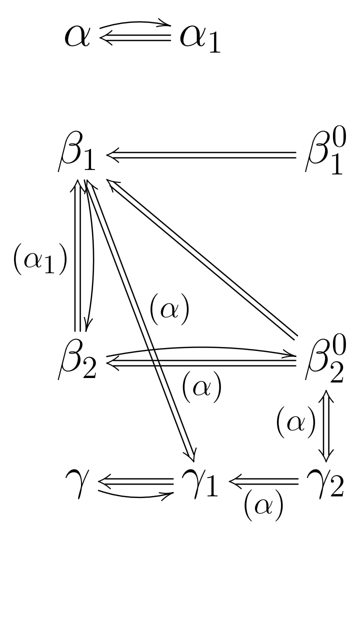
$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{M^*_{2^{j+k}}}{M^*_{2^j}}\Big)^{\frac{1}{2^j(2^k-1)}} \frac{1}{m^*_{2^{j+k}}} &= \Big[\Big(\prod_{l=2^j+1}^{2^{j+1}} m^*_l\Big)\Big(\prod_{l=2^{j+1}+1}^{2^{j+2}} m^*_l\Big)\dots\Big(\prod_{l=2^{j+k-1}+1}^{2^{j+k}} m^*_l\Big)\Big]^{\frac{1}{2^j(2^k-1)}} \frac{1}{m^*_{2^{j+k}}} \\
&= \Big[\Big(\frac{m^*_{2^j}}{m^*_{2^{j+k}}}\Big)^{\alpha_j} q_{j+1}^{\alpha_j}\Big(\frac{m^*_{2^{j+1}}}{m^*_{2^{j+k}}}\Big)^{\alpha_{j+1}} q_{j+2}^{\alpha_{j+1}} \dots \Big(\frac{m^*_{2^{j+k-1}}}{m^*_{2^{j+k}}}\Big)^{\alpha_{j+k}} q_{j+k}^{\alpha_{j+k}}\Big]^{\frac{1}{2^j(2^k-1)}} \\
&= \Big[(q_{j+1}q_{j+2}\dots q_{k+j})^{-\alpha_j} q_{j+1}^{\alpha_j} (q_{j+2}q_{j+3}\dots q_{k+j})^{-\alpha_{j+1}} q_{j+2}^{\alpha_{j+1}} \dots q_{k+j}^{-\alpha_{k+j-1}}\Big]^{\frac{1}{2^j(2^k-1)}} \\
&= \big(q_{j+2}^{\alpha_j} q_{j+3}^{\alpha_j+\alpha_{j+1}} \dots q_{j+k}^{\alpha_j+\alpha_{j+1}+\dots+\alpha_{j+k-1}}\big)^{\frac{-1}{2^j(2^k-1)}}. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Observemos que para cada $r = 0, 1, \dots k-1$, $\sum\limits_{l=0}^{r} \alpha_{j+l} = 2^j(2^{r+1}-1) \geq 2^j$ y que para j suficientemente grande, $\min\{q_{j+1}, q_{j+2}, \dots q_{j+k}\} \geq a_k > 1$. Por lo tanto, a partir de la igualdad final de (2.15) , obtenemos lo siguiente:

$$
\big(q_{j+2}^{2^j} q_{j+3}^{2^j(2^2-1)} \dots q_{j+k}^{2^j(2^{j+k}-1)}\big)^{\frac{-1}{2^j(2^k-1)}} \leq a_k^{\frac{-1}{2^k-1}}.
$$

Si $a_k = 3^{3^k}$, entonces es fácil ver que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k^{\frac{-1}{2^k-1}} = 0$ y que verifica que $1 < a_1 < a_2 \uparrow \infty$. Concluimos así que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_2).

Para resumir y que quede más visual, vamos a hacer un esquema con las implicaciones que se dan, que serán marcadas como $\Rightarrow$, y con aquellas implicaciones que no se dan y que pusimos un contraejemplo, que las dibujaremos como $\longrightarrow$. Indicamos también en qué implicaciones se ha necesitado asumir que se verifica (α) o (α_1).



Capítulo 3

Condiciones suficientes para el operador de extensión

En este capítulo, se comienza dando la definición de los espacios de funciones, y los correspondientes espacios de sucesiones, con los que vamos a trabajar en el resto de la memoria. Se dividirán en dos tipos, los espacios de Beurling y los de Roumieu. Estos espacios tienen una naturaleza topológica distinta, en concreto los primeros tienen estructura de espacio de Fréchet mientras que los segundos son límite inductivo de espacios de Banach. En consecuencia, se hará el estudio de las condiciones suficientes para la sobreyectividad de la aplicación de Borel y para que exista el operador de extensión en secciones distintas.

Definición 3.1. Sea $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ una sucesión que verifica (α) y sea $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo compacto, donde a,$b \in \mathbb{R}$.
Se define el *espacio de Beurling*, también llamada *clase ultradiferenciable de Denjoy-Carleman de tipo Beurling*, asociado a la sucesión $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ en el compacto K como:

$$\mathscr{E}_{(M_p)}(K) := \{f \in \mathscr{C}^{\infty}(K) : \forall h > 0, \|f\|_{K,h} := \sup_{p\in\mathbb{N}_0, x\in K} \frac{|f^{(p)}(x)|}{h^p M_p} < \infty\}. \tag{3.1}$$

Se define el *espacio de Roumieu*, también llamada *clase ultradiferenciable de Denjoy-Carleman de tipo Roumieu*, asociado a la sucesión $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ en el compacto K como:

$$\mathscr{E}_{\{M_p\}}(K) := \{f \in \mathscr{C}^{\infty}(K) : \exists h > 0, \|f\|_{K,h} < \infty\}. \tag{3.2}$$

Asociados a estos espacios, vamos a definir dos espacios de sucesiones:

$$\Lambda_{(M_p)} := \{\{x_p\}_{p=0}^{\infty}, x_p \in \mathbb{C} : \forall h > 0, \|x_p\|_h := \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{|x_p|}{h^p M_p} < \infty\}. \tag{3.3}$$

$$\Lambda_{\{M_p\}} := \{\{x_p\}_{p=0}^{\infty}, x_p \in \mathbb{C} : \exists h > 0, \|x_p\|_h < \infty\}. \tag{3.4}$$

A continuación, daremos una serie de observaciones que será necesario tener en cuenta en el resto de la memoria.

Observación 3.2. La situación más interesante en el estudio de las clases ultradiferenciables definidas anteriormente se presenta cuando estas contienen estrictamente a la clase de las funciones analíticas en intervalos de $\mathbb{R}$. Esta contención garantiza que la sucesión $\{M_p\}_{p=0}^{\infty}$ que definirá las clases bajo estudio se puede suponer logarítmica convexa sin pérdida de generalidad, es decir, basta considerar el problema para sucesiones de cocientes crecientes. Este hecho es una consecuencia de las desigualdades de Gorny-Cartan, que se pueden ver en [2] y [3], para las derivadas sucesivas de una función indefinidamente derivable en un intervalo. Además, si dicha sucesión de crecientes no tiende a infinito es claro que la clase de funciones estará contenida en la de las funciones analíticas, por lo que es natural asumir la condición (α).
Por otro lado, T. Carleman probó en [1] que si una clase ultradiferenciable contiene estrictamente a la de las funciones analíticas en intervalos de $\mathbb{R}$ y no verifica la condición (γ), entonces la aplicación de Borel no es sobreyectiva. Puesto que uno de nuestros objetivos es caracterizar dicha sobreyectividad, es natural imponer de ahora en adelante la condición (γ). Una demostración moderna del teorema de Carleman que acabamos de mencionar se puede encontrar en [9].
Por lo tanto, en lo que queda de este trabajo consideraremos que se cumplen siempre (α) y (γ).

Observación 3.3. En las definiciones (3.1) y (3.2), se pide que $f \in \mathscr{C}^{\infty}([a,b])$. Esto significa que $f \in \mathscr{C}^{\infty}((a,b))$ y que además para cualquier $j \in \mathbb{N}_0$, existen los límites laterales de $f^{(j)}$ cuando x tiende a a por la derecha, que coinciden con $f_{+}^{(j)}(a)$, y cuando x tiende a b por la izquierda, que coinciden con $f_{-}^{(j)}(b)$.

Observación 3.4. Fácilmente se puede comprobar que $\|\cdot\|_{K,h}$ y $\|\cdot\|_h$ son normas para cada $h > 0$ y para cada $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Consideraremos los espacios vectoriales topológicos $\mathscr{E}_{(M_p)}(K)$ y $\Lambda_{(M_p)}$ dotados de la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{K,h}\}_{h>0}$ y $\{\|\cdot\|_h\}_{h>0}$ respectivamente.

Observación 3.5.

1. En $\mathscr{E}_{(M_p)}(K)$, la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{K,h}\}_{h>0}$ y la generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{K,h}\}_{A>h>0}$ es la misma, ya que si se verifica que $\|f\|_{K,h} < \infty$, con $0 < h < A$, entonces si $H \geq h$, para cada $x \in K$ y para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $|f^{(p)}(x)| \leq \|f\|_{K,h} h^p M_p \leq \|f\|_{K,h} H^p M_p$, es decir, $\|f\|_{K,H} \leq \|f\|_{K,h}$.

   Esto nos va a servir más adelante en el teorema 3.14.

2. Por otro lado, la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{K,h}\}_{h>0}$ y la generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{K,\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la misma, ya que si $h>0$, por la propiedad arquimediana existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n_0\,h>1$, es decir, de manera que $h>\frac{1}{n_0}$.
   Por lo tanto, para cada $x\in K$ y $p\in\mathbb{N}_0$, $|f^{(p)}(x)|\leq\|f\|_{K,\frac{1}{n_0}}\frac{1}{n_0^p}M_p\leq\|f\|_{K,\frac{1}{n_0}}h^pM_p$. De este modo, se puede deducir que $\mathscr{E}_{(M_p)}(K)$ es un espacio localmente convexo generado por una familia numerable de seminormas.

3. Del mismo modo, se puede concluir que $\Lambda_{(M_p)}$ es un espacio localmente convexo generado por una familia numerable de seminormas ya que su topología es la generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Notación 3.6. Denotaremos como $\|f\|_\infty$ a $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, con $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Para facilitar el estudio de este capítulo, vamos a separar el caso en el que estemos en el espacio de Beurling y el de Roumieu.

3.1. Espacios de Beurling

En esta sección, nos dedicaremos a dar las condiciones suficientes para que exista el operador extensión en el caso de los espacios de Beurling (3.1) y (3.3). Veamos que $\mathscr{E}_{(M_p)}(K)$ es un espacio de Fréchet, realizándose de un modo análogo para probar que $\Lambda_{(M_p)}$ lo es también.

Teorema 3.7. *El espacio $\mathscr{E}_{(M_p)}(K)$, dotado de la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{K,\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$, es un espacio de Fréchet.*

Demostración. Para probar el resultado, nos basta probar que es completo y que es Hausdorff ya que juntando lo comentado en la observación 3.5, tendríamos los requisitos que ha de cumplir un espacio para que sea de Fréchet.

1. En primer lugar como para cada $n\in\mathbb{N}$, $\|\cdot\|_{K,\frac{1}{n}}$ es una norma, es inmediato ver que $\{\|\cdot\|_{K,\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de seminormas separada, por lo que $\mathscr{E}_{(M_p)}(K)$ es de Hausdorff. Además, al ser Hausdorff y al estar generado por una familia numerable de seminormas, es metrizable.

2. Probemos la completitud de $\mathscr{E}_{(M_p)}(K)$ para lo que basta razonar secuencialmente. Sea $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\mathscr{E}_{(M_p)}(K)$, entonces para cada $n\in\mathbb{N}$, fijado $\varepsilon>0$,

existe $j_0 = j_0(n, \varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ tal que para cada $j, m \geq j_0$, $\|f_j - f_m\|_{K,\frac{1}{n}} < \varepsilon$.
A partir de la definición de estas seminormas, esto es equivalente a que para cada $n \in \mathbb{N}$, fijado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 = j_0(n, \varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ tal que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ $\|f_j^{(p)} - f_m^{(p)}\|_\infty < \frac{\varepsilon \cdot M_p}{n^p}$ para cada $j, m \geq j_0$ (*).
Por lo que, fijado $p \in \mathbb{N}_0$, la sucesión $\{f_j^{(p)}\}_{j=0}^\infty$ es de Cauchy en $(\mathscr{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$, que es de Banach, luego existe $g_p \in \mathscr{C}(K)$ tal que $\{f_j^{(p)}\}_{j=0}^\infty$ converge uniformemente hacia g_p en K. A partir del teorema de derivabilidad del límite puntual, se tiene que $g_0 \in \mathscr{C}^\infty(K)$ y que $g_0^{(p)} = g_p$ para cada $p \in \mathbb{N}_0$.
Probemos ahora que $g_0 \in \mathscr{E}_{(M_p)}(K)$, observando que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, fijado $\varepsilon > 0$, haciendo tender m a ∞ en (*) se tiene que para cada $x \in K$ y para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $|f_{j_0}^{(p)}(x) - g_0^{(p)}(x)| \leq \frac{\varepsilon \cdot M_p}{n^p}$, luego para cada $n \in \mathbb{N}_0$, para cada $x \in K$ y para cada $p \in \mathbb{N}_0$:

$$|g_0^{(p)}(x)| \leq |f_{j_0}^{(p)}| + |f_{j_0}^{(p)}(x) - g_0^{(p)}(x)| \leq (\|f_{j_0}\|_{K,\frac{1}{n}} + \varepsilon)\frac{M_p}{n^p} < \infty.$$

Entonces $g_0 \in \mathscr{E}_{(M_p)}(K)$. Finalmente, si $j \geq j_0$, se tiene que:

$$\|f_j - g_0\|_{K,\frac{1}{n}} = \sup_{p \in \mathbb{N}_0, x \in K} \frac{n^p}{M_p}|f_j^{(p)}(x) - g_0^{(p)}| \leq \varepsilon,$$

por lo que $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ converge a g_0 en $\mathscr{E}_{(M_p)}(K)$, con lo que el espacio es completo.

□

Definición 3.8. Sea $\{m_p\}_{p=0}^\infty$ una sucesión que verifica (α). Definimos el *operador restricción* u *operador de Borel en el punto 0*, $R : \mathscr{E}_{(M_p)}([-1, 1]) \to \Lambda_{(M_p)}$, como $R(f) := \{f^{(p)}(0)\}_{p=0}^\infty$.

Para probar que R es continua, vamos a usar la proposición 1.20.

Proposición 3.9. *El operador restricción R está bien definido, es lineal y continuo.*

Demostración. Obviamente el operador está bien definido. Además, la linealidad de R se deduce de la linealidad de la derivación.
Sea $f \in \mathscr{E}_{(M_p)}([-1, 1])$, entonces para cada $h > 0$, se tiene que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ y para cada $x \in [-1, 1]$, $|f^{(p)}(x)| \leq h^p M_p \|f\|_{[-1,1],h}$.
Por lo tanto, para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $|f^{(p)}(0)| \leq h^p M_p \|f\|_{[-1,1],h}$, luego $\|R(f)\|_h \leq \|f\|_{[-1,1],h}$ y de aquí se deduce, por la proposición 1.20, que R es continua. □

A continuación, vamos a probar un resultado que, bajo ciertas condiciones sobre una sucesión numérica prefijada, garantiza la existencia de una función de clase $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ cuyo soporte está contenido en un compacto y con cotas en las derivadas sucesivas en términos de dicha sucesión.

Notación 3.10. Dado $a > 0$, se define $H_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $H_a(x) := \frac{1}{a}$ si $0 < x < a$ y $H_a(x) := 0$ en otro caso. En otras palabras, $H_a := \frac{1}{a}\chi_{[0,a]}$, donde χ es la función característica.

Observación 3.11. Es sencillo comprobar que si u es continua, entonces si $a > 0$, $u * H_a \in \mathscr{C}^1$ y su derivada es $\frac{u(x)-u(x-a)}{a}$, donde $*$ denota la convolución clásica de funciones.
Esto se debe a lo siguiente:

$$(u * H_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-t)H_a(t)dt = \frac{1}{a}\int_0^a u(x-t)dt = \frac{1}{a}\int_{x-a}^x u(y)dy.$$

Al ser u continua, por el Teorema fundamental del Cálculo se tiene que $u * H_a \in \mathscr{C}^1$ y que su derivada es $\frac{u(x)-u(x-a)}{a} = \frac{1}{a}(1-\tau_a)u(x)$, donde τ_a es el operador traslación por a definido como $(\tau_a f)(x) := f(x-a)$.
Del mismo modo se tiene que si $u \in \mathscr{C}^k$, $u * H_a \in \mathscr{C}^{k+1}$.

Lema 3.12. *Sea* $\{a_p\}_{p=0}^{\infty}$ *una sucesión de números positivos decreciente de manera que* $a := \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} a_p < \infty$ *y sea* $u_k := H_{a_0} * H_{a_1} * \ldots * H_{a_k}$ *para* $k \in \mathbb{N}$.
Entonces $u_k \in \mathscr{C}_c^{k-1}(\mathbb{R})$ *tiene el soporte contenido en* $[0,a]$ *y la sucesión* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *converge uniformemente en* $\mathbb{R}$ *hacia una función* $u \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$ *con soporte contenido en* $[0,a]$ *que verifica que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1$ *y que para cada* $j \in \mathbb{N}_0$, $\|u^{(j)}\|_\infty \leq \dfrac{2^j}{a_0 \ldots a_j}$.

Demostración. Vamos a calcular explícitamente u_1 para demostrar que pertenece a $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ y razonando por inducción y teniendo en cuenta la observación 3.11, llegaríamos a que $u_k \in \mathscr{C}_c^{k-1}(\mathbb{R})$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} u_1(x) = (H_{a_0} * H_{a_1})(x) &= \int_{\mathbb{R}} a_0^{-1}a_1^{-1}\chi_{[0,a_0]}(y)\chi_{[0,a_1]}(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} a_0^{-1}a_1^{-1}\chi_{[0,a_0]}(y)\chi_{[x-a_1,x]}(y)dy = a_0^{-1}a_1^{-1}m([0,a_0]\cap[x-a_1,x]). \end{aligned}$$

Luego tenemos que $u_1(x)$ está definida como:

$$u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{a_0a_1} & \text{si } 0 \leq x \leq a_1, \\ \frac{1}{a_0} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_0, \\ \frac{a_0+a_1-x}{a_0a_1} & \text{si } a_0 \leq x \leq a_0+a_1, \\ 0 & \text{si } a_0+a_1 \leq x. \end{cases}$$

De aquí podemos deducir que $u_1 \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ y que su soporte está contenido en $[0, a_0 + a_1] \subseteq [0, a]$. Por otro lado, se tiene que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sop}(u_k) \subseteq \sum_{j=0}^{k} \operatorname{sop}(H_{a_j}) \subseteq [0, a_0 + a_1 + \ldots + a_k] \subseteq [0, a]$.

Sea $k \in \mathbb{N}$, por la observación 3.11 tenemos que:

$$u_k'(x) = \tfrac{(H_{a_1} * \ldots * H_{a_k})(x) - (H_{a_1} * \ldots * H_{a_k})(x - a_0)}{a_0} = \tfrac{1}{a_0}(1 - \tau_{a_0})(H_{a_1} * \ldots * H_{a_k})(x).$$

$$u_k''(x) = \tfrac{(H_{a_2} * \ldots * H_{a_k})(x) - (H_{a_2} * \ldots * H_{a_k})(x - a_1) - (H_{a_2} * \ldots * H_{a_k})(x - a_0) + (H_{a_2} * \ldots * H_{a_k})(x - a_0 - a_1)}{a_0 a_1}$$
$$= \tfrac{1}{a_0 a_1}(1 - \tau_{a_0})(1 - \tau_{a_1})(H_{a_2} * \ldots * H_{a_k})(x).$$

Luego por inducción deducimos que para cada $j \leq k - 1$,

$$u_k^{(j)} = \prod_{i=0}^{j-1} \frac{1}{a_i}(1 - \tau_{a_i})(H_{a_j} * \ldots * H_{a_k}). \tag{3.5}$$

Agrupando los términos de la ecuación (3.5), dicha igualdad se puede ver de la siguiente manera:

$$u_k^{(j)}(x) = \frac{1}{a_0 a_1 \ldots a_{j-1}} \Big[(H_{a_j} * \ldots * H_{a_k})(x) - \sum_{i=0}^{j-1} (H_{a_j} * \ldots * H_{a_k})(x - a_i) + \tag{3.6}$$
$$\sum_{i,l=0; i \neq l}^{j-1} (H_{a_j} * \ldots * H_{a_k})(x - a_i - a_l) - \ldots +$$
$$(-1)^j (H_{a_j} * \ldots * H_{a_k})(x - a_0 - a_1 - \ldots - a_{j-1}) \Big].$$

Por lo que de esta expresión y usando que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$, se puede ver que si $j \leq k - 1$:

$$|u_k^{(j)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \ldots a_{j-1}} \Big[\|H_{a_j} * \ldots * H_{a_k}\|_\infty + \sum_{i=0}^{j-1} \|H_{a_j} * \ldots * H_{a_k}\|_\infty + \tag{3.7}$$
$$\sum_{i,l=0; i \neq l}^{j-1} \|H_{a_j} * \ldots * H_{a_k}\|_\infty + \ldots + \|H_{a_j} * \ldots * H_{a_k}\|_\infty \Big]$$
$$\leq \frac{1}{a_0 a_1 \ldots a_{j-1}} \|H_{a_j}\|_\infty \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} = \frac{2^j}{a_0 a_1 \ldots a_{j-1} a_j}.$$

Sean $k, m \in \mathbb{N}$, vamos a probar que la sucesión $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy y como se verifica que todas las u_k tienen soporte contenido en $[0, a]$, existe $u \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ tal que la sucesión de partida converge uniformemente en $\mathbb{R}$ hacia u.

$$\begin{aligned}|(u_{m+k}-u_m)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |u_m(x-y)-u_m(x)|\cdot|(H_{a_{m+1}}*\ldots*H_{a_{m+k}})(y)|dy\\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |u_m'(x)|\cdot|y|\cdot|(H_{a_{m+1}}*\ldots*H_{a_{m+k}})(y)|dy\\ &\leq \|u_m'\|_\infty(a_{m+1}+\ldots+a_{m+k}) \leq \frac{2(a_{m+1}+\ldots+a_{m+k})}{a_0a_1}.\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $p > q \geq n_0$, $a_{q+1}+\ldots a_p < \frac{\varepsilon a_0 a_1}{2}$. Por lo que si $m \geq n_0$, $\|u_{m+k}-u_m\|_\infty < \varepsilon$ para cada $k \in \mathbb{N}$, obteniéndose lo deseado.
Razonando de manera análoga, llegamos a que la sucesión $\{u_k'\}_{k=1}^\infty$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función $v \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$, luego por el Teorema de derivabilidad del límite puntual, $u'(x) = v(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, por lo que $u \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R})$ y por inducción se llega a que $u \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.
Por último, como para cada $k \geq j+1$, $\|u_k^{(j)}\|_\infty \leq \frac{2^j}{a_0\ldots a_j}$, se deduce que $\|u^{(j)}\|_\infty \leq \frac{2^j}{a_0\ldots a_j}$ y como para cada $k \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} u_k(x)dx = \prod_{i=0}^{k}\int_{\mathbb{R}} H_{a_i}(x)dx = 1$ y $|u_k(x)| \leq \frac{1}{a_0}\chi_{[0,a]}(x)$, por el Teorema de la convergencia dominada, $\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1$. □

Como consecuencia de este resultado, se puede deducir el siguiente teorema, en el que, bajo la condición (γ), se va a construir una función no idénticamente nula con soporte compacto (por lo tanto, con todas sus derivadas nulas en puntos del intervalo de definición) y perteneciente a la clase bajo consideración. Tal construcción no es posible en la clase de funciones analíticas, debido al principio de identidad. Por ello, las clases en las que no es posible obtener tales funciones se denominan casianalíticas, y la condición (γ) se denomina de no casianaliticidad, como se anunció anteriormente.

Teorema 3.13. *Sea $\{m_p\}_{p=0}^\infty$ una sucesión que verifica (α) y (γ) y sea $a := \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{m_p} < \infty$. Entonces existe una función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con soporte contenido en $[-a,a]$ que verifica que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi^{(p)}(0) = \delta_{p,0}$, donde $\delta_{i,j}$ denota la delta de Kronecker, y $\|\varphi^{(p)}\|_\infty \leq 2^p M_p$ para cada $p \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Sea $a_p := m_{p+1}$, $p \in \mathbb{N}_0$. Como la sucesión $\{m_p\}_{p=0}^\infty$ verifica (α), $M_{k+1} = m_0m_1\ldots m_{k+1} = a_0a_1\ldots a_k$.
Por lo tanto, por el lema 3.12, existe $u \in \mathcal{D}([0,a])$ tal que $\int_0^a u(x)dx = 1$ y además para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $|u^{(k)}(x)| \leq 2^k M_{k+1}$.

Sea $\Psi(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{x} u(t)dt$. Observemos que como $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\Psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Dado que $u(t) = 0$ si $t \leq 0$, $\Psi(x) = 0$ si $x \leq 0$. Por otro lado, Ψ crece en $[0, a]$ al ser u positiva y $\Psi(x) = 1$ si $x \geq a$. Por último, si $k \geq 1$, entonces $|\Psi^{(k)}(x)| = |u^{(k-1)}(x)| \leq 2^{k-1}M_k$.
Definimos φ como la siguiente función:

$$\varphi(x) = \Psi(x+a)\Psi(a-x) = \begin{cases} \Psi(x+a) & \text{si } x \leq 0, \\ \Psi(a-x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

donde la segunda igualdad se debe a que $\Psi(x) = 1$ si $x \geq a$.
Debido al comportamiento de Ψ, se deduce que $\varphi \in \mathcal{D}([-a, a])$, $0 \leq \varphi \leq 1$, que si $k \geq 1$, $\varphi^{(k)}(0) = 0$ ya que $\Psi^{(k)}(a) = 0$, y que $\varphi(0) = \Psi^2(a) = 1$.
Concluiremos la prueba verificando que $\|\varphi^{(k)}\|_\infty \leq 2^k M_k$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$.

1. Si $x \geq 0$, por la regla de la cadena y usando que $|\Psi^{(k)}(x)| \leq 2^{k-1}M_k$, se tiene que $|\varphi^{(k)}(x)| = |(-1)^k\Psi^{(k)}(a-x)| \leq 2^{k-1}M_k \leq 2^k M_k$.

2. Si $x \leq 0$ razonando como en el caso anterior, se llega a que $|\Psi^{(k)}(x)| \leq 2^{k-1}M_k$, se tiene que $|\varphi^{(k)}(x)| = |\Psi^{(k)}(x+a)| \leq 2^{k-1}M_k \leq 2^k M_k$.

□

Estamos en condiciones de demostrar el resultado central de esta sección, en el que se prueba que la condición (γ_1), denominada de no casianaliticidad fuerte por ser más exigente que (γ), asegura que el operador restricción es sobreyectivo. Además, dicho operador de Borel admitirá un inverso por la derecha que recibe el nombre de operador de extensión, pues proporciona una función definida en todo $[-1, 1]$ a partir de una sucesión que constituirá la de sus derivadas sucesivas en 0.

Teorema 3.14. *Sea $\{m_p\}_{p=0}^\infty$ una sucesión que verifica (α) y (γ_1). Entonces existe una aplicación lineal y continua $E : \Lambda_{(M_p)} \to \mathscr{E}_{(M_p)}([-1, 1])$ que verifica que $R \circ E = id$, es decir, la aplicación de Borel admite una inversa por la derecha que es lineal y continua. En particular, se deduce que $R : \Lambda_{(M_p)} \to \mathscr{E}_{(M_p)}([-1, 1])$ es sobreyectiva.*

Demostración. Como $\{m_p\}_{p=0}^\infty$ verifica (γ_1), por el corolario 2.11 1, existe $\varepsilon > 0$ y $\{n_p\}_{p=0}^\infty$, con $m_p \sim n_p$, tal que $\{n_p p^{-\varepsilon}\}_{p=0}^\infty$ verifica (γ_1) y (α). Además, puesto que $\{m_p\}_{p=0}^\infty$ verifica (γ_1), por el lema 2.8, $\{n_p\}_{p=0}^\infty$ verifica (γ_1), por lo que puedo suponer que $\{m_p p^{-\varepsilon}\}_{p=0}^\infty$ verifica (γ_1) y (α).
Conviene resaltar que esta suposición se puede hacer sin modificar los conjuntos definidos en (3.1) y (3.3) ya que si $m_p \sim n_p$, por el lema 2.15 entonces $m_p \approx n_p$, luego existen A,

$B > 0$ tales que $A^p N_p \leq M_p \leq B^p N_p$ para cada $p \in \mathbb{N}_0$.
Sea $h > 0$, entonces si $f \in \mathscr{E}_{(M_p)}([-1,1])$, para cada $x \in [-1,1]$ y para cada $p \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $|f^{(p)}(x)| \leq \|f\|_{[-1,1],h} h^p M_p \leq \|f\|_{[-1,1],h} (Bh)^p N_p$. Como el h elegido es arbitrario, $f \in \mathscr{E}_{(N_p)}([-1,1])$ y puesto que $\approx$ es una relación de equivalencia, se concluye que $\mathscr{E}_{(M_p)}([-1,1]) = \mathscr{E}_{(N_p)}([-1,1])$. Analogamente se hace para probar que $\Lambda_{(M_p)}$ no se ve afectado por $\sim$.
Sea $p \in \mathbb{N}$ fijo, consideramos la sucesión definida como:

$$\underbrace{m_p, m_p, \ldots, m_p}_{\text{p veces}}, m_{p+1}\Big(\frac{p}{p+1}\Big)^{\varepsilon}, m_{p+2}\Big(\frac{p}{p+2}\Big)^{\varepsilon}, \ldots \tag{3.8}$$

Como $\{m_p p^{-\varepsilon}\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (α), la sucesión (3.8) verifica (α) y puesto que también verifica (γ_1) si $S := \sup_{p\in\mathbb{N}} [(m_p p^{-\varepsilon})^* \sum_{k\geq p} \frac{1}{m_k k^{-\varepsilon}}] < \infty$ y $A := 1 + S$, se tiene que :

$$\frac{p}{m_p} + \sum_{k>p} \frac{1}{m_k} (\frac{k}{p})^{\varepsilon} = \frac{1}{m_p^*} + \sum_{k>p} \frac{1}{m_k} (\frac{k}{p})^{\varepsilon} = \frac{1 + m_p^* p^{-\varepsilon} \sum_{k>p} \frac{1}{m_k k^{-\varepsilon}}}{m_p^*} \leq \frac{A}{m_p^*} < \infty,$$

por lo que la sucesión (3.8) también verifica (γ).
Luego aplicando el teorema 3.13 con la sucesión (3.8), existe $\varphi_p \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con soporte contenido en $[-\frac{A}{m_p^*}, \frac{A}{m_p^*}]$, que verifica que para cada $j \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_p^{(j)}(0) = \delta_{j,0}$ y además:

$$\|\varphi_p^{(j)}\|_\infty \leq \begin{cases} 2^j m_p^j & \text{si } 0 \leq j \leq p, \\ 2^j m_p^p \frac{M_j}{M_p} \Big(\frac{p^{j-p} p!}{j!}\Big)^{\varepsilon} & \text{si } j > p. \end{cases} \tag{3.9}$$

Sea $F_p(x) := \varphi_p(x) \frac{x^p}{p!}$, se tiene que para cada $j \in \mathbb{N}_0$, $F_p^{(j)}(x) = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \varphi_p^{(k)}(x) [x^p]^{(j-k)}$.
Por las características de φ_p y x^p, se tiene que si $j \neq p$, $F_p^{(j)}(0) = 0$. Ahora bien, si $j = p$, $F_p^{(p)}(0) = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \varphi_p^{(k)}(x) [x^p]^{(p-k)} \big|_{x=0} = \frac{1}{p!} p! = 1$, donde hemos usado que para cada $j \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_p^{(j)}(0) = \delta_{j,0}$. Luego $F_p^{(j)}(0) = \delta_{j,p}$.
A continuación, vamos a acotar $\|F_p^{(j)}\|_\infty$, dividiéndolo en tres casos:

1. Si $0 \leq j \leq p$ y $x \in [-\frac{A}{m_p^*}, \frac{A}{m_p^*}]$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|F_p^{(j)}(x)| &\leq \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}|\varphi_p^{(k)}(x)|\Big(\frac{A}{m_p^*}\Big)^{p-j+k}\frac{p!}{(p-j+k)!}\\
&\leq \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k m_p^k\Big(\frac{A}{m_p}\Big)^{p-j+k}\frac{p^{p-j+k}}{(p-j+k)!} \leq A^p\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\frac{1}{m_p^{p-j}}\frac{1}{A^{j-k}}\frac{p^p}{p!}\\
&\leq (Ae)^p\frac{1}{m_p^{p-j}}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\frac{1}{A^{j-k}} = (Ae)^p\frac{1}{m_p^{p-j}}\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j\\
&= \frac{M_j}{M_p}(Ae)^p\frac{m_p m_{p+1}\dots m_{j+1}}{m_p^{p-j}}\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j \leq \frac{M_j}{M_p}(Ae)^p\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j.
\end{aligned}$$

Luego $\|F_p^{(j)}\|_\infty \leq \frac{M_j}{M_p}(Ae)^p\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j$.

2. Si $j \geq 2p$ y $x \in [-\frac{A}{m_p^*}, \frac{A}{m_p^*}]$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|F_p^{(j)}(x)| &\leq \frac{1}{p!}\sum_{k=j-p}^{j}\binom{j}{k}|\varphi_p^{(k)}(x)|\Big(\frac{A}{m_p^*}\Big)^{p-j+k}\frac{p!}{(p-j+k)!}\\
&\leq (Ae)^p\sum_{k=j-p}^{j}\binom{j}{k}2^k m_p^p\frac{M_k}{M_p}\Big(\frac{p^{k-p}p!}{k!}\Big)^{\varepsilon}\frac{A^{k-j}}{m_p^{p-j+k}}.
\end{aligned}$$

Como la sucesión $\{\frac{p^n}{n!}\}_{n=0}^\infty$ es decreciente a partir de p, el razonamiento se sigue de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
|F_p^{(j)}(x)| &\leq (Ae)^p\Big(\frac{p^{j-2p}p!}{(j-p)!}\Big)^{\varepsilon}\sum_{k=j-p}^{j}\binom{j}{k}2^k m_p^{j-k}\frac{M_k}{M_p}\frac{1}{A^{j-k}}\\
&= (Ae)^p\Big(\frac{p^{j-2p}p!}{(j-p)!}\Big)^{\varepsilon}\sum_{k=j-p}^{j}\binom{j}{k}2^k\frac{m_p^{j-k}}{m_{k+1}m_{k+2}\dots m_j}\frac{M_j}{M_p}\frac{1}{A^{j-k}}\\
&\leq \frac{M_j}{M_p}(Ae)^p\Big(\frac{p^{j-2p}p!}{(j-p)!}\Big)^{\varepsilon}\sum_{k=j-p}^{j}\binom{j}{k}2^k\frac{1}{A^{j-k}}\\
&\leq \frac{M_j}{M_p}(Ae)^p\Big(\frac{p^{j-2p}p!}{(j-p)!}\Big)^{\varepsilon}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\frac{1}{A^{j-k}} = \frac{M_j}{M_p}(Ae)^p\Big(\frac{p^{j-2p}p!}{(j-p)!}\Big)^{\varepsilon}\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Dado que $j-k \geq j-k-p$, se da la siguiente desigualdad :

$$\begin{aligned}
\frac{p!}{(j-p)!} &= \frac{1}{(j-p)\dots(j-2p+1)(j-2p)\dots(p+1)}\\
&\leq \frac{1}{(j-2p)(j-2p-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{(j-2p)!}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como consecuencia de esto, se deduce de (3.10) que:

$$\|F_p^{(j)}\|_\infty \leq \frac{M_j}{M_p}(Ae)^p\Big(\frac{p^{j-2p}}{(j-2p)!}\Big)^\varepsilon\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j.$$

3. Si $p < j < 2p$ y $x \in [-\frac{A}{m_p^*}, \frac{A}{m_p^*}]$, se tiene que razonando de manera análoga al caso en el que $j \geq 2p$, se tiene que llegamos a (3.10). Partamos de esta desigualdad y vamos a probar que $\Big(\frac{p^{j-2p}p!}{(j-p)!}\Big)^\varepsilon \leq 1$, lo cual es cierto ya que:

$$\frac{p!}{(j-p)!p^{2p-j}} = \frac{\prod_{k=j-p+1}^p k}{p^{2p-j}} \leq \frac{\prod_{k=j-p+1}^p p}{p^{2p-j}} = \frac{p^{2p-j}}{p^{2p-j}} = 1.$$

Por lo tanto, $\|F_p^{(j)}\|_\infty \leq \frac{M_j}{M_p}(Ae)^p\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j$.

Ahora bien, si $h > 0$, definimos $H(h) = H := Ae\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^2 h^{-2}\exp(\varepsilon\big(h^{-1}(2+\frac{1}{A})\big)^{\frac{1}{\varepsilon}})$. Vamos a acotar $\|F_p^{(j)}\|_\infty$ en función de H dividiéndolo en dos casos:

1. Si $j \geq 2p$,

$$\begin{aligned}\|F_p^{(j)}\|_\infty &\leq \frac{M_j}{M_p}(Ae)^p\Big(\frac{p^{j-2p}}{(j-2p)!}\Big)^\varepsilon\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j \\ &= \frac{M_jh^j}{M_p}\Big(Ae\big(2+\frac{1}{A}\big)^2h^{-2}\Big)^p\Big(\frac{p^{j-2p}}{(j-2p)!}\Big(h^{-1}\Big(2+\frac{1}{A}\Big)\Big)^{\frac{j-2p}{\varepsilon}}\Big)^\varepsilon \\ &\leq \frac{M_jh^j}{M_p}\Big(Ae\big(2+\frac{1}{A}\big)^2h^{-2}\Big)^p\Big(e^{p\left(h^{-1}\left(2+\frac{1}{A}\right)\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}}\Big)^\varepsilon = \frac{M_jh^j}{M_p}H^p.\end{aligned}$$

2. Si $j < 2p$ y $0 < h \leq 2+\frac{1}{A}$,

$$\|F_p^{(j)}\|_\infty \leq \frac{M_j}{M_p}(Ae)^p\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j = \frac{M_jh^j}{M_p}(Ae)^p\Big((2+\frac{1}{A})h^{-1}\Big)^j \leq$$
$$\frac{M_jh^j}{M_p}(Ae)^p\Big((2+\frac{1}{A})h^{-1}\Big)^{2p}\Big(\exp(\varepsilon\big(h^{-1}(2+\frac{1}{A})\big)^{\frac{1}{\varepsilon}})\Big)^p = \frac{M_jh^j}{M_p}H^p.$$

Por lo tanto, $\|F_p\|_{[-1,1],h} \leq \frac{H^p}{M_p}$ si $0 < h \leq 2+\frac{1}{A}$.

Introducimos el operador $E : \Lambda_{(M_p)} \to \mathscr{E}_{(M_p)}([-1,1])$ definido como $E(\{x_p\}_{p=0}^\infty) := \sum_{p=0}^\infty x_pF_p$.

Fácilmente se puede ver que E es lineal y también se puede comprobar que $R \circ E = id$, pues $F_p^{(j)}(0) = \delta_{j,p}$.

Comprobemos que E es continua. Sea $0 < h \leq 2+\frac{1}{A}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\|E(\{x_p\}_{p=0}^\infty)\|_{h,[-1,1]} &\leq \sum_{p=0}^\infty |x_p|\|F_p\|_{h,[-1,1]} \leq \sum_{p=0}^\infty |x_p|\frac{H^p}{M_p} \\ &\leq \sum_{p=0}^\infty \Big(\frac{1}{2H}\Big)^p M_p\|x_p\|_{\frac{1}{2H}}\frac{H^p}{M_p} = \|x_p\|_{\frac{1}{2H}}.\end{aligned}$$

Luego por la proposición 1.20, se tiene que E es continua. □

3.2. Espacios de Roumieu

En esta sección, se trabajará el problema de Borel con los espacios de Roumieu (3.2) y (3.4). Se usarán los resultados de la sección 1.1.4 para dar las condiciones suficientes para que exista el operador extensión en los espacios mencionados anteriormente.
En primer lugar definiremos la aplicación de Borel.

Definición 3.15. Sea $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ una sucesión que verifica (α). Definimos el *operador restricción* u *operador de Borel en el punto 0*, $R : \mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1]) \to \Lambda_{\{M_p\}}$, como $R(f) := \{f^{(p)}(0)\}_{p=0}^{\infty}$.

Observación 3.16. Es claro que este operador está bien definido.

Definiremos unos subespacios de los espacios de Roumieu definidos en (3.2) y (3.4) que nos van a servir de cara a dotar a estos espacios de una topología de límites inductivo.

Definición 3.17. Si $n \in \mathbb{N}$, se definen los siguientes subespacios de $\mathscr{E}_{\{M_p\}}(K)$ y $\Lambda_{\{M_p\}}$ respectivamente:

$$\mathscr{E}_{\{M_p\},n}(K) := \{f \in \mathscr{C}^{\infty}(K) : \|f\|_{K,n} < \infty\}. \tag{3.11}$$

$$\Lambda_{\{M_p\},n} := \{\{x_p\}_{p=0}^{\infty}, x_p \in \mathbb{C} : \|x_p\|_n < \infty\}. \tag{3.12}$$

Proposición 3.18. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, los espacios $\mathscr{E}_{\{M_p\},n}(K)$ y $\Lambda_{\{M_p\},n}$ son espacios de Banach.*

Demostración. 1. Sea $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathscr{E}_{\{M_p\},n}(K)$, luego para todo $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_j\|_{K,n} < \varepsilon$ para cada $m, j \geq m_0$.
Por lo tanto, para cada $m, j \geq m_0$ y para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $\|f_m^{(p)} - f_j^{(p)}\|_{K,\infty} < \varepsilon n^p M_p$, es decir, para cada $p \in \mathbb{N}_0$, la sucesión $\{f_m^{(p)}\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathscr{C}(K)$, que es de Banach.
De aquí se deduce que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, existe $f_p \in \mathscr{C}(K)$ tal que $f_m^{(p)}$ converge uniformemente a f_p en K. Se puede ver que si $f = f_0$, entonces para cada $p \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $f^{(p)} = f_p$ y por lo tanto $f \in \mathscr{C}^{\infty}(K)$.
Como tenemos que $\|f_m^{(p)} - f_j^{(p)}\|_{K,\infty} < \varepsilon n^p M_p$, si $j \to \infty$, llegamos a que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $\|f_m^{(p)} - f^{(p)}\|_{K,\infty} \leq \varepsilon n^p M_p$ para cada $m \geq m_0$, luego si $m \geq m_0$, $f_m - f$ pertenece a $\mathscr{E}_{\{M_p\},n}(K)$ y $f \in \mathscr{E}_{\{M_p\},n}(K)$. Finalmente, si $m \geq m_0$, se tiene que:

$$\|f_m - f\|_{K,n} = \sup_{p\in\mathbb{N}_0, x\in K} \frac{1}{n^p M_p} |f_j^{(p)}(x) - f^{(p)}| \leq \varepsilon,$$

por lo que $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a f en $\mathscr{E}_{\{M_p\},n}(K)$, con lo que el espacio es completo.

2. Sea $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\Lambda_{\{M_p\},n}$, luego para todo $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_j\|_n < \varepsilon$ para cada $m, j \geq m_0$. Pongamos $x_m = \{x_p^m\}_{p=0}^{\infty}$, donde $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para cada $m, j \geq m_0$ y para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $|x_p^m - x_p^j| < \varepsilon n^p M_p$. Luego para cada $p \in \mathbb{N}_0$, la sucesión $\{x_p^m\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces existe $x_p \in \mathbb{C}$ tal que $\{x_p^m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a x_p.
Sea $x = \{x_p\}_{p=0}^{\infty}$. Como para cada $m, j \geq m_0$ y para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $|x_{m_p} - x_{j_p}| < \varepsilon n^p M_p$, si $j \to \infty$, para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $|x_{m_p} - x_p| \leq \varepsilon n^p M_p$ si $m \geq m_0$. Luego $x_m - x \in \Lambda_{\{M_p\},n}$ si $m \geq m_0$, de lo que se deduce que $x \in \Lambda_{\{M_p\},n}$ y que $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge hacia x en $\Lambda_{\{M_p\},n}$, por lo que $\Lambda_{\{M_p\},n}$ es de Banach.

□

Definición 3.19. $\mathscr{E}_{\{M_p\}}(K) = \operatorname{ind} \mathscr{E}_{\{M_p\},n}(K)$ y $\Lambda_{\{M_p\}} = \operatorname{ind} \Lambda_{\{M_p\},n}$.

Proposición 3.20. *La aplicación R de la definición 3.15 es continua.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces si $f \in \mathscr{E}_{\{M_p\},n}([-1,1])$, $C = \|f\|_{[-1,1],n}$ y se tiene que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ y para cada $x \in [-1,1]$, $|f^{(p)}(x)| \leq C n^p M_p$. Por lo que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $|f^{(p)}(0)| \leq C n^p M_p$.
Es decir, $R(f) \in \Lambda_{\{M_p\},n}$, con lo que $R(\mathscr{E}_{\{M_p\},n}([-1,1])) \subseteq \Lambda_{\{M_p\},n}$, y $\|R(f)\|_n \leq \|f\|_{[-1,1],n}$.
Como por la proposición 3.18, $\mathscr{E}_{\{M_p\},n}([-1,1])$ y $\Lambda_{\{M_p\},n}$ son espacios de Banach, $R_{|\mathscr{E}_{\{M_p\},n}([-1,1])} : \mathscr{E}_{\{M_p\},n}([-1,1]) \to \Lambda_{\{M_p\},n}$ es continua y se concluye por la proposición 1.57 que R es continua. □

Estamos ahora en condiciones de establecer un teorema de sobreyectividad parecido al teorema 3.14 pero en el caso de los espacios de Roumieu. Además, en este teorema se va a dar una condición suficiente para que el operador de Borel definido en 3.15 admita un inverso por la derecha, que recibirá el nombre de operador de extensión al igual que en el caso Beurling.

Teorema 3.21. *1. Si $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (γ_1), entonces la aplicación R es sobreyectiva.*

2. Si además $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ también satisface (β_2), entonces existe una aplicación lineal y continua $E : \Lambda_{\{M_p\}} \to \mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1])$ tal que $R \circ E = id$, es decir, la aplicación de Borel admite una inversa por la derecha que es lineal y continua.

Demostración. 1. Sea $\{x_p\}_{p=0}^{\infty} \in \Lambda_{\{M_p\}}$, entonces existe $H > 0$ y $C > 0$ tal que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $|x_p| \leq C M_p H^p$.

Dado $h > 0$, consideramos la siguiente sucesión definida como:

$$\underbrace{hm_p, hm_p, \ldots, hm_p}_{\text{p veces}}, hm_{p+1}, hm_{p+2}, \ldots$$

Razonando de manera análoga al teorema 3.14, existe $\varphi_p \in \mathcal{D}([\frac{-A}{hm_p^*}, \frac{A}{hm_p^*}])$ tal que $\|\varphi_p\|_\infty \leq 2^p h^p M_p$.

Sea $F_p(x) := \varphi_p(x)\frac{x^p}{p!}$. Con unos argumentos similares al teorema previamente mencionado, se llega a que para cada $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\|F_p^{(j)}\|_\infty \leq \frac{M_j}{M_p}\Big(\frac{Ae}{h}\Big)^p \Big(h(2+\frac{1}{A})\Big)^j.$$

Por lo que $\|F_p\|_{[-1,1],h(2+\frac{1}{A})} \leq \frac{1}{M_p}\Big(\frac{Ae}{h}\Big)^p$. Cogemos $h > 0$ que verifique que $\frac{Ae}{h} < \frac{1}{H}$, es decir que cumpla que $h > AeH$.

Sea $f(x) := \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} x_p F_p(x)$, probemos que $f \in \mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1])$. Dado $k \in \mathbb{N}_0$, se tiene lo siguiente:

$$|x_p|\|F_p\|_{[-1,1],h(2+\frac{1}{A})} \leq CM_pH^p\frac{1}{M_p}\Big(\frac{Ae}{h}\Big)^p = C\Big(\frac{HAe}{h}\Big)^p,$$

por lo tanto $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}|x_p|\|F_p\|_{[-1,1],h(2+\frac{1}{A})} < \infty$, y de aquí se deduce que $f \in \mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1])$.

Además, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $f^{(k)}(0) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} x_p F_p^{(k)}(0) = x_k$, luego $R(f) = \{x_p\}_{p=0}^\infty$.

2. Para cada $p \in \mathbb{N}_0$, consideramos la siguiente sucesión:

$$\underbrace{m_p, m_p, \ldots, m_p}_{\text{p veces}}, m_{p+1}, m_{p+2}, \ldots$$

Razonando de nuevo como en el teorema 3.14, se tiene que existe $\varphi_p \in \mathcal{D}([\frac{-A}{m_p^*}, \frac{A}{m_p^*}])$ tal que $\|\varphi_p\|_\infty \leq 2^p h^p M_p$ y si $F_p(x) := \varphi_p(x)\frac{x^p}{p!}$, entonces para cada $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\|F_p^{(j)}\|_\infty \leq \frac{M_j}{M_p}\Big(Ae\Big)^p\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j, \tag{3.13}$$

y se tiene a su vez que si $j < p$:

$$\|F_p^{(j)}\|_\infty \leq \frac{M_j}{M_p}\Big(Ae\Big)^p\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j\frac{m_{j+1}\ldots m_p}{m_p^{p-j}} = \frac{M_j}{M_p}\Big(Ae\Big)^p\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j\frac{M_p}{M_j}\frac{1}{m_p^{p-j}} \tag{3.14}$$

Por otro lado, como $\{m_p\}_{p=0}^\infty$ satisface (β_2), por el lema 2.17, dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \beta < 1$ tal que para p suficientemente grande, se tiene lo siguiente:

$$\max_{0\leq j\leq p\beta}\frac{M_p}{M_j}\frac{1}{m_p^{p-j}} \leq \varepsilon^p. \tag{3.15}$$

Por lo tanto,

a) Si $h \geq 1$ y $j > p\beta$, $h^{j-p\beta} \geq 1$ y por lo tanto, partiendo de (3.13), se tiene que:

$$\|F_p^{(j)}\|_\infty \leq \frac{M_j}{M_p}\Big(Aeh^{-\beta}\Big)^p\Big(h(2+\frac{1}{A})\Big)^j. \tag{3.16}$$

b) Si $j \leq p\beta$, para un p suficientemente grande y $h \geq 1$, se puede llegar a partir de (3.14) y (3.15) a lo siguiente:

$$\|F_p^{(j)}\|_\infty \leq \frac{M_j}{M_p}\Big(Ae\varepsilon\Big)^p\Big(2+\frac{1}{A}\Big)^j \leq \frac{M_j}{M_p}\Big(Ae\varepsilon\Big)^p\Big(h(2+\frac{1}{A})\Big)^j. \tag{3.17}$$

Por lo que para p suficientemente grande y $h \geq 1$, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\|F_p^{(j)}\|_{[-1,1],h(2+\frac{1}{A})} \leq \frac{1}{M_p}\Big(Ae\,\text{máx}\{\varepsilon, h^{-\beta}\}\Big)^p. \tag{3.18}$$

Sea H de manera que $Ae \geq H > 0$, $\varepsilon = \frac{H}{Ae}$ y $h = \left(\frac{Ae}{H}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. Por lo tanto, (3.18) queda así:

$$\|F_p^{(j)}\|_{[-1,1],h(2+\frac{1}{A})} \leq \frac{H^p}{M_p}. \tag{3.19}$$

Definimos la aplicación $E : \Lambda_{\{M_p\}} \to \mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1])$ como $E(\{x_p\}_{p=0}^\infty) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p F_p$. Comprobemos que E es continua, ya que fácilmente se puede ver que es lineal y que $R \circ E = id$ ya que $F_p^{(j)}(0) = \delta_{j,p}$.
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_p\}_{p=0}^\infty \in \Lambda_{\{M_p\},n}$. Dados $k \in \mathbb{N}_0$ y $x \in [-1,1]$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\|E(\{x_p\}_{p=0}^\infty)\|_{[-1,1],h(2+\frac{1}{A})} &\leq \sum_{p=0}^{\infty} |x_p| \|F_p\|_{[-1,1],h(2+\frac{1}{A})} \leq \sum_{p=0}^{\infty} \|x_p\|_n n^p M_p \frac{H^p}{M_p} \\ &= \|x_p\|_n \sum_{p=0}^{\infty} n^p H^p < \infty,\end{aligned}$$

si $H < \frac{1}{n}$. Por lo tanto, si $m = \lceil h(2+\frac{1}{A})\rceil$, donde $\lceil\cdot\rceil$ es la función parte entera por exceso, se tiene que $\|E(\{x_p\}_{p=0}^\infty)\|_{[-1,1],m} \leq \|E(\{x_p\}_{p=0}^\infty)\|_{[-1,1],h(2+\frac{1}{A})} \leq \|x_p\|_n \sum_{p=0}^\infty n^p H^p$, luego la aplicación $E_{|\Lambda_{\{M_p\},n}} : \Lambda_{\{M_p\},n} \to \mathscr{E}_{\{M_p\},m}([-1,1])$ es continua y por la proposición 1.57, E es continua.

$\square$

Capítulo 4

Condiciones necesarias para el operador extensión

En este capítulo estudiaremos cuáles son las condiciones necesarias para poder construir el operador E del capítulo anterior, tanto en el caso Roumieu como en el caso Beurling.
Para lograr este objetivo, dividiremos el capítulo en dos secciones distintas según el caso que estemos tratando, del mismo modo que hicimos en el capítulo 3.
En la sección relativa a los espacios de Roumieu se utilizará el teorema de factorización de Grothendieck y en la correspondiente a los espacios de Beurling se usarán los teoremas que se recogen en la sección 1.2.

4.1. Espacios de Roumieu

En esta sección se obtendrán las condiciones que ha de verificar la sucesión de cocientes $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ si se tiene la existencia del operador extensión E en el caso Roumieu.
Para ello, comenzaremos dando un teorema que caracteriza la sobreyectividad del operador de Borel.

Teorema 4.1. *$R : \mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1]) \longrightarrow \Lambda_{\{M_p\}}$ es sobreyectiva si y solo si $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ satisface (β_1).*

Demostración. $\Leftarrow$) Lo hemos probado en el teorema 3.21.

$\Rightarrow$) Veamos que existen $C, h > 0$ tales que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, se puede encontrar una función $F_p \in \mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1])$ que verifica que $\|F_p\|_{h,[-1,1]} \leq \frac{C}{M_p}$ y además $F_p^{(j)}(0) = \delta_p^j$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$, y así razonando como en el teorema anterior, llegaremos a que

$\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ cumple (β_1).

Comencemos observando que $\mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1]) = \cup_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_{\{M_p\},n}([-1,1])$ y que $\Lambda_{\{M_p\}} = \cup_{n=1}^{\infty}\Lambda_{\{M_p\},n}$. Por ser R sobreyectiva, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\Lambda_{\{M_p\},n} = i_n(\Lambda_{\{M_p\},n}) \subseteq \Lambda_{\{M_p\}} = R(\mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1])) = \cup_{m=1}^{\infty} R(\mathscr{E}_{\{M_p\},m}([-1,1])),$$

donde $i_n : \Lambda_{\{M_p\},n} \hookrightarrow \Lambda_{\{M_p\}}$ es la inclusión, que es lineal y continua por la definición de topología de límite inductivo.

Por lo que por el teorema de factorización de Grothendieck, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda_{\{M_p\},n} \subseteq R(\mathscr{E}_{\{M_p\},m}([-1,1]))$, es decir, $\{x : \|x\|_n \leq 1\} \subseteq \{x : \|x\|_n < \infty\} \subseteq \{R(f) : \|f\|_{m,[-1,1]} < \infty\}$.

Al ser R lineal y $\{R(f) : \|f\|_{m,[-1,1]} \leq 1\}$ un entorno de 0, existe $C > 0$ tal que $\{x : \|x\|_n \leq 1\} \subseteq \{R(f) : \|f\|_{m,[-1,1]} \leq C\}$.

Aplicándolo al caso de que $n = 1$ y por el hecho de que R sea lineal, llegamos a que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $\{x : \|x\|_n \leq \frac{1}{M_p}\} \subseteq \{R(f) : \|f\|_{m,[-1,1]} \leq \frac{C}{M_p}\}$.

Concluimos observando que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $\|e_p\|_n = \frac{1}{M_p}$, por lo que existe F_p, $\|F_p\|_{m,[-1,1]} \leq \frac{C}{M_p}$ tal que $R(F_p) = e_p$, es decir, $F_p^{(j)}(0) = \delta_p^j$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$.

□

Una vez visto este resultado, finalizaremos esta sección dando el teorema que nos permite conocer las condiciones necesarias que ha de verificar la sucesión de cocientes $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ si existe el operador de extensión en el caso Roumieu.

Teorema 4.2. *Existe un operador lineal y continuo $E : \Lambda_{\{M_p\}} \to \mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1])$ que verifica que $R \circ E = id$ si y solo si $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_2) y (β_1).*

Demostración. Comenzamos observando que por el teorema 3.21, solo es necesario probar que si existe el operador extensión E, la sucesión de cocientes satisface (β_2), pues si se tiene la existencia de E, es fácil comprobar que R es sobreyectiva y por lo tanto, aplicando el teorema 4.1, se llega a que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_1).

Sea $F_p := E(e_p)$, $p \in \mathbb{N}_0$, donde e_p es el vector p-unitario, es decir $e_{p_j} = \delta_p^j$. Como $R \circ E = id$, se tiene que $F_p^{(j)}(0) = \delta_p^j$ para cada $p, j \in \mathbb{N}_0$.

Veamos que para cada $H > 0$, $H \leq 1$, existen $C, h \geq 1$ tales que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $\|F_p\|_{[-1,1],h} \leq C\frac{H^p}{M_p}$, es decir, para cada $j \in \mathbb{N}_0$, $\|F_p^{(j)}\|_{\infty,[-1,1]} \leq C\frac{H^p h^j M_j}{M_p}$.

Comencemos observando que E es continua, $\mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1]) = \cup_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_{\{M_p\},n}([-1,1])$, $\Lambda_{\{M_p\}} = \cup_{n=1}^{\infty}\Lambda_{\{M_p\},n}$ y que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$E(\Lambda_{\{M_p\},n}) \subseteq E(\Lambda_{\{M_p\}}) \subseteq \cup_{m=1}^{\infty}\mathscr{E}_{\{M_p\},m}([-1,1]) = \cup_{m=1}^{\infty} i_m(\mathscr{E}_{\{M_p\},m}([-1,1])),$$

donde $i_m : \mathscr{E}_{\{M_p\},m}([-1,1]) \hookrightarrow \mathscr{E}_{\{M_p\}}([-1,1])$ es la inclusión, que es lineal y continua por la definición de topología de límite inductivo.

Por lo que por el teorema de factorización de Grothendieck, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $E(\Lambda_{\{M_p\},n}) \subseteq \mathscr{E}_{\{M_p\},m}([-1,1])$, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{E(x) : \|x\|_n < \infty\} \subseteq \{f : \|f\|_{m,[-1,1]} < \infty\}$.

Ahora bien, se tiene que si $L > 0$, entonces $\{x : \|x\|_L < \infty\} \subseteq \{x : \|x\|_{\lceil L \rceil} < \infty\}$, ya que si $\|x\|_L < \infty$, entonces existe $K > 0$ tal que $|x_p| \leq KL^p M_p \leq K\lceil L \rceil^p M_p$ para cada $p \in \mathbb{N}_0$, luego $\|x\|_{\lceil L \rceil} < \infty$, obteniéndose de este modo que para cada $L > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{E(x) : \|x\|_L \leq 1\} \subseteq \{E(x) : \|x\|_L < \infty\} \subseteq \{f : \|f\|_{m,[-1,1]} < \infty\}$.

Puesto que $\{f : \|f\|_{m,[-1,1]} \leq 1\}$ es un entorno de 0, existe $C > 0$ de manera que $\{E(x) : \|x\|_L \leq 1\} \subseteq \{f : \|f\|_{m,[-1,1]} \leq C\}$ y al ser E lineal, para cada $p \in \mathbb{N}_0$, se tiene que para cada $H > 0$ y para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $\{E(x) : \|x\|_{\frac{1}{H}} \leq \frac{H^p}{M_p}\} \subseteq \{f : \|f\|_{m,[-1,1]} \leq C\frac{H^p}{M_p}\}$.

Por lo anterior se tiene que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $\|e_p\|_{\frac{1}{H}} = \frac{H^p}{M_p}$, luego $F_p := E(e_p)$ cumple que $\|F_p\|_{m,[-1,1]} \leq C\frac{H^p}{M_p}$.

Una vez probado lo que queríamos, se tiene que por la expansión de Taylor, se tiene que para cada $j \in \mathbb{N}_0$ y para cada x, con $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} |F_p^{(p)}(x) - 1| &\leq \frac{x^j}{j!}\|F_p^{(p+j)}\|_{\infty,[-1,1]} \leq \frac{x^j}{j!}C\frac{H^p h^{p+j} M_{p+j}}{M_p} \\ &= C\frac{(hx)^j}{j!}(Hh)^p m_{p+1} m_{p+2} \dots m_{p+j}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ahora bien, si $j = p$, entonces $|F_p^{(p)}(x) - 1| \leq C\frac{(hx)^p}{p!}(Hh)^p m_{2p}^p$. Además, si suponemos que $0 \leq x \leq A\frac{p!^{\frac{1}{p}}}{m_{2p}}$, con $A < h^{-2}$, se llega a que $|F_p^{(p)}(x) - 1| \leq C(Ah^2H)^p$.

Si $H = 1$ y $A < h^{-2}$, $|F_p^{(p)}(x) - 1| \leq C(Ah^2)^p$, es decir, $F_p^{(p)}(x) \geq 1 - C(Ah^2)^p$, que para p suficientemente grande, se tiene que $F_p^{(p)}(x) \geq \frac{1}{2}$.

Si integramos $p - j$ veces, donde $0 \leq j \leq p$, se concluye que $F_p^{(j)}(x) \geq \frac{1}{2}\frac{x^{p-j}}{(p-j)!}$ y sustituyendo la x por A $\frac{p!^{\frac{1}{p}}}{m_{2p}}$, se llega a que:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(p-j)!} \cdot \left(\frac{Ap!^{\frac{1}{p}}}{m_{2p}}\right)^{p-j} \leq \|F_p^{(j)}\|_{\infty,[-1,1]} \leq C\frac{H^p h^j M_j}{M_p}. \tag{4.2}$$

Puesto que $p!^{\frac{1}{p}} \geq (p-j)!^{\frac{1}{p-j}}$, a partir de (4.2) se llega a que, para p suficientemente grande:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{A}{m_{2p}}\right)^{p-j} \leq C\frac{H^p h^j M_j}{M_p} \Rightarrow \frac{M_p}{M_j}\frac{1}{m_{2p}^{p-j}} \leq 2CA^{-(p-j)}H^p h^j,$$

y como la aplicación $x \longrightarrow x^{\frac{1}{p-j}}$ es creciente, se concluye que:

$$\left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{p-j}}\frac{1}{m_{2p}} \leq (2C)^{\frac{1}{p-j}} A^{-1}(H^p h^j)^{\frac{1}{p-j}}. \tag{4.3}$$

Sea $0 < \beta < \frac{1}{2}$ y sea $j \in \mathbb{N}$ el más pequeño que verifica que $j \geq \beta \cdot p$. Consideramos p suficientemente grande para que $\beta_p := \beta + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$.
Como $\beta < \frac{1}{2}$, se tiene que $\frac{p}{2} \geq j \geq \beta \cdot p$, luego $-\beta \cdot p \leq -j \leq \frac{-p}{2}$ lo que implica que $(1-\beta)p \leq p - j \leq \frac{p}{2}$, por lo que $\frac{1}{p-j} \leq \frac{2}{p}$. Además, como j es el menor entero que verifica que $j \geq \beta \cdot p$, se tiene que $j \leq \beta \cdot p + 1$, lo que conlleva que $\frac{j}{p-j} \leq \frac{\beta \cdot p+1}{p-j} = \frac{\beta_p}{p-j}$.
Entonces como $C, h \geq 1$, se deduce a partir de (4.3) que:

$$\left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{p-j}} \frac{1}{m_{2p}} \leq (2C)^{\frac{2}{p}} A^{-1} (H h^{\beta_p})^{\frac{p}{p-j}}. \tag{4.4}$$

Sea $\varepsilon > 0$, con $\frac{1}{A} \geq \varepsilon$. Cogemos $0 < H < \frac{\varepsilon A}{2} \leq \frac{1}{2}$ y β tan pequeño para que $h^{\beta_p} \leq 2$ a partir de un p suficientemente grande. Entonces de (4.4) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{p-j}} \frac{1}{m_{2p}} &\leq (2C)^{\frac{2}{p}} A^{-1} (\varepsilon A)^{\frac{p}{p-j}} = (2C)^{\frac{2}{p}} A^{-1} \varepsilon A (\varepsilon A)^{\frac{j}{p-j}} \\ &= (2C)^{\frac{2}{p}} \varepsilon (\varepsilon A)^{\frac{j}{p-j}} \leq (2C)^{\frac{2}{p}} \varepsilon \leq 2\varepsilon,\end{aligned} \tag{4.5}$$

donde en la última desigualdad se ha tenido en cuenta que para p suficientemente grande, $(2C)^{\frac{2}{p}} \leq 2$.
Por lo tanto, para p suficientemente grande y β pequeño, para que $h^{\beta_p} \leq 2$, y j el mínimo entero mayor que $\beta \cdot p$, se tiene que:

$$\left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{p-j}} \frac{1}{m_{2p}} \leq 2\varepsilon,$$

y aplicando el lema 2.17, se tiene que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_2). □

4.2. Espacios de Beurling

En esta sección se obtendrán las condiciones que ha de verificar la sucesión de cocientes $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ si se tiene la existencia del operador extensión E en el caso Beurling.

Teorema 4.3. *Existe un operador lineal y continuo $E : \Lambda_{(M_p)} \to \mathscr{E}_{(M_p)}([-1,1])$ que verifica que $R \circ E = id$ si y solo si $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (β_1).*

Demostración. Comenzamos observando que por el teorema 3.14, solo es necesario probar que si existe la aplicación lineal y continua E en el caso Beurling, la sucesión de cocientes verifica (β_1).
Sea $F_p := E(e_p)$, $p \in \mathbb{N}_0$, donde e_p es el vector p-unitario, es decir $e_{p_j} = \delta_p^j$. Como $R \circ E = id$, se tiene que $F_p^{(j)}(0) = \delta_p^j$ para cada $p, j \in \mathbb{N}_0$.

Por la continuidad de E, se tiene que por el lema 1.20 para cada $h > 0$, $h \leq 1$, existen $K > 0$ y $M > 0$ tales que si definimos $H \geq \max\{\frac{1}{K}, 1\}$ y $C \geq \max\{M, 1\}$, obtenemos lo siguiente:

$$\|F_p\|_{[-1,1],h} = \|E(e_p)\|_{[-1,1],h} \leq M\|e_p\|_K = M\frac{(\frac{1}{K})^p}{M_p} \leq C\frac{H^p}{M_p},$$

es decir, para cada $h > 0$, $h \leq 1$, existen $C, H \geq 1$ tales que para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $\|F_p\|_{[-1,1],h} \leq C\frac{H^p}{M_p}$.

Razonando como en el teorema 4.2, se tiene que por la expansión de Taylor, para cada $j \in \mathbb{N}_0$ y $0 \leq x \leq 1$, se tiene que

$$|F_p^{(p)}(x) - 1| \leq C\frac{(hx)^j}{j!}(Hh)^p m_{p+1}m_{p+2}\dots m_{p+j}. \tag{4.6}$$

Ahora bien, si $j = kp$, $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq x \leq A\frac{(kp)!^{\frac{1}{kp}}}{m_{(k+1)p}}$, con $A > \frac{H_1^2(k+1)}{k} > H_1^2$, siendo H_1 la constante que se obtiene para $h = 1$, a partir de (4.6) se tiene que:

$$|F_p^{(p)}(x) - 1| \leq C(hA)^{kp}(Hh)^p = C((hA)^k hH)^p. \tag{4.7}$$

Seleccionamos h, $0 < h < \frac{1}{A}$ y k para que $(hA)^k hH < 1$, entonces para p suficientemente grande se tiene que $F_{2p}^{(2p)}(x) \geq \frac{1}{2}$. Integrando p veces, se tiene que $F_{2p}^{(p)}(x) \geq \frac{1}{2p!}x^p$ y sustituyendo x por $A\frac{(kp)!^{\frac{1}{kp}}}{m_{(k+1)p}}$, se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2p!}\Big(A\frac{(2kp)!^{\frac{1}{2kp}}}{m_{(k+1)2p}}\Big)^p &\leq \|F_{2p}^{(p)}\|_{\infty,[-1,1]} \leq \|F_{2p}\|_{1,[-1,1]} \leq C\frac{H_1^p}{M_{2p}}M_p \\ &= C\frac{H_1^p}{m_{p+1}\dots m_{2p}} \leq C\frac{H_1^{2p}}{m_p^p},\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde la última desigualdad se debe a que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (α).

Observemos que, a partir de la desigualdad (4.8) se tiene lo siguiente:

$$\frac{m_{2(k+1)p}}{m_p} \geq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{p}}}\frac{(2kp)!^{\frac{1}{2kp}}}{p!^{\frac{1}{p}}}\frac{A}{H_1^2}. \tag{4.9}$$

Como $m_p^* := \frac{m_p}{p}$, $p \in \mathbb{N}$, a partir de la desigualdad (4.9) se deduce que:

$$\begin{aligned}\frac{m^*_{2(k+1)p}}{m^*_p} &\geq \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{p}}}\frac{(2kp)!^{\frac{1}{2kp}}}{p!^{\frac{1}{p}}}\frac{A}{H_1^2}\frac{1}{2(k+1)} \\ &\sim_\infty \frac{2kpe^{-1}(4\pi kp)^{\frac{1}{4kp}}}{pe^{-1}(2\pi p)^{\frac{1}{2p}}}\frac{A}{H_1^2}\frac{1}{2(k+1)} \sim_\infty \frac{k}{k+1}\frac{A}{H_1^2},\end{aligned} \tag{4.10}$$

por lo que $\lim_{p\longrightarrow\infty} \dfrac{m^*_{2(k+1)p}}{m^*_p} \geq \dfrac{k}{k+1}\dfrac{A}{H_1^2} > 1$, verificándose (β_1). □

Observación 4.4. Los teoremas 4.2 y 4.3 muestran que existe una gran diferencia entre el caso que estemos trabajando con los espacios de Beurling y los de Roumieu.
Por ejemplo, si consideramos las sucesiones de Gevrey definidas en la observación 2.18, llegamos a que estas sucesiones verifican (β_1) pero no (β_2), por lo que, para estas sucesiones, se podría construir el operador extensión en el caso de los espacios de Beurling, mientras que no sería posible en los espacios de Roumieu.

A continuación, nuestro objetivo va a ser probar, usando técnicas matemáticas más avanzadas, que en el caso Beurling son equivalentes la sobreyectividad del operador de Borel y la existencia del operador extensión. Para ello, enunciaremos un lema que servirá para probar dicho resultado.

Lema 4.5. *Si $u \in \mathscr{C}^m((-\infty, T])$ se anula en el eje negativo y $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos, de manera que $a_j \geq a_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, con $T \leq a_1 + \ldots a_m$, entonces si $x \leq T$*

$$|u(x)| \leq \sum_{j \in J} 2^{2j} \sup_{y<x} a_1 \ldots a_j |u^{(j)}(y)|,$$

donde $J = \{j : 1 \leq j \leq m, a_{j+1} < a_j \text{ o } j = m\}$.

Demostración. Comencemos observando que si $a \neq 0$, entonces

$$H_a * au'(x) = \frac{1}{a} \int_{x-a}^{x} au'(t)dt = u(x) - \tau_a u(x),$$

luego para cada $0 \leq j \leq m-1$,

$$u^{(j)} = H_{a_{j+1}} * a_{j+1} u^{(j+1)} + \tau_{a_{j+1}} u^{(j)}. \tag{4.11}$$

Razonando desde el caso $j = 0$, llegamos a que:

$$\begin{aligned} u &= H_{a_1} * a_1 u' + \tau_{a_1} u = H_{a_1} * a_1 u' + \tau_{a_1} H_{a_1} * a_1 u' + \tau_{a_1} \tau_{a_1} u \\ &= H_{a_1} * a_1 u' + \tau_{a_1} H_{a_1} * H_{a_2} * a_1 a_2 u'' + \tau_{a_1} \tau_{a_2} H_{a_1} * a_1 u' + \tau_{a_1} \tau_{a_1} u \\ &= H_{a_1} * a_1 u' + \tau_{a_1} H_{a_1} * H_{a_2} * a_1 a_2 u'' + \tau_{a_1} \tau_{a_2} H_{a_1} * H_{a_2} * a_1 a_2 u'' \\ &+ \tau_{a_1} \tau_{a_2} \tau_{a_2} H_{a_1} * a_1 u' + \tau_{a_1} \tau_{a_1} u. \end{aligned} \tag{4.12}$$

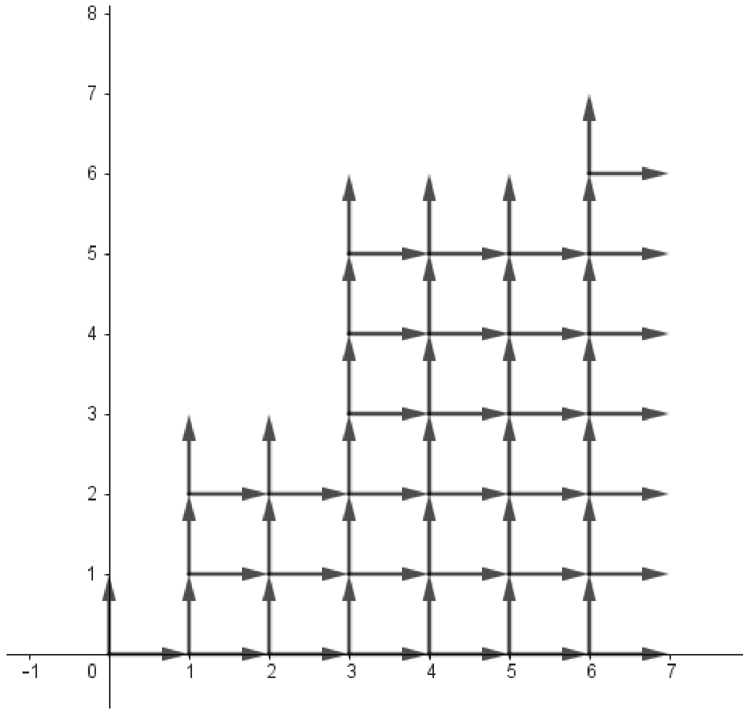
Repitiendo lo mismo que hemos hecho en (4.12), por inducción llegamos a que u se puede expresar como una suma de términos de la forma:

$$\tau_{a_{k_1}} \tau_{a_{k_2}} \ldots \tau_{a_{k_i}} H_{a_1} * H_{a_2} * \ldots * H_{a_j} * a_1 a_2 \ldots a_j u^{(j)}, \tag{4.13}$$

donde $i, j \leq m$, $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_i$ y además $a_{k_l} \geq a_l$ para cada $l \leq i$.
Podemos establecer que cada término de la forma (4.13) le asociamos $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ y vamos a definir el siguiente conjunto:

$$Z := \{(i, j) : 0 \leq i < m, 0 \leq j < m, a_{j+1} \geq a_{i+1}\}.$$

Si a un elemento $(i, j) \in Z$ le aplicamos (4.11), llegamos a dos términos de la forma $(i, j+1)$ e $(i+1, j)$ ya que al pertenecer a Z, $a_{k_{i+1}} = a_{j+1} \geq a_{i+1}$. También tenemos que $(i+1, j) \in Z$ salvo que $i + 1 = m$ y que $(i, j + 1) \in Z$ a no ser que $j + 1 = m$ o que $a_{j+2} < a_{i+1} \leq a_{j+1}$, lo que implica que $j + 1 \in J$ y que $i + 1 < j + 2$.
Para ilustrar mejor esto, representamos Z y los posibles movimientos que se pueden hacer cuando $m = 7$ y $J = \{1, 3, 6, 7\}$:



Por lo tanto, razonando a un modo análogo a como hemos hecho en (4.12) podemos llegar a que u es suma de elementos de la forma (4.13) donde $i = m$ o $i < j$ y $j \in J$, es decir:

$$\begin{aligned} u = &\sum_{j \leq m} \tau_{a_{k_1}} \tau_{a_{k_2}} \ldots \tau_{a_{k_m}} H_{a_1} * H_{a_2} * \ldots * H_{a_j} * a_1 a_2 \ldots a_j u^{(j)} \\ &+ \sum_{j \in J} \sum_{i < j} \tau_{a_{k_1}} \tau_{a_{k_2}} \ldots \tau_{a_{k_i}} H_{a_1} * H_{a_2} * \ldots * H_{a_j} * a_1 a_2 \ldots a_j u^{(j)}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Observemos que si $x \leq T$, $x - a_{k_1} - \ldots a_{k_m} \leq 0$, luego el primer sumatorio de (4.14) es idénticamente nulo.
Razonemos ahora en el segundo sumatorio. Observemos que el número de caminos que hay

para ir del punto $(0,0)$ al (i,j), es $\binom{i+j}{i} \leq 2^{i+j} < 2^{2j}$, y además $\|H_{a_j}\|_1 = 1$ para cada $j \leq m$, por lo que si $x \leq T$:

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \sum_{j\in J}\sum_{i<j} |\tau_{a_{k_1}}\tau_{a_{k_2}}\dots\tau_{a_{k_i}} H_{a_1} * H_{a_2} * \dots * H_{a_j} * a_1a_2\dots a_j u^{(j)}(x)| \\
&\leq \sum_{j\in J}\sum_{i<j} \|H_{a_1} * H_{a_2} * \dots * H_{a_j} * a_1a_2\dots a_j u^{(j)}\|_{\infty,(-\infty,x)} \\
&\leq \sum_{j\in J} 2^{2j}\|H_{a_1}\|_1\dots\|H_{a_j}\|_1 a_1\dots a_j\|u^{(j)}\|_{\infty,(-\infty,x)} = \sum_{j\in J} 2^{2j} a_1\dots a_j \|u^{(j)}\|_{\infty,(-\infty,x)},
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos conseguir. □

Teorema 4.6. *Son equivalentes:*

1. $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ *verifica* (β_1).
2. *Existe un operador lineal y continuo* $E : \Lambda_{(M_p)} \to \mathscr{E}_{(M_p)}([-1,1])$ *tal que* $R \circ E = id$.
3. $R : \mathscr{E}_{(M_p)}([-1,1]) \longrightarrow \Lambda_{(M_p)}$ *es sobreyectiva.*

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$. Lo hemos probado en 3.14.

$2 \Rightarrow 3$. Sea $x = \{x_p\}_{p=0}^{\infty} \in \Lambda_{(M_p)}$. Como $R \circ E = id$, $R(E(x)) = x$, R es sobreyectiva.

$3 \Rightarrow 1$. Como R es sobreyectiva, $\tilde{R} : \mathscr{E}_{(M_p)}([-1,1])/\ker(R) \longrightarrow \Lambda_{(M_p)}$ es lineal, continua y biyectiva, al ser R lineal y continua, luego por los teoremas 1.47 y 1.48 y el corolario 1.68 se tiene que $\tilde{R}^{-1} : \Lambda_{(M_p)} \longrightarrow \mathscr{E}_{(M_p)}([-1,1])/\ker(R)$ es continua , por lo que por la observación 1.14 y el lema 1.20, existen $H, M > 0$ tales que para cada $x \in \Lambda_{(M_p)}$, $\|\tilde{R}^{-1}(x)\|^*_{1,[-1,1]} \leq M\|x\|_{\frac{1}{H}}$, donde $\|\tilde{R}^{-1}(x)\|^*_{1,[-1,1]} := \inf_{f\in R^{-1}(x)} \|f\|_{1,[-1,1]}$.
Aplicando lo anterior para cada $p \in \mathbb{N}_0$ al caso $x = e_p$, llegamos a que $\|\tilde{R}^{-1}(x)\|^*_{1,[-1,1]} \leq M\frac{H^p}{M_p}$, por lo que por la definición 1.13, fijado $\varepsilon > 0$, existe $F_p \in R^{-1}(e_p)$ tal que $\|F_p\|_{[-1,1]} - \varepsilon\frac{H^p}{M_p} \leq \|\tilde{R}^{-1}(x)\|^*_{1,[-1,1]}$, es decir, $\|F_p\|_{[-1,1]} \leq (M+\varepsilon)\frac{H^p}{M_p} = C\frac{H^p}{M_p}$.
Sea $\tau_p := \inf\{x, 1 : 0 \leq x \leq 1, F_p^{(p)}(x) < \frac{1}{2}\} \leq 1$. Como por la definición de τ_p, $F_p^{(p)}(x) \geq \frac{1}{2}$ en $[0,\tau_p]$, se tiene que $F_{2p}^{(p)}(x) \geq \frac{1}{2}\frac{x^p}{p!}$ en $[0,\tau_{2p}]$.
Como $\tau_{2p} \leq 1$ y $F_{2p}^{(p)}(x) \leq C\frac{H^{2p}M_p}{M_{2p}}$ para cada $x \in [0,1]$, se tiene que:

$$\frac{1}{2}\frac{\tau_{2p}^p}{p!} \leq \frac{1}{2}\frac{x^p}{p!} \leq C\frac{H^{2p}M_p}{M_{2p}}. \tag{4.15}$$

Por lo tanto, de esta desigualdad se deduce que:

$$\tau_{2p}^p \leq 2C\frac{H^{2p}p!}{m_{2p}m_{2p-1}\dots m_{p+1}} \leq 2C\frac{H^{2p}p!}{m_p^p} = 2C\frac{H^{2p}}{(m_p^*)^p}, \tag{4.16}$$

es decir,
$$\tau_{2p} \leq (2C)^{\frac{1}{p}} \frac{H^2}{m_p^*}. \tag{4.17}$$

Ahora bien, si probamos que para $h > 0$ y p suficientemente grande, $\tau_p \geq \sum_{k \geq 2p} \frac{h}{m_k}$, tendríamos que $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ verifica (γ_1), y por la proposición 2.10, se tiene que la sucesión cumple (β_1), ya que:

$$\sum_{k \geq p} \frac{1}{m_k} = \sum_{k=p}^{4p-1} \frac{1}{m_k} + \sum_{k \geq 4p} \frac{1}{m_k} \leq \frac{3p}{m_p} + \frac{\tau_{2p}}{h} = \frac{3}{m_p^*} + \frac{\tau_{2p}}{h} \leq (3 + \frac{(2C)^{\frac{1}{p}} H^2}{h}) \frac{1}{m_p^*} \leq \frac{A}{m_p^*}.$$

Probemos la última afirmación.
Sea $\mathcal{P} := \{p \in \mathbb{N}_0 : \tau_p < \sum_{k \geq 2p} \frac{h}{m_k}\}$, donde $h < \text{mín}\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4H}, \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m_k}}\}$. Veamos que $\mathcal{P}$ es finito. Sea $p \in \mathcal{P}$, consideramos la sucesión $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida como $n_k := \frac{m_{2p}}{h}$ si $k \leq p$ y $n_k := \frac{m_{k+p}}{h}$ si $k > p$ y la siguiente función:

$$f_p(x) := \begin{cases} F_p^{(p)}(x) - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por el lema 4.5, se tiene que por la elección de h:

$$\begin{aligned} |f_p(\tau_p)| &\leq \sum_{k \geq p} \frac{4^k}{n_1 \dots n_k} \|f_p^{(k)}\|_{\infty,[0,\tau_p]} = \sum_{k \geq p} \frac{4^k h^k}{m_{2p}^p m_{2p+1} \dots m_{p+k}} \|f_p^{(k)}\|_{\infty,[0,\tau_p]} \\ &\leq \sum_{k \geq p} \frac{4^k h^k}{m_{2p}^p m_{2p+1} \dots m_{p+k}} C H^p \frac{M_{p+k}}{M_p} = \sum_{k \geq p} \frac{4^k h^k m_{p+1} \dots m_{p+k}}{m_{2p}^p m_{2p+1} \dots m_{p+k}} C H^p \\ &\leq \sum_{k \geq p} \frac{4^k h^k m_{p+1} \dots m_{2p}}{m_{2p}^p} C H^p = \frac{C}{1 - 4h} (4hH)^p. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Como $h < \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m_k}}$, $\tau_p < 1$, luego dado que $F_p \in \mathscr{E}_{(M_p)}([-1, 1])$, entonces $F_p^{(p)}(\tau_p) = \frac{1}{2}$, por lo que $|f_p(\tau_p)| = \frac{1}{2}$, por lo que a partir de (4.18), se tiene que $\frac{1}{2} \leq \frac{C}{1-4h} (4hH)^p$, desigualdad solo cierta para un número finito de $p \in \mathbb{N}_0$, obteniéndose que $\mathcal{P}$ es finito.

□

Bibliografía

[1] T. Carleman, *"Sur le calcul effectif d'une fonction quasi analytique dont on donne les dérivées en un point."*, C. R. Acad. Sci. Paris 176 (1923), 64–65.

[2] H. Cartan, *"Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives"*, Actual. Sci. Ind., no. 867, Hermann et Cie., Paris, 1940.

[3] A. Gorny, *"Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle"*, Acta Math. 71 (1939), 317–358.

[4] L. Hörmander, *"The analysis of linear partial differential operators. I."*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[5] J. Horváth, *"Topological vector spaces and distributions. Vol. I."*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Ontario, 1966.

[6] R. Lobón, *"Algunos problemas lineales de interpolación en clases de funciones diferenciables o analíticas"*, Trabajo de Fin de Grado, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid, https://uvadoc.uva.es/handle/10324/57980

[7] R. Meise; D. Vogt, *"Introduction to functional analysis."*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[8] H.-J. Petzsche, *"On E. Borel's theorem."*, Mathematische Annalen, v. 282, n. 2, 1988, 299-313.

[9] V. Thilliez, *"On quasianalytic local rings"*, Expo. Math. 26 (2008), no. 1, 1–23.

[10] C. Zuily, *"Problems in distributions and partial differential equations "*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Hermann, Paris, 1988.