



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Matemáticas

Dominios de Krull y aplicaciones

Autor: Miguel Valderrama de las Heras

Tutor: Ana José Reguera López

Curso 2023-2024

Índice

0. Resumen e introducción	3
0.1. Introducción	3
0.2. Resumen y abstract	4
1. Anillos de valoración	5
1.1. Definiciones y propiedades básicas	5
1.2. Rango y composición	12
1.3. Dependencia entera y propiedades de maximalidad	19
2. Anillos de Valoración Discreta	25
2.1. Propiedades y caracterizaciones	25
2.2. Ejemplos	31
3. Dominios de Krull	33
3.1. Dominios de Krull con familias de definición finitas	34
3.2. Familias de definición minimales	36
4. Espacio de Arcos	39
4.1. Esquemas afines	39
4.2. Espacio de Arcos de una Variedad	41
4.3. Normalización	45
5. Espacio de Arcos de la cúspide	49
5.1. El anillo reducido	49
5.2. Normalización	50
5.3. Arcos centrados en el origen	55
5.4. Normalización del espacio de arcos	57

0. Resumen e introducción

0.1. Introducción

El concepto de valoración, que fue introducido por primera vez en el 1882 por Dedekind y Weber y formalizado por Krull en el 1931, estuvo ligado, en un principio, a la Teoría Algebraica de Números. Sin embargo, a partir de los avances de Zariski en sus trabajos sobre Resolución de Singularidades, la teoría de valoraciones de Krull cobró gran importancia en este campo.

Las valoraciones, que introducimos y estudiamos en el primer capítulo del trabajo, asocian a los elementos de un cuerpo, valores en un grupo abeliano totalmente ordenado. Los ejemplos fundamentales de valoraciones son la valoración p -ádica en $\mathbb{Q}$ y el orden en el cuerpo de fracciones del anillo de series en una variable $\mathcal{K}[[t]]$ sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Estas dos son valoraciones discretas, es decir, con valores en $\mathbb{Z}$. Este tipo de valoraciones tienen ciertas propiedades y caracterizaciones que recopilamos en el segundo capítulo y dan lugar en el tercer capítulo a un concepto más general, el de dominio de Krull. Como vemos a lo largo de estos primeros capítulos, los anillos de valoración tienen una gran relación con el concepto de normalización de un anillo y, por tanto, de la resolución de singularidades.

El segundo ejemplo que hemos dado de valoración discreta nos acerca al concepto de arco. Un $\mathcal{K}$ -arco en una variedad es un morfismo de $\text{Spec}(\mathcal{K}[[t]])$ en esta. Para entender y estudiar su comportamiento, en los últimos dos capítulos, definimos el espacio de arcos de una variedad algebraica, cuyos puntos se corresponden con arcos en la variedad, centrándonos en el caso más sencillo: la cúspide. El espacio de arcos $\mathcal{X}_\infty$ de una variedad algebraica $\mathcal{X}$ fue introducido por J. Nash en los años 60, justo después de la prueba de la resolución de singularidades en característica 0 dada por H. Hironaka. Su objetivo era recuperar propiedades de la resolución de singularidades de una variedad algebraica $\mathcal{X}$ sobre un cuerpo de característica 0 a partir del estudio de ciertos invariantes en su espacio de arcos. El trabajo de J. Nash en este campo fue dado a conocer por H. Hironaka en los 70 y, posteriormente, por M. Lejeune-Jalabert.

El objetivo del trabajo es plantear varias preguntas aún abiertas en este contexto, para servir como introducción a la investigación en este área de la Geometría Algebraica. En el último capítulo, estudiamos e intentamos resolver estas preguntas para el caso de la cúspide, obteniendo finalmente un resultado original que relaciona la normalización de su espacio de arcos con el espacio de arcos de su normalización. Este resultado amplía, en el caso de la cúspide, un resultado obtenido recientemente por O. Piltant y A. Reguera

[RP24] para variedades cuya normalización es regular, por ejemplo, para curvas, y que caracteriza esta relación a nivel local, reduciéndose a cierto tipo de puntos de la variedad, llamados estables.

Para realizar este trabajo he tenido que ampliar mis conocimientos de Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica por medio de libros avanzados, como [Mat86], [AM69], [Har77] o [Eis95]. Para conocer y comprender mejor lo relacionado con el estudio del espacio de arcos, he consultado artículos de investigación como [dF17], [Reg06] o [Reg09].

0.2. Resumen y abstract

RESUMEN. En este trabajo, introducimos y estudiamos los conceptos de valoración, anillo de valoración discreta y dominio de Krull, íntimamente relacionados con el estudio de la normalización y resolución de singularidades de variedades algebraicas. En los dos capítulos finales, como aplicación al campo de la resolución de singularidades, se presenta el espacio de arcos de una variedad, introducido por el matemático John Nash en los años 60, estudiando particularmente el caso de la cúspide y obteniendo al final del trabajo un resultado hasta ahora desconocido, que relaciona este espacio con su normalización. Con este resultado iniciamos el camino hacia la investigación, en un campo en el que quedan muchas preguntas abiertas incluso en uno de los casos más sencillos, la cúspide.

ABSTRACT. In this project, we introduce and study the concepts of valuation, discrete valuation ring, and Krull domain, which are closely related to the study of normalization and resolution of singularities of algebraic varieties. In the last two chapters, as an application to the field of singularities resolution, we present the space of arcs of a variety, introduced by the mathematician John Nash in the 60's, particularly studying the case of the cusp and ultimately obtaining a previously unknown result, which explains the relation between this space and its normalization. With this result, we embark on the path of scientific research, in a field where many questions remain open, even in one of the simplest cases, the cusp.

1. Anillos de valoración

Vamos a empezar definiendo el concepto de anillo de valoración. Como vamos a ver, hay dos formas equivalentes de dar esta definición, ambas igualmente útiles. Daremos estas dos definiciones, veremos que son efectivamente equivalentes y utilizaremos ambas indistintamente según convenga en cada momento. Los resultados de esta primera sección pueden encontrarse en la sección 10 de [Mat86] y en el capítulo 5 de [AM69].

A lo largo del trabajo, todos los grupos o anillos se supondrán conmutativos y, estos últimos, con unidad, aunque en algunos casos se especificará para recordarlo.

1.1. Definiciones y propiedades básicas

La primera definición que vamos a ver pasa por el concepto de valoración como aplicación entre un cuerpo y un grupo totalmente ordenado.

Definición. Decimos que un grupo (conmutativo) $\mathcal{G}$ con un orden total “ $\leq$ ” definido en él es un *grupo totalmente ordenado* si este orden es compatible con la estructura de grupo de $\mathcal{G}$ en el siguiente sentido: para todos $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{G}$ con $x_1 \leq y_1$ y $x_2 \leq y_2$, se tiene $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

Dado un cuerpo $\mathcal{K}$ y un grupo totalmente ordenado $\mathcal{G}$, si $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$, decimos que una aplicación $\nu : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{G}$ es una *valoración* si, para todos $x, y \in \mathcal{K}^*$:

- i) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$.
- ii) $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$, $(x + y \neq 0)$

Si al grupo totalmente ordenado $\mathcal{G}$ le añadimos un nuevo elemento “ ∞ ” y extendemos el orden y las operaciones de $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G} \cup \{\infty\}$ considerando para todo $g \in \mathcal{G}$: $g < \infty$, $g + \infty = \infty$ y $\infty + \infty = \infty$, entonces $\mathcal{G} \cup \{\infty\}$ sigue siendo un conjunto totalmente ordenado, aunque pierda su condición de grupo. En este contexto, podemos extender una valoración $\nu : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{G}$ a $\nu : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G} \cup \{\infty\}$ considerando $\nu(0) = \infty$, y las condiciones que la caracterizan como valoración se siguen cumpliendo. Equivalentemente, podríamos haber definido desde el principio una valoración como una aplicación entre $\mathcal{K}$ y $\mathcal{G} \cup \{\infty\}$ eliminando la restricción $x + y \neq 0$ en la segunda condición y añadiendo una tercera condición:

- iii) $\nu(x) = \infty \iff x = 0$.

Observemos que $\nu(1) = \nu(1 \cdot 1) = \nu(1) + \nu(1)$, luego $\nu(1) = 0$ necesariamente. También, $0 = \nu(1) = \nu((-1) \cdot (-1)) = \nu(-1) + \nu(-1) \implies \nu(-1) = 0$. De aquí deducimos que $\nu(-x) = \nu(-1) + \nu(x) = \nu(x)$ para cualquier $x \in \mathcal{K}$. Podemos decir algo más de la condición (ii):

ii*) $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$ y se da la igualdad siempre que $\nu(x) \neq \nu(y)$.

Esto es fácil de ver ya que, dados $x, y \in \mathcal{K}^*$ con $\nu(x) < \nu(y)$, si se tuviera que $\nu(x + y) > \min\{\nu(x), \nu(y)\} = \nu(x)$, entonces $\nu(x) = \nu((x + y) - y) \geq \min\{\nu(x + y), \nu(-y)\}$, lo cual es absurdo, porque $\nu(x)$ es estrictamente menor que $\nu(x + y)$ y que $\nu(y) = \nu(-y)$.

Si $\nu : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G} \cup \{\infty\}$ es una valoración, el conjunto

$$\mathcal{R}_\nu = \{x \in \mathcal{K} : \nu(x) \geq 0\} \subseteq \mathcal{K} \quad (1)$$

es un subanillo de $\mathcal{K}$. Efectivamente, $\nu(0) = \infty > 0$ y $\nu(1) = 0$, luego $0, 1 \in \mathcal{R}_\nu$. Si $x \in \mathcal{K}^*$, entonces $\nu(-x) = \nu(x)$ y, si $x \in \mathcal{R}_\nu$, también $-x \in \mathcal{R}_\nu$. Finalmente, si $x, y \in \mathcal{R}_\nu$ (recordemos que el orden de $\mathcal{G}$ es compatible con su estructura de grupo), entonces $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\} \geq 0$ y $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y) \geq 0$. Decimos que $\mathcal{R}_\nu$ es el *anillo asociado a la valoración ν* .

Como $\nu(1) = 0$, para cualquier $x \in \mathcal{K}^*$, $0 = \nu(1) = \nu(xx^{-1}) = \nu(x) + \nu(x^{-1})$, es decir, $\nu(x^{-1}) = -\nu(x)$. Observemos que, gracias a la compatibilidad entre la suma y el orden en $\mathcal{G}$, si $g \in \mathcal{G}$, $g > 0 \implies -g < 0$. Entonces, dado $x \in \mathcal{R}_\nu$ ($\nu(x) \geq 0$), x es una unidad en $\mathcal{R}_\nu \iff \nu(x^{-1}) = -\nu(x) \geq 0 \iff \nu(x) = \nu(x^{-1}) = 0$. El conjunto $\mathfrak{m}_\nu = \{x \in \mathcal{K} : \nu(x) > 0\} \subseteq \mathcal{R}_\nu$ es un ideal de $\mathcal{R}_\nu$ ya que, si $x_1, x_2 \in \mathfrak{m}_\nu$ e $y \in \mathcal{R}_\nu$, entonces $\nu(x_1 + x_2) \geq \min\{\nu(x_1), \nu(x_2)\} > 0$ y $\nu(x_1 y) = \nu(x_1) + \nu(y) \geq \nu(x_1) > 0$. Como $\mathcal{R}_\nu \setminus \mathfrak{m}_\nu = \{x \in \mathcal{R}_\nu : \nu(x) = 0\} = \mathcal{R}_\nu^*$ (siendo $\mathcal{R}_\nu^*$ el conjunto de las unidades de $\mathcal{R}_\nu$), deducimos que $\mathcal{R}_\nu$ es un anillo local y $\mathfrak{m}_\nu$ es su ideal maximal.

Vamos a ver ahora el concepto de *anillo de valoración* y, posteriormente, veremos que un anillo es de valoración si, y solo si, es el anillo asociado a una valoración, como se definió en (1).

Definición. Dado un dominio de integridad $\mathcal{R}$, diremos que es un *anillo de valoración* si, para cada $x \in \mathcal{K}^*$, se tiene que $x \in \mathcal{R}$ o $x^{-1} \in \mathcal{R}$, siendo $\mathcal{K} = Fr(\mathcal{R})$ el cuerpo de fracciones de $\mathcal{R}$.

Observemos primero que, en un anillo de valoración, el conjunto de sus ideales está totalmente ordenado por la inclusión, es decir, dados dos ideales $I, J \subseteq \mathcal{R}$, se tiene que

$I \subseteq J$ o $J \subseteq I$. Para ver esto, supongamos que $J \not\subseteq I$ y sea $x \in J \setminus I$ ($x \neq 0$ obviamente), veamos que entonces $I \subset J$. Sea $y \in I$ no nulo, necesariamente $xy^{-1} \notin \mathcal{R}$, ya que si se tuviera lo contrario, entonces $x = (xy^{-1})y$ tendría que estar en I . Por tanto, $x^{-1}y \in \mathcal{R}$ e $y = x(x^{-1}y) \in J$.

En particular, deducimos que $\mathcal{R}$ tiene un único ideal maximal, $\mathfrak{m}$, luego es un anillo local. Además, este maximal caracteriza el anillo $\mathcal{R}$ en el siguiente sentido: dado $x \in \mathcal{K}^*$, entonces $x \in \mathcal{R} \iff x^{-1} \notin \mathfrak{m}$, ya que, si $x \notin \mathcal{R}$, entonces $x^{-1} \in \mathcal{R}$ y no es unidad ($x^{-1} \in \mathfrak{m}$) y, si $x \in \mathcal{R}$ y se tuviera $x^{-1} \in \mathcal{R}$, entonces x y x^{-1} serían unidades de $\mathcal{R}$ (luego $x, x^{-1} \notin \mathfrak{m}$). En otras palabras, $\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{K}^* : x^{-1} \notin \mathfrak{m}\} \cup \{0\}$

Proposición 1.1. Un dominio de integridad es un anillo de valoración si, y solo si, es el anillo definido por una valoración en su cuerpo de fracciones. En otras palabras:

- 1) Dada una valoración $\nu : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G} \cup \{\infty\}$, el anillo $\mathcal{R}_\nu \subseteq \mathcal{K}$ asociado a la valoración ν es un anillo de valoración.
- 2) Dado un anillo de valoración $\mathcal{R}$, existe un grupo $\mathcal{G}_\mathcal{R}$ totalmente ordenado y una valoración $\nu_\mathcal{R} : \mathcal{K}^* \longrightarrow \mathcal{G}_\mathcal{R}$, siendo $\mathcal{K} = Fr(\mathcal{R})$, de forma que $\mathcal{R}$ es el anillo asociado a la valoración $\nu_\mathcal{R}$, es decir, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\nu_\mathcal{R}}$.

Demostración. 1) Para empezar, observemos que $\mathcal{R}_\nu$ es un dominio de integridad, al ser subanillo de un cuerpo y, para todo $x \in \mathcal{K}$, o $\nu(x) \geq 0$ y $x \in \mathcal{R}_\nu$, o $\nu(x) < 0$ y $\nu(x^{-1}) = -\nu(x) > 0$, luego $x^{-1} \in \mathcal{R}_\nu$. Por tanto, $\mathcal{R}_\nu$ es un anillo de valoración al verificar la propiedad que los define.

2) Definimos $\mathcal{G}_\mathcal{R} = \{x\mathcal{R} : x \in \mathcal{K}^*\}$. En este conjunto, consideramos $x\mathcal{R} \cdot y\mathcal{R} := (xy)\mathcal{R}$. Esta operación está bien definida, ya que si $x_1, x_2 \in \mathcal{K}^*$ son tales que $x_1\mathcal{R} = x_2\mathcal{R}$, entonces $x_1 \in x_1\mathcal{R} = x_2\mathcal{R}$, luego existe $u_1 \in \mathcal{R}$ tal que $x_1 = x_2u_1$ y, análogamente, existe $u_2 \in \mathcal{R}$ tal que $x_2 = x_1u_2$. Entonces, $x_1 = x_2u_1 = x_1u_2u_1 \implies u_2u_1 = 1$, es decir, u_1 y u_2 son unidades en $\mathcal{R}$. Entonces, si $x_1\mathcal{R} = x_2\mathcal{R}$ e $y_1\mathcal{R} = y_2\mathcal{R}$ con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{K}^*$, entonces existen $u, v \in \mathcal{R}^*$ tales que $x_1 = x_2u$ e $y_1 = y_2v$, luego $(x_1y_1)\mathcal{R} = (x_2y_2uv)\mathcal{R} = (x_2y_2)\mathcal{R}$, al ser u y v unidades de $\mathcal{R}$. Esta operación dota además a $\mathcal{G}_\mathcal{R}$ de una estructura de grupo conmutativo, ya que todas las propiedades necesarias (asociatividad, existencia de neutro y opuestos y conmutatividad) las hereda de la estructura de grupo multiplicativo de $\mathcal{K}^*$ (si se quiere refinar más, $\mathcal{G}_\mathcal{R}$ es isomorfo como grupo a $\mathcal{K}^*/\mathcal{R}^*$, ya que $x_1\mathcal{R} = x_2\mathcal{R} \iff x_1$ y x_2 son asociados por unidades de $\mathcal{R}$). Sabiendo que la operación en $\mathcal{G}_\mathcal{R}$ es conmutativa, para homogeneizar la notación, vamos a escribir $x\mathcal{R} + y\mathcal{R}$ en lugar de $x\mathcal{R} \cdot y\mathcal{R}$. Observemos

que, al pasar a la notación aditiva, escribiremos $0 = 1\mathcal{R} = \mathcal{R}$ para denotar al neutro de la operación de este grupo.

Dados $x, y \in \mathcal{K}^*$, dado que $\mathcal{R}$ es un anillo de valoración, se tiene que, o bien $xy^{-1} \in \mathcal{R}$, o bien $x^{-1}y \in \mathcal{R}$. En el primer caso, dado que $x = y(xy^{-1}) \in y\mathcal{R}$, se tiene que $x\mathcal{R} \subseteq y\mathcal{R}$; en el segundo, $y\mathcal{R} \subseteq x\mathcal{R}$. Deducimos así que $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ es un grupo totalmente ordenado por la inclusión, aunque vamos a escribir $x\mathcal{R} \leq y\mathcal{R}$ cuando $x\mathcal{R} \supseteq y\mathcal{R}$, en contra de la notación habitual, para que este orden sea coherente con las propiedades que pedimos a las valoraciones. Si $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{K}^*$ y $x_i\mathcal{R} \leq y_i\mathcal{R}$, es decir, $x_i\mathcal{R} \supseteq y_i\mathcal{R}$ para $i = 1, 2$, entonces $y_i \in x_i\mathcal{R}$ y existe $z_i \in \mathcal{R}$ tal que $y_i = x_iz_i$, luego $y_1y_2 = (x_1x_2)z_1z_2 \in (x_1x_2)\mathcal{R}$ y $(x_1x_2)\mathcal{R} \supseteq (y_1y_2)\mathcal{R}$, es decir, $x_1\mathcal{R} + x_2\mathcal{R} \leq y_1\mathcal{R} + y_2\mathcal{R}$. En otras palabras, $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ es un grupo totalmente ordenado.

Vamos a definir entonces $\nu_{\mathcal{R}} : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ de la forma obvia: $\nu_{\mathcal{R}}(x) = x\mathcal{R}$ para cada $x \in \mathcal{K}^*$. Así, dados $x, y \in \mathcal{K}^*$, evidentemente $\nu_{\mathcal{R}}(xy) = (xy)\mathcal{R} = x\mathcal{R} + y\mathcal{R}$ por definición. Además, por ser $\mathcal{R}$ un anillo de valoración, como ya vimos antes, o bien $xy^{-1} = a \in \mathcal{R}$, o bien $x^{-1}y = a^{-1} \in \mathcal{R}$. En el primer caso, $x \in y\mathcal{R} \implies x\mathcal{R} \subseteq y\mathcal{R} \implies y\mathcal{R} \leq x\mathcal{R}$ y $\nu_{\mathcal{R}}(x+y) = (x+y)\mathcal{R} = (ya+y)\mathcal{R} = ((a+1)y)\mathcal{R} \subseteq y\mathcal{R}$, luego efectivamente, $(x+y)\mathcal{R} \geq \min\{x\mathcal{R}, y\mathcal{R}\} = y\mathcal{R}$. En el segundo caso, $\min\{x\mathcal{R}, y\mathcal{R}\} = x\mathcal{R}$ y se tiene la desigualdad también.

Es inmediato observar que $\{x \in \mathcal{K} : \nu_{\mathcal{R}}(x) \geq 0 (= \mathcal{R})\} = \{x \in \mathcal{K} : x\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}\} = \mathcal{R}$. $\square$

Cuando tengamos un anillo de valoración $\mathcal{R}$ y una valoración $\nu : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{G}$ definida en su cuerpo de fracciones cuyo anillo asociado es el propio $\mathcal{R}$, diremos que ν es una valoración sobre $\mathcal{R}$.

Observemos que si $\nu : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{G}$ es una valoración, su imagen es un subgrupo (totalmente ordenado) de $\mathcal{G}$, ya que $0 = \nu(1)$ y, dados $x, y \in \mathcal{K}^*$, $\nu(x) + \nu(y) = \nu(xy)$ y $-\nu(x) = \nu(x^{-1})$. Podemos entonces considerar que toda valoración es sobreyectiva, restringiendo su imagen si fuera necesario. Tras esta observación, vamos a ver que podemos hablar sin ambigüedad de *la* valoración y *el* grupo de valoración o *grupo de valores* de un anillo de valoración dado.

Vamos a decir que dos valoraciones $\nu_1 : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{G}_1$ y $\nu_2 : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{G}_2$ son equivalentes si existe un isomorfismo de grupos ordenados (respeta sus órdenes) $\phi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ que

“transforma una valoración en la otra”, es decir, que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^* & \xrightarrow{\nu_1} & \mathcal{G}_1 \\ & \searrow \nu_2 & \downarrow \phi \\ & & \mathcal{G}_2 \end{array}$$

Proposición 1.2. Sean ν, ν_1 y ν_2 valoraciones definidas en $\mathcal{K}^*$ con llegada (sobreyectiva) en los grupos $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ respectivamente. Entonces:

- i) Para $x, y \in \mathcal{K}^*$, $\nu(x) = \nu(y) \iff x = uy$ con $u \in \mathcal{R}_\nu^*$, es decir, x e y son asociados por unidades de $\mathcal{R}_\nu$.
- ii) Si $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\nu \subseteq \mathcal{K}$ es el anillo de la valoración ν y construimos, como se explica en la proposición anterior, la valoración $\nu_\mathcal{R} : \mathcal{K}^* \longrightarrow \mathcal{G}_\mathcal{R}$, entonces ν y $\nu_\mathcal{R}$ son valoraciones equivalentes.
- iii) Si $\mathcal{R}_{\nu_1} = \mathcal{R}_{\nu_2}$, las valoraciones ν_1 y ν_2 son equivalentes (es decir, todas las valoraciones definidas en $\mathcal{K}^*$ sobre un mismo anillo de valoración lo son).
- iv) Dado un anillo de valoración $\mathcal{R}$, existe una única valoración (salvo equivalentes) sobre $\mathcal{R}$, es decir, definida en su cuerpo de fracciones y para la cual $\mathcal{R}$ es el anillo de valoración asociado.

Demostración. i) $\nu(x) = \nu(y) \iff \nu(xy^{-1}) = \nu(x) - \nu(y) = 0 \iff xy^{-1} \in \mathcal{R}_\nu^*$

ii) Definimos $\phi : \mathcal{G}_\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{G}$ con $\phi(x\mathcal{R}) = \nu(x)$. Esta aplicación está bien definida ya que $x\mathcal{R} = y\mathcal{R} \iff x$ e y son asociados por unidades de $\mathcal{R} \iff \nu(x) = \nu(y)$. Es un homomorfismo de grupos ya que $\phi(0_{\mathcal{G}_\mathcal{R}}) = \phi(1\mathcal{R}) = \nu(1) = 0_\mathcal{G}$ y $\phi(x\mathcal{R} + y\mathcal{R}) = \phi(xy\mathcal{R}) = \nu(xy) = \nu(x) + \nu(y) = \phi(x\mathcal{R}) + \phi(y\mathcal{R})$. El homomorfismo es sobreyectivo ya que, por serlo ν , para cada $g \in \mathcal{G}$ existe $x \in \mathcal{K}^*$ tal que $\nu(x) = g$, luego $\phi(x\mathcal{R}) = g$. Finalmente, ϕ es inyectivo ya que $\phi(x\mathcal{R}) = 0_\mathcal{G} \iff \nu(x) = 0 \iff x \in \mathcal{R}_\nu^* \iff x\mathcal{R} = 1\mathcal{R} = 0_{\mathcal{G}_\mathcal{R}}$.

Observemos que $x\mathcal{R} > y\mathcal{R} \iff x\mathcal{R} \subset y\mathcal{R}$ (estrictamente) $\iff xy^{-1} \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}^* \iff \nu(xy^{-1}) > 0 \iff \nu(x) > \nu(y) \iff \phi(x\mathcal{R}) > \phi(y\mathcal{R})$, luego ϕ preserva el orden.

Por último, ϕ es compatible con las valoraciones por la forma en que se ha definido, ya que para cada $x \in \mathcal{K}^*$, $\nu(x) = \phi(x\mathcal{R}) = \phi(\nu_\mathcal{R}(x))$.

iii) y iv) son evidentes a partir de ii). Dadas dos valoraciones ν_1 y ν_2 definidas en $\mathcal{K}$, si sus anillos asociados $\mathcal{R}_{\nu_1}$ y $\mathcal{R}_{\nu_2}$ coinciden, ambas son equivalentes a la valoración dada por este anillo. Componiendo los isomorfismos de grupos que dan estas equivalencias, ϕ_1 y ϕ_2 , obtenemos de manera inmediata un isomorfismo $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ entre $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ que respeta los órdenes y las valoraciones. $\square$

En muchas ocasiones, vamos a definir una valoración sin explicitar la imagen de todos los elementos del cuerpo, sino solamente la de los elementos de algún subanillo suyo. Concretamente:

Lema 1.3. Dado un dominio $\mathcal{R}$ y un grupo totalmente ordenado $\mathcal{G}$, una aplicación que cumple las condiciones (i) y (ii) de valoración $\tilde{\nu} : \mathcal{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathcal{G}$ se extiende de manera única a una valoración $\nu : \mathcal{K}^* \longrightarrow \mathcal{G}$ con $\mathcal{K} = Fr(\mathcal{R})$, definiendo para cada $x, y \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, $\nu(x/y) = \tilde{\nu}(x) - \tilde{\nu}(y)$.

Demostración. Para empezar, observemos que ν está bien definida como aplicación en $\mathcal{K}^*$, es decir, dados $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ tales que $x_1/y_1 = x_2/y_2$, veamos que ν asigna un único valor a ambas fracciones y este no depende de la representación elegida. Se tiene que $x_1/y_1 = x_2/y_2 \iff x_1y_2 = x_2y_1 \implies \tilde{\nu}(x_1y_2) = \tilde{\nu}(x_2y_1) \implies \tilde{\nu}(x_1) + \tilde{\nu}(y_2) = \tilde{\nu}(x_2) + \tilde{\nu}(y_1) \implies \tilde{\nu}(x_1) - \tilde{\nu}(y_1) = \tilde{\nu}(x_2) - \tilde{\nu}(y_2)$ luego, efectivamente, la expresión que define ν no depende de la manera en que se exprese cada fracción.

Por otra parte, veamos que ν es efectivamente una valoración en $\mathcal{K}^*$. Sean nuevamente $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
i) \quad \nu \left(\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} \right) &= \nu \left(\frac{x_1x_2}{y_1y_2} \right) = \tilde{\nu}(x_1x_2) - \tilde{\nu}(y_1y_2) = \tilde{\nu}(x_1) + \tilde{\nu}(x_2) - \tilde{\nu}(y_1) - \tilde{\nu}(y_2) \\
&= \left(\tilde{\nu}(x_1) - \tilde{\nu}(y_1) \right) + \left(\tilde{\nu}(x_2) - \tilde{\nu}(y_2) \right) = \nu \left(\frac{x_1}{y_1} \right) + \nu \left(\frac{x_2}{y_2} \right) \\
ii) \quad \nu \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} \right) &= \nu \left(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{y_1y_2} \right) = \tilde{\nu}(x_1y_2 + x_2y_1) - \tilde{\nu}(y_1y_2) \\
&\geq \min\{\tilde{\nu}(x_1y_2), \tilde{\nu}(x_2y_1)\} - \tilde{\nu}(y_1y_2) \\
&= \min\{\tilde{\nu}(x_1y_2) - \tilde{\nu}(y_1) - \tilde{\nu}(y_2), \tilde{\nu}(x_2y_1) - \tilde{\nu}(y_1) - \tilde{\nu}(y_2)\} \\
&= \min\{\tilde{\nu}(x_1) - \tilde{\nu}(y_1), \tilde{\nu}(x_2) - \tilde{\nu}(y_2)\} = \min \left\{ \nu \left(\frac{x_1}{y_1} \right), \nu \left(\frac{x_2}{y_2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Por último, esta forma de extender la aplicación $\tilde{\nu}$ a una valoración en $\mathcal{K}^*$ es única ya que, si $\nu_1 : \mathcal{K}^* \longrightarrow \mathcal{G}$ fuera otra valoración que extiende a $\tilde{\nu}$, para cada $x, y \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, tiene que tenerse $\nu_1(x/y) = \nu_1(x) + \nu_1(y^{-1}) = \nu_1(x) - \nu_1(y) = \tilde{\nu}(x) - \tilde{\nu}(y) = \nu(x/y)$. $\square$

Nota 1.4. A partir de ahora, siempre que tengamos un dominio y queramos dar una valoración en su cuerpo de fracciones, nos bastará con darla en el propio dominio y asegurarnos de que se cumplen las dos condiciones necesarias. Hay que tener en cuenta que el anillo de valoración que se obtiene puede no coincidir con el dominio en el que hemos definido la valoración originalmente (ver ejemplo 2 a continuación).

Vamos a ver algunos ejemplos simples de anillos de valoración.

Ejemplos 1.5.

1) Dado un cuerpo $\mathbf{k}$, el anillo $\mathbf{k}[[t]]$ de las series formales en una variable sobre $\mathbf{k}$ es un anillo de valoración, cuya valoración viene dada por el orden de la serie: para cada $0 \neq f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbf{k}[[t]]$, tomamos $\nu(f) = \text{ord}(f) = \min\{n \geq 0 : a_n \neq 0\}$. Las unidades de este anillo son las series con término independiente no nulo luego, dada una serie no nula $f(t) \in \mathbf{k}[[t]]$, sacando factor común a la mayor potencia de t posible, tenemos una expresión de la forma: $f(t) = t^{\text{ord}(f)} u(t)$ siendo $u(t)$ una unidad. Así, dada una fracción de series $f(t)/g(t) \in \mathbf{k}((t)) = \text{Fr}(\mathbf{k}[[t]])$ con $f(t) \neq 0 \neq g(t)$, tenemos que

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{t^n u(t)}{t^m v(t)} = t^r u'(t), \text{ siendo } r = n - m = \text{ord}(f) - \text{ord}(g) \in \mathbb{Z}$$

y siendo $u, v, u' \in \mathbf{k}[[t]]$ unidades. La valoración que se tiene entonces en $\mathbf{k}((t))^*$ asocia a cada fracción no nula de series su orden, es decir, la diferencia de los órdenes de las series en su numerador y su denominador, como se explica en la nota 1.4, con la fortuna de que, en este caso, el anillo de valoración asociado es, nuevamente, el dominio del que partimos originalmente: $\mathbf{k}[[t]] = \{f \in \mathbf{k}((t)) : \nu(f) = \text{ord}(f) \geq 0\}$, poniendo $\nu(0) = \text{ord}(0) = \infty$.

2) Vamos a considerar en $\mathbb{Z}^2$ el orden lexicográfico:

$$(a, b) < (c, d) \iff \begin{cases} a < c, & \text{o} \\ a = c \text{ y } b < d \end{cases}$$

Con este orden, $(\mathbb{Z}^2, +)$ es un grupo totalmente ordenado ya que, dados (a_i, b_i) y $(c_i, d_i) \in \mathbb{Z}^2$ para $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} (a_i, b_i) < (c_i, d_i), i = 1, 2 &\iff \begin{cases} a_i < c_i, & \text{o} \\ a_i = c_i \text{ y } b_i < d_i \end{cases}, i = 1, 2 \\ \implies \begin{cases} a_1 + a_2 < c_1 + c_2, & \text{o} \\ a_1 + a_2 = c_1 + c_2 \text{ (} a_i = c_i, i = 1, 2 \text{) y } b_1 + b_2 < d_1 + d_2 \end{cases} \\ &\iff (a_1, b_1) + (a_2, b_2) < (c_1, d_1) + (c_2, d_2) \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo y consideremos $\tilde{\nu}(f) = \min_{\text{lex}}\{(a, b) : \lambda_{(a,b)} \neq 0\}$ para cada $f(X, Y) = \sum_{a,b=0}^{\infty} \lambda_{(a,b)} X^a Y^b \in \mathbf{k}[X, Y]$ no nulo. Veamos que esta aplicación $\tilde{\nu} : \mathbf{k}[X, Y] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ cumple las condiciones (i) y (ii) de valoración. Sean $f, g \in \mathbf{k}[X, Y]$ no nulos y denotemos por $\lambda_{(a,b)}^f$ y $\lambda_{(a,b)}^g$ sus respectivos coeficientes (a, b) -ésimos para cada $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ ($a, b \geq 0$).

i) Sea $h = fg \in \mathbf{k}[X, Y]$, entonces $\lambda_{(r,s)}^h = \sum_{(a,b)+(c,d)=(r,s)} \lambda_{(a,b)}^f \cdot \lambda_{(c,d)}^g$. Como para todo $(a,b) < \tilde{\nu}(f)$ y $(c,d) < \tilde{\nu}(g)$, $\lambda_{(a,b)}^f = \lambda_{(c,d)}^g = 0$, entonces también $\lambda_{(r,s)}^h = 0$ para todo $(r,s) < \tilde{\nu}(f) + \tilde{\nu}(g)$, ya que en este caso, si $(a,b) + (c,d) = (r,s) < \tilde{\nu}(f) + \tilde{\nu}(g)$, necesariamente $(a,b) < \tilde{\nu}(f)$ o $(c,d) < \tilde{\nu}(g)$. Además, si $(a,b) + (c,d) = \tilde{\nu}(f) + \tilde{\nu}(g)$, $(a,b) > \tilde{\nu}(f) \implies (c,d) < \tilde{\nu}(g)$ y viceversa, es decir, todos los sumandos que aparecen en la expresión de $\lambda_{(r,s)}^h$ con $(r,s) = \tilde{\nu}(f) + \tilde{\nu}(g)$ son nulos salvo uno: $\lambda_{\tilde{\nu}(f)}^f + \lambda_{\tilde{\nu}(g)}^g$, que es no nulo al serlo ambos factores, luego $\tilde{\nu}(h) = \tilde{\nu}(fg) = \tilde{\nu}(f) + \tilde{\nu}(g)$.

ii) Sea $p = f + g \in \mathbf{k}[X, Y]$, entonces $\lambda_{(a,b)}^p = \lambda_{(a,b)}^f + \lambda_{(a,b)}^g$. Si $(a,b) < \min\{\tilde{\nu}(f), \tilde{\nu}(g)\}$, entonces $\lambda_{(a,b)}^f = \lambda_{(a,b)}^g = 0$, luego $\lambda_{(a,b)}^p = 0$. Entonces, $\tilde{\nu}(p) = \tilde{\nu}(f + g) \geq \min\{\tilde{\nu}(f), \tilde{\nu}(g)\}$.

Esta aplicación $\tilde{\nu}$ define entonces una valoración $\nu : \mathbf{k}(X, Y)^* \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ dada por $\nu(f/g) = \tilde{\nu}(f) - \tilde{\nu}(g)$ para cada $f, g \in \mathbf{k}[X, Y] \setminus \{0\}$. En este caso, sin embargo, el anillo de valoración asociado no coincide con $\mathbf{k}[X, Y]$, ya que, por ejemplo, $1+X/2+X \notin \mathbf{k}[X, Y]$ al ser $1+X$ y $2+X$ irreducibles y coprimos en dicho anillo (que es un dominio de factorización única), pero $\nu(1+X/2+X) = 0$. Esto es lógico ya que, de hecho, $\mathbf{k}[X, Y]$ no es de valoración: $X/Y \in \mathbf{k}(X, Y)$ pero $X/Y, Y/X \notin \mathbf{k}[X, Y]$.

Volveremos a estos dos ejemplos más adelante, ya que nos van a servir como ejemplo y contraejemplo de varios casos que vamos a ir estudiando.

1.2. Rango y composición

Vamos a hablar del *rango* de una valoración y a definir la *composición* de valoraciones siguiendo, además de los capítulos de [Mat86] y [AM69] ya mencionados, la sección 1.2 de [Vaq06].

Si $\mathcal{R}$ es un anillo de valoración, es evidente que todo anillo $\mathcal{R}'$ con $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{K} = Fr(\mathcal{R})$ es a su vez un anillo de valoración, ya que si $x \in \mathcal{K}^*$ no está en $\mathcal{R}'$, tampoco está en $\mathcal{R}$, luego x^{-1} sí está en $\mathcal{R}$ y, por tanto, en $\mathcal{R}'$. Si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}'$ son los ideales maximales de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ respectivamente, entonces:

Proposición 1.6. En las condiciones anteriores, se tiene:

- i) $\mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \iff \mathcal{R}' = \mathcal{R}$.
- ii) $\mathfrak{m}'$ es un ideal primo de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}'} = \mathcal{R}'$
- iii) $\mathcal{R}/\mathfrak{m}'$ es un anillo de valoración del cuerpo $\mathcal{R}'/\mathfrak{m}'$.

- iv) Todo anillo de valoración $\bar{\mathcal{S}}$ del cuerpo $\mathcal{R}'/\mathfrak{m}'$ corresponde (vía cociente por $\mathfrak{m}'$) a un anillo de valoración $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}'$ de $\mathcal{K}$, es decir, con $Fr(\mathcal{S}) = \mathcal{K}$.

Demostración.

i) Sea $x \in \mathfrak{m}'$, es decir, $x \in \mathcal{R}'$ pero $x^{-1} \notin \mathcal{R}'$. Entonces $x^{-1} \notin \mathcal{R}$ porque $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$, luego $x \in \mathcal{R}$ y, por tanto, $x \in \mathfrak{m}$. Como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ quedan determinados en $\mathcal{K}$ por $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}'$ respectivamente, es evidente que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \iff \mathcal{R} = \mathcal{R}'$.

ii) Observemos que $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}' \cap \mathcal{R}$ y como $\mathfrak{m}'$ es maximal (luego primo) en $\mathcal{R}'$, su contracción en $\mathcal{R}$ (que coincide con $\mathfrak{m}'$) es un ideal primo de $\mathcal{R}$. Obviamente $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}'} \subseteq \mathcal{R}'$ ya que si $x \in \mathcal{R} \setminus \mathfrak{m}'$, entonces x es una unidad en $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}'}$ se obtiene ampliando $\mathcal{R}$ al añadir los inversos de los elementos de $\mathcal{R} \setminus \mathfrak{m}'$. Además, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_{\mathfrak{m}'} \subseteq \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{K}$, luego $\mathcal{R}'_{\mathfrak{m}'}$ es un anillo de valoración de $\mathcal{K}$ cuyo maximal, $\mathfrak{m}'$, coincide con el de $\mathcal{R}'$. Por el primer apartado, $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}'} = \mathcal{R}'$.

iii) Para empezar, veamos que $Fr(\mathcal{R}/\mathfrak{m}') = \mathcal{R}'/\mathfrak{m}'$. Como $\mathcal{R}'/\mathfrak{m}'$ es un cuerpo que contiene a $\mathcal{R}/\mathfrak{m}'$, la inclusión $Fr(\mathcal{R}/\mathfrak{m}') \subseteq \mathcal{R}'/\mathfrak{m}'$ es obvia. Además, dado $x + \mathfrak{m}' \in \mathcal{R}'/\mathfrak{m}'$ con $x \in \mathcal{R}'$, o bien $x \in \mathcal{R}$, luego $x + \mathfrak{m}' \in \mathcal{R}/\mathfrak{m}'$, o bien $x^{-1} \in \mathcal{R}$, luego $x^{-1} + \mathfrak{m}' = (x + \mathfrak{m}')^{-1} \in \mathcal{R}/\mathfrak{m}'$ y $x + \mathfrak{m}' \in Fr(\mathcal{R}/\mathfrak{m}')$, por lo que $\mathcal{R}'/\mathfrak{m}' \subseteq Fr(\mathcal{R}/\mathfrak{m}')$. Acabamos de ver también que dado $x + \mathfrak{m}' \in \mathcal{R}'/\mathfrak{m}'$, o bien $x + \mathfrak{m}' \in \mathcal{R}/\mathfrak{m}'$, o bien $(x + \mathfrak{m}')^{-1} \in \mathcal{R}/\mathfrak{m}'$, luego $\mathcal{R}/\mathfrak{m}'$ es efectivamente un anillo de valoración.

- iv) Sea $\bar{\mathcal{S}}$ un anillo de valoración del cuerpo $\mathcal{R}'/\mathfrak{m}'$ y sea $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R}' : x + \mathfrak{m}' \in \bar{\mathcal{S}}\}$ su contraimagen por el paso al cociente, que es siempre un subanillo de $\mathcal{R}'$ que contiene a $\mathfrak{m}'$. Nuevamente, como $\mathcal{K}$ es un cuerpo que contiene a $\mathcal{S}$, también contiene a su cuerpo de fracciones. Además, dado $x \in \mathcal{K}$, si $x \notin \mathcal{S}$, hay dos posibilidades: $x \in \mathcal{R}' \setminus \mathcal{S}$, o $x \notin \mathcal{R}'$. En el primer caso, como $\mathfrak{m}' \subseteq \mathcal{S}$, x es una unidad de $\mathcal{R}'$. Se tiene $x + \mathfrak{m}' \in \mathcal{R}'/\mathfrak{m}'$ y $x + \mathfrak{m}' \notin \bar{\mathcal{S}}$ y, como $\bar{\mathcal{S}}$ es de valoración, $(x + \mathfrak{m}')^{-1} = x^{-1} + \mathfrak{m}' \in \bar{\mathcal{S}}$ y $x^{-1} \in \mathcal{S}$. En el segundo caso, como $x \notin \mathcal{R}$, $x^{-1} \in \mathfrak{m}' \subseteq \mathcal{S}$. Hemos probado que $\mathcal{K} \subseteq Fr(\mathcal{S})$ (luego $\mathcal{K} = Fr(\mathcal{S})$) y que $\mathcal{S}$ es un anillo de valoración de $\mathcal{K}$. $\square$

Definición. Dada una valoración $\nu : \mathcal{K}^* \longrightarrow \mathcal{G}$, sea $\mathcal{R}$ su anillo de valoración asociado y sea $\mathfrak{m}$ su ideal maximal. Sea $\bar{\nu} : (\mathcal{R}/\mathfrak{m})^* \longrightarrow \bar{\mathcal{G}}$ una valoración de anillo asociado $\bar{\mathcal{S}}$. La valoración ν_0 en $\mathcal{K}$ cuyo anillo asociado es $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} : x + \mathfrak{m} \in \bar{\mathcal{S}}\} \subseteq \mathcal{R}$ se llama la valoración *compuesta* de ν y $\bar{\nu}$ y se denota por $\nu_0 = \nu \circ \bar{\nu}$. Obviamente, como $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{K} : \nu_0(x) \geq 0\} \subseteq \mathcal{R} = \{x \in \mathcal{K} : \nu(x) \geq 0\}$, ν_0 es negativa siempre que ν lo es.

En estos términos, lo que afirman los apartados iii) y iv) de la última proposición es, exactamente, que dado un anillo de valoración $\mathcal{R}$ de maximal $\mathfrak{m}$ y cuerpo de fracciones $\mathcal{K}$, la composición de valoraciones con $\nu_{\mathcal{R}}$ da una correspondencia biyectiva entre los anillos de valoración de $\mathcal{R}/\mathfrak{m}$ y los anillos de valoración de $\mathcal{K}$ contenidos en $\mathcal{R}$.

Vamos a ver ahora el concepto de *rango de una valoración*, su relación con la dimensión (de Krull) de su anillo asociado y su comportamiento en relación a la composición de valoraciones ([Vaq06], sección 1.2).

Nota: la dimensión (de Krull) de un anillo se define como el supremo de las longitudes de las cadenas de sus ideales primos, es decir, dado un anillo $\mathcal{R}$, su dimensión de Krull es $\dim(\mathcal{R}) = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \exists \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \subset \mathcal{R} \text{ ideales primos con } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n\}$.

Definición. Dado un grupo totalmente ordenado $\mathcal{G}$, un subconjunto no vacío $\Delta \subseteq \mathcal{G}$ es un segmento si para todo $a \in \Delta$ se tiene que $b \in \Delta$ para todo $b \in \mathcal{G}$ entre $-a$ y a , es decir, para todo $b \in \mathcal{G}$ con $-a \leq b \leq a$ (si $a \geq 0$) o $a \leq b \leq -a$ (si $a \leq 0$). Decimos que un subgrupo $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ es un subgrupo aislado si es un segmento de $\mathcal{G}$.

Dado un grupo totalmente ordenado $\mathcal{G}$ y dados $a, b \in \mathcal{G}$, entonces o bien a está entre $-b$ y b (si $|a| \leq |b|$), o bien b está entre $-a$ y a (si $|a| \geq |b|$, siendo $|a| = \max\{-a, a\} \geq 0$). Por tanto, el conjunto de los subgrupos aislados de $\mathcal{G}$ está totalmente ordenado, es decir, dados dos subgrupos aislados $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{G}$, o bien $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$, o bien existe $a \in \mathcal{H}_1$ con $a \notin \mathcal{H}_2$, pero entonces $|a| \geq |b|$ para todo $b \in \mathcal{H}_2$, luego $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$.

Podemos definir así el rango de un subgrupo totalmente ordenado $\mathcal{G}$ como la mayor longitud de sus cadenas de subgrupos aislados, es decir, como el máximo entero $r \geq 0$ tal que existe una cadena $\{0\} = \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{H}_r = \mathcal{G}$ de subgrupos aislados de $\mathcal{G}$, que coincide con la longitud de la cadena de todos los subgrupos aislados de $\mathcal{G}$. Si tal máximo no existe, es decir, si la máxima longitud de las cadenas de subgrupos aislados de $\mathcal{G}$ no está acotada o, equivalentemente, si la cantidad de subgrupos aislados de $\mathcal{G}$ no es finita, decimos que $\mathcal{G}$ es de rango infinito. Lo denotamos por $\text{rank}(\mathcal{G}) = r$ si $\mathcal{G}$ es de rango r finito, o $\text{rank}(\mathcal{G}) = \infty$ si $\mathcal{G}$ es de rango infinito.

Definimos el rango de una valoración $\nu : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{G}$ entre un cuerpo $\mathcal{K}$ y un grupo totalmente ordenado $\mathcal{G}$ como el rango de $\mathcal{G}$ (o el rango de $\nu(\mathcal{K}^*)$ si ν no fuese sobreyectiva) y lo denotamos por $\text{rank}(\nu) = \text{rank}(\mathcal{G})$. Es evidente que la única valoración de rango nulo en cualquier cuerpo es la valoración nula, ya que el único grupo totalmente ordenado de rango nulo es $\mathcal{G} = \{0\}$.

Vamos a ver en el corolario 1.9 , tras una serie de resultados previos, que el rango de una valoración y la dimensión de su anillo asociado coinciden.

Proposición 1.7. El núcleo de un morfismo de grupos totalmente ordenados (un morfismo de grupos que respeta el orden) es un subgrupo aislado del grupo donde está definido. Recíprocamente, dado un subgrupo aislado $\mathcal{H}$ de un grupo totalmente ordenado $\mathcal{G}$, el grupo cociente $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ es totalmente ordenado de manera natural y la aplicación de paso al cociente es un morfismo de grupos totalmente ordenados.

Demostración. Sabemos que el núcleo de un morfismo de grupos es siempre un subgrupo del grupo en el que está definido, así que solo falta ver que, para morfismos de grupos totalmente ordenados, el núcleo es además un segmento. Sea $\phi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ un morfismo de grupos totalmente ordenados y sea $\mathcal{H} = \ker(\phi) \subseteq \mathcal{G}_1$. Sea $a \in \mathcal{H}$, es decir, con $\phi(a) = 0$ y sea $b \in \mathcal{G}_1$ entre $-a$ y a . Entonces, como ϕ preserva el orden, $\phi(b)$ está entre $\phi(-a)$ y $\phi(a)$ para el orden en $\mathcal{G}_2$, pero $\phi(-a) = -\phi(a) = \phi(a) = 0$, luego $\phi(b) = 0$ y, por tanto, $b \in \mathcal{H}$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{H}$ un subgrupo aislado de un grupo totalmente ordenado $\mathcal{G}$. Veamos, para empezar, que la relación que induce el orden de $\mathcal{G}$ entre las clases del grupo cociente $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ es una relación de orden total. La relación que consideramos en $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ viene dada por $\bar{a} < \bar{b} \iff a < b$ y $\bar{a} \neq \bar{b}$, para cada $a, b \in \mathcal{G}$, donde $\bar{a}$ y $\bar{b}$ representan sus clases módulo $\mathcal{H}$. Basta observar que esta definición es independiente de los representantes de las clases, ya que las propiedades reflexiva, transitiva y antisimétrica (total) se heredan de la estructura de grupo totalmente ordenado de $\mathcal{G}$. Sean $a, a', b, b' \in \mathcal{G}$ con $a - a' \in \mathcal{H}$ y $b - b' \in \mathcal{H}$ y supongamos que $a < b$. Puede ser que $a - b \in \mathcal{H}$, luego $a' - b' = (a - b) - (a - a') + (b - b') \in \mathcal{H}$ y $\bar{a} = \bar{b}$ independientemente del representante de la clase. Por otro lado, puede ser $a - b \notin \mathcal{H}$, es decir, $\bar{a} \neq \bar{b}$. En este caso, $a' - b' = (a - b) - (a - a') + (b - b') < -(a - a') + (b - b') \in \mathcal{H}$, pero $a' - b' \notin \mathcal{H}$ porque $a - b \notin \mathcal{H}$, luego tiene que ser $a' - b' < 0$ ya que, en caso contrario, se tendría

$$\begin{aligned} (a - a') - (b - b') &= (a - b) - (a' - b') \leq a - b < 0 \\ &\leq a' - b' < (a' - b') - (a - b) = -((a - a') - (b - b')) \end{aligned}$$

con $(a - a') - (b - b') \in \mathcal{H}$, pero $\mathcal{H}$ es un segmento. Entonces, si $\bar{a} \neq \bar{b}$ y $a < b$, tiene que ser $a' < b'$ y la definición del orden de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ no depende de representantes.

Por la manera en que se define el orden en $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, es evidente que $a \leq b \implies \bar{a} \leq \bar{b}$ luego, efectivamente, el morfismo de paso al cociente, que es un morfismo de grupos en cualquier caso, preserva además el orden, luego es un morfismo de grupos totalmente ordenados. $\square$

Corolario 1.8. Dado un subgrupo aislado $\mathcal{H}$ de un grupo totalmente ordenado $\mathcal{G}$, por ser el paso al cociente un homomorfismo de grupos, induce una correspondencia biyectiva entre los subgrupos de $\mathcal{G}$ que contienen a $\mathcal{H}$ y los subgrupos de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. Como este morfismo respeta el orden, envía segmentos en segmentos. Por tanto, se tiene una correspondencia biyectiva entre los subgrupos aislados de $\mathcal{G}$ que contienen a $\mathcal{H}$ y los subgrupos aislados de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. En particular, dado que el conjunto de subgrupos aislados de $\mathcal{G}$ está totalmente ordenado, se tiene que:

$$\text{rank}(\mathcal{G}) = \text{rank}(\mathcal{H}) + \text{rank}(\mathcal{G}/\mathcal{H}).$$

Proposición 1.9. Sea $\nu : \mathcal{K}^* \longrightarrow \mathcal{G}$ una valoración (sobreyectiva) en un cuerpo $\mathcal{K}$, siendo $\mathcal{G}$ un grupo totalmente ordenado, y sea $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\nu \subseteq \mathcal{K}$ su anillo de valoración asociado. Para cada ideal propio $I \subseteq \mathcal{R}$, denotamos por Δ_I al complementario de $((\nu(I)) \cup (-\nu(I)))$ en $\mathcal{G} \cup \infty$. Entonces $\Delta_I \subseteq \mathcal{G}$ es un segmento y se tiene una correspondencia biyectiva entre los ideales propios de $\mathcal{R}$ y los segmentos de $\mathcal{G}$, que invierte las inclusiones. Los ideales primos se corresponden con subgrupos aislados y viceversa.

Demostración. Sea $I \subseteq \mathcal{R}$ un ideal propio, entonces no contiene unidades, es decir, elementos de $\mathcal{R}$ de valor nulo, luego $0 \in \Delta_I$ y Δ_I es no vacío. Sea $a \in \Delta_I$ y sea $b \in \mathcal{G}$ entre $-a$ y a . Supongamos, salvo intercambiar a o b por $-a$ o $-b$ respectivamente, que $a \geq b \geq 0$. Si se tuviera $b \notin \Delta_I$, tendría que existir $x \in I$ con $\nu(x) = b$. Sea $y \in \mathcal{R}$ con $\nu(y) = a$. Entonces, $\nu(y/x) = \nu(y) - \nu(x) = a - b \geq 0$, es decir, $(y/x) \in \mathcal{R}$ e $y = x \cdot (y/x) \in I$, lo cual es absurdo, porque $a \in \Delta_I$.

Para la correspondencia en sentido contrario, para cada segmento $\Delta \subseteq \mathcal{G}$, consideramos $I_\Delta = \{x \in \mathcal{R} : \nu(x) \notin \Delta\}$. Por definición, tenemos que $0 \in I_\Delta$ para cada segmento $\Delta \subseteq \mathcal{G}$. Además, dados $x, y \in I_\Delta \setminus \{0\}$ y dado $z \in \mathcal{R}$, si $a = \nu(x)$ y $b = \nu(y)$, entonces $a, b \geq 0$ con $a, b \notin \Delta$, luego $c = \nu(x + y) \geq \max\{a, b\} \geq 0$ y c no puede estar en Δ porque lo estarían a y b por ser $-c \leq 0 \leq a, b \leq c$. Tampoco $d = \nu(xz) = a + \nu(z) \geq a$ puede estar en Δ por el mismo motivo, así que se tiene que $x + y, xz \in I_\Delta$, es decir, I_Δ es efectivamente un ideal. Como Δ es no vacío, existen elementos en $\mathcal{R}$ cuyo valor está en Δ , es decir, I_Δ es un ideal propio de $\mathcal{R}$.

Dado un ideal propio $I \subseteq \mathcal{R}$, se tiene que:

$$I_{\Delta_I} = \{x \in \mathcal{R} : \nu(x) \notin \Delta_I\} = \{x \in \mathcal{R} : \nu(x) \in \nu(I)\} \supseteq I$$

y la inclusión contraria se da porque si $\nu(x) \in \nu(I)$, existe $y \in I$ con $\nu(x) = \nu(y)$, luego $\nu(x/y) = 0$, por lo que $(x/y) \in \mathcal{R}^*$ y $x = y \cdot (x/y) \in I$, es decir, $I_{\Delta_I} = I$. Por otro lado, si $\Delta \subseteq \mathcal{G}$ es un segmento, entonces:

$$\begin{aligned} \Delta_{I_\Delta} &= \{a \in \mathcal{G} : a \notin (\nu(I_\Delta)) \cup (-\nu(I_\Delta))\} = \{a \in \mathcal{G} : a \neq \nu(x), -\nu(x) \forall x \in I_\Delta\} \\ &= \{a \in \mathcal{G} : a \neq \nu(x), -\nu(x) \forall x \in \mathcal{R} \text{ con } \nu(x) \notin \Delta\} \supseteq \Delta. \end{aligned}$$

y la inclusión contraria también es cierta porque, si $a \in \mathcal{G}$ pero $a \notin \Delta$, tomamos $x \in \mathcal{R}$ con $\nu(x) = a$ si $a \geq 0$, o $-\nu(x) = a$ si $a < 0$ y, como $\nu(x) \notin \Delta$, entonces $x \in I_\Delta$, luego $a \notin \Delta_{I_\Delta}$ y $\Delta_{I_\Delta} \subseteq \Delta$, es decir, $\Delta_{I_\Delta} = \Delta$. Así definimos efectivamente, una correspondencia biyectiva entre los segmentos de $\mathcal{G}$ y los ideales propios de $\mathcal{R}$.

El hecho de que esta correspondencia invierte las inclusiones es inmediato si observamos que $I \subseteq J \implies \nu(I) \subseteq \nu(J) \implies \Delta_I \supseteq \Delta_J$ para cada par de ideales $I, J \in \mathcal{R}$ y, por otro lado, para cada par de segmentos $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \mathcal{R}$, para cada $x \in \mathcal{R}$, $\nu(x) \notin \Delta_2 \implies \nu(x) \notin \Delta_1$, luego $I_{\Delta_1} \supseteq I_{\Delta_2}$.

Supongamos ahora que Δ es un subgrupo aislado de $\mathcal{G}$ y sean $x, y \in \mathcal{R}$ con $x, y \notin I_\Delta$, es decir, $\nu(x), \nu(y) \in \Delta$. Entonces, por ser Δ un subgrupo, $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y) \in \Delta$, luego $xy \notin I_\Delta$ e I_Δ es un ideal primo. Recíprocamente, si I es un ideal primo, entonces $0 \in \Delta_I$ y, si $a \in \Delta_I$, también $-a \in \Delta_I$ por ser Δ_I un segmento (no es necesario que I sea primo). Falta ver que $a + b \in \Delta_I$ para $a, b \in \Delta_I$. Supongamos que $a, b \geq 0$. Entonces $x \notin I$ para ningún $x \in \mathcal{R}$ con $\nu(x) = a + b$ ya que, tomando $y \in \mathcal{R}$ con $\nu(y) = a$ ($y \neq 0$ porque $a \neq \infty$), se tiene que $x = y \cdot (x/y) = yz$ con $\nu(z) = b$ y, como $a, b \in \Delta_I$, $y, z \notin I$, que es un ideal primo, luego $a + b \in \Delta_I$. Si $a, b \leq 0$, deducimos el resultado tomando opuestos y repitiendo el razonamiento. Si $a \geq 0$ pero $b \leq 0$ (en el caso opuesto, se razona igual), tomamos $c = a + b$. Si $c \geq 0$, entonces $-a \leq 0 \leq c = a + b \leq a$ y, si $c \leq 0$, tenemos $b \leq c = a + b \leq 0 \leq -b$, luego $c \in \Delta_I$ en ambos casos, por ser Δ_I un segmento. Concluimos que Δ_I es un subgrupo aislado de $\mathcal{G}$ cuando I es un ideal primo de $\mathcal{R}$. $\square$

De esta última proposición, deducimos como corolario inmediato que:

Corolario 1.10. El rango de una valoración $\nu : \mathcal{K}^* \longrightarrow \mathcal{G}$ coincide con la dimensión de su anillo asociado, es decir, $\text{rank}(\nu) = \dim(\mathcal{R}_\nu)$.

Vamos a ver cómo relacionar el rango de una composición de valoraciones con el rango de dichas valoraciones. Gracias a este último corolario, esto nos va a permitir relacionar la dimensión de sus anillos de valoración asociados.

Proposición 1.11. Dada una valoración $\nu : \mathcal{K}^* \longrightarrow \mathcal{G}$ de anillo asociado $\mathcal{R}$ con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y una valoración $\bar{\nu} : (\mathcal{R}/\mathfrak{m})^* \longrightarrow \bar{\mathcal{G}}$ de anillo asociado $\bar{\mathcal{S}}$, si $\nu_0 : \mathcal{K}^* \longrightarrow \mathcal{G}_0$ es la valoración compuesta de ν y $\bar{\nu}$ con anillo asociado $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} : x + \mathfrak{m} \in \bar{\mathcal{S}}\}$, entonces:

$$\text{rank}(\nu_0) = \text{rank}(\nu) + \text{rank}(\bar{\nu}).$$

Equivalentemente,

$$\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{R}) + \dim(\bar{\mathcal{S}}).$$

Demostración. Observemos que, como ya se mencionó en la proposición 1.1, $\mathcal{G} \cong \mathcal{K}^*/\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{G}_0 \cong \mathcal{K}^*/\mathcal{S}^*$ como grupos. Como $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{S}^*$ es un subgrupo (multiplicativo) de $\mathcal{R}^*$ y tenemos un morfismo de paso al cociente:

$$\lambda : \mathcal{G}_0 \cong \mathcal{K}^*/\mathcal{S}^* \longrightarrow (\mathcal{K}^*/\mathcal{S}^*)/(\mathcal{R}^*/\mathcal{S}^*) \cong \mathcal{K}^*/\mathcal{R}^* \cong \mathcal{G}.$$

Por otro lado, tenemos un morfismo de grupos $\varphi : \mathcal{R}^* \longrightarrow \bar{\mathcal{G}}$ dado por:

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ \mathcal{R}^* & \longrightarrow & (\mathcal{R}/\mathfrak{m})^* & \longrightarrow & (\mathcal{R}/\mathfrak{m})^*/(\mathcal{S}/\mathfrak{m})^* \cong \bar{\mathcal{G}} \end{array}$$

El primer paso al cociente, viene dado por el paso al cociente por $\mathfrak{m}$ en $\mathcal{R}$. Como al restringir este cociente a $\mathcal{R}^*$ obtenemos unidades en $\mathcal{R}/\mathfrak{m}$, podemos considerar dicho paso al cociente restringiendo los espacios de partida y llegada, obteniendo un morfismo de grupos. Este es además sobreyectivo, ya que $(\mathcal{R}/\mathfrak{m})^* = \mathcal{R}/\mathfrak{m} \setminus \{0 + \mathfrak{m}\}$ por ser $\mathcal{R}/\mathfrak{m}$ un cuerpo, es decir, $(\mathcal{R}/\mathfrak{m})^*$ es exactamente el conjunto de las clases de equivalencia módulo $\mathfrak{m}$ de los elementos de $\mathcal{R} \setminus \mathfrak{m} = \mathcal{R}^*$. El segundo paso al cociente tiene sentido si observamos que $\mathfrak{m}$ es un ideal de $\mathcal{S}$ al ser $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de $\mathcal{R}$ y tenerse $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$, como se observa en el segundo apartado de la proposición 1.6, luego $(\mathcal{S}/\mathfrak{m})^*$ es un subgrupo de $(\mathcal{R}/\mathfrak{m})^*$. Veamos que el núcleo de este morfismo, $\ker(\varphi) = \{x \in \mathcal{R}^* : x + \mathfrak{m} \in (\mathcal{S}/\mathfrak{m})^*\}$, es exactamente $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{R}^*$. Para empezar, si $x \in \mathcal{S}^*$, entonces $x^{-1} \in \mathcal{S}^*$, luego tenemos $(x + \mathfrak{m})(x^{-1} + \mathfrak{m}) = xx^{-1} + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m}$, es decir, $x + \mathfrak{m}$ es una unidad en $\mathcal{S}/\mathfrak{m}$ y se tiene que $\mathcal{S}^* \subseteq \ker(\varphi)$. Por otro lado, si tenemos $x \in \mathcal{R}^*$ tal que $x + \mathfrak{m} \in (\mathcal{S}/\mathfrak{m})^*$, entonces $x \in \mathcal{S}$ y existe $y \in \mathcal{S}$ tal que $xy + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m}$, es decir, tal que $xy - 1 \in \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_0$, siendo $\mathfrak{m}_0$ el ideal maximal de $\mathcal{S}$ (proposición 1.6, apartado i). Por tanto, tiene que ser $xy \notin \mathfrak{m}_0$ (porque $1 \notin \mathfrak{m}_0$), es decir, x e y son unidades en $\mathcal{S}$ y tenemos $\ker(\varphi) \subseteq \mathcal{S}^*$, luego $\ker(\varphi) = \mathcal{S}^*$.

Como φ es sobreyectivo, tenemos que $\mathcal{R}^*/\mathcal{S}^* \cong \overline{\mathcal{G}}$ y, volviendo al paso al cociente dado por λ , tenemos:

$$\mathcal{G} \cong (\mathcal{K}^*/\mathcal{S}^*)/(\mathcal{R}^*/\mathcal{S}^*) \cong \mathcal{K}^*/\mathcal{R}^* \cong \mathcal{G}_0/\overline{\mathcal{G}}.$$

Concluimos que $\text{rank}(\mathcal{G}_0) = \text{rank}(\mathcal{G}) + \text{rank}(\overline{\mathcal{G}})$, de donde deducimos la igualdad buscada entre las respectivas valoraciones. $\square$

1.3. Dependencia entera y propiedades de maximalidad

Vamos a ver en esta subsección algunas maneras de caracterizar los anillos de valoración como anillos maximales para cierta propiedad, así como su relación con el concepto de dependencia entera y clausura integral o normalización de un anillo. Primero hablaremos de su maximalidad para la propiedad de *dominación*. Dados dos anillos locales $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ de maximales $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}'$ respectivamente, decimos que $\mathcal{R}'$ *domina* a $\mathcal{R}$ y lo denotamos por $\mathcal{R}' \succeq \mathcal{R}$ si $\mathcal{R}' \supseteq \mathcal{R}$ y $\mathfrak{m}' \cap \mathcal{R} = \mathfrak{m}$.

Teorema 1.12. ([Mat86], teorema 10.2)

Dado un cuerpo $\mathcal{K}$, un subanillo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$ y un ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{A}$, existe un anillo de valoración $\mathcal{R}$ de $\mathcal{K}$ con maximal $\mathfrak{m}$ tal que $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{A}$ y $\mathfrak{m} \cap \mathcal{A} = \mathfrak{p}$.

Demostración. Para empezar, consideremos la localización $A_{\mathfrak{p}}$. Este es un anillo local que contiene a A y cuyo ideal maximal es $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, cuya intersección con A vuelve a ser $\mathfrak{p}$. Razonando con $A_{\mathfrak{p}}$ en lugar de A , podemos asumir que A es un anillo local y $\mathfrak{p}$ su maximal.

Consideremos entonces $\mathcal{F}$ el conjunto de los anillos $B \subseteq \mathcal{K}$ que contienen a A tales que $1 \notin \mathfrak{p}B$. Este conjunto es no vacío, ya que $A \in \mathcal{F}$. Dada una cadena $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ de anillos de $\mathcal{F}$, es evidente que su unión $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es un nuevo anillo. Además, $1 \notin \mathfrak{p}B$, ya que se tendría $1 = b_1p_1 + \dots + b_rp_r$ para ciertos $b_1, \dots, b_r \in B$ y $p_1, \dots, p_r \in \mathfrak{p}$, considerando n suficientemente grande para tenerse $b_1, \dots, b_r \in B_n$, esta misma igualdad implicaría $1 \in \mathfrak{p}B_n$, pero $B_n \in \mathcal{F}$. Entonces, $B \in \mathcal{F}$ y estamos en condiciones de aplicar el Lema de Zorn. Existe entonces un anillo $\mathcal{R} \in \mathcal{F}$ maximal para las inclusiones. Como $1 \notin \mathfrak{p}\mathcal{R}$, es decir, $\mathfrak{p}\mathcal{R}$ es un ideal propio de $\mathcal{R}$, existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{R}$ que contiene a $\mathfrak{p}\mathcal{R}$. Entonces, se tiene $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{F}$ y, por maximalidad de $\mathcal{R}$, tiene que ser $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathfrak{m}}$, es decir, $\mathcal{R}$ es un anillo local y $\mathfrak{m}$ es su maximal. Como $\mathfrak{m}$ contiene a $\mathfrak{p}\mathcal{R}$, $\mathfrak{m} \cap A$, que es un ideal primo de A por ser $\mathfrak{m}$ primo en $\mathcal{R}$, contiene a $\mathfrak{p}$, que es maximal, es decir, $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{p}$. Falta ver que $\mathcal{R}$ es un anillo de valoración.

Sea $x \in \mathcal{K}$ con $x \notin \mathcal{R}$, veamos que $x^{-1} \in \mathcal{R}$. Supongamos que $x^{-1} \notin \mathcal{R}$. Como $x \notin \mathcal{R}$, se tiene $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{R}[x] \subseteq \mathcal{K}$ y, por maximalidad de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{F}$, $1 \in \mathfrak{p}\mathcal{R}[x]$, es decir, existe una

relación de la forma: $1 = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1x + \cdots + \tilde{a}_nx^n$ con $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_n \in \mathfrak{p}\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{m}$. Como $\mathcal{R}$ es local y $\tilde{a}_0 \in \mathfrak{m}$, entonces $1 - \tilde{a}_0 \notin \mathfrak{m}$, es decir, $1 - \tilde{a}_0$ es una unidad en $\mathcal{R}$. Pasando $\tilde{a}_0$ restando al otro lado de la igualdad y multiplicando por el inverso en $\mathcal{R}$ de $1 - \tilde{a}_0$, obtenemos una expresión de la forma: $1 = a_1x + \cdots + a_nx^n$, con $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{m}$. Consideremos entonces una expresión de esta forma con el menor valor de n posible. Repitiendo este razonamiento con $\mathcal{R}[x^{-1}]$, consideremos una expresión $1 = b_1x^{-1} + \cdots + b_mx^{-m}$ con $b_1, \dots, b_m \in \mathfrak{m}$ y m del menor valor posible. Supongamos que $n \geq m$. Restando a la primera identidad, la segunda multiplicada por a_nx^n tenemos:

$$1 = (a_1x + \cdots + a_nx^n) - a_nx^n(1 - b_1x^{-1} - \cdots - b_mx^{-m}) = c_1x + \cdots c_{n-1}x^{n-1},$$

con $c_i = a_i - a_nb_{n-i} \in \mathfrak{m}$ para cada $i = 1, \dots, n-1$ (entendiéndose $b_i = 0$ si $i \leq 0$). Esto va en contra de la minimalidad de n . Si se tuviera $n < m$, restaríamos a la segunda identidad, la primera multiplicada por b_mx^{-m} y llegaríamos a una contradicción similar con la minimalidad de m . En cualquier caso, llegamos a un absurdo, luego $x^{-1} \in \mathcal{R}$. $\square$

Como consecuencia, dado un cuerpo $\mathcal{K}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$ un subanillo y $\mathfrak{p} \subset \mathcal{A}$ un ideal primo, si consideramos $\mathcal{F} = \{\mathcal{R} \subseteq \mathcal{K} \text{ anillo local de maximal } \mathfrak{m} \text{ tal que } \mathcal{R} \supseteq \mathcal{A} \text{ y } \mathfrak{m} \cap \mathcal{A} = \mathfrak{p}\}$, este subconjunto es no vacío y sus elementos maximales para la relación de dominación son anillos de valoración, ya que cualquier anillo de $\mathcal{F}$ está contenido en un anillo de valoración, también en $\mathcal{F}$, que lo domina.

Observemos que, en $\mathcal{F}$, no puede haber un anillo de valoración dominando estrictamente a otro. Esto se debe a que, como se demostró en la proposición 1.6, si un anillo de valoración de $\mathcal{F}$ contiene a otro estrictamente, entonces se tiene una contención estricta contraria entre sus respectivos ideales maximales. Podemos entonces afirmar que no solo hay elementos maximales en $\mathcal{F}$ y son anillos de valoración, los elementos maximales de $\mathcal{F}$ son exactamente los anillos de valoración de este conjunto:

Corolario 1.13. Dado un subanillo A de un cuerpo $\mathcal{K}$ y $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo, los anillos locales de $\mathcal{K}$ que son maximales para la dominación de $A_{\mathfrak{p}}$ son exactamente los anillos de valoración $\mathcal{R}$ de $\mathcal{K}$ de maximal $\mathfrak{m}$, que contienen a A , con $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{p}$.

La segunda propiedad de maximalidad de los anillos de valoración tiene que ver con la dependencia entera y los anillos íntegramente cerrados. Empecemos viendo de manera sencilla que todo anillo de valoración es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones.

Proposición 1.14. Todo anillo de valoración $\mathcal{R}$ es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones $\mathcal{K}$.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{K}$ íntegro sobre $\mathcal{R}$, es decir, tal que existe una identidad de la forma: $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ con $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{R}$. Supongamos que $x \notin \mathcal{R}$. Entonces, $x^{-1} \in \mathcal{R}$. Multiplicando la identidad anterior por $x^{-(n-1)} \in \mathcal{R}$, tenemos que $x = -(a_{n-1} + \cdots + a_1x^{-(n-2)} + a_0x^{-(n-1)}) \in \mathcal{R}$, llegando a una contradicción. $\square$

Teorema 1.15. ([Mat86], teorema 10.4)

Dado un dominio A en un cuerpo $\mathcal{K}$, su normalización o cierre entero $\bar{A}$ en $\mathcal{K}$ es la intersección de todos los anillos de valoración de $\mathcal{K}$ que lo contienen.

Demostración. Para empezar, como vimos en la última proposición, cada uno de los anillos de valoración de $\mathcal{K}$ que contienen a A son íntegramente cerrados, luego contienen a $\bar{A}$. Solo hace falta entonces ver la otra inclusión, es decir, la intersección de dichos anillos de valoración está contenida en $\bar{A}$. Para ello, tomaremos $x \in \mathcal{K}$ no íntegro sobre A y veremos que podemos encontrar un anillo de valoración $\mathcal{R}$ de $\mathcal{K}$, con $A \subseteq \mathcal{R}$, que no contiene a x .

Consideremos el anillo $A[x^{-1}]$. El ideal generado por x^{-1} en este anillo es propio, ya que si se tuviera $1 = a_1x^{-1} + \cdots + a_nx^{-n}$ con $a_1, \dots, a_n \in A$, multiplicando por x^n esta expresión, obtendríamos otra que contradice la no integridad de x sobre A . Entonces, este ideal está contenido en algún ideal maximal $\mathfrak{p}$ de $A[x^{-1}]$. Gracias al teorema 1.12, sabemos que existe un anillo de valoración $\mathcal{R}$ de $\mathcal{K}$ con maximal $\mathfrak{m}$ tal que $A[x^{-1}] \subseteq \mathcal{R}$ y $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{p}$. En particular, $\mathcal{R}$ contiene a A y, como $x^{-1} \in \mathfrak{p} \implies x^{-1} \in \mathfrak{m}$, se tiene que $x = (x^{-1})^{-1} \notin \mathcal{R}$. $\square$

Veamos la segunda propiedad para la cual los anillos maximales serán de valoración. Sea $\mathcal{K}$ un cuerpo y $\mathcal{L}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de los pares (A, f) donde A es un subanillo de $\mathcal{K}$ y $f : A \longrightarrow \mathcal{L}$ es un morfismo (de anillos).

Dados $(A, f), (A', f') \in \mathcal{F}$, diremos que $(A, f) \leq (A', f')$ si $A \subseteq A'$ y $f = f'|_A$. Nuevamente, dada una cadena $(A_1, f_1) \leq (A_2, f_2) \leq \dots$ de pares de $\mathcal{F}$, es fácil ver que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un subanillo de $\mathcal{K}$ y, si definimos $f : A \longrightarrow \mathcal{L}$ de la forma natural: $f(x) = f_n(x)$ si $x \in A_n$, lo cual podemos hacer gracias a la condición de compatibilidad que da la relación de orden de $\mathcal{F}$, tenemos una cota superior $(A, f) \in \mathcal{F}$ de la cadena. En virtud del Lema de Zorn, siempre que $\mathcal{F}$ sea no vacío, tendrá algún elemento maximal. Tengamos en cuenta que no siempre será $\mathcal{F}$ no vacío. Por ejemplo, si tomamos

$\mathcal{K} = \mathbb{F}_2$ y $\mathcal{L} = \mathbb{C}$, el único subanillo de $\mathbb{F}_2$ es el propio cuerpo $\mathbb{F}_2$ y no existen morfismos entre este y $\mathbb{C}$, ya que tendría que cumplirse que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, pero $0 = f(0) = f(1+1) \neq f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$.

Vamos a ver que los elementos maximales de $\mathcal{F}$ (cuando los hay) son anillos de valoración. En particular, cuando tengamos un cuerpo $\mathcal{K}$ y un morfismo f_0 de un subanillo $A \subseteq \mathcal{K}$ en un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathcal{C}$, siempre podremos extender el morfismo a uno definido en un anillo de valoración $\mathcal{R}$ que contenga a A y de forma que este morfismo no pueda extenderse más en $\mathcal{K}$.

Proposición 1.16. Sean $\mathcal{K}, \mathcal{C}$ y $\mathcal{F}$ como se han descrito antes. Supongamos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y que $(\mathcal{R}, f)$ es un elemento maximal de $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{R}$ es un anillo de valoración.

Demostración. La prueba va a dividirse en 3 pasos:

- i) $\mathcal{R}$ es un anillo local y $\mathfrak{m} = \ker(f)$ es su ideal maximal.
- ii) Para cada $x \in \mathcal{K}^*$, o bien $1 \notin \mathfrak{m}\mathcal{R}[x]$, o bien $1 \notin \mathfrak{m}\mathcal{R}[x^{-1}]$.
- iii) $\mathcal{R}$ es un anillo de valoración.

Empecemos probando la primera afirmación. Observemos que, como $\mathcal{C}$ es un cuerpo, el ideal $(0) \subset \mathcal{C}$ es primo, luego $\mathfrak{m} = \ker(f) = f^{-1}((0))$ es un ideal primo de $\mathcal{R}$. Podemos entonces considerar el localizado $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}} \supseteq \mathcal{R}$ y extender el morfismo f a $\tilde{f} : \mathcal{R}_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathcal{C}$ con $\tilde{f}(x/s) = f(x)/f(s) \in \mathcal{C}$ para cada $x, s \in \mathcal{R}$, $s \notin \mathfrak{m}$. Esto tiene sentido ya que $s \notin \mathfrak{m} = \ker(f) \implies f(s) \neq 0$ y, si $x/s = y/s'$ para ciertos $x, y, s, s' \in \mathcal{R}$, $s, s' \notin \mathfrak{m}$, entonces existe $t \in \mathcal{R} \setminus \mathfrak{m}$ tal que $xs't = yst$, luego $f(xs't) = f(yst) \implies f(x)f(s')f(t) = f(y)f(s)f(t)$ y, como $\mathcal{C}$ es un cuerpo y $f(t) \neq 0$, se tiene $f(x)f(s') = f(y)f(s)$, luego $f(x)/f(s) = f(y)/f(s')$ y $\tilde{f}$ está bien definido. Es evidente que $\tilde{f}$ es un morfismo de anillos, luego $(\mathcal{R}_{\mathfrak{m}}, \tilde{f}) \in \mathcal{F}$. Por maximalidad de $\mathcal{R}$, tiene que tenerse $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}} = \mathcal{R}$, luego efectivamente, $\mathcal{R}$ es un anillo local y $\mathfrak{m} = \ker(f)$ es su ideal maximal.

Para probar la segunda afirmación, vamos a suponer que $1 \in \mathfrak{m}\mathcal{R}[x]$ y $1 \in \mathfrak{m}\mathcal{R}[x^{-1}]$. Como $\mathcal{R}$ es local, podemos repetir el razonamiento seguido en la demostración del teorema 1.12 (cuando se afirma que $1 - \tilde{a}_0$ es unidad, se necesita que el anillo sea local), para obtener identidades de la forma: $1 = a_1x + \dots + a_nx^n = b_1x^{-1} + \dots + b_mx^{-m}$, con $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathfrak{m}$ y con n y m mínimos y, dependiendo de cuál de los dos enteros

sea mayor, hacer una combinación de las expresiones para obtener una nueva identidad de esta forma, de grado estrictamente menor que el mínimo, llegando a un absurdo.

Finalmente, para ver que $\mathcal{R}$ es un anillo de valoración, sea $x \in \mathcal{K}^*$. Supongamos que $1 \notin \mathfrak{m}\mathcal{R}[x]$ y veamos que entonces $x \in \mathcal{R}$. Si por el contrario se tuviera $1 \in \mathfrak{m}\mathcal{R}[x]$, entonces tiene que ser $1 \notin \mathfrak{m}\mathcal{R}[x^{-1}]$ y repetiríamos esta prueba para ver que, en este caso, $x^{-1} \in \mathcal{R}$, siendo así $\mathcal{R}$ un anillo de valoración.

Como $1 \notin \mathfrak{m}\mathcal{R}[x]$, es decir, $\mathfrak{m}\mathcal{R}[x]$ es un ideal propio, existe un ideal maximal $\mathfrak{m}' \subset \mathcal{R}[x]$ que contiene a $\mathfrak{m}$ y, en particular, $\mathfrak{m}' \cap \mathcal{R} \supseteq \mathfrak{m}$ pero $1 \notin \mathfrak{m}' \cap \mathcal{R}$, luego $\mathfrak{m}' \cap \mathcal{R} = \mathfrak{m}$ por ser este ideal maximal en $\mathcal{R}$. Si $\bar{x} = x + \mathfrak{m}' \in \mathcal{R}[x]/_{\mathfrak{m}'}$, tenemos que $\mathcal{R}[x]/_{\mathfrak{m}'} \cong (\mathcal{R}/\mathfrak{m})[\bar{x}]$, ya que dado un polinomio en $\mathcal{R}[x]$, tomar su clase módulo $\mathfrak{m}'$ equivale a tomar clases en sus coeficientes y evaluar en $\bar{x}$ y, dado que $\mathfrak{m}' \cap \mathcal{R} = \mathfrak{m}$, tomar las clases de los coeficientes módulo $\mathfrak{m}'$ equivale a tomarlas módulo $\mathfrak{m}$. Deducimos que $\bar{x}$ es algebraico sobre $\mathcal{R}/\mathfrak{m}$, ya que $\mathcal{R}[x]/_{\mathfrak{m}'} \cong (\mathcal{R}/\mathfrak{m})[\bar{x}]$ es un cuerpo, luego o bien $\bar{x} = 0$, o bien $(\bar{x}) = (\mathcal{R}/\mathfrak{m})[\bar{x}] \implies 1 \in (\bar{x})$, así que existen $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{R}/\mathfrak{m}$ con $a_n \neq 0$, tales que $a_n \bar{x}^n + \dots + a_1 \bar{x} = 1$.

Sea entonces $P(X) \in (\mathcal{R}/\mathfrak{m})[X]$ el polinomio mínimo de $\bar{x}$ en $\mathcal{R}/\mathfrak{m}$. El morfismo f da lugar a un morfismo inyectivo $\tilde{f} : \mathcal{R}/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathcal{C}$, ya que $\mathfrak{m} = \ker(f)$. Si consideramos $\tilde{f}(P)(X) \in \mathcal{C}[X]$ el polinomio cuyos coeficientes son las imágenes por $\tilde{f}$ de los coeficientes de P , tenemos un polinomio de grado positivo en $\mathcal{C}$, que es algebraicamente cerrado, luego podemos tomar una raíz $\xi \in \mathcal{C}$ de dicho polinomio. Podemos así extender el morfismo $\tilde{f}$ a un morfismo $\tilde{g} : (\mathcal{R}/\mathfrak{m})[\bar{x}] \longrightarrow \mathcal{C}$ definiendo $\tilde{g}(\bar{x}) = \xi$. Es fácil ver que, gracias a la elección de ξ , $\tilde{g}$ es efectivamente un morfismo bien definido. Podemos ahora considerar el morfismo $g : \mathcal{R}[x] \longrightarrow \mathcal{C}$ dado por:

$$\mathcal{R}[x] \xrightarrow{\quad} \mathcal{R}[x]/\mathfrak{m}' \cong (\mathcal{R}/\mathfrak{m})[\bar{x}] \xrightarrow{\quad \tilde{g} \quad} \mathcal{C}$$

Este morfismo extiende a f , es decir, $(\mathcal{R}[x], g) \geq (\mathcal{R}, f)$. Por la maximalidad de $(\mathcal{R}, f)$, tiene que ser $\mathcal{R} = \mathcal{R}[x]$, es decir, $x \in \mathcal{R}$. $\square$

Nota. Como consecuencia de este resultado, se tiene el *teorema de los ceros de Hilbert* o *Nullstellensatz* en una de sus formas: dado un cuerpo $\mathcal{K}$ toda extensión de cuerpos $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ donde $\mathcal{L}$ es finitamente generado como $\mathcal{K}$ -álgebra es una extensión finita y algebraica ([AM69], corolario 5.24).

Por último, vamos a ver que dado un cuerpo $\mathcal{K}$, todo subanillo propio maximal de $\mathcal{K}$ es un anillo de valoración de dimensión de Krull 1 y viceversa. Decir que un dominio tiene dimensión 1 equivale a decir que todo ideal primo no nulo suyo es maximal. Si este dominio es además local, esto equivale a decir que su ideal maximal es el único ideal primo no nulo del anillo.

Proposición 1.17. Dado un cuerpo $\mathcal{K}$, todo subanillo propio $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}$ maximal para la inclusión es un anillo de valoración de dimensión 1. Recíprocamente, todo anillo de valoración de dimensión 1 es maximal en su cuerpo de fracciones.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}$ es un subanillo propio de $\mathcal{K}$ y sea $\mathfrak{p} \subset \mathcal{R}$ un ideal primo de $\mathcal{R}$. Por el teorema 1.12, existe un anillo de valoración $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{K}$ con ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap \mathcal{R}$. Si $\mathcal{R}$ es maximal para la inclusión en $\mathcal{K}$, necesariamente, $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ es un anillo de valoración y $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ es maximal en él.

Recíprocamente, sea $\mathcal{R}$ un anillo de valoración y sea $\mathcal{K} = Fr(\mathcal{R})$. Si $\mathcal{R}'$ fuese otro subanillo de $\mathcal{K}$ con $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{K}$, entonces $\mathcal{R}'$ sería también anillo de valoración y, si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}'$ son los ideales maximales de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ respectivamente, por la proposición 1.6, se tiene que $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{R}' \iff \mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{m}'$. Si $\mathcal{R}$ es de dimensión 1, no puede ser $\mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{m}'$ ya que $\mathfrak{m}'$ es un ideal primo no nulo de $\mathcal{R}$, luego necesariamente, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$ y $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$, es decir, $\mathcal{R}$ es maximal en $\mathcal{K}$. $\square$

2. Anillos de Valoración Discreta

Definición. Diremos que un anillo de valoración $\mathcal{R}$ es un *anillo de valoración discreta* (DVR) si su grupo de valores es isomorfo a $\mathbb{Z}$. En este caso, decimos que la valoración de $\mathcal{R}$ es una *valoración discreta*.

Estos anillos de valoración tienen ciertas propiedades y caracterizaciones interesantes que se estudian en la sección 11 de [Mat86] y en el capítulo 9 de [AM69] y que vamos a recopilar a lo largo de esta sección. Primero, vamos a ver el *teorema de la intersección de Krull*, al cual vamos a recurrir en varias ocasiones.

Teorema 2.1. (*de la intersección de Krull*, teorema 8.10 de [Mat86])

Sea $\mathcal{R}$ un dominio Noetheriano e $I \subset \mathcal{R}$ un ideal propio. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$.

Demostración. Sea $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$. Como el anillo $\mathcal{R}$ es Noetheriano, N es finitamente generado como $\mathcal{R}$ -módulo. Como, por definición de N , se tiene que $IN = N$, por el lema de Nakayama ([Mat86], teorema 2.2), existe $a \in \mathcal{R}$ con $a \equiv 1 \pmod{I}$ tal que $aN = 0$. Como $a \equiv 1 \pmod{I}$, $a \neq 0$ porque $0 \in I$ y, como $\mathcal{R}$ es un dominio y $aN = 0$, tiene que ser $N = 0$. $\square$

Este mismo razonamiento se puede repetir en el caso de que $\mathcal{R}$ sea un anillo Noetheriano local (no necesariamente dominio) con $I = \mathfrak{m}$ su maximal, ya que el hecho de ser $\mathcal{R}$ dominio solo se emplea para afirmar que el elemento a que aparece en la demostración no es divisor de cero. En este caso, se puede hacer la misma afirmación pese a no tenerse (necesariamente) un dominio ya que, como $a \notin \mathfrak{m}$ y $\mathcal{R}$ es local, a es una unidad de $\mathcal{R}$.

Ahora sí, vamos a ver varias formas de caracterizar un DVR.

2.1. Propiedades y caracterizaciones

Proposición 2.2. Dado un anillo de valoración $\mathcal{R}$, son equivalentes:

- 1) $\mathcal{R}$ es un DVR.
- 2) $\mathcal{R}$ es un DIP (dominio de ideales principales).
- 3) $\mathcal{R}$ es Noetheriano.

Nota: En esta situación, a un elemento $t \in \mathcal{R}$ que genere el ideal maximal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{R}$ lo llamaremos *parámetro de uniformización* de $\mathcal{R}$.

Demostración.

$1 \implies 2$) Sea $\mathcal{K} = Fr(\mathcal{R})$ y $\nu : \mathcal{K}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ una valoración sobre $\mathcal{R}$. Sea $I \subseteq \mathcal{R}$ un ideal, veamos que es principal. Si $I = (0)$ no hay nada que probar, así que supongamos que $I \neq (0)$. Como $I \subseteq \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_\nu = \mathcal{R}$, se tiene $\nu(I \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{N}_0$, luego podemos considerar (gracias al buen orden de $\mathbb{N}_0$), $m = \min\{\nu(I)\} \in \mathbb{N}_0$ y $0 \neq x \in I$ con $\nu(x) = m$. Veamos que $I = (x)$. Como $x \in I$, es evidente que $(x) \subseteq I$, luego solo hace falta probar que dado $y \in I$, existe $r \in \mathcal{R}$ tal que $y = xr$. Pero esto es inmediato ya que, por cómo se han definido m y x , se tiene que $\nu(y) \geq \nu(x) = m$, luego $\nu(x^{-1}y) \geq 0$ y $r = x^{-1}y \in \mathcal{R}$.

$2 \implies 1$) Si $\mathcal{R}$ es un DIP, en particular, su maximal $\mathfrak{m}$ es principal. Sea $t \in \mathcal{R}$ tal que $\mathfrak{m} = (t)$. Por el teorema de la intersección de Krull, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (t^n) = (0)$ y, como $(t^0) = (1) = \mathcal{R}$, para cada $x \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, existe $n = n_x \in \mathbb{N}_0$ tal que $x \in (t^n)$ pero $x \notin (t^{n+1})$. Vamos a definir $\bar{\nu} : \mathcal{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ con $\bar{\nu}(x) = n_x$ para cada $x \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Esta aplicación cumple las propiedades *i* y *ii* de valoración:

Sean $x, y \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ y sean $n = \bar{\nu}(x)$, $m = \bar{\nu}(y)$. Como $x \in (t^n)$ e $y \in (t^m)$, existen $u, v \in \mathcal{R}$ tales que $x = ut^n$ e $y = vt^m$, pero como $x \notin (t^{n+1})$ e $y \notin (t^{m+1})$, necesariamente $u, v \notin (t) = \mathfrak{m}$, es decir, u y v son unidades en $\mathcal{R}$.

i) $xy = uvt^{n+m}$, luego $xy \in (t^{n+m})$, pero como $\mathcal{R}$ es un dominio de factorización única (DFU) por ser DIP, $xy \notin (t^{n+m+1})$ porque en tal caso, t dividiría a uv , que es una unidad, así que $\bar{\nu}(xy) = n + m = \bar{\nu}(x) + \bar{\nu}(y)$.

ii) Supongamos sin pérdida de generalidad que $n \leq m$, dada la simetría entre los papeles de x e y . Entonces $x + y = (u + vt^{m-n})t^n$, luego $x + y \in (t^n)$ y, por tanto, $\bar{\nu}(x + y) \geq n = \bar{\nu}(x) = \min\{\bar{\nu}(x), \bar{\nu}(y)\}$.

De esta forma, sabemos que existe una valoración ν en $\mathcal{K} = Fr(\mathcal{R})$ que extiende a $\bar{\nu}$, luego es una valoración discreta. Además, si $x/y \in \mathcal{K}^*$ y $\nu(x/y) = \bar{\nu}(x) - \bar{\nu}(y) \geq 0$, entonces $n = \nu(x) \geq \nu(y) = m$. Existen unidades $u, v \in \mathcal{R}^*$ tales que $x = ut^n$ e $y = vt^m$, luego $x/y = uv^{-1}t^{n-m}$ con $uv^{-1} \in \mathcal{R}^*$ y $n - m \geq 0$, es decir, $x/y \in \mathcal{R}$. Como evidentemente, $\bar{\nu}(x) \geq 0 \forall x \in \mathcal{R}$, concluimos que $\mathcal{R}$ es el anillo asociado a esta valoración ν y es, por tanto, un DVR.

$2 \implies 3$) Obviamente, si todo ideal de $\mathcal{R}$ es principal, es finitamente generado, luego $\mathcal{R}$ es Noetheriano.

$3 \implies 2$) Sea $I \subseteq \mathcal{R}$ un ideal (no nulo) finitamente generado, es decir, $I = (x_1, \dots, x_n)$ con $0 \neq x_i \in \mathcal{R}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Veamos que es principal. Por ser el grupo de valores de $\mathcal{R}$ totalmente ordenado y $\{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto finito, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\nu(x_i) \leq \nu(x_j) \forall j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, $\nu(x_i^{-1}x_j) \geq 0$, luego $x_i^{-1}x_j \in \mathcal{R}$ y, por tanto, $x_j \in (x_i)$ para cada $j = 1, \dots, n$ y, entonces, $I = (x_1, \dots, x_n) \subseteq (x_i)$. Como la inclusión contraria es inmediata, se tiene la igualdad, luego I es principal.

Si $\mathcal{R}$ es Noetheriano, todo ideal es finitamente generado y por tanto, como hemos visto, principal. $\square$

Este resultado caracteriza qué anillos de valoración lo son de valoración discreta, pero vamos a ampliarlo para caracterizar los anillos de valoración discreta entre anillos arbitrarios.

Nota: en general, decimos que un anillo $\mathcal{R}$ es normal si es íntegramente cerrado en su anillo total de fracciones. Esta es la definición de anillo normal que vamos a utilizar a lo largo del trabajo. En ciertos textos, se dice que $\mathcal{R}$ es normal si su localizado $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ es un dominio íntegramente cerrado para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subset \mathcal{R}$ y, en el teorema 11.2 de [Mat86], que es el que estamos siguiendo aquí, se refiere a este último concepto. En muchos casos, como en este, ambas definiciones coinciden, como vamos a ver.

Teorema 2.3. ([Mat86], teorema 11.2)

Dado un anillo $\mathcal{R}$, son equivalentes:

- 1) $\mathcal{R}$ es un DVR.
- 2) $\mathcal{R}$ es un DIP local, pero no es un cuerpo.
- 3) $\mathcal{R}$ es Noetheriano, local, de dimensión positiva y su ideal maximal es principal.
- 4) $\mathcal{R}$ es Noetheriano, local, normal y de dimensión 1.

Demostración.

$1 \implies 2$) Si $\mathcal{R}$ es un DVR, ya hemos visto que es local y, por el resultado anterior, es un DIP. Además, la única valoración posible sobre un cuerpo, es decir, que tenga al propio cuerpo como anillo de valoración asociado, es la valoración idénticamente nula, ya que todo elemento no nulo del cuerpo es una unidad y, por tanto, tiene que tener valor nulo. Como en este caso $\mathcal{R}$ es un DVR, su grupo de valoración es $\mathbb{Z} \neq \{0\}$.

$2 \implies 3$) Si $\mathcal{R}$ es un DIP, en particular, es Noetheriano y su ideal maximal es principal. Además, el ideal $\mathfrak{p}_0 = (0)$ es primo por ser $\mathcal{R}$ un dominio y, como no es un cuerpo, tiene algún ideal maximal $\mathfrak{p}_1$, luego $\dim(\mathcal{R}) > 0$.

$3 \implies 1$) Sea $t \in \mathcal{R}$ tal que $\mathfrak{m} = (t)$. Como el anillo es Noetheriano y local, por el teorema de intersección de Krull (pese a no ser dominio a priori), $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (t^n) = (0)$, luego podemos definir $\bar{\nu}(x) = n(= n_x)$ como el máximo entero positivo n tal que $x^n \in (t^n)$ para cada $x \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, de manera análoga a como se hizo en la demostración anterior. Dados $x, y \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, sean $\bar{\nu}(x) = n$ y $\bar{\nu}(y) = m$, entonces $x = ut^n$ e $y = vt^m$ para ciertas unidades $u, v \in \mathcal{R}$ como ya vimos, luego $xy = uvt^{n+m}$. Basta ver que t no es nilpotente para poder afirmar que esta última expresión es no nula y, por tanto, $\mathcal{R}$ es un dominio. Si t fuera nilpotente, todo elemento de $\mathfrak{m} = (t)$ lo sería también, es decir, $\mathfrak{m}$ estaría contenido en el nilradical de $\mathcal{R}$. Como el nilradical de un anillo está contenido en todos sus ideales primos y $\mathfrak{m}$ es el maximal de $\mathcal{R}$, se tendría que $\mathfrak{m}$ es el nilradical de $\mathcal{R}$ y es su único ideal primo, luego $\mathcal{R}$ tendría que ser de dimensión nula. Para terminar, solo falta repetir la prueba de la proposición anterior (el apartado $2 \implies 1$) para ver que $\bar{\nu}$ se extiende a una valoración discreta en el cuerpo de fracciones de $\mathcal{R}$, cuyo anillo de valoración asociado es nuevamente $\mathcal{R}$.

$1 \implies 4$) Sabemos que si $\mathcal{R}$ es un DVR, entonces es Noetheriano y local. Veamos que es de dimensión 1. Como observamos en la implicación ($1 \implies 2$) de la proposición anterior, todo ideal no nulo I está generado por un elemento x de valoración mínima en I . Si $\nu(x) = \min\{\nu(I)\} = n = \nu(t^n)$, entonces $x = ut^n$ para cierta unidad $u \in \mathcal{R}^*$, luego $I = (t^n)$, es decir, todo ideal no nulo de $\mathcal{R}$ está generado por una potencia de t . Es evidente que (t^n) es primo si, y solo si, $n = 1$, ya que en otro caso, $t \cdot t^{n-1} = t^n \in (t^n)$ pero $t, t^{n-1} \notin (t^n)$, es decir, el único ideal primo no nulo de $\mathcal{R}$ es $\mathfrak{m}$ y $\dim(\mathcal{R}) = 1$. Otra forma de ver esto es observar que $\mathbb{Z}$ tiene rango 1 como grupo (cualquier segmento no nulo de $\mathbb{Z}$ contiene al 1 y cualquier subgrupo de $\mathbb{Z}$ que contiene al 1, contiene a todo $\mathbb{Z}$), luego $\dim(\mathcal{R}) = \text{rank}(\mathbb{Z}) = 1$ en virtud del corolario 1.10.

Finalmente, $\mathcal{R}$ es normal ya que solo tiene dos ideales primos: (0) y $\mathfrak{m}$. El localizado de $\mathcal{R}$ en (0) es $\mathcal{R}_{(0)} = Fr(\mathcal{R}) = \mathcal{K}$ (en $\mathcal{R}_{(0)}$ se añaden a $\mathcal{R}$ los inversos de sus elementos no nulos) y su localizado en $\mathfrak{m}$ es $\mathcal{R}_{\mathfrak{m}} = \mathcal{R}$ (se añaden los inversos de los elementos fuera de $\mathfrak{m}$, que ya eran unidades en $\mathcal{R}$). En el primer caso, obtenemos un cuerpo, en el segundo, un DVR y ambos son dominios íntegramente cerrados (proposición 1.14). Como vemos, para dominios locales de dimensión 1, normal (en el sentido amplio que se maneja en [Mat86]) equivale a íntegramente cerrado.

4 $\implies$ 3) Tenemos que ver que el ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{R}$ es principal. Como $\mathcal{R}$ es local y normal, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathfrak{m}}$ y por tanto, es un dominio íntegramente cerrado. Por el teorema de intersección de Krull, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = (0)$, luego necesariamente $\mathfrak{m} \not\supseteq \mathfrak{m}^2$, ya que si se tuviera $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, también se tendría $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^n \forall n \geq 1$ y sería $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m} \neq (0)$. Sea entonces $t \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, veamos que $\mathfrak{m} = (t)$.

Sea $\mathcal{F}$ la familia de ideales $\mathcal{F} = \{((t) : x) \text{ con } x \in \mathcal{R} \setminus (t)\}$. Por ser $\mathcal{R}$ Noetheriano, toda cadena de ideales de $\mathcal{F}$ tiene que ser finita, luego $\mathcal{F}$ tiene elementos maximales. Sea $x \in \mathcal{R}$ de forma que $\mathfrak{p} = ((t) : x)$ sea un elemento maximal de $\mathcal{F}$, veamos que $\mathfrak{p}$ es primo. Sean $y, z \in \mathcal{R}$ tales que $yz \in \mathfrak{p}$. Supongamos que $y \notin \mathfrak{p}$, es decir, $xy \notin (t)$. Obviamente, $\mathfrak{p} = ((t) : x) \subseteq ((t) : xy)$, ya que si un elemento de $\mathcal{R}$ está en (t) al multiplicarlo por x , también lo está al multiplicarlo por xy . Como $\mathfrak{p}$ es maximal en $\mathcal{F}$, tiene que ser $\mathfrak{p} = ((t) : x) = ((t) : xy)$. Como $yz \in \mathfrak{p}$, se tiene que $xyz = (xy)z \in (t)$, luego $z \in ((t) : xy) = \mathfrak{p}$ y, efectivamente, $\mathfrak{p}$ es primo.

Como $\mathcal{R}$ es dominio, el ideal (0) es primo y, como es local, $\mathfrak{m}$ es su único maximal. Como $\mathcal{R}$ es de dimensión 1, no tiene más ideales primos que estos dos y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo no nulo de $\mathcal{R}$, ya que $(t) \subset \mathfrak{p}$, luego tiene que ser $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, es decir, hemos encontrado $x \in \mathcal{R}$ de forma que $((t) : x) = \mathfrak{m}$.

Sea $\mathcal{K} = Fr(\mathcal{R})$. Definimos $\mathfrak{m}^{-1} = \{y \in \mathcal{K} : y\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{R}\}$. Como $\mathfrak{m} = ((t) : x)$, si $z \in \mathfrak{m}$, entonces $zx \in (t)$, luego $zxt^{-1} \in \mathcal{R}$ y $xt^{-1} \in \mathfrak{m}^{-1}$. Observemos que si $y \in \mathfrak{m}^{-1}$ y $z \in \mathfrak{m}$, entonces $yz \in \mathcal{R}$ por definición, luego podemos considerar $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{R}$ el ideal generado por estos productos en $\mathcal{R}$. Entonces $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}$, ya que obviamente $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{m}^{-1}$. Sin embargo, por el lema de Nakayama, no puede ser $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Más precisamente, si A es un anillo, $\mathcal{M}$ un A -módulo finitamente generado, ϕ un endomorfismo de A -módulos en $\mathcal{M}$ e $I \subseteq A$ un ideal de A tal que $\phi(\mathcal{M}) \subseteq I\mathcal{M}$, entonces ϕ verifica una relación: $\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \dots + a_1\phi + a_0 = 0$, con $a_i \in I \forall i = 0, 1, \dots, n-1$ (teorema 2.1 de [Mat86] o proposición 2.4 de [AM69]).

En este caso, si tuviéramos $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, se tendría que $xt^{-1}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, luego tomando en esta proposición $I = \mathcal{R}$, $\mathcal{M} = \mathfrak{m}$, podríamos tomar como endomorfismo ϕ , el dado por el producto por xt^{-1} y tendría que verificarse una igualdad de la forma: $(xt^{-1})^n + a_{n-1}(xt^{-1})^{n-1} + \dots + a_1(xt^{-1}) + a_0 = 0$ con $a_i \in \mathcal{R} \forall i = 0, 1, \dots, n-1$. Como $\mathcal{R}$ es íntegramente cerrado, tendría que ser $xt^{-1} \in \mathcal{R}$, pero no es así, ya que se tendría

$x = xt^{-1} \cdot t \in (t)$ pero, por definición, $x \notin (t)$. Entonces $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{m}$ y, por ser $\mathfrak{m}$ maximal, $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = \mathcal{R}$.

Observamos ahora que, como $t \in \mathfrak{m}$, entonces $t\mathfrak{m}^{-1} \subseteq \mathcal{R}$ y es, además, un ideal. Tenemos entonces $t\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = t\mathcal{R} = (t)$. Además, $t\mathfrak{m}^{-1} \not\subseteq \mathfrak{m}$ porque, si fuera $t\mathfrak{m}^{-1} \subseteq \mathfrak{m}$, se tendría $(t) = t\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^2$, pero $t \notin \mathfrak{m}^2$. Entonces $t\mathfrak{m}^{-1} = \mathcal{R}$ y $(t) = t\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = \mathcal{R}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ como queríamos ver. $\square$

Nota. Acabamos de probar que la normalización es una resolución de singularidades en dimensión 1 sobre $\mathcal{K}$ -álgebras de tipo finito ya que, en este caso, la normalización es intersección de anillos de valoración Noetherianos y de dimensión 1, cuyo ideal maximal es, como hemos visto, principal, es decir, son regulares (anillos locales cuya dimensión coincide con el número de generadores de su ideal maximal).

Dado un dominio de integridad $\mathcal{R}$ y dado $x \in \mathcal{K} = Fr(\mathcal{R})$, decimos que x es casi íntegro sobre $\mathcal{R}$ si existe $z \in \mathcal{R}, z \neq 0$ tal que $zx^n \in \mathcal{R}$ para todo $n > 0$. Decimos que $\mathcal{R}$ es completamente íntegramente cerrado si contiene a cualquier elemento de su cuerpo de fracciones casi íntegro sobre él.

Proposición 2.4. Todo elemento íntegro sobre un dominio $\mathcal{R}$ es casi íntegro sobre $\mathcal{R}$, por lo que todo dominio completamente íntegramente cerrado es íntegramente cerrado. Si $\mathcal{R}$ es Noetheriano, el recíproco también es cierto.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{K}$ íntegro sobre $\mathcal{R}$. Entonces existe $k > 0$ tal que x^k es combinación lineal sobre $\mathcal{R}$ de $1, x, \dots, x^{k-1}$ y, por tanto, también lo es x^n para cada $n \geq k$. Basta entonces encontrar $z \in \mathcal{R}$ no nulo tal que $zx, \dots, zx^{k-1} \in \mathcal{R}$. Si $x = (a/b)$ con $a, b \in \mathcal{R}$ y $b \neq 0$, tomando $z = b^{k-1}$ tenemos el resultado.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{R}$ es Noetheriano y $x \in \mathcal{K}$ es casi íntegro sobre $\mathcal{R}$, es decir, existe $z \in \mathcal{R}$ no nulo tal que $zx^n \in \mathcal{R}$ para todo $n > 0$. Entonces, $\mathcal{R}[x]$ es un $\mathcal{R}$ -submódulo de $(1/z)\mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ es un anillo Noetheriano y $(1/z)\mathcal{R}$ es obviamente finitamente generado como $\mathcal{R}$ -módulo, es un $\mathcal{R}$ -módulo Noetheriano, luego $\mathcal{R}[x]$ es finitamente generado o, equivalentemente, x es íntegro sobre $\mathcal{R}$. $\square$

Corolario 2.5. Todo anillo de valoración discreta es completamente íntegramente cerrado por ser íntegramente cerrado y Noetheriano.

2.2. Ejemplos

Ejemplo 2.6. Volvamos a los ejemplos que vimos en la sección anterior. El primero de ellos, el anillo de las series formales $\mathbf{k}[[t]]$ sobre un cuerpo $\mathbf{k}$, con la valoración explicada, es el primer ejemplo de DVR. Todas las propiedades que acabamos de ver para los DVR son ya conocidas en este caso, así que no presenta mucho interés. El segundo ejemplo, sin embargo, es un primer ejemplo de anillo de valoración no discreta. Sirve como contraejemplo sencillo a la mayoría de las propiedades de este tipo de anillos de valoración. Vamos a verlo con algo de detalle:

Teníamos el anillo $\mathbf{k}[X, Y]$ y la aplicación $\tilde{\nu} : \mathbf{k}[X, Y] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ definida por $\tilde{\nu}(f) = \min_{lex} \{(a, b) : f_{(a,b)} \neq 0\}$ para cada $f(X, Y) = \sum_{a,b=0}^{\infty} f_{(a,b)} X^a Y^b$ no nulo (ejemplo 1.5, 2).

Esta aplicación, como ya vimos, da lugar a una valoración $\nu : \mathbf{k}(X, Y)^* \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, pero cuyo anillo asociado no coincide con $\mathbf{k}[X, Y]$. Si denotamos por $\mathcal{R}_\nu \supsetneq \mathbf{k}[X, Y]$ al anillo de valoración asociado a ν , este no es un DVR, ya que su grupo de valores no es isomorfo a ningún subgrupo de $\mathbb{Z}$, sino de $\mathbb{Z}^2$. Esto puede demostrarse, por ejemplo, observando que $(1, 0)$ y $(2, 0)$ son dos valores de elementos de dicho anillo (X y X^2 respectivamente), pero entre $(1, 0)$ y $(2, 0)$ hay una infinidad numerable de valores de elementos del anillo ($(1, n) = \nu(XY^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$), cosa que no ocurre para ningún par de números enteros en ningún subgrupo de $\mathbb{Z}$.

Este anillo, por lo tanto, no puede ser un DIP ni puede ser Noetheriano en vista de las proposiciones 2.1 y 2.2. Esto podemos verlo observando que, para cada entero $n > 0$, $(1, -n) >_{lex} (0, 0)$, luego $X/Y^n \in \mathfrak{m}$, pero $1/Y \notin \mathcal{R}$ porque $(0, -1) <_{lex} (0, 0)$. Tenemos una cadena de ideales $(0) \subsetneq (X/Y) \subsetneq (X/Y^2) \subsetneq \dots$ estrictamente ascendente e infinita, toda ella contenida en $\mathfrak{m}$.

Observemos, sin embargo, que el maximal $\mathfrak{m}$ sí es principal pese a no ser el anillo un DIP. Es evidente que $(Y) \subseteq \mathfrak{m}$, ya que $(0, 1) >_{lex} (0, 0)$, pero además, observemos que $X = Y \cdot (X/Y)$ con $(X/Y) \in \mathcal{R}_\nu$, luego $X \in (Y)$ y, además, si $X^a Y^b \in \mathfrak{m}$, es decir, $(a, b) >_{lex} (0, 0)$, entonces, o bien $a > 0$ y $X^a Y^b = X \cdot X^{a-1} Y^b = Y \cdot X^a Y^{b-1}$, o bien $a = 0$ y $b > 0$, luego $X^a Y^b = Y \cdot Y^{b-1}$ con $b - 1 \geq 0$. En cualquier caso, $X^a Y^b \in (Y)$ en $\mathcal{R}_\nu$. Como el valor de una serie cualquiera es el menor de los valores de sus monomios, una serie f está en el maximal si, y solo si, su monomio de menor valor lo está, es decir, si y solo si, cada uno de sus monomios lo está. Cada uno de ellos será entonces múltiplo (en $\mathcal{R}_\nu$) de Y por este razonamiento, es decir, $\mathfrak{m} \subseteq (Y)$ y deducimos que $\mathfrak{m} = (Y)$ es principal en $\mathcal{R}_\nu$.

Observemos entonces que $\mathcal{R}_\nu$ es local, de dimensión positiva y su ideal maximal es

principal, pero no es un DVR (no es Noetheriano). La principalidad del ideal maximal es una condición necesaria pero, como acabamos de ver, no suficiente para que un anillo de valoración sea de valoración discreta.

3. Dominios de Krull

Vamos a introducir el concepto de *dominio de Krull*, que generaliza al de anillo de valoración discreta, siguiendo la sección 12 del capítulo 4 de [Mat86].

Definición. Sea $\mathcal{R}$ un dominio de integridad y $\mathcal{K} = Fr(\mathcal{R})$. Decimos que $\mathcal{R}$ es un *dominio de Krull* si $\mathcal{R} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda$ donde $\mathcal{F} = \{\mathcal{R}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de DVRs de $\mathcal{K}$ y, si ν_λ es la valoración discreta de $\mathcal{R}_\lambda$, para cada $x \in \mathcal{K}^*$ existe una cantidad a lo sumo finita de índices $\lambda \in \Lambda$ para los que $\nu_\lambda(x) \neq 0$. En estas condiciones, diremos que $\mathcal{F}$ es una *familia de definición* de $\mathcal{R}$.

Observemos que, dado que $\mathcal{R}_\lambda$ es completamente íntegramente cerrado para cada $\lambda \in \Lambda$, también lo es $\mathcal{R}$ (todo $x \in \mathcal{K}$ casi íntegro sobre $\mathcal{R}$ lo es sobre cada $\mathcal{R}_\lambda$, luego pertenece a todos los anillos $\mathcal{R}_\lambda$ y, por tanto, a $\mathcal{R}$).

De esta definición, no podemos deducir la unicidad de la familia de definición de un dominio de Krull. Sin embargo, como veremos, sí que podemos afirmar que existe una única familia de definición minimal para cada uno.

Proposición 3.1. Sea $\mathcal{R}$ un dominio de Krull, $\mathcal{F} = \{\mathcal{R}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de definición de $\mathcal{R}$ y sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Entonces $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{R}$ es también un dominio de Krull y la subfamilia $\mathcal{F}_\mathcal{S} := \{\mathcal{R}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\mathcal{S}}$ de $\mathcal{F}$ es una familia de definición de $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{R}$, donde $\Lambda_\mathcal{S} = \{\lambda \in \Lambda : \mathcal{S}^{-1}\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_\lambda\} = \{\lambda \in \Lambda : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}_\lambda^*\}$.

Demostración. Para empezar, observemos que, en esta situación, $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{R}$ es también un dominio y que $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{R} \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda_\mathcal{S}} \mathcal{R}_\lambda$ por la definición de $\Lambda_\mathcal{S}$ y por ser $\mathcal{F}$ una familia de definición de $\mathcal{R}$. Además, para cada $x \in \mathcal{K}^*$, $\nu_\lambda(x) \neq 0$ para una cantidad a lo sumo finita de índices de Λ y, por tanto, de $\Lambda_\mathcal{S} \subseteq \Lambda$. Por tanto, solo falta probar $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{R} \supseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda_\mathcal{S}} \mathcal{R}_\lambda$.

Sea $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda_\mathcal{S}} \mathcal{R}_\lambda$. Sea $\Delta = \{\lambda \in \Lambda : \nu_\lambda(x) < 0\} \subseteq \Lambda$. Este conjunto tiene que ser finito, es decir, $\Delta = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ y, además, para cada $i = 1, \dots, n$, $x \notin \mathcal{R}_{\lambda_i}$, luego $\lambda_i \notin \Lambda_\mathcal{S}$, es decir, $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{R}_{\lambda_i}^*$. Podemos entonces considerar $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{S}$ tales que $\nu_{\lambda_i}(s_i) > 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. Si tomamos $s = s_1^{r_1} \cdots s_n^{r_n} \in \mathcal{S}$ donde $r_i = -\nu_{\lambda_i}(x) > 0$ para cada $i = 1, \dots, n$, como $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$, $\nu_\lambda(s) \geq 0 \forall \lambda \in \Lambda$ y $\nu_{\lambda_i}(s) = \sum_{j=1}^n r_j \nu_{\lambda_i}(s_j) > r_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\nu_\lambda(xs) = \nu_\lambda(x) + \nu_\lambda(s) \geq 0$, es decir, $xs \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda = \mathcal{R}$, luego $x = (xs)/s \in \mathcal{S}^{-1}\mathcal{R}$. $\square$

3.1. Dominios de Krull con familias de definición finitas

Vamos a ver cómo encontrar una familia de definición minimal para un dominio de Krull, cuando este esté dado por una familia de definición finita. Para ello, primero probamos el Lema de Nagata:

Lema 3.2. (Lema de Nagata)

Sean $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ anillos de valoración con cuerpo de fracciones $\mathcal{K}$ y sea $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \dots \cap \mathcal{R}_n$. Para cada $a \in \mathcal{K}$, existe $s \geq 2$ tal que

$$(1 + a + \dots + a^{s-1})^{-1} \in \mathcal{R} \quad \text{y} \quad a(1 + a + \dots + a^{s-1})^{-1} \in \mathcal{R}. \quad (2)$$

Demostración. Sea $a \in \mathcal{K}$. Observemos que $(1 - a)(1 + a + \dots + a^{s-1}) = 1 - a^s$ para cada $s \geq 2$. Sea $1 \leq i \leq n$ y sea $\mathfrak{m}_i \subseteq \mathcal{R}_i$ el ideal maximal. Si $a \notin \mathcal{R}_i$, entonces $1 + a + \dots + a^{s-1} \neq 0$ para cada $s \geq 2$ porque $\mathcal{R}_i$ es íntegramente cerrado y, además, $a^{-1} \in \mathfrak{m}_i$, luego $a^{-1} - 1$ es una unidad en $\mathcal{R}_i$. Más aún, $a^{-s} \in \mathfrak{m}_i$ y $a^{-s} - 1$ es una unidad en $\mathcal{R}_i$, luego

$$(1 + a + \dots + a^{s-1})^{-1} = \frac{1 - a}{1 - a^s} = \frac{a^{-s} - a^{-(s-1)}}{a^{-s} - 1} \in \mathcal{R}_i \text{ para cada } s \geq 2.$$

$$a(1 + a + \dots + a^{s-1})^{-1} = \frac{a(1 - a)}{1 - a^s} = \frac{a^{-(s-1)} - a^{-(s-2)}}{a^{-s} - 1} \in \mathcal{R}_i \text{ para cada } s \geq 2.$$

Si, por el contrario, $a \in \mathcal{R}_i$, puede ocurrir cualquiera de los dos siguientes casos: o bien $1 - a^s$ es unidad en $\mathcal{R}_i$ para cada $s \geq 2$, o bien existe $s \geq 2$ tal que $1 - a^s \in \mathfrak{m}_i$. En el primero de los casos, observando las dos igualdades anteriores, vemos que cualquier valor de $s \geq 2$ nos vale. En el segundo caso, tomamos $s_0 \geq 0$ mínimo tal que $1 - a^{s_0} \in \mathfrak{m}_i$. Si $s_0 = 1$, es decir, $1 - a \in \mathfrak{m}_i$, tenemos $a \equiv 1$ en $\mathcal{R}_i/\mathfrak{m}_i$ y basta con tomar $s \geq 2$ que no sea múltiplo de la característica del cuerpo $\mathcal{R}_i/\mathfrak{m}_i$. Si $s_0 \geq 2$ y $s \geq s_0$ es otro entero tal que $1 - a^s \in \mathfrak{m}_i$, existen enteros q, r con $q \geq 1$ y $0 \leq r < s_0$ tal que $s = qs_0 + r$. Entonces $1 \equiv a^s = a^{qs_0+r} = (a^{s_0})^q \cdot a^r \equiv a^r$ en $\mathcal{R}_i/\mathfrak{m}_i$, es decir, $1 - a^r \in \mathfrak{m}_i$ y, por la minimalidad de s_0 y como $1 - a \notin \mathfrak{m}_i$, tiene que ser $r = 0$, es decir, s es necesariamente múltiplo de s_0 . Deducimos que, en este caso, basta con tomar cualquier valor de $s \geq 2$ que no sea múltiplo de s_0 .

En resumen, para cada $a \in \mathcal{K}$, los enteros que no cumplen (2) para $\mathcal{R}_i$ son, a lo sumo, los múltiplos de un entero d_i . Tomando cualquier $s \geq 2$ que no sea divisible por ninguno de estos enteros, tenemos (2) para cada $\mathcal{R}_i$, luego lo tenemos para $\mathcal{R}$. $\square$

Proposición 3.3. Sean $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ anillos de valoración con cuerpo de fracciones $\mathcal{K}$ y con $\mathcal{R}_i \not\subseteq \mathcal{R}_j$ para cada $i \neq j$ y sea $\mathfrak{m}_i \subseteq \mathcal{R}_i$ el maximal de $\mathcal{R}_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces $\mathcal{R} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{R}_i$ es un anillo semilocal (tiene un número finito de ideales maximales) y sus únicos ideales maximales son $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \subseteq \mathcal{R}$, con $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_i \cap \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_i}$ para $i = 1, \dots, n$.

Demostración. Para empezar, sabemos que $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_i \cap \mathcal{R}$ es un ideal primo de $\mathcal{R}$ para cada i . Además, $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}_i} \subseteq \mathcal{R}_i$, ya que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_i$ y, si $x \in \mathcal{R}$ pero $x \notin \mathfrak{p}_i$, entonces $x \notin \mathfrak{m}_i$, es decir, x es una unidad en $\mathcal{R}_i$. Por otro lado, si $x \in \mathcal{R}_i \subset \mathcal{K}$, por el lema anterior, existe $s \geq 2$ tal que $u = (1+x+\dots+x^{s-1})^{-1} \in \mathcal{R}$ y $xu \in \mathcal{R}$. Como $u \in \mathcal{R}_i$ y $u^{-1} = 1+x+\dots+x^{s-1} \in \mathcal{R}_i$, u es una unidad de $\mathcal{R}_i$, es decir, $u \notin \mathfrak{m}_i \implies u \notin \mathfrak{p}_i \implies x = (xu)/u \in \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_i}$, es decir, $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_i}$ y concluimos que $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_i}$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Si $i \neq j$, como $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_j \iff \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_i} \supseteq \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_j}$ y $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_i} \not\subseteq \mathcal{R}_j = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_j}$, deducimos que $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}_j$. Veamos que todo ideal propio de $\mathcal{R}$ está contenido en algún ideal $\mathfrak{p}_i$, luego estos son los únicos ideales maximales de $\mathcal{R}$. En efecto, supongamos que $I \subseteq \mathcal{R}$ es un ideal que no está contenido en ningún $\mathfrak{p}_i$. Entonces, ([AM69], proposición 1.11) $I \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, es decir, existe $x \in I$ que es unidad en $\mathcal{R}_i$ para todo i , luego es unidad en $\mathcal{R}$ ($x^{-1} \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{R}_i = \mathcal{R}$), luego $I = (1) = \mathcal{R}$.

□

Corolario 3.4. Si $\mathcal{R}$ es un dominio de Krull definido por una cantidad finita de DVRs, entonces es semilocal y el conjunto $\mathcal{F} = \{\mathcal{R}_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \subseteq \mathcal{R} \text{ maximal}\}$ es una familia de definición (finita) minimal de $\mathcal{R}$. Más aún, si $\mathcal{F}' = \{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n\}$ es otra familia de definición de $\mathcal{R}$ reducida en el sentido $\mathcal{R}_i \not\subseteq \mathcal{R}_j$ para $i \neq j$, entonces $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

Vamos a ver ahora el caso en el que un dominio de Krull está definido por una cantidad infinita de DVRs. En este caso, vamos a ver que existe una familia de definición minimal, en el sentido de que toda otra familia de definición del dominio la contiene.

3.2. Familias de definición minimales

Proposición 3.5. Sea $\mathcal{R}$ un dominio de Krull y sea $\text{Spec}_1(\mathcal{R})$ el conjunto de los ideales primos no nulos minimales de $\mathcal{R}$ (los ideales primos de altura 1, donde la altura de un ideal primo se define como la mayor longitud de una cadena de ideales primos contenida en él). Sea $\mathcal{F}_1 = \{\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \in \text{Spec}_1(\mathcal{R})\}$. Entonces $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ es un DVR para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec}_1(\mathcal{R})$, $\mathcal{F}_1$ es una familia de definición de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ para toda familia de definición $\mathcal{F}$ de $\mathcal{R}$.

Demostración. Primero tenemos que probar que $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ es un DVR para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec}_1(\mathcal{R})$. Sea entonces $\mathfrak{p} \in \text{Spec}_1(\mathcal{R})$ y sea $\mathcal{F} = \{\mathcal{R}_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de definición de $\mathcal{R}$. Por la proposición 3.1, $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ es un dominio de Krull y $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} := \{\mathcal{R}_{\lambda} \in \mathcal{F} : \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{R}_{\lambda}\}$ es una familia de definición suya. Sea $\mathcal{R}_{\lambda} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ ($\mathcal{R}_{\lambda} \supseteq \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$) y sea $\mathfrak{m}_{\lambda} \subset \mathcal{R}_{\lambda}$ su maximal. Entonces, $\mathfrak{m}_{\lambda} \cap \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ es un ideal primo de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$. Como los ideales primos de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ están en correspondencia 1 a 1 con los ideales primos de $\mathcal{R}$ contenidos en $\mathfrak{p}$ ([AM69], proposición 3.11), tiene que ser $\mathfrak{m}_{\lambda} \cap \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = (0)$ o $\mathfrak{p}$. Sin embargo, si fuera $\mathfrak{m}_{\lambda} \cap \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = (0)$, todos los elementos de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ serían unidades en $\mathcal{R}_{\lambda}$, es decir, $\text{Fr}(\mathcal{R}) = \mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}_{\lambda}$, lo cual es absurdo, porque $\mathcal{R}_{\lambda} \subseteq \mathcal{K}$ y $\mathcal{R}_{\lambda}$ no es un cuerpo, por ser un DVR. Entonces $\mathfrak{m}_{\lambda} \cap \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. En particular, si tomamos $x \in \mathfrak{p}$ con $x \neq 0$, tenemos que $x \in \mathfrak{m}_{\lambda} \implies \nu_{\lambda}(x) > 0 \forall \mathcal{R}_{\lambda} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$, luego $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ tiene que ser una familia finita por ser una familia de definición de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$. Como vimos en el último resultado, en este caso, $\mathcal{F}'_{\mathfrak{p}} = \{(\mathcal{R}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \subseteq \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \text{ maximal}\}$ es una familia de definición de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$, pero el único ideal maximal de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ es $\mathfrak{p}$ y $(\mathcal{R}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ tiene que ser un DVR. Además, acabamos de ver que $\{\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}\} = \mathcal{F}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{F}$ para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}_1(\mathcal{R})$, luego $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$.

Para ver que $\mathcal{F}_1$ es una familia de definición de $\mathcal{R}$, solo falta ver que $\mathcal{R} \supseteq \bigcap_{\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{F}_1} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$, ya que la inclusión contraria es siempre cierta y la condición de finitud para la cantidad de valores estrictamente positivos de todo elemento no nulo de $\mathcal{K}$ viene dada por estar $\mathcal{F}_1$ contenida en alguna (cualquier) familia de definición de $\mathcal{R}$. Observemos que la implicación $x/y \in \bigcap_{\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{F}_1} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \implies x/y \in \mathcal{R} \forall x/y \in \mathcal{K}$, que queremos probar, es equivalente a la implicación $x \in \bigcap_{\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{F}_1} y\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \implies x \in y\mathcal{R} \forall x, y \in \mathcal{R}, y \neq 0$. Sea entonces $y \in \mathcal{R}$ con $y \neq 0$, y sean $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ el conjunto (finito) de DVRs de $\mathcal{F}$ cuya valoración asociada es estrictamente positiva para y , es decir, tal que y es una unidad en todos los DVRs de $\mathcal{F}$ salvo estos. Entonces, un elemento de $\mathcal{R}$ es múltiplo de y en $\mathcal{R}$ si, y solo si, lo es en cada $\mathcal{R}_{\lambda} \in \mathcal{F}$ y, como y es unidad en $\mathcal{R}_{\lambda}$ para todo $\mathcal{R}_{\lambda} \neq \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$, esto equivale a que dicho elemento sea múltiplo de y en $\mathcal{R}_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. En resumen, $y\mathcal{R} = \bigcap_{i=1}^n (y\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R})$ donde $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ son los DVRs de $\mathcal{F}$ en los que y no es una unidad.

Podemos escribir entonces $y\mathcal{R} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$, donde $\mathfrak{q}_i = y\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Recordemos que, por ser $\mathcal{R}_i$ un DVR, $\mathfrak{m}_i$ (su maximal) es su único ideal primo no nulo. Más

aún, es su único ideal radical no nulo, ya que un parámetro de uniformización (elemento de $\mathfrak{m}_i$ de valor 1, que genera $\mathfrak{m}_i$) está en el radical de cualquier ideal, luego $\sqrt{I} = \mathfrak{m}_i$ para todo ideal propio $I \subseteq \mathcal{R}_i$ y, en particular, I es $\mathfrak{m}_i$ -primario. Por tanto, $y\mathcal{R}_i$ (que es un ideal propio de $\mathcal{R}_i$ por no ser y unidad en $\mathcal{R}_i$) es $\mathfrak{m}_i$ -primario y deducimos que $\mathfrak{q}_i = y\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}$ es $\mathfrak{p}_i$ -primario, siendo $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_i \cap \mathcal{R}$, para cada $i = 1, \dots, n$. Pongamos (salvo reordenación) $y\mathcal{R} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$ con $r \leq n$ de forma que esta sea una descomposición primaria irredundante de $y\mathcal{R}$, es decir, de forma que $\mathfrak{q}_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j$ para cada $i = 1, \dots, r$ y $\mathfrak{q}_{r+1}, \dots, \mathfrak{q}_n$ son redundantes. Veamos ahora que $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ son de altura 1.

Supongamos que, por el contrario, $\mathfrak{p}_1$ (salvo reordenación) no es de altura 1. Entonces, por la proposición 3.1, $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}_1}$ es un dominio de Krull y $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}_1} := \{\mathcal{R}_\lambda \in \mathcal{F} : \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_1} \subseteq \mathcal{R}_\lambda\}$ es una familia de definición suya, pero no es un DVR, ya que su dimensión es estrictamente mayor que 1 al haber otros ideales primos no nulos en $\mathcal{R}$ contenidos estrictamente en $\mathfrak{p}_1$. Si $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}_1}$ fuese una familia finita, por la proposición 3.3, $(\mathcal{R}_{\mathfrak{p}_1})_{\mathfrak{p}_1} = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_1}$ sería un DVR por ser $\mathfrak{p}_1$ el único ideal maximal de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}_1}$, así que $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}_1}$ tiene que ser una familia infinita. Como y solo puede ser no unidad en un número a lo sumo finito de DVRs de $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}_1}$, existe $\mathcal{R}' \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p}_1}$ tal que y es unidad en $\mathcal{R}'$. Si $\mathfrak{m}'$ es el maximal de $\mathcal{R}'$, entonces $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}' \cap \mathcal{R}_{\mathfrak{p}_1} \subseteq \mathfrak{p}_1$, pero $y \notin \mathfrak{p}'$, luego $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}_1$. Como $\mathcal{R}_1$ es un DVR, $y\mathcal{R}_1 = \mathfrak{m}_1^v$, siendo $v = \nu_1(y) > 0$. Por tanto, tomando intersección con $\mathcal{R}$, $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1^v$. Como la descomposición primaria $y\mathcal{R} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$ es irredundante, tenemos que $y\mathcal{R} \subsetneq \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r = \mathfrak{p}_1^0 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$, pero $y\mathcal{R} = \mathfrak{p}_1^v \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$, luego existe $k \geq 0$ tal que $y\mathcal{R} \subsetneq \mathfrak{p}_1^k \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$ pero $y\mathcal{R} = \mathfrak{p}_1^{k+1} \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$, es decir, existe $x \in \mathcal{R}$ tal que $x \notin y\mathcal{R}$ pero $x\mathfrak{p}_1 \subseteq y\mathcal{R}$ y, en particular, $x\mathfrak{p}' \subseteq y\mathcal{R}$, es decir, $(x/y)\mathfrak{p}' \subseteq \mathcal{R}$.

Observemos que $x \in y\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$ porque $\mathcal{R}'$ es uno de los DVR de $\mathcal{F}$, por serlo de la subfamilia $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}_1}$. Como y es una unidad en $\mathcal{R}'$, $x/y \in \mathcal{R}'$, luego $(x/y)\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{m}'$ y, entonces, $(x/y)\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{m}' \cap \mathcal{R} = \mathfrak{p}'$. Para cualquier $z \in \mathfrak{p}'$, $z \neq 0$, se cumple que $(x/y)^n z \in \mathfrak{p}' \subseteq \mathcal{R}$ y, como $\mathcal{R}$ es completamente íntegramente cerrado, $x/y \in \mathcal{R} \implies x \in y\mathcal{R}$, absurdo por la definición de x .

En definitiva, $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r \in \text{Spec}_1(\mathcal{R})$ luego, si $x \in \mathcal{R}$ es tal que $x \in \bigcap_{\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{F}_1} y\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$, en particular, $x \in \bigcap_{i=1}^r y\mathcal{R}_{\mathfrak{p}_i}$. Además, repitiendo el razonamiento de la demostración de la proposición 3.3, $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}_i} = \mathcal{R}_i$ para cada $i = 1, \dots, r$, luego $x \in \bigcap_{i=1}^r y\mathcal{R}_i$ y, como $x \in \mathcal{R}$, $x \in \bigcap_{i=1}^r (y\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}) = y\mathcal{R}$. □

4. Espacio de Arcos

Vamos a introducir y estudiar el *espacio de arcos* de una *variedad algebraica afín*, concepto que fue introducido por John Nash [Nas95] en los años 60 en el contexto del estudio de la Resolución de singularidades. Para un estudio más detallado del espacio de arcos, ver [Loe99], [dF17], [Kol03],[JMJ16], [Reg09] o [Reg06].

Primero, vamos a repasar brevemente el concepto de *variedad algebraica afín* como *esquema afín* y los morfismos entre estos, que son fundamentales para entender la relación entre los *arcos* en una variedad y los puntos de su *espacio de arcos* en el contexto actual.

4.1. Esquemas afines

Sea $\mathcal{R}$ un anillo y $\text{Spec}(\mathcal{R})$ su espectro primo, es decir, el conjunto de sus ideales primos. Para cada ideal $I \subseteq \mathcal{R}$, vamos a denotar por $\mathcal{V}(I) = \text{Spec}(\mathcal{R}/I) \subseteq \text{Spec}(\mathcal{R})$ al conjunto de los ideales primos de $\mathcal{R}$ que contienen a I . Dado que todo ideal primo es, en particular, radical, tenemos inmediatamente que $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\sqrt{I})$. Gracias a esta observación y a las propiedades dadas en [AM69], ejercicio 1.13, es fácil ver que se tienen las siguientes propiedades ([AM69] capítulo 1, ejercicio 15 y [Har77] lema 2.1):

- a) $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(IJ)$ para cada par de ideales $I, J \subseteq \mathcal{R}$.
- b) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{V}(I_\lambda) = \mathcal{V}(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)$ para cada familia de ideales $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de $\mathcal{R}$.
- c) $\emptyset = \mathcal{V}(\mathcal{R})$, $\text{Spec}(\mathcal{R}) = \mathcal{V}((0))$.

Es decir, los conjuntos de la forma $\mathcal{V}(I)$ donde I es un ideal de $\mathcal{R}$ son cerrados para uniones finitas e intersecciones arbitrarias y, además, los conjuntos $\emptyset$ y $\text{Spec}(\mathcal{R})$ son de esta forma. Por tanto, existe una topología en $\text{Spec}(\mathcal{R})$ bien definida, la *topología de Zariski*, en la cual los cerrados son exactamente los conjuntos de esta forma. Es fácil ver que dado $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{R})$, su adherencia en $\text{Spec}(\mathcal{R})$ para esta topología es $\text{Adh}(\mathfrak{p}) = \mathcal{V}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(\mathcal{R}) : \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}\}$.

Dado un elemento $f \in \mathcal{R}$, denotamos por $\mathcal{D}(f) = \text{Spec}(\mathcal{R}_f)$ al conjunto de los ideales primos de $\mathcal{R}$ que no contienen a f . Obviamente, $\mathcal{D}(f) = \text{Spec}(\mathcal{R}) \setminus \mathcal{V}((f))$ es abierto para cada $f \in \mathcal{R}$. De hecho, los elementos de esta forma son una base de la topología de $\text{Spec}(\mathcal{R})$ ([AM69], capítulo 1, ejercicio 17).

Dado un anillo $\mathcal{R}$, llamaremos *variedades algebraicas* de $\text{Spec}(\mathcal{R})$ a los cerrados Zariski de la forma $\mathcal{V}(I) = \text{Spec}(\mathcal{R}/I)$ para cierto ideal primo I de $\mathcal{R}$. Hablaremos de *variedades algebraicas afines* cuando el espacio ambiente sea $\mathbb{A}_K^m = \text{Spec}(K[x_1, \dots, x_m])$ y tengamos conjuntos de la forma $\mathcal{X} = \text{Spec}(K[x_1, \dots, x_m]/I) \subseteq \mathbb{A}_K^m = \text{Spec}(K[x_1, \dots, x_m])$, siendo K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 e I un ideal primo de $K[x_1, \dots, x_m]$.

Para cada abierto $U \subseteq \text{Spec}(\mathcal{R})$, vamos a definir $\mathcal{O}(U)$ como el conjunto de las aplicaciones $s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ (unión disjunta) tales que, para cada $\mathfrak{p} \in U$, $s(\mathfrak{p}) \in \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ y existen un abierto $V \subseteq U$ con $\mathfrak{p} \in V$ y $a, f \in \mathcal{R}$ tales que $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = a/f \ \forall \mathfrak{q} \in V$. Así, $\mathcal{O}$ resulta ser un haz de anillos en $\text{Spec}(\mathcal{R})$. En los abiertos básicos de la topología, es decir, aquellos de la forma $\mathcal{D}(f)$ con $f \in \mathcal{R}$, se tiene que $\mathcal{O}(\mathcal{D}(f)) \cong \mathcal{R}_f$ (en particular, $\mathcal{O}(\text{Spec}(\mathcal{R})) = \mathcal{O}(\mathcal{D}(1)) \cong \mathcal{R}$), además, para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{R})$, la fibra $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local isomorfo a $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$, como se demuestra en la proposición 2.2 de [Har77].

De esta forma, decimos que el par $(\mathcal{X} = \text{Spec}(\mathcal{R}), \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ es un esquema afín aunque, en general, con cierto abuso del lenguaje, diremos que $\mathcal{X}$ es un esquema afín. Denotaremos por $\mathcal{O}_{\mathcal{X},f}$ a $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{D}(f)) \cong \mathcal{R}_f$ para cada $f \in \mathcal{R}$ y, dado que $\mathcal{R} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ y la fibra $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathfrak{p}}$ corresponde al localizado $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ para cada $\mathfrak{p} \in \mathcal{X}$, denotaremos por $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ al anillo coordenado de $\mathcal{X}$, es decir, al propio anillo $\mathcal{R}$.

Los morfismos de esquemas afines son aplicaciones $f : \mathcal{X} = \text{Spec}(A) \rightarrow \mathcal{Y} = \text{Spec}(B)$ continuas, que inducen morfismos $f^{\#} : \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ en sus respectivos haces de anillos locales tales que, para cada $P \in \mathcal{X}$, el morfismo inducido entre las respectivas fibras $f_P^{\#} : \mathcal{O}_{\mathcal{Y},f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X},P}$ es un morfismo de anillos locales ([Har77], capítulo 2, sección 2). Un resultado fundamental para el manejo de los morfismos entre esquemas afines que tenemos que tener en mente es el siguiente:

Proposición. Dar un morfismo de esquemas afines $f : \mathcal{X} = \text{Spec}(A) \rightarrow \mathcal{Y} = \text{Spec}(B)$ es equivalente a dar un morfismo de anillos $\varphi : B \rightarrow A$ (proposición 2.3 del capítulo 2 de [Har77]).

La idea es que f induce $f^{\#} : \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ y, dado que $f_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \cong A$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) \cong B$, se obtiene un morfismo entre los anillos $\varphi = f^{\#} : B \rightarrow A$, mientras que recíprocamente, un morfismo φ entre los anillos induce un morfismo de esquemas $f : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ dado por $f(\mathfrak{p}) = (\varphi)^{-1}(\mathfrak{p}) \in \text{Spec}(B)$ para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$. De esta forma, partiendo de uno de los dos morfismos y haciendo este proceso dos veces (ida y vuelta), recuperamos el morfismo de partida, es decir, se tiene una correspondencia 1 a 1 de los morfismos de esquemas afines y los morfismos entre sus anillos coordenados.

4.2. Espacio de Arcos de una Variedad

Vamos a ver qué es un *arco* en una variedad, a definir su *espacio de arcos* y a estudiar la íntima relación entre estos dos conceptos, que nos ayudará a entender el interés por el estudio de este espacio.

Definición. Sea K un cuerpo de característica 0 y sea $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{A}_K^m$ la variedad afín definida por el ideal primo $I_{\mathcal{X}} \subseteq K[x_1, \dots, x_m]$. Sea $K \subseteq \mathcal{K}$ una extensión de cuerpos. Un $\mathcal{K}$ -arco en X es un morfismo de esquemas $\text{Spec}(\mathcal{K}[[t]]) \longrightarrow \mathcal{X} = \text{Spec}(K[x_1, \dots, x_m]/I_{\mathcal{X}})$. Si $\mathcal{K} = K$, hablamos simplemente de *arcos* en $\mathcal{X}$.

Proposición 4.1. Dada una variedad algebraica afín $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{A}_K^m$, existe un K -esquema afín (un esquema afín sobre K) $\mathcal{X}_{\infty}$, que llamaremos el *espacio de arcos* de $\mathcal{X}$, tal que, para cualquier extensión $K \subseteq \mathcal{K}$, todo $\mathcal{K}$ -arco de $\mathcal{X}$ corresponde con un $\mathcal{K}$ -morfismo de $\mathcal{X}_{\infty}$, es decir, tal que existe un isomorfismo natural:

$$\text{Hom}_K(\text{Spec}(\mathcal{K}[[t]]), \mathcal{X}) \cong \text{Hom}_K(\text{Spec}(\mathcal{K}), \mathcal{X}_{\infty}).$$

Demostración. Observemos que, en virtud de la observación sobre morfismos de esquemas afines que hicimos anteriormente, esto equivale a encontrar un anillo $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\infty}}$ e isomorfismos naturales $\text{Hom}_K(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \mathcal{K}[[t]]) \cong \text{Hom}_K(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\infty}}, \mathcal{K})$ para cada extensión $\mathcal{K}$ de K . Observemos que dar un morfismo $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} = K[x_1, \dots, x_m]/I_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{K}[[t]]$ equivale a dar un morfismo $K[x_1, \dots, x_m] \longrightarrow \mathcal{K}[[t]]$ que se anule en $I_{\mathcal{X}}$ o, equivalentemente, en un sistema de generadores de $I_{\mathcal{X}}$, que podemos tomar finito por noetherianidad. Si $I_{\mathcal{X}} = (f_1, \dots, f_r)$, esto equivale entonces a fijar $x_1(t), \dots, x_m(t) \in \mathcal{K}[[t]]$ tales que $f_j(x_1(t), \dots, x_m(t)) = 0$ para cada $j = 1, \dots, r$.

Para cada $n \geq 0$, consideremos una m -úpla de indeterminadas $\underline{X}_n = (X_{1,n}, \dots, X_{m,n})$ y, para cada $j = 1, \dots, r$, pongamos (como expresión formal)

$$\begin{aligned} f_j\left(\left(\sum_{n \geq 0} X_{1,n} t^n\right), \dots, \left(\sum_{n \geq 0} X_{m,n} t^n\right)\right) &= F_{j,0}(\underline{X}_0) + F_{j,1}(\underline{X}_0, \underline{X}_1)t + F_{j,2}(\underline{X}_0, \underline{X}_1, \underline{X}_2)t^2 + \dots = \\ &= \sum_{n \geq 0} F_{j,n}(\underline{X}_0, \dots, \underline{X}_n)t^n \end{aligned}$$

de forma que, si definimos $X_i(t) = X_{i,0} + X_{i,1}t + X_{i,2}t^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} X_{i,n}t^n$ (de nuevo, como expresión formal) para cada $i = 1, \dots, m$, entonces, para cada $j = 1, \dots, r$ tenemos que $f_j(X_1(t), \dots, X_m(t)) = \sum_{n \geq 0} F_{j,n}(\underline{X}_0, \dots, \underline{X}_n)t^n$, con $F_{j,n} \in K[\underline{X}_0, \dots, \underline{X}_n]$.

Como dar una serie en $\mathcal{K}[[t]]$ equivale a dar cada uno de sus coeficientes en $\mathcal{K}$, fijar $x_1(t), \dots, x_m(t) \in \mathcal{K}[[t]]$ equivale a fijar $x_{1,n}, \dots, x_{m,n} \in \mathcal{K}$ para cada $n \geq 0$ y pedir que $f_j(x_1(t), \dots, x_m(t))$ se anule en $\mathcal{K}[[t]]$ para cada $j = 1, \dots, r$, equivale a pedir que $F_{j,n}(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n)$ se anule en $\mathcal{K}$ para $j = 1, \dots, r$ y cada $n \geq 0$, siendo $\underline{x}_n = (x_{1,n}, \dots, x_{m,n})$. Así, dar un morfismo $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{K}[[t]]$, que equivale a dar un morfismo de $K[x_1, \dots, x_m]$ en $K[[t]]$ que se anule en $I_{\mathcal{X}}$, equivale a su vez a dar un morfismo de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ en $\mathcal{K}$ que anule $F_{j,n}$ para cada $j = 1, \dots, r$ y cada $n \geq 0$, es decir, equivale a dar un morfismo $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]/I_{\mathcal{X}_{\infty}} \rightarrow \mathcal{K}$ siendo $I_{\mathcal{X}_{\infty}}$ el ideal generado por $\{F_{j,n} : 1 \leq j \leq r, n \geq 0\}$ en $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$. $\square$

Definición. El espacio de arcos de una variedad algebraica afin $\mathcal{X} = \text{Spec}(K[x_1, \dots, x_m]/I_{\mathcal{X}})$ es el esquema $\mathcal{X}_{\infty} = \text{Spec}(K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]/I_{\mathcal{X}_{\infty}})$ donde, si $I_{\mathcal{X}} = (f_1, \dots, f_r) \subseteq K[x_1, \dots, x_m]$, entonces $I_{\mathcal{X}_{\infty}} = (\{F_{j,n} : 1 \leq j \leq r, n \geq 0\}) \subseteq K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$. Se tiene:

$$\text{Hom}_K(\text{Spec}(\mathcal{K}[[t]]), \mathcal{X}) \cong \text{Hom}_K(\text{Spec}(\mathcal{K}), \mathcal{X}_{\infty})$$

para cada extensión $\mathcal{K}$ de K . Denotamos por $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\infty}}$ al anillo $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]/I_{\mathcal{X}_{\infty}}$.

El lema 4.4 del capítulo 2 de [Har77] nos permite entender mejor por qué se le llama *espacio de arcos* a esta variedad. Concretamente, nos indica que dar un punto de $\mathcal{X}_{\infty}$ equivale a dar un arco en $\mathcal{X}$ de la siguiente forma:

Proposición. ([Har77], capítulo 2, lema 4.4) Sea $\mathcal{R}$ un anillo de valoración, $\mathcal{K} = \text{Fr}(\mathcal{R})$ y sea $\mathcal{X}$ un esquema. Entonces, dar un morfismo $\text{Spec}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{X}$ equivale a dar un punto $P \in \mathcal{X}$ con $\mathbf{k}(P) = \mathcal{O}_{\mathcal{X},P}/P \subseteq \mathcal{K}$ ($\mathbf{k}(P)$ se denomina el *cuerpo residual de $\mathcal{X}$ en P* y no depende del entorno afín $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ de P que se considera) y dar un morfismo $\text{Spec}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{X}$ equivale a dar un par de puntos $P_0, P_1 \in \mathcal{X}$ con $P_0 \in \overline{\{P_1\}}$ (se dice que P_0 es una especialización de P_1 y se denota por $P_1 \rightsquigarrow P_0$), con $\mathbf{k}(P_1) \subseteq \mathcal{K}$ y con $\mathcal{R} \geq \mathcal{O}_{Z,P_0}$ ($\mathcal{R}$ domina a $\mathcal{O}_{Z,P_0}$ como anillos locales, ver sección 1.3), siendo $Z = \overline{\{P_1\}}$ con la estructura de subesquema de $\mathcal{X}$.

En nuestro caso, dar un punto $\mathfrak{p} \in \mathcal{X}_{\infty}$, considerando $\mathcal{K} = \mathbf{k}(\mathfrak{p})$, que es una extensión de K , equivale a dar un morfismo $\text{Spec}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{X}_{\infty}$ que, por la proposición 4.1, equivale

a dar un morfismo $\text{Spec}(\mathcal{K}[[t]]) \longrightarrow \mathcal{X}$, es decir, un $\mathcal{K}$ -arco en $\mathcal{X}$.

Dado un polinomio $f \in K[x_1, \dots, x_m]$, escribiremos $F(t)$ para referirnos a la serie formal $F(t) = f(X_1(t), \dots, X_m(t))$, siendo $X_i(t) = \sum_{n \geq 0} X_{i,n} t^n \in K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots][t]$ para cada $i = 1, \dots, m$. De esta forma, al igual que a cada variable $x_i \in K[x_1, \dots, x_m]$ le asociamos una sucesión $\{X_{i,n}\}_{n \geq 0}$ de variables de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$, a cada polinomio f de $K[x_1, \dots, x_m]$ le asociamos una sucesión $\{F_n\}_{n \geq 0}$ de polinomios de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$, con $F_n \in K[\underline{X}_0, \dots, \underline{X}_n]$ para cada $n \geq 0$, tal que $F(t) = \sum_{n \geq 0} F_n t^n$. Lo mismo haremos para asociar a cada $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\infty}}$, que serán los coeficientes de la serie $F(t)$ en $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\infty}}[[t]]$. Esta asociación es, de forma explícita, la manera en que asociamos un $\mathcal{K}$ -morfismo de $\mathcal{X}_{\infty}$ a cada $\mathcal{K}$ -arco de $\mathcal{X}$ (y viceversa) y hacemos hincapié en ello porque es una notación que vamos a emplear a menudo.

Observemos que $I_{\mathcal{X}_{\infty}}$ no tiene por qué ser un ideal primo, ni siquiera radical, de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ y, en general, no lo es:

Ejemplo 4.2. Vamos a tratar el caso de la cúspide: la variedad algebraica afín $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}_K^2$ de ecuación $f = y^2 - x^3$ en $K[x, y]$. Si ponemos $X(t) = \sum_{n \geq 0} X_n t^n$ e $Y(t) = \sum_{n \geq 0} Y_n t^n$, tenemos que $F(t) = \sum_{n \geq 0} F_n t^n$, con:

$$F_0 = Y_0^2 - X_0^3, \quad F_1 = 2Y_0Y_1 - 3X_0^2X_1, \quad F_2 = Y_1^2 + 2Y_0Y_2 - 3X_0X_1^2 - 3X_0^2X_2, \dots$$

y, en general:

$$F_n = \sum_{k=0}^n Y_k Y_{n-k} - \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^{n-k} X_k X_j X_{n-k-j} \right) \in K[X_0, Y_0, \dots, X_n, Y_n]$$

En este caso, el ideal $I_{\mathcal{X}_{\infty}} = (F_0, F_1, \dots) \subset K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ con $\underline{X}_n = (X_n, Y_n)$ no es primo. Por ejemplo, sea $G = 2X_0Y_1 - 3X_1Y_0$. Si consideramos en $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ la graduación μ con $\mu(X_n) = 2$ y $\mu(Y_n) = 3$ para cada $n \geq 0$, es fácil observar que F_n es homogéneo de grado 6 para cada $n \geq 0$, luego todos los elementos no nulos de $I_{\mathcal{X}_{\infty}}$ son de grado $\mu \geq 6$, pero G es homogéneo de grado 5, luego $G \notin I_{\mathcal{X}_{\infty}}$. Evidentemente, y por el mismo motivo, $X_0^2 \notin I_{\mathcal{X}_{\infty}}$. Sin embargo, $X_0^2G = 2(X_0^3)Y_1 - (3X_0^2X_1)Y_0 \equiv 2Y_0^2Y_1 - 2Y_0^2Y_1 = 0 \pmod{I_{\mathcal{X}_{\infty}}}$, ya que $X_0^3 \equiv Y_0^2 \pmod{F_0}$ y $3X_0^2X_1 \equiv 2Y_0Y_1 \pmod{F_1}$.

De hecho, el ideal $I_{\mathcal{X}_{\infty}}$ no es, ni siquiera, radical, luego $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\infty}}$ no es reducido en este caso, ya que:

$$\begin{aligned} G^2 &= 4X_0^2Y_1^2 - 12X_0X_1Y_0Y_1 + 9X_1^2Y_0^2 \equiv 4X_0^2Y_1^2 - 18X_0^3X_1^2 + 9X_1^2X_0^3 = X_0^2(4Y_1^2 - 9X_0X_1^2) \\ &\implies G^3 = G \cdot G^2 \equiv GX_0^2(4Y_1^2 - 9X_0X_1^2) \equiv 0 \pmod{I_{\mathcal{X}_{\infty}}} \end{aligned}$$

En otras palabras, el anillo $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty} = K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots] / I_{\mathcal{X}_\infty}$ no es, en general, reducido. Definimos entonces $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} = K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots] / \sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$, que sí es un anillo reducido. Además, los esquemas $\mathcal{X}_\infty = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty})$ y $(\mathcal{X}_\infty)_{red} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}})$ tienen el mismo espacio topológico base porque todo ideal primo de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ que contiene a $I_{\mathcal{X}_\infty}$ contiene también a su radical, pero $(\mathcal{X}_\infty)_{red}$ es un esquema reducido ([Har77], capítulo 2, sección 3). Nos gustaría saber si es, además, irreducible, luego íntegro. En el caso de esquemas afines, esto equivale a probar que el nilradical del anillo $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty}$ es primo, es decir, que $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$ es un ideal primo de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$. Para ello, vamos a ver primero que $I_{\mathcal{X}_\infty}$ es diferencial para cierta derivación en $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ (en particular, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty}$ es un anillo diferencial).

Definición. Dado un anillo $\mathcal{R}$, una derivación en $\mathcal{R}$ es una aplicación $\delta : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ lineal para la suma y con $\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$ para cada $f, g \in \mathcal{R}$. Decimos que un ideal I de un anillo diferencial es un ideal diferencial si es cerrado para la derivación, es decir, $\delta(f) \in I$ para todo $f \in I$. En esta situación, el cociente $\mathcal{R}/I$ es también un anillo diferencial con la derivación $\bar{\delta}$ inducida: $\bar{\delta}(f + I) := \delta(f) + I$.

Proposición 4.3. Si K es de característica 0, el ideal $I_{\mathcal{X}_\infty}$ es diferencial para la derivación δ definida en $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ con $\delta(X_{i,n}) = (n+1)X_{i,n+1}$ para cada $i = 1, \dots, m$ y cada $n \geq 0$ y $\delta(K) \subseteq \{0\}$.

Demostración. Basta ver que, $\delta(F_{j,n}) = (n+1)F_{j,n+1}$ para cada $j = 1, \dots, m$ y cada $n \geq 0$, pero vamos a ver un resultado más general: dado $f \in K[x_1, \dots, x_m]$ cualquiera (en particular, para $f_1, \dots, f_r$), si ponemos $F(t) = \sum_{n \geq 0} F_n(\underline{X}_0, \dots, \underline{X}_n)t^n$, entonces $\delta(F_n) = (n+1)F_{n+1}$ para cada $n \geq 0$. Para verlo para un elemento cualquiera de $K[x_1, \dots, x_m]$, vamos a suponer que se cumple para dos elementos f y g y veamos que entonces se cumple también para $s = f + g$ y para $p = fg$. Como cualquier elemento de $K[x_1, \dots, x_m]$ se obtiene tras una cantidad finita de sumas y productos a partir de las variables $X_1, \dots, X_m$ y las constantes (que sí cumplen esta propiedad para δ), tendremos el resultado para cualquier elemento de $K[x_1, \dots, x_m]$.

Sean $\{F_n \in K[\underline{X}_0, \dots, \underline{X}_n]\}_{n \geq 0}$, los coeficientes de $F(t)$ y, de igual forma, definamos $\{G_n\}_{n \geq 0}$, $\{S_n\}_{n \geq 0}$ y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ para g , $s = f + g$ y $p = fg$ respectivamente. Supongamos que $\delta(F_n) = (n+1)F_{n+1}$ y $\delta(G_n) = (n+1)G_{n+1}$ para cada $n \geq 0$. Entonces:

$$S(t) = F(t) + G(t) = \sum_{n \geq 0} F_n t^n + \sum_{n \geq 0} G_n t^n = \sum_{n \geq 0} (F_n + G_n) t^n \implies S_n = F_n + G_n$$

luego $\delta(S_n) = \delta(F_n) + \delta(G_n) = (n+1)F_{n+1} + (n+1)G_{n+1} = (n+1)S_{n+1}$ para cada $n \geq 0$. Por otro lado:

$$P(t) = F(t) \cdot G(t) = \left(\sum_{n \geq 0} F_n t^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} G_n t^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n F_k G_{n-k} \right) t^n \implies P_n = \sum_{k=0}^n F_k G_{n-k}$$

$$\text{luego } \delta(P_n) = \sum_{k=0}^n \delta(F_k G_{n-k}) = \sum_{k=0}^n (k+1) F_{k+1} G_{n-k} + \sum_{k=0}^n (n+1-k) F_k G_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} k F_k G_{n+1-k} + \sum_{k=0}^n (n+1-k) F_k G_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} (n+1) F_k G_{n+1-k} = (n+1) P_{n+1}. \quad \square$$

El ideal $I_{\mathcal{X}_\infty}$ es, por tanto, diferencial. Además, en característica 0, el radical de un ideal diferencial es, a su vez, diferencial, luego $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$ es un ideal diferencial y los anillos $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty}$ y $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$ son ambos diferenciales. Tenemos que $X_{i,n} = \delta^n(X_{i,0})/(n!)$ para cada $i = 1, \dots, m$ y cada $n \geq 0$, luego $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots] = K\{X_{1,0}, \dots, X_{m,0}\}$, es decir, $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ está generado como anillo diferencial por $X_{1,0}, \dots, X_{m,0}$. Como $F_{j,n} = \delta^n(F_{j,0})/(n!)$ para cada $j = 1, \dots, r$ y cada $n \geq 0$, tenemos que $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}} = \{F_{1,0}, \dots, F_{r,0}\}$, es decir, $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$ es el ideal radical diferencial que generan $F_{1,0}, \dots, F_{r,0}$ en $K\{X_{1,0}, \dots, X_{m,0}\} = K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$. Como el ideal $(F_{1,0}, \dots, F_{r,0})$ es primo en $K[X_{i,0}, \dots, X_{m,0}]$, ya que $F_{j,0} = f_j$ (salvo cambiar la notación de las variables x_i por $X_{i,0}$) y $(f_1, \dots, f_r) = I_{\mathcal{X}}$ es primo en $K[x_1, \dots, x_m]$, como se observa en la proposición 10 del capítulo 4 de [Kol73], el ideal $\{F_{1,0}, \dots, F_{r,0}\}$ es un ideal primo diferencial de $K\{X_{1,0}, \dots, X_{m,0}\}$, es decir, $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$ es un ideal primo de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$. Tenemos entonces que $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} = K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots] / \sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$ es un dominio de integridad y, por tanto, $(\mathcal{X}_\infty)_{red}$ es un esquema íntegro.

Observación. La notación $\{F_{1,0}, \dots, F_{r,0}\}$ que usa Kolchin en [Kol73] y que se usa de manera extendida en los textos de álgebra diferencial (por ejemplo, en [Kap71]) para referirse al ideal radical diferencial que generan dichos elementos, puede generar confusión con el conjunto que componen, que se denota igual. Hay que entender, según el contexto, a qué nos estamos refiriendo.

Otra observación importante es que, efectivamente, la hipótesis $\text{char}(K) = 0$ es necesaria ya que, en el caso de característica $p > 0$, se tiene que $\delta(X_{i,p-1}) = pX_{i,p} = 0$ para esta derivación δ , por lo que $X_{i,p}$ no se obtiene derivando $X_{i,0}$ y $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ no está generado diferencialmente por $X_{1,0}, \dots, X_{m,0}$, es decir, no se tiene $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots] = K\{X_{1,0}, \dots, X_{m,0}\}$. No se cumple tampoco que $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}} = \{F_{1,0}, \dots, F_{r,0}\}$, ya que, por el mismo motivo, $F_{i,p} \notin \{F_{i,0}\}$.

4.3. Normalización

El contexto en el que se empieza a manejar el espacio de arcos de una variedad es el de la resolución de singularidades. Una resolución de singularidades de una variedad $\mathcal{X}$ es un morfismo de esquemas $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ birracional y propio (ver [Har77] capítulo 2, sección 4), que se restringe a un isomorfismo fuera del lugar singular, es decir, entre

$\mathcal{Y} \setminus f^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{X}))$ y $\mathcal{X} \setminus \text{Sing}(\mathcal{X})$ y tal que $\text{Sing}(\mathcal{Y}) = \emptyset$, es decir, $\mathcal{Y}$ es no singular. Las explosiones o “*blowing ups*” y las normalizaciones son ejemplos de morfismos de este tipo ([Eis95], capítulo 4) y, cuando el esquema obtenido es no singular, son resoluciones de singularidades. En dimensión 1, por ejemplo, para curvas, la normalización siempre es una resolución de singularidades. En el ejemplo de la cúspide $\mathcal{X} = \text{Spec}(K[x, y]/(y^2 - x^3))$, que es una curva plana, el anillo $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} = K[x, y]/(y^2 - x^3)$ es un dominio, pero no es normal, porque no es íntegramente cerrado. El elemento $u = y/x$ de su cuerpo de fracciones es íntegro sobre el anillo, ya que $u^2 = y^2/x^2 = x$ (porque $y^2 = x^3$ en $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$), entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[u] \subseteq \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}$, siendo $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \subseteq \text{Fr}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ la normalización de dicho anillo en su cuerpo de fracciones. Observemos que $x = u^2$ e $y = u^3$ en $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[u]$, es decir

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[u] = \frac{K[x, y, u]}{(y^2 - x^3, y - u^3, x - u^2)} = \frac{K[y, u]}{(y^2 - u^6, y - u^3)} = \frac{K[u]}{((u^3)^2 - (u^2)^3)} = K[u]$$

y, además, $K[u]$ es obviamente normal, luego $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} = K[u]$. Si consideramos el esquema afín $\overline{\mathcal{X}} = \text{Spec}(\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}})$, decimos que $\overline{\mathcal{X}}$ es la normalización de la variedad $\mathcal{X}$, y es no singular. El morfismo de esquemas $\pi : \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ inducido por la inclusión entre los anillos

$$\begin{array}{ccc} \pi^{\#} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = K[x, y]/(y^2 - x^3) & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} = K[u] \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & u^2 \\ y & \longmapsto & u^3 \\ y^2 - x^3 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

es, en este caso, una resolución de singularidades. Este morfismo induce un morfismo entre los espacios de arcos de ambas variedades de la siguiente manera:

$$\pi_{\infty} : \overline{\mathcal{X}}_{\infty} \rightarrow \mathcal{X}_{\infty}, \text{ dado por:}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\infty}^{\#} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\infty}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_{\infty}} = K[U_0, U_1, \dots] \\ \Psi & & \Psi \\ X_n & \longmapsto & \sum_{k=0}^n U_k U_{n-k} \\ Y_n & \longmapsto & \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^{n-k} U_k U_j U_{n-k-j} \right) \\ F_n & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Este morfismo se obtiene al asociar a cada coeficiente de $X(t)$ e $Y(t)$, el correspondiente coeficiente de $U(t)^2$ y $U(t)^3$ respectivamente, identificando así dichas series. De esta forma, $F(t) = Y(t)^2 - X(t)^3 = (U(t)^3)^2 - (U(t)^2)^3 = 0$ y cada coeficiente de dicha serie, es decir, cada F_n , tiene imagen nula, luego el morfismo queda bien definido en $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\infty}}$.

Este mismo proceso podemos hacerlo para una variedad algebraica afín X cualquiera. En general, un morfismo $\varphi : \mathcal{Y} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \rightarrow \mathcal{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ entre dos variedades, que

equivale a un morfismo $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = K[x_1, \dots, x_m]/I_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} = K[y_1, \dots, y_s]/I_{\mathcal{Y}}$, entre sus anillos coordenados induce un morfismo $\varphi_\infty : \mathcal{Y}_\infty \longrightarrow \mathcal{X}_\infty$ entre sus espacios de arcos, que a nivel de anillos, está dado por:

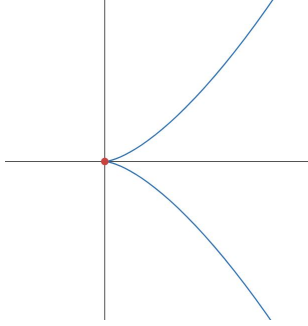
$$\begin{array}{ccc} \varphi_\infty^\# : \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty} = K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]/I_{\mathcal{X}_\infty} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\infty} = K[\underline{Y}_0, \underline{Y}_1, \dots]/I_{\mathcal{Y}_\infty} \\ \Psi & & \Psi \\ X_{i,n} & \longmapsto & U_{i,n} \\ F_{j,n} & \longmapsto & 0 \end{array}$$

La forma en que se obtiene dicho morfismo es la siguiente: si $\varphi^\#(x_i) = u_i \in K[Y_1, \dots, Y_s]/I_{\mathcal{Y}}$ para cada $i = 1, \dots, m$, ponemos $U_i(t) = \sum_{n \geq 0} U_{i,n} t^n$ y asociamos el n -ésimo término de la serie $X_i(t)$, $X_{i,n} \in K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ al n -ésimo término de la serie $U_i(t)$, $U_{i,n} \in K[\underline{Y}_0, \underline{Y}_1, \dots]$. De esta forma, para cada $f \in K[x_1, \dots, x_m]$, estamos asociando a cada término de la serie $F(t)$ en $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ el correspondiente término de la serie $\varphi^\#(f)(t)$ en $K[\underline{Y}_0, \underline{Y}_1, \dots]$. Como el morfismo $\varphi^\#$ está definido en $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} = K[x_1, \dots, x_m]/I_{\mathcal{X}}$, tenemos que $\varphi^\#(f_j) \in I_{\mathcal{Y}}$ para cada $j = 1, \dots, r$ luego, a nivel de series formales, tenemos que $\varphi_\infty^\#(F_{j,n}) \in I_{\mathcal{Y}_\infty}$ para cada $n \geq 0$, es decir, el morfismo $\varphi_\infty^\#$ está efectivamente bien definido entre los espacios de arcos de ambas variedades.

Volviendo al asunto de la normalización de una variedad algebraica afín $\mathcal{X}$, como en cualquier caso $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ es un dominio, ya que el ideal $I_{\mathcal{X}}$ que define la variedad en $K[x_1, \dots, x_m]$ es primo, podemos considerar su normalización $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}$ en su cuerpo de fracciones. El morfismo $\pi : \overline{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{X}$ inducido por la inclusión $\pi^\# : \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}$, induce a su vez un morfismo $\pi_\infty : \overline{\mathcal{X}}_\infty \longrightarrow \mathcal{X}_\infty$ como acabamos de explicar. En el caso de la cúspide, se tienen varias propiedades interesantes, como veremos en el capítulo a continuación.

5. Espacio de Arcos de la cúspide

5.1. El anillo reducido



[Figura 1]

El primer ejemplo de variedad singular que suele estudiarse es el de la cúspide, es decir, la variedad $\mathcal{X}$ definida en $\mathbb{A}_K^2$ por la ecuación $y^2 - x^3 \in K[x, y]$, que presenta una singularidad en el origen. Podemos ver su parte real como variedad en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ representada en la Figura 1. Como hemos visto, el anillo coordenado $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\infty}}$ de su espacio de arcos no es reducido, ya que $I_{\mathcal{X}_{\infty}} = (F_0, F_1, \dots)$ no es radical. Es por esto que definimos, como hemos visto anteriormente, el anillo $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_{\infty})_{red}} = K[x_1, \dots, x_m] / \sqrt{I_{\mathcal{X}}}$, que es un dominio. La ventaja de manejar este anillo coordenado es evidente ya que, a nivel topológico, las variedades $\mathcal{X}_{\infty}$ y $(\mathcal{X}_{\infty})_{red}$ son homeomorfas (los espacios topológicos de ambos esquemas son los mismos), luego el esquema $(\mathcal{X}_{\infty})_{red}$ también representa los arcos en $\mathcal{X}$, pero con la ventaja de ser un esquema íntegro. Es interesante por tanto estudiar el anillo $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_{\infty})_{red}}$ y, concretamente, el ideal que lo define, $\sqrt{I_{\mathcal{X}_{\infty}}}$. Esto nos plantea la siguiente pregunta, todavía abierta:

Pregunta. ¿Qué elementos de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$, que no están en $(F_0, F_1, \dots)$, están en su radical? Ya hemos visto un elemento así: $G_1 = 2X_0Y_1 - 3X_1Y_0$. Como $\sqrt{I_{\mathcal{X}_{\infty}}} = \{F_0\}$ (ideal radical diferencial generado por F_0) es un ideal diferencial, al ser el radical de un ideal diferencial, sabemos también que las derivadas sucesivas de G_1 y cualquier combinación entre estas y los polinomios F_j , están también en este ideal. Por tanto, la pregunta que uno debería hacerse es: ¿Qué elementos, a parte de F_0 , generan $\sqrt{I_{\mathcal{X}_{\infty}}}$ como ideal diferencial? ¿Es finitamente generado como tal? Esta pregunta permanece abierta.

Observemos que cada uno de los polinomios F_n es homogéneo de grado 6 para la graduación μ con $\mu(X_n) = 2$ y $\mu(Y_n) = 3$ que definimos antes en $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$, pero también lo es de grado n para la graduación dada por $\deg(X_n) = \deg(Y_n) = n$, para cada $n \geq 0$. El ideal $I_{\mathcal{X}_{\infty}}$ es homogéneo y, por tanto, también lo es $\sqrt{I_{\mathcal{X}_{\infty}}}$ para ambas graduaciones. Es decir, podemos reducir nuestra búsqueda a elementos homogéneos para estas dos graduaciones, como lo es G_1 . Aún así, comprobar que un elemento de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ está en el radical de este ideal no es, en general, sencillo. Sin embargo, hay una forma de expresar este radical que facilita su manejo:

Proposición 5.1. ([Reg09], lema 2.7).

$$\sqrt{I_{\mathcal{X}_{\infty}}} = (I_{\mathcal{X}_{\infty}} : Y_0^{\infty}) = \{G \in K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots] : \exists n \geq 0 \text{ con } Y_0^n G \in I_{\mathcal{X}_{\infty}}\}.$$

Demostración. Como se observa la proposición 3.11 de [AM69], dado un anillo $\mathcal{R}$, un ideal $I \subset \mathcal{R}$ y un conjunto multiplicativamente cerrado $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, la saturación, es decir, el ideal que se obtiene tras extender y, posteriormente, contraer el ideal I por el morfismo $\mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{S}^{-1}\mathcal{R}$ es $I(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{R}) \cap \mathcal{R} = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} (I : s)$. En este caso, $(I_{\mathcal{X}_\infty} : Y_0^\infty) = \bigcup_{n \geq 0} (I_{\mathcal{X}_\infty} : Y_0^n)$ es la saturación del ideal $I_{\mathcal{X}_\infty}$ por el morfismo de localización de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ en Y_0 .

El ideal extendido $I_{\mathcal{X}_\infty}(K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots])_{Y_0}$ es primo en $(K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots])_{Y_0}$, porque

$$(K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots])_{Y_0} / I_{\mathcal{X}_\infty}(K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots])_{Y_0} \cong (K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots] / I_{\mathcal{X}_\infty})_{Y_0} \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty})_{Y_0}$$

y, además, $(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty})_{Y_0}$ es un dominio, al tenerse

$$(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty})_{Y_0} \cong (K^{[X_0, Y_0]} / (Y_0^2 - X_0^3) [X_1, X_2, \dots])_{Y_0}$$

ya que, al localizar en Y_0 , de $F_1 = 2Y_0Y_1 - 3X_0X_1$, obtenemos $Y_1 = (3X_0X_1)/(2Y_0)$ y, en general, de $F_n = 2Y_0Y_n + \dots$ obtenemos $Y_n = Q_n(X_0, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{n-1})/2Y_0$ y, por inducción, obtenemos una expresión de la forma $Y_n = P_n(X_0, \dots, X_n)/(Y_0^{k_n})$ para cada $n \geq 0$.

Como $I_{\mathcal{X}_\infty}$ se extiende a un ideal primo en $(K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots])_{Y_0}$, el ideal $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$, que es el menor ideal primo que lo contiene, también se extiende al mismo ideal. Como los ideales primos de $(K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots])_{Y_0}$ están en correspondencia 1 a 1 con los ideales primos de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ que no contienen a Y_0 , el ideal primo $I_{\mathcal{X}_\infty}(K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots])_{Y_0}$ se corresponde con $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$, es decir, $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}} = I_{\mathcal{X}_\infty}(K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots])_{Y_0} \cap K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots] = (I_{\mathcal{X}_\infty} : Y_0^\infty)$.

Observación. Este mismo razonamiento puede repetirse casi idénticamente para X_0 en lugar de Y_0 , de forma que se tiene también $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}} = (I_{\mathcal{X}_\infty} : X_0^\infty)$. $\square$

Gracias a esto, podemos probar fácilmente que $G_2 = 4Y_1^2 - 9X_0X_1^2$, que no depende diferencialmente de F_0 y G_1 , está también en $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$, luego es un nuevo generador del ideal. Observemos que $Y_0^2G_2 = 4Y_0^2Y_1^2 - 9X_0X_1^2Y_0^2 \equiv 9X_0^4X_1^2 - 9X_0^4X_1^2 \equiv 0 \pmod{(F_0, F_1)}$. Se desconocen, por ahora, más generadores de este ideal, o si hay o no más generadores.

En el estudio del espacio de arcos y, especialmente, en el de la cúspide, hay numerosas preguntas que, como esta, siguen abiertas a día de hoy. Iremos presentándolas a lo largo de este capítulo.

5.2. Normalización

Como en este caso $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} = K[U_0, U_1, \dots]$ es un dominio, es en particular reducido, luego el morfismo $\pi_\infty^\# : \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty} \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$ factoriza a través de $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$. Más detalladamente,

tenemos un morfismo $\pi_\infty^\#$ de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ en $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty}$ cuyo núcleo contiene a $I_{\mathcal{X}_\infty}$. Como $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty}$ es un dominio, dicho núcleo es un ideal primo de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ y, como contiene a $I_{\mathcal{X}_\infty}$, también contiene a su radical, luego el morfismo $\pi_\infty^\#$ está bien definido en $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$. Con cierto abuso de notación, vamos a denotar por $\pi_\infty^\#$ a este morfismo, ya sea como morfismo en $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$, en $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty}$, o en $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$. Un resultado importante respecto de este morfismo es el siguiente:

Proposición 5.2. En el caso de la cúspide $\mathcal{X}$, el morfismo $\pi_\infty : \overline{\mathcal{X}}_\infty \rightarrow \mathcal{X}_\infty$ es biyectivo.

Demostración. Sea $\mathfrak{p} \in \mathcal{X}_\infty$ y sea $\mathcal{K} = \mathbf{k}(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty, \mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ el cuerpo residual de $\mathcal{X}_\infty$ en $\mathfrak{p}$. Sabemos que dar un punto $\mathfrak{p} \in \mathcal{X}_\infty$ equivale a dar un morfismo $Spec(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{X}_\infty$ que, a su vez, equivale a dar un $\mathcal{K}$ -arco en $\mathcal{X}$, $\varphi : Spec(\mathcal{K}[[t]]) \rightarrow \mathcal{X}$. Sean $x(t), y(t) \in \mathcal{K}[[t]]$ las imágenes de x e y por el morfismo $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = K[x, y]/(y^2 - x^3) \rightarrow \mathcal{K}[[t]]$ inducido entre los anillos (ponemos $x(t)$ e $y(t)$ con minúsculas para no confundirnos con $X(t)$ e $Y(t)$ que, como indicamos anteriormente, representa una expresión formal en $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots](t)$). Vamos a considerar el morfismo $\phi^\# : \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} = K[u] \rightarrow \mathcal{K}((t))$ dado por:

$$u \mapsto u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x(t) = 0 \\ y(t)/x(t) & \text{si } x(t) \neq 0 \end{cases}$$

Por cómo hemos definido $u(t)$, es evidente que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}((t)) & \xleftarrow{\phi^\#} & \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \\ \uparrow & & \uparrow \pi^\# \\ \mathcal{K}[[t]] & \xleftarrow{\varphi^\#} & \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \end{array}$$

es conmutativo. Por lo tanto, lo es también el diagrama que se induce a nivel de esquemas:

$$\begin{array}{ccc} Spec(\mathcal{K}((t))) & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathcal{X}} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ Spec(\mathcal{K}[[t]]) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{X} \end{array}$$

Como $\mathcal{K}((t)) = Fr(\mathcal{K}[[t]])$, siendo $\mathcal{K}[[t]]$ un anillo de valoración y, como la normalización es un morfismo propio, por el criterio valorativo de los morfismos propios ([Har77], capítulo 2, teorema 4.7), existe un único morfismo $\tilde{\varphi} : Spec(\mathcal{K}[[t]]) \rightarrow \overline{\mathcal{X}}$ tal que $\varphi = \pi \circ \tilde{\varphi}$, es decir, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Spec(\mathcal{K}((t))) & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathcal{X}} \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\varphi} & \downarrow \pi \\ Spec(\mathcal{K}[[t]]) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{X} \end{array}$$

es conmutativo. El morfismo $\tilde{\varphi} : \text{Spec}(\mathcal{K}[[t]]) \longrightarrow \overline{\mathcal{X}}$, que es un $\mathcal{K}$ -arco en $\overline{\mathcal{X}}$, da lugar a un morfismo $\tilde{\varphi}_\infty : \text{Spec}(\mathcal{K}) \longrightarrow \overline{\mathcal{X}}_\infty$ que, a su vez, da un punto $\mathbf{q} \in \overline{\mathcal{X}}_\infty$ con $\mathbf{k}(\mathbf{q}) \subseteq \mathcal{K}$. Por ser conmutativo el último diagrama, a nivel de arcos, se tiene la situación:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\infty} & \overline{\mathcal{X}}_\infty \\ & \searrow \varphi_\infty & \downarrow \pi_\infty \\ & & \mathcal{X}_\infty \end{array}$$

La forma en que dar un morfismo $f : \text{Spec}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{X}$ (resp. $\overline{\mathcal{X}}$) equivale a dar un punto $P \in \mathcal{X}_\infty$ (resp. en $\overline{\mathcal{X}}_\infty$) según el lema 4.4 del capítulo 2 de [Har77] es tomando $P = f((0))$, ya que como $\mathcal{K}$ es un cuerpo, (0) es su único ideal (primo). Esto quiere decir que, en este caso, por cómo se han obtenido los morfismos φ y $\tilde{\varphi}$, se tiene que $\mathbf{p} = \varphi_\infty((0))$ y $\mathbf{q} = \tilde{\varphi}_\infty((0))$, luego $\pi_\infty(\mathbf{q}) = \pi_\infty(\tilde{\varphi}_\infty((0))) = \varphi_\infty((0)) = \mathbf{p}$ y, efectivamente, π_∞ es sobreyectivo.

La existencia de estos morfismos nos da la sobreyectividad de π_∞ , pero la unicidad de la expresión de $u(t)$ al definir $\phi^\#$ y la posterior unicidad de $\tilde{\varphi}$ nos dan la inyectividad de π_∞ . Concretamente, cualquier otro punto $\mathbf{q}_1 \in \overline{\mathcal{X}}_\infty$ con $\pi_\infty(\mathbf{q}_1) = \mathbf{p}$ daría lugar a un nuevo morfismo $(\tilde{\varphi}_1)_\infty : \text{Spec}(\mathcal{K}) \longrightarrow \overline{\mathcal{X}}_\infty$ con $\varphi_\infty = \pi_\infty \circ (\tilde{\varphi}_1)_\infty$, que daría lugar a $\tilde{\varphi}_1 : \text{Spec}(\mathcal{K}[[t]]) \longrightarrow \overline{\mathcal{X}}$ con $\varphi = \pi \circ \tilde{\varphi}_1$. A nivel de anillos tendríamos morfismos $\tilde{\varphi}_1^\# : \overline{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{K}[[t]] \hookrightarrow \mathcal{K}((t))$ que dan lugar a un morfismo $\phi_1^\# : \overline{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{K}((t))$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}((t)) & \xleftarrow{\phi_1^\#} & \overline{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \\ \uparrow & \swarrow \tilde{\varphi}_1^\# & \uparrow \pi^\# \\ \mathcal{K}[[t]] & \xleftarrow{\varphi^\#} & \mathcal{O}_\mathcal{X} \end{array}$$

En particular, si $u_1(t) = \phi_1^\#(u) = \tilde{\varphi}_1^\#(u) \in \mathcal{K}[[t]]$, entonces:

$$\begin{cases} x(t) = \varphi^\#(X) = \tilde{\varphi}_1^\#(\pi^\#(X)) = \tilde{\varphi}_1^\#(u^2) = u_1(t)^2 \\ y(t) = \varphi^\#(Y) = \tilde{\varphi}_1^\#(\pi^\#(Y)) = \tilde{\varphi}_1^\#(u^3) = u_1(t)^3 \end{cases} \implies u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x(t) = 0 \\ y(t)/x(t) & \text{si } x(t) \neq 0 \end{cases}$$

es decir, $u_1(t) = u(t)$, luego $\phi_1^\#(u) = \phi^\#(u)$ y $\phi_1^\# = \phi^\# \implies \phi_1 = \phi$. Por la unicidad de $\tilde{\varphi}$, se tiene que $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}$, luego $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$. $\square$

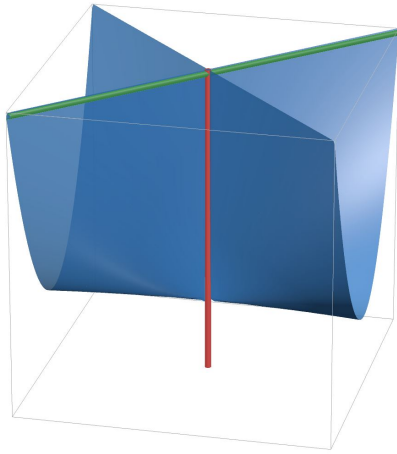
Corolario 5.3. El morfismo $\pi_\infty^\# : \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty}$ es inyectivo.

Demostración. Lo que vamos a ver es que su núcleo, como morfismo en $K[X_0, X_1, \dots]$, es exactamente el ideal $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$. Como ya vimos que $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}} \subseteq \ker(\pi_\infty^\#)$, basta ver que $\ker(\pi_\infty^\#) \subseteq \sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$.

Consideramos el punto genérico $(0) \in \overline{\mathcal{X}}_\infty$. Su adherencia topológica $\text{Adh}((0))$ en $\overline{\mathcal{X}}_\infty$ es $\{\mathfrak{q} \in \overline{\mathcal{X}}_\infty : \mathfrak{q} \supseteq (0)\} = \overline{\mathcal{X}}_\infty$, es decir, (0) es denso en $\overline{\mathcal{X}}_\infty$. De igual forma, la adherencia del punto genérico de $\mathcal{X}_\infty$, que corresponde al ideal $(0) \in \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{\text{red}}}$ o, equivalentemente, al ideal $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}} \in K[X_0, X_1, \dots]$, es también denso en $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{\text{red}}}$. Por ser π_∞ una aplicación continua, se tiene que $\pi_\infty(\text{Adh}((0))) \subseteq \text{Adh}(\pi_\infty((0)))$. Observemos que, por la forma en que se define $\pi_\infty^\#$ a partir de π_∞ y viceversa, $\pi_\infty((0)) = (\pi_\infty^\#)^{-1}((0)) = \ker(\pi_\infty^\#)$, luego $\pi_\infty(\overline{\mathcal{X}}_\infty) = \pi_\infty(\text{Adh}((0))) \subseteq \text{Adh}(\pi_\infty((0))) = \text{Adh}(\ker(\pi_\infty^\#))$. Recordemos que $\pi_\infty(\overline{\mathcal{X}}_\infty) = \mathcal{X}_\infty$ por ser π_∞ sobreyectivo. Se tiene entonces que $\mathcal{X}_\infty \subseteq \text{Adh}(\ker(\pi_\infty^\#))$, es decir, todo ideal primo de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty}$ (o, equivalentemente, de $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{\text{red}}}$) contiene a $\ker(\pi_\infty^\#)$, luego $\ker(\pi_\infty^\#)$ está contenido en el nilradical de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty}$, es decir, está contenido en $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$, como queríamos ver. $\square$

Nota 5.4. La biyectividad de π_∞ no es en general cierta para una variedad $\mathcal{X}$ arbitraria, ni si quiera, cuando su normalización $\overline{\mathcal{X}}$ es no singular. Veamos un ejemplo:

Sea $\mathcal{X}$ la variedad algebraica afín dada en $\mathbb{A}_K^3$ por la ecuación $x^2 - zy^2 \in K[x, y, z]$. Esta variedad es comúnmente conocida como el *paraguas de Whitney*



[Figura 2]

En la Figura 2 podemos ver representada su parte real como variedad en $\mathbb{A}_\mathbb{C}^3$. El lugar singular de $\mathcal{X}$ es todo el eje z (la parte con $z < 0$ es compleja y no se ve en la imagen). Hemos marcado además dos arcos en la figura, uno en rojo y otro en verde, cuya expresión damos a continuación. Veremos que el arco verde se levanta sin problemas a un arco en la normalización $\overline{\mathcal{X}}$ de la variedad, mientras que el arco rojo, no. El problema que presenta el arco rojo frente al arco verde es que, pese a que ambos pasan por el lugar singular de la variedad, el arco rojo se “concentra” en este.

Observemos que $u = x/y \in \text{Fr}(\mathcal{O}_\mathcal{X})$ es íntegro sobre $\mathcal{O}_\mathcal{X}$, ya que $u^2 = x^2/y^2 = z$, luego $u^2 - z = 0$ en $\text{Fr}(\mathcal{O}_\mathcal{X})$. Entonces,

$$\mathcal{O}_\mathcal{X}[u] = \frac{K[x, y, z, u]}{(x^2 - zy^2, x - uy, z - u^2)} = \frac{K[x, y, u]}{(x^2 - (uy)^2, x - uy)} = K[y, u]$$

Como $K[y, u]$ es un anillo normal con $\mathcal{O}_\mathcal{X} \subset K[y, u] \subset \overline{\mathcal{O}_\mathcal{X}}$, se tiene que $\overline{\mathcal{O}_\mathcal{X}} = K[y, u]$.

El arco verde está parametrizado por $t \mapsto (t, t, 1)$, es decir, $x(t) = y(t) = t, z(t) = 1$. Este arco se levanta a un arco en $\overline{\mathcal{X}}$ porque podemos definir $y(t) = t, u(t) = 1$ y, obviamente, se verifican las relaciones $x(t) = u(t)y(t)$ y $z(t) = u(t)^2$.

Sin embargo, el arco rojo, parametrizado por $t \mapsto (0, 0, t)$ no se levanta a ningún arco en $\overline{\mathcal{X}}$, ya que tendría que existir $u(t) \in K[[t]]$ con $u(t)^2 = z(t) = t$. En otras palabras, si consideramos el morfismo $\varphi : K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots] \rightarrow K$ que envía cada variable a 0 excepto Z_1 , que se envía a 1 ($z(t) = 0 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots$), su núcleo, $\mathfrak{p} = (\{\underline{X}_n : n \geq 0\} \setminus \{Z_1\})$, es un punto de $\mathcal{X}_\infty$ (esto tiene que darse en todo caso, ya que sabemos que cada arco de $\mathcal{X}$ da lugar a un punto de $\mathcal{X}_\infty$, pero lo vemos explícitamente) ya que $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}((0))$ es un ideal primo de $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$ y $F_n = \sum_{k=0}^n X_k X_{n-k} - \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^{n-k} Z_k Y_j Y_{n-k-j} \right) \in \mathfrak{p}$ para cada $n \geq 0$. Acabamos de ver que no existe un arco en $\overline{\mathcal{X}}$ que levante a este, es decir, no existe $\mathfrak{q} \in \overline{\mathcal{X}}_\infty$ con $\pi_\infty(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, luego π_∞ no es sobreyectivo en este caso.

Volvamos a la cúspide. Si observamos el anillo $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty} = K[U_0, U_1, \dots]$, vemos que es, de hecho, normal. Esto puede parecer obvio, al tratarse del anillo coordenado del espacio de arcos de una variedad normal, pero no debemos confundir $\overline{\mathcal{X}}_\infty$ con $\overline{\mathcal{X}_\infty} = \overline{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$, es decir, no debemos confundir el espacio de arcos de la normalización con la normalización del espacio de arcos (que es igual a la normalización del espacio de arcos reducido). No sabemos, a priori, si $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty}$ es la normalización de $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$ en su cuerpo de fracciones pero, al tratarse de un anillo normal, tiene sentido plantearse la siguiente pregunta:

Pregunta. En el caso de la cúspide o, más generalmente, para curvas, ¿se tiene la igualdad $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty} = \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}}$ y, por tanto, $\overline{\mathcal{X}}_\infty = \overline{\mathcal{X}_\infty}$? Para empezar, la pregunta no tendría sentido si $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$ y $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty}$ no tuvieran el mismo cuerpo de fracciones, lo cual, es cierto en este caso:

Proposición 5.5. Los cuerpos de fracciones $Fr(\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}})$ y $Fr(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty})$ coinciden (identificando $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$ con su imagen por la inclusión $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty}$).

Demostración. Ya sabemos que se tiene la inclusión $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty}$, luego sabemos que $Fr(\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}) \subseteq Fr(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty})$ y solo falta probar la inclusión contraria. Para ello, basta ver que $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty} \subseteq Fr(\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}})$, es decir, que $U_n \in Fr(\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}})$ para cada $n \geq 0$. Para U_0 , identificando cada X_j e Y_j con su imagen en $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty}$, como $X_0 = U_0^2$ e $Y_0 = U_0^3$, se tiene que $U_0 = Y_0/X_0 \in Fr(\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}})$. Para U_1 , dado que $X_1 = 2U_0U_1$, se tiene que $U_1 = X_1/(2U_0)$ y, como $0 \neq U_0 \in Fr(\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}})$, también $U_1 \in Fr(\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}})$. En general, para cualquier $n \geq 1$, como $X_n = 2U_0U_n + Q_n$, siendo Q_n una expresión polinómica en las variables $U_1, \dots, U_{n-1}$, por inducción, se tiene que $U_n = (X_n - Q_n)/(2U_0) \in Fr(\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}})$. $\square$

Tras esta comprobación, podemos continuar buscando la respuesta a nuestra pregunta. Dado que se tiene $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$ y $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} = K[U_0, U_1, \dots]$ es normal, evidentemente, tendremos $\overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}} \subseteq \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$, pero se desconoce, a priori, si se da o no la inclusión contraria, es decir, si $U_n \in \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}}$ para cada $n \geq 0$. Se sabe que $U_0, U_1 \in \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}}$, ya que:

$$X_0 = U_0^2 \implies U_0^2 - X_0 = 0 \implies U_0 \in \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}}$$

$$U_1^3 + 2Y_3 - 3U_0X_3 - 3U_1X_2 = 0 \implies U_1 \in \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}[U_0]} = \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}}$$

Comprobar estas identidades es sencillo si se recurre a la fórmula general dada para la imagen por π_∞ de X_n e Y_n en $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$. Se desconocen fórmulas como estas para $n \geq 2$. El objetivo principal de la componente investigadora del trabajo es encontrar estas fórmulas y dar respuesta a la pregunta, anteriormente abierta, sobre la relación entre $\overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}}$ y $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$. Esta pregunta se ha podido responder de manera afirmativa, confirmando la igualdad entre dichos anillos para el caso de la cúspide, en la parte final del trabajo.

También merece la pena observar que, fuera o no cierta la identidad $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} = \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}}$ en este caso, no lo es en el caso general, es decir, cuando se trata del espacio de arcos de una variedad arbitraria. Un contraejemplo nos lo da, nuevamente, el paraguas de *Whitney*. Por el “*Going Up Theorem*” ([AM69], teorema 5.10 y [Eis95], proposición 4.15), en una extensión entera de anillos $A \subseteq B$, para todo ideal primo de A existe un ideal primo de B que se contrae a este. En particular, si $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$ es la normalización de $\overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}}$, entonces el morfismo π_∞ es necesariamente sobreyectivo y, en el caso del paraguas de *Whitney*, como hemos visto, no lo es.

5.3. Arcos centrados en el origen

Como en el fondo, lo que interesa estudiar de esta variedad es su comportamiento en torno a su lugar singular, podemos limitar nuestro estudio a los arcos centrados en el origen, es decir, los arcos $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{K}[[t]]$ con $x(t) = 0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \dots$ e $y(t) = 0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \dots$, que corresponden a morfismos $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty} \rightarrow \mathcal{K}$ con $X_0, Y_0 \mapsto 0$, es decir, puntos de $\mathcal{X}_\infty$ que contienen a X_0 e Y_0 como ideales primos de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty}$. Observemos que dichos puntos de $\mathcal{X}_\infty$, corresponden a ideales primos de $K[X_0, X_1, \dots]$ que contienen a $I_{\mathcal{X}_\infty} = (F_0, F_1, \dots)$ y, por tanto, a $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}} = \{F_0\}$. Como $F_2 = Y_1^2 + 2Y_0Y_2 - 3X_0X_1^2 - 3X_0^2X_2$, todo ideal primo de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty}$ que contenga a X_0 e Y_0 , ha de contener a Y_1^2 , luego a Y_1 . Igualmente, como $F_3 = -X_1^3 + \dots$ donde el resto de monomios son todos múltiplos de X_0, Y_0 o Y_1 , también ha de contener a X_1 . Finalmente, como $F_4 = Y_2^2 + \dots$, siendo el resto de monomios múltiplos de X_0, Y_0, X_1 o Y_1 , también ha de contener a Y_2 . Otra forma

de observar este hecho es que, dado que todo arco en $\mathcal{X}$ tiene que cumplir la identidad $y(t)^2 - x(t)^3 = 0$, tiene que cumplirse que $2\text{ord}_t(y(t)) = 3\text{ord}_t(x(t))$, luego si $x(t)$ e $y(t)$ tienen orden positivo (exactamente el caso de los arcos centrados en el origen), necesariamente, $x(t)$ tiene orden ≥ 2 e $y(t)$ tiene orden ≥ 3 , es decir, si X_0, Y_0 pertenecen al núcleo del $\mathcal{K}$ -morfismo inducido en $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty}$, entonces X_1, Y_1 e Y_2 también pertenecen a este. Una última forma de verlo es mediante el morfismo π_∞ que, en este caso, sabemos que es biyectivo. Un $\mathcal{K}$ -arco en $\mathcal{X}$ dado por $x(t), y(t) \in \mathcal{K}[[t]]$ se levanta de manera única a un $\mathcal{K}$ -arco en $\overline{\mathcal{X}}$ dado por $u(t)$, que tiene que cumplir $u(t)^2 = x(t)$ y $u(t)^3 = y(t)$. El $\mathcal{K}$ -arco en $\mathcal{X}$ está centrado en el origen si, y solo si, lo está el K -arco en $\overline{\mathcal{X}}$, es decir, el orden de $x(t)$ y $y(t)$ es positivo si, y solo si, lo es el orden de $u(t)$. Pero, si $\text{ord}_t(u(t)) \geq 1$, entonces $\text{ord}_t(x(t)) = 2\text{ord}_t(u(t)) \geq 2$ y $\text{ord}_t(y(t)) = 3\text{ord}_t(u(t)) \geq 3$.

Vamos a buscar entonces ideales primos de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty}$ o, equivalentemente, de $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$ que contengan a X_0, X_1, Y_0, Y_1 e Y_2 . Más aún, buscamos primos *estables*. Dada una variedad $\mathcal{X}$, un ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\infty}$ es estable si $\overline{\{\mathfrak{p}\}} \not\subseteq (\text{Sing}(\mathcal{X}))_\infty$ (el arco que vimos en el ejemplo del paraguas de Whitney y que se concentraba en su lugar singular es un ejemplo de punto del espacio de arcos que no cumple esta propiedad) y existe un entorno abierto afín W_0 de $\mathfrak{p}$ en $\mathcal{X}_\infty$ tal que $\mathfrak{p}$ es, localmente en $\mathcal{O}_{W_0}$, el radical de un ideal finitamente generado. Este concepto fue introducido en [Reg09] y se conocen ciertas propiedades interesantes de finitud del espacio de arcos localmente en estos puntos ([Reg09],[Reg06]).

Es claro que los ideales $\mathfrak{q}_n = (U_0, \dots, U_{n-1}) \subseteq \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty} = K[U_0, U_1, \dots]$, son primos estables de $\overline{\mathcal{X}}_\infty$ para cada $n \geq 1$. Si consideramos sus imágenes en $\mathcal{X}_\infty$ por π_∞ , $\mathfrak{p}_n = \pi_\infty(\mathfrak{q}_n)$, obtenemos primos estables de $\mathcal{X}_\infty$ ([Reg09], proposición 4.1). Además, es claro que $X_0, \dots, X_{2n-1}$ e $Y_0, \dots, Y_{3n-1}$ están en $\mathfrak{p}_n$ para cada $n \geq 1$, ya que en la expresión de sus imágenes por el morfismo $\pi_\infty^\#$, cada monomio que aparece es múltiplo de algún U_j con $j \leq n-1$. Por tanto, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots$ son primos estables y corresponden a arcos centrados en el origen, como buscábamos. Para atacar el problema de la normalización, una idea podría ser plantearse la siguiente pregunta:

Pregunta. ¿Se tiene, al menos a nivel local, la igualdad entre los anillos $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty, \mathfrak{q}_n}$ y $\overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}}$? Esta pregunta ha sido recientemente respondida de manera afirmativa (teorema 3.4 de [RP24]). Observemos que es más débil que la pregunta en el caso global:

Por ser $\mathfrak{p}_n = \pi_\infty(\mathfrak{q}_n)$, la inclusión $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty}$ induce una inclusión a nivel local $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty, \mathfrak{q}_n}$, siendo $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty, \mathfrak{q}_n}$ normal por serlo $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty}$ ([AM69], proposición 5.13), luego la inclusión $\overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}} \subseteq \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty, \mathfrak{q}_n}$ es cierta en todo caso. Vamos a ver que, para

tener la inclusión contraria, basta con probar que $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}}$, lo cual es cierto si se da la igualdad buscada a nivel global, porque de tenerse $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} = \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}}$, tendríamos además $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} = \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}}$. De esta forma, estamos simplificando el problema a uno más débil. Si no se tuviera la igualdad para algún $n \geq 1$, no podría tenerse para el caso global.

Veamos entonces que para tenerse la inclusión $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty, \mathfrak{q}_n} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}}$, basta con que se tenga $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}}$. Por la proposición 1.10, $\overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}}$ es la intersección de los anillos de valoración de $Fr(\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}) = Fr(\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}})$ que contienen a $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}$. Sea entonces $\mathcal{R}_\nu$ uno de estos anillos de valoración y sea $\mathfrak{m}_\nu$ su ideal maximal. El ideal $\mathfrak{m}_\nu \cap \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}$ es un ideal primo de $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}$, es decir, $\mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{m}_\nu \cap \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$ es un ideal primo de $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$ contenido en $\mathfrak{p}_n$. Por otro lado, si tenemos $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}} \subseteq \mathcal{R}_\nu$, tenemos también un ideal $\mathfrak{q}_\nu = \mathfrak{m}_\nu \cap \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$. La cadena de inclusiones $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} \subseteq \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} \subseteq \mathcal{R}_\nu$ nos permite observar que $\mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{m}_\nu \cap \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} = \mathfrak{m}_\nu \cap \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} \cap \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} = \mathfrak{q}_\nu \cap \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} = \pi_\infty(\mathfrak{q}_\nu)$. Como π_∞ es biyectiva y $\mathfrak{p}_\nu \subseteq \mathfrak{p}_n$, también $\mathfrak{q}_\nu = \pi_\infty^{-1}(\mathfrak{p}_\nu) = \mathfrak{p}_\nu \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} \subseteq \mathfrak{p}_n \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty} = \mathfrak{q}_n$. Entonces, todo elemento de $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$ que no está en $\mathfrak{q}_n$, tampoco está en $\mathfrak{q}_\nu$, es decir, no está en $\mathfrak{m}_\nu$ y es, por tanto, una unidad en $\mathcal{R}_\nu$, luego tenemos una inclusión $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty, \mathfrak{q}_n} \subseteq \mathcal{R}_\nu$ (para cada anillo de valoración $\mathcal{R}_\nu$ de esta forma) y, por tanto, $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty, \mathfrak{q}_n} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}}$, es decir, se tiene la igualdad buscada $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty, \mathfrak{q}_n} = \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}}$.

5.4. Normalización del espacio de arcos

En esta sección, vamos a responder a la pregunta, previamente abierta, sobre la normalización del espacio de arcos a nivel global, en el caso de la cúspide. Concretamente, vamos a demostrar que, en este caso, para cada $n \geq 0$, existe un polinomio mónico en $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}[U_0, \dots, U_{n-1}]$ que se anula en U_n , demostrando así por inducción que U_n es íntegro sobre $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$ para cada $n \geq 0$ y concluyendo que $\overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}} = \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$. Recordemos que estamos trabajando sobre un cuerpo K de característica 0.

Para entender mejor la forma en que vamos a encontrar dicho polinomio mónico, vamos a hacerlo primero explícitamente para U_2 . Intentemos expresar U_2^4 como una combinación lineal de términos en los que aparezcan las variables X_n e Y_n , así como U_0, U_1 y U_2 . Recordemos las dos graduaciones “ μ ” y “deg” que hemos estado manejando en $K[X_0, X_1, \dots]$, con $\mu(X_n) = 2$ y $\mu(Y_n) = 3$, pero $\deg(X_n) = \deg(Y_n) = n$ para cada $n \geq 0$. Dado que $I_{\mathcal{X}_\infty}$ y, por tanto, $\sqrt{I_{\mathcal{X}_\infty}}$ son homogéneos para estas graduaciones, tenemos dos graduaciones definidas en $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$, dadas por la misma expresión pero actuando sobre las clases de equivalencia. De ahora en adelante, vamos a trabajar en el anillo $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$ y su

inclusión en $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$, así que X_n e Y_n denotarán clases de equivalencia, y no variables en $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$. De esta forma, podemos identificar $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$ con su imagen en $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$ y escribir, por ejemplo, $X_0 = U_0^2$, $X_1 = 2U_0U_1$... Las graduaciones “ μ ” y “deg”, consideradas en $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$, se extienden a graduaciones en $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_\infty}$ al definir $\mu(U_n) = 1$ y $\deg(U_n) = n$ para cada $n \geq 0$. Así, tenemos que $\mu(U_2^4) = 4$ y $\deg(U_2^4) = 8$, así que vamos a considerar todas los posibles términos de grado $\mu = 4$ pero $\deg = 8$ utilizando las variables X_n, Y_n, U_0, U_1 y U_2 . Evidentemente, si buscamos términos con estos grados, solo podemos utilizar $X_0, \dots, X_8$ e $Y_0, \dots, Y_8$, además de U_0, U_1 y U_2 . Las posibles formas de formar términos de grado $\mu = 4$ y $\deg = 8$ de esta forma son:

- $X_n X_j$ con $n + j = 8$.
- $U_n Y_j$ con $n + j = 8$ y $n \leq 2$.
- $U_n U_j X_k$ con $n + j + k = 8$ y $n, j \leq 2$.
- $U_n U_j U_k U_l$ con $n + j + k + l = 8$ y $n, j, k, l \leq 2$.

Del último tipo, el único término posible es el propio U_2^4 . A cada uno de los otros términos le vamos a asociar una indeterminada: A_0 a los del primer tipo, A_1 a los del segundo y A_2 al los del tercero. Vamos a buscar una solución a la ecuación:

$$A_0 \sum_{n=0}^8 X_n X_{8-n} + A_1 \sum_{n=0}^2 U_n Y_{8-n} + A_2 \sum_{n=0}^2 \left(\sum_{j=0}^2 U_n U_j X_{8-n-j} \right) = U_2^4. \quad (3)$$

Tras desarrollar cada X_n e Y_n en su expresión como combinación de las U_j , cada monomio de la forma $U_n U_j U_k U_l$ con $n \leq j \leq k \leq l$ y $n + j + k + l = 8$ aparece en algunos de estos sumandos, luego aparece en la expresión de la izquierda acompañado de cierto coeficiente, que es una combinación lineal de las incógnitas A_0, A_1 y A_2 . Queremos que todas estas combinaciones lineales se anulen, salvo aquella que acompaña al monomio U_2^4 , que tiene que quedar igualada a 1. Obtenemos así una serie de ecuaciones, todas homogéneas menos una. Por ejemplo, el monomio $U_0^3 U_8$ aparece en los sumandos $A_0(X_0 X_8) + A_0(X_8 X_0) + A_1(U_0 Y_8) + A_2(U_0^2 X_8)$. Como $X_0 = U_0^2$, $X_8 = 2U_0 U_8 + \dots$ e $Y_8 = 3U_0^2 U_8 + \dots$, la ecuación que da este monomio es $4A_0 + 3A_1 + 2A_2 = 0$. La única ecuación no homogénea, que corresponde al monomio U_2^4 , es $A_0 + A_1 + A_2 = 1$, ya que este monomio sale en los sumandos $A_0(X_4^2) + A_1(U_2 Y_6) + A_2(U_2^2 X_4)$, con coeficiente 1 en todos casos, porque $X_4 = U_2^2 + \dots$ e $Y_6 = U_2^3 + \dots$.

A priori, puede parecer que el sistema no va a tener solución, ya que el número de ecuaciones (una por cada forma de considerar $0 \leq n \leq j \leq k \leq l$ con $n + j + k + l = 8$) es muy superior al número de incógnitas (únicamente 3). Observemos, sin embargo, que

muchas de estas ecuaciones son superfluas y podemos encontrar 3 de ellas de forma que, si A_0, A_1 y A_2 las verifican, entonces verifican todas las demás. Estas ecuaciones son:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ 4A_0 + 3A_1 + 2A_2 = 0 \\ 6A_0 + 3A_1 + A_2 = 0 \end{cases} \iff A_0 = 3, A_1 = -8, A_2 = 6.$$

El motivo de que estas ecuaciones sean suficientes para verificar el resto es el siguiente: Si consideramos $U_n U_j U_k U_l$ con $n \leq j \leq k \leq l$ y con $n + j + k + l = 8$, se tiene uno de los siguientes casos:

- 1) $l \leq 2$, es decir, $n, j, k, l \leq 2$. En este caso, dado que $n + j + k + l = 8$, la única posibilidad es $n = j = k = l = 2$, es decir, el único monomio de esta forma es U_2^4 , que aporta la primera ecuación, como hemos visto antes.
- 2) $n, j, k \leq 2$ pero $l > 2$. Este es el caso, por ejemplo, del monomio $U_0^3 U_8$ que hemos mencionado antes y que aporta la segunda ecuación. En general, se puede comprobar que la ecuación que aporta cualquier monomio de esta forma es proporcional a esta. Por ejemplo, la ecuación que aporta $U_0^2 U_1 U_7$ es $8A_0 + 6A_1 + 4A_2 = 0$, y la que aporta $U_0 U_1 U_2 U_5$ es $24A_0 + 18A_1 + 12A_2 = 0$.
- 3) $n, j \leq 2$ pero $k, l > 2$. Un ejemplo de este caso es el monomio $U_0^2 U_4^2$, que aporta la tercera y última ecuación. Otros ejemplos son $U_0 U_2 U_3^2$ o $U_0 U_1 U_3 U_4$, cuyas ecuaciones son proporcionales a esta, multiplicadas por 2 y por 4 respectivamente.

No hay más opciones, ya que si $j, k, l > 2$, es decir, $j, k, l \geq 3$, entonces $j + k + l \geq 9 > 8$ y n tendría que ser negativo para cumplir $n + j + k + l = 8$, lo cual es absurdo. Para comprobar que, efectivamente, estas son las ecuaciones que aporta cada monomio, es decir, que estos son los coeficientes que los acompañan al desarrollar el lado izquierdo de la ecuación (3) sustituyendo cada X_n y cada Y_n por su expresión en función de las variables U_j , se puede usar un programa como *Singular* [DGPS24]. En el Anexo, se presenta un *script* de dicho programa que puede ejecutarse para comprobar estas afirmaciones, así como la igualdad:

$$3 \sum_{n=0}^8 X_n X_{8-n} - 8 \sum_{n=0}^2 U_n Y_{8-n} + 6 \sum_{n=0}^2 \left(\sum_{j=0}^2 U_n U_j X_{8-n-j} \right) = U_2^4.$$

De todas maneras, vamos a pasar al caso general y probaremos las afirmaciones que, en este caso, hemos dejado sin comprobar, como el motivo de que ciertas ecuaciones sean proporcionales y, por tanto, nos baste con buscar la solución de un sistema con muchas menos ecuaciones que el sistema que se obtiene originalmente.

De la misma forma que hemos definido un sistema para encontrar una combinación lineal de términos cuyo resultado es U_2^4 , para cada $N \geq 0$, vamos a plantear un sistema que dé lugar a una combinación lineal cuyo resultado sea U_N^{N+2} y que permita afirmar que U_N es íntegro sobre $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}$. Primero vamos a entender la manera en que se definirá el sistema:

El monomio U_N^{N+2} tiene grados $\mu = N + 2$ y $\deg = N(N + 2)$. En la expresión que buscamos podrá aparecer cualquier término en las variables X_n e Y_n , así como $U_0, \dots, U_N$, cuyos grados sean también $\mu = N + 2$ y $\deg = N(N + 2)$. En particular, solo se emplearán las variables X_n e Y_n con $0 \leq n \leq N(N + 2)$. La idea ahora sería asociar una incógnita a cada manera de formar un término así, pero antes, hay que hacer una observación.

Pongámonos en el caso $N = 4$, donde se busca una expresión para U_4^6 , y veamos qué términos se pueden utilizar en este caso. Tenemos términos de la forma $U_n U_j U_k U_l X_m$, $U_n U_j U_k Y_l$, $U_n U_j X_k X_l$ y $U_n X_j Y_k$, en los que aparece alguna variable U . En cada uno de ellos, la cantidad de U 's que aparecen es distinta y no hay otra manera de formar un término con la misma cantidad. Sin embargo, para formar términos en los que no aparezca ninguna U , tenemos dos formas distintas: $X_n X_j X_k$ e $Y_n Y_j$. Si le asociamos una incógnita a cada término, igual que hicimos en el caso de U_2^4 , y suponemos que A y B son, respectivamente, las incógnitas que hemos asociado a estos dos últimos términos, la ecuación que planteamos sería la siguiente:

$$A \sum_{n=0}^{24} \left(\sum_{j=0}^{24-n} X_n X_j X_{24-n-j} \right) + B \sum_{n=0}^{24} Y_n Y_{24-n} + \dots = U_4^6.$$

Sin embargo, observemos que uno de estos dos sumandos es superfluo, ya que:

$$\sum_{n=0}^{24} \left(\sum_{j=0}^{24-n} X_n X_j X_{24-n-j} \right) = \sum_{n=0}^{24} Y_n Y_{24-n}.$$

y, por tanto, basta con considerar uno de ellos (recordemos que estamos trabajando con clases de equivalencia y, en $K[\underline{X}_0, \underline{X}_1, \dots]$, la diferencia de estos sumandos es exactamente la expresión de F_{24}).

Volviendo al caso general $N \geq 0$, cuando estudiemos los términos que pueden aparecer en nuestra ecuación y le asociemos una incógnita a cada uno, bastará con considerar aquellos en los que no aparezcan 2 o más variables Y_k . De esta forma, para cada n con $0 \leq n \leq N$, hay una única manera de formar un término de grado $\mu = N + 2$ con n variables U_j y, a lo sumo, una variable Y_k . Vamos a asociar la incógnita A_n a los términos

con n variables U_j y definimos S_n como el sumatorio de todos los términos de este tipo. La ecuación que vamos a plantear es entonces: $A_0S_0 + A_1S_1 + \cdots + A_NS_N = U_N^{N+2}$.

Como ejemplo para entender mejor esta ecuación, en el caso de U_4^6 es:

$$\begin{aligned} & A_0 \sum_{n=0}^{24} \left(\sum_{j=0}^{24-n} X_n X_j X_{24-n-j} \right) + A_1 \sum_{n=0}^4 \left(\sum_{j=0}^{24-n} U_n X_j Y_{24-n-j} \right) \\ & + A_2 \sum_{n,j=0}^4 \left(\sum_{k=0}^{24-n-j} U_n U_j X_k X_{24-n-j-k} \right) + A_3 \sum_{n,j,k=0}^4 U_n U_j U_k Y_{24-n-j-k} \\ & + A_4 \sum_{n,j,k,l=0}^4 U_n U_j U_k U_l X_{24-n-j-k-l} = U_4^6. \end{aligned}$$

Proposición 5.6. Para cada $N \geq 0$, existen $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{Q}$ únicos para los que se da la igualdad $a_0S_0 + a_1S_1 + \cdots + a_NS_N = U_N^{N+2}$, siendo S_n el sumatorio de todos los monomios de la forma $U_{j_1} \cdots U_{j_n} X_{k_1} \cdots X_{k_m} Y_k$ con $0 \leq j_1, \dots, j_n \leq N$ y $0 \leq k_1, \dots, k_m, k$ de grados $\mu = N$ y $\deg = N(N+2)$, para cada $0 \leq n \leq N$.

Demostración. Vamos a considerar la ecuación

$$A_0S_0 + A_1S_1 + \cdots + A_NS_N = U_N^{N+2}, \quad (4)$$

siendo $A_0, \dots, A_N$ incógnitas. Al sustituir cada variable X_n e Y_n por su expresión en función de las U_j , obtendremos un sumatorio de términos de la forma $U_{j_1} U_{j_2} \cdots U_{j_{N+2}}$ con $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_{N+2}$ y $j_1 + j_2 + \cdots + j_{N+2} = N(N+2)$, acompañados de cierto coeficiente, que será una combinación lineal de las incógnitas $A_0, \dots, A_N$. Igualando cada uno de estos coeficientes a 0, excepto el correspondiente al monomio U_N^{N+2} , que se iguala a 1, obtenemos un sistema de ecuaciones cuyas soluciones (si las tiene) verifican la ecuación (4).

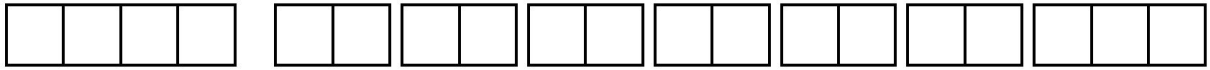
Veamos cómo es el coeficiente que acompaña a cada monomio. Consideremos un monomio $U_{j_1} U_{j_2} \cdots U_{j_{N+2}}$ con $j_1 \leq \cdots \leq j_{N+2}$ y $j_1 + \cdots + j_{N+2} = N(N+2)$. Supongamos que $j_1 \leq \cdots \leq j_{N+2-r} \leq N$, pero $N < j_{N+2-(r-1)} \leq \cdots \leq j_{N+2}$, es decir, solo los r últimos subíndices $j_{N+2-(r-1)}, \dots, j_{N+2}$ son estrictamente mayores que N . Supongamos además que en $j_1, \dots, j_{N+2-r}$, los α_1 primeros valores son iguales, los α_2 siguientes son iguales entre sí pero mayores que los anteriores, y seguimos así, hasta llegar a los α_t últimos que son iguales entre sí y mayores que los anteriores. Es decir, en $j_1, \dots, j_{N+2-r}$ hay t valores distintos, cada uno repetido α_i veces. De igual forma, supongamos que en

$j_{N+2-(r-1)}, \dots, j_{N+2}$ hay s valores distintos, cada uno de ellos repetido β_i veces. Entonces, el coeficiente que acompaña a este monomio es:

$$\left(A_0 \binom{N+2}{r} + A_1 \binom{N+1}{r} + \dots + A_N \binom{2}{r} \right) \cdot \left(\frac{(N+2-r)!}{\alpha_1! \dots \alpha_t!} \right) \cdot \left(\frac{r!}{\beta_1! \dots \beta_s!} \right). \quad (5)$$

Para demostrarlo, fijemos $0 \leq n \leq N$. A_n aparece en el coeficiente correspondiente a este monomio acompañado de tres factores. Vamos a entender por qué estos 3 factores corresponden a las distintas formas en que se pueden reordenar y agrupar las variables del monomio dejando únicamente n de ellas libres.

Para empezar, imaginemos que tenemos $N+2$ casillas vacías que vamos a rellenar con las variables del monomio de todas las formas posibles. Vamos a separar las n primeras, que corresponden a las n variables U_j que quedan libres. El resto de casillas, las separamos de 2 en 2 y, si al final queda una libre (porque $N+2-n$ es impar), la unimos a la última pareja de casillas. Que 2 (o 3) variables U_j aparezcan juntas en uno de estos grupos de 2 (o 3) casillas significa que van a obtenerse al desarrollar el X_k (o Y_k) correspondiente a la suma de sus subíndices.

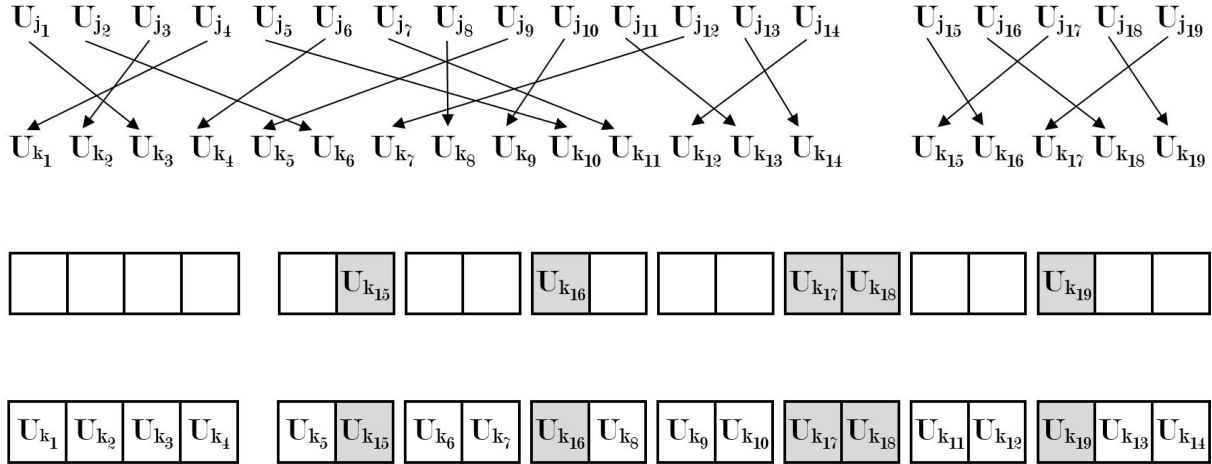


En esta imagen, que usamos como ejemplo, estamos suponiendo que $N+2 = 19$ (es decir, $N = 17$) y que $n = 4$. Ahora nos fijamos en las variables $U_{j_1}, \dots, U_{j_{N+2}}$ con las que tenemos que rellenar la figura. Como $j_{N+2-(r-1)}, \dots, j_{N+2} > N$, estas últimas r variables no pueden aparecer en las n primeras casillas, que hemos reservado para aquellas variables que aparecerán sin agrupar. Entonces, entre las últimas $N+2-n$ casillas, vamos a reservar r posiciones, que serán las que ocuparán las variables $U_{j_{N+2-(r-1)}}, \dots, U_{j_{N+2}}$.



En esta figura, suponemos que $r = 5$. Observemos que hay $\binom{N+2-n}{r}$ formas distintas de hacer esta elección de casillas. En el caso en que $r > N+2-n$, este paso sería imposible de dar, es decir, no podríamos seleccionar r casillas entre las $N+2-n$ últimas, pero en tal caso, se define $\binom{N+2-n}{r} = 0$, así que no se estaría teniendo en cuenta. Dada esta elección de casillas, hay tantas maneras de rellenar la figura como formas de rellenar las casillas blancas con las $N+2-r$ primeras variables y las casillas grises con las r últimas,

es decir, hay tantas formas de rellenar la figura como reordenaciones de $U_{j_1}, \dots, U_{j_{N+2-r}}$ y de $U_{j_{N+2-(r-1)}}, \dots, U_{j_{N+2}}$. Teniendo en cuenta que entre estas variables puede haber varias repetidas, hay $\left(\frac{(N+2-r)!}{\alpha_1! \dots \alpha_t!}\right)$ y $\left(\frac{r!}{\beta_1! \dots \beta_s!}\right)$ formas de realizar dichas reordenaciones respectivamente.



Podemos observar entonces que el sistema de ecuaciones que estábamos considerando, puede reducirse a un sistema con $N + 1$ ecuaciones (y $N + 1$ incógnitas):

$$\begin{cases} \binom{N+2}{0} A_0 + \binom{N+1}{0} A_1 + \dots + \binom{2}{0} A_N = 1 \\ \binom{N+2}{1} A_0 + \binom{N+1}{1} A_1 + \binom{2}{1} A_2 = 0 \\ \vdots \\ \binom{N+2}{N} A_0 + \binom{N+1}{N} A_2 + \dots + \binom{2}{N} A_N = 0 \end{cases}$$

La primera de las ecuaciones, corresponde al monomio U_N^{N+2} que, como ya mencionamos, queremos que aparezca con coeficiente 1. Las demás ecuaciones corresponden a pedir que el resto de monomios se anulen. Pidiendo que se anule la r -ésima ecuación, se anula cualquier monomio con r variables U_j tales que $j > N$. Solo hay que llegar hasta el caso $r = N$ porque si se tuviera $r = N + 1$, entonces $N + 1$ subíndices son estrictamente mayores que N , es decir, mayores o iguales que $N + 1$, pero $(N + 1)^2 = N(N + 2) + 1 > N(N + 2)$ y la suma total de los subíndices de las variables de este monomio (que coincide con su grado $\deg$) tiene que ser $N(N + 2)$ (el subíndice restante tendría que ser negativo, lo cual es absurdo).

La matriz de este sistema es, por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} \binom{N+2}{0} & \binom{N+1}{0} & \cdots & \binom{2}{0} \\ \binom{N+2}{1} & \binom{N+1}{1} & \cdots & \binom{2}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{N+2}{N} & \binom{N+1}{N} & \cdots & \binom{2}{N} \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz, que es cuadrada, es no nulo ([GV85], corolario 2), luego este sistema tiene solución (en $\mathbb{Q}$), y es única, para cada elección de los términos independientes de las ecuaciones y, en particular, para los que nos interesan.

Observación. Podemos además afirmar que no podemos encontrar una solución de esta forma para U_N^K si $K < N + 2$. En este caso, si seguimos los mismos razonamientos, tendríamos $K - 1$ incógnitas: $A_0, \dots, A_{K-2}$ y la matriz del sistema que obtenemos es:

$$A = \begin{pmatrix} \binom{K}{0} & \binom{K-1}{0} & \cdots & \binom{2}{0} \\ \binom{K}{1} & \binom{K-1}{1} & \cdots & \binom{2}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{K}{K-2} & \binom{K-1}{K-2} & \cdots & \binom{2}{K-2} \\ \binom{K}{K-1} & \binom{K-1}{K-1} & \cdots & \binom{2}{K-1} \end{pmatrix}$$

En este caso, la matriz no es cuadrada, tiene K filas y $K - 1$ columnas, es decir, el sistema tiene una ecuación más que el número de incógnitas. Esto se debe a que el razonamiento por el cual no se consideraba el caso $r = N$ en la demostración anterior, no es cierto en este caso. Como $(K - 1)(N + 1) = KN + (K - 1) - N < KN$, en este caso, se tiene que $KN - (K - 1)(N + 1) > 0$ y el monomio $U_{KN-(K-1)(N+1)} U_{N+1}^{K-1}$ aporta una ecuación más. La matriz de este sistema, quitando la primera fila, es cuadrada y tiene determinante no nulo, luego la única solución de las ecuaciones homogéneas es la trivial, que no cumple la primera ecuación. El sistema es, por tanto, incompatible en este caso. $\square$

Como consecuencia inmediata de este resultado, obtenemos la respuesta a nuestra pregunta inicial y, con ella, una nueva prueba del caso local (para la cúspide) en cada uno de los puntos estables que mencionamos previamente:

Teorema 5.7. Sea K un cuerpo de característica 0 y sea $\mathcal{X} = \text{Spec}(K[x, y]/(y^2 - x^3))$ la cúspide. Se tiene $\overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}}} = \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}_\infty}}$ y, por tanto, $\overline{\mathcal{X}_\infty} = \overline{(\mathcal{X}_\infty)_{red}} = \overline{\mathcal{X}_\infty}$, es decir, la normalización del espacio de arcos $\mathcal{X}_\infty$ de esta variedad coincide con el espacio de arcos de su normalización.

Corolario 5.8. ([RP24], teorema 3.4) Sea K un cuerpo de característica 0 y sea $\mathcal{X} = \text{Spec}\left({}^K[x,y]/(y^2-x^3)\right)$ la cúspide. Sean $\mathfrak{q}_n = (U_0, \dots, U_{n-1}) \in \text{Spec}(K[U_0, U_1, \dots]) = \overline{\mathcal{X}}_\infty$ y $\mathfrak{p}_n = \pi_\infty(\mathfrak{q}_n) \in (\mathcal{X}_\infty)_{red}$, puntos estables de $\overline{\mathcal{X}}_\infty$ y $(\mathcal{X}_\infty)_{red}$ respectivamente para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, se tiene $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{X}}_\infty, \mathfrak{q}_n} = \overline{\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_\infty)_{red}, \mathfrak{p}_n}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Referencias

- [AM69] Atiyah, M. F. and MacDonald, I. G. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley series in mathematics ; 361. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts [etc, 1969.
- [dF17] Tommaso de Fernex. The space of arcs of an algebraic variety, 2017.
- [DGPS24] Wolfram Decker, Gert-Martin Greuel, Gerhard Pfister, and Hans Schönemann. SINGULAR 4-4-0 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de>, 2024.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer New York, New York, NY, 1st ed. 1995. edition, 1995.
- [GV85] Ira Gessel and Gérard Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Advances in Mathematics*, 58(3):300–321, 1985.
- [Har77] Robin. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 52. Springer New York, New York, NY, 1st ed. 1977. edition, 1977.
- [JMJ16] János Kollár Jennifer M. Johnson. Arcology. *American Mathematical Monthly*, 123:519, 2016.
- [Kap71] I. Kaplansky. *An introduction to differential algebra*. Actualitées scientifiques et industrielles ; 1251. Hermann, París, 2nd ed. edition, 1971.
- [Kol73] E. R. Kolchin. *Differential algebra and algebraic groups*. Pure and applied mathematics ; 54. Academic Press, New York [etc, 1973.
- [Kol03] Shihoko Kollár, János; Shihoko Ishii. The nash problem on arc families of singularities. *Duke Mathematical Journal*, 120:601–620, 2003.
- [Loe99] Jan Denef; François Loeser. Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. *Inventiones mathematicae*, 135:201–232, 1999.
- [Mat86] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*. Cambridge studies in advanced mathematics ; 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [Nag62] Masayoshi Nagata. *Local Rings*. Interscience Publishers, 1962.
- [Nas95] John F. Nash, Jr. Arc structure of singularities. *Duke Mathematical Journal*, 81:31–38, 1995.

- [Reg06] Ana J. Reguera. A curve selection lemma in spaces of arcs and the image of the nash map. *Compositio Mathematica*, 142:119–130, 2006.
- [Reg09] Ana J. Reguera. Towards the singular locus of the space of arcs. *American Journal of Mathematics*, 131(2):313–350, 2009.
- [RP24] Ana J. Reguera and Olivier Piltant. Algebraic properties of arc spaces. (pre-print). 2024.
- [Vaq06] Michel Vaquié. Valuations and local uniformization. *Adv. Stud. Pure Math*, 43, 01 2006.
- [ZS91] Oscar Zariski and Pierre Samuel. *Commutative algebra. 2*. Graduate texts in Mathematics ; 29. Springer, New York [etc, 1991.

Anexo

```
LIB "general.lib";
int n,j,k,l,L,J,S;

int N=6;      // Modificar este número para comprobar cada caso.
int K=N+2; int KN=N*K;

//----- Definir Anillo y Variables -----
//En el anillo, las variables que consideramos son las U(n) y las incógnitas
//del sistema. Cada X(n) y Y(n) se definirá como un polinomio en las U(j).

ring R=0,(A(0..N),U(0..KN)),lp;

poly V(-1)=1;
for (n=0; n<=KN; n++){
    poly X(n)=0;
    poly Y(n)=0;
    poly X(-n-1)=0;
    poly Y(-n-1)=0;
    poly U(-n-1)=0;
    poly V(n)=V(n-1)*U(n);      // V(n)=U(0)*...*U(n)
    for (j=0; j<=n; j++){
        X(n)=X(n)+U(j)*U(n-j);
    }
    for (j=0; j<=n; j++){
        for (k=0; k<=n-j; k++){ Y(n)=Y(n)+U(j)*U(k)*U(n-j-k);}
    }
}
```

```
//----- Combinatorios -----
// Definimos una función que calcula números combinatorios, ya que no viene
implementada por defecto.
```

```
proc comb(int a, int b){
    int c,n;
    if(a>=b and b>=0){
        c=1;
        for(n=b+1;n<=a;n++){c=c*n;}
        for(n=2;n<=a-b;n++){c=c div n;}
    };
    return(c);
}
```

```
// ----- Resolver Sistema -----
//Se calcula la solución del sistema, de forma que a(n) es el valor que tiene que
tomar A(n).
```

```
poly g;
for(n=0;n<N;n++){
    for(j=0;j<=N;j++){g=g+comb(K-j,N-n)*A(j);}
    for(j=0;j<n;j++){g=subst(g,A(j),a(j));}
    poly a(n)=-(coeffs(g,A(n))[1,1])/(coeffs(g,A(n))[2,1]);
    g=0;
}
for(j=0;j<=N;j++){g=g+A(j);}
for(j=0;j<N;j++){g=subst(g,A(j),a(j));}
poly a(N)=(1-coeffs(g,A(N))[1,1])/(coeffs(g,A(N))[2,1]);
for(n=0;n<N;n++){for(j=n+1;j<=N;j++){a(n)=subst(a(n),A(j),a(j));}}
```



```
// ----- Comprobar polinomio -----
// A partir de U(5), el programa tarda en ejecutarse. U(7) tarda varias horas/días.

// ----- U2 -----
// El polinomio f corresponde a la ecuación con las incógnitas sin substituir.
// El polinomio g es el resultado de substituir A(n) por el valor a(n)
correspondiente.
// g debería ser  $U(N)^{(N+2)}$ .

poly f;
for(n=0;n<=KN;n++){f=f+A(0)*X(n)*X(KN-n);}
for(n=0;n<=N;n++){
    f=f+A(1)*U(n)*Y(KN-n);
    for(j=0;j<=N;j++){f=f+A(2)*U(n)*U(j)*X(KN-n-j);}
}
poly g=f;
for(n=0;n<=N;n++){g=subst(g,A(n),a(n));}
g;

// Para comprobar las ecuaciones que se mencionaban explícitamente en el caso de
U(2):
coef(f,V(KN));          // El monomio en la posición [1,n] tiene coeficiente
[2,n].
```

```
//          ----- U3 -----
```

```
poly f;
for(n=0;n<=KN;n++){f=f+A(0)*X(n)*Y(KN-n);}
for(n=0;n<=N;n++){
    for(j=0;j<=KN-n;j++){f=f+A(1)*U(n)*X(j)*X(KN-n-j);}
    for(j=0;j<=N;j++){
        f=f+A(2)*U(n)*U(j)*Y(KN-n-j);
        for(k=0;k<=N;k++){f=f+A(3)*U(n)*U(j)*U(k)*X(KN-n-j-k);}
    }
}
poly g=f;
for(n=0;n<=N;n++){g=subst(g,A(n),a(n));}
g;
```

```
//          ----- U4 -----
```

```
poly f;
for(n=0;n<=KN;n++){
    for(j=0;j<=KN;j++){f=f+A(0)*X(n)*X(j)*X(KN-n-j);}
}
for(n=0;n<=N;n++){
    for(j=0;j<=KN-n;j++){f=f+A(1)*U(n)*X(j)*Y(KN-n-j);}
    for(j=0;j<=N;j++){
        for(k=0;k<=KN-n-j;k++){f=f+A(2)*U(n)*U(j)*X(k)*X(KN-n-j-k);}
        for(k=0;k<=N;k++){
            f=f+A(3)*U(n)*U(j)*U(k)*Y(KN-n-j-k);
            for(l=0;l<=N;l++){f=f+A(4)*U(n)*U(j)*U(k)*U(l)*X(KN-n-j-k-l);}
        }
    }
}
poly g=f;
for(n=0;n<=N;n++){g=subst(g,A(n),a(n));}
g;
```

```

//          ----- U5 -----

poly f;
for(n=0;n<=KN;n++){
    for(j=0;j<=KN-n;j++){f=f+A(0)*X(n)*X(j)*Y(KN-n-j);}
}
for(n=0;n<=N;n++){
    for(j=0;j<=KN-n;j++){
        for(k=0;k<=KN-n-j;k++){f=f+A(1)*U(n)*X(j)*X(k)*X(KN-n-j-k);}
    }
    for(j=0;j<=N;j++){
        for(k=0;k<=KN-n-j;k++){f=f+A(2)*U(n)*U(j)*X(k)*Y(KN-n-j-k);}
        for(k=0;k<=N;k++){
            for(l=0;l<=KN-n-j-k;l++){f=f+A(3)*U(n)*U(j)*U(k)*X(l)*X(KN-n-j-
k-1);}
            for(l=0;l<=N;l++){
                f=f+A(4)*U(n)*U(j)*U(k)*U(l)*Y(KN-n-j-k-1);
                for(L=0;L<=N;L++){f=f+A(5)*U(n)*U(j)*U(k)*U(l)*U(L)*X(KN-
n-j-k-1-L);}
            }
        }
    }
}
poly g=f;
for(n=0;n<=N;n++){g=subst(g,A(n),a(n));}
g;

```

```

//          ----- U6 -----      (ALTO COSTE COMPUTACIONAL)
// Puede tardar varios minutos/horas.

poly f;
for(n=0;n<=KN;n++){
    for(j=0;j<=KN-n;j++){for(k=0;k<=KN;k++){f=f+A(0)*X(n)*X(j)*X(k)*X(KN-n-j-k);}}
}
for(n=0;n<=N;n++){
    for(j=0;j<=KN-n;j++){
        for(k=0;k<=KN-n-j;k++){f=f+A(1)*U(n)*X(j)*X(k)*Y(KN-n-j-k);}}
    }
    for(j=0;j<=N;j++){
        for(k=0;k<=KN-n-j;k++){for(l=0;l<=KN;l++){f=f+A(2)*U(n)*U(j)*X(k)*X(l)*X(KN-n-j-k-l);}}}
        for(k=0;k<=N;k++){
            for(l=0;l<=KN-n-j-k;l++){f=f+A(3)*U(n)*U(j)*U(k)*X(l)*Y(KN-n-j-k-l);}}
            for(l=0;l<=N;l++){
                for(L=0;L<=KN;L++){f=f+A(4)*U(n)*U(j)*U(k)*U(l)*X(L)*X(KN-n-j-k-l-L);}}
                for(L=0;L<=N;L++){f=f+A(5)*U(n)*U(j)*U(k)*U(l)*U(L)*Y(KN-n-j-k-l-L);}}
                for(J=0;J<=N;J++){f=f+A(6)*U(n)*U(j)*U(k)*U(l)*U(L)*U(J)*X(KN-n-j-k-l-L-J);}}
            }
        }
    }
}
poly g=f;
for(n=0;n<=N;n++){g=subst(g,A(n),a(n));}
g;

```

```

//          ----- U7 -----      (NO RECOMENDADO, MUY ALTO COSTE COMPUTACIONAL)
// Puede tardar varias horas/días o, directamente, no acabar.

poly f;
for(n=0;n<=KN;n++){
    for(j=0;j<=KN-n;j++){for(k=0;k<=KN;k++){f=f+A(0)*X(n)*X(j)*X(k)*Y(KN-n-j-k);}}
}
for(n=0;n<=N;n++){
    for(j=0;j<=KN-n;j++){
        for(k=0;k<=KN-n-j;k++){for(l=0;l<=KN-n-j-k;l++){f=f+A(1)*U(n)*X(j)*X(k)*X(l)*X(KN-n-j-k-l);}}}
    }
    for(j=0;j<=N;j++){
        for(k=0;k<=KN-n-j;k++){for(l=0;l<=KN-n-j-k;l++){f=f+A(2)*U(n)*U(j)*X(k)*X(l)*Y(KN-n-j-k-l);}}}
        for(k=0;k<=N;k++){
            for(l=0;l<=KN-n-j-k;l++){for(L=0;L<=KN-n-j-k-l;L++){f=f+A(3)*U(n)*U(j)*U(k)*X(l)*X(L)*X(KN-n-j-k-l-L);}}}
            for(l=0;l<=N;l++){
                for(L=0;L<=KN;L++){f=f+A(4)*U(n)*U(j)*U(k)*U(l)*X(L)*Y(KN-n-j-k-l-L);}}
                for(L=0;L<=N;L++){for(J=0;J<=KN-n-j-k-l-L;J++){f=f+A(5)*U(n)*U(j)*U(k)*U(l)*U(L)*X(J)*X(KN-n-j-k-l-L-J);}}}
                for(J=0;J<=N;J++){
                    f=f+A(6)*U(n)*U(j)*U(k)*U(l)*U(L)*U(J)*Y(KN-n-j-k-l-L-J);
                }
            }
        }
    }
}
poly g=f;
for(n=0;n<=N;n++){g=subst(g,A(n),a(n));}
g;

```