UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Didáctica de las CC.EE., CC.SS. y de la Matemática

Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para trabajar los procesos de representación, conjeturación y demostración a través de contenidos de geometría sintética en la ESO

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumna: Raquel Hurtado García

Tutor: Dr. Matías Arce Sánchez

Valladolid, julio de 2024

Resumen:

La nueva ley de Educación (LOMLOE) introduce una serie de competencias específicas en matemáticas inspiradas, en gran medida, en los procesos clave asociados a hacer matemáticas que destaca el NCTM (2003). Entre esos procesos clave están los de representación de objetos matemáticos, los de razonamiento y demostración. La geometría sintética nos ofrece oportunidades para trabajar esos procesos con los alumnos. En el TFM se presenta una propuesta didáctica para un grupo de alumnos de 3º ESO con las que poder ayudar a los estudiantes a desarrollar esos procesos de comunicación, representación, visualización y fomentar la capacidad de argumentación, conjeturación, razonamiento y demostración, a través de contenidos de geometría sintética: triángulos, cuadriláteros, polígonos cóncavos y convexos, relaciones angulares y movimientos en el plano. Esta propuesta didáctica se implementó en parte en el módulo de prácticas lo que posibilitó la realización su análisis.

Palabras clave:

Geometría sintética, representación, argumentación, conjeturación, razonamiento, demostración.

Abstract:

The Education Law (LOMLOE) introduces a series of specific competencies in mathematics inspired, to a large extent, by the key processes associated with doing mathematics highlighted by the NCTM (2003). Among these key processes are those of representation of mathematical objects, reasoning and proof. Synthetic geometry offers us opportunities to work on these processes with students. In the TFM, we present a didactic proposal for a group of 3rd ESO students with which to help students develop these processes of communication, representation, visualization and promote the ability to argument, conjecture, reason and proof, through synthetic geometry content: triangles, quadrilaterals, concave and convex polygons, angular relationships and movements in the plane. This didactic proposal was partly implemented in the internship module, which made it possible to carry out its analysis.

Key words:

Synthetic geometry, representation, argumentation, conjecture, reasoning, proof.

Índice

I. Introducción

La evolución del currículo de Matemáticas en las diferentes leyes educativas que se han ido sucediendo y, en especial, en esta última LOMLOE hace cada vez más énfasis en los procesos de aprendizaje de manera competencial. Con el objeto de mejorar la comprensión profunda y aprendizaje de los estudiantes en los contenidos de Matemáticas, siguiendo los Principios y estándares para la Educación Matemática establecida por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), la nueva legislación se enfoca en desarrollar los procesos de comunicación y representación, conexiones entre los contenidos, razonamiento y demostración, resolución de problemas y gestión socioemocional.

En el presente trabajo se ha realizado un esfuerzo por elaborar actividades con las que poder ayudar a los estudiantes a desarrollar esos procesos de comunicación, representación, visualización y fomentar la capacidad de argumentación, conjeturación, razonamiento y demostración, a través de contenidos de geometría sintética. Estas actividades se han planteado para los alumnos de 3º de ESO del I.E.S. Juan de Juni, que es el Centro donde desarrollé el módulo de prácticas como parte de la formación del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria y Bachillerato.

Para diseñar estas actividades se han estudiado diversas secuencias de tareas ya ensayadas y analizadas por otros investigadores en el campo de la educación y la enseñanza de geometría. Se han seleccionado y adaptado aquellas que entendemos pueden funcionar mejor en el aula con nuestro grupo de alumnos.

Las actividades están pensadas para poder trabajarlas en un aula que cuenta con una pizarra digital, pero no tiene más dispositivos tecnológicos, tienen un carácter lúdico y participativo. Los contenidos didácticos trabajados son: polígonos y su clasificación, polígonos estrellados, triángulos, relaciones angulares, relaciones geométricas, recubrimientos y movimientos en el plano.

La estructura del presente trabajo consta de siete bloques, en este primero se exponen los objetivos y motivación del trabajo, además de la relación del TFM con lo aprendido en las distintas asignaturas del máster. En el segundo bloque se describe el marco teórico que fundamenta la investigación de este trabajo, así como los antecedentes en los que hemos basado nuestra propuesta. En el tercero se describe el marco legal actual, con las competencias específicas en Matemáticas y su relación con los procesos clave que se pretenden desarrollar en este trabajo. En el cuarto bloque se desarrolla la propuesta didáctica diseñada, describiendo el contexto donde se implanta, la planificación de las actividades diseñadas, sus objetivos didácticos, los contenidos que desarrollan, su organización y temporalización, los recursos necesarios y la evaluación de cada una. En los bloques quinto y sexto se analiza la implementación y las producciones realizadas por los alumnos durante la puesta en práctica de dos de estas actividades y en el séptimo bloque se exponen las conclusiones del trabajo realizado.

Por último, se añaden unos anexos con las fichas que se elaboraron de cada actividad para utilizar en el aula y la recopilación de los trabajos realizados por los alumnos en las actividades implementadas.

1.1. Objetivos y motivación del presente trabajo:

- Identificar la relevancia que tiene enseñar a los estudiantes de secundaria los procesos de argumentación, razonamiento y demostración.
- Exponer la multitud de posibilidades que nos ofrece la geometría sintética para trabajar dichos procesos, a través del estudio de distintas publicaciones e investigaciones realizadas por profesionales en la docencia de la geometría.
- Conocer los niveles de razonamiento en geometría propuestos por el matrimonio Van Hiele para identificar el nivel que tienen nuestros estudiantes y poderles ayudar en su desarrollo realizando actividades adaptadas a su contexto.
- Elaborar una propuesta didáctica en la enseñanza de geometría sintética que trabaje los procesos de argumentación, representación, conjeturación, razonamiento y demostración, adaptada al contexto de un aula determinada donde realicé el Módulo de prácticas.
- Describir la implementación que llevé a cabo de parte de esa propuesta en el contexto anteriormente indicado.
- Analizar la implementación de dichas actividades, identificando errores, propuestas de mejora y fortalezas de cada actividad, así como analizar los trabajos realizados por los alumnos, categorizando sus respuestas y argumentos e identificando los niveles de razonamiento de Van Hiele que tienen actualmente para poder progresar en ellos.

La motivación de realizar este trabajo es elaborar un procedimiento o serie de pasos que permita desarrollar propuestas didácticas dirigidas a la enseñanza de la geometría, donde aplicar los conocimientos que hemos adquirido en el máster a la profesión docente. Es decir, ser capaz de conseguir adaptar los conocimientos teóricos y los recursos prácticos que podemos encontrar en diferentes publicaciones realizadas por expertos en Didáctica de la Matemática e investigadores, a un contexto concreto y a la particularidad de unos alumnos determinados en un tiempo delimitado. Además, la geometría sintética nos ofrece amplias posibilidades para trabajar con los alumnos los procesos de visualización, representación, conjeturación, argumentación, razonamiento y demostración, procesos necesarios para lograr una correcta comprensión y aprendizaje de las matemáticas, introducir a los alumnos en el método científico y fomentar el pensamiento crítico.

El peso que tiene el campo de la geometría sintética en el currículo de secundaria, dentro del llamado sentido espacial, es mayor en 2º ESO donde se ven figuras tridimensionales, relaciones geométricas y procesos de visualización, razonamiento y modelización geométrica. En 3º ESO el contenido se centra en la geometría analítica con el estudio de vectores y funciones, en 4º ESO toma protagonismo la trigonometría y vuelve a tomar peso la geometría como un contenido donde trabajar la "*Visualización, razonamiento y modelización geométrica*" tal como vemos en el punto 3 del currículo de 4º ESO en la página 49365 del Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, " - *Elaboración y comprobación de conjeturas sobre propiedades geométricas mediante programas de geometría dinámica u otras herramientas*".

Sin embargo, la mayoría de las veces vemos que en las programaciones de los cursos la geometría se encuentra al final de este, con lo que puede ocurrir que los alumnos lleguen a 3º o a 4º sin entender o haber visto nunca las propiedades de las figuras planas o de los cuerpos tridimensionales y pasar directamente a trabajar la geometría desde un sentido algebraico, muchas veces sin realizar una conexión entre la geometría algebraica y la geometría sintética.

Un buen número de estudiantes manifiestan que no se les da bien visualizar los objetos geométricos, no tienen buen sentido espacial, o que desconocen las diferencias o definiciones de los mismos y ello se debe principalmente a la falta de práctica o a la falta de tiempo para ver estos temas en el aula. La geometría no solo nos permite resolver problemas de objetos en el espacio, también nos ofrece oportunidades para de una manera intuitiva establecer hipótesis, conjeturar, argumentar, justificar, en definitiva, aprender a razonar.

1.2. Contribución de las enseñanzas del Máster en el presente trabajo

Para realizar este trabajo se han utilizado los contenidos, recursos e información que hemos aprendido en las diferentes asignaturas del máster. A continuación, se exponen los aspectos y contribuciones de cada materia que más han influido en la concepción y elaboración de la propuesta didáctica que hemos desarrollado.

En la asignatura *Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia*, hemos visto la secuencia que ha seguido el desarrollo matemático en la Historia de la humanidad, secuencia natural que se podría extrapolar al orden de aprendizaje de las matemáticas que debería tener una persona desde su infancia a la adultez. Desde el nacimiento de las Matemáticas como ciencia independiente en el periodo greco-helenístico, s. V a. C., donde se recopilaron los conocimientos heredados de Egipto y Mesopotamia dándoles una estructura lógica, con la distinción conceptual entre hipótesis, teorema y demostración que ha podido llegar hasta nuestros días recogido en el libro de los

Elementos de Euclides, donde a partir de una serie de cinco axiomas se desarrollan el resto de proposiciones utilizando un razonamiento deductivo, han surgido grandes ideas impulsoras de la ciencia, arquitectura, ingeniería y la matemática moderna, que ha contribuido al avance de la humanidad.

En las asignaturas de *Sociedad, Familia y Educación* y en la asignatura de *Aprendizaje y desarrollo de la personalidad*, dentro del módulo genérico, hemos aprendido las distintas teorías pedagógicas y enfoques del aprendizaje, así como su evolución en la sociedad a lo largo de la Historia. Para realizar este trabajo hemos utilizado un enfoque basado en las teorías de pedagogía constructivistas que explicaremos con más detalle en el apartado de Metodología. También hay que hacer hincapié en la transcendencia del contexto y las etapas del desarrollo cognitivo de los niños y adolescentes y la influencia del desarrollo emocional, social y afectivo en el desarrollo intelectual. Se ha puesto de manifiesto cómo la motivación y la autoestima del estudiante están directamente relacionados con su rendimiento académico, además de la implicación de la familia en la formación de los adolescentes y los preadolescentes. A la hora de diseñar las actividades se ha tenido en cuenta no solo las limitaciones físicas del aula o la edad de los alumnos y los contenidos del currículo sino el contexto cultural, económico, social y afectivo del alumnado. Se destacan además los beneficios que proporcionan la enseñanza y práctica sistemática de estrategias de aprendizaje con los alumnos para mejorar sus destrezas de adquisición, codificación y recuperación de la información, conceptos o procesos de trabajo que se desean enseñar, por lo que se implementarán también estrategias de aprendizaje en esta propuesta pedagógica.

También hemos tenido en cuenta para realizar esta propuesta pedagógica lo aprendido en las asignaturas de *Didáctica de la Matemática* e *Innovación Docente en Matemáticas* acerca de diseñar tareas que requieran alta demanda cognitiva, es decir, que los procedimientos para resolverlas no se basen únicamente en realizar algoritmos aprendidos previamente, sino que exija que los estudiantes analicen la situación y establezcan conexiones entre los conceptos matemáticos además de provocar en los alumnos procesos de razonamiento. La geometría nos ayuda a poder diseñar actividades donde se proporcionen a los alumnos múltiples formas de captar el interés con visualizaciones gráficas, múltiples formas de representación de expresiones matemáticas y símbolos, así como diferentes formas de expresión por parte de los alumnos. El aporte manipulativo y gráfico proporcionará a los estudiantes referencias sobre las que apoyarse para construir su conocimiento matemático.

En la asignatura de *Modelos Matemáticos en Educación Secundaria* hemos visto diferentes ejemplos de problemas de la vida cotidiana y de otras ramas de la ciencia que se pueden resolver mediante una modelización matemática, para lo cual es de gran ayuda en la mayoría de los casos una modelización geométrica que permite una visualización del problema. De ahí el interés en desarrollar estas habilidades de visualización en los alumnos como paso previo necesario para conjeturar y tomar decisiones.

Por último, en la asignatura *Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas*, hemos aprendido un método para llevar a cabo un Proyecto de Investigación y el manejo de bases de datos más interesantes para obtener información para nuestro trabajo. Así como la necesidad de mantener un espíritu crítico que nos impulse a seguir reflexionando, indagando, investigando y tratando de mejorar en nuestra actividad docente.

En este trabajo, por lo tanto, se han aplicado las competencias vinculadas al Máster de Secundaria que tienen que ver con los contenidos generales del máster y los contenidos de la especialidad de Matemáticas, como son:

- Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a Matemáticas de los cursos de Secundaria y a la asignatura optativa Conocimiento de las Matemáticas y los conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se estructuran en cinco procesos: Comunicación y representación, conexiones, razonamiento y prueba, resolución de problemas y proceso socioemocional.

- Llevar a cabo una planificación, desarrollo y evaluación del proceso de enseñanza/aprendizaje potenciando los procesos educativos que faciliten la adquisición de competencias, principalmente STEM, atendiendo al nivel y contexto del alumnado.

- Estudiar, analizar y proponer estrategias de aprendizaje para fomentar el interés del alumnado y alentar su capacidad de aprendizaje autónomo y en colaboración con otros, desarrollar su confianza y autoestima y desarrollar su espíritu crítico, nivel de razonamiento y toma de decisiones.

- Tener en cuenta las características de los estudiantes, sus contextos sociales y motivaciones. Buscando comprender el desarrollo de la personalidad de los estudiantes y las posibles disfunciones que afecten al aprendizaje.

- Elaborar propuestas que se basen en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales. Identificar y planificar la resolución de tareas que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y diferentes ritmos de aprendizaje teniendo en cuenta estas características de diversidad dentro del aula para elaborar actividades de “suelo bajo y techo alto” que puedan ser asequibles por el conjunto del alumnado y al mismo tiempo puedan desarrollarse más profundamente por los estudiantes con más conocimientos.

- Desarrollar un programa de actividades partiendo del currículo de secundaria, estableciendo unos criterios de selección y elaboración de materiales educativos.

- Conocer estrategias y técnicas de evaluación e introducirlas en la programación de las tareas didácticas como un instrumento más con carácter formativo, para regular y estimular el esfuerzo de los estudiantes, incluyendo además de la heteroevaluación profesor/alumno, la autoevaluación por parte de los alumnos al trabajo realizado por ellos mismos, la autoevaluación del docente y de las propias actividades planteadas y la coevaluación de los alumnos entre pares valorando su trabajo en equipo.

- Aplicar propuestas didácticas con los procedimientos estudiados y trabajados en *Innovación docente en Matemáticas*.

- Realizar un análisis crítico de la implantación de las propuestas didácticas llevadas a cabo, de las buenas prácticas, los errores y el planteamiento de un plan de mejora con la creación de rúbricas de evaluación y protocolos de observación como indicadores de calidad.

- Identificar los problemas y errores comunes del alumnado en la enseñanza/aprendizaje de Matemáticas, tanto en el módulo de prácticas externas como en el TFM, con el objeto de plantear soluciones y alternativas.

- Aplicar las técnicas básicas aprendidas en la asignatura *Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas* para buscar la información necesaria para elaborar la propuesta didáctica, plantear los objetivos, diseñar las actividades a implementar, recoger los datos y analizarlos realizando una interpretación y evaluación de los mismos. Todo ello teniendo en cuenta los principios éticos que se deben cumplir de respeto, responsabilidad, confidencialidad y garantía de anonimato de los estudiantes, no discriminación por razones de sexo, procedencia o condición social, honestidad y objetividad en la interpretación de datos y siempre buscando el beneficio formativo del alumnado.

Finalmente podemos decir que tras el paso por el máster hemos realizado un buen entrenamiento en la planificación, docencia y evaluación de las materias correspondientes al área de Matemáticas.

II. Marco teórico

2.1. Constructos utilizados:

Vamos a definir primero los Constructos utilizados en este trabajo: demostración, conjetura, argumentación, razonamiento, representación y visualización.

Comenzamos con "**demostración**", en inglés utilizan el constructo "*proof*", que podríamos traducir literalmente como "prueba", para referirse a la demostración de una teoría científica. Etimológicamente la palabra "prueba" según el diccionario Oxford English Dictionary (1993) viene del latín "probare", de la misma raíz vienen las palabras españolas "probar" que están relacionadas con los sentidos y lo empírico: "oler, degustar, ensayar". En inglés "probity" comenzó a usarse de manera temprana con el significado de "presentación de evidencia legal".

> Una prueba es un argumento lógico que establece la verdad de una afirmación más allá de toda duda. Una demostración consiste en una cadena finita de pasos, cada uno de los cuales es una consecuencia lógica de la anterior. Schwartzman explica: "El adjetivo latino probus significa 'recto, honesto'... El verbo derivado probare significaba 'to try, to test, to judge'. Uno de los significados del verbo llegó a incluir el resultado exitoso de probar algo, por lo que probar significaba 'to test and find valid'. (…) En un sistema deductivo como las matemáticas, una demostración pone a prueba una hipótesis sólo en el sentido de validarla de una vez por todas. (Cupillari, 2024, pág. 3)

En matemáticas el constructo "demostración" o "prueba" lo encontramos relacionado con las Matemáticas discretas y las sentencias de lógica, dentro de la ciencia formal a la que también pertenece la rama de la filosofía, donde se usan argumentos deductivos para revelar la verdad o validez de una proposición matemática. Para poder realizar una demostración matemática se argumenta basándote en otras afirmaciones iniciales previamente probadas y aceptadas como verdaderas, llamadas axiomas. Estos axiomas son el punto de partida, conforme se va avanzando en el desarrollo de la demostración se pueden utilizar otras afirmaciones ya demostradas a partir de estos primeros axiomas y que son previas a las que se quiere demostrar.

Las demostraciones matemáticas utilizan razonamientos deductivos que, a diferencia de los inductivos o empíricos, deben probar que una afirmación se cumple siempre para todos los casos posibles, en lugar de enumerar un listado de casos donde sí se ha cumplido. Cuando una afirmación que aún no está demostrada se cree que es verdadera se denomina "**conjetura**". (Scheinerman, 2001)

En las últimas décadas se han podido resolver conjeturas que llevaban planteadas siglos, como por ejemplo la conjetura de Kepler, formulada en 1611, que afirmaba que la manera más eficiente de apilar unas esferas era realizando un apilamiento piramidal. Thomas Hales consiguió demostrar esta conjetura en 1998, pero lo hizo a partir de métodos de programación lineal utilizando la informática para verificar todos los posibles agrupamientos de esferas, por lo que muchos matemáticos no consideraron que esto fuera una prueba 100% exacta al no utilizar un método de demostración deductivo íntegro y no poder verificar la exactitud de los tres gigabytes de datos de cálculos que había realizado el ordenador. En 2003 inició un proyecto de creación de un software para poder verificar todos los cálculos que había hecho el ordenador y en 2017 se aceptó como prueba formal. Esta nueva forma de demostración a partir de la verificación de todos los posibles casos de un problema realizando la ingente cantidad cálculos mediante la informática abre una nueva era en las matemáticas. No obstante, hay que tener en cuenta que este tipo de demostración solo se puede realizar si el conjunto de casos posibles es finito, si el conjunto es infinito hay que utilizar otro tipo de demostración general que valga para todos los casos, o bien que valga para tratar de acotarlos.

Para saber qué vamos a entender por **argumentación** cuando realicemos el análisis de las respuestas de los estudiantes en la propuesta didáctica y, concretamente dentro de la geometría, qué procesos se llevan a cabo para desarrollar una argumentación, nos fijamos en la siguiente definición:

> Para Duval (1999), la argumentación es una justificación de una afirmación o de un enunciado que requiere de la producción de razones y que suele responder a preguntas del tipo "¿por qué?". A su vez, determina dos criterios para decidir sobre la validez de un argumento: su pertinencia, que se refiere a que su contenido esté relacionado semánticamente con la afirmación a justificar, y la fuerza, que mide tanto su posibilidad de réplica como su valor epistémico. El trabajo de la argumentación en la geometría requiere del proceso de razonamiento, que junto con el de visualización y de construcción con herramientas son los tres tipos de procesos cognitivos implicados en las tareas geométricas (Duval, 1998). (Ricart Aranda, Beltrán-Pellicer, & Estrada, 2019, pág. 504)

El argumento para tener fuerza y no poder ser refutado, al igual que la demostración, debe estar sustentado por afirmaciones previamente aceptadas y estar elaborado utilizando un uso correcto de la lógica. Este argumento apela explícitamente a unos hechos o datos a partir de los cuales elabora una afirmación llamada conclusión. (Toulmin, 2003, pág. 92)

En cuanto al significado del constructo "**razonamiento**" que vamos a emplear en este trabajo, lo podemos definir como el proceso cognitivo complejo por el cual somos capaces de conectar y relacionar diferentes hechos o informaciones siguiendo una determinada estructura formal para extraer una conclusión. En matemáticas encontramos tres tipos de razonamientos: el razonamiento inductivo, el abductivo y el deductivo. El razonamiento deductivo es el más complejo y está vinculado al último estado del desarrollo intelectual, este tipo de razonamiento es el que utilizan los Matemáticos para demostrar sus conjeturas, sin embargo, en la educación primaria y secundaria se utilizan los tres tipos de razonamiento por ser el abductivo y el inductivo los que más fácilmente asimilan los estudiantes y servir de base para desarrollar la capacidad de razonar.

El razonamiento abductivo es el más instintivo o imaginativo, con este razonamiento se trata de explicar una conclusión o hecho concreto a partir de crear una hipótesis explicativa que, sin estar demostrada, se acepta como regla válida, considerando el hecho que queremos explicar como un resultado de esta regla. Esta forma de razonamiento no sigue una secuencia lógica y para poder confirmarla se necesitaría una ratificación empírica para corroborar todos los posibles casos, aunque siempre existiría la probabilidad de que hubiera alguna excepción, o bien una demostración deductiva que relacione la posible hipótesis explicativa con la conclusión. No es un razonamiento aceptado por los matemáticos porque existe un riesgo de error, sin embargo, se considera su valor formativo por ser aquel con el que fomentamos la creación de nuevas ideas e hipótesis.

El razonamiento inductivo se puede considerar el proceso inverso al razonamiento deductivo, ya que, a partir de una información particular, uno o varios casos concretos, para los cuales se cumple una afirmación esta se generaliza para todos los casos aceptándolo como conclusión válida. Al igual que ocurre con el razonamiento abductivo existe un riesgo de error puesto que es muy difícil que se puedan corroborar todos los posibles casos particulares. Sin embargo, es el tipo de razonamiento que más utilizamos en nuestra vida cotidiana y aunque no sirve para demostrar completamente la validez de una conjetura sí que se utiliza para reforzar una hipótesis con argumentos consolidados.

En cuanto al razonamiento deductivo tomamos la definición de Herbst (2002):

> De acuerdo con las nociones comúnmente aceptadas de **razonamiento deductivo**, el razonamiento deductivo es el proceso de inferir conclusiones a partir de información conocida (premisas) basadas en reglas de lógica formal, donde las conclusiones se derivan necesariamente de la información dada y no hay necesidad de validarlas mediante experimentos. Los argumentos deductivos válidos preservan la verdad, en el sentido de que, si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión también es verdadera. (Herbst, 2002)

En la publicación de Herbst también podemos ver como tradicionalmente en EE.UU. se fomentaba practicar las habilidades de demostración mediante el razonamiento deductivo en las tareas de geometría con los estudiantes de secundaria utilizando para ello un formato de dos columnas, en la primera escribían las premisas observadas y en la segunda las conclusiones extraídas a partir estas:

> Aunque no es intrínseco al razonamiento deductivo, una forma común de representar **argumentos deductivos** es mediante una secuencia paso a paso de premisas y conclusiones justificadas, (…). Esta forma de representar los argumentos deductivos de la geometría escolar se enfatiza con frecuencia en varios países, donde a menudo se requiere que los estudiantes escriban pruebas en el formato de dos

columnas de enunciados y justificaciones que muestran por qué las premisas de un argumento conducen a una conclusión. (Herbst, 2002, pág. 284).

Respecto a esta práctica de realizar demostraciones matemáticas en el aula de secundaria nos podemos preguntar cuál es el interés de enseñar este proceso a los alumnos. Acerca de lo cual podemos ver todas las utilidades que el profesor experto en geometría Michel De Villiers otorga al proceso de demostración en su artículo sobre el rol y las funciones de la demostración en matemáticas (De Villiers, 1990) por lo que también recomienda incluir este proceso en el aula de matemáticas con los alumnos:

- *Verificación/Convicción* (se refiere a la veracidad de una afirmación)

En este artículo, se indica que una de las funciones de la demostración es convencer de la veracidad de una conjetura, sin embargo, De Villiers afirma que "*la prueba no es necesariamente un requisito previo para la convicción - la convicción es con mucha más frecuencia un requisito previo para la prueba*" y que la razón por la que una persona invierte esfuerzo en realizar una demostración rigurosa de una conjetura es porque en su interior ya está convencida de que debe ser cierta. Normalmente los razonamientos que han llevado a esa persona al convencimiento han sido de tipo abductivos o inductivos, de ahí la importancia también de este tipo de razonamientos.

- *Explicación* (la demostración explica las causas y proporciona información sobre por qué es cierto)

La demostración, si hemos sido capaces de deducirla a través de unas premisas mediante un proceso lógico, también nos ofrece una explicación para entender una conjetura o teoría, "*las demostraciones empíricas no nos proporcionan una explicación, simplemente confirman*".

- *Sistematización* (la organización de varios resultados da un sistema deductivo de axiomas, conceptos principales y teoremas).

Con la demostración se consigue exponer la relación lógica que subyace entre los enunciados, esto nos revela si existen argumentos circulares, o suposiciones no explícitas, ayuda a unificar y simplificar las teorías matemáticas a través de la integración de enunciados, teoremas y conceptos a priori no relacionados entre sí. Nos proporciona una perspectiva global de un tema al exponer la estructura axiomática subyacente de ese tema de la que se pueden derivar todas las demás propiedades. Por lo tanto, la demostración constituye una herramienta indispensable en la sistematización de diversos resultados conocidos en un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas. Esta función resulta especialmente útil en educación secundaria porque ayuda a relacionar los conceptos que se van aprendiendo entre los distintos sentidos de las matemáticas conectando teoremas aprendidos y aplicándolos en las demostraciones cada vez con más rigor.

- *Descubrimiento* (permiten el descubrimiento o la invención de nuevos resultados).

Mientras se trabaja en una demostración matemática se están realizando tareas de investigación, análisis, descubrimiento e invención, es por ello que en multitud de ocasiones en la Historia de las Matemáticas se ha logrado descubrir nuevos resultados, nuevos teoremas y conjeturas mientras estaban tratando de demostrar otro de una manera lógica deductiva, como por ejemplo el descubrimiento de la geometría no euclídea.

- *Comunicación* (transmiten el conocimiento matemático).

Por último, pero no menos importante en el aula de secundaria, está la función de comunicación. La demostración es una forma de discurso, es una manera de comunicar los resultados matemáticos que sirve para crear un foro de debate entre docente y alumnado y entre los propios alumnos. Esta práctica de transmisión, comunicación y debate promueve el refinamiento de la demostración y la identificación de errores o la búsqueda de contraejemplos por lo que fomenta el razonamiento.

Para hablar de los procesos de representación y visualización tenemos como referente al profesor e investigador francés Raymond Duval, quien desarrolló la teoría de los "registros de representación semiótica" y la importancia de la visualización para mejorar la comprensión matemática en los estudiantes.

Duval (1999) diferencia entre dos tipos de **representaciones** cognitivas: las "representaciones semióticas", que son las que se producen premeditadamente mediante el uso de cualquier sistema semiótico (caracteres, signos, gráficos, diagramas, etc.) donde el sujeto selecciona intencionadamente cada símbolo que va a representar al objeto; y las representaciones físicas/orgánicas, que son las producidas por el sistema orgánico (recuerdos, sueños, etc.) o bien por un dispositivo físico (fotografía, reflejo) que se producen de forma automática.

En la Historia de las Matemáticas ha habido una evolución de los sistemas semióticos utilizados para representar y procesar el pensamiento matemático. Por ejemplo:

> las notaciones simbólicas derivadas del lenguaje escrito han dado lugar a la estructura algebraica (…) para las imágenes estaba la construcción de figuras planas, después la perspectiva, luego las gráficas para 'traducir' curvas a ecuaciones, por ello los hemos denominado '**registro de representación**'. Así contamos con varios registros para la representación discursiva y varios sistemas para la visualización. Esto implica una compleja interacción cognitiva que subyace a cualquier actividad matemática. (Duval, 1999, pág. 6)

Para Duval, la complejidad de las figuras geométricas deriva de que su registro de representación tiene una "*estructura triádica de representación*", es decir que aparece el signo (símbolo que está en lugar de algo), el objeto (aquello que es representado por el signo) y el interpretante, que es el tercer elemento (el símbolo equivalente creado en la mente del sujeto que interpreta al signo original):

> Los registros con una estructura triádica de significación (lenguaje natural, representación de formas 2D o 3D) donde tenemos significados que juegan independientemente de cualquier denotación explícita de objetos y hay que tener en cuenta su interacción. Incluso podemos caer en un conflicto cognitivo entre el juego de significados, que es propio del registro, y la denotación establecida para la representación. (…) El pensamiento matemático a menudo requiere activar en paralelo dos o tres registros, incluso cuando solo se usa uno externamente. (Duval, 1999, págs. 5-7).

Los procesos matemáticos requieren dos tipos de transformaciones de las representaciones que denomina: "*procesamiento*" y "*conversión*". El procesamiento son las transformaciones que se realizan dentro del mismo registro, como las operaciones aritméticas o la reconfiguración de una figura geométrica como si fuera un puzle, para estas transformaciones no se necesitan hipótesis ni demostraciones. La conversión es una transformación que requiere un cambio de registro, poder "traducir" la representación de un objeto a una representación diferente en otro registro, es en este tipo de transformación donde los estudiantes muestran más dificultades. Cada registro semiótico de representación tiene una forma de trabajar diferente que hay que saber transmitir al alumnado. El saber pasar de un registro de representación a otro, que los alumnos sean capaces de reconocer un mismo objeto a través de diferentes representaciones y puedan establecer conexiones entre los razonamientos inductivos y deductivos es lo que para Duval (1999) supone un requisito básico para el aprendizaje de las matemáticas.

En relación al proceso de **visualización**, Duval también distingue entre visión y visualización. La visión proporciona un acceso directo al objeto, se refiere a la percepción visual, pero al ser la realidad tridimensional solo podemos ver un lado de las cosas y para poder tener una aprehensión completa se necesita movimiento y exploración. La visualización "*hace visible todo lo que no es accesible a la visión. La percepción visual necesita ser explorada a través de movimientos físicos (...) la visualización puede obtener de inmediato una aprehensión completa de cualquier organización de relaciones*." (Duval, 1999, pág. 12)

"*La visualización se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica*, *alguna representaciones semióticas, como los dibujos, pretenden ser representaciones icónicas",* es decir que se asemejan al objeto que representan y son reconocibles de inmediato, sin embargo, en matemáticas no existen estas representaciones "*icónicas*", no basta con verlas para reconocer lo que representa, es por eso que la visualización requiere un aprendizaje específico para visualizar cada registro de representación.

En el caso de las figuras geométricas, estas están dentro de un tipo de registro o sistema de representación, por tanto, debemos poder realizar transformaciones, "*procesamientos*", dentro de este registro que nos permitan modificar una figura geométrica en otra manteniendo las propiedades de la figura inicial. Según Duval, (1988, pp. 61-63; 1995, p147) existen tres tipos de transformaciones: "*la forma mereológica*" que consiste en dividir o triangular la figura y combinar esas partes en otra figura o subfiguras, "*la forma óptica*", que sin realizar ningún cambio en la figura trata de, mediante un efecto óptico, aparentar que es diferente, más grande, inclinada, etc; y *"la forma del lugar"* que consiste en cambiar la figura de posición en el plano. A estas operaciones las llama "*aprehensión operativa*" y gracias a ella se puede encontrar la idea para resolver un problema dado.

Pero esta aprehensión operativa no basta para poder realizar una tarea que requiera razonamiento deductivo, para ello se requiere de otro tipo de proceso que llama "*aprehensión discursiva*", en esta el alumno es capaz de hacer uso de las propiedades, teoremas y axiomas que no aparecen explícitos en la representación.

> Duval (1995, 1999) enfatizó la importancia de coordinar las aprehensiones perceptivas, discursivas, secuenciales y operativas y cómo los estudiantes dan sentido matemático a las partes de las figuras para comprender las figuras geométricas. La aprehensión perceptiva se refiere al reconocimiento y nombramiento de una figura a partir de una percepción global, y determina la capacidad de reconocer subconfiguraciones. La aprehensión secuencial se moviliza cuando se construye una figura o se describe su construcción, por ejemplo, cuando se dibuja una figura que cumple ciertas condiciones. La aprehensión discursiva consiste en asociar la figura con propiedades matemáticas. Por último, la aprehensión operativa permite modificar una figura durante el proceso de resolución de problemas (Bernabeu, Moreno, & Llinares , 2021, pág. 253).

Podemos concluir, por lo tanto, que cuando estamos trabajando con figuras geométricas estamos utilizando representaciones semióticas; los alumnos no pueden relacionar estas representaciones con un objeto matemático real, por eso es importante poder activar dos o tres registros de representaciones a la vez, para que aprendan a relacionar un mismo objeto matemático con distintos registros de representaciones semióticas, discriminar la forma de trabajar dentro de cada registro y ser capaces de "convertir" una representación de un registro a otro.

Igualmente hay que prestar atención a las operaciones cognitivas que tienen lugar en las actividades matemáticas, es importante no solo que otorguemos herramientas a los estudiantes para que visualicen las figuras geométricas y les enseñemos sus propiedades matemáticas, sino que también es beneficioso que los alumnos se enfrenten a la construcción de estas figuras, que lo hagan con sus manos y reflexionen durante ese proceso de construcción las condiciones que la propia figura les obliga a cumplir para completarse correctamente.

Además, se debe tratar de poner en juego de una manera transversal todos los procesos cognitivos que intervienen en las actividades de enseñanza/aprendizaje de la geometría para que puedan desarrollar una coordinación entre las distintas formas de trabajar que se requieren para el razonamiento deductivo (aprehensión discursiva) y la habilidad para realizar procesamientos figurativos (aprehensión operativa) así como la visualización y construcción (aprehensión perceptiva y secuencial).

2.2. Antecedentes:

Para la elaboración de la propuesta didáctica del presente trabajo, se han tenido como referentes los modelos teóricos de la enseñanza y aprendizaje de conceptos geométricos, especialmente el modelo del matrimonio Van Hiele (Van Hiele, 1986) según viene definido en la tesis de Adela Jaime Pastor (1993) donde se describen los distintos niveles de razonamiento geométrico lógico de los estudiantes en función de su madurez y cómo alumnos con un nivel de razonamiento inferior no podrán comprender conceptos, propiedades o relaciones entre las mismas que estén en un nivel superior de razonamiento. Además, indican que no se puede enseñar a un alumno a razonar de una determinada manera, pero sí que les podemos ayudar a que adquieran la experiencia necesaria para que sean ellos los que acaben razonando de forma lógica.

El modelo descriptivo de los niveles de razonamiento de Van Hiele pasó de tener tres niveles en una primera publicación en 1955, a ser modificado en posteriores publicaciones por la interacción y experiencia de otros profesionales, a cinco niveles de razonamiento, aunque el nivel superior al cuarto es difícil de diferenciar y evaluar, por lo que en algunas publicaciones se suelen usar cuatro niveles. Estos niveles tienen un carácter secuencial, es decir que son etapas de desarrollo por las que los estudiantes van evolucionando progresivamente ayudados por el trabajo geométrico realizado en el aula y en función de su propio nivel de madurez cognitiva. En general la descripción más utilizada de los niveles de razonamiento de Van Hiele es la que sigue:

El **nivel 1** (Reconocimiento): percepción de cada figura como un objeto, describen las figuras basándose en su aspecto físico y posición en el espacio. Utiliza un vocabulario básico sin reconocer o analizar las partes que lo componen ni sus propiedades matemáticas.

Nivel 2 (Análisis): reconocen y descomponen las partes o elementos de las figuras, son capaces de describirlas y enunciar sus propiedades matemáticas de memoria, aunque sin relacionarlas entre sí ni relacionando esas propiedades con las de otras figuras. Es frecuente que omitan propiedades esenciales o que describan características que reiteran una misma propiedad. No realizan clasificaciones a partir de las relaciones entre propiedades. En algún caso pueden llegar a realizar la demostración de una propiedad mediante su comprobación. Las demostraciones realizadas son de carácter empírico, mediante el descubrimiento experimental y hacen uso de un razonamiento inductivo para generalizar.

Nivel 3 (Clasificación): relacionan propiedades de una figura entre sí y con las de otras figuras. Pueden descubrir de manera experimental nuevas relaciones. Definen correctamente tipos de figuras y conceptos matemáticos. Realiza clasificaciones inclusivas, es decir, una figura puede tener el nombre de la clase si se clasifica según el concepto más general y también de la subclase. Realizan demostraciones de las propiedades basándose no solo en la comprobación de casos sino también en razonamientos deductivos informales. Son capaces de comprender las demostraciones realizadas por el profesor y adaptarlas a una situación semejante.

Nivel 4 (Deducción formal): son capaces de formular enunciados y teoremas con un leguaje preciso. Realizar demostraciones formales completas utilizando un razonamiento deductivo encadenando varios pasos. Son capaces de entender la posibilidad de obtener el mismo resultado comenzando desde distintas premisas y utilizando diferentes formas de demostración y comprenden la estructura de axiomas, definiciones y teoremas de las matemáticas.

Nivel 5 (Rigor): tienen la capacidad para realizar deducciones abstractas, comparar sistemas axiomáticos diferentes y concluir sobre su equivalencia. Comprenden la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas y son capaces de trabajar en sistemas axiomáticos de geometría no euclídea.

En este modelo de los niveles de razonamiento geométrico de los Van Hiele, también describen unas fases de aprendizaje que van asociadas a una secuencia de actividades docentes que permiten pasar de un nivel a otro. Igualmente las clasifica en cinco fases de manera que al finalizar la secuencia de tareas que pasen por esas cinco fases, el alumno que está en un nivel pueda pasar al siguiente. Las fases de aprendizaje son:

Fase 1 (información): podemos decir que es una fase de introducción al tema a tratar para que los alumnos tengan información sobre el tipo de problemas que van a realizar y el campo de estudio y para que los docentes puedan identificar los conocimientos previos de los alumnos.

Fase 2 (orientación dirigida): en esta fase el docente guía a los alumnos mediante actividades y problemas propuestos para que descubran los componentes, conceptos, propiedades y relaciones que los estudiantes deben aprender. En esta fase los alumnos adquieren las estructuras básicas del nivel.

Fase 3 (Explicitación): en esta fase los estudiantes tienen que verbalizar sus argumentaciones o los resultados conseguidos, oralmente o por escrito, además de debatir sus descubrimientos con otros estudiantes y con el profesor para mejorar también el lenguaje técnico. Esta fase sirve para reforzar y perfeccionar los conocimientos adquiridos más que para obtener nuevos conocimientos. Se debe plantear en todas las actividades que lo permitan como una conducta continua, no se propone como una fase concreta que siga un orden cronológico entre la segunda y la cuarta.

Fase 4 (Orientación libre): esta es la fase donde se va a consolidar el aprendizaje previo, aquí los alumnos realizarán conexiones entre la información adquirida y la aplicarán para realizar una actividad más compleja, que no constituya una aplicación de un algoritmo previamente aprendido, sino que sea más abierta, con múltiples formas de resolución donde deban combinar y aplicar sus conocimientos.

Fase 5 (Integración): esta última fase se plantea como una recopilación donde los estudiantes puedan tener una visión global de todo lo aprendido, organicen en su mente los nuevos conocimientos, los relacionen con los que ya tenían previamente e integren los nuevos métodos de trabajo y razonamiento. En esta fase el docente podrá corroborar si los alumnos han adquirido el nivel de razonamiento completo que estaban trabajando.

Para poder diseñar una propuesta didáctica que trabaje los procesos de representación, visualización, conjeturación, argumentación y comunicación, razonamiento y demostración con alumnos de secundaria a través de contenidos de geometría sintética, se ha realizado previamente una pequeña investigación y estudio de tareas ya ensayadas con éxito por diferentes investigadores que han implementado en sus aulas actividades que fomentan estos procesos en el campo de la enseñanza de Geometría.

La bibliografía existente dentro de este campo es muy extensa, algunas utilizan software de geometría dinámica como *GeoGebra* para proponer esas tareas y otras plantean actividades para resolver con lápiz y papel o con materiales manipulativos, algunas de ellas trabajan los procesos de argumentación y demostración, otras los de visualización, representación y comunicación. En todas ellas se han tenido en cuenta y se han mencionado los niveles de razonamiento de Van Hiele. De entre las publicaciones analizadas se han seleccionado para realizar este trabajo las que se mencionan a continuación:

Publicaciones que proponen actividades con software de geometría dinámica:

La publicación de Valori, Giacomone, Albanese, & Adamuz Povedano (2022) realiza un estudio muy interesante y pertinente dentro del tema que nos ocupa, puesto que ensaya tareas de actividades para trabajar los procesos de representación, razonamiento y demostración con estudiantes de secundaria. En este trabajo se muestran los resultados de su investigación implementando dos tareas matemáticas con 52 estudiantes de secundaria (15 y 16 años) durante el periodo de confinamiento por COVID-19 en Italia. En ella se estudia el uso combinado de materiales manipulativos como papiroflexia y actividades con GeoGebra en Geometría Euclídea. Las tareas implicaban cuatro fases: construir, explorar, conjeturar y probar. Presentan un análisis epistémico de las tareas y un análisis cognitivo de las respuestas dadas por uno de los estudiantes.

El trabajo de Sua, Gutiérrez, & Jaime (2021) muestra el análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3D y realidad aumentada. La diferencia en este caso es que la actividad se realiza con estudiantes de Grado de Magisterio en Educación Primaria. En estas actividades trabajan los procesos de visualización, razonamiento y comunicación. Esta investigación y análisis les permite concluir que el trabajo con software, que permite visualizar los objetos en 3D e interaccionar con ellos, ayuda a los estudiantes a mejorar su visualización en 3D y con ello tomar decisiones más acertadas para solucionar las tareas propuestas.

El artículo de Jones (2001) muestra los datos de un estudio con estudiantes de 12 años utilizando un software de geometría dinámica, la actividad propuesta consiste en construir utilizando este software diversos cuadriláteros con unas propiedades específicas. Después, analizando las interpretaciones que los alumnos dan sobre las propiedades geométricas esos cuadriláteros, la investigación concluye que el uso del programa ayuda a los alumnos a evolucionar desde unas explicaciones imprecisas con leguaje cotidiano a explicaciones matemáticas de la situación geométrica. Con lo cual sugiere que, el trabajo de construcción realizado con el programa informático nos ayuda a fomentar una base para, a partir de esta etapa, construir nociones de razonamiento deductivo en matemáticas.

El trabajo de Paneque, Cobo, & Fortuny (2017) realiza una investigación sobre un grupo selecto de 4 estudiantes de 16 y 17 años en el que tienen que resolver cuatro problemas con el software GeoGebra TUTOR. Con este programa es posible distorsionar las figuras en tiempo real conservando sus características geométricas además de poder ver los objetos matemáticos en diferentes registros de representación a la vez. Además, contiene un "tutor" artificial, como si fuera un oráculo, que realiza una pregunta a los alumnos cuando están siguiendo un camino incorrecto para que se focalicen en otra estrategia siguiendo desde el último paso que dieron correctamente. Los problemas planteados requieren de alta demanda cognitiva puesto que son problemas abiertos que se pueden solucionar utilizando diversas estrategias. Este estudio concluye que la utilización del programa y las interacciones con su tutor artificial, así como la ayuda de su profesor real, permitió a los estudiantes mejorar sus competencias argumentativas, establecer conjeturas de inferencia figurativa y fomentar la transición de las argumentaciones empíricas a las deductivas.

El artículo de Maschietto (2018) realiza una comparación entre el uso de herramientas clásicas a las que llama "máquinas matemáticas", que son un instrumento manipulativo de madera para realizar la demostración del teorema de Pitágoras y una herramienta cinética creada por Leonardo da Vinci, y además herramientas digitales, que son una pizarra digital y dispositivos digitales que pueden manipular los alumnos, para realizar diferentes demostraciones del teorema de Pitágoras con alumnos de 13 años. A partir del análisis de resultados de los trabajos realizados por los alumnos con cada una de estas herramientas, concluye que la experiencia con las "máquinas matemáticas" desarrolla procesos cognitivos importantes como la identificación de invariantes, las relaciones entre los componentes y los esquemas de uso. Pero también muestra la importancia de la interacción con el profesor para poder desarrollar esos procesos cognitivos.

Finalmente, el artículo de Saez-Lacave, Rodriguez-López, Serrano Muñoz, & Pérez Fraiñas (2020) viene a poner de manifiesto que los estudiantes de secundaria son capaces de realizar trabajos utilizando herramientas digitales sin ningún tipo de barrera tecnológica ni cultural. Para ello realiza una investigación con 250 estudiantes a los que se les da instrucciones para realizar ejercicios de geometría con aplicaciones de dibujo con gráficos vectoriales. Esta publicación aboga por fomentar el uso de tecnología digital que aporta unas habilidades diferentes a las conseguidas con papel y lápiz.

Entre las publicaciones donde encontramos más propuestas para trabajar con lápiz y papel o materiales manipulativos están:

Las publicaciones ¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO (Alsina, Fortuny, & Pérez, 1997) e Invitación a la didáctica de la geometría (Asina, Burgués, & Fortuny , 1992) nos proporcionan diferentes secuencias de actividades que se pueden trabajar en clase de Geometría con estudiantes de Secundaria para desarrollar el pensamiento visual, las habilidades para definir, relacionar, clasificar y, finalmente, demostrar. También menciona la creciente posibilidad de utilizar programas informáticos para trabajar las habilidades de visualización, para trabajar las habilidades de razonamiento y demostración realiza actividades con material manipulativo y representación con papel y lápiz. (Aunque hay que tener en cuenta que el software y la representación gráfica digital se ha desarrollado mucho desde que se escribieron estas publicaciones).

El trabajo de Corberán et al. (1994) muestra una propuesta curricular de enseñanza/aprendizaje de la Geometría plana en 1º de Bachillerato, basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele. Presentan tanto los contenidos de las unidades de enseñanza, como los resultados de la evaluación llevada a cabo para determinar el progreso de los estudiantes y los niveles de Van Hiele de razonamiento, alcanzado por los mismos, en base a los contenidos geométricos de las actividades realizadas. Es una publicación muy completa y detallada de donde se pueden extraer secuencias de actividades perfectamente estructuradas y definidas en cuanto a sus objetivos, metodología, planificación y evaluación. Esta publicación ha sido de gran utilidad para la realización de la propuesta didáctica del presente trabajo.

En el artículo de Ricart et al. (2019) se analiza el potencial de la tarea WODB (*Which One Doesn't Belong*) para trabajar conexiones y argumentación, así como para identificar los niveles de Van Hiele que tienen los estudiantes y poder progresar en ellos. La mecánica en la que consiste esta tarea la explicaremos más adelante en el apartado IV. *Propuesta didáctica*, puesto que ha sido utilizada como actividad dentro de esta. La diferencia en este estudio es que está realizado con estudiantes de Grado en Educación Infantil. Esta publicación me ha resultado muy provechosa para ver el análisis de datos que realizan los autores de los resultados, cómo categorizan las respuestas de los estudiantes y las posibilidades que ofrece este tipo de actividad para trabajar con los alumnos.

También el artículo de Barriga (2021) nos muestra una actividad matemática basada en la tarea WODB, está realizada con alumnos de 11 y 12 años, pero en este caso la combina con el juego Dixit lo que potencia aún más la creatividad y el proceso de comunicación, ya no solo en Matemáticas sino en el uso del lenguaje. Sin embargo, el tener que ajustarse a las reglas del juego de Dixit donde no puedes ser demasiado obvio para que no todos los participantes acierten, ni demasiado críptico para que no todos fallen, habría limitado mucho las respuestas de los alumnos y complicaría el análisis posterior de estas.

Esta búsqueda previa de antecedentes para poder elaborar nuestra propuesta didáctica se centró en un primer momento en actividades que trabajaran con software de geometría dinámica, con intención de poder implementar en el aula actividades de este tipo ya que profesionalmente manejo diferentes programas de diseño asistido por ordenador y podría aprovechar esa experiencia para desarrollar el trabajo con los alumnos. Sin embargo, el contexto donde cursé el módulo de prácticas externas y la oportunidad de poder implementar y ensayar parte de las actividades, hizo modificar esa búsqueda hacia otras tareas donde no fuera necesario el uso de ordenador y se centraran más en los procesos de argumentación, razonamiento y demostración. No obstante, la mayoría de las actividades recogidas en las publicaciones anteriores, aunque estén diseñadas para ejecutarse con programas informáticos, son factibles para realizarse con lápiz y papel.

III. Marco legal

El trabajo se realiza dentro de la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE), derogada la LOMCE y modificando la LOE vigente desde 2006.

Normativas Estatales y Autonómicas (Castilla y León):

- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Referencia: BOE-A-2022-4975
- DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.
- DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

Seguidamente se presenta una breve observación de cómo ha evolucionado en las últimas legislaciones que ha habido en el currículo de Secundaria, la introducción al razonamiento matemático, conjeturación y demostración, tomando estos procesos cada vez más peso dentro del currículo con una mención más explícita:

En el currículo establecido por la anterior legislación, LOMCE, según la Orden ECD/1361/2015, 2015, que establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, ya se indicaba la necesidad de "adquirir un hábito de pensamiento que permita establecer hipótesis y contrastarlas", "ser capaz de generalizar, demostrar y construir modelos matemáticos", estimular que "hagan deducciones y elaboren conclusiones utilizando el lenguaje matemático más adecuado". (Orden ECD/1361/2015, 2015, pp. 60897-60899).

En la actual legislación, LOMLOE, el DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, desarrolla las Competencias Específicas que otorgan las Matemáticas relacionadas entre sí y agrupadas en torno a 5 bloques, según su naturaleza: "resolución de problemas (competencias específicas 1 y 2), razonamiento y prueba (competencias específicas 3 y 4), conexiones (competencias específicas 5 y 6), comunicación y representación (competencias específicas 7 y 8) y destrezas socioafectivas (competencias específicas 9 y 10)." (Pág. 49340)

Destacamos a continuación las competencias específicas que recogen los procesos sobre los que queremos trabajar con el alumnado en nuestra propuesta didáctica: conjeturación (*C.E. 1 y C.E. 3*), visualización, representación (*C.E. 5 y C.E. 7*), comunicación (*C.E. 8*), razonamiento y demostración (*C.E. 3*), también se desarrollarán en las actividades planteadas las *C.E. 9* y *C.E. 10* puesto que se proponen actividades para trabajar en equipo de manera colaborativa, vemos cómo se describen estos procesos en el Bocyl:

Competencia específica 1.

Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las Matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones

> El desarrollo de esta competencia conlleva aplicar el conocimiento matemático que el alumnado posee en el contexto de la resolución de problemas. Para ello es necesario proporcionar herramientas de interpretación y modelización (diagramas, expresiones simbólicas, gráficas, etc.), técnicas y estrategias de resolución de problemas como la analogía con otros problemas, la estimación, el ensayo y error, la resolución de manera inversa (ir hacia atrás), el tanteo, la descomposición en problemas más sencillos o la búsqueda de patrones, que les permitan tomar decisiones, anticipar la respuesta, asumir riesgos y aceptar el error como parte del proceso. D.39/2022 (pág. 49343)

Competencia específica 3.

Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.

> El razonamiento y el pensamiento analítico incrementan la percepción de patrones, estructuras y regularidades tanto en situaciones del mundo real como abstractas, favoreciendo la formulación de conjeturas sobre su naturaleza. (…) La formulación de conjeturas, el planteamiento de nuevos problemas y su comprobación o resolución se puede realizar por medio de materiales manipulativos, calculadoras, software, representaciones y símbolos, trabajando de forma individual o colectiva y aplicando los razonamientos inductivo y deductivo. El desarrollo de esta competencia conlleva formular y comprobar conjeturas, examinar su validez y reformularlas para obtener otras nuevas susceptibles de ser puestas a prueba promoviendo el uso del razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas. Cuando el alumnado plantea nuevos problemas, mejora el razonamiento y la reflexión, al tiempo que construye su propio conocimiento, lo que se traduce en un alto nivel de compromiso y curiosidad, así como de entusiasmo hacia el proceso de aprendizaje de las matemáticas. D. 39/2022 (pág. 49345)

Competencia específica 5.

Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.

> La conexión entre los diferentes conceptos, procedimientos e ideas matemáticas aporta una compresión más profunda y duradera de los conocimientos adquiridos, proporcionando una visión más amplia sobre el propio conocimiento. (…) El

desarrollo de esta competencia conlleva enlazar las nuevas ideas matemáticas con ideas previas, reconocer y utilizar las conexiones entre ideas matemáticas en la resolución de problemas y comprender cómo unas ideas se construyen sobre otras para formar un todo integrado. D. 39/2022 (pág. 49345)

Competencia específica 7.

Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.

> La forma de representar ideas, conceptos y procedimientos en Matemáticas es fundamental. La representación incluye dos facetas: la representación propiamente dicha de un resultado o concepto y la representación de los procesos que se realizan durante la práctica de las matemáticas. El desarrollo de esta competencia conlleva la adquisición de un conjunto de representaciones matemáticas que amplían significativamente la capacidad para interpretar y resolver problemas de la vida real. D. 39/2022 (pág. 49346)

Competencia específica 8.

Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.

> La comunicación y el intercambio de ideas es una parte esencial de la educación científica y matemática. A través de la comunicación las ideas se convierten en objetos de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación. Comunicar ideas, conceptos y procesos contribuye a colaborar, cooperar, afianzar y generar nuevos conocimientos…D. 39/2022 (pág. 49346)

Competencia específica 9.

Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.

> Resolver problemas matemáticos -o retos más globales en los que intervienen las matemáticas- debería ser una tarea gratificante. Las destrezas emocionales dentro del aprendizaje de las matemáticas fomentan el bienestar del alumnado, la regulación emocional y el interés por su aprendizaje. D. 39/2022 (pág. 49346)

Competencia específica 10.

Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.

> El desarrollo de esta competencia conlleva mostrar empatía por los demás, establecer y mantener relaciones positivas, ejercitar la escucha activa y la comunicación asertiva, trabajar en equipo y tomar decisiones responsables. Asimismo, se fomenta la ruptura de estereotipos e ideas preconcebidas sobre las matemáticas asociadas a cuestiones individuales, como, por ejemplo, las asociadas al género, a su vinculación exclusiva a las materias de carácter científico o a creencias erróneas en cuanto a la accesibilidad de las matemáticas entre otras. D. 39/2022 (pág. 49347)

Vemos, por lo tanto, como la definición más explícita en esta nueva legislación de las Competencias que debe adquirir el alumnado va encaminada en la línea establecida en los Principios y estándares para la Educación Matemática establecida por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) "una organización profesional internacional comprometida con la excelencia y el aprendizaje de las matemáticas para todos los estudiantes" (NCTM, 2003). Los estándares de procesos son: *Resolución de Problemas, Razonamiento y Demostración, Comunicación, Conexiones y Representación*.

Una buena enseñanza/aprendizaje de Matemáticas tiene que promover el desarrollo de destrezas de argumentación y demostración, los alumnos deben aprender a identificar patrones o estructuras regulares con los que poder predecir resultados y generalizar, plantear hipótesis o conjeturas y evaluar argumentos para demostrar la validez de dichas conjeturas. Igualmente es necesario enseñar a comunicar las ideas con claridad y coherencia, así como fomentar el uso de la representación para que el alumnado pueda expresar conceptos o procesos matemáticos con diferentes registros semióticos que le ayuden a interpretar y resolver problemas prácticos, lo cual permite a los estudiantes dotar de sentido a las matemáticas.

Si nos centramos en los Criterios de Evaluación vinculados con esas Competencias Específicas, podemos ver cómo se concreta para cada curso las destrezas que deben trabajar y desarrollar los estudiantes en relación a los procesos que nos competen en la propuesta didáctica que queremos plantear.

En 3º ESO, en la asignatura Matemáticas, vemos los Criterios de Evaluación especificados para las competencias específicas 1 y 2 que hacen referencia a los procesos de razonar y comprobar, pero relacionado con el proceso de resolución de problemas. Para la Competencia específica 3 ya encontramos un Criterio de Evaluación específico del método científico, como es el de elaborar conjeturas y comprobarlas:

> 3.1. Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
>
> 3.2. Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema.
>
> 3.3. Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas analizando el resultado obtenido. D. 39/2022 (pág. 49357)

Los Criterios de Evaluación relacionados con la Competencia Específica 4 nos hablan de reconocer patrones, descomponer en partes más simples y modelizar los problemas. Los Criterios de Evaluación relacionados con las Competencias Específicas 5 y 6 hablan de "*realizar conexiones entre los diferentes procesos matemáticos*" y conexiones entre las matemáticas y otras materias o situaciones que pueden ser resueltas con procesos matemáticos.

La siguiente referencia explícita a los criterios evaluables relacionados con los procesos de razonamiento matemático los vemos en los Criterios de Evaluación de las Competencias Específicas 7 y 8, Representación y Comunicación:

Competencia específica 7:

> 7.1. Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información.
>
> 7.2. Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada. D. 39/2022 (pág. 49358)

Competencia específica 8:

> 8.1. Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.
>
> 8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor. D. 39/2022 (pág. 49358)

Los Criterios de Evaluación para las Competencias Específicas 9 y 10 se centran en los procesos socioafectivos, poniendo de relieve la importancia de saber reconocer las emociones propias, en especial la frustración, para poder gestionarlas, así como las ajenas para poder trabajar en equipo. Los aprendizajes que van asociados a un componente afectivo se integran en la memoria a largo plazo generando un aprendizaje más significativo.

En el siguiente curso, 4º ESO, vemos que los Criterios de Evaluación son esencialmente los mismos habiendo una pequeña profundización en el Criterio 3.1. que, además de "formular y comprobar", habla de "investigar conjeturas". En el Criterio 5 aparece explícitamente la palabra deducir: "*5.1 Deducir relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente*". Hay otro pequeño salto de nivel en la forma de evaluar los procesos de representación y comunicación, en el Criterio 7 donde se indica " *7.1.Representar matemáticamente la información más relevante" "7.2 Seleccionar entre diferentes herramientas, incluidas las digitales, y formas de representación (pictórica, gráfica, verbal o simbólica), valorando su utilidad para compartir información"* y sobre todo en el Criterio de la Competencia específica 8 donde se menciona explícitamente comunicar conjeturas y razonamientos matemáticos: *"8.1 Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, con coherencia, claridad y terminología apropiada"*. Por lo tanto, debemos dejar claro a los alumnos, ya que está dentro de los criterios con los que los vamos a evaluar, a qué nos referimos con conjeturas y razonamientos matemáticos.

En la asignatura optativa: *Conocimiento de las Matemáticas* 3º ESO, que es la asignatura y el curso sobre el que se ha realizado la propuesta didáctica para este trabajo, las Competencias Específicas y los Criterios de Evaluación son sustancialmente los mismos que para la asignatura obligatoria de *Matemáticas,* pero resumidos en 5 puntos, los Criterios de Evaluación para las Competencias Específicas 1 y 2 son explícitamente los mismos. Se eliminan las Competencia Específicas 3 y 4 que hablaban de formular y comprobar conjeturas sencillas y modelizar problemas. Los Criterios que en la asignatura obligatoria de Matemáticas estaban en el punto 5 y 6, relacionando los procesos de realizar conexiones entre diferentes procesos e identificar situaciones susceptibles de ser resueltas mediante procesos matemáticos, en la asignatura optativa Conocimiento de Matemáticas están en el punto 3. Los procesos referentes a representación, visualización y comunicación que estaban en los Criterios 7 y 8, en la asignatura optativa están en el punto 4 y los procesos socioafectivos evaluados en los puntos 9 y 10 están en el punto 5.

De esta manera queda expuesto cómo en el marco curricular a los estudiantes de secundaria se les solicita desarrollar destrezas en los procesos de conjeturación, argumentación, visualización, representación, comunicación, razonamiento y demostración. Estos procesos además deben ser evaluados según los estándares explícitos que hemos indicado, lo cual justifica y hace necesario que los docentes dispongamos de recursos para trabajar estos procesos en aula de secundaria desde los primeros cursos y durante toda su etapa educativa para ayudarles a realizar una transición de un pensamiento concreto a uno formal abstracto, de un razonamiento empírico a un razonamiento deductivo, ayudarles a desarrollar un razonamiento lógico matemático y ser ciudadanos con pensamiento crítico. Todo ello nos lleva a investigar y estudiar actividades y propuestas didácticas que poder implementar en el aula para trabajar estos procesos con los estudiantes.

IV. Propuesta Didáctica

4.1. Contextualización

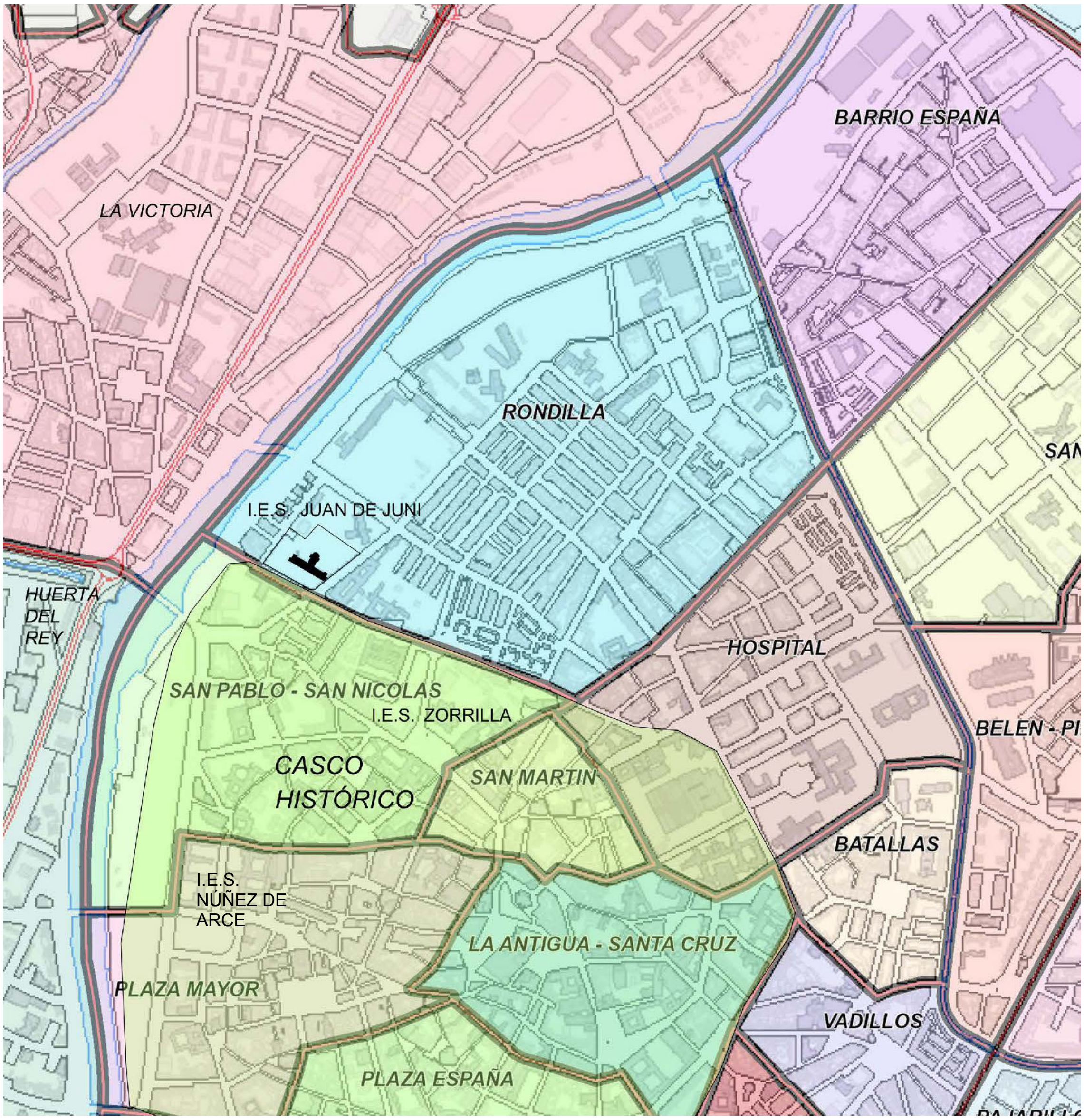


Figura 1. Plano con los barrios de Valladolid, el I.E.S. Juan de Juni se sitúa en la confluencia de los barrios La Rondilla, San Nicolás, La Victoria y Huerta del Rey. Imagen de elaboración propia utilizando como base el Mapa de división en distritos del Ayto. de Valladolid.

La propuesta didáctica elaborada en este trabajo está diseñada para implementarse en el I.E.S. Juan de Juni de Valladolid, que es el centro donde realicé el módulo práctico del máster de secundaria. El alumnado que recibe el I.E.S. Juan de Juni, según los datos que encontramos en el Proyecto Educativo del Centro (PEC), recogidos en las fichas de secretaría, indican que la mayoría del alumnado "procede de un entorno en el que abundan los trabajadores manuales en la industria y servicios y, en menor medida, los funcionarios. Hay un elevado número de parados o jubilados anticipadamente. El nivel de formación declarado mayoritariamente por las familias son los estudios primarios, constatando así mismo las titulaciones profesionales medias y el bachillerato. Aumenta progresivamente la presencia de titulados universitarios.”

Debido a la localización del Centro, como vemos en la Figura 1, la mayoría del alumnado procede del histórico barrio obrero de la Rondilla, el Barrio España y de las localidades de Cabezón de Pisuerga y Santovenia de Pisuerga, puesto que disponen de un servicio de transporte escolar en bus. En el casco histórico de Valladolid se asientan familias con mayor poder adquisitivo, pero estas optan por los Institutos Zorrilla o Núñez de Arce.

En el instituto observamos que hay alumnado muy diverso, tanto por su lugar de procedencia: familias de origen latinoamericano, asiático, eslavo o magrebí. También por su cultura o su nivel socioeconómico: tenemos estudiantes cuyo cabeza de familia es obrero, funcionario, o profesional libre, técnico, etc., personas en situación de desempleo, familias de etnia gitana, personas migrantes, refugiados de guerra, etc. No obstante, los estudiantes de origen extranjero siguen siendo una minoría, menos del 15%, y en el caso concreto de los alumnos con los que realicé el módulo práctico no presentaban problemas con el idioma.

Para implementar esta propuesta didáctica hemos elegido a una clase donde se juntaban distintos alumnos de 3º ESO de varios grupos, edades y niveles de madurez y conocimientos. La asignatura donde se ha implementado era una asignatura optativa, Conocimiento de las Matemáticas, con la salvedad de que esta asignatura es obligatoria para los alumnos que están en Diversificación curricular. Entre estos últimos alumnos hay estudiantes que tienen la asignatura de Matemáticas pendiente desde el primer curso, sin embargo, los alumnos que están en este programa de diversificación, es porque han mostrado interés en conseguir el título de secundaria obligatoria. Los alumnos tienen entre 15 y 16 años, a esta edad las teorías de desarrollo cognitivo de los adolescentes les atribuyen la capacidad de comprender el pensamiento abstracto y de poder realizar, cada vez con mayor aptitud, operaciones lógico formales de carácter hipotético-deductivo. Sin embargo, dependiendo de sus características físicas, y del contexto social, cultural y familiar en el que se han educado hay diferencias entre los adolescentes en el uso del pensamiento formal. Concretamente en este grupo hemos observado que el nivel es muy heterogéneo.

También hemos observado que los alumnos comienzan a faltar mucho a las clases cuando hace buen tiempo, en general no otorgan a esta asignatura la misma formalidad que a la asignatura obligatoria de Matemáticas. Los alumnos son poco participativos y se distraen con facilidad, al tener el horario lectivo después del recreo los alumnos están más agitados y es difícil conseguir una disciplina de trabajo donde permanezcan sentados y atendiendo. Por esta razón he decidido plantear para este grupo unas actividades con un carácter lúdico, que puedan realizar por equipos heterogéneos para que se ayuden entre ellos. Como el uso del teléfono móvil está prohibido con una sanción de falta grave según el Reglamento de Régimen Interior del centro durante la jornada lectiva y la sala de ordenadores está ocupada a esta hora, probamos a plantear actividades "desenchufadas". Aunque el uso del teléfono móvil sí hubiese estado permitido cuando es para realizar una actividad didáctica propuesta por el docente, en este caso se ha descartado porque para realizar una actividad práctica donde poder visualizar y construir figuras geométricas con un software como *GeoGebra* es más apropiado una pantalla grande y un ratón o teclado para poder manejarse con comodidad.

Como hemos visto en las teorías de "Registros de Representación semiótica" de Duval, se debe tratar de trabajar utilizando paralelamente diferentes registros de representación y coordinar los distintos procesos cognitivos que se utilizan para trabajar específicamente dentro de cada registro, de forma que se pueda ayudar a los estudiantes a realizar esa "conversión" de un registro a otro y finalmente encajen todos estos aspectos que forman el todo de un objeto matemático. Los programas de geometría dinámica como *GeoGebra* son muy útiles para poder realizar esta coordinación, puesto que aúnan en la pantalla la representación gráfica de la figura geométrica, el lenguaje simbólico de los números e incluso se puede añadir el lenguaje algebraico. Además, los alumnos pueden construir o deformar las figuras geométricas en tiempo real, conservando sus características, lo que desarrolla la "aprehensión operativa" de los estudiantes mejorando su visualización y capacidad de procesamiento de las figuras. Este tipo de procesamientos también se pueden hacer con papel y lápiz o materiales manipulativos, pero resultan mucho más laboriosos y lentos, siendo el tiempo un recurso que escasea en los apretados planes docentes.

No obstante, hay que tener en cuenta que el procedimiento para trabajar el razonamiento deductivo y las demostraciones tiene que ver con la "aprehensión discursiva", para lo cual se utiliza una manera de pensar diferente a la que se utiliza en la "aprehensión operativa". En este trabajo nos vamos a centrar más en tratar de desarrollar esos procesos de argumentación, conjeturación, razonamiento y demostración que Duval identifica con la "aprehensión discursiva".

También se debe apreciar la utilidad de que los alumnos se enfrenten primero a realizar actividades de geometría con lápiz y papel, o construyendo con materiales manipulativos, aunque el proceso sea más lento y puedan tardar más en dibujar o visualizar los objetos, el hecho de tener que pensar cada trazo que dibujan y que no sea algo inmediato les proporciona la oportunidad de reflexionar sobre lo que están haciendo. El mismo proceso realizado con ordenador es más rápido y visual, pero el ordenador también permite hacer construcciones imposibles que pueden parecer correctas si no tienes claro y has reflexionado primero sobre lo que quieres hacer, sobre todo trabajando en 3D. Además de los beneficios que la escritura y el dibujo a mano otorgan al desarrollo neuronal.

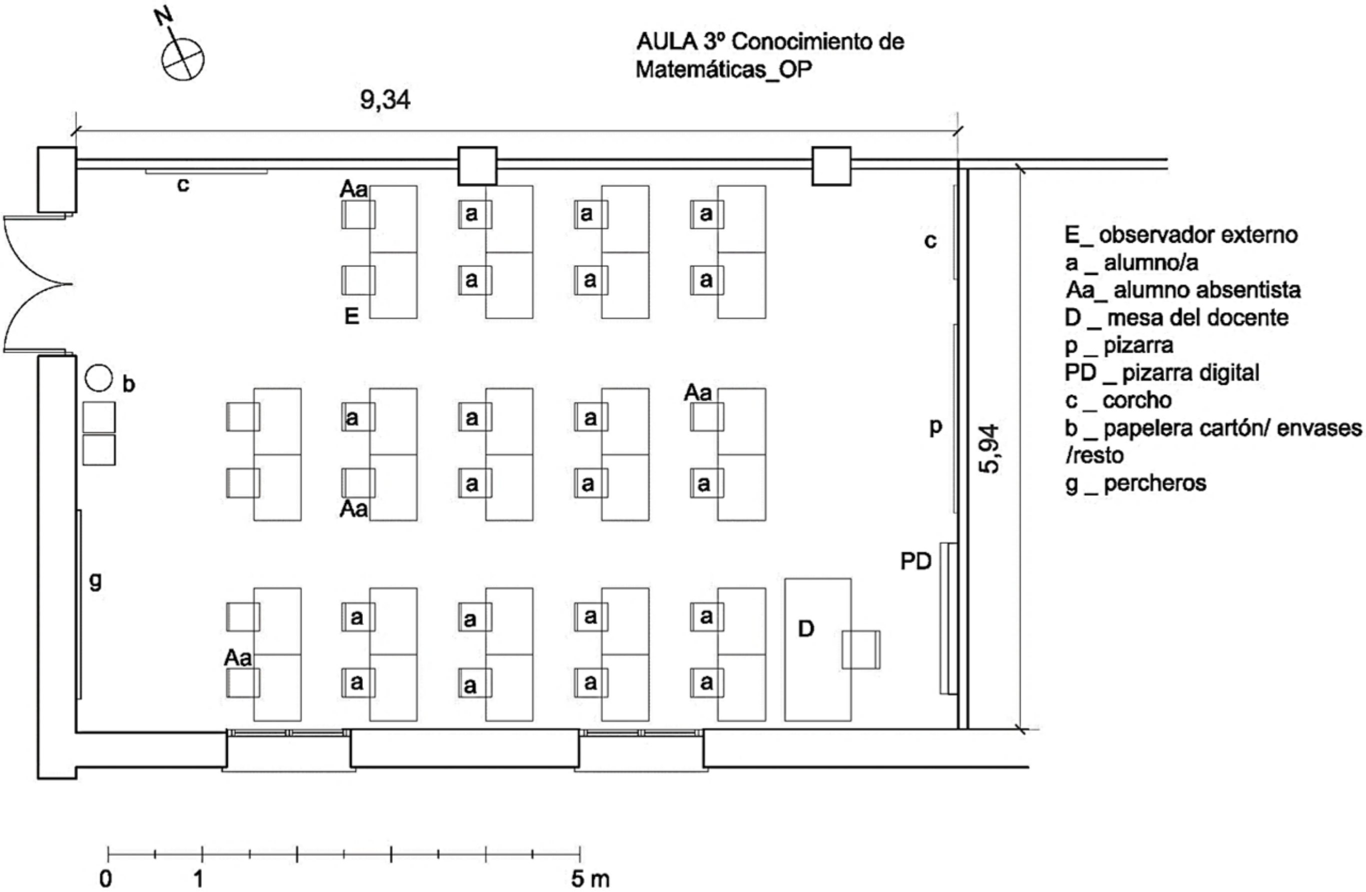


Figura 2: Planta del aula de 3º ESO, donde se cursa la asignatura optativa Conocimiento de Matemáticas, grupos A-B-C-D, obligatoria para el grupo de Diversificación curricular, situada en la planta segunda del edificio. Imagen de elaboración propia.

Descripción del aula y sus recursos: el aula está orientada al Sur, con lo cual a partir de las doce del mediodía el sol comenzaba a entrar y deslumbrar a los alumnos que estaban cerca de la ventana, y había que cerrar las persianas.

Cuentan con pizarra con tizas y pizarra digital con acceso a internet. Los pupitres, como vemos en la Figura 2, están dispuestos por parejas en tres filas mirando a la pizarra, pero se pueden mover si quieren trabajar en grupos. No tiene decoración.

Esta asignatura tiene asignado en el currículo de 3º ESO dos periodos lectivos semanales.

Descripción de la dinámica habitual de trabajo en el aula con su profesora titular:

Durante el periodo de observación del módulo práctico del máster, en las primeras semanas de febrero, coincidió que los alumnos estaban participando con su tutora en el programa del *Tour de Mates*, en las primeras sesiones parecían más motivados pero algunos alumnos se fueron descolgando y bajando la clasificación de todo el grupo, lo cual acabó desmotivando al resto.

La secuencia de las clases con su tutora en estas semanas era la siguiente: En la primera parte de la sesión los alumnos veían los videos programados en la página web del *Tour de Mates*, son videos cortos, de 2 minutos de duración, con técnicas para mejorar el cálculo mental. Después en una clase participativa guiada por la profesora, los alumnos debatían los distintos algoritmos que conocían para realizar los cálculos que les habían propuesto para esa semana: suma y resta, multiplicar y dividir por potencias de dos, porcentajes, multiplicación de derecha a izquierda, factorización, etc. Y analizaban de todos los que se habían expuesto cuál les resultaba más sencillo o más práctico. A continuación, todos los alumnos practicaban el cálculo mental con el método que proponía en el programa para comprobar si efectivamente ganaban agilidad en el cálculo con ese método. Al final de manera individual realizaban la ficha de operaciones propuesta por el programa, para participar en la competición y ver quién era capaz de realizar más operaciones en cinco minutos.

Para celebrar el día de π (14 de marzo) se preparó con los alumnos, en dos sesiones previas, un mural con un árbol pitagórico que colocarían ese día señalado a la entrada de la biblioteca del Centro. El objetivo de esta actividad era aplicar el teorema de Pitágoras y los movimientos en el plano con materiales manipulativos, construyéndolo en un panel de tres metros de ancho por dos de alto. El árbol estaba formado por ocho iteraciones siendo el primer cuadrado de cartulina de 64 cm de lado y el más pequeño de 4 cm de lado. Se realizó en dos sesiones, en la primera mediante una clase magistral participativa recordaron el teorema de Pitágoras, vieron videos con demostraciones visuales empíricas del teorema y calcularon las medidas que debían tener las cartulinas para realizar el árbol, partiendo de que la más pequeña tendría 1 cm de lado y se realizarían doce iteraciones más. En la segunda sesión terminaron de recortar las cartulinas y construir el árbol.

En general la metodología de trabajo de la tutora, tanto en esta aula como en las otras clases que tenía asignadas, estaba en la línea de lo que promueve la LOMLOE y la NCTM en cuanto a fomentar los procesos de razonamiento y prueba, establecer conexiones entre distintas áreas de las matemáticas y motivar el aprendizaje mediante resolución de problemas. Además, la tutora es partícipe del programa experimental para la mejora del razonamiento y la enseñanza de las Matemáticas de la Junta de CyL. Para introducir nuevos conceptos matemáticos comenzaba con una resolución de un problema o caso práctico que los alumnos trataban de solucionar en parejas o pequeños grupos, la profesora les iba guiando con preguntas abiertas para que fueran ellos los que razonaran buscando la solución. Una vez que habían llegado a ella, les dirigía volviendo hacia atrás para analizar el proceso seguido, extraer conclusiones y ver si ese proceso se podría extrapolar a otros casos.

Las actividades que planteaba a los alumnos no eran excesivas ni repetitivas, estaban adaptadas al nivel y contenidos, a veces eran tareas del libro de texto, pero la mayoría de las veces eran problemas o actividades en forma de retos que aportaba ella. Las tareas para casa solían ser terminar algún problema que no hubiera dado tiempo o alguna actividad de refuerzo, estas tareas para casa no eran evaluadas pues supondría una desventaja para los alumnos que no contaban con ayuda fuera del aula.

Las correcciones de los problemas las realizaban los alumnos saliendo a la pizarra, la tutora siempre recalcaba la importancia de explicar y explicitar el procedimiento usado, tratar de comenzar realizando un diagrama o representación de los datos que nos da el problema y qué nos pide y describir los pasos seguidos, no dar directamente solo la solución. Después preguntaba al resto de alumnos si lo habían resuelto de alguna otra manera y que explicaran cómo, para comparar los distintos razonamientos que se pueden seguir para obtener una misma conclusión.

4.2. Objetivos didácticos

Los objetivos de la propuesta didáctica son:

- Trabajar con los estudiantes los procesos de argumentación, conjeturación y razonamiento a través de contenidos de geometría.
- Reconocer y distinguir figuras lineales, planas y espaciales, hallar relaciones de igualdad, congruencia, simetría, etc., y saber justificar la relación mediante algún criterio.
- Definir propiedades geométricas en figuras planas y espaciales.
- Saber clasificar y ordenar figuras planas y espaciales.
- Trabajar la expresión oral y escrita para aprender a comunicar ideas con claridad, argumentar, describir con lenguaje geométrico y realizar o aceptar reflexiones críticas.
- Utilizar correctamente el vocabulario estudiado y valorar positivamente su uso para conseguir mayor claridad y precisión.
- Analizar los polígonos estrellados, polígonos convexos y cóncavos, relación entre diagonales y números coprimos.
- Desarrollar demostraciones con razonamiento deductivo sencillo sobre relaciones angulares en polígonos cóncavos y convexos.
- Saber interpretar problemas matemáticos y obtener soluciones aplicando los conocimientos y la información necesaria.
- Conocer y analizar las propiedades que caracterizan los movimientos isométricos en el plano, saber detectar los que se utilizan para elaborar distintas representaciones y saber aplicarlos.

- Analizar y justificar que los movimientos de traslación, giro o simetría dan figuras congruentes, isometría.
- Analizar y justificar que los movimientos de homotecia dan figuras isomórficas o semejantes, con la misma proporción, pero no congruentes.

4.3. Objetivos de etapa:

Con estas actividades también tratamos de desarrollar los objetivos de etapa mencionados en *Artículo 23 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo* (pág. 27 y 28) y *artículo 7 del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo* (pág. 8 y 9)*,* (2022, pág. 48857 y 48858):

a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

En concreto, la realización de las tareas por equipos, donde los estudiantes deberán razonar, argumentar y debatir sus ideas, proporcionará oportunidades para trabajar el respeto a los demás, la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre personas y grupos, se crean espacios para poder ejercitar el diálogo y la comunicación preparándose así en el ejercicio de la ciudadanía democrática.

b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

Estos hábitos se desarrollarán en las actividades en equipo y de trabajo individual, fomentándolo con la enseñanza de estrategias de aprendizaje.

c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.
d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

El hecho de tener gran diversidad de alumnado en cuanto a su origen de procedencia, cultura, incluso diferencia de edad y madurez, nos proporciona la ventaja de poder conocer otras realizades y culturas de primera mano, rechazando estereotipos y prejuicios discriminatorios, así como encontrar maneras dialogantes de resolver los conflictos diarios abordándolos desde la gestión de las emociones, focalizándose en el problema y separándolo de la persona, sin perder el respeto, favoreciendo un clima de compañerismo y confianza, donde los alumnos se expresen con libertad, aprendan que se pueden tener distintas opiniones sobre un tema y/o coincidir en otras, manteniendo siempre el respeto y el entendimiento.

e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Desarrollar las competencias tecnológicas básicas y avanzar en una reflexión ética sobre su funcionamiento y utilización.

f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

Se tratará de generar siempre un clima en el aula que favorezca la participación y la autonomía del alumnado para desarrollar su iniciativa y asunción de responsabilidad. Se fomentará mediante la enseñanza y puesta en práctica de estrategias de aprendizaje.

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

Se fomentará la verbalización oral y por escrito de todos los procesos de razonamiento, elaboración de conjeturas y argumentación que desarrollen los estudiantes en la realización de todas las actividades con el objetivo de obtener más vocabulario y lograr expresar sus ideas con mayor claridad.

j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado, la empatía y el respeto hacia los seres vivos, especialmente los animales, y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Además de los siguientes:

a) Conocer, analizar y valorar los aspectos de la cultura, tradiciones y valores de la sociedad de Castilla y León

b) Reconocer el patrimonio natural de la Comunidad de Castilla y León como fuente de riqueza y oportunidad de desarrollo para el medio rural, protegiéndolo, y apreciando su valor y diversidad.

c) Reconocer y valorar el desarrollo de la cultura científica en la Comunidad de Castilla y León indagando sobre los avances en matemáticas, ciencia, ingeniería y tecnología y su valor en la transformación y mejora de su sociedad, de manera que fomente la iniciativa en investigaciones, responsabilidad, cuidado y respeto por el entorno.

Las actividades propuestas también tienen el objetivo de dar a conocer el Patrimonio Cultural de España y de Castilla y León. A partir del análisis de las matemáticas que subyacen en el diseño de las obras artísticas se pretende contribuir a su divulgación, aprecio y valoración.

4.4. Fundamentación curricular. Contenidos de la materia.

La finalidad de la asignatura Conocimientos de las Matemáticas, según el DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León (pág. 48937), es dar herramientas a los alumnos que tienen dificultades con esta materia para que puedan superarla con éxito y adquieran las competencias específicas que les permitan resolver problemas e interpretar datos para desenvolverse en distintos contextos personales, académicos, laborales, sociales, etc.

El contenido de la propuesta didáctica trabajada se centra en el bloque "*sentido espacial*", que "*se caracteriza por la habilidad para identificar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, establecer relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos.*"

Para este curso, 3º ESO, el contenido curricular es: *"B. Sentido espacial 1. Localización y sistemas de representación - Vectores: coordenadas, operaciones. 2. Movimientos y transformaciones - Transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas manipulativas."*. Para realizar estas actividades utilizaremos los contenidos del punto 2, aun así, al ser un grupo con una mayoría de alumnos con la asignatura de matemáticas pendiente desde 1º ESO, hemos decidido utilizar contenido también de los cursos anteriores para recopilar y afianzar conceptos que se precisa entender para poder seguir avanzando:

B. Sentido de la medida:

1. Magnitud - Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos en el plano: relación entre los mismos.

2. Medición - Longitudes, ángulos y áreas en formas planas: deducción, interpretación y aplicación.

C. Sentido espacial:

1. Formas geométricas de dos dimensiones - Formas geométricas planas: descripción y clasificación de en función de sus propiedades o características. - Elementos característicos de las figuras geométricas planas.

B. Sentido de la medida:

2. Medición - Longitudes, áreas y volúmenes en figuras tridimensionales: deducción, interpretación y aplicación.

C. Sentido espacial:

1. Figuras geométricas de tres dimensiones - Figuras geométricas tridimensionales: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características. - Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras tridimensionales: identificación y aplicación.

En el apartado III. *Marco legal*, se recogen las Competencias Específicas y los Criterios de Evaluación de la asignatura obligatoria *Matemáticas* y de la optativa *Conocimiento de las Matemáticas*, haciendo referencia explícita a los que señalan los procesos que se van a trabajar en la presente propuesta didáctica. A continuación, exponemos un mapa de relaciones competenciales (Tabla 1) que señala las Competencias específicas que se van a trabajar con las actividades de la propuesta didáctica y su relación con las Competencias Clave a través de los descriptores operativos que define el Decreto 39/2022 (pág. 48890 a 48896). En el apartado "4.10. Evaluación" se describirán con más detalle las Competencias Específicas empleadas y los Criterios de evaluación que atañen a cada actividad planteada:

Tabla 1: Mapa de relaciones competenciales

	CCL					CP			STEM					CD					CPSAA					CC				CE			CCEC			
	CCL1	CCL2	CCL3	CCL4	CCL5	CP1	CP2	CP3	STEM 1	STEM 2	STEM 3	STEM 4	STEM 5	CD1	CD2	CD3	CD4	CD5	CPSAA1	CPSAA2	CPSAA3	CPSAA4	CPSAA5	CC1	CC2	CC3	CC4	CE1	CE2	CE3	CCEC1	CCEC2	CCEC3	CCEC4
Competencia Específica 1		4							4	4	4	4																4						
Competencia Específica 2																																		
Competencia Específica 3	3 4								3 4	3 4	1 2 3 4 5			4	4																			
Competencia Específica 4	1 2 3 4 5					1 2 3 4 5					1 2 3 4 5	1 2 4 5			2 3 4 5																		1 2 3 4 5	
Competencia Específica 5											1 2 4		1 2 3 4 5						1 2 3 4 5		1 2 3 4 5		1 2 3 4 5			1 2 4								

1. Actividad 1. WODB
2. Actividad 2. Dictado Geométrico
3. Actividad 3. Polígonos estrellados
4. Actividad 4. Polígonos convexos y Movimientos en el plano
5. Actividad 5. *Visual Thinking*

4.5. Metodología

Metodológicamente es conveniente comenzar por razonamientos sencillos a los que el estudiante pueda acercarse de manera intuitiva, proporcionándole situaciones de éxito y potenciando la utilización de los sentidos. El aprendizaje utilizando razonamientos inductivos y demostraciones empíricas sentará la base para, en etapas posteriores, poder realizar razonamientos generales y abstractos de carácter deductivo.

La metodología tiene que ser principalmente participativa para que los alumnos razonen activamente, es mediante el proceso de la comunicación cuando se exige ordenar las ideas y validarlas para poder transmitirlas correctamente. Para ello es importante también que los alumnos adquieran un vocabulario específico de matemáticas con el que podrán comunicarse de manera objetiva y rigurosa.

Se persigue realizar tareas atractivas para los estudiantes que mantengan la motivación y se genere partición de los mismos. Estas tareas se plantean como un juego o un reto lúdico, son asequibles y se puede profundizar más en su desarrollo.

Se valora y fomenta el trabajo diario en el aula, se utilizará un diario o cuaderno del docente donde anotar las observaciones del comportamiento y esfuerzo en cada actividad de los estudiantes según el protocolo de observación indicado en el apartado 4.10.

Se fomentará un buen clima de convivencia en el aula, donde los alumnos se sientan cómodos para expresarse sin miedo y con el respeto de todos, para favorecer la participación de todos los estudiantes.

El profesor adopta el papel de guía proporcionando los materiales y disponiendo las condiciones adecuadas de trabajo para que sean los propios alumnos los que, asumiendo un papel más autónomo realicen un aprendizaje por descubrimiento que, siguiendo las teorías de pedagogía constructivista, esto genera un aprendizaje más significativo.

La pedagogía constructivista sostiene que si dotamos al alumnado de las herramientas necesarias, ante un desafío cognitivo que se le plantee y que sea capaz de motivarles, ellos mismos serán capaces de construir sus propios procedimientos para resolver ese reto, generando nuevas conexiones entre los conocimientos que ya poseen y los nuevos conocimientos, modificando ideas preconcebidas y aprendiendo de una manera más profunda de manera que los nuevos conocimientos queden guardados en su memoria a largo plazo y después puedan transferirlos cuando lo necesiten.

Dentro del constructivismo, encontramos como figuras clave:

- Ausubel: Teoría del aprendizaje significativo.
- Vigotsky: Teorías contextuales: histórico cultural. Zona de desarrollo próximo.
- Piaget: Teoría genética del aprendizaje.
- Bruner: Aprendizaje por descubrimiento.

- Bronfenbrennert: Teorías contextuales: bioecológica.

En conclusión, la pedagogía constructivista sostiene que el aprendizaje debe ser constructivo y funcional, partiendo de los conocimientos previos y contextualizado. Importan tanto los contenidos como los procesos en el aprendizaje y evaluación. Además, se debe favorecer la autonomía del alumno en el aprendizaje.

Las tareas y actividades planteadas a los alumnos se realizarán mediante el trabajo en grupo, donde se trabaje la colaboración entre pares y se facilite el intercambio de experiencias.

Siendo en este caso un grupo de alumnos tan heterogéneo, tanto en nivel de conocimientos, como edad, madurez, cultura y lugar de procedencia, nos proporciona además una oportunidad para trabajar transversalmente otros valores que hemos descrito entre los objetivos transversales y objetivos de etapa que se requieren en la normativa, que son fundamentales para poder vivir y trabajar en sociedad y que debemos transmitir a los alumnos como ciudadanos, como son el respeto, la tolerancia, la escucha activa, la integración social y la resolución pacífica de conflictos.

Se ha decidido para posibilitar el trabajo de los alumnos que todas las tareas deberán realizarse dentro del aula, ya que se realizan en grupo y los alumnos tienen dificultad para citarse fuera del horario lectivo.

El seguimiento de la asignatura fuera del aula se realiza a través de la plataforma *Teams*, donde los alumnos pueden expresar dudas, sugerencias y además se pueden proponer trabajos o ejercicios de refuerzo, con videos o enlaces que muestren más contenido sobre lo trabajado en el aula. Los alumnos y familias el centro están habituados a trabajar con esta plataforma.

La atención a la diversidad del aula se consigue a través de la variedad de registros de representación, además del lenguaje habitual, para lo cual la geometría y las representaciones gráficas nos ayudan expresar conceptos e ideas que se pueden visualizar y facilitan la comprensión a los alumnos. Mediante el trabajo en grupo los estudiantes pueden ayudarse entre pares con un lenguaje a veces más clarificador entre ellos que el que usa el docente, y además para aquellos alumnos que lo necesiten, se puede hacer un refuerzo con actividades complementarias que se subirán a la plataforma de *Teams*, y atención individualizada en tutorías. También se proporcionan distintas formas de evaluación: heteroevaluación, coevaluación y autoevaluación a través de distintos instrumentos para adaptarse a las distintas capacidades y características del alumnado.

En esta propuesta didáctica se introducen también estrategias de aprendizaje, las cuales están muy relacionadas con las teorías pedagógicas constructivistas que sostienen que el alumno “construye los conocimientos de forma activa a través de procesos mentales y estos son los que se pretende potenciar por medio de estrategias de aprendizaje”

(Barrallo, pág. 30). Se desarrolla de esta manera el proceso de enseñanza basado en "aprender a aprender", ya que como sabemos es irrealizable enseñar a un alumno todo lo que debe saber para llevar a cabo su vida de adulto, al menos se debe potenciar que los estudiantes sean autónomos para que ellos mismos puedan manejar y regular su aprendizaje. Estas estrategias de aprendizaje permiten desarrollar en los alumnos destrezas para adquirir, codificar y recuperar la información estudiada. Las estrategias de aprendizaje quedan definidas por Román (1993, pág. 169) como "series eficaces de operaciones mentales que el estudiante utiliza para adquirir, retener y/o recuperar los diferentes tipos de información (conceptos, principio, procedimientos)", se deben emplear de manera consciente e intencional.

La secuencia instruccional que vamos a utilizar para implementar en el aula estrategias de aprendizaje se basa en la investigación de Martín Antón, Marugán y Catalina (2013). Los autores recomiendan que se debe comenzar por el "Modelado", primero es el profesor el que realiza esta actividad a modo de ejemplo para los estudiantes, después se deben dar las "instrucciones por parte del docente" de manera explícita sobre el proceso de elaboración de la técnica a enseñar. A continuación, los estudiantes realizan la "práctica de la estrategia", primero con ayuda del docente y después de manera independiente. Por último, se debe realizar una evaluación de la práctica, hacer una prueba de rendimiento sobre el tema trabajado, llevar a cabo un registro personal y que el estudiante valore de manera autónoma la idoneidad de dicha estrategia con su propia manera de estudiar y aprender.

4.6. Actividades programadas.

La secuencia de actividades seguirá un orden tratando de pasar por todas las fases de aprendizaje recomendadas por los Van Hiele: 1. Información, 2. Orientación dirigida, 3. Explicitación, 4. Orientación libre, 5. Integración. La fase 3. Explicitación, como ya hemos dicho, no tiene por qué corresponder con un orden cronológico, sino que es una actividad que se recomienda realizar en todas las fases posibles, puesto que al tener que verbalizar y comunicarse, los alumnos afianzan los conocimientos adquiridos.

La **primera actividad** planteada podríamos incluirla dentro de la fase de información, los alumnos toman contacto con el tema que será objeto de trabajo, figuras geométricas, polígonos planos, figuras tridimensionales, relaciones angulares, movimientos en el plano, también será un primer ensayo para trabajar los procesos de argumentación, clasificación y comunicación. Además, nos servirá para conocer los conocimientos previos de los alumnos e identificar su nivel de razonamiento geométrico según el modelo Van Hiele. Se trata de la actividad **WODB** (*Which one doesn't belong*) o dónde está el intruso, que explicaremos más adelante.

La **segunda actividad** propuesta se llama **Dictado Geométrico**, es una actividad que podríamos incluir en la fase de explicitación. Con esta tarea se trabajará principalmente la representación y la comunicación. Queremos que los estudiantes se expresen y utilicen el vocabulario propio de la geometría, que aprendan vocabulario nuevo y consoliden sus conocimientos. Con esta actividad igualmente tomarán conciencia de la importancia de saber comunicarse con claridad y rigor, la necesidad de conocer el vocabulario matemático y los conceptos que representa.

La **tercera actividad** la incluimos en la fase de orientación dirigida, es la actividad de **Polígonos estrellados**. Es una de las fases de aprendizaje más relevantes puesto que se proponen una serie de problemas o tareas donde los conceptos y los razonamientos a alcanzar van a apareciendo de forma progresiva y los estudiantes van descubriendo y aprendiendo las relaciones, propiedades y una nueva forma de razonamiento.

La **cuarta actividad** está incluida en la fase de orientación libre, en esta fase se proponen problemas abiertos que puedan resolverse utilizando diferentes razonamientos y donde los estudiantes tengan que aplicar los conocimientos adquiridos estableciendo conexiones entre ellos y aprendiendo a coordinar también los distintos procesos de razonamiento utilizando diferentes registros de representación. En esta fase se refuerza el aprendizaje adquirido en las fases anteriores. En esta actividad se realizarán problemas sobre **Polígonos Convexos** y estudios sobre **movimientos en el plano**.

La **quinta actividad** es la de integración, en esta fase no se incluirán nuevos contenidos, sino que será una recopilación de todo lo aprendido. Servirá para que los alumnos tengan una visión global de todos los conceptos, vocabulario y propiedades que han ido apareciendo en las actividades, los organicen y puedan integrar esos nuevos conocimientos con sus conocimientos previos, además de integrar las nuevas formas de trabajo y razonamiento. En esta fase se proponen realizar mapas mentales o **"*visual thinking*"** a los alumnos para que puedan ordenar y visualizar las ideas de manera general.

4.6.1. WODB (*Which one doesn't belong)*

Esta actividad se basa en el juego de encontrar qué figura no encaja dentro de una familia de cuatro que se presentan en la misma colección. Es decir, que hay que buscar las características que definen a todos los objetos presentados y señalar aquel que tiene unas características que lo difieren de los demás. Para hacer este juego más interesante en matemáticas, lo que se plantea es que todos los objetos de la colección presentada pueden ser el intruso, por tanto, no hay una sola respuesta correcta, cada uno de los elementos tiene una característica o varias que lo diferencia de los demás y otras características que lo hacen similar. Los alumnos deben encontrar al menos una característica para cada objeto que lo haga "ser el intruso".

Para hacer este ejercicio correctamente los alumnos deben conocer las propiedades de los polígonos y sólidos que les vamos a presentar, cómo clasificarlos y describirlos. Al clasificar los objetos de esta manera utilizan un razonamiento y prueba por contraejemplo. También podemos, al realizar esta tarea, analizar cuál es su nivel de razonamiento dentro de los niveles de razonamiento de Van Hiele que hemos definido en el apartado II. Marco Teórico.

El otro proceso importante que se desarrolla en este juego es la comunicación, los estudiantes deben ser capaces de dar unos argumentos que convenzan a los demás compañeros de que esa figura es la intrusa, necesitan para ello utilizar un vocabulario preciso y objetivo con el que expresar sus ideas. Cuanto más vocabulario matemático conozcan mejor podrán expresar sus argumentos.

Los objetivos didácticos trabajados en esta actividad serán:

- Reconocer y distinguir figuras lineales, planas y espaciales, hallar relaciones de igualdad, congruencia, simetría, etc. y justificar esa relación mediante algún criterio.
- Definir propiedades geométricas, en figuras planas y espaciales.
- Saber clasificar y ordenar figuras planas y espaciales.
- Trabajar la expresión oral y escrita para aprender a comunicar ideas con claridad, argumentar, describir con lenguaje geométrico y realizar o aceptar reflexiones críticas.

Planificación de la tarea:

Los alumnos se distribuyen en grupos de cuatro personas y les planteamos el juego de encuentra al intruso. Primero se explica en qué consiste el juego y se pone un ejemplo que traten de resolver entre todos en voz alta para que vean cómo es la dinámica del juego, cuando todos hayan entendido en qué consiste, entregamos a cada grupo un par de fichas diferentes para que comiencen a trabajar sobre ellas. Deberán escribir en las fichas entregadas las razones por las cuales cada figura de las cuatro que componen la colección puede no pertenecer a la familia.

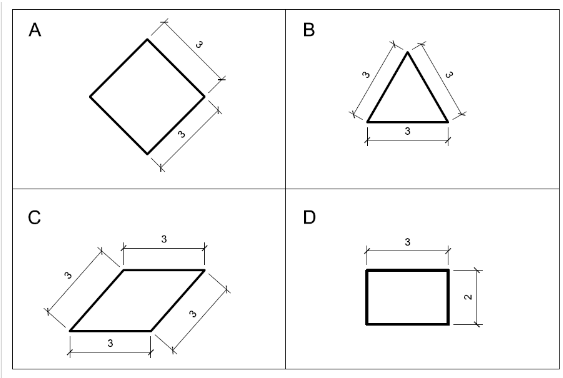
Se debe recalcar que no existe una única respuesta adecuada, cada alumno puede encontrar argumentos diferentes para definir al intruso, lo importante en este juego es ser capaz de razonar adecuadamente cuáles son las características que hacen a cada figura diferente de las demás y cuáles son las que la hacen similar.

Una vez hayan rellenado las fichas con todos los argumentos que han encontrado y debatido dentro de su grupo, se intercambian las fichas con los compañeros de otro grupo. Ahora deberán valorar si los argumentos que han dado en el otro equipo les parecen correctos o ellos son capaces de encontrar más. Pondrán por escrito también estas correcciones o los nuevos argumentos que puedan idear.

A los grupos que terminen antes de debatir y escribir todos los argumentos que han encontrado se les puede entregar otra ficha nueva diferente para que todos continúen trabajando y dar más tiempo a los que lo necesiten. Estas fichas nuevas también se intercambian con otro equipo que también vaya adelantado. Cuando todos los equipos afirmen tener resuelto el juego, se recogen todas las fichas y se ponen en común para toda la clase. Se van presentando una por una las fichas realizadas hasta el momento y se crea un debate analizando el argumento que se ha dado para discriminar a cada figura, vemos si todos están de acuerdo o no con lo que ha dicho cada grupo, qué propiedades han visto que tuviera esa figura que diferían de las demás y si a alguien se le puede ocurrir alguna más después de escuchar los razonamientos de sus compañeros.

A continuación, exponemos las fichas preparadas para realizar la actividad con los alumnos y los posibles aspectos en los que los estudiantes se pueden fijar para dar sus argumentaciones:

Ficha 1:



Ficha 2

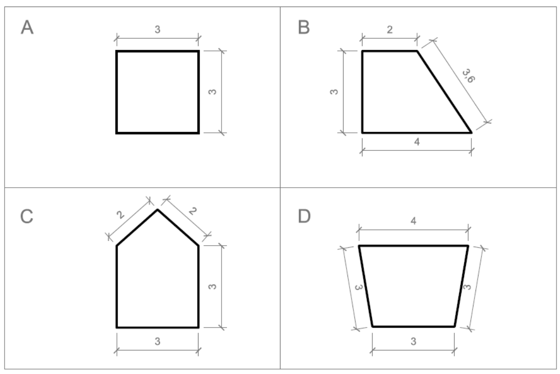


Figura 3: Fichas 1 y 2 de la actividad 1. WODB.

En las fichas 1 y 2 aparecen diferentes polígonos convexos, se ha añadido a las figuras una acotación con las medidas de cada lado, al introducir estas medidas la figura se convierte en una ilustración de apoyo, no queremos que vean figuras icónicas, sino que se dé paso a la "aprehensión discursiva" (Duval, 1999, pág. 21). El objetivo es que puedan observar que existen polígonos equiláteros y polígonos equiangulares y clasifiquen los polígonos por el número de lados y por sus ángulos interiores, anotando las propiedades comunes o diferentes que poseen. Se debatirá también si los polígonos presentados son regulares o no y qué características debe tener un polígono para ser regular, así como los conceptos de paralelismo y perpendicularidad.

También podemos debatir si dentro de una clasificación general algún polígono puede entrar en otra subclase (clasificación inclusiva, nivel 3 de razonamiento del modelo

Van Hiele) o si un mismo polígono puede catalogarse a la vez con un nombre u otro en función de si la definición se realiza atendiendo a los lados o a los ángulos.

Ficha 3:

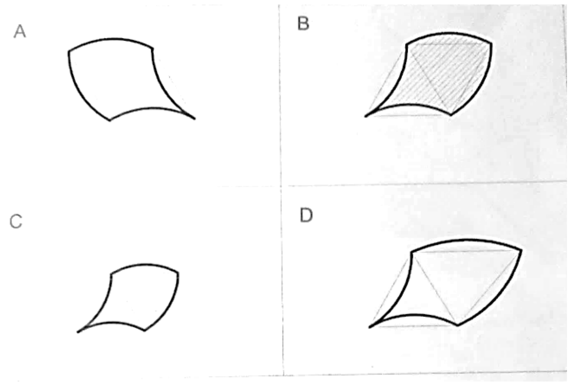


Figura 4: Ficha 3 de la actividad 1. WODB.

En la ficha 3 se ha dibujado un pétalo correspondiente a un mosaico nazarí, el objetivo de la ficha 3 es que se reconozcan los movimientos en el plano: simetría, giro y homotecia, para debatir cuáles son los movimientos que conocen, diferenciar los movimientos isométricos: traslación, giro y simetrías; y los isomorfos: homotecia. Con cuáles obtenemos figuras congruentes con las mismas dimensiones y con cuáles obtenemos figuras semejantes, que guardan las proporciones, pero no la dimensión. También se puede debatir qué tipos de simetría conocen, axial, central, etc., y qué diferencias obtenemos entre la simetría central y el giro.

En el debate también se puede introducir el tema de las transformaciones anamórficas, que conservan el área cambiando la forma del polígono matriz, consultar sus conocimientos previos en el tema de mosaicos y movimientos en el plano y su capacidad de visualización y procesamiento figurativo.

Ficha 4:

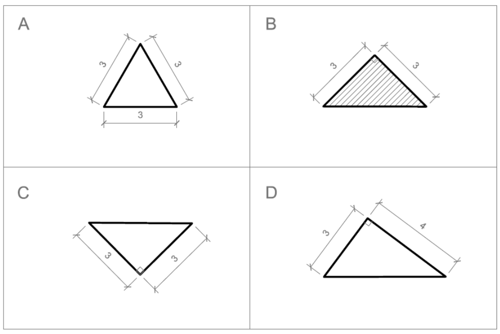


Figura 5: Ficha 4 de la actividad 1. WODB.

En la ficha 4 se dibujan triángulos equilátero, isósceles y escaleno, se señalan con cotas las medidas de los lados y se marca con un símbolo el ángulo recto. El objetivo de esta ficha es que analicen y clasifiquen los triángulos en función de la igualdad de sus lados, la igualdad de sus ángulos y la amplitud de los ángulos. Se busca que debatan y recopilen las propiedades que conocen de los triángulos y los nombres que reciben los distintos triángulos en función de esas propiedades. Además, se puede plantear que describan qué propiedades son las mínimas imprescindibles para definir cada triángulo, reflexionando sobre la relación que existe entre todas las propiedades que conocen.

Ficha 5:

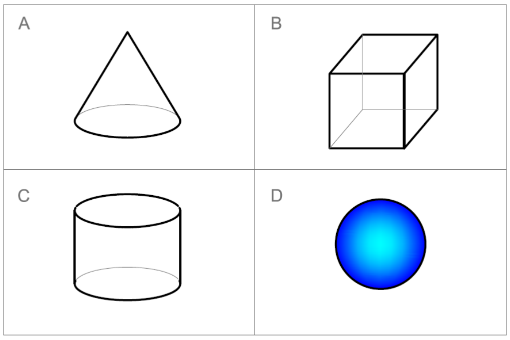


Figura 6: Ficha 5 de la actividad 1. WODB.

En la ficha 5 se han dibujado figuras en tres dimensiones. El objetivo de esta ficha es que debatan las propiedades y características que tienen los poliedros y los sólidos de revolución, recuerden cómo se construyen y las diferencias que hay entre ellos para poder clasificarlos en función el número de caras planas, aristas, vértices, etc. Que recuerden el vocabulario específico de las figuras tridimensionales y la diferencia de términos y conceptos para referirnos a longitudes, áreas o volúmenes. En el debate se plantearán cuáles son los poliedros regulares que conocen, cómo se construyen y los polígonos que forman sus caras.

Ficha 6:

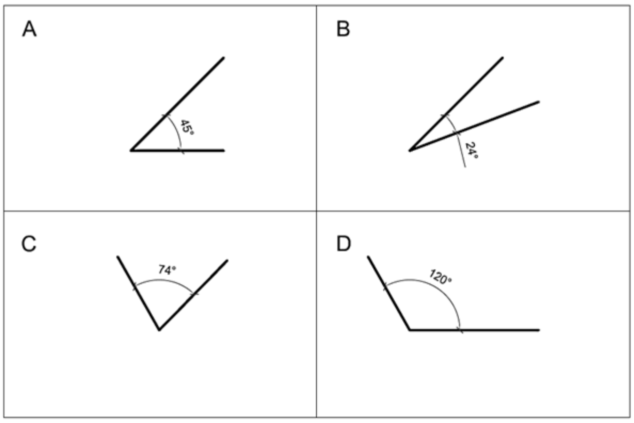


Figura 7: Ficha 6 de la actividad 1. WODB.

En la ficha 6 se han dibujado distintos ángulos indicando la medida en grados sexagesimales. El objetivo de esta ficha es que se clasifiquen y nombren los ángulos en agudos, obtusos, y busquen las relaciones entre cada ángulo con el círculo completo. En el debate se puede plantear si podríamos construir algún polígono convexo que tuviera todos los ángulos interiores de esa medida, obteniendo solo el hexágono con ángulos interiores de 120º, cómo podemos calcular la medida del ángulo interior de los polígonos, qué otras unidades de medida conocen para medir los ángulos y recordar la equivalencia entre grados sexagesimales y radianes.

Organización del tiempo y las actividades:

La primera actividad está planteada para poder realizarse en una sola sesión de 50 minutos. Tenemos preparadas seis fichas diferentes que se repartirán agrupadas de dos en dos a los distintos equipos. La dinámica a seguir es que un equipo realice dos fichas y corrija dos fichas diferentes del equipo contrario, de esta forma cada equipo ha conseguido trabajar al menos con cuatro tipos de fichas diferentes realizando un pequeño cambio en la manera de abordar la tarea para que no les resulte monótono. Cuando un equipo termina de realizar la actividad antes que los demás se le entregará una ficha distinta más para que sigan trabajando, esta ficha también se intercambiará con otro grupo que vaya adelantado. Cuando todos han terminado de trabajar se recogen todas las fichas y comienza el debate grupal.

En los primeros 5 a 7 minutos de clase se hacen los grupos y se explica en qué consiste la actividad que van a realizar poniendo un ejemplo proyectado en la pizarra, este ejemplo se resuelve en voz alta entre toda la clase para que quede clara la dinámica del juego.

Para que los alumnos trabajen en grupo con sus fichas iniciales vamos a dar 10 minutos, después realizaremos el intercambio y daremos 10 minutos más, durante este tiempo podemos ir aumentando el número de fichas a los alumnos que vayan terminando, para que todos los alumnos puedan realizar al menos una ficha más después del intercambio, se pueden añadir cinco minutos más.

Reservaremos como mínimo los últimos 15 minutos para realizar el debate y puesta en común de los diferentes argumentos dados por cada grupo. Si los alumnos han sido capaces de realizar las tareas en menos tiempo el debate final se puede extender no solo para comparar los razonamientos de cada equipo sino para recordar y recapitular las propiedades que conocemos y que vienen a colación de cada ficha que hemos entregado: polígonos, triángulos, movimientos en el plano, figuras tridimensionales y relaciones angulares.

4.6.2. DICTADO GEOMÉTRICO

La segunda actividad propuesta es una tarea para trabajar preferentemente la representación y la comunicación. Los objetivos didácticos de esta actividad son:

- Trabajar la expresión oral y escrita para aprender a comunicar ideas con claridad, argumentar, describir con lenguaje geométrico y realizar o aceptar reflexiones críticas.

- Saber describir propiedades geométricas en figuras planas.
- Utilizar correctamente el vocabulario estudiado y valorar positivamente su uso para conseguir mayor claridad y precisión.

En esta actividad trabajarán además la conversión de registro representativo, del lenguaje natural a la representación figurativa.

Con esta tarea se pretende que los alumnos practiquen sus habilidades comunicativas. Para poder realizar bien esta tarea se requiere tener mucho vocabulario matemático con el que poder describir los objetos con precisión y objetividad, para que otra persona con unas vivencias y pensamiento diferente sea capaz de representar lo que le estamos describiendo. Los alumnos se darán cuenta de la importancia del lenguaje matemático para comunicar las ideas con claridad.

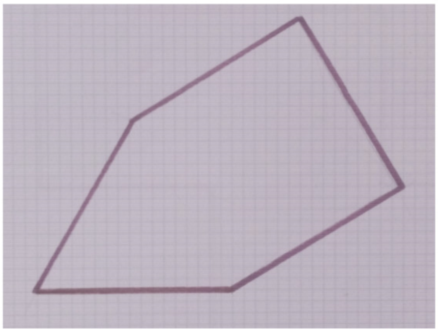
Planificación de la tarea:

La dinámica de esta tarea es que cada alumno/a, de manera individual, observe una figura geométrica diferente que tiene que describir. Se trata de que imaginen que están hablando por un teléfono que no tiene cámara con un amigo y esa otra persona necesita dibujar una figura que no puede ver, pero ellos sí. Deben describir únicamente con palabras la figura que están viendo. Tienen que intentar que las instrucciones que den sean lo más claras y precisas posibles para que la otra persona dibuje exactamente la figura que ellos tienen delante, se pueden ayudar de una regla y un transportador de ángulos para dar las medidas exactas.

GRUPO 1_ Nombre y Apellidos:

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado, con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero, al dibujo original?

¿Ves algún error que se pueda corregir?

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

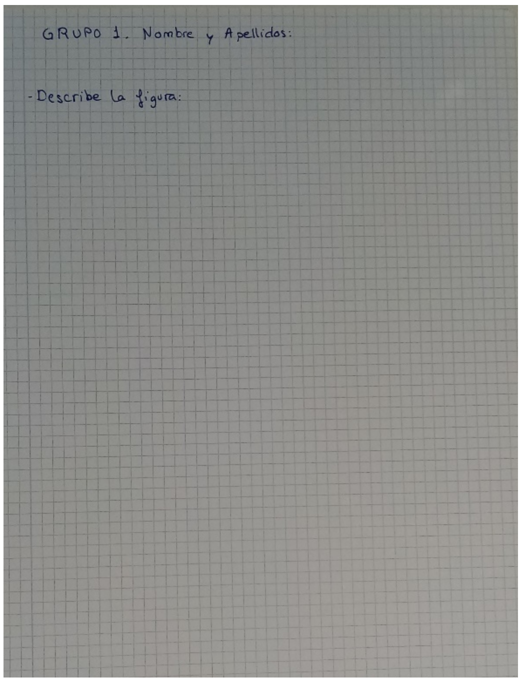


Figura 8: Ejemplo de ficha para repartir entre los alumnos. Elaboración propia.

Se les entrega una ficha con el dibujo y el enunciado de la actividad propuesta, en la figura 8 se puede ver un ejemplo de una de ellas (en los anexos 9.1.2. se aportan todas las fichas entregadas a los alumnos) y aparte otra hoja en blanco de papel cuadriculado para que escriban las instrucciones que dan al compañero. La figura que tienen que describir también está dibujada sobre un papel cuadriculado para que la descripción que den y la representación pueda ser exacta.

A continuación, se intercambian entre los alumnos las fichas que contenían solo las descripciones para que, a partir de las mismas, cada uno trate de representar gráficamente lo que ha descrito el compañero. Una vez que los alumnos han realizado la representación gráfica, este dibujo se entrega de vuelta al autor de la descripción, para que vea el resultado de sus instrucciones y reflexione sobre lo que ha ocurrido. Para ello debe responder a unas preguntas:

"Después de ver lo que tu compañero ha dibujado con las instrucciones que le diste, responde:

- ¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero al dibujo original?
- ¿Ves algún error que se pueda corregir?
- ¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?"

Cuando todos han terminado de realizar esta actividad por escrito, se recogen las fichas y se ponen en común los resultados. Se realiza un debate donde los alumnos expresan otras formas de poder describir esas figuras y se comparan los distintos tipos de estrategias utilizadas. Al tener que describir estas figuras lo normal es tratar de descomponerlas en figuras conocidas por lo que con esta actividad se practica la habilidad para realizar procesamientos mediante operaciones mereológicas, desarrollando así la visualización y la "aprehensión operativa" que veíamos en la teoría de Duval (1999).

Con esta actividad se trabaja también la capacidad de representación gráfica y la conversión de un registro de representación a otro, que resulta muy útil en la resolución de problemas para simplificar conceptos que con el lenguaje resultan complejos y poder visualizar y acercarse de una manera intuitiva a los problemas. Al visualizar las relaciones entre los objetos de manera gráfica se pueden tomar decisiones de una manera más informada y eficiente, por ello es importante que los alumnos se acostumbren a hacer diagramas, o representaciones gráficas de las ideas, conceptos, además de los objetos geométricos y su posición en el espacio.

Organización del tiempo y las actividades.

La actividad se realiza en una sesión de 50 minutos. Los primeros cinco minutos se explica la actividad y se reparten las fichas a los alumnos, se debe realizar de manera individual por lo que hay que considerar que los alumnos están separados o bien que las fichas que se intercambian sean con un compañero que no puede ver la figura.

Se asignan de cinco a siete minutos para que visualicen y describan la figura entregada, dejándolo por escrito en la ficha indicada. Después de intercambiar las fichas se dan otros cinco a siete minutos para que realicen la representación gráfica siguiendo las instrucciones. Una vez se devuelve la ficha al autor de la descripción se asignan otros siete minutos para que reflexionen los errores que se han podido cometer y respondan a las preguntas que les hemos planteado.

Los últimos 15 minutos se reservan para la puesta en común de los resultados y la comparación de las estrategias utilizadas. Si hay tiempo se puede realizar el ejercicio entre toda la clase, con un alumno que salga a dibujar a la pizarra mientras el resto de alumnos le da instrucciones para dibujar la figura que no está viendo, realizando una modificación en una de las variables didácticas, puesto que ahora la figura que tendrá que dibujar el compañero no tiene por qué tener las medidas exactas, pero sí la misma proporción.

4.6.3. POLÍGONOS ESTRELLADOS

En la tercera actividad vamos a trabajar con polígonos estrellados, viendo las relaciones angulares que existen en los triángulos y los polígonos estrellados, la definición de polígonos cóncavos y convexos, la relación entre las diagonales de los polígonos convexos y los polígonos estrellados y la relación entre los números primos y coprimos con los polígonos estrellados. Los objetivos didácticos de esta tercera actividad son:

- Analizar los polígonos estrellados, polígonos convexos y cóncavos, relación entre diagonales y números coprimos.
- Conseguir desarrollar demostraciones con razonamiento deductivo sencillo sobre las relaciones angulares en polígonos cóncavos y convexos mediante una práctica guiada.

Planificación de la tarea:

Los polígonos estrellados son polígonos regulares cóncavos y se obtienen al unir de forma alterna los vértices de un polígono convexo. Aunque no de todos los polígonos convexos se pueden obtener polígonos estrellados. Si la estrella que obtenemos la hemos realizado superponiendo dos o más polígonos no se trata de un polígono estrellado, para que se considere así se debe haber pasado por todos los vértices del polígono convexo antes de cerrarlo.

En una primera sesión, vamos a construir diferentes polígonos estrellados con el objetivo de que comprendan mejor su definición. Esta actividad se realizará de manera individual, aunque siempre se pueden consultar y ayudar entre pares. Para que construyan los polígonos podemos utilizar un geoplano circular o bien una plantilla con puntos que señalen los vértices del polígono convexo. A continuación, deben dibujar diagonales del polígono convexo partiendo de un vértice y uniéndolo con otro vértice no consecutivo, cada dos, cada tres vértices, etc., y observar el polígono obtenido al cerrar el dibujo.

También se podría utilizar materiales manipulativos como cartón e hilos para hacer las estrellas, como vemos por ejemplo en el taller de matemáticas del festival de Educación FACE 2018 celebrado en Toledo (Figura 9).

Figura 9: polígonos estrellados realizados con cartón e hilo. Imagen obtenida de FACE 2018 (2024)

Con esta tarea observarán la relación entre números primos y coprimos (números primos entre sí o primos relativos, es decir dos números enteros cuyo m.c.d. es 1) y polígonos estrellados.

Proporcionaremos a los alumnos unas cartulinas con distintos polígonos regulares dibujados con el número de vértices señalado (ver anexo 9.1.3. con las fichas de la actividad 3), y un cuadro donde tendrán que anotar con su nomenclatura las estrellas que encuentren. Los alumnos comenzarán construyendo con pinturas o rotuladores polígonos estrellados a partir de esos polígonos convexos regulares. Con un polígono convexo regular podemos obtener tantos polígonos estrellados como números primos hay menores que el número de lados dividido entre dos. Observarán que con un triángulo y un cuadrado no se puede hacer un polígono estrellado. El primer polígono estrellado que obtenemos es a partir de un polígono convexo de 5 vértices, podemos construir únicamente un polígono estrellado de cinco puntas, que se denota $\binom{5}{2}$, también se puede hacer un polígono estrellado cada tres pasos, pero nos quedaría igual que el anterior. Si utilizamos un polígono convexo de 6 vértices y hacemos diagonales cada dos pasos obtenemos dos triángulos superpuestos, no un polígono estrellado, cada tres pasos obtienes tres segmentos que se cortan en el centro, porque 2 y 3 son divisores de 6. Con un polígono convexo de 7 vértices obtenemos 2 polígonos estrellados: uno cada dos pasos $\binom{7}{2}$ y otro cada tres pasos $\binom{7}{3}$, el de cuatro pasos queda igual que el de tres y el de cinco pasos igual que el de dos. Con un polígono convexo de 8 vértices obtenemos cada dos pasos dos cuadriláteros superpuestos, no un polígono estrellado, cada tres pasos sí encontramos un polígono estrellado $\binom{8}{3}$, esto es porque 8 y 3 son números coprimos, cada cinco pasos también obtenemos el mismo polígono estrellado, 8 y 5 también son coprimos. Con un polígono convexo de 9 vértices obtenemos dos polígonos estrellados: cada dos pasos $\binom{9}{2}$, y cada cuatro pasos $\binom{9}{4}$, ya que 9 y 2 son números coprimos entre sí, al igual que 9 y 4, cada cinco pasos obtenemos el mismo polígono estrellado que cada cuatro y cada siete pasos el mismo que cada dos. Si lo hacemos cada tres pasos obtenemos tres triángulos superpuestos, lo mismo ocurre si lo hacemos cada seis pasos, porque 3 y 6 no son coprimos con 9, tienen un divisor común mayor que 1. Con un polígono convexo de 10 vértices cada tres pasos y cada siete pasos obtenemos el mismo polígono estrellado, si lo hacemos cada dos pasos obtenemos dos pentágonos superpuestos igual que si lo hacemos cada ocho pasos, si lo hacemos cada cuatro pasos obtenemos dos polígonos estrellados de 5 vértices superpuestos, lo mismo ocurre si lo hacemos cada seis pasos, solo 3 y 7 son coprimos con 10.

Deberán ir construyendo los polígonos estrellados sucesivamente, anotando su nomenclatura y observando cuándo es posible construir un polígono estrellado o cuándo obtenemos dos polígonos superpuestos. Después de haber construido los polígonos estrellados hasta el de 10 vértices, les pedimos que traten de averiguar, sin dibujarlo, el número de polígonos estrellados que obtendrán de un polígono convexo de 11vértices. Para ello deberán fijarse en si los pasos que dan son números coprimos con el número de vértices, como el 11 es un número primo todos los pasos son posibles para formar un polígono estrellado, pero tendrán que percatarse de que, cuando el número de pasos es más de la mitad del número de vértices, se repite el mismo tipo de polígono. Después deberán tratar de ver qué ocurre con el de 12 vértices sin dibujarlo. A continuación, se ponen en común los resultados obtenidos y los estudiantes expondrán el razonamiento que han seguido para llegar al resultado.

La siguiente actividad dirigida es tratar de hallar la fórmula para encontrar el número de cuerdas que pueden trazarse desde los puntos dados de una circunferencia (Figura 10). Se hará siguiendo las orientaciones dadas: primero deben responder cuántas cuerdas pueden trazarse desde el punto 1 y cuántas cuerdas pueden trazarse en total utilizando los nueve puntos. Después se plantea que hallen cuántas cuerdas se podrían trazar si hubiera 50 puntos y 100 puntos.

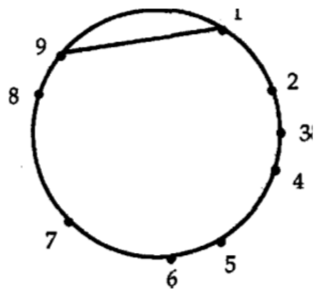


Figura 10: Diagrama para hallar el número de cuerdas de una circunferencia (Corberán, y otros, 1994, pág. 53).

Se les puede ir orientando para que aprendan a "convertir" el lenguaje natural en algebraico que siempre suele presentar problemas entre los estudiantes:

¿Cuántas cuerdas puedo trazar desde el punto 1? Si llamamos *"n"* al número de puntos ¿cómo podemos llamar al número de cuerdas que trazo desde el punto 1?, ¿Cuántas cuerdas puedo trazar en total desde los 9 puntos? ¿Cómo lo has hallado?, ¿Cómo escribirías esa operación si el número de puntos es *"n"*?

Una vez que todos hayan llegado a la solución, ponemos en común los resultados obtenidos y expresarán también el razonamiento que ha seguido cada uno de ellos.

En la segunda sesión resolverán una serie de problemas de manera individual para que, mediante una práctica guiada, sean capaces de realizar un razonamiento deductivo para hallar relaciones angulares.

En cuanto a las relaciones angulares de los polígonos podemos comenzar demostrando que los ángulos interiores de un triángulo son 180º de una manera empírica, con papel (Figura 11). Les pedimos que recorten un triángulo de papel cualquiera y doblen el vértice superior por la paralela media de su triángulo. Después juntan los otros dos vértices y observarán que todos coinciden sobre la recta formando un ángulo llano, la suma de ángulos es de 180º.

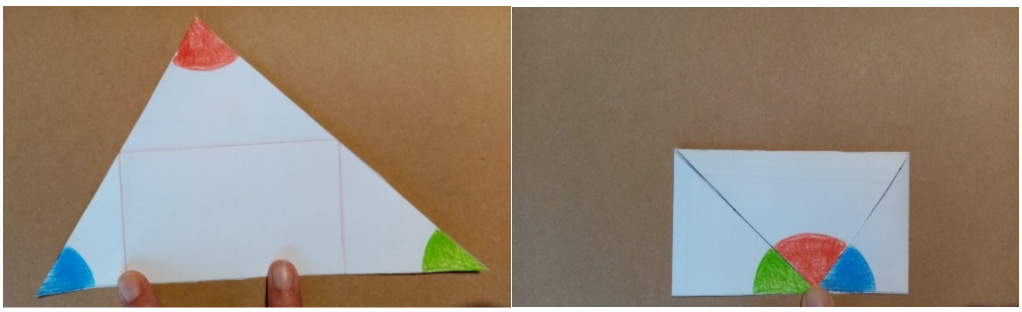


Figura 11: demostración empírica de la suma de ángulos de un triángulo

También podemos realizar la demostración en la pizarra digital utilizando GeoGebra, trazando una recta paralela a la base de un triángulo cualquiera que pase por el vértice opuesto y observando que los ángulos que se forman entre esas dos rectas paralelas y la recta transversal que las corta son ángulos interiores opuestos, que son congruentes (Figura 12).

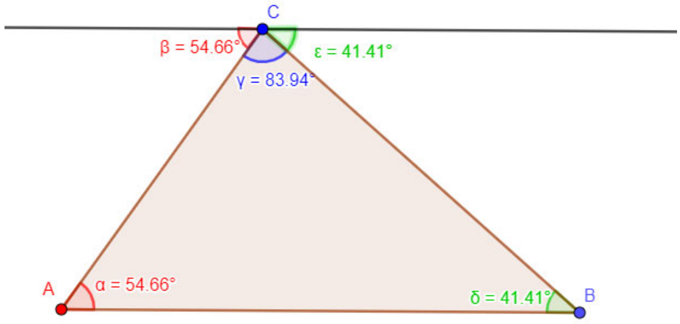


Figura 12: construcción con GeoGebra de la suma de ángulos de un triángulo

A continuación, les pediremos que traten de hallar las relaciones entre los ángulos exteriores e interiores de un triángulo, observando que los ángulos se encuentran sobre la misma recta (Figura 13).

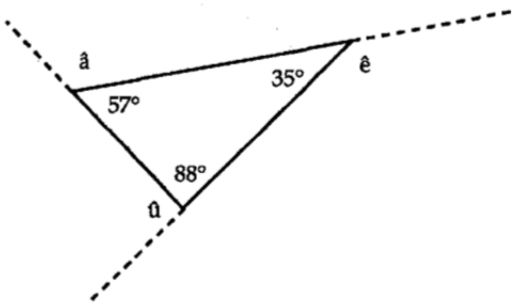


Figura 13: ejemplo de tarea para el cálculo de ángulos (Corberán, y otros, 1994, pág. 70)

Para ello se pueden ir estableciendo una serie de pasos que los llevarán mediante un proceso simple a realizar una demostración con un razonamiento deductivo como vemos en la Figura 14.

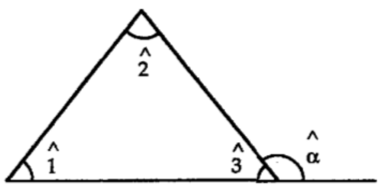


Figura 14: pasos para la demostración del teorema del ángulo exterior de un triángulo. (Corberán, y otros, 1994, pág. 75)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180º$ porque …

$\angle 3 + \angle \alpha = 180º$ porque…

Entonces: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180º = \angle 3 + \angle \alpha$

De donde $\angle 1 + \angle 2 = \angle \alpha$ porque …

Realizadas estas primeras tareas e introducidos en el razonamiento deductivo, se plantea a continuación que calculen los ángulos interiores de un polígono estrellado como el de la figura 15, obtenida de la publicación de Reyes y Fernández (2015), conociendo cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo.

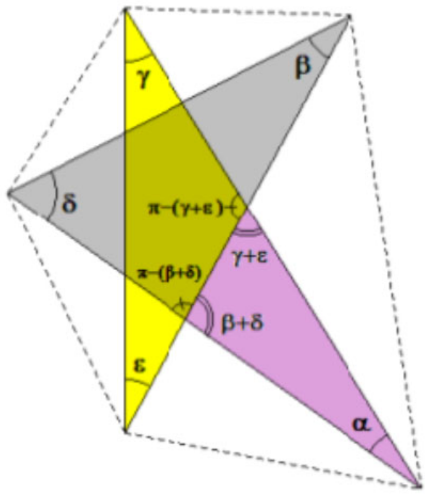


Figura 15: suma de los ángulos de un polígono estrellado de cinco puntas (Reyes Iglesias & Fernández Benito, Pentágonos, Construcciones, Mosaicos. Geometría sagrada, 2015, pág. 64)

Se les guiará a través de una serie de pasos:

Considera primero el triángulo gris: conocemos el valor de □ y de □, ¿cuánto mide el ángulo que nos falta de ese triángulo gris? ¿Cuánto mide el ángulo exterior a ese triángulo gris? Considera ahora el triángulo amarillo: conocemos el valor de Ɛ y de γ ,¿cuánto mide el ángulo que nos falta de ese triángulo amarillo? ¿Cuánto mide el ángulo exterior a ese triángulo amarillo?, ¿Cuál es la suma de los ángulos del triángulo rosa?

Por último, podemos relacionar el conocimiento de polígonos estrellados con diversas obras de arte y arquitectura Patrimonial de Castilla y León, que los estudiantes pueden visitar y donde podemos contemplar la utilización de esas construcciones. Los alumnos podrán analizar el tipo de polígono estrellado que se ha utilizado, cómo se ha generado, cuáles son los más utilizados en el arte y arquitectura, qué propiedades pueden tener estos polígonos para que sean tan usados: por estética, por sus condiciones de estabilidad, por su adaptabilidad, por su construcción más directa, etc.

Por ejemplo, en la Catedral de Brugos podemos contemplar la bóveda estrellada del cimborrio central (Figura 16), obra de Juan de Colonia y Juan de Vallejo en el s. XVI, la bóveda calada también estrellada de la Capilla del Condestable (Figura 17), obra de Simón de Colonia en 1517 y el rosetón de la fachada (Figura 18). En las cúpulas vemos estrellas de ocho puntas, si bien es cierto que se trata de una construcción en tres dimensiones podemos ver su proyección en planta para tener un polígono estrellado plano:

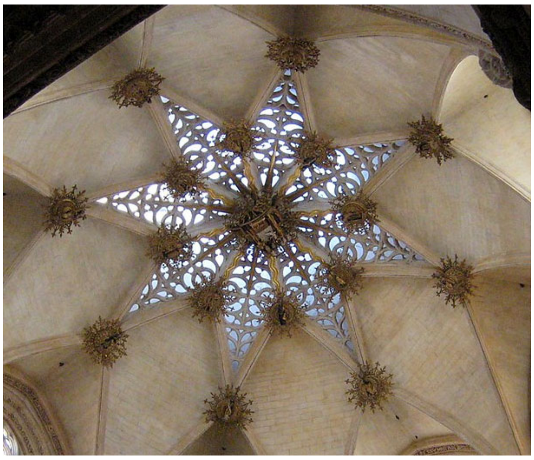



Figura 16: Cimborrio de la Catedral de Burgos - Fotografía de: De Jose Luis Filpo Cabana, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=30269929,

Figura 17: A la derecha capilla del Condestable de la catedral de Burgos, fuente: De Werner 6 February 2008 (UTC), https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3513261

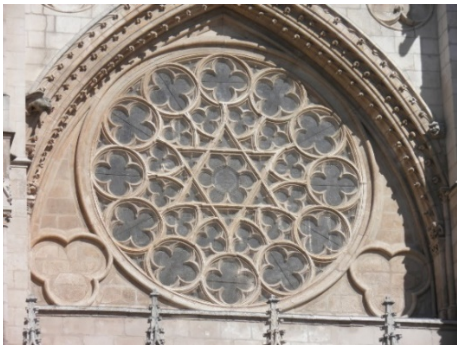


Figura 18: Imagen del rosetón de la catedral de Burgos, en este caso no se trata de un polígono estrellado sino de dos triángulos superpuestos formando una estrella.

El rosetón pentalfa, estrella de cinco puntas en la ermita de San Bartolomé de Ucero (Figura 20), en el cañón del Río Lobos en Soria, de orden templario del s. XIII. O en la iglesia de San juan de Castrojeriz del s. XV, en Burgos (Figura 19), también de orden templaria.


Figura 19: A la izquierda, fotografía de la iglesia de San Juan de Castrojeriz, Burgos. Fuente: https://www.fotopaises.com/foto/iglesia-de-san-juan-castrojeriz-espana-400027

Figura 20: A la derecha, óculo de la ermita de San Bartolomé de Ucero con la estrella de cinco puntas regular.

O los artesonados mudéjares que podemos contemplar en varios palacios e iglesias de Castilla y León, como el que podemos ver en el Museo Nacional de Escultura de Valladolid (Figura 21) donde vemos estrellas de diez puntas que en realidad son dos estrellas de cinco puntas superpuestas, o en el techo de la Capilla dorada del convento de Santa Clara de Tordesillas o en las pinturas de los baños árabes (Figura 22) que se encuentran bajo el mismo convento.

Figura 21: A la izquierda, fotografía del museo Nacional de Escultura de Valladolid, fotografía realizada por Miguel Ángel Escalona. https://www.pinterest.es/pin/410249847308396297/. Vemos que las estrellas de diez puntas son en realidad dos estrellas de cinco puntas superpuestas.

Figura 22: A la derecha baños árabes en el monasterio de Santa Clara en Tordesillas, fotografía: www.domuspucelae.blogspot.com donde vemos estrellas de ocho puntas y estrellas de cinco puntas no regulares.

Organización del tiempo y las actividades:

La actividad cuarta se realizará en tres sesiones de 50 minutos.. En la primera sesión se realizarán las construcciones de polígonos estrellados y en la segunda y tercera sesión se resolverán los problemas de la práctica guiada.

Primera sesión:

En los primeros quince minutos se realizarán las construcciones de los polígonos estrellados, anotando la nomenclatura de los polígonos estrellados obtenidos. Para resolver las preguntas sobre polígonos estrellados se prevén quince minutos.

Para la puesta en común de los resultados habrá diez minutos.

Los diez últimos minutos, si hay tiempo en esta sesión, se utilizarán para observar los polígonos estrellados en el Patrimonio Histórico, que descubran los polígonos estrellados que hay en los monumentos, hacer un resumen y conclusiones de lo aprendido en la sesión.

Segunda y tercera sesión:

En los primeros diez minutos se prevé que traten de resolver el problema de las cuerdas en el círculo, pueden trabajar por parejas recordando lo trabajado en la sesión anterior, a continuación, en los siguientes diez minutos se pondrán en común los resultados.

Seguidamente, haremos la demostración empírica de la suma de los lados del triángulo con una duración prevista de cinco minutos.

Los siguientes tres retos preparados se irán proporcionando de uno en uno para su resolución, se prevén diez minutos para que resuelvan cada reto, y diez minutos más para la puesta en común después de resolver cada uno, pero esto puede variar en función de las dificultades que puedan surgir y los debates que se abran durante la puesta en común. La previsión temporal para esta actividad completa es de tres sesiones.

Los últimos diez minutos de cada sesión se reservarán para hacer un sumario de lo aprendido y recalcar las conclusiones.

4.6.4. POLÍGONOS CONVEXOS y MOVIMIENTOS EN EL PLANO

Estas actividades se incluyen dentro de la fase de orientación libre, donde los alumnos utilizan los conocimientos que han aprendido en las fases anteriores para resolver problemas más complejos, abiertos y que planteen nuevas relaciones o vías de resolución. La metodología utilizada en esta fase será la de aprendizaje a través del trabajo cooperativo y la resolución de problemas. Los alumnos se organizarán en pequeños grupos de tres alumnos distribuidos de manera heterogénea después de haber analizado el nivel de razonamiento de Van Hiele de cada uno a partir de los trabajos realizados en las anteriores fases. Los objetivos didácticos de las tareas de esta fase de aprendizaje son:

- Saber interpretar problemas matemáticos y obtener soluciones aplicando los conocimientos y la información necesaria.
- Deducir la fórmula para calcular el número de diagonales de un polígono convexo.
- Deducir cómo calcular el ángulo interior de un polígono convexo regular.
- Conocer y analizar las propiedades que caracterizan los movimientos isométricos en el plano, saber detectar los que se utilizan para elaborar distintas representaciones y saber aplicarlos.
- Analizar y justificar que los movimientos de traslación, giro o simetría dan figuras congruentes, isometría.
- Analizar y justificar que los movimientos de homotecia dan figuras isomórficas o semejantes, con la misma proporción, pero no congruentes.

Se comienza con una sesión de Resolución de problemas que los alumnos deberán resolver en pequeños grupos de tres alumnos. En esta parte el docente debe intervenir lo mínimo posible actuando solo de orientador o guía en los momentos de bloqueo de los estudiantes, con preguntas abiertas. Los problemas se presentarán de uno en uno, primero se leerá el problema en voz alta para confirmar que todos los estudiantes han entendido las preguntas y después se conceden diez minutos para que traten de resolverlo en cada grupo. A continuación, se pondrán en común los resultados y las estrategias seguidas por cada grupo, se dará un tiempo para que los alumnos puedan anotar el proceso en sus cuadernos personales y se continuará con el siguiente problema.

Problema 1: En la figura 15, O es el centro de la circunferencia. El cuadrilátero OCBA es un rectángulo, donde OA = 5 cm y AP = 1 cm. ¿Cuánto mide CA? Razona la respuesta. (Figura 23) (Corberán, y otros, 1994, pág. 86)

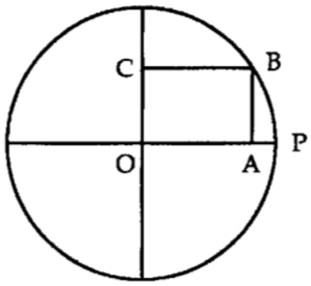


Figura 23: problema 1. (Corberán, y otros, 1994, pág. 86)

Orientaciones que puede dar el docente:

En el caso de que los estudiantes se bloqueen podemos guiarles con preguntas abiertas del tipo: ¿Qué propiedades cumplen todos los puntos de una circunferencia?, ¿Cómo se llama la distancia del centro de la circunferencia a un punto de esta?

Si nos dicen que el cuadrilátero OCBA es un rectángulo, ¿cuánto miden sus ángulos?, ¿sabríamos calcular la distancia AB? ¿Y la distancia OC?

Posibles estrategias que utilicen los estudiantes:

El problema se puede resolver utilizando distintas estrategias. Pueden pensar en utilizar el Teorema de Pitágoras, que conocen bien, para tratar de calcular esa diagonal CA teniendo que hallar primero el cateto OC, que se darán cuenta de que es igual a AB, al ver que el triángulo OAB es congruente con el triángulo AOC, concluirán sin necesidad de hacer cálculos que la diagonal OB mide lo mismo que CA.

Otros pueden percatarse de que la distancia OB es el radio de la circunferencia que es lo mismo que OA + AP. Al ser CB paralelo a OA y CO paralelo a BA, la diagonal OB es congruente con la diagonal CA.

Problema 2: Dadas dos circunferencias de centros A y B, de distintos radios que se cortan en dos puntos C y D. Mostrar que el segmento AB es perpendicular al segmento CD. (Figura 24). (Corberán, y otros, 1994, pág. 87)

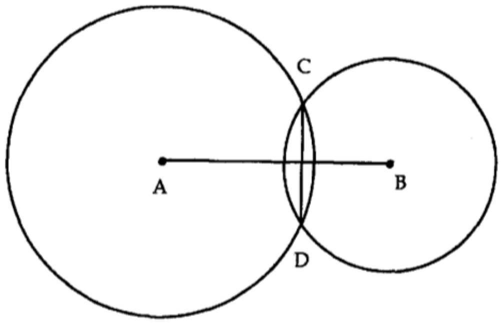


Figura 24: Problema 2. (Corberán, y otros, 1994, pág. 87)

Orientaciones que puede dar el docente:

Preguntas abiertas: ¿Qué relación hay entre la distancia AC y la distancia AD? ¿Y entre la distancia BC y BD? ¿De qué tipo es el triángulo formado por los puntos ACD? ¿Cómo son los ángulos en C y en D dentro del triángulo ACD?

Si tomamos cualquier punto del segmento AB y calculamos su distancia al punto C, ¿puede tener la misma distancia que al punto D? ¿Cómo se llama la recta que tiene esa propiedad? ¿El punto donde se cortan el segmento AB con el segmento CD será el punto medio de qué segmento?

Posibles estrategias que utilicen los estudiantes:

Pueden utilizar triángulos congruentes, el segmento AD es igual al segmento AC, ya que son radios de la circunferencia, por lo tanto, el triángulo ACD es un triángulo isósceles y el ángulo en C es el mismo que el ángulo en D.

Pueden señalar el punto de corte de los segmentos AB y CD y llamarlo M. M es el punto medio del segmento CD. Los triángulos ACM y ADM son congruentes, por lo tanto, el ángulo en M del triángulo ACM es igual al ángulo en M del triángulo ADM, como está sobre una recta la suma de ambos es igual a 180º, al ser igual a la mitad tendremos 90º.

Problema 3: Diagonales de un polígono:

Dibuja y observa el número de diagonales que hay en los distintos polígonos, pueden ser irregulares: cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono. ¿Cuántas diagonales hay en un isodecágono, polígono de 20 lados? ¿Y en un polígono de 50 lados? Razona la respuesta.

Orientaciones que puede dar el docente:

Recordamos qué es una diagonal en un polígono. ¿Cuántas diagonales salen desde cada vértice en un pentágono?, si sumásemos todas las diagonales que salen desde cada vértice ¿cuántas tendríamos?, pero ¿cuántas diagonales tiene el pentágono en total?, ¿por qué? ¿Cuántas diagonales salen desde cada vértice en un hexágono? ¿Cuántas diagonales tiene el hexágono en total?

¿Cómo podemos relacionar el número de vértices o de lados que tiene un polígono con el número de diagonales? ¿cuántas diagonales salen desde cada vértice en el pentágono? ¿Qué número hay que restar al número de vértices del pentágono para que nos dé el número de diagonales que salen desde cada vértice? ¿y en un hexágono? ¿y qué hacemos para hallar el número de diagonales total? ¿Pasará lo mismo en un decágono?

Posibles estrategias que utilicen los estudiantes:

Pueden comenzar trazando todas las diagonales y contándolas cuando es un polígono de pocos vértices, tienen que sumar todas las diagonales que salen de cada vértice sin volver a contar las que ya están dibujadas. Se pueden percatar de cuál es el número de diagonales que salen de cada vértice y multiplicarlas por el número de vértices y después tendrán que dividir entre 2, porque cada diagonal va y viene de cada uno de los vértices. Si llaman *n* al número de vértices y lo relacionan con el número de diagonales que sale de cada vértice pueden llegar a la expresión algebraica general para calcular el número de diagonales de cualquier polígono.

Problema 4: si de un polígono regular conocemos que la suma de sus ángulos interiores mide 7200 grados, ¿Cuál será la medida de cada ángulo interior? ¿Cuántos lados tiene? ¿Cuántas diagonales tiene el polígono? (Corberán, y otros, 1994, pág. 55)

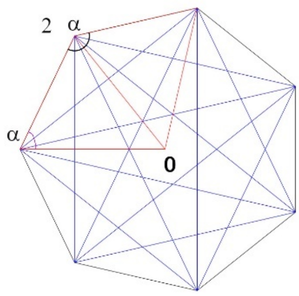


Figura 25: Problema 4. Figura de elaboración propia.

Orientaciones que puede dar el docente:

Preguntas abiertas: ¿Qué propiedades tienen los polígonos regulares? ¿Cómo podemos hallar el ángulo central de un polígono regular de cinco lados? ¿Cómo podemos hallar el ángulo interior de un pentágono regular?

¿Cuál es la suma de los ángulos de un triángulo? ¿Cuál es la suma de los ángulos de un cuadrado? ¿y de un pentágono? ¿Cómo podemos relacionar el número de vértices con el ángulo central de un polígono? ¿cómo podemos relacionar el ángulo interior de un polígono con su ángulo central?

Si ya sabemos cuál es la suma total de los ángulos de un polígono regular, ¿cómo podemos calcular cuánto mide el ángulo interior de ese polígono?

Posibles estrategias que utilicen los estudiantes:

Existen distintas estrategias para resolver este problema. Pueden comenzar construyendo un polígono regular cualquiera y ver la relación que hay entre el ángulo central del polígono, el número de lados o vértices de este y el ángulo interior del polígono, fijándose en el triángulo que se forma entre el centro del polígono *O* y dos vértices. Pueden observar que el ángulo central de cualquier polígono regular se halla dividiendo el círculo completo por el número de lados. El ángulo central del polígono será $\frac{360º}{n}$, siendo *n* el número de vértices. Como ya conocen que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º pueden relacionar el ángulo interior de un polígono cualquiera con su ángulo central y el número de vértices del polígono. $2\alpha = 180º - \frac{360º}{n}$

Deben percatarse también de que un polígono regular es equiangular, por lo tanto, el ángulo interior del polígono será la suma de todos los ángulos entre el número de vértices. Pueden relacionar las dos expresiones en una igualdad y obtener el número de vértices. Sabiendo el número de vértices y lados pueden hallar, como en el problema anterior, el número de diagonales.

Otra estrategia para resolverlo la pueden descubrir triangulando el polígono y relacionando el número de triángulos obtenidos con los lados del polígono, para hallar la suma de los ángulos interiores del polígono. Sabiendo cuál es esa cantidad de la suma de ángulos, hacer el proceso inverso para hallar cuál es el número de lados del polígono. Una vez que saben el número de lados, calcular el ángulo interior y las diagonales.

Problema 5: ángulos rectos:

Observa la siguiente imagen (Figura 26), sin utilizar el transportador de ángulos ¿Cuántos grados mide el ángulo ∠C? Explica cómo has llegado a esa conclusión.

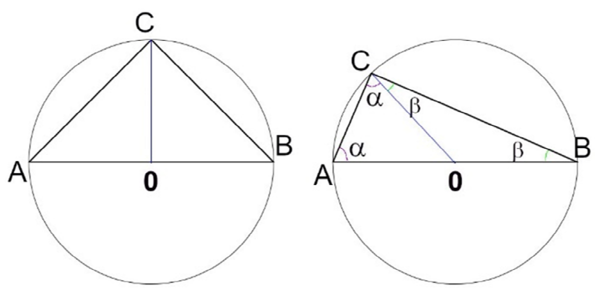


Figura 26: Problema 5. Figura de elaboración propia

Orientaciones que puede dar el docente:

Si nos fijamos en el primer triángulo de la izquierda, ¿qué propiedad cumplen todos los puntos de una circunferencia? ¿Qué relación hay entre la distancia OC, OA y OB?, ¿qué tipo de triángulo es el triángulo OAC? ¿Y el triángulo OBC? ¿Cómo es el triángulo ABC? ¿Qué relación hay entre los ángulos en A y en B dentro del triángulo ABC?

Si nos fijamos en el triángulo de la derecha, ¿qué propiedad cumplen todos los puntos de una circunferencia? ¿Qué relación hay entre la distancia OC, OA y OB, ¿qué tipo de triángulo es el triángulo OAC? ¿Y el triángulo OBC? ¿qué relación hay entonces entre el ángulo en A y el ángulo en C dentro del triángulo OAC? ¿qué relación hay entre el ángulo en B y el ángulo en C dentro del triángulo OBC? ¿Cómo podemos calcular la suma de los ángulos del triángulo ABC? ¿Cuánto es esa suma?

Posibles estrategias que utilicen los estudiantes:

Pueden comenzar observando que ocurre en el caso particular de que el segmento OC sea perpendicular al diámetro de la circunferencia, en este caso tenemos dos triángulos rectángulos isósceles que son congruentes, todos los ángulos agudos miden lo mismo, si la suma de todos los ángulos dentro del triángulo ABC es 180º, cada ángulo será 180º/4 = 45º. El ángulo en $\angle C$ será por tanto 90º. Si se fijan después en el caso de la derecha. el triángulo AOC es isósceles puesto que el segmento AO mide lo mismo que el segmento OC, ya que son radios de la circunferencia. Los ángulos en $\angle OAC$ y $\angle OCA$ son congruentes, los hemos llamado α en la figura 24. Lo mismo ocurre con el triángulo OBC. Si sumamos los ángulos del triángulo ABC, 2α + 2□ = 180º, por lo tanto (α+□) = 180º/2

Problema 6: suma de ángulos

Explica cómo podemos hallar la suma de los ángulos internos de un polígono irregular como el de la figura 27, ¿y si el polígono tuviera 10 lados? ¿y si tuviera 100 lados?

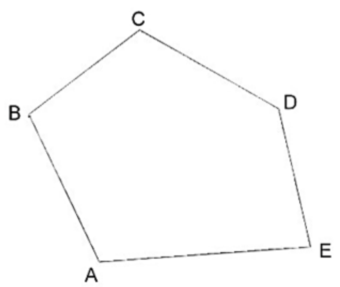


Figura 27: Problema 6. Figura de elaboración propia

Orientaciones que puede dar el docente:

Preguntas abiertas: ¿Cuál es la suma de los ángulos de un triángulo? ¿y de un cuadrilátero? ¿podemos descomponer un cuadrilátero en dos triángulos? y un pentágono ¿cómo podemos descomponerlo? ¿Cuál sería la suma de sus ángulos?

¿Cómo podemos relacionar el número de lados de un polígono con el número de triángulos en los que se descompone?

Posibles estrategias que utilicen los estudiantes:

Cualquier polígono se puede triangular. Los alumnos ya conocen la suma de los ángulos de un triángulo.

Pueden comenzar por un cuadrilátero, descomponer en triángulos y ver cuál es la suma de sus ángulos, a continuación, hacer lo mismo en un pentágono, en un hexágono, y relacionar el número de lados del polígono con el número de triángulos que obtienen, para así obtener una fórmula general que les permita calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono en función del número de lados.

Tarea 7: Realizar un estudio sobre los polígonos regulares que recubren el plano.

En primer lugar, se deben dejar claras una serie de aspectos y definiciones: un mosaico es un recubrimiento de una superficie, una tesela es cada una de las piezas que forma parte de un recubrimiento. Un teselado plano o mosaico es un conjunto de teselas con forma poligonal que recubren el plano sin solaparse. Para hacer un mosaico regular solo se puede utilizar una única clase de polígono regular.

Un mosaico es semirregular si está construido con combinaciones de polígonos regulares y además es uniforme, es decir, la disposición de los polígonos en todos los vértices del mosaico siempre es la misma.

El vértice del mosaico es cada uno de los puntos donde concurren los polígonos que lo forman. La figura en el vértice es la distribución específica de polígonos alrededor de un vértice, si esta disposición es la misma en todos los vértices del mosaico se dice que tenemos un mosaico uniforme. (Reyes Iglesias, 2023)

Los alumnos comenzarán la tarea con materiales manipulativos, les proporcionaremos teselas de goma EVA o de cartulina con formas de polígonos regulares: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, etc. hasta el dodecágono, trabajando por parejas descubrirán de una manera empírica los distintos mosaicos regulares y semirregulares que se pueden realizar, llegando a la conclusión de que solo existen tres polígonos regulares que recubran el plano de manera regular. A continuación, se planteará que razonen y argumenten de forma matemática esta conclusión.

Se les podrá dar una serie de claves para realizar este estudio:

Para hacer los mosaicos nos interesa conocer el ángulo interior de los polígonos.

Deben fijarse en el número de polígonos regulares que pueden concurrir en un vértice, si ese número fuera dos o menor, el ángulo interno del polígono regular debería ser igual o mayor de 180º y si concurrieran más de seis polígonos el ángulo interior del polígono regular sería menor de 60º, lo cual no es posible.

La suma de los ángulos interiores de los polígonos que concurren en un vértice del mosaico tiene que ser 360º.

Si expresamos la fórmula del ángulo interior de un polígono en función de su número de vértices, siendo *n* el número de vértices, tenemos $\frac{n-2}{n} \cdot 180º$

Si llamamos *k* al número de polígonos que concurren en un vértice, la expresión que relaciona *k* con *n* (número de vértices del polígono) es $k \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180º = 360º$

Dando valores a *k* desde tres hasta seis obtendrán el número de lados que tienen los polígonos que concurren al vértice del mosaico.

Los alumnos que hayan conseguido llegar a esta concusión y razonamiento utilizando una expresión algebraica pueden continuar estudiando qué ocurre con los mosaicos semirregulares, cuando concurren diferentes polígonos regulares a un vértice.

Tarea 8: mosaicos por deformación. Anamorfismo y movimientos en el plano.

En esta actividad comenzaremos observando los mosaicos cuasirregulares de las teselas nazaríes y los mosaicos de Escher, cómo se forman a través de movimientos en el plano obteniendo una tesela que conserva la misma área que el polígono matriz original.

A continuación, se les entregará unas fichas (ver fichas en el Anexo 9.1.4.) donde están representados distintos mosaicos con teselas nazaríes y deberán tratar de encontrar el polígono matriz y señalar los movimientos realizados para obtener el mosaico (Figuras 28 a 33), dibujando en las fichas los vectores de traslación, los centros de giro y los ejes de simetría axial o puntos de simetría central utilizados. De esta manera se trabajará la "*aprensión operativa*" descrita por Duval (1999), que permite a los estudiantes realizar transformaciones dentro del registro de representación de las figuras geométricas y es de gran utilidad a la hora de resolver problemas con objetos geométricos.

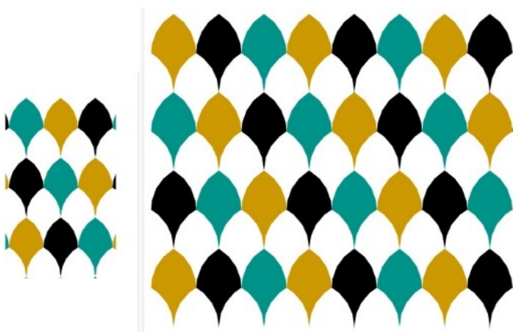


Figura 28: pétalo. Ilustraciones obtenidas del blog la Alhambra con regla, compás y GeoGebra (Mora, 2019)

Señalar el Polígono matriz triángulo equilátero y los vectores de traslación para formar el mosaico

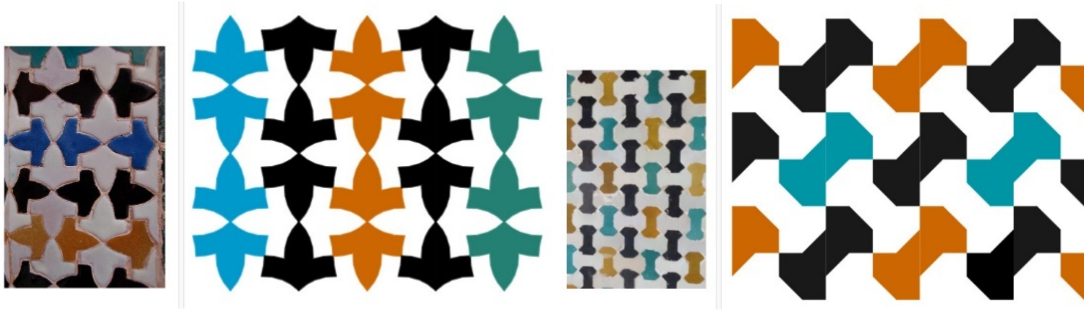


Figura 29: Avión. Figura 30: Hueso. Ilustraciones obtenidas del blog la Alhambra con regla, compás y GeoGebra (Mora, 2019)

Señalar el polígono matriz cuadrado y la simetría axial, los vectores de traslación y los centros y ángulos de giro para formar el mosaico.

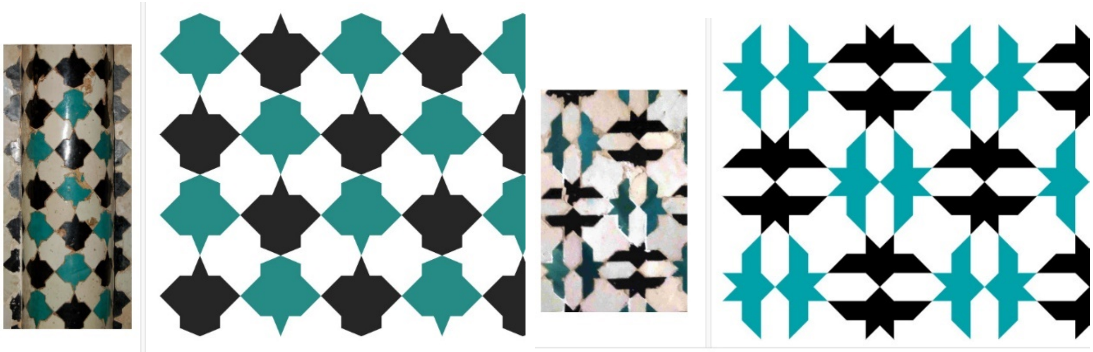


Figura 31: Pez volador. Figura 32: Murciélago. Ilustraciones obtenidas del blog la Alhambra con regla, compás y GeoGebra (Mora, 2019)

Señalar el polígono matriz cuadrado y los centros y ángulos de giro

Figura 33: Pajarita. Ilustraciones obtenidas del blog la Alhambra con regla, compás y GeoGebra (Aljarafe, 2011) (Mora, 2019)

Señalar el polígono matriz, hexágono regular, los centros y ángulos de rotación

Se tendrán preparadas además otro tipo de fichas (Figuras 34 a 36) para seguir trabajando en el tema de movimientos en el plano utilizando ahora, en lugar de mosaicos, planos arquitectónicos donde se representa la proyección en planta de diferentes edificios. En estos planos los alumnos podrán advertir que en el ámbito laboral se utilizan siempre los mismos cuatro movimientos que han aprendido: translación, giro, simetría y homotecia, para realizar los documentos gráficos, con esos movimientos se pueden realizar todas representaciones posibles.

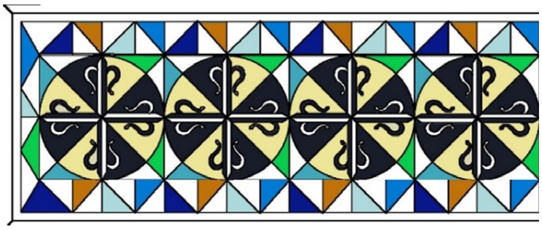


Figura 34: Vidriera de la iglesia de San Pablo. Figura de elaboración propia

Señalar los ejes de simetría, los centros y radios de giro y los vectores de traslación utilizados para construir esta vidriera

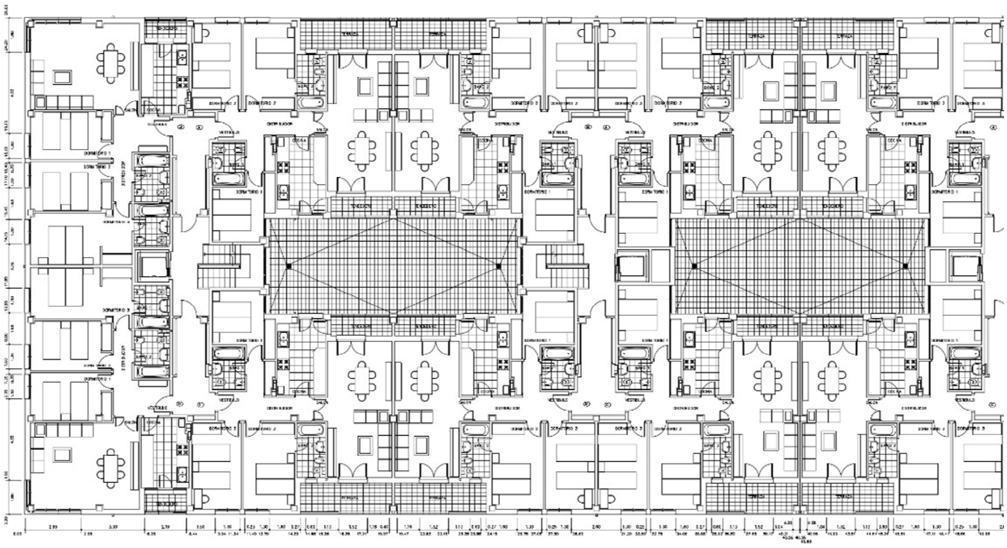


Figura 35: Planta de edificio de viviendas en Valladolid. Figura de elaboración propia

Señalar los ejes de simetría, los centros y radios de giro y los vectores de traslación utilizados para construir esta planta de viviendas.

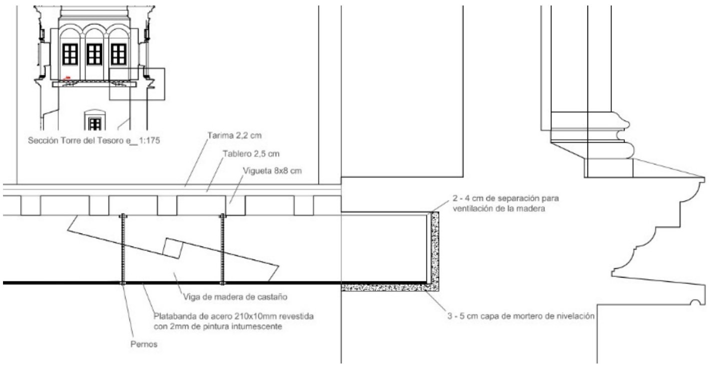


Figura 36: Detalle de forjado de catedral de Santiago de Compostela. Figura de elaboración propia

¿Qué tipo de movimiento en el plano se está utilizando en esta representación? ¿por qué se utiliza este comando? ¿Qué propiedades obtenemos?

Con esta tarea los alumnos descubrirán y aprenderán a utilizar composiciones de movimientos isométricos para pasar de una figura a otra, observarán la congruencia de las figuras obtenidas con los movimientos isométricos, la relación entre las diferentes isometrías y sus propiedades, así como la diferencia con los movimientos isomorfos que generan figuras semejantes, pero no congruentes.

Organización del tiempo y las actividades:

Las actividades de la fase cuarta se realizarán en cuatro sesiones y los alumnos trabajarán en grupos heterogéneos de tres alumnos para ayudarse entre ellos.

Primera y segunda sesión:

En esta primera y segunda sesión se realizarán las tareas 1 a 6 con una metodología de trabajo basada en una "*thinking classroom*", las cuales utilizan los métodos del aprendizaje cooperativo para promover la participación activa de los estudiantes. Dispuestos en grupos de tres alumnos se les proporciona una pizarra y rotuladores, los enunciados de los problemas se les aportarán de uno en uno. Primero se leerá el problema en voz alta para ver si todos han entendido el enunciado y después se dejará un tiempo previsto de diez minutos para que los alumnos lo resuelvan. Los grupos podrán compararse entre ellos y debatir soluciones con el objetivo de que trabajen su autonomía. Se utilizan pizarras portátiles verticales que pueden borrar para disminuir el tiempo de respuesta y perder el miedo al "papel el blanco".

Una vez resuelvan cada problema se ponen en común las soluciones y comparamos los diferentes razonamientos que han utilizado en cada grupo, después podrán anotar en su cuaderno personal las soluciones obtenidas. Se han propuesto seis problemas que, en función del tiempo que necesiten los estudiantes para resolverlos, se podrán realizar en dos o tres sesiones. Si el docente no dispone de tiempo suficiente se podrán seleccionar solo algunos de ellos. Se deben reservar cinco minutos finales de la última sesión para que realicen las encuestas de autoevaluación y coevaluación.

Sesión tercera:

En esta sesión se realizará la tarea 7, estudio de polígonos que recubren el plano. Los alumnos estarán distribuidos en los mismos grupos de tres que las sesiones anteriores, con la salvedad de que hallamos observado algún grupo que no funcione bien y/o lo hallan explicitado en sus encuestas de coevaluación. En los primeros 15 minutos de la sesión se les proporciona el material manipulativo para que "jueguen" con él y se plantea la tarea a realizar. A continuación, se hace una pausa de cinco minutos para debatir qué conclusiones han obtenido y se propone que expliquen con un lenguaje matemático el razonamiento para obtener esa conclusión. Si se observa que los estudiantes se quedan bloqueados, se les puede proporcionar la serie de claves que hemos descrito en el apartado anterior. Los estudiantes que hayan conseguido llegar a la expresión de las fórmulas generales para obtener los resultados pueden continuar realizando el estudio con los mosaicos semirregulares.

Sesión cuarta:

En esta sesión se realizará la tarea 8, estudio de movimientos en el plano. Los primeros 15 minutos de la sesión se introducirá el tema de los mosaicos obtenidos por deformación y se ilustrarán ejemplos de mosaicos nazaríes y los movimientos realizados para su consecución. Posteriormente se les proporcionarán fichas con representaciones de mosaicos nazaríes para que señalen los polígonos matriz y los movimientos en el plano realizados para obtenerlos. Las representaciones se entregarán de una en una y las iremos poniendo en común según las vayan terminando, asignando de cinco a diez minutos para que realicen cada ficha y otros diez minutos para la puesta en común de cada una de ellas. Cuando hayan terminado con los mosaicos entregaremos los planos arquitectónicos para seguir trabajando los movimientos en el plano sobre otro tipo de representaciones gráficas. En esta tarea se han preparado varias fichas con la previsión de tener material suficiente por si algún grupo termina antes y demanda más actividades, no obstante, no es necesario realizar todas las fichas sino asegurarnos de que comprenden correctamente los conceptos y procesos seguidos para su resolución.

4.6.5. VISUAL THINKING

La última actividad consiste en realizar un mural con la metodología "*visual thinking*" donde queden recopilados todos los conceptos que se han trabajado con la propuesta didáctica. Esta tarea está dentro de la fase de integración de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele (Jaime Pastor, 1993, pág. 12) donde se les proporciona a los alumnos una ayuda para que organicen los nuevos conocimientos adquiridos, los integren y relacionen con sus conocimientos previos, con los nuevos procesos de razonamiento y métodos de trabajo empleados en estas sesiones, y obtengan una visión global, bien conexionada del tema trabajado en la propuesta didáctica: polígonos cóncavos y convexos, polígonos estrellados, relaciones angulares y movimientos en el plano.

En esta actividad se trabajará también una estrategia de aprendizaje de codificación y organización (Román & Gallego, 1994), que optimiza los procesos cognitivos de memoria y procesamiento de la información en la memoria a largo plazo, construyendo de esta manera un aprendizaje más significativo y facilitando la recuperación posterior de esa información. Además, la elaboración de estos mapas mentales donde se combinan texto y dibujo, diagramas, etc., fomentan la creatividad y permiten que el estudiante pueda descubrir su propio estilo de estudio y aprendizaje, mejorando su autoconocimiento y automanejo de manera consciente en su formación. Con la realización de esta tarea asimismo entrenarán la extracción de conceptos esenciales y la capacidad de síntesis facilitándoles la comprensión de conceptos.

Planificación de la tarea:

Para la realización de esta actividad llevaremos a cabo la secuencia instruccional ya explicada en el apartado de metodología (Marín Antón, Marugán, & Catalina, 2013). Se comenzará por realizar un ejemplo de mapa mental (Figura 37) al tiempo que se van explicando los procesos ideas y relaciones que hay detrás los diagramas dibujados. Se mostrarán distintos ejemplos de "*visual thinking*" realizados por otros alumnos para que puedan inspirarse y elegir un estilo de configuración.

A continuación, se darán las instrucciones para la realización del mural. Se debe tratar de generar imágenes globales que representen la idea subyacente al contenido. Los distintos elementos del mural, imágenes y texto, se deben distribuir de manera más o menos homogénea por el mapa evitando grandes espacios en blanco, suele ayudar establecer una estructura (dividir la hoja en cuatro partes, en columnas, en filas, etc.), pueden utilizar distintos folios y recortarlos o empalmarlos después, también es recomendable dibujar primero un pequeño boceto indicando cómo se van a distribuir los elementos por el mapa. Se puede jugar con el tamaño de las imágenes y de los textos, con el grosor y los tipos de letra dando más énfasis y tamaño a los conceptos más importantes y en letra más pequeña las acotaciones o explicaciones subsidiarias. También se pueden agrupar los elementos en contenedores, utilizar conectores, flechas y colores para relacionar unos con otros, etc. No se trata de hacer dibujos elaborados sino representaciones simples, esquemáticas y simbólicas, aunque se fomenta la estética porque contribuye a generar motivación en el estudiante, no se evaluará el aspecto artístico del mural sino el funcional como herramienta para el estudio. Podrán realizarlo con el estilo que prefieran y que se adapte a su manera de estudiar. Este mural deberá contener al menos los siguientes apartados:

- Enumera todas las clases de polígonos que conozcas y sus propiedades, lo mismo para el caso específico de triángulos y cuadriláteros.
- Asocia las propiedades o características de los polígonos a las clases, lo mismo para el caso específico de triángulos y cuadriláteros.
- ¿Cómo definimos diagonal de un polígono? ¿cómo podemos contarlas?
- ¿Cómo hallar los ángulos interiores de un polígono convexo?
- Dibujar y definir los Movimientos en el plano.

Los murales se realizarán de manera individual, cada uno realizará el suyo, pero podrán trabajar por parejas y solicitar ayuda siempre que lo necesiten. Cuando lleven trabajando 25 minutos en la realización del mural, haremos una pausa para recapitular lo que tienen hecho hasta el momento, observar los trabajos que están elaborando sus compañeros por si alguno necesita inspiración, ver qué es lo que quieren hacer y cuánto les falta para terminarlo, para establecer una estrategia de trabajo, no distraerse y focalizarse en lo esencial.

Cuando todos hayan terminado su mural se expondrán en la pizarra. El rendimiento de esta actividad se evaluará posteriormente a través de una prueba escrita individual donde se les preguntará por los mismos conceptos y procedimientos de demostración que han estado trabajando en estas sesiones.

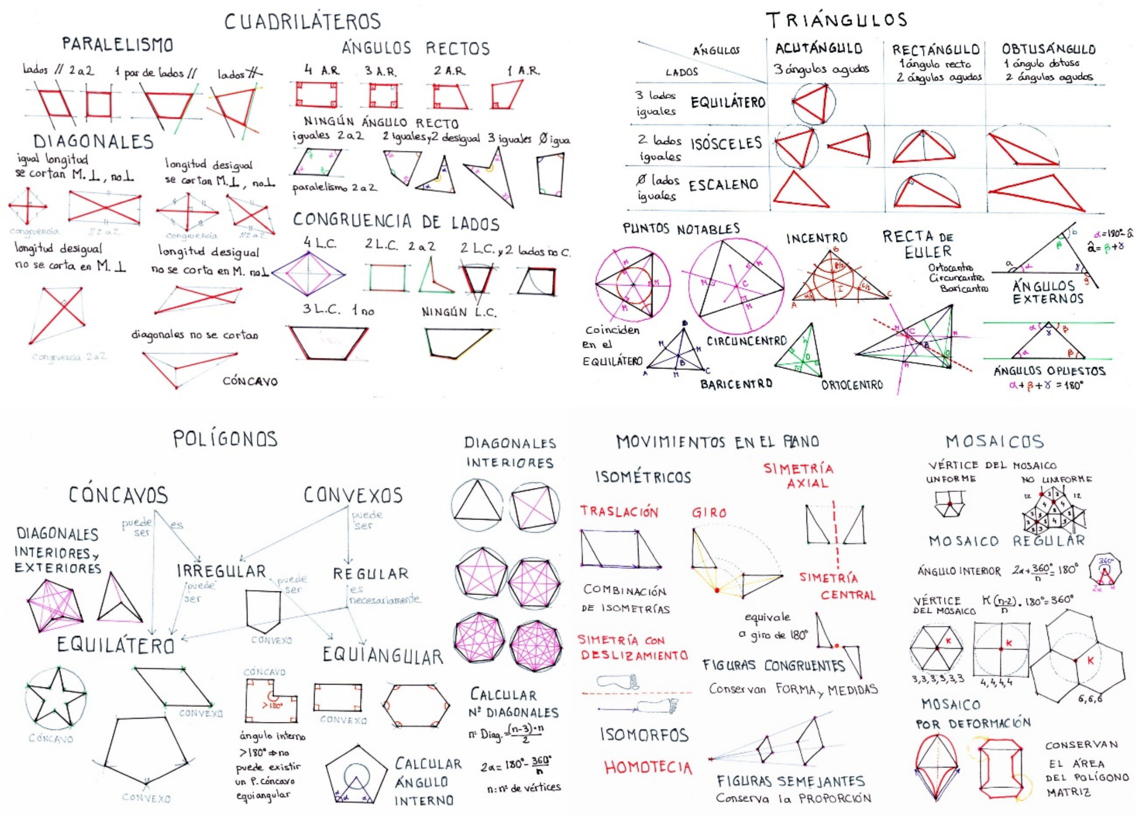


Figura 37: Ejemplo de modelización de un mapa mental para la temática trabajada. Elaboración propia.

Para la realización de la prueba de rendimiento en la última sesión se plantean las siguientes preguntas y actividades basadas en las pruebas realizadas en la publicación de Corberán et al. (1994):

Para transformar un rombo en un cuadrado ¿qué propiedades cambias? ¿y un paralelogramo en un rectángulo?

¿Qué entendemos por diagonal?

¿Qué cuadriláteros cumplen que sus diagonales se cortan perpendicularmente en el punto medio? Dibújalo si es necesario.

¿Cuántos tipos de diagonales pueden trazarse en un polígono? ¿Cómo podemos contarlas? ¿Cómo definirías polígono cóncavo? ¿Y polígono convexo?

¿Cómo obtenemos la medida de la suma de los ángulos interiores de un polígono regular?

Enumera todas las propiedades que conozcas del triángulo equilátero, ¿podrías eliminar alguna y que siguieran describiendo un triángulo equilátero?

Si la respuesta es afirmativa justifícala, si no es afirmativa encuentra algún ejemplo que la contradiga:

1. *Todos los polígonos cóncavos son irregulares.*
2. *Ningún polígono cóncavo es equiangular.*
3. *Todo polígono regular es equilátero.*
4. *Todo polígono equilátero es convexo.*
5. *Todo polígono convexo es equilátero.*
6. *Todo polígono equiangular es equilátero.*
7. *Si un polígono es equilátero es equiangular.*

Organización del tiempo y las actividades:

La actividad se realizará en tres o cuatro sesiones dependiendo de la evolución de los trabajos de los alumnos, se pretende que todo el trabajo se realice dentro del aula.

Primera sesión:

Los primeros diez minutos serán para la modelización de un mapa mental por parte del docente explicando el proceso en la realización del mismo, a continuación, se expondrán diferentes ejemplos de "*visual thinking*" realizados por alumnos y se explicarán las instrucciones generales para la realización de los mismos. También se darán de forma oral y por escrito las instrucciones específicas y contenidos para la realización de este mural.

Los siguientes 25 minutos serán para la realización de la tarea de manera individual, les anunciaremos previamente que a los 25 minutos vamos a realizar una pausa para observar lo que tenemos hecho hasta el momento y que se focalicen en ejecutar el trabajo.

Pausa de cinco minutos para observar los trabajos realizados por cada compañero, deben exponer su idea general, qué quieren hacer y cuánto estiman que les queda para terminar, pensando en una estrategia para trabajar de manera más efectiva. También se aprovecha esta puesta en común para resolver dudas y corregir errores que podamos observar en los trabajos.

Los siguientes diez minutos continuarán trabajando en su mural, como es probable que no lo puedan terminar en una sola sesión se podrá terminar en la siguiente.

Segunda y tercera sesión:

Los alumnos terminan el mural que comenzaron la sesión anterior, se asignan 25 minutos para terminar la actividad. Los alumnos que hayan terminado antes podrán ayudar a sus compañeros respetando la idea y estructura del mural de cada uno, sin modificar su concepción de mural.

Se realiza una pausa en el trabajo de 10 minutos para que cada alumno exponga su trabajo al resto de la clase, se corrijan los errores y dudas que hayan podido surgir y puedan rematar o corregir sus murales con las indicaciones dadas por el docente y sus compañeros. Se analiza cuánto trabajo le falta a cada alumno para terminar y si es necesario utilizar una sesión más o lo pueden completar en casa.

Continúan trabajando para rematar su mural los últimos quince minutos.

Cuarta sesión:

Realización de la prueba individual escrita, autoevaluación del rendimiento de la estrategia de aprendizaje utilizada y autoevaluación de lo aprendido en esta propuesta didáctica a través de una encuesta.

4.7. Recursos

Fichas con las actividades proporcionadas por el docente. (todas las actividades)

Pizarra y tizas, pizarra digital. (todas las actividades)

Pizarras portátiles con rotuladores y borrador. (actividad 4)

Papel y lápiz, colores, regla, compás y transportador de ángulos. (todas las actividades)

Cartón, o tijeras e hilos. (actividad 3)

Teselas de goma EVA o cartulina (actividad 4)

4.8. Cronograma de las actividades

Tabla 2: cronograma de las actividades dentro del horario lectivo de la asignatura:

	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5
Sesión 1 Jueves 14/03	WODB				
Sesión 2 Jueves 21/03		Dictado Geométrico			
Sesión 3 1ª Semana Abr			Polígonos estrellados		
Sesión 4 1ª Semana Abr			Polígonos estrellados		
Sesión 5 2ª Semana Abr			Polígonos estrellados		
Sesión 6				Polígonos	

2ª Semana Abr				convexos	
Sesión 7 3ª Semana Abr				Polígonos convexos	
Sesión 8 3ª Semana Abr				Polígonos convexos	
Sesión 9 4ª Semana Abr				Movimientos en el plano	
Sesión 10 4ª Semana Abr				Movimientos en el plano	
Sesión 11 2ª Semana May					Visual thinking
Sesión 12 2ª Semana May					Visual thinking
Sesión 13 3ª Semana May					Visual thinking
Sesión 14 3ª Semana May					Prueba final

4.9. Atención a la diversidad el aula:

Entendemos por diversidad en el aula a todas las características que necesiten una atención especializada por parte del equipo docente para que el alumno alcance el nivel de aprendizaje exigido. Esta diversidad puede tener su origen en muy distintos factores, como son las diferentes capacidades intelectuales, madurez, desarrollo físico, psíquico y motórico del estudiante, ya sea por aspectos genéticos, hereditarios o por cuestiones externas al estudiante, generadas a consecuencia de factores socioeconómicos, culturales, geográficos o geopolíticos, que a veces se ven como diferencias individuales de los alumnos dentro de un aula pero se corresponden con las mismas desigualdades sociales que nos encontramos fuera del aula.

En el caso concreto de nuestra aula nos encontramos en un contexto donde no hay alumnos que precisen Adaptación Curricular Significativa (ACS), para atender los casos de ACS se deben modificar elementos prescriptivos del currículo como los objetivos y contenidos siguiendo las observaciones marcadas por el equipo de orientación, pero en nuestro grupo no es necesario. Sin embargo, sí que estamos trabajando con un grupo donde el nivel que hay entre los distintos alumnos es muy heterogéneo en cuanto a edad, desarrollo, nivel de conocimientos, etc. Para atender a esta diversidad se tratará de trabajar con los diferentes ritmos de aprendizaje y diferentes capacidades del alumnado desde la metodología, la agrupación del alumnado y la secuenciación de los contenidos, siguiendo un orden basado en las teorías de zona de desarrollo próximo o teoría del andamiaje de la pedagogía constructivista desarrollada por Ausubel o Vigotsky. Debemos ser capaces de dar a los estudiantes las herramientas y proponerles retos cognitivos para que sean ellos mismos los que den el salto a un nivel de conocimiento superior, lo que llaman el aprendizaje por descubrimiento, que genera un tipo de aprendizaje más significativo pues no ha sido infundido desde fuera, sino que lo ha creado el propio estudiante. Se deben proponer actividades de "suelo bajo y techo alto", donde todos los alumnos puedan optar a resolverlas con éxito para generar en ellos motivación y, además, los alumnos que posean más conocimientos o quieran desarrollar más habilidades pueden seguir trabajando sin limitarse por el objetivo de la actividad.

Es importante conocer el desarrollo y el nivel de razonamiento de nuestros alumnos para poder trabajar partiendo de esa base, considerando las dificultades que presenten y fomentando sus capacidades.

También debemos tener en cuenta a la hora de elaborar actividades e implantar una metodología que se adapte a las diferencias en el aula, el utilizar diferentes representaciones y lenguajes diferentes al natural y al lenguaje simbólico de las matemáticas, en este caso la geometría nos da muchas oportunidades para desarrollar diferentes modos de expresión y representación de un concepto matemático.

En cuanto a la evaluación esta también debe contener diferentes instrumentos de acopio de evidencias que permitan que los alumnos puedan demostrar su aprendizaje utilizando diferentes formas de expresión: escrita, oral, gráfica, etc.

4.10. Evaluación.

4.10.1. Criterios de evaluación y Competencias específicas consideradas:

Criterios de evaluación y Competencias específicas de la asignatura *Conocimiento de las Matemáticas* (Página 48950. Bocyl LOMLOE secundaria. 30 septiembre de 2022.)

Competencia específica 1

1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana, organizando los datos dados y/o localizando y seleccionando información, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. (CCL2, STEM1, STEM2, STEM4) Actividad 4. Movimientos en el plano

1.2 Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. (STEM1, STEM2, STEM4, CE1) Actividad 4. Movimientos en el plano

1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema movilizando los conocimientos necesarios. (STEM1, STEM2) Actividad 4. Movimientos en el plano

Competencia específica 4

4.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir *información. (CP1, STEM4, CD2, CCEC3)* Actividad 2. Dictado geométrico y 3. Polígonos estrellados. Actividad 4. Movimientos en el plano y Actividad 5. "*visual thinking*"

4.2. Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, para describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. (CCL1, STEM4, CCEC3). Actividad 1. WODB, 2. Dictado geométrico y 3. Polígonos estrellados. Actividad 4. Movimientos en el plano y Actividad 5. "*visual thinking*"

4.3. Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión. (CP1, STEM3, STEM4). Actividad 1. WODB, 2. Dictado geométrico y 3. Polígonos estrellados. Actividad 4. Movimientos en el plano y Actividad 5. "*visual thinking*"

Competencia específica 5

5.1 Gestionar las emociones propias y reconocer las ajenas, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. (STEM5, CPSAA1, CPSAA3, CPSAA5). Actividad 1. WODB, 2. Dictado geométrico y 3. Polígonos estrellados. Actividad 4. Movimientos en el plano y Actividad 5. "*visual thinking*"

5.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas. (STEM 5, CPSAA1). Actividad 1. WODB, 2. Dictado geométrico y 3. Polígonos estrellados. Actividad 4. Movimientos en el plano y Actividad 5. "*visual thinking*".

5.3. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva. (STEM3, CPSAA3, CC3). Actividad 1. WODB, 2. Dictado geométrico, Actividad 4. Movimientos en el plano

5.4. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado. (STEM3, STEM5, CPSAA3, CC3). Actividad 1. WODB, 2. Dictado geométrico, Actividad 4. Movimientos en el plano

Además, hemos considerado incluir los Criterios de Evaluación de la Competencia Específica 3 de la asignatura obligatoria *Matemáticas*, debido a que están directamente vinculados con los procesos que estamos trabajando y nos pueden servir como referencia para realizar la evaluación, aunque no estén explícitamente recogidos en la asignatura optativa.

Competencia específica 3 Matemáticas, Decreto 39/2022 (pág. 49357).

3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones. (CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2). Actividad 3. Polígonos estrellados. Actividad 4: Movimientos en el plano

3.2. Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. (STEM3). Actividad 2. Dictado geométrico y 3. Polígonos estrellados. Actividad 4. Movimientos en el plano y Actividad 5. "*visual thinking*"

4.10.2. Instrumentos de evaluación:

- Observación en el aula siguiendo un protocolo de observación, atendiendo a los aspectos reflejados en la tabla siguiente (tabla 3).

  El protocolo de observación, a diferencia de las rúbricas, no tiene asociados a los ítems una escala de nivel de desarrollo de mejor a peor, sino que se trata de reflejar de la manera más objetiva posible el comportamiento, participación, motivación y habilidades utilizadas, demostradas por cada alumno en el aula durante la realización de cada una de las actividades propuestas:

Tabla 3: protocolo de observación.

Fecha, nombre de la actividad y alumno/a				
Participación del alumno/a	Participa durante toda la actividad	Comienza participando, pero abandona	Tarda en comenzar la actividad, pero al final participa	No participa
Motivación del alumno/a	Se muestra proactivo, persiste en la búsqueda de solucione	Se deja llevar por alumnos que sí participan	Se deja llevar por alumnos que no participan	No se muestra motivado
En qué momento un alumno/a se atascó en una determinada tarea	Se atascó al inicio de la actividad	Se bloqueó en la última tarea más complicada	Se bloqueó al comienzo de cada tarea	No se bloqueó
Cómo un alumno/a atascado en una tarea lo ha solucionado	Preguntó a otro compañero	Preguntó a la profesora	Lo solventó solo	No hizo nada

Cómo reacciona el alumno/a a las instrucciones dadas por el docente	Escucha activamente y sigue las instrucciones	No atiende a las instrucciones y vuelve a preguntar	Ignora las instrucciones y no pregunta las dudas	otras
Cómo reacciona el alumno/a a las instrucciones dadas por sus compañeros	Escucha activamente y sigue las instrucciones	No respeta las instrucciones cuando las da un compañero	Se frustra	otras
Tipos de preguntas realizadas por el alumno/a	Preguntas elementales, del tipo ¿cómo se hace esto?	Clarificadoras, ¿cuál es el significado de…?	Dudas conceptuales en matemáticas	otras
Qué habilidades demuestra el alumno/a	Visualización y representación	Razonamiento y demostración	Argumentación y comunicación	otras

- Análisis de tareas realizadas por los alumnos.

  Recogida de las actividades realizadas por los alumnos, organización de los datos recogidos, lectura y categorización de las respuestas obtenidas, interpretación de los datos obtenidos y valoración de los mismos.

  Estas valoraciones deberían ser cotejadas con los propios estudiantes para que ellos mismos puedan autoevaluarse, ser conscientes de sus errores o aciertos y comprobar si las interpretaciones que ha dado el docente de sus respuestas se corresponden con lo que querían expresar.

Tabla 4. Rúbrica de heteroevaluación de la Actividad 1. WODB:

	0. No conseguido	**1. En proceso, pero con errores de concepto**	**2. Conseguido, pero con errores no conceptuales**	**3. Excelente**
C.E. 4.2.	Argumentos incorrectos o en blanco	Argumentos parcialmente correctos, pero con errores conceptuales	Argumentos parcialmente correctos, pero falta de precisión	Argumentos correctos
C.E. 4.3.	No utiliza lenguaje matemático	Errores semánticos en lenguaje matemático	Uso de lenguaje matemático, pero errores parciales	Uso correcto de lenguaje matemático
C.E. 5.1.	No gestiona bien las emociones propias ni reconoce las ajenas	Gestiona sus emociones, pero no reconoce las ajenas	Gestiona y reconoce emociones propias y ajenas, pero se bloquea	Gestiona correctamente emociones propias y ajenas y se enfrenta

			ante la dificultad	correctamente a la frustración
C.E. 5.2.	No muestra actitud positiva ni participativa	Participa, pero abandona al poco tiempo	Actitud positiva pero no perseverante, no busca nuevas soluciones	Actitud positiva y perseverante, busca nuevas soluciones y pregunta dudas
C.E. 5.3.	No colabora	Colabora activamente, pero trata de imponer su criterio o no respeta a los compañeros	Colabora, respeta a los compañeros	Colabora activamente, respeta y toma decisiones informadas
C.E. 5.4.	No participa	Comienza asumiendo el rol asignado, pero trata de cambiarlo	Participa asumiendo el rol asignado	Participa asumiendo el rol asignado con responsabilidad en el equipo

Tabla 5: Rúbrica de heteroevaluación de la Actividad 2. Dictado geométrico:

	0. No conseguido	**1. En proceso, pero con errores de concepto**	**2. Conseguido, pero con errores no conceptuales**	**3. Excelente**
C.E. 3.2.	No reconoce situaciones que pueda resolver con ayuda de las matemáticas	Reconoce situaciones que puede resolver con lenguaje matemático, pero no usa procesos	Reconoce situaciones y usa algunos procesos matemáticos	Reconoce situaciones que puede resolver con matemáticas, usa procesos: medir, clasificar, comunicar
C.E. 4.1.	No representa correctamente conceptos ni información matemática	Representación parcialmente correcta de algunos conceptos matemáticos, pero tiene errores conceptuales	Representación parcialmente correcta de algunos conceptos matemáticos	Representa conceptos matemáticos e información adecuadamente
C.E. 4.2.	Argumentos incorrectos o en blanco	Argumentos parcialmente correctos, pero con errores conceptuales	Argumentos parcialmente correctos, pero falta de precisión	Argumentos correctos
C.E. 4.3.	No utiliza lenguaje matemático	Errores semánticos en lenguaje matemático	Uso de lenguaje matemático, pero errores parciales	Uso correcto de lenguaje matemático

C.E. 5.1	No gestiona bien las emociones propias ni reconoce las ajenas	Gestiona sus emociones, pero no reconoce las ajenas	Gestiona y reconoce emociones propias y ajenas, pero se bloquea ante la dificultad	Gestiona correctamente emociones propias y ajenas y se enfrenta correctamente a la frustración
C.E. 5.2	No muestra actitud positiva ni participativa	Participa, pero abandona al poco tiempo	Actitud positiva pero no perseverante, no busca nuevas soluciones	Actitud positiva y perseverante, busca nuevas soluciones y pregunta dudas
C.E. 5.3.	No colabora	Colabora activamente, pero trata de imponer su criterio o no respeta a los compañeros	Colabora, respeta a los compañeros	Colabora activamente, respeta y toma decisiones informadas
C.E. 5.4.	No participa	Comienza asumiendo el rol asignado, pero trata de cambiarlo	Participa asumiendo el rol asignado	Participa asumiendo el rol asignado con responsabilidad en el equipo

Tabla 6: Rúbrica de heteroevaluación de la Actividad 3. Polígonos estrellados:

	0. No conseguido	**1. En proceso, pero con errores de concepto**	**2. Conseguido, pero con errores no conceptuales**	**3. Excelente**
C.E. 3.1.	No formula ni comprueba conjeturas sencillas	Formula conjeturas sencillas de manera guiada, pero no realiza pruebas o demostraciones	Formula conjeturas sencillas de manera guiada y realiza comprobaciones con algún error no conceptual	Formula y comprueba conjeturas sencillas, analizando patrones, propiedades y relaciones
C.E. 3.2.	No reconoce situaciones que pueda resolver con ayuda de las matemáticas	Reconoce situaciones que puede resolver con lenguaje matemático, pero no usa procesos	Reconoce situaciones y usa algunos procesos matemáticos	Reconoce situaciones que puede resolver con matemáticas usa procesos: medir, clasificar, comunicar, predecir
C.E. 4.1.	No representa correctamente conceptos ni	Representación parcialmente correcta de	Representación parcialmente correcta de	Representa conceptos matemáticos e

	información matemática	algunos conceptos matemáticos, pero tiene errores conceptuales	algunos conceptos matemáticos	información adecuadamente
C.E. 4.2.	Argumentos incorrectos o en blanco	Argumentos parcialmente correctos, pero con errores conceptuales	Argumentos parcialmente correctos, pero falta de precisión	Argumentos correctos
C.E. 4.3.	No utiliza lenguaje matemático	Errores semánticos en lenguaje matemático	Uso de lenguaje matemático, pero errores parciales	Uso correcto de lenguaje matemático
C.E. 5.1	No gestiona bien las emociones propias ni reconoce las ajenas	Gestiona sus emociones, pero no reconoce las ajenas	Gestiona y reconoce emociones propias y ajenas, pero se bloquea ante la dificultad	Gestiona correctamente emociones propias y ajenas y se enfrenta correctamente a la frustración
C.E. 5.2	No muestra actitud positiva ni participativa	Participa, pero abandona al poco tiempo	Actitud positiva pero no perseverante, no busca nuevas soluciones	Actitud positiva y perseverante, busca nuevas soluciones y pregunta dudas

Tabla 7: Rúbrica de heteroevaluación de la Actividad 4. Movimientos del plano

	0. No conseguido	**1. En proceso, pero con errores de concepto**	**2. Conseguido, pero con errores no conceptuales**	**3. Excelente**
C.E. 1.1.	No interpreta los datos, no comprende las preguntas de un problema	Organiza y selecciona los datos importantes, pero no comprende las preguntas del problema	Comprende las preguntas del problema, pero no relaciona correctamente o comete errores de interpretación de datos	Interpreta problemas, organiza datos, selecciona, relaciona y comprende las preguntas
C.E. 1.2.	No aplica estrategias para la resolución de un problema	Intenta diversas estrategias, pero no utiliza la adecuada	Aplica distintas estrategias, pero con algún error en el resultado	Aplica estrategias apropiadas para resolver los problemas
C.E. 1.3.	No obtiene soluciones matemáticas de un problema	Busca soluciones matemáticas de un problema, pero no obtiene	Obtiene soluciones matemáticas de un problema, pero	Obtiene soluciones matemáticas de un problema

		resultados correctos	con errores de cálculo	
C.E. 2.1.	No comprueba la corrección de las soluciones de un problema	Intenta realizar comprobaciones, pero no utiliza el proceso adecuado	Realiza comprobaciones, pero tiene errores no conceptuales	Comprueba la corrección de las soluciones de un problema
C.E. 3.1.	No formula ni comprueba conjeturas sencillas	Formula conjeturas sencillas de manera guiada, pero no realiza pruebas o demostraciones	Formula conjeturas sencillas de manera guiada y realiza comprobaciones con algún error no conceptual	Formula y comprueba conjeturas sencillas, analizando patrones, propiedades y relaciones
C.E. 3.2.	No reconoce situaciones que pueda resolver con ayuda de las matemáticas	Reconoce situaciones que puede resolver con lenguaje matemático, pero no usa procesos	Reconoce situaciones y usa algunos procesos matemáticos	Reconoce situaciones que puede resolver con matemáticas usa procesos: medir, clasificar, comunicar, predecir
C.E. 4.1.	No representa correctamente conceptos ni información matemática	Representación parcialmente correcta de algunos conceptos matemáticos, pero tiene errores conceptuales	Representación parcialmente correcta de algunos conceptos matemáticos	Representa conceptos matemáticos e información adecuadamente
C.E. 4.2.	Argumentos incorrectos o en blanco	Argumentos parcialmente correctos, pero con errores conceptuales	Argumentos parcialmente correctos, pero falta de precisión	Argumentos correctos
C.E. 4.3.	No utiliza lenguaje matemático	Errores semánticos en lenguaje matemático	Uso de lenguaje matemático, pero errores parciales	Uso correcto de lenguaje matemático
C.E. 5.1	No gestiona bien las emociones propias ni reconoce las ajenas	Gestiona sus emociones, pero no reconoce las ajenas	Gestiona y reconoce emociones propias y ajenas, pero se bloquea ante la dificultad	Gestiona correctamente emociones propias y ajenas y se enfrenta correctamente a la frustración
C.E. 5.2	No muestra actitud positiva ni participativa	Participa, pero abandona al poco tiempo	Actitud positiva pero no perseverante, no busca nuevas	Actitud positiva y perseverante, busca nuevas soluciones y

			soluciones	pregunta dudas
C.E. 5.3.	No colabora	Colabora activamente, pero trata de imponer su criterio o no respeta a los compañeros	Colabora, respeta a los compañeros	Colabora activamente, respeta y toma decisiones informadas
C.E. 5.4.	No participa	Comienza asumiendo el rol asignado, pero trata de cambiarlo	Participa asumiendo el rol asignado	Participa asumiendo el rol asignado con responsabilidad en el equipo

Tabla 8: Rúbrica de heteroevaluación de la Actividad 5. *Visual Thinking*

	0. No conseguido	**1. En proceso, pero con errores de concepto**	**2. Conseguido, pero con errores no conceptuales**	**3. Excelente**
C.E. 1.1.	No interpreta los datos, no comprende las preguntas de un problema	Organiza y selecciona los datos importantes, pero no comprende las preguntas del problema	Comprende las preguntas del problema, pero no relaciona correctamente o comete errores de interpretación de datos	Interpreta problemas, organiza datos, selecciona, relaciona y comprende las preguntas
C.E. 1.2.	No aplica estrategias para la resolución de un problema	Intenta diversas estrategias, pero no utiliza la adecuada	Aplica distintas estrategias, pero con algún error en el resultado	Aplica estrategias apropiadas para resolver los problemas
C.E. 1.3.	No obtiene soluciones matemáticas de un problema	Busca soluciones matemáticas de un problema, pero no obtiene resultados correctos	Obtiene soluciones matemáticas de un problema, pero con errores de cálculo	Obtiene soluciones matemáticas de un problema
C.E. 2.1.	No comprueba la corrección de las soluciones de un problema	Intenta realizar comprobaciones, pero no utiliza el proceso adecuado	Realiza comprobaciones, pero tiene errores no conceptuales	Comprueba la corrección de las soluciones de un problema
C.E. 3.2.	No reconoce situaciones que pueda resolver con ayuda de las matemáticas	Reconoce situaciones que puede resolver con lenguaje matemático, pero no usa procesos	Reconoce situaciones y usa algunos procesos matemáticos	Reconoce situaciones que puede resolver con matemáticas usa procesos: medir, clasificar, comunicar, predecir

C.E. 4.1.	No representa correctamente conceptos ni información matemática	Representación parcialmente correcta de algunos conceptos matemáticos, pero tiene errores conceptuales	Representación parcialmente correcta de algunos conceptos matemáticos	Representa conceptos matemáticos e información adecuadamente
C.E. 4.2.	Argumentos incorrectos o en blanco	Argumentos parcialmente correctos, pero con errores conceptuales	Argumentos parcialmente correctos, pero falta de precisión	Argumentos correctos
C.E. 4.3.	No utiliza lenguaje matemático	Errores semánticos en lenguaje matemático	Uso de lenguaje matemático, pero errores parciales	Uso correcto de lenguaje matemático
C.E. 5.1	No gestiona bien las emociones propias ni reconoce las ajenas	Gestiona sus emociones, pero no reconoce las ajenas	Gestiona y reconoce emociones propias y ajenas, pero se bloquea ante la dificultad	Gestiona correctamente emociones propias y ajenas y se enfrenta correctamente a la frustración
C.E. 5.2	No muestra actitud positiva ni participativa	Participa, pero abandona al poco tiempo	Actitud positiva pero no perseverante, no busca nuevas soluciones	Actitud positiva y perseverante, busca nuevas soluciones y pregunta dudas

– Coevaluación: entre pares.

Los alumnos realizarán además una evaluación de sus compañeros de clase, indicando los siguientes aspectos:

Tabla 9: rúbrica de coevaluación

	Nivel bajo	Nivel medio	Nivel alto
Participación en el desarrollo de las tareas	Poca intervención en las tareas	Ha colaborado activamente	Participa de manera constructiva, da apoyo a sus compañeros
Respeto a los demás compañeros	No respeta el turno de palabra. Quiere imponer sus ideas	Es respetuoso	Es respetuoso, escucha activamente y se comunica de manera asertiva
Trabajo realizado	No ha realizado la actividad	Ha realizado correctamente la actividad aportando ideas	Ha realizado correctamente la actividad y ayudado a sus compañeros

- Autoevaluación de las actividades:

Para valorar la eficacia de las actividades e identificar si se logran los objetivos perseguidos, facilitan el aprendizaje de los alumnos y promueven el desarrollo de sus habilidades de argumentación y demostración, utilizaremos también una encuesta de autoevaluación anónima en la que se plantearán las siguientes preguntas a los estudiantes:

- Ejemplo de demostración, ¿consideras que esto es una demostración matemática? ¿Por qué?, ¿Cuál es tu concepto de demostración?
- ¿Has realizado alguna actividad en la que tuvieras que desarrollar un razonamiento o argumentación lógica en matemáticas?, ¿y en otras asignaturas?
- ¿Te ayudan las representaciones gráficas a visualizar y resolver los problemas de matemáticas?
- ¿Te han resultado fáciles, difíciles las actividades? ¿la dificultad fue un motivo de bloqueo?
- ¿Los compañeros te ayudaron a resolver esa dificultad?
- ¿La profesora te ayudó a resolver las dudas o problemas que aparecieron?
- ¿Qué actividad te ha gustado más?, ¿Qué actividad te ha gustado menos?, ¿por qué?
- ¿Has aprendido nuevos contenidos?, ¿Consideras que podrás aplicar los nuevos conceptos aprendidos en tu vida diaria o podrá serte útil en el trabajo en un futuro?

V. Implementación y análisis de resultados de la actividad 1. WODB:

Durante el módulo práctico tuve ocasión de poder implementar en el aula las actividades 1 y 2 aunque no estuviese en el orden de la programación del curso y gracias a la generosidad e implicación de mi tutora. A continuación, vamos a realizar un análisis de las actividades efectuadas y los resultados de las producciones de los estudiantes.

5.1. Descripción de la Implementación análisis y propuestas de mejora

En esta actividad, por ser la primera que hacíamos en grupo y no conocer cómo eran las interacciones entre ellos, opté por que los alumnos se colocaran por equipos de 4 como ellos quisieran, formaron equipos de chicas por un lado y chicos por otro, distribuyéndose de manera muy separada por el aula.

Se comienza explicando la dinámica del juego con un ejemplo que vimos en la página web WODB (Which One Doesn't Belong. Shapes, 2024), cuando todos confirmaron haber comprendido la tarea, se les entregó dos fichas diferentes a cada equipo con una colección de figuras para que debatieran entre ellos y escribieran en el papel todos los argumentos que hubieran podido encontrar para cada "intruso" (ver anexo). Se les recuerda que no hay una sola respuesta correcta y que lo importante es encontrar razones para convencer y justificar el porqué de cada respuesta.

A continuación, se intercambian las fichas entre los equipos con el objetivo de que analicen lo que habían hecho sus compañeros, debatan si están de acuerdo con los argumentos que han dado, intenten encontrar otros argumentos diferentes a los suyos y escriban las conclusiones en la misma hoja. Cuando un grupo indicaba que ya había terminado se le entregaba otra ficha diferente para que pudiera seguir trabajando, algunos se tomaban más tiempo que otros para reflexionar, debatir y escribir, por lo que hubo grupos que rellenaron tres o cuatro fichas y otros solo dos y la corrección de las dos fichas de sus compañeros. Todos los grupos realizaron al menos cuatro tipos de fichas diferentes.

Una vez hubieron terminado todos, se recogieron todas las fichas y las pusimos en común para que, en voz alta, dijeran las propiedades o características que habían encontrado y que hacían a cada figura diferente o igual a las demás. Durante esta puesta en común salieron aún más propiedades de las que habían escrito sobre triángulos y otros polígonos. También comentaron cuáles habían sido sus dificultades, por ejemplo, en la ficha de volúmenes, puesto que muchos de ellos no conocían el nombre ni las propiedades de los poliedros ni de los sólidos de revolución, indicaron que no habían llegado a ese tema de geometría tampoco en el curso anterior.

Todos participaron activamente en la tarea, en un primer momento decían que “no se les ocurría nada” y no escribieron mucho. Cuando intercambié las fichas entre los equipos pareció motivarles más, comenzaron a corregir primero la redacción y las faltas de ortografía que encontraban en los argumentos que había escrito el otro equipo, después intentaron redactar los argumentos utilizando lenguaje matemático.

Propuesta de mejora en la implantación:

Después de observar cómo los alumnos fueron entrando en la dinámica del juego y que los argumentos más interesantes los dijeron en voz alta cuando pusimos todas las producciones en común, se propone como mejora de implementación el comenzar haciendo al menos dos o tres ejemplos entre todos, que sean los alumnos los que resuelvan las tareas para asegurarse de que comprenden bien el funcionamiento y cojan confianza en cuanto al tipo de argumentos que se pueden dar, después entregarles las fichas para que escriban, porque cuando se tuvieron que enfrentar al papel en blanco tardaron bastante en comenzar a escribir y los argumentos que escribieron en las fichas de primeras fueron demasiado breves.

Otra opción para implementar el juego que puede funcionar es utilizar pizarras en lugar de papel, puesto que en una pizarra se les da la oportunidad de borrar y volver a escribir si se equivocan con lo que pierden el miedo al papel en blanco y comienzan antes a expresar por escrito las ideas.

También se pueden colocar las distintas fichas en la pizarra y que puedan volver a ellas después de haber puesto en común las respuestas de las demás fichas, pues al escuchar los argumentos de los compañeros y recordar las características y propiedades de las figuras del resto de fichas, descubrían nuevos argumentos que podían aplicar a una figura que ya habían pasado y corregido. Cuando esto ocurría lo manifestaban en voz alta pero no quedaba registrado por escrito en las tareas.

Cuando los alumnos ponen en común los argumentos en voz alta, se debe tener preparado algún método para poder recopilar lo que dicen, bien que un observador externo pueda transcribirlo en el momento o bien grabarlo en audio, porque dicen cosas interesantes utilizando su propio lenguaje que si no se anotan en el momento se suelen olvidar.

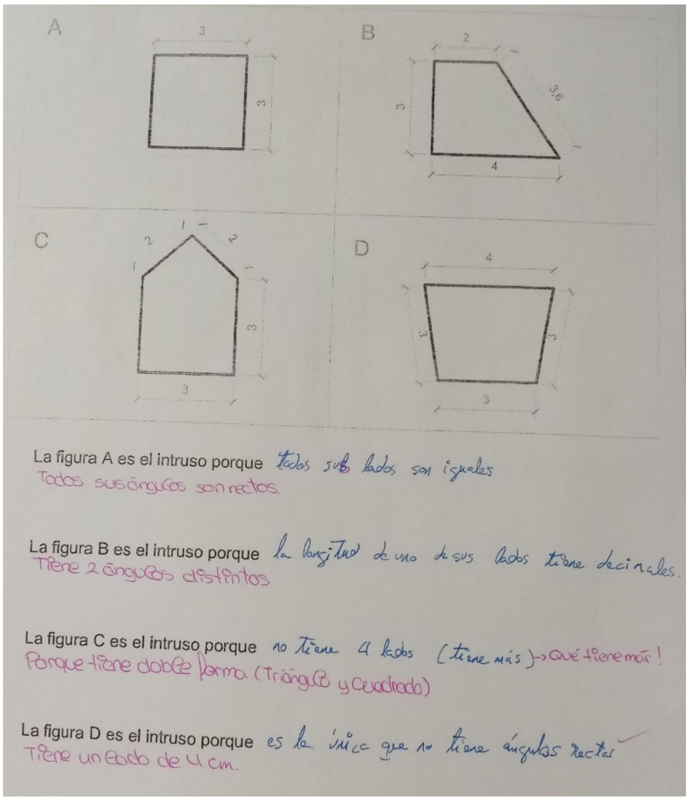


Figura 38: Ejemplo de ficha 2 resuelta y corregida por los alumnos.

Durante la puesta en común los alumnos descubrieron aún más argumentos como, por ejemplo, que la figura B de la imagen superior (Figura 38) es la única que no es simétrica.

5.2. Análisis de datos de las tareas recogidas

Para realizar el análisis y categorización de las respuestas que han dado los alumnos vamos a basarnos en las categorías que utiliza Ricart (2019, pág. 506) en el análisis de resultados de su investigación. Las categorías de las respuestas "teniendo en cuenta el contenido matemático del argumento y de si hay muestras, o no, de clasificación de las situaciones: argumento correcto, argumento parcialmente correcto, respuesta incorrecta y, por último, en blanco" si no han escrito ningún argumento.

Se considera "**argumento correcto**" si expresa correctamente una idea matemática cierta utilizando lenguaje matemático y además no es una característica o propiedad que tienen las otras tres figuras.

El argumento "**parcialmente correcto**" expresa una característica que puede ser única en ese objeto, pero no hay una categoría que englobe a los otros tres de forma contundente, o bien no utiliza lenguaje matemático preciso, o compara las figuras de manera intuitiva con frases del tipo "es el más…"

Respuesta incorrecta, son aquellas que muestran errores de concepto, no conocen las características del objeto matemático y solo describen su forma o aspecto exterior, por lo que no están identificando una propiedad inherente del objeto matemático, no están clasificando ni comparando. También puede haber errores de términos matemáticos y conceptos, como denominar un elemento geométrico con el nombre de otro o utilizar un término no matemático. Se considera igualmente incorrecto si utiliza lenguaje matemático correcto pero el argumento dado es incorrecto puesto que la característica que menciona para el objeto también se da en otras figuras, por lo que no es cierto que sea el "intruso" por esa razón.

También hemos analizado el nivel de razonamiento geométrico según el modelo Van Hiele que tienen los alumnos en función de las respuestas dadas, según el tipo de descripción que hayan hecho de cada figura prestando atención a su aspecto externo global, si describen o mencionan los elementos matemáticos que forman la figura, si son capaces de describir las propiedades de las figuras o si realizan clasificaciones inclusivas.

Tabla 10: relación de producciones de los alumnos:

Grupo	Hacen 1º las fichas	Corrigen las fichas	Las fichas corregidas pertenecen al grupo
A	1, 2, 5	3, 4, 6	B
B	3, 4, 6	1, 2, 5	A
C	2, 3, 5	2, 3	F
D	1, 4	3, 4	G
E	2, 3	1, 4, 5	D (fichas 1 y 4), F (ficha 5)
F	2, 3, 5	2, 3	C
G	3, 4	2, 3, 5	E (fichas 2 y 3), C (ficha 5)

Tenemos para la ficha 1, producciones de dos grupos corregidas por dos grupos distintos; para la ficha 2, producciones de cuatro grupos corregidas por otros cuatro grupos distintos; para la ficha 3, producciones de cinco grupos también corregidas por otros cinco grupos; para ficha 4, producciones de tres grupos corregidas por otros tres; para la ficha 5, producciones de tres grupos corregidas por otros tres distintos y para la ficha 6, producciones de un grupo corregida por otro grupo. Analizamos el tipo de respuestas que han dado para cada figura dentro de la colección de fichas:

Ficha 1:

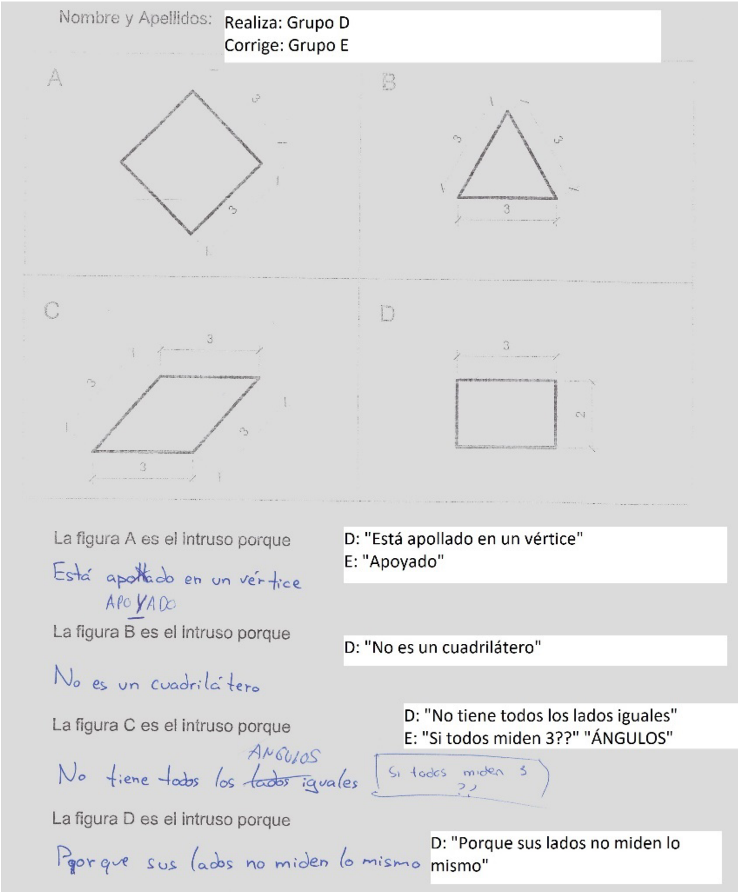


Figura 39: Ejemplo de tarea resuelta y corregida por los alumnos sobre la ficha 1.

Vamos a comentar las respuestas que han dado todos grupos de estudiantes en las diferentes fichas. Estas se pueden ver en su totalidad en el Anexo 9.2.1. Actividad 1. Aquí se muestra la imagen solamente de un ejemplo de cada ficha, aunque se transcriben todos los argumentos dados por los alumnos.

Para la ficha 1 tenemos dos producciones realizadas por los grupos *A* y *D*, y corregidas por los grupos *B* y *E* respectivamente.

Para la figura A dan argumentos parcialmente correctos, puesto que el argumento expresa una característica del objeto que lo diferencia de los demás, y lo hacen utilizando lenguaje matemático: (ver figura 39) grupo *D* "está apoyado en un vértice", grupo *A* "no está apoyado en la base". Sin embargo, la característica que expresa corresponde con la posición externa de la figura y no con la propiedad del objeto matemático, que en este caso es el único cuadrilátero equilátero y equiangular. Los alumnos que lo corrigen, grupos *B* y *E* lo valoran correctamente y no añaden argumentos nuevos.

Para la figura B dan un argumento correcto, aunque utilizan una descripción muy escueta: grupo *D* (Figura 39) "no es un cuadrilátero", grupo *A:* "es el único de tres lados". No describen la figura a pesar de que la conocen. Los compañeros que corrigen estas fichas están de acuerdo con las razones dadas por el otro grupo y no aportan ningún comentario más.

Para la figura C también dan un argumento correcto, aunque un grupo tiene una confusión de términos: (Figura 39) "tiene todos los lados iguales", que corrigen sus compañeros del grupo *E*: "ángulos", parece debido a un lapsus porque sí que conocen ambos términos y han sabido diferenciarlos en otros ejercicios.

Para la figura D dan un argumento correcto también utilizando lenguaje matemático: grupo *A*: "diferente medida de lados", pero lo expresan de una manera muy breve, a pesar de que tenían tiempo para seguir buscando otras posibles razones no aportan ninguna explicación más. Los compañeros que corrigieron esas fichas tampoco aportaron más explicaciones. Es probable que al ser la primera ficha que rellenaban no tuviesen aún confianza en la manera de expresar los argumentos.

Ficha 2:

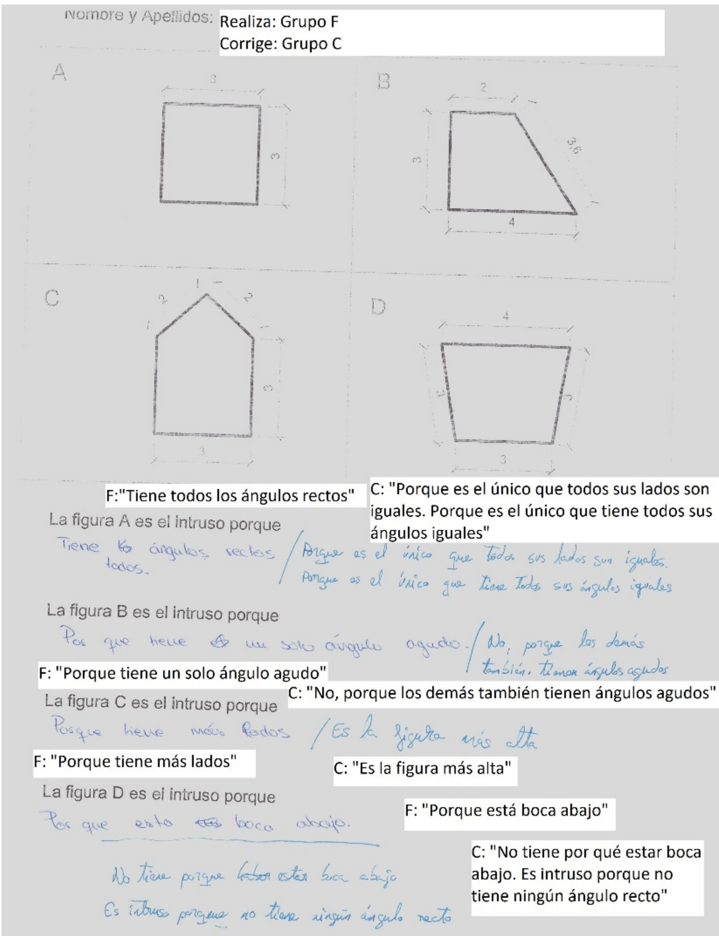


Figura 40: Ejemplo de tarea resuelta y corregida por los alumnos sobre la ficha 2.

De la ficha 2 tenemos cuatro producciones realizadas por los grupos *A, C, E* y *F*, y corregidas por los grupos *B, F, C* y *G* respectivamente.

Para la figura A todos han encontrado un argumento correcto, pero nuevamente solo escriben un argumento y no siguen buscando más razones, los grupos *A*, *C* y *E* indicaron: "todos sus lados son iguales", y el grupo *F*: "tiene todos los ángulos rectos", en la corrección el grupo *F* añadió la otra característica "todos sus ángulos son rectos". Solo el grupo *C* durante la corrección añadió más de una razón: "todos sus lados son iguales", "todos sus ángulos son iguales", a la que ya había dado el grupo *F* "todos los ángulos son rectos" (ver figura 40). Es cierto que hay propiedades que implican a otras y son reiterativas, pero les habíamos pedido que buscaran todos los argumentos posibles por lo que no habría sido incorrecto añadir por ejemplo que es el único con sus lados paralelos dos a dos, propiedad que sí apareció cuando pusimos los resultados en común y comenzaron a descubrir otras características.

Para la figura B dos de los grupos han dado argumentos parcialmente correctos, los grupos *C* y *E* se han centrado en que una de las medidas era un número decimal en lugar enfocarse en la figura geométrica y categorizarla como un cuadrilátero escaleno o un trapecio rectángulo. Las cotas con medidas se pusieron para aclarar cuáles eran las longitudes de las figuras sin que tuvieran que medir y que no vieran las figuras como iconos sino como objetos matemáticos, pero parece que les ha despistado más que ayudar. El grupo *F* da una respuesta parcialmente correcta indicando que tiene "un solo ángulo agudo", el argumento desde el punto de vista lógico es correcto pero la descripción resulta vaga porque hay otra figura en la colección con ángulos agudos, el grupo *C* se lo corrige señalando que: "los demás también tienen ángulos agudos". Cuando este grupo *F* corrige la ficha del grupo *C* no da una respuesta correcta pues indica que: "tiene dos ángulos distintos" siendo esto un argumento falso porque hay otras figuras en la colección que también tienen dos ángulos distintos, por lo tanto, no es una razón que lo haga único. El grupo *G* al corregir ha dado una respuesta correcta: "Cada lado tiene una medida diferente". El grupo *A* que realizó la ficha sí que se percató de que la figura era la única que tenía todos los lados con medidas diferentes, sin embargo, la falta de precisión con la que escribieron el argumento: "sus lados son de diferente medida", hace que no sea una respuesta correcta porque hay otras figuras en la colección que también tienen "lados de diferente medida".

Para la figura C los grupos *C*, *E* y *F* han dado respuestas correctas: "no es un cuadrilátero", "tiene más lados" el grupo *A* ha dado un argumento parcialmente correcto pero que se corresponden con el aspecto externo, no con la propiedad matemática del objeto: "termina en un vértice". Los grupos *C* y *F,* al corregir, han tratado de buscar un nuevo argumento diferente al que habían escrito en su ficha, pero son argumentos parcialmente correctos: "es la figura más alta", "tiene doble forma (triángulo y cuadrado)", siendo este argumento poco contundente.

Para la figura D dos grupos han dado argumentos parcialmente correctos, los grupos *F* y *A*: “tiene todos los lados iguales menos uno”, pero no lo categorizan de manera que se pueda englobar a los otros tres objetos en otra clasificación. Tres de los cuatro grupos (*E, A* y *C)* utilizan lenguaje matemático para describirlo, pero el grupo *F* da una respuesta incorrecta: “está boca abajo”, manifestando que siempre han visto la representación del trapecio isósceles con la base mayor abajo y la base menor arriba, los compañeros del grupo *C* se lo corrigen añadiendo que es el intruso porque “no tiene ningún ángulo recto”. El mismo grupo *F* que dio una respuesta incorrecta en su ficha, al corregir la del grupo *C* vuelve a dar una respuesta incorrecta indicando que “tiene un lado de 4 cm”, característica que también tiene otra de las figuras de la colección.

Ficha 3:

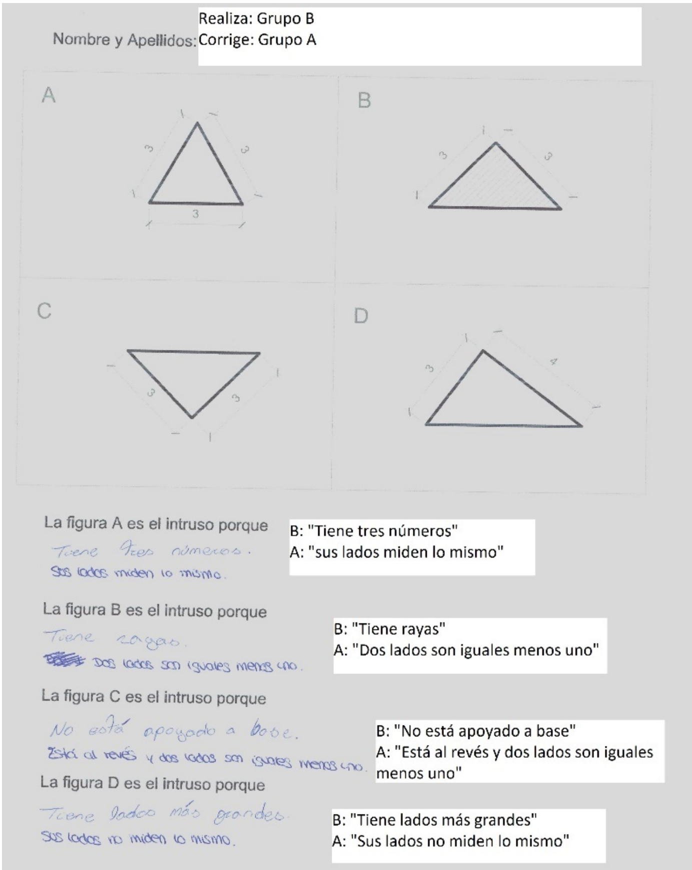


Figura 41: Ejemplo de tarea resuelta y corregida por los alumnos sobre la ficha 3.

Para la ficha 3 tenemos cinco producciones realizadas por los grupos *B, C, E, F* y *G*, y corregidas respectivamente por los grupos: *A, F, G, C* y *D*.

Para la figura A, cuatro de cinco grupos (*C, E, F* y *G*) han encontrado argumentos correctos: “es equilátero”, “tiene todos los ángulos iguales”. El grupo *B* ha dado un argumento parcialmente correcto, se ha vuelto a enfocar en las cotas con la medición indicando que: “tiene tres números” (ver Figura 41), lo cual es cierto, pero no es un argumento que caracterice las propiedades del objeto matemático. (Como propuesta de mejora para la próxima vez se plantea no añadir cotas con medidas). Los compañeros del grupo *A* corrigieron su respuesta: "sus lados miden lo mismo". El grupo *F* al corregir confunde términos matemáticos: llama triángulo isósceles al triángulo equilátero, lo cual hace pensar que al realizar su ficha no describieron que era un triángulo equilátero porque no recordaban las propiedades o no recordaban el nombre correcto.

Para la figura B, cuatro de cinco grupos (*B, E, F* y *G*) dan un argumento parcialmente correcto: "tiene rayas", lo cual es un argumento cierto, pero solo habla del aspecto externo de la ilustración, no de las propiedades del objeto matemático. El grupo *C* da un argumento más correcto: "es el único triángulo isósceles apoyado en la base". Dos de los grupos (*A* y *F*) cuando realizan las correcciones aportan un argumento incorrecto indicando que es el único que tiene: "dos lados iguales menos uno" (ver figura 41), lo cual no es cierto porque hay dos triángulos isósceles en la colección y además repiten el argumento al corregir la siguiente figura.

Para la figura C todos los grupos dan el mismo tipo de argumento, pero solo se consideran parcialmente correctas las respuestas de tres grupos (*B, E* y *F*) porque utilizan lenguaje matemático: "está apoyado en un vértice", "no está apoyado en la base", el resto de grupos (*C* y *G*) utilizan un lenguaje poco preciso: "está al revés", "dada la vuelta". Durante la puesta en común un alumno del grupo *D* indicó que "era simétrico del anterior" (después de haber corregido la ficha 4) lo cual también es un argumento interesante porque trata de buscar con lenguaje matemático una característica única de la figura, sin embargo, si es simétrico del anterior, entonces el anterior también es simétrico del siguiente, por lo que no se podría considerar un argumento que de una razón distintiva.

Para la figura D solo el grupo *C* da un argumento correcto: "es el único triángulo escaleno", el resto de grupos repara en la misma característica, pero utiliza lenguaje más vago dando respuestas incorrectas: "tiene un lado más largo", lo cual es un argumento falso porque en los triángulos isósceles también un lado es más largo, por lo que esta no es la característica que lo hace único. Los grupos *B* y *F* indican que: "tiene lados más grandes que las demás figuras", lo cual se considera parcialmente correcto porque, aunque es un argumento correcto, se centra en el aspecto externo, no es preciso y no nos sirve para categorizarlo contundentemente diferenciándolo de las propiedades de las otras tres figuras, que podían haber sido dibujadas a mayor escala manteniendo sus propiedades. El grupo *A* corrige este argumento del grupo *B* indicando que: "sus lados no miden lo mismo" y el grupo *C* corrige al grupo *F* indicando que: "es escaleno y los demás no".

Ficha 4

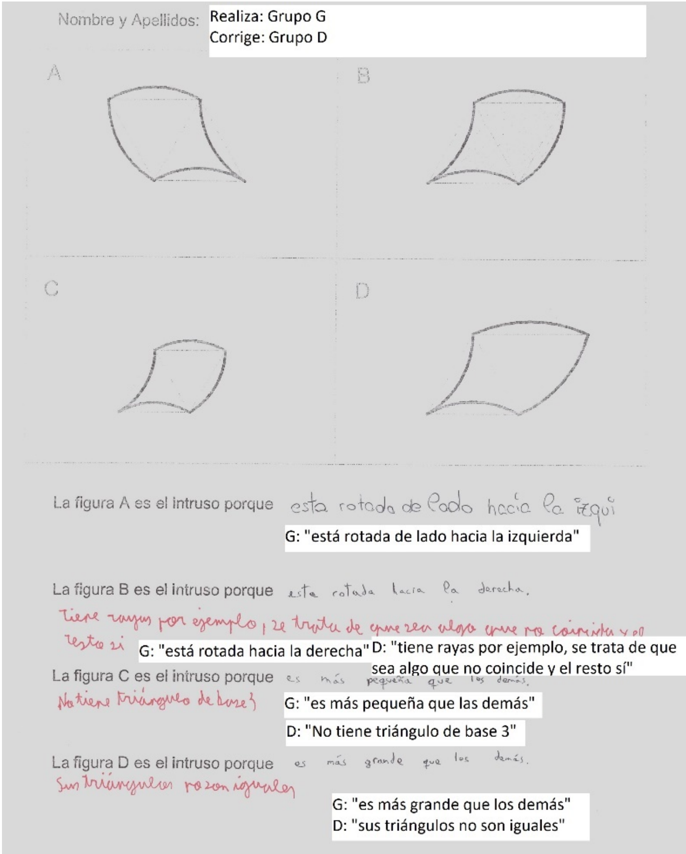


Figura 42: Ejemplo de tarea resuelta y corregida por los alumnos sobre la ficha 4.

Para la ficha 4 tenemos tres producciones realizadas por los grupos *B, D* y *G*, y corregidas respectivamente por los grupos *A, E* y *D*.

Para la figura A, los grupos *B* y *D* dan argumentos incorrectos al utilizar un lenguaje impreciso: “está mirando hacia otro lado”, “mira al lado contrario”. El grupo *G* indica que: “está rotada”, lo cual se puede considerar correcto porque esa posición también se consigue con un movimiento de giro o rotación respecto de las otras figuras. Todos los grupos estaban fijándose en el mismo aspecto para tratar de dar el argumento correcto, pero al no recordar la terminología precisa para describir ese movimiento no pudieron dar la respuesta correcta. Durante la corrección el grupo *A* recordó el término matemático “simetría”.

Para la figura B los grupos *B* y *D* dan un argumento parcialmente correcto: “tiene rayas” lo cual es una razón cierta pero solo repara en el aspecto externo de la ilustración. El grupo *G* indicó que: “está rotada hacia la derecha”, en este caso el lenguaje matemático es correcto pero el argumento se considera incorrecto puesto que la posición del resto de figuras es la misma. El grupo *D,* que corrigió este argumento, señaló el error del mismo indicando que: “se trata de que sea algo que no coincida y el resto sí” (ver figura 42).

Para la figura C, los grupos *B* y *G* dan argumentos parcialmente correctos indicando que es la "más pequeña", se considera solo parcialmente correcto porque utilizan un lenguaje poco preciso, no matemático. El grupo *D* utilizó una regla para medir el triángulo matriz de la figura y argumentó que: "no tiene triángulo de base 3 cm", también repitió el argumento al corregir al grupo *G*. Este argumento se puede considerar correcto porque, aunque no utiliza la terminología específica para los movimientos en el plano (homotecia) ha procurado utilizar un lenguaje matemático más preciso y se ha fijado en el polígono matriz o base, bien es cierto que la explicación que dan los estudiantes por escrito es muy escueta y difícil de entender, pero durante la puesta en común de resultados supieron explicar mejor su razonamiento.

Para la figura D los tres grupos dan respuestas parcialmente correctas: "es más grande", "tiene un ángulo diferente", el argumento era correcto al fijarse todos los estudiantes en que es el único que no guarda las mismas proporciones, pero el lenguaje utilizado nuevamente es impreciso y no sirve para categorizar convincentemente las propiedades de la figura. En la corrección el grupo *D* añade que "sus triángulos no son iguales", este argumento se puede considerar correcto porque, aunque la redacción es exigua, los alumnos se percatan de que los triángulos que se usan como matriz de la figura son distintos entre sí, característica que lo diferencia del resto de figuras.

Durante la puesta en común recordamos los tipos de movimientos en el plano y la diferencia que había entre realizar una homotecia conservando las proporciones (obteniendo figuras semejantes) o deformar una figura agrandando solo una parte. Al recordar la terminología de los movimientos en el plano un alumno encontró nuevos argumentos para las figuras que ya habíamos corregido, como la que hemos comentado antes de que el trapecio rectángulo en la ficha 2 (Figura 40) es la única figura que es simétrica.

Ficha 5

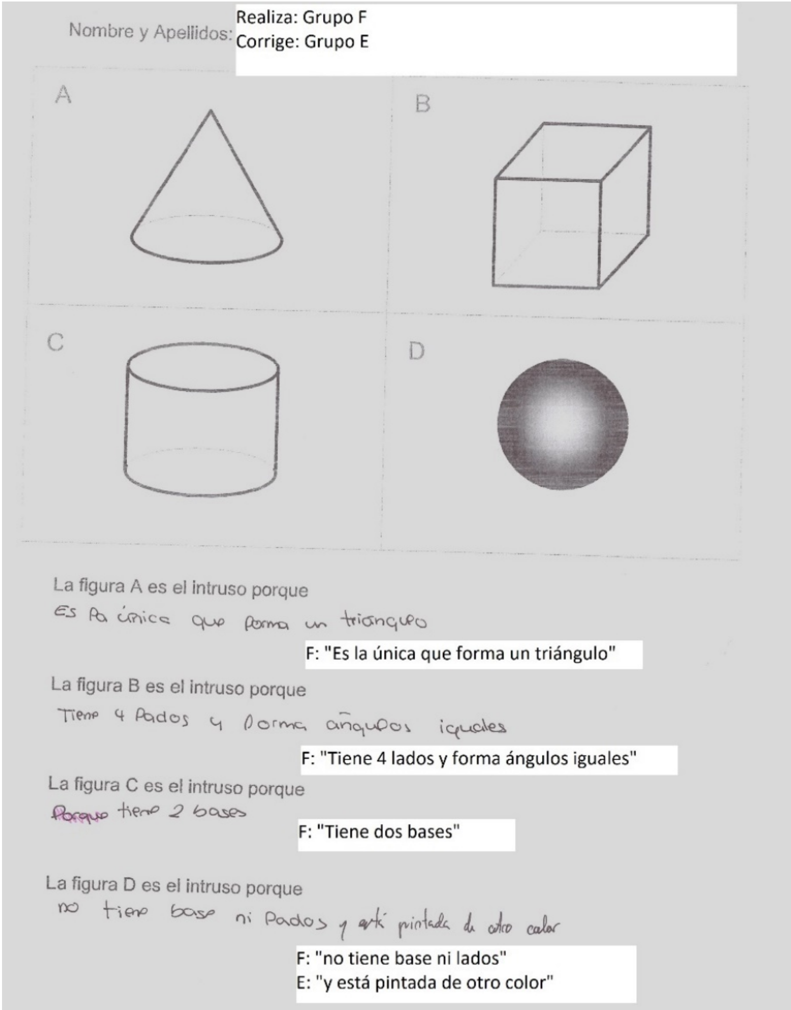


Figura 43: Ejemplo de tarea resuelta y corregida por los alumnos sobre la ficha 5.

Para la ficha 5 tenemos tres producciones de los grupos *A, C* y *F* corregidas respectivamente por los grupos *B, G* y *E.*

Para la figura A, el grupo *A* da un argumento que se puede considerar parcialmente correcto: “solo tiene una base circular”, el argumento desde el punto de vista lógico es correcto y no confunde términos matemáticos, sin embargo, es una descripción poco precisa. El resto de grupos da respuestas incorrectas confundiendo terminología, grupo *F:* “es la única que forma un triángulo”, o dando un argumento que no es correcto, grupo *C*: “todos sus lados se unen en un vértice”, este es un argumento erróneo puesto que el cubo también tiene vértices, en este caso además tienen una confusión o desconocimiento de términos de geometría tridimensional, utilizan el término “lados” para hablar de “caras”. Los grupos que han corregido estas fichas tampoco han sabido reconocer los errores de sus compañeros ni aportar argumentos correctos.

Para la figura B todos dan respuestas incorrectas, confunden términos de geometría tridimensional con términos de geometría plana, grupo *A*: “sus lados son iguales”, grupo *F*: “tiene 4 lados”, en lugar de referirse a las caras. El grupo *C* indica que “no tiene una circunferencia en su estructura” en lugar de decir que no tiene una superficie curva, aunque la manera en la que está representada la figura, sin sombrear, podría considerarse un objeto formado por una estructura de barras en vez de un cuerpo sólido, con lo cual su respuesta podría considerarse parcialmente correcta. Los grupos que corrigen estas fichas tampoco han detectado los errores de sus compañeros.

Para la figura C el grupo *A* deja la respuesta en blanco, después el grupo *B* lo corrige añadiendo un argumento parcialmente correcto indicando que: “tiene dos bases circulares”, el grupo *C* da una respuesta incorrecta al confundir nuevamente terminología, en este caso de longitud con área: utilizan “circunferencia” en lugar de “círculo”. El grupo *F* indica que: “tiene dos bases”, esta respuesta también se considera incorrecta porque al ser tan imprecisa y lacónica no refleja cuál es la característica que hace única a la figura, además en la colección hay otra figura que también tiene “dos bases” por lo que el argumento desde el punto de vista lógico también es falso. Nuevamente los compañeros que corrigen las fichas no detectan los errores.

Para la figura D todos los grupos dan un argumento parcialmente correcto basado en el aspecto externo de la figura: “es de otro color”, pero no describen las propiedades matemáticas del objeto. El grupo *F* indica que: “no tiene base ni lados”, procurando considerar un aspecto que sea inherente al objeto matemático, sin embargo, confunde nuevamente la terminología utilizando vocabulario de geometría plana: “lados” en lugar de caras y aristas. El grupo *E* corrige al grupo *F* añadiendo que está pintada de otro color, utilizando el mismo razonamiento que sus compañeros.

Al realizar la puesta en común los estudiantes declararon no conocer la geometría tridimensional, no conocían el nombre de los poliedros regulares, ni recordaban el vocabulario para nombrar las propiedades de los volúmenes, también desconocían la diferencia entre poliedro y sólido de revolución. Solo algunos alumnos manifestaron recordarlo al explicarles brevemente cuáles eran estas, el resto comentaron que aún no lo habían visto en la asignatura obligatoria de Matemáticas.

Ficha 6

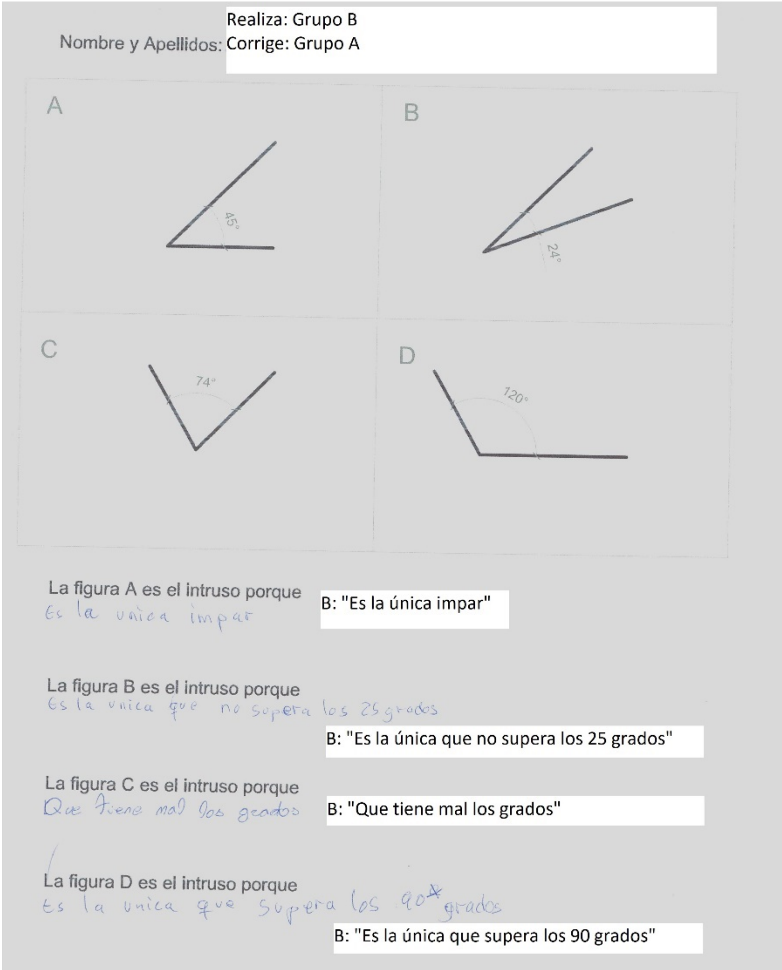


Figura 44: Ejemplo de tarea resuelta y corregida por los alumnos sobre la ficha 6.

Para la figura A dan un argumento correcto: “es la única impar”.

Para la figura B dan un argumento parcialmente correcto: “no supera los 25 grados”.

Para la figura C dan una respuesta incorrecta: “tiene mal los grados”, esta respuesta no se considera que tenga un argumento lógico.

Para la figura D dan un argumento parcialmente correcto: “supera los 90 grados”.

Esta ficha solo fue realizada por un grupo que iba más rápido realizando el trabajo que los demás, en la corrección sus compañeros no encontraron errores ni fueron capaces de añadir más argumentos. Los argumentos encontrados por los alumnos se basaban en los números indicando si era menor o mayor que otro o si el número era impar, lo cual son argumentos correctos, pero es una argumentación intuitiva que no define con precisión ni categoriza las relaciones que hay entre los otros tres objetos.

Respecto a cómo se podría clasificar su nivel de desarrollo de razonamiento geométrico siguiendo el modelo de Van Hiele, en función de las respuestas recogidas, podemos observar lo siguiente:

En las fichas 1 y 2 la mayoría de alumnos solo se fija en el aspecto físico general de la figura y su posición en el espacio (nivel 1 de Van Hiele), solo dos grupos comienzan a definir propiedades o dar argumentos basándose en las distintas partes, ángulos, longitud de lados y relacionan esas propiedades con las de otras figuras (nivel 2 de Van Hiele).

En la ficha 3 también describen las figuras basándose en su posición y aspecto general, tienen carencias de vocabulario para describir los movimientos en el plano. Durante la puesta en común fueron recordando cuáles eran estos movimientos: traslación, giro, simetría, homotecia. También se pusieron de manifiesto y las características de la homotecia, con la que podemos conseguir figuras semejantes, con la misma forma y proporción, aunque de distintas dimensiones, lo que la diferencia de otras transformaciones geométricas.

En la ficha 4 se observa más vocabulario matemático en todos los grupos, conocen mejor las propiedades y clasificaciones de los triángulos según sus lados y ángulos, y son capaces de recitarlas de memoria (nivel 2 de Van Hiele). Algunos alumnos cometen errores de terminología confundiendo triángulo equilátero con isósceles o no recuerdan el término escaleno. Durante la puesta en común de resultados manifestaron más conocimientos respecto a las propiedades de los triángulos de lo que habían escrito en las fichas de la tarea.

En la ficha 5 solo describen las figuras por su aspecto general (nivel 1 de Van Hiele), y tienen varios errores de concepto y de terminología, por ejemplo, dicen que el cubo "tiene 4 lados" o que el cono "forma un triángulo", que las bases del cilindro "son dos circunferencias". Después comentan que todavía no conocen ni han llegado a ver las propiedades ni clasificación de las figuras de 3 dimensiones, ni en este curso ni en los anteriores, por eso no han podido definir bien sus propiedades. Cuando les explico brevemente cómo se generan los sólidos de revolución: cono, cilindro, esfera, toroide, y las diferencias con los poliedros, de caras planas, muchos alumnos parecen recordar que sí lo han visto en cursos anteriores.

En la ficha 6 solo un grupo tuvo tiempo para trabajar sobre ella y otro grupo para corregirla. Los alumnos se centraron en las propiedades de los números que marcaban los ángulos, no en los ángulos y sus relaciones con el círculo completo como yo pretendía. El grupo que corrigió esta ficha no añadió ningún comentario más y estuvo de acuerdo con el trabajo de sus compañeros. Quizás hubiera obtenido resultados más acordes al objetivo utilizando una representación de una figura poligonal donde se señalara el ángulo interno de esta, dándole un contexto a las representaciones de esos ángulos.

VI. Implementación y análisis de resultados de la actividad Dictado geométrico:

6.1. Descripción de la implementación, análisis y propuestas de mejora

El día que se realizó esta actividad en el aula de Conocimiento de las Matemáticas solo había cinco alumnos que pertenecían al grupo de Diversificación, porque el resto de grupos se encontraban realizando una visita con otro profesor, así que se volvió a repetir al día siguiente, pero utilizando otra mecánica de juego.

Se comienza explicándoles la actividad como un juego donde tenían que tratar de describir una imagen de la manera más precisa que pudieran, para que una persona que no la esté viendo sea capaz de representarla lo más exactamente posible. Los alumnos disponían de regla y transportador de ángulos, además las hojas que se repartieron en las que estaba dibujada la figura y las hojas para que la representaran eran de papel cuadriculado. En una ficha tenían la imagen a describir y una serie de preguntas para responder después, en la otra hoja tenían que escribir las instrucciones. Después intercambié esas instrucciones con otro compañero, que debía leerlas y hacer debajo la representación de lo que interpretaba con esa descripción.

Como la hoja donde estaba dibujada la figura era cuadriculada, dos alumnos contaron los cuadros para dar las medidas de los lados, otro alumno usó una regla para dar las medidas en centímetros y los otros dos solo describieron la figura por su aspecto físico, sin medidas ni proporciones, a pesar de haberles recalcado que la figura a representar debía de ser idéntica.

A algunos alumnos les llevó mucho tiempo pensar cómo hacer una descripción, es verdad que algunas figuras eran más complicadas que otras y había múltiples maneras de describirlas. Otros alumnos terminaron muy pronto de escribir las instrucciones y aunque tenían tiempo de sobra no quisieron completarlo más, alegaban que era muy sencillo y que con su descripción el compañero iba a saber lo que era rápidamente.

Una vez se repartieron las instrucciones y tuvieron que hacer la representación también hubo muchas dificultades, se quejaron a sus compañeros de la escasez de instrucciones, de la mala definición, de la ambigüedad de términos, del escaso vocabulario, y de la letra ilegible de algún compañero.

Después se devolvió la representación a cada autor de las instrucciones para que reflexionaran sobre su manera de describir y cómo podían mejorarlo respondiendo a unas preguntas en la misma ficha. La manera de expresarse por escrito de los alumnos es muy escueta e imprecisa. Les falta vocabulario, no parece que les guste verbalizar sus ideas por escrito y además da la sensación de que tienen ganas de terminar todo pronto y pasar a otra cosa. Puede que el hecho de que tardasen tanto en comenzar a escribir y de que escribieran tan pocas frases se deba también en parte al “síndrome del papel en blanco”. En la reflexión posterior todos estuvieron de acuerdo en que para mejorar la comunicación deberían haber dado más explicaciones con más nivel de detalle.

A continuación, se propuso que saliera un voluntario a la pizarra a dibujar una figura que no iba a poder visualizar, los demás alumnos verían la figura y de viva voz darían instrucciones para que la dibujase. En esta ocasión los alumnos veían la figura de lejos, por lo que no podían saber la medida de los lados y además el compañero lo dibujaba en una pizarra sin cuadrícula, en otro tamaño. En lugar de dar instrucciones sobre las medidas debían dar indicaciones sobre la proporción y forma geométrica de los objetos. Esta manera de hacer la misma actividad pareció gustarles mucho más, todos los alumnos quisieron salir a la pizarra a dibujar, cuando terminaba uno en seguida salía otro, y los que describían se implicaron mucho en intentar dar la descripción más comprensible para que su compañero pudiera dibujar exactamente la figura dada.

Una vez hubieron salido todos a la pizarra a representar los objetos, se les preguntó cómo podrían calcular el área del objeto D (Figura 45). Al principio dijeron que no se podía, pero después debatiendo entre ellos vieron que se podía descomponer en triángulos equiláteros, recordamos la fórmula para calcular el área del triángulo y uno de los alumnos se dio cuenta de que para calcular la altura del triángulo podía usar el teorema de Pitágoras que recitó de memoria diciendo que: “el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos”. Esta manera tan visual de describir el teorema hablando del área del “cuadrado sobre”, lo había aprendido gracias a las demostraciones geométricas visuales que les enseñó su profesora y a la instalación de agua que hay en el museo de la Ciencia, que habían visitado.

Como habían participado tan pocos alumnos, al día siguiente se solicitó poder utilizar una hora de guardia con los alumnos de 3º para realizar la actividad. Esta vez se hizo de manera lúdica, sin entregarles fichas para escribir, solo pidiendo un voluntario que saliera a la pizarra a dibujar y los demás le darían instrucciones de viva voz. En este caso se modificaba una de las variables didácticas, es decir, un aspecto de la tarea cuya modificación provoca un efecto en el modo de llegar a la solución, la estrategia a seguir, etc. (Brousseau, 2007), la variable didáctica es que ya no existe una cuadrícula para medir, ya no se podía hacer una figura congruente sino semejante. Los alumnos no podían dar una descripción para que el compañero hiciera una figura exactamente igual, con las mismas medidas, ya que no tenían manera de medir y la pizarra donde dibujaba el compañero era más grande que el papel donde estaba la figura original. Los estudiantes debían fijarse, por lo tanto, en las proporciones y la forma geométrica de la representación. Mientras los alumnos iban dando instrucciones a sus compañeros, las fui transcribiendo en un papel y están recogidas al final del apartado 6.2.

Todos los alumnos participaron muy activamente y quisieron salir voluntarios a dibujar. Estaban tan inmersos en la actividad que cuando sonó el timbre del final de la clase no hicieron caso y siguieron dando instrucciones al compañero que estaba en la pizarra para que terminara de dibujar bien la figura.

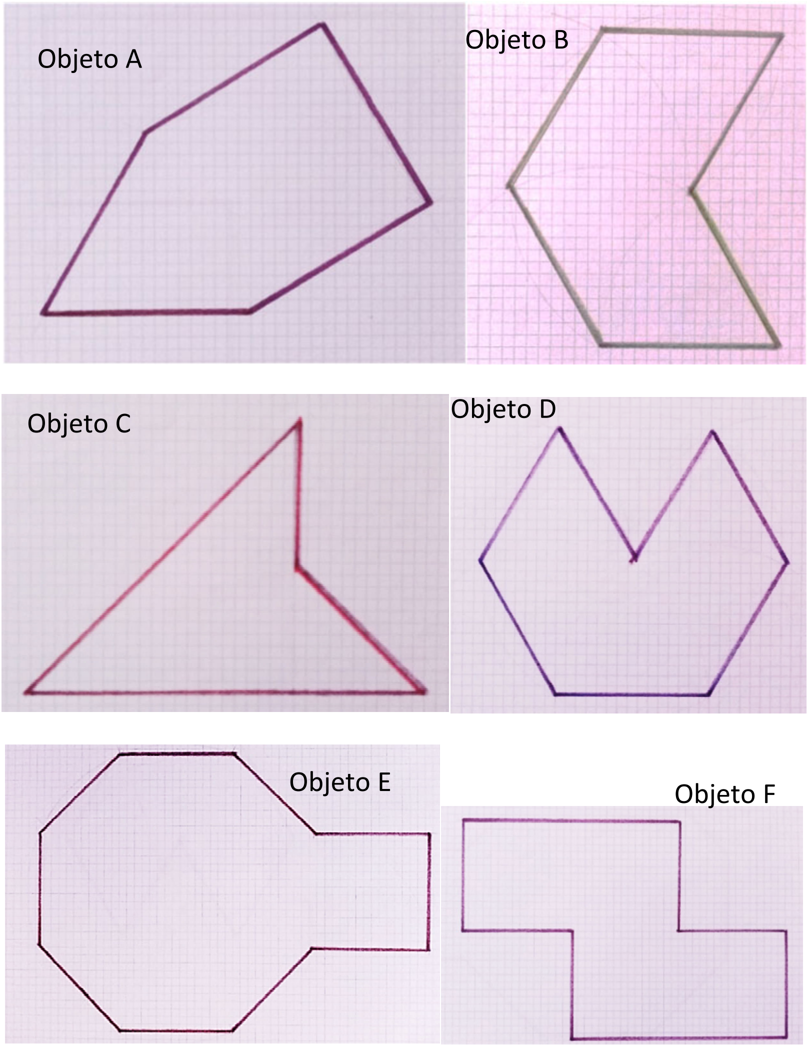


Figura 45: Objetos que deben describir los estudiantes en la actividad Dictado matemático. Elaboración propia.

Propuesta de mejora en la implantación:

Todos los alumnos se implicaron mucho más cuando el compañero estaba dibujando en la pizarra y podían comprobar a tiempo real si entendía o no sus instrucciones. Habría sido más efectivo hacer primero un par de ejemplos de esta manera para que los alumnos vean la importancia del vocabulario y de dar instrucciones objetivas y después pasar a hacer el ejercicio por escrito de manera individual, para que los alumnos hubieran entrado primero en la dinámica de la actividad y con esa implicación haber escrito sus instrucciones personales en las fichas. Considero que habría sido más productivo en este orden porque cuando daban las instrucciones de viva voz, todos a la vez, al hablar muchas veces se pisaban unos a otros y tenían que callarse para escuchar al compañero, seguro que a muchos alumnos a posteriori les hubiera gustado poder escribir lo que se les había ocurrido a ellos solos y no pudieron decir. Fue un error no haber tenido preparadas nuevas fichas en ese momento para recoger sus ideas.

El problema al realizar la actividad de manera conjunta con los alumnos dando instrucciones en voz alta es que quieren hablar todos a la vez, se forma mucho barullo y hay que parar continuamente para moderar el tono. Se deben trabajar las reglas de orden, turno de palabra y respeto al compañero que está hablando, lo cual es una buena oportunidad para trabajar las competencias transversales.

6.2. Análisis de datos de las tareas recogidas

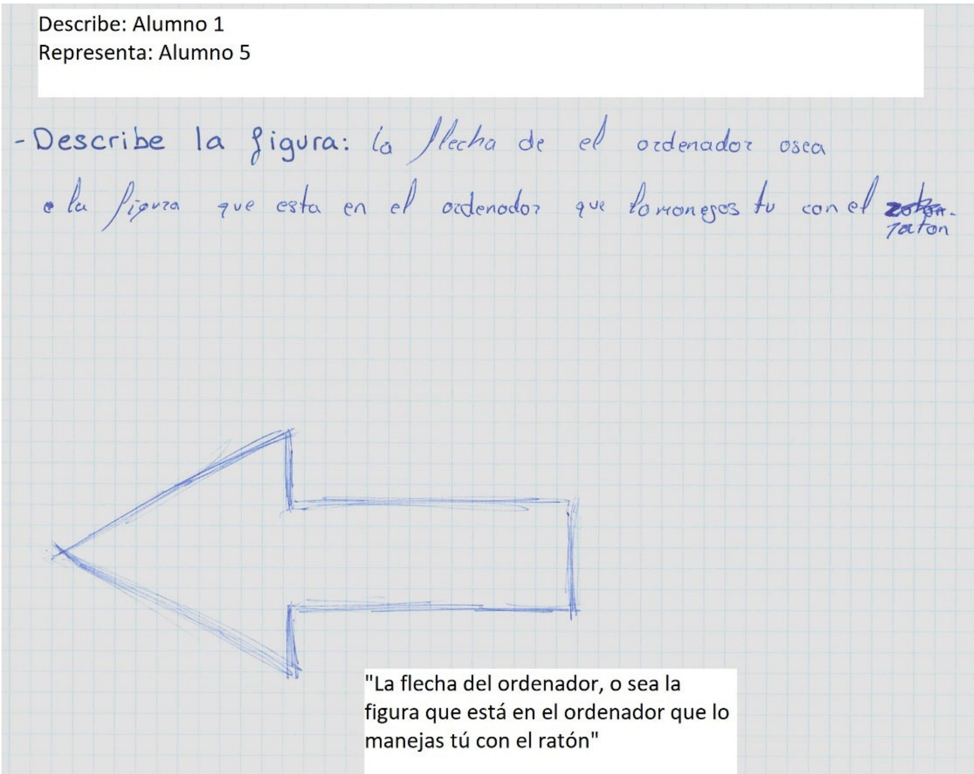
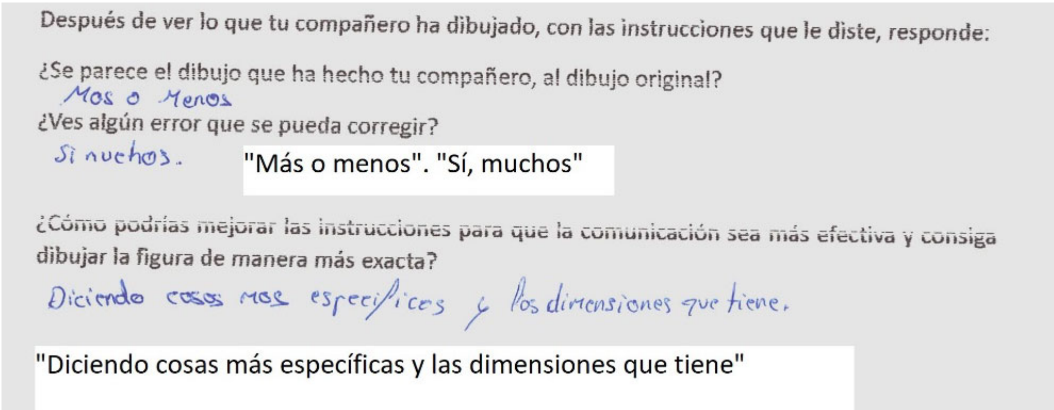


Figura 46: Descripción que realiza el alumno 1 y representa el alumno 5.

Analizando las descripciones que han dejado por escrito en las fichas (ver anexo 9.2.2. Actividad 2), vemos que el primer alumno describe el objeto C (Figura 46) utilizando un símil según el aspecto externo de la figura (nivel 1 de razonamiento Van Hiele), y el compañero que debe representarlo dibuja una flecha según su propia concepción, al no haber más instrucciones. Además, el alumno 1 terminó muy rápido de escribir manifestando que con su definición su compañero iba a saber exactamente a qué se estaba refiriendo y no le importó estar esperando en silencio sin hacer nada más mientras el resto de alumnos seguían pensando y escribiendo sus instrucciones. Después comprobó que la tarea no era tan fácil.

En cuanto a las reflexiones que tuvieron que realizar después sobre cuáles podrían ser los errores y aspectos mejorables de sus instrucciones, los alumnos respondieron en general de manera lacónica sin tratar de realizar una nueva descripción a pesar de que disponían de tiempo para hacerlo, lo cual hace pensar que realmente tienen dificultades y falta de práctica para expresarse verbalmente por escrito, carencia de vocabulario matemático para realizar este tipo de descripciones o desconocimiento de las propiedades geométricas de los objetos que los ayudarían a describirlos mejor (Figura 47).


Después de ver lo que tu compañero ha dibujado, con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero, al dibujo original?

Mos o Menos

¿Ves algún error que se pueda corregir?

Si nuchos.

"Más o menos". "Sí, muchos"

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

Diciendo cosas mos especificos y los dimensiones que tiene.

"Diciendo cosas más específicas y las dimensiones que tiene"

Figura 47: Respuesta del alumno 1 a las preguntas de reflexión.

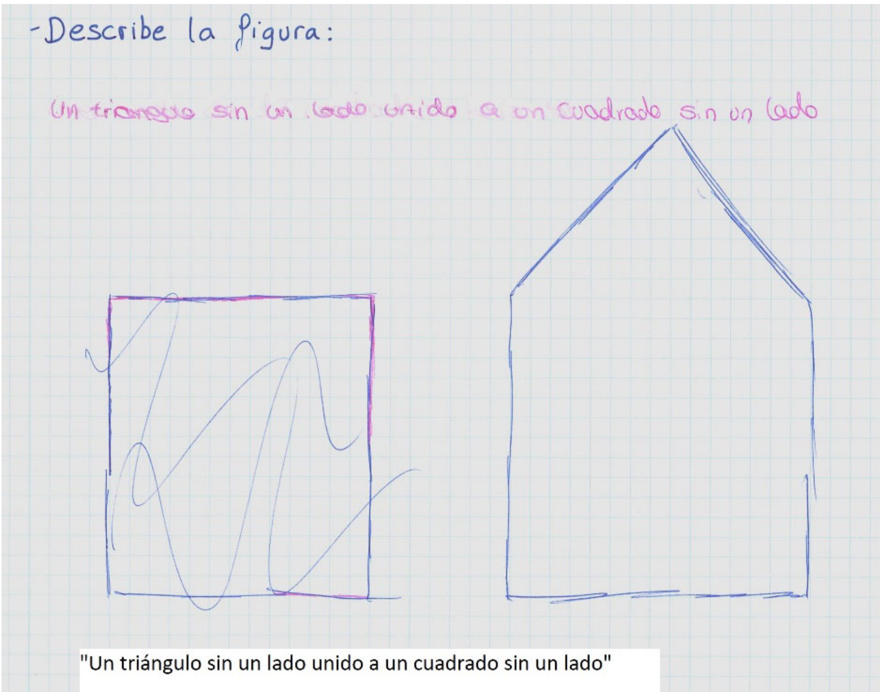
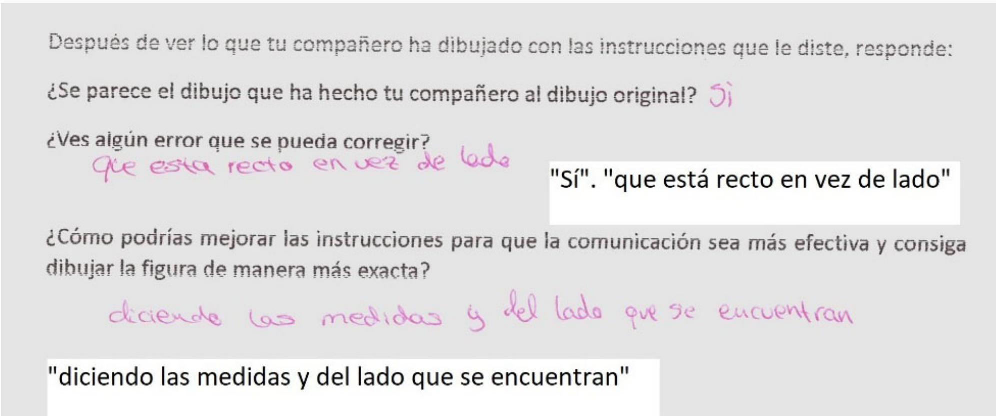


Figura 48: Descripción realizada por la alumna 2 y representación del alumno 1.

La segunda alumna ha procurado utilizar un lenguaje más matemático para describir el objeto A (Figura 48), para ello lo ha descompuesto en dos polígonos que conoce utilizando la “aprehensión operativa”, pero no utiliza las propiedades de esos polígonos regulares: triángulo equilátero y cuadrado, para poder describirlos mejor, tampoco da las medidas de los lados ni describe su posición o cómo están colocados uno respecto del otro. (nivel 2 de razonamiento Van Hiele).

En cuanto a las reflexiones posteriores vemos que la alumna se percata de los errores (medidas y posición) pero la descripción que da sobre el error “está recto en vez de lado” (Figura 49) sigue siendo un vocabulario vago, poco preciso, que no utiliza propiedades geométricas o terminología adecuada para concretar las instrucciones.


Después de ver lo que tu compañero ha dibujado con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero al dibujo original? Si

¿Ves algún error que se pueda corregir?

que esta recto en vez de lado

"Sí". "que está recto en vez de lado"

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

diciendo las medidas y del lado que se encuentran

"diciendo las medidas y del lado que se encuentran"

Figura 49: Respuesta de la alumna 2 a las preguntas de reflexión.

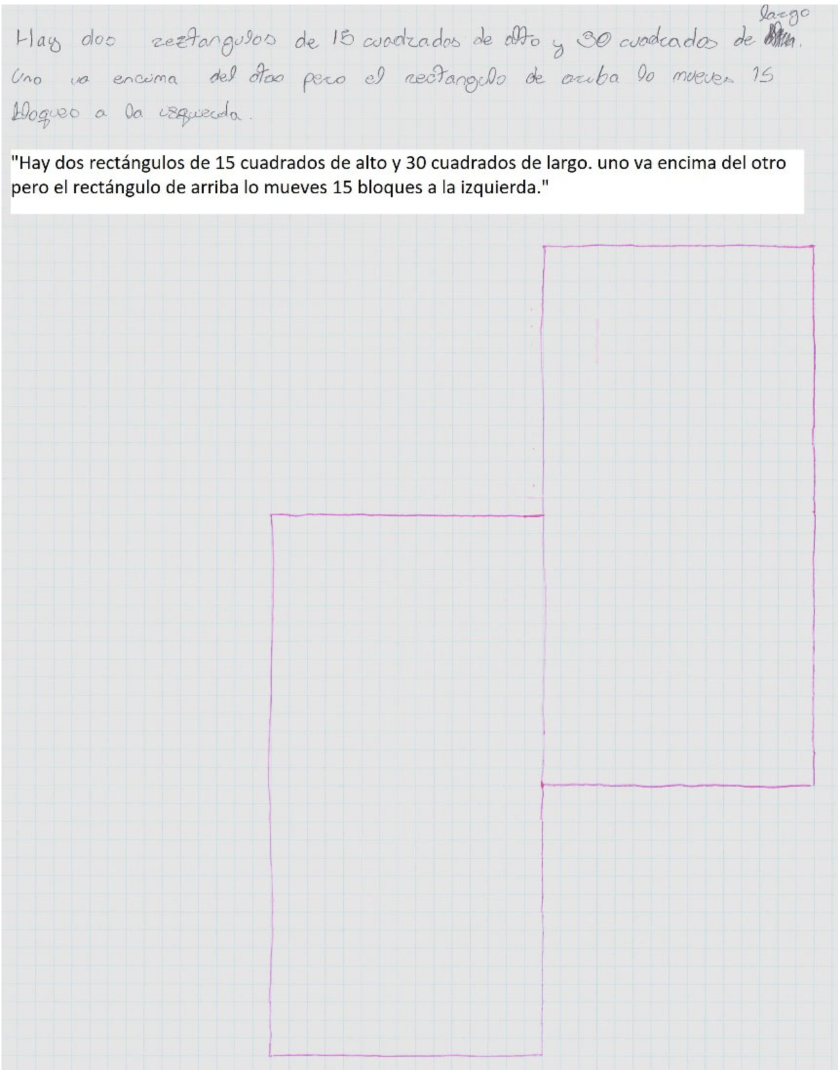
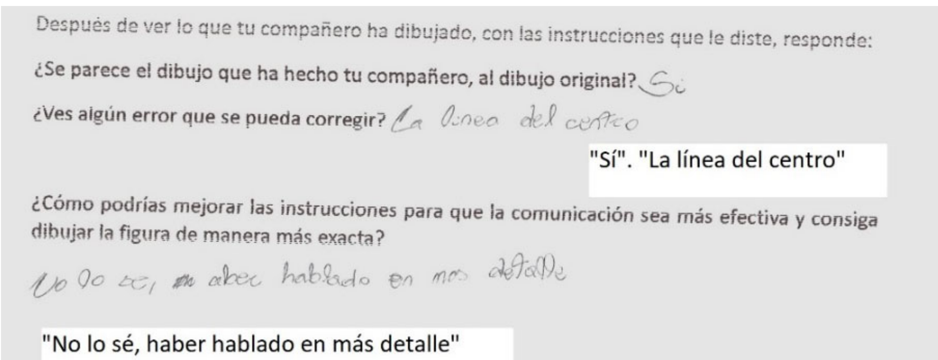


Figura 50: Descripción realizada por el alumno 3 y representación de la alumna 2.

El tercer alumno tenía que describir el objeto F y utiliza los cuadrados del papel para poder dar medidas (Figura 50) y que su compañera lo dibuje con la misma longitud y proporciones consiguiendo que la representación que realiza su compañera sea exacta en la forma, sin embargo, se ha olvidado de describir concretamente cuál era la posición de las figuras y su compañera lo ha representado girado respecto a como él lo estaba viendo.


Después de ver lo que tu compañero ha dibujado, con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero, al dibujo original? Si

¿Ves algún error que se pueda corregir? La línea del centro

"Sí". "La línea del centro"

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

No lo se, abec hablado en mas detalle

"No lo sé, haber hablado en más detalle"

Figura 51: Respuesta del alumno 3 a las preguntas de reflexión.

En cuanto a las respuestas dadas por este alumno 3 a las preguntas de reflexión (Figura 51) podemos observar que no se ha percatado o más bien, no le ha dado importancia a que la posición de la figura que ha dibujado su compañera estaba girada respecto a la suya.

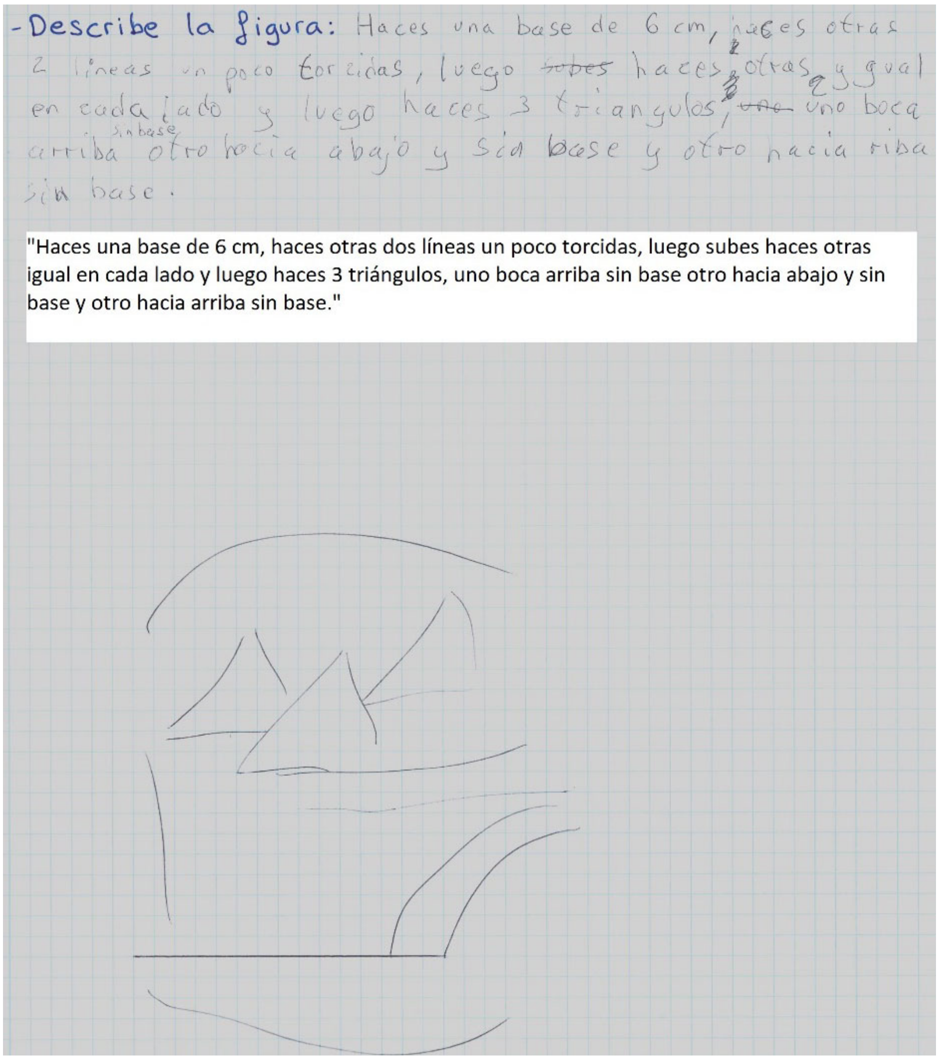
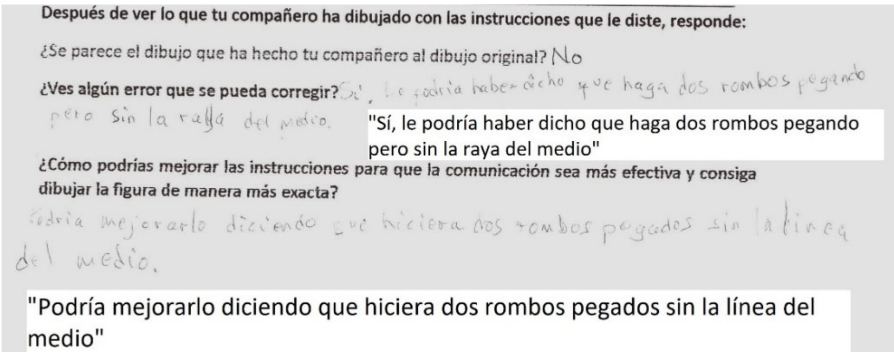


Figura 52: Descripción realizada por el alumno 4 y representación del alumno 3.

El cuarto alumno tenía que describir el objeto D, que quizás era la figura más compleja, estuvo más tiempo que los demás reflexionando y utilizó la regla para medir los lados y poder dar instrucciones claras (Figura 52). Sin embargo, la falta de vocabulario matemático y el desconocimiento de relaciones entre propiedades hizo que no pudiera dar una descripción correcta. (nivel 2 de razonamiento).



Después de ver lo que tu compañero ha dibujado con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero al dibujo original? No

¿Ves algún error que se pueda corregir?

"Sí, le podría haber dicho que haga dos rombos pegando pero sin la raya del medio"

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

"Podría mejorarlo diciendo que hiciera dos rombos pegados sin la línea del medio"

Figura 53: Respuesta del alumno 4 a las preguntas de reflexión.

En cuanto a las respuestas dadas a las preguntas de reflexión (Figura 53), vemos que este alumno es el único que después de ver los errores cometidos intenta realizar una nueva descripción utilizando otro tipo de operación transformadora de la figura: dos rombos, pero nuevamente el lenguaje utilizado es poco preciso y no menciona las propiedades geométricas de las figuras que trata de describir, ni la posición de las figuras entre ellas, con lo cual las instrucciones dadas son igual de complicadas para poder representar el objeto correctamente.

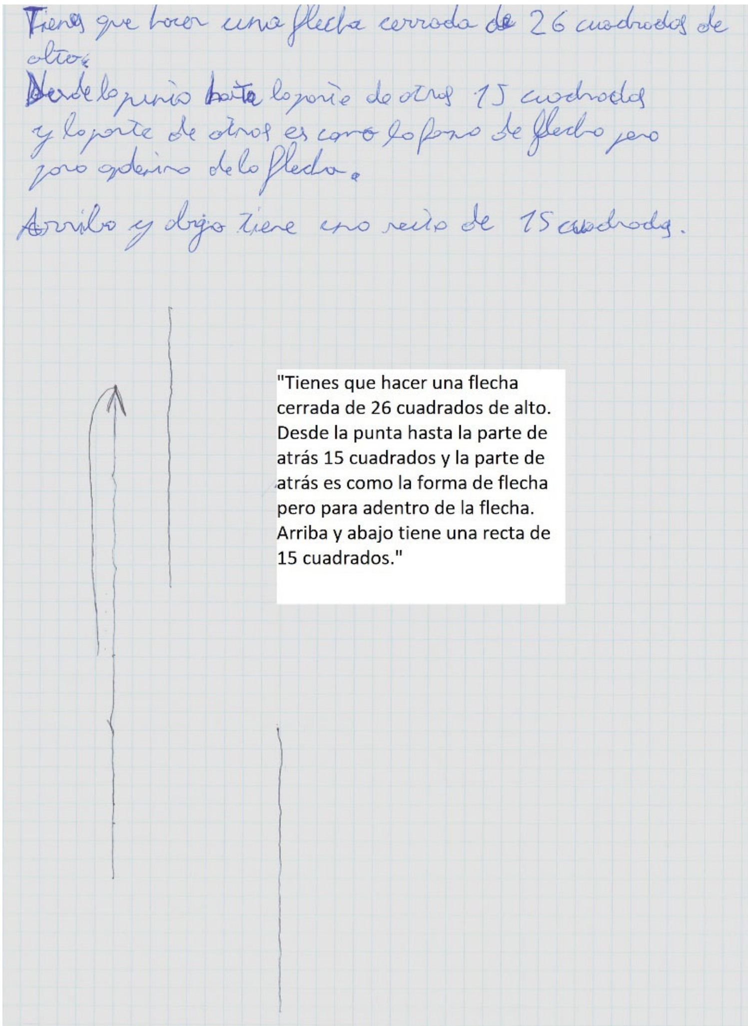
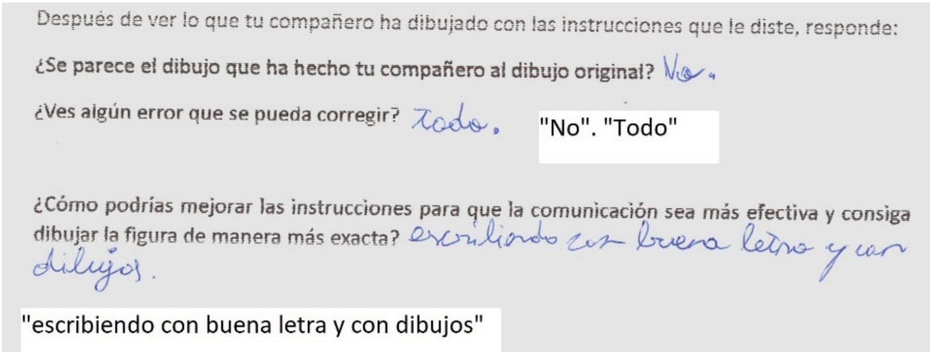


Figura 54: Descripción realizada por el alumno 5 y representación del alumno 4.

El quinto alumno realiza la descripción del objeto B, también era uno de los objetos complicados y el alumno intenta realizar una descripción detallada sobre cómo construir esa figura, observamos que utiliza los cuadros del papel para medir, sin embargo, su definición se basa solamente en el aspecto externo de la figura: "hacer una flecha cerrada de 26 cuadrados de alto, desde la punta hasta la parte de atrás 15 cuadrados. Arriba y abajo tiene una recta de 15 cuadrados", no la descompone en elementos conocidos, ni utiliza lenguaje matemático, no habla de lados ni de vértices, no menciona las propiedades geométricas del objeto, con lo cual las instrucciones que recibe su compañero son muy complicadas de seguir y la representación realizada no se parece en nada a la original (Figura 54). (nivel 1 de razonamiento).

En cuanto a las respuestas dadas posteriormente vemos que el alumno reconoce que todo es incorrecto, pero no ha comprendido la mecánica de la actividad porque responde que para mejorar las instrucciones debería utilizar dibujos (Figura 55).


Después de ver lo que tu compañero ha dibujado con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero al dibujo original? No.

¿Ves algún error que se pueda corregir? Todo.

"No". "Todo"

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta? escribiendo con buena letra y con dibujos.

"escribiendo con buena letra y con dibujos"

Figura 55: Respuestas del alumno 5 a las preguntas de reflexión

A continuación, vamos a transcribir y analizar las instrucciones que dieron los alumnos durante la actividad conjunta, en la modalidad donde se realizaba una variable didáctica, ya que los alumnos ahora no pueden dar las medidas exactas del objeto, solo pueden describir la forma y proporciones de este. Tenemos a un alumno dibujando con tiza en la pizarra una figura que no había visto, siguiendo las instrucciones dadas por los demás compañeros.

Los alumnos nada más ver la figura comenzaban realizando una descripción únicamente visual, diciendo a qué objeto les recordaba, por ejemplo, para describir el objeto A las instrucciones eran del tipo: "haz una casita tumbada sobre el tejado", o sobre el objeto B: "haz un comecocos con los lados rectos", sobre el objeto C: "es como la flecha del ratón del ordenador", o "son dos cartabones", en el objeto D: "es un corazón con líneas rectas". En el objeto F: "Es una pieza de tetris con dos rectángulos". Este tipo de razonamiento se podría clasificar dentro del Nivel 1 del modelo de niveles de razonamiento del matrimonio Van Hiele, como se puede ver en la publicación de Corberán et al. (1994).

Cuando comprobaban en directo que el alumno que estaba en la pizarra no entendía esas referencias igual que ellos, porque tenía su propia concepción de lo que era una "casita tumbada" o un "corazón con los lados rectos" y no era capaz de representar lo que estaban diciendo, comenzaban a dar más detalles, de una manera menos subjetiva, identificando partes de los objetos o descomponiéndolos en figuras de las que conocían sus propiedades, para poder describirlas de una manera neutra, en definitiva, para poder entenderse con un lenguaje más propio de las matemáticas y más riguroso. Los mismos alumnos que habían utilizado un razonamiento de nivel 1 demostraron tener también un nivel 2, y alguno de ellos un nivel 3, en el que además eran capaces de interrelacionar las propiedades y catalogar una misma figura con distintos nombres dependiendo de la propiedad en la que se estuvieran fijando.

Por ejemplo, transcribo las instrucciones que dieron para el objeto A: "- haz un triángulo y un cuadrado apoyado en el lado derecho del triángulo, - ¿un triángulo cómo?, - un triángulo equilátero apoyado en la base, pero con la base paralela al suelo, - el cuadrado apoyado sobre el lado derecho del triángulo, - así no, el cuadrado tiene que estar girado, - haz un rombo, pero un rombo con los cuatro ángulos rectos, como un cuadrado girado apoyado en un vértice, - la base del cuadrado tiene que estar apoyada completamente sobre el lado del triángulo y mide lo mismo".

Para el objeto B: "- haz un hexágono, - un hexágono regular, - la base paralela al suelo, - borra los dos lados de la derecha y mételos hacia dentro, - ¿hacia dentro cómo?, - así no, - haz dos rombos, te tienen que quedar dos rombos apoyados uno encima de otro sobre un lado, el lado paralelo al suelo, - tienen que ser simétricos el de arriba con el de abajo".

Para el objeto C: "- Haz un triángulo rectángulo, como un cartabón, - no es un cartabón es una escuadra, es un triángulo isósceles, - un triángulo rectángulo isósceles con el ángulo recto a la derecha, pero haz la base paralela al suelo y un ángulo recto a la derecha, - ahora a la mitad del lado derecho sale otro triángulo más pequeño, como el primero pero simétrico, - alarga la base del triángulo, - haz un triángulo rectángulo más pequeño apoyado en la misma base que el otro, - el ángulo recto del triángulo pequeño está pegado al anterior, - es isósceles también, haz los lados iguales, el lado mide la mitad del triángulo grande"

Para el objeto D: "- haz un hexágono regular, - apoyado en un lado, - la base paralela al suelo, - ahora borra el lado de arriba, - de los bordes que te quedan dibuja dos líneas hacia el centro del hexágono, - dibuja un triángulo con el vértice hacia abajo, hacia el centro del hexágono, - te tiene que quedar como si fueran dos rombos apoyados sobre un vértice, los dos iguales, uno al lado del otro, con una línea en la base que les une".

Para el objeto E: "- es un octógono con un cuadrado pegado en el lado derecho, - haz un octógono regular, - así no, gíralo, con la base paralela al suelo, - ahora del lado derecho sale un cuadrado, - haz un cuadrado que los lados midan lo mismo que el lado del octógono, - borra la línea que los une”.

Para el objeto F: “- haz un rectángulo, - no tan largo, -como dos cuadrados de largo, - coge la base y borra la mitad derecha de la base, ahora desde el vértice continúa desde la base hacia la derecha haciendo otro rectángulo igual hacia abajo, - el rectángulo de abajo está desplazado a la derecha, - haz un rectángulo igual que el que has hecho arriba, después lo unes con el de arriba”

Los alumnos fueron comprobando y ensayando con cada objeto qué instrucciones eran más precisas y eficaces, cuando verificaban qué tipo de descripción les funcionaba mejor la incorporaban a las instrucciones, por ejemplo, para dar la posición de la figura indicaban: “la base paralela al suelo” o “apoyado en un vértice”, e incorporando el vocabulario matemático a sus descripciones: “triángulo equilátero”, “triángulo rectángulo”, etc. Establecieron conexiones y relaciones entre las distintas propiedades que habían visto de los cuerpos geométricos que conocían y también aportaron terminología de movimientos en el plano. Además de disfrutar con la realización de esta actividad, les sirvió para refrescar conceptos, incorporar al lenguaje términos técnicos de geometría, practicar la comunicación y la escucha activa y valorar la importancia de expresarse con precisión y claridad.

VII. Conclusiones

Durante la implementación de las dos primeras actividades propuestas y tras el análisis de los resultados, se ha podido observar el potencial de estas para conseguir los objetivos que nos habíamos propuesto, como son trabajar los procesos de argumentación, representación, visualización, comunicación, y razonamiento con los alumnos de una manera participativa que fomente su implicación y motivación, además de trabajar los contenidos didácticos de geometría señalados en el currículo.

Las actividades implementadas nos ofrecen recursos para analizar y conocer el nivel de razonamiento geométrico del alumnado, conocer sus errores de concepto y de terminología, ver las conexiones que son capaces de establecer y trabajar a partir de ese nivel para poder consolidar sus conocimientos y escalar en los siguientes niveles de razonamiento geométrico según el modelo Van Hiele.

La implicación y participación del alumnado con estas actividades ha sido bastante satisfactoria y nos ha dado ideas para poder mejorar la implementación de las actividades de manera que podamos obtener producciones más elaboradas para la recogida, análisis de datos y evidencias a la hora de poder realizar su evaluación.

Estas actividades implementadas se pueden completar en una secuencia didáctica como la desarrollada en la propuesta siguiendo las fases de aprendizaje del modelo Van Hiele con el objetivo de mejorar la comprensión de los conceptos y propiedades geométricas que deben aprender y así desarrollar más en profundidad los procesos de conjeturación, razonamiento y demostración, introduciendo a los alumnos en el razonamiento matemático.

No obstante, hay que tener en cuenta que esta propuesta didáctica tiene una limitación importante que es el tiempo. El hecho de trabajar los contenidos de la materia con una metodología cooperativa, dando autonomía a los estudiantes para que descubran por sí mismos la conclusión, adaptándose a su ritmo, en un aula donde existe tanta diversidad nos puede llevar a que las tareas se alarguen más sesiones de las que teníamos previstas y no se puedan realizar todas, más teniendo en cuenta que la asignatura de *Conocimiento de las Matemáticas* tiene solo dos sesiones a la semana. En este caso el docente debe seleccionar qué tareas de cada actividad son las que mejor se adaptan a su grupo de estudiantes y al tiempo del que disponen.

La propuesta didáctica diseñada en este TFM abarcaría todo un trimestre para un solo bloque de contenidos como es el sentido espacial, lo cual puede resultar demasiado extenso. Se han elaborado tareas y fichas extra en cada actividad con la previsión de tener preparado material suficiente en el caso de que los alumnos resuelvan antes de lo esperado los retos y demanden más. El profesor debe ser flexible y seleccionar en cada caso las tareas necesarias para mantener el buen ritmo en la clase. En el caso de que espontáneamente surja un debate interesante entre el alumnado y el profesor, aunque pueda llevar a otros temas y agotar el tiempo de la sesión preparada, también hay que saber valorar sus beneficios y no preocuparse porque no se puedan completar todas las tareas que se habían diseñado.

Esta propuesta didáctica también podría aplicarse a la asignatura obligatoria de Matemáticas en el curso de 3º ESO, puesto que los alumnos pertenecían a distintos grupos de ese curso. Además, al recoger actividades con contenido curricular de Matemáticas de los cursos previos, 1º y 2º ESO, tendría potencial para poder implementarse también en esos cursos, seleccionando los retos más acordes al nivel de los alumnos una vez realicen las actividades 1 y 2 que nos darán información para saber cuál es su nivel de razonamiento geométrico.

Como puntos fuertes que ofrece esta propuesta didáctica se pueden señalar la utilización de metodología cooperativa y la implementación de estrategias de aprendizaje que fomentarán la autonomía del alumnado y mejorarán su autoconocimiento a la hora de saber qué técnicas les serán más eficaces para su aprendizaje. Esta metodología también permite generar un nivel de compañerismo en el aula que mejora la convivencia, fomenta la participación y la implicación de los alumnos y les otorga una experiencia más positiva durante las clases de matemáticas. Además, con estas actividades estamos ayudando a los estudiantes a mejorar su capacidad de razonamiento y comunicación introduciéndoles en el método científico.

Considero que se han cumplido los objetivos inicialmente propuestos en el trabajo como son entender la relevancia que tiene enseñar a los estudiantes de secundaria los procesos de argumentación, razonamiento y demostración. Así como la transcendencia de desarrollar sus habilidades de comunicación, visualización y representación, tan necesarias para que lleguen a comprender más significativamente los contenidos de matemáticas, en especial de geometría. La propuesta didáctica elaborada nos puede servir como recurso para trabajar esos procesos clave con los estudiantes y ayudarles en su desarrollo cognitivo con actividades adaptadas a su contexto. Además, se han podido implementar en el aula durante el módulo de prácticas dos de esas actividades, lo cual nos ha servido para identificar errores y realizar propuestas de mejora en la implementación y para analizar las producciones de los alumnos realizando un ensayo sobre su categorización e identificando los niveles de razonamiento geométrico del modelo Van Hiele que tienen los estudiantes.

Por último, añadir que la realización de este TFM, así como las prácticas realizadas en el Centro, nos ha aportado una visión de la realidad, del compromiso y del valor de las labores que realizan los docentes, las contrariedades a las que se enfrentan, la escasez de tiempo, el volumen de trabajo y la necesaria capacidad que hay que desarrollar para saber gestionar un grupo de personas numeroso y heterogéneo. También nos ha servido para tomar conciencia de las dificultades a las que se enfrentan los alumnos, tanto académicas como personales y familiares, muchas veces con falta de recursos para poder abordarlas.

VIII. Referencias

Aljarafe, P. (12 de enero de 2011). *MatesGuillena.* Recuperado el 25 de junio de 2024, de https://matesguillena.blogspot.com/2011/01/la-pajarita-nazari.html

Alsina, C., Fortuny, J., & Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO.* Síntesis.

Asina, C., Burgués, C., & Fortuny , J. (1992). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Síntesis.

Barrallo, N. (s.f.). *Análisis y ejemplos prácticos de actividades para trabajar las estrategias de aprendizaje en el aula.* Instituto Cervantes de Argel.

Barriga, B. (2021). Una propuesta de adaptación del juego Dixit empleando tarjetas WODB con contenido matemático. *Tangram. Revista de Educación Matemática, 4*(2), 136-154.

Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares , S. (2021). Primary school students' understanding of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mthematics, 106 (2)*, 251-270.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas.* (D. Fregona, Trad.) Zorzal.

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, P., & Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.* CIDE.

Cupillari, A. (2024). *The nuts and Bolts of Proof (Fifth Edition).* Academic Press.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras 24*, 17-24.

DECRETO 39/2022, de 29 de Septiembre por el que se establece la ordenación y el curriculo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. (30 de septiembre de 2022). *(190)*. Boletín oficial de Castilla y León.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in Mathematical thinking. Bassic issues for learning. *Proceedings of the Annual*

Meeting of the North American Chapter of the International Group for thePsychology of Mathematics Education (pág. 25). Mexico: ERIC.

Herbst, P. (2002). Establishing a custom of proving in american school geometry evolution of the two-column proof in the early twentieth century. En *Educational Studies in Mathematics 49* (págs. 283-312). Kluwer Academic publisher.

Jaime Pastor, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele. La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Universitat de València.

Jones, K. (2001). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software ande their evolvilng mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics 44*, 55-85.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo BOE-A-2022-7899. (2006).

Marín Antón, L., Marugán, M., & Catalina, J. (2013). Estrategias de aprendizaje de elaboración. Entrenamientos y programas. *Aula Abierta, 41*(1), 49-62.

Maschietto, M. (2018). Clasical and digital Technologies for the Pythagorean Theorem. En L. Ball, *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education. Tools, Topics and Trends* (págs. 203-225). Springer.

Mora, J. (1 de enero de 2019). *La Alhambra con regla compás y geogebra.* Recuperado el 2024 de junio de 25, de https://www.geogebra.org/m/accseyfs

NCTM. (2003). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: VA: NCTM.

Paneque, J., Cobo, P., & Fortuny , J. (2017). Intelligent tutoring and the development of argumentative competence. *Technology, knowledge and learning, 22 (1)*, 83-104.

Polígonos estrellados. Taller de matemáticas. Festival Alternativo de Creatividad y Educación 2018. (30 de mayo de 2024). Obtenido de https://reseteomatematico.com/taller-de-matematicas-face-2018-poligonos-estrellados-y-triangulo-de-pascal

Real Decreto 2017/2022, de 29 de marzo BOE-A-2022-4975. (2022).

Reyes Iglesias, E. (2023). Matemática de los recubrimientos. Apuntes del máster de Educación Secundaria. Universidad de Valladolid.

Reyes Iglesias, E., & Fernández Benito, I. (2015). *Pentágonos, Construcciones, Mosaicos. Geometría sagrada.* Universidad de Valladolid.

Ricart Aranda, M., Beltrán-Pellicer, P., & Estrada, A. (2019). Actividad Scalfonding en geometría para desarrollar habilidades de argumentación y clasificación en futuros maestros de Educación Infantil. *Investigación en Educación Matemática XXIII* (págs. 503-512). SEIEM.

Román, J. (1993). Entrenamiento en estrategias de aprendizaje: secuencias, principios y validación. En C. Monereo (Ed.), *Las estrategias de aprendizaje. Procesos, contenidos e interacción* (págs. 169-194). Doménech.

Román, J., & Gallego, S. (1994). *ACRA-Escalas de Estrategias de aprendizaje.* TEA Ediciones.

Saez-Lacave, A., Rodriguez-López, A., Serrano Muñoz, S., & Pérez Fraiñas, R. (2020). Changing the Spanish arts curriculum for secondary school: the case for digital geometry and screencasting. *Research in Learning Technology, 28*.

Scheinerman, E. (2001). *Matemáticas discretas.* España: Thomson.

Sua, C., Gutierrez, A., & Jaime, A. (2021). Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica en 3D y realidad aumentada. En P. Diago (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (págs. 579-586). SEIEM.

Toulmin, S. (2003). *The uses of Argument.* Cambridge University Press.

Valori, G., Giacomone, B., Albanese, V., & Adamuz Povedano, N. (2022). Approaching Euclidean proofs through explorations with manipulative and digital artifacts. *International journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-31.

Which One Doesn't Belong. Shapes. (21 de marzo de 2024). Obtenido de https://wodb.ca/shapes.html

IX. ANEXOS

9.1. FICHAS DE ACTIVIDADES PROGRAMADAS.

9.1.1. Actividad 1: WODB *(Wich One Doesn't Belong)*

9.1.2. Actividad 2: Dictado Geométrico

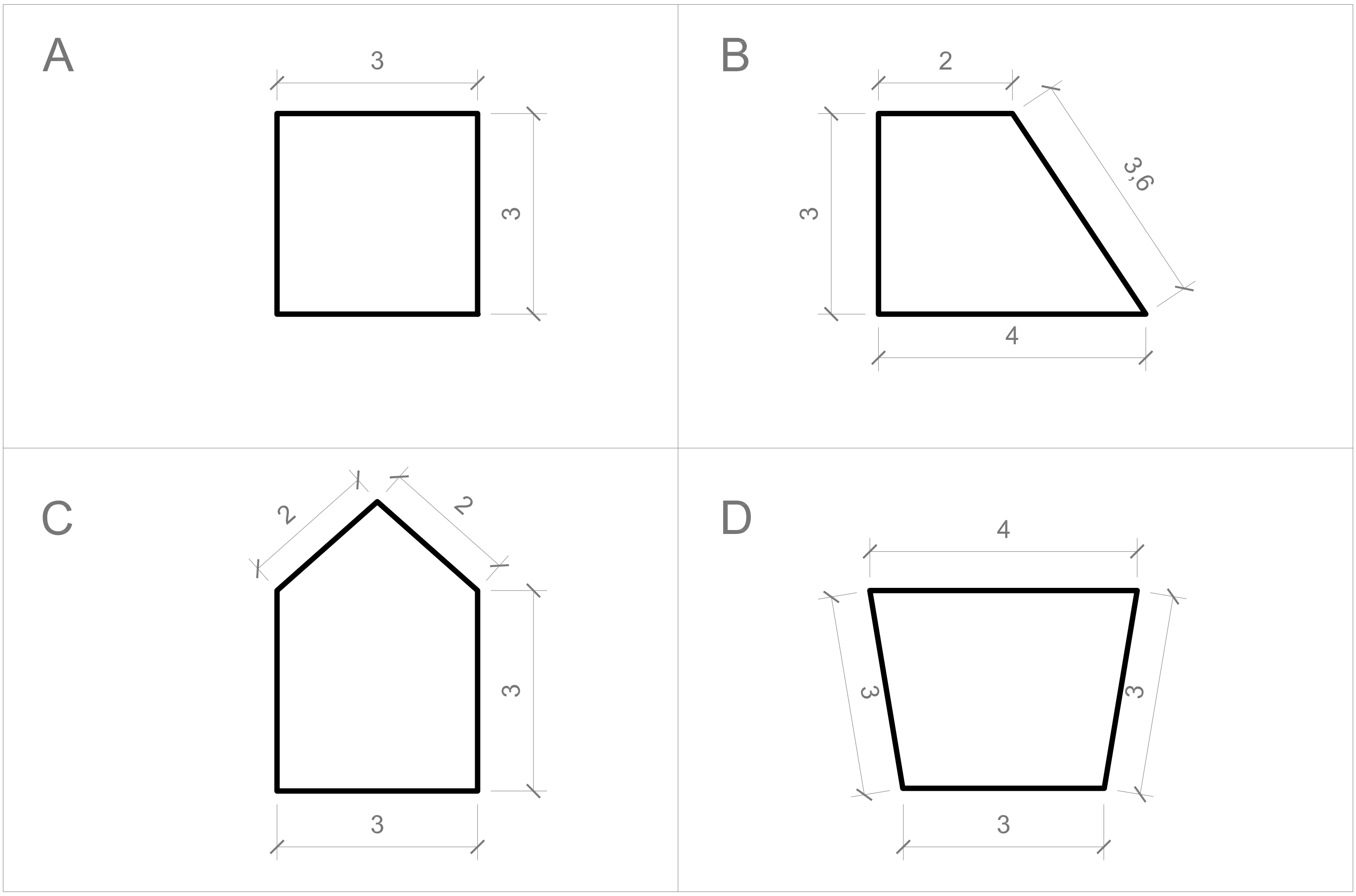
9.1.3. Actividad 3: Polígonos estrellados

9.1.4. Actividad 4: Polígonos convexos y Movimientos en el plano

9.1.5. Actividad 5: *Visual Thinking*

9.1.1. Actividad 1: WODB *(Wich One Doesn't Belong)*

Nombre y Apellidos:



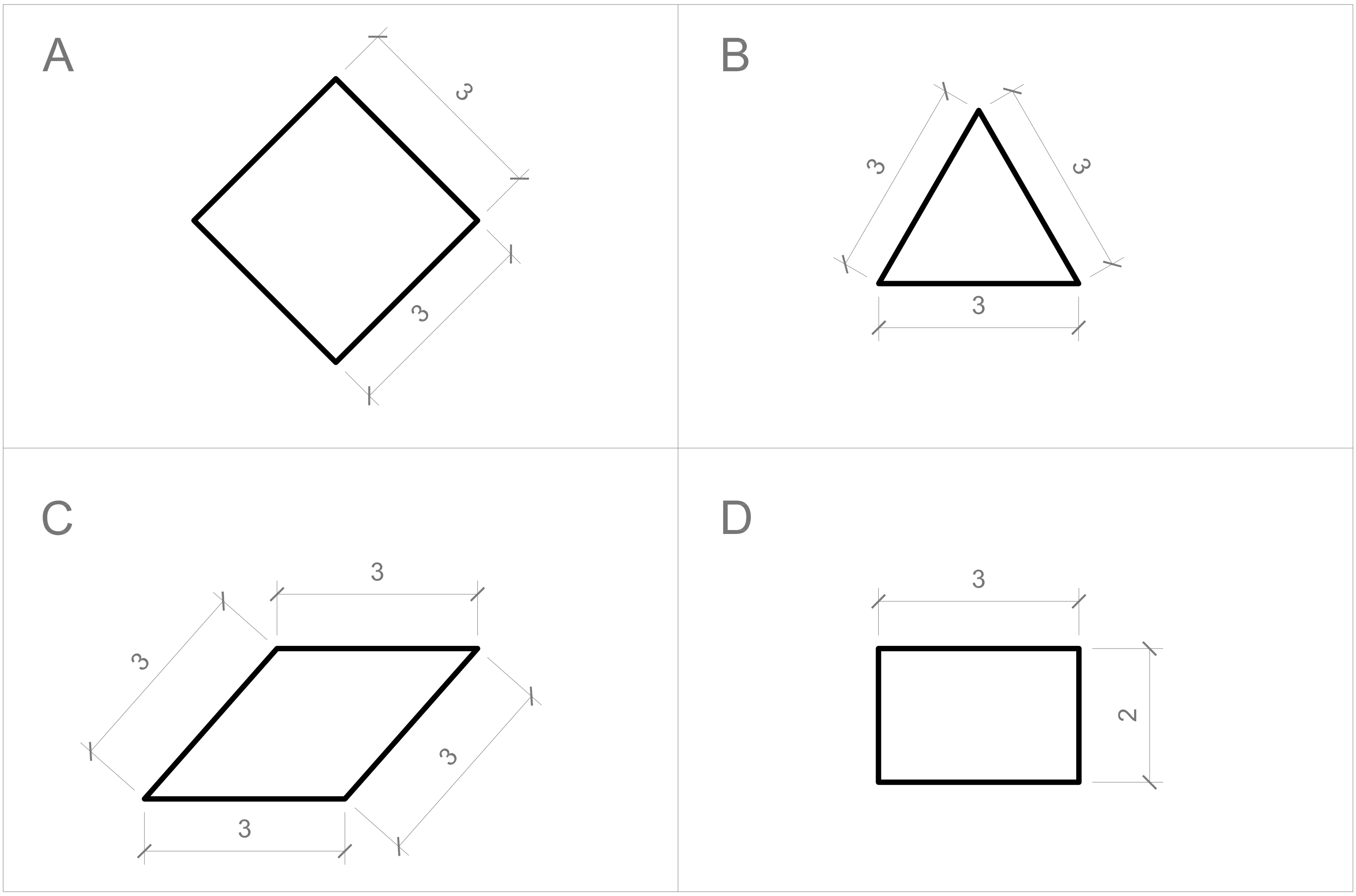
La figura A es el intruso porque

La figura B es el intruso porque

La figura C es el intruso porque

La figura D es el intruso porque

Nombre y Apellidos:



La figura A es el intruso porque

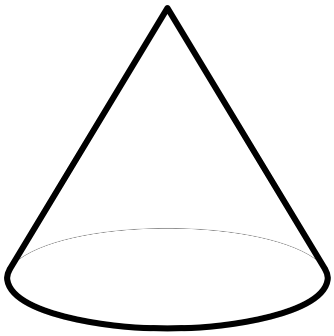
La figura B es el intruso porque

La figura C es el intruso porque

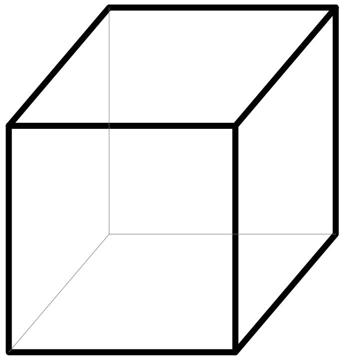
La figura D es el intruso porque

Nombre y Apellidos:

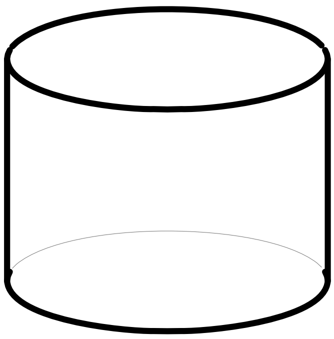
A



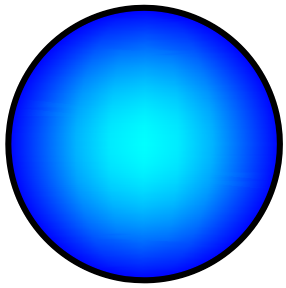
B



C



D



La figura A es el intruso porque

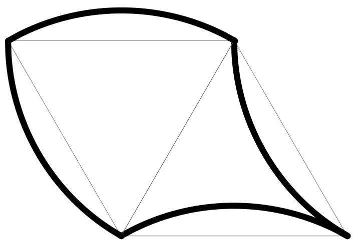
La figura B es el intruso porque

La figura C es el intruso porque

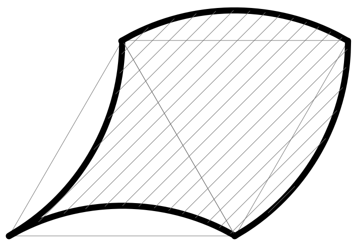
La figura D es el intruso porque

Nombre y Apellidos:

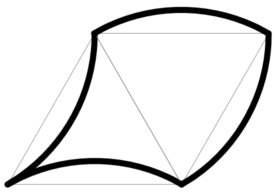
A



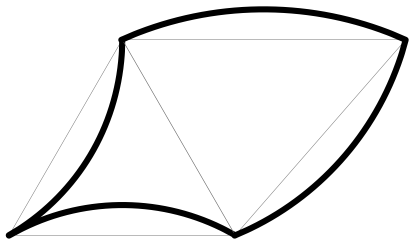
B



C



D



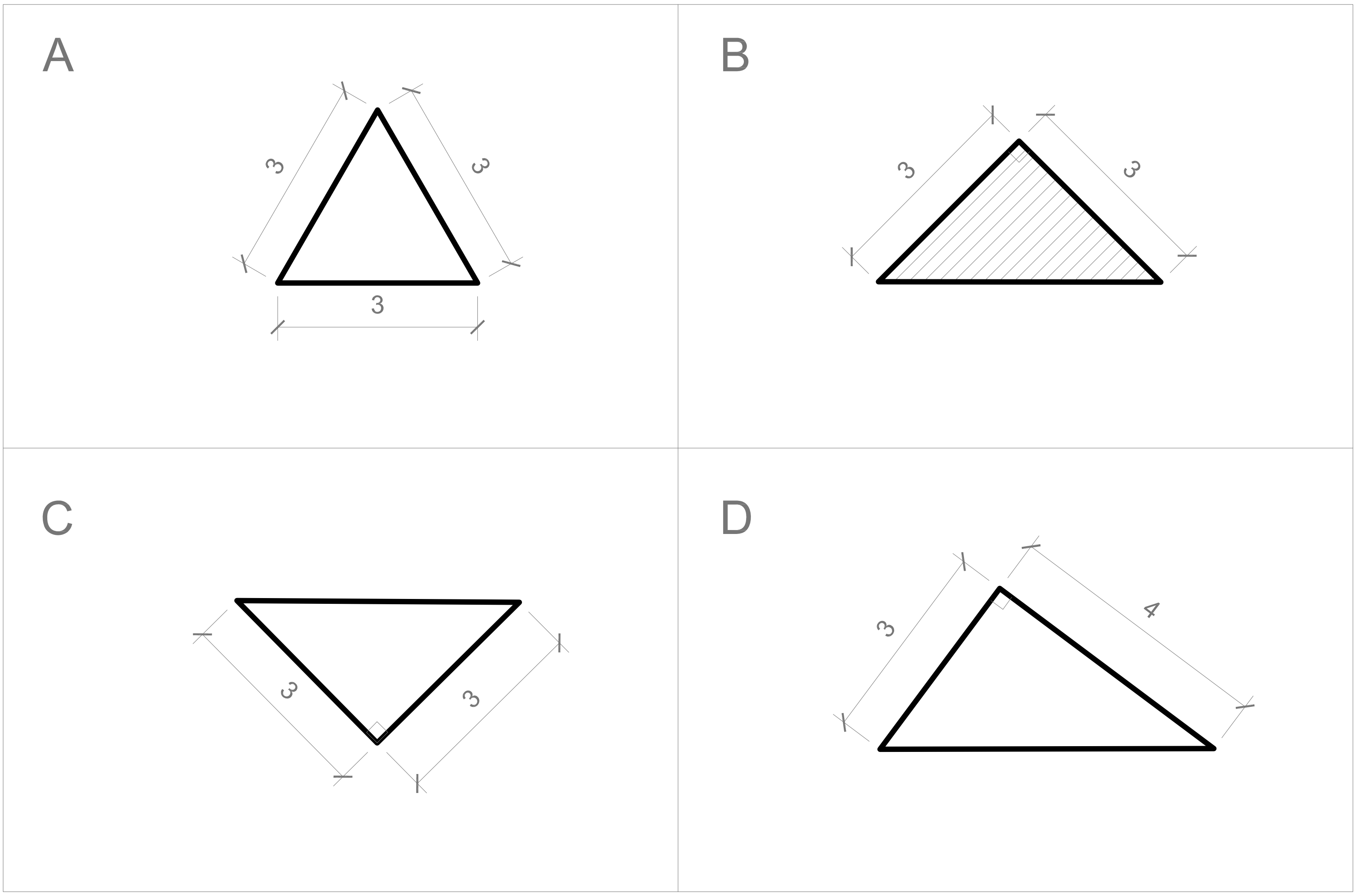
La figura A es el intruso porque

La figura B es el intruso porque

La figura C es el intruso porque

La figura D es el intruso porque

Nombre y Apellidos:



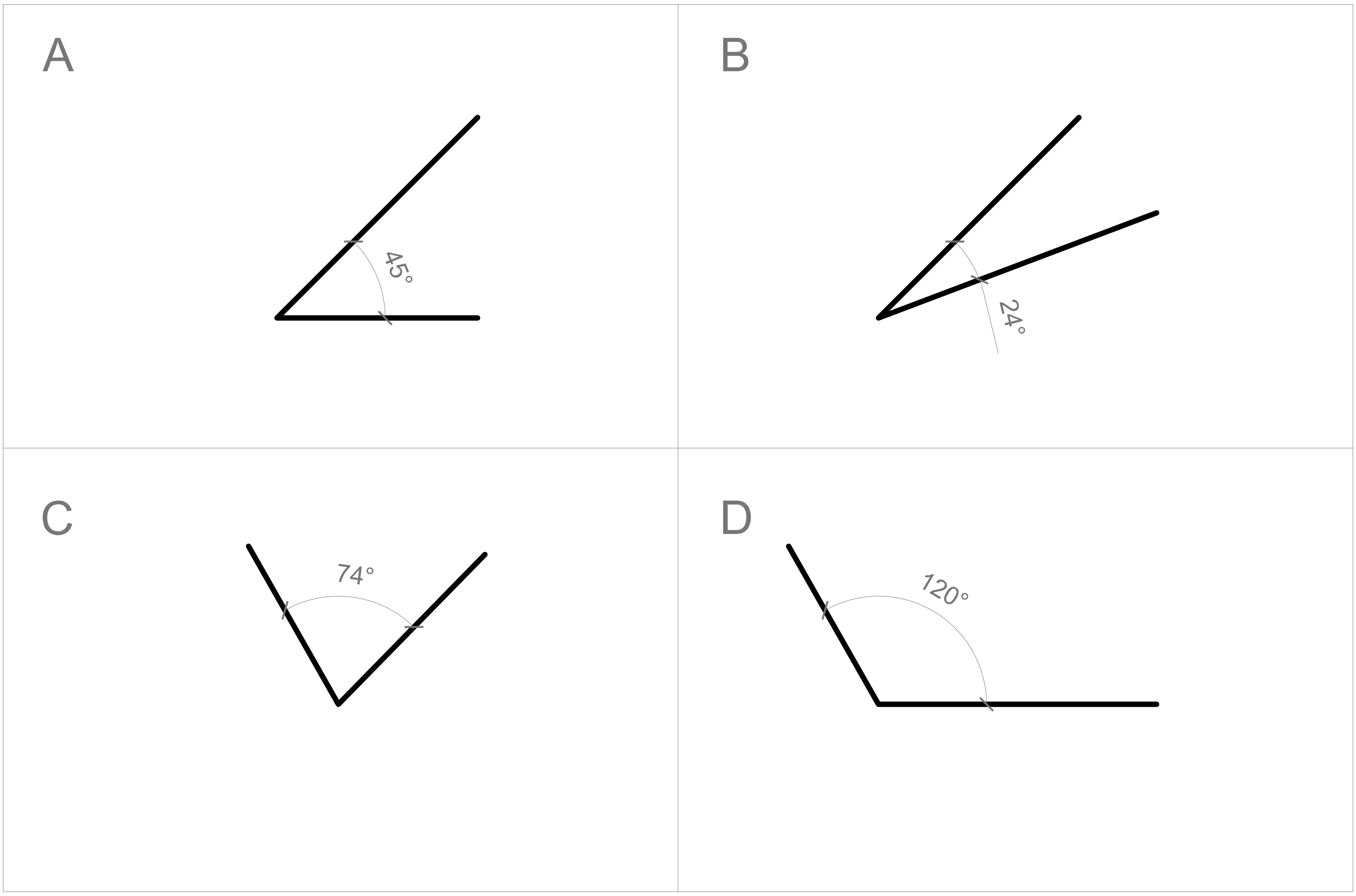
La figura A es el intruso porque

La figura B es el intruso porque

La figura C es el intruso porque

La figura D es el intruso porque

Nombre y Apellidos:



La figura A es el intruso porque

La figura B es el intruso porque

La figura C es el intruso porque

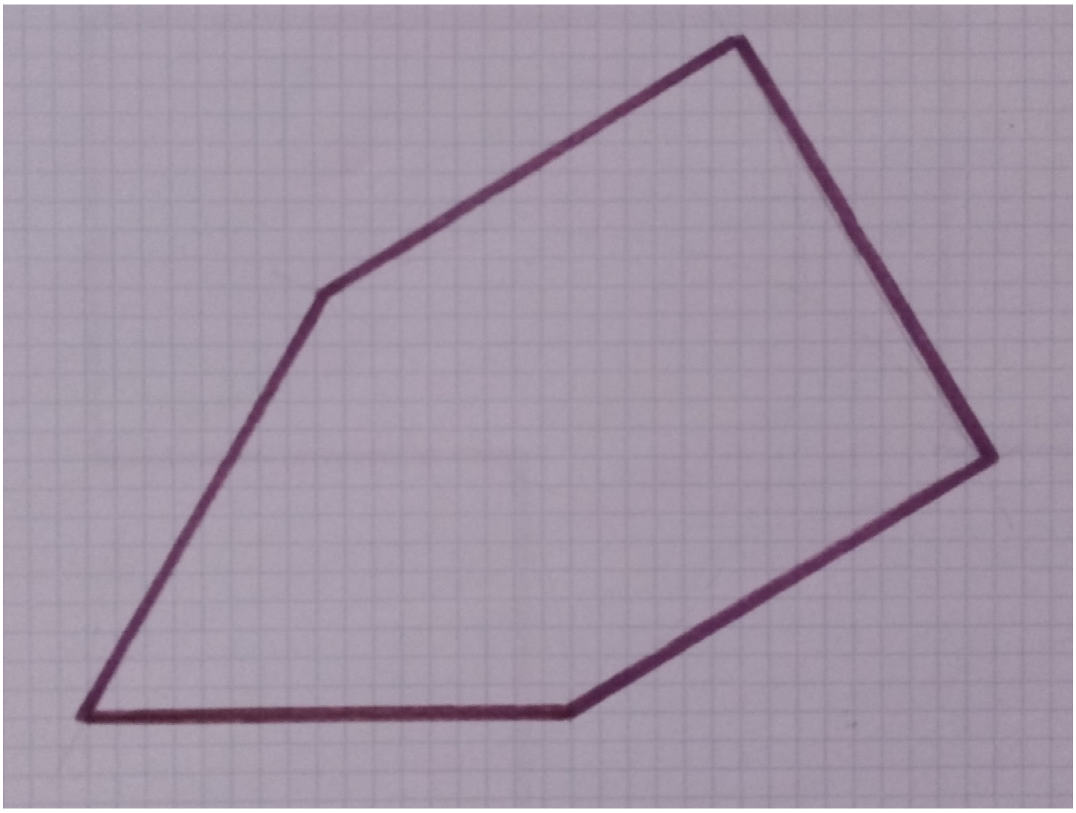
La figura D es el intruso porque

9.1.2. Actividad 2: Dictado Geométrico

GRUPO 1_ Nombre y Apellidos:

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado, con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero, al dibujo original?

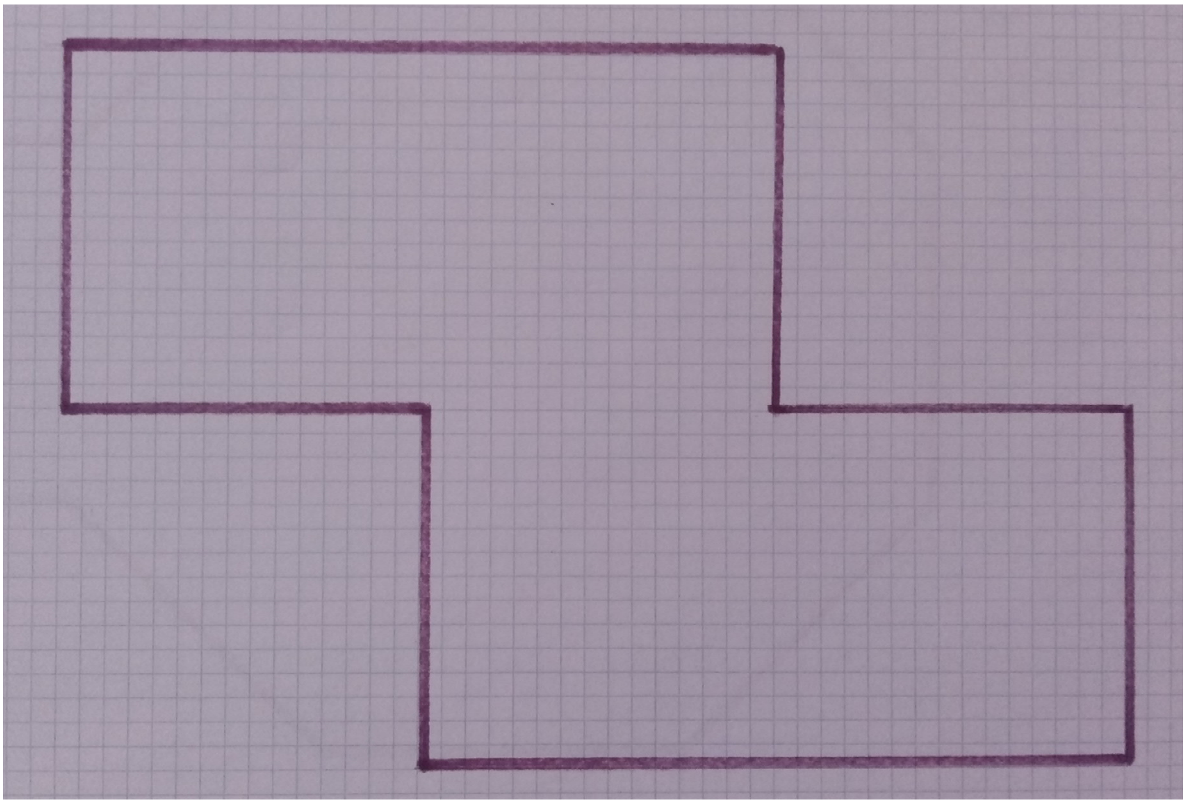
¿Ves algún error que se pueda corregir?

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

GRUPO 2_ Nombre y Apellidos:

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado, con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero, al dibujo original?

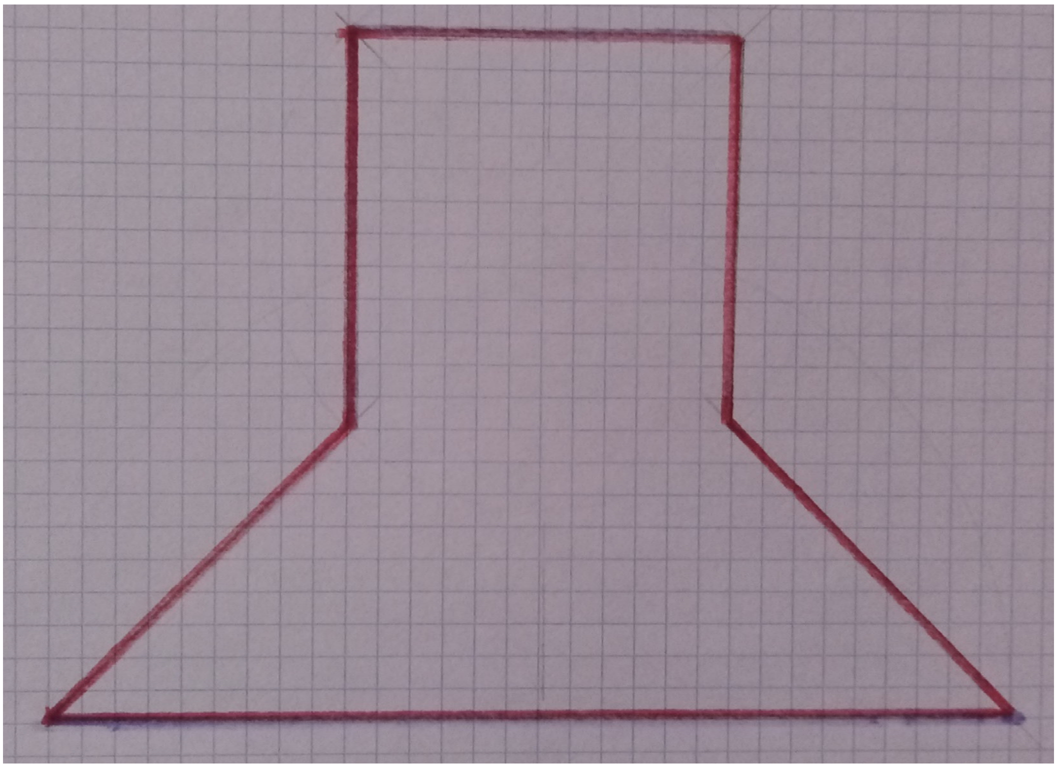
¿Ves algún error que se pueda corregir?

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

GRUPO 3_ Nombre y Apellidos:

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado, con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero, al dibujo original?

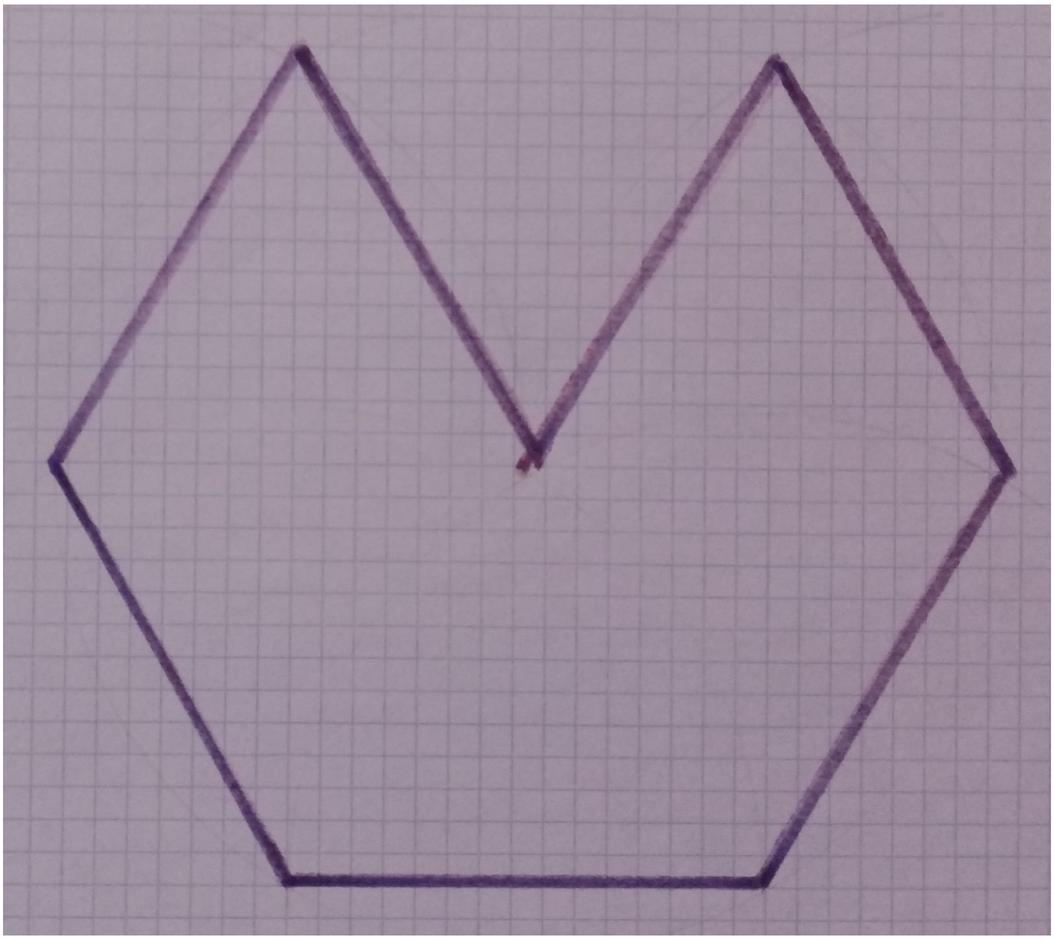
¿Ves algún error que se pueda corregir?

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

GRUPO 4_ Nombre y Apellidos:

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero al dibujo original?

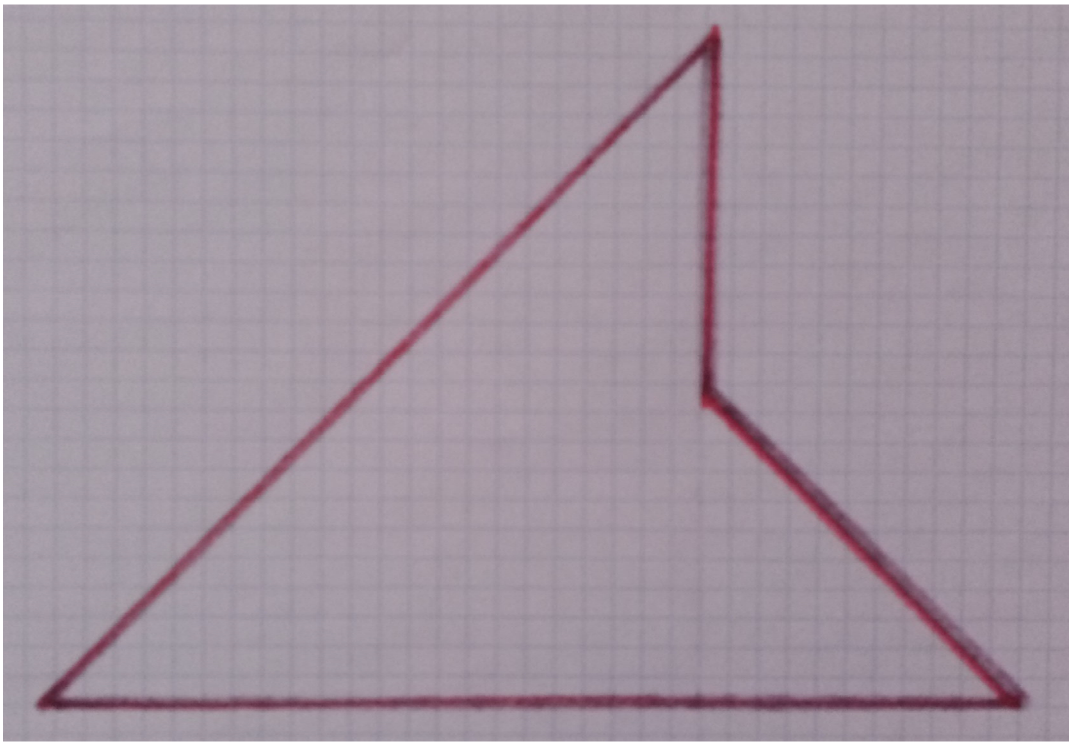
¿Ves algún error que se pueda corregir?

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

GRUPO 5_ Nombre y Apellidos:

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado, con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero, al dibujo original?

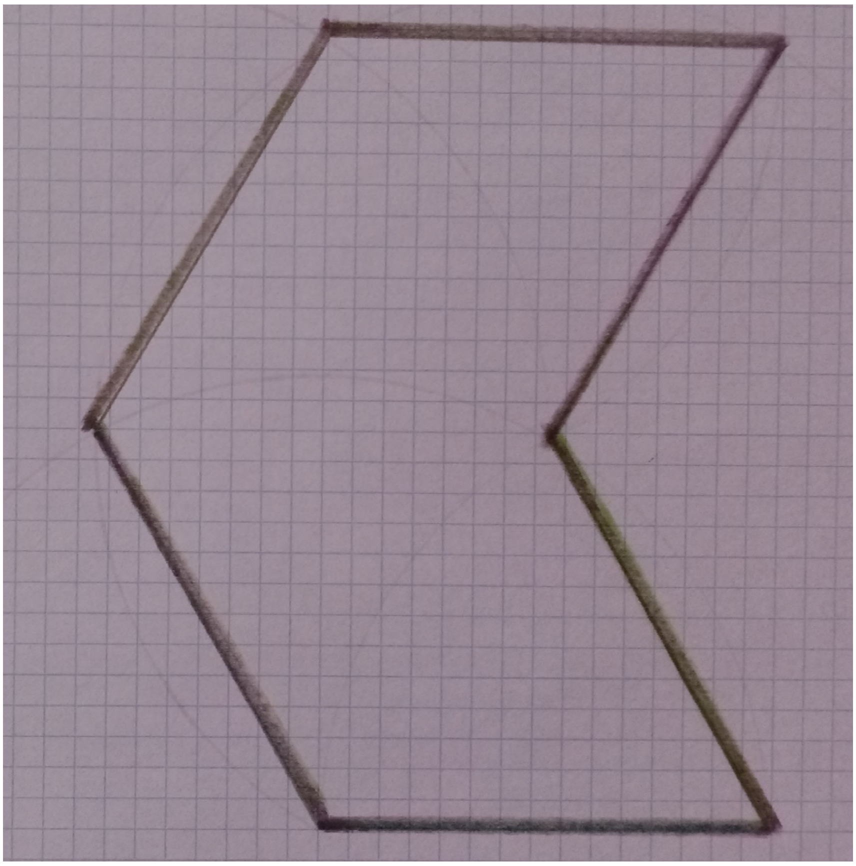
¿Ves algún error que se pueda corregir?

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

GRUPO 6_ Nombre y Apellidos:

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero al dibujo original?

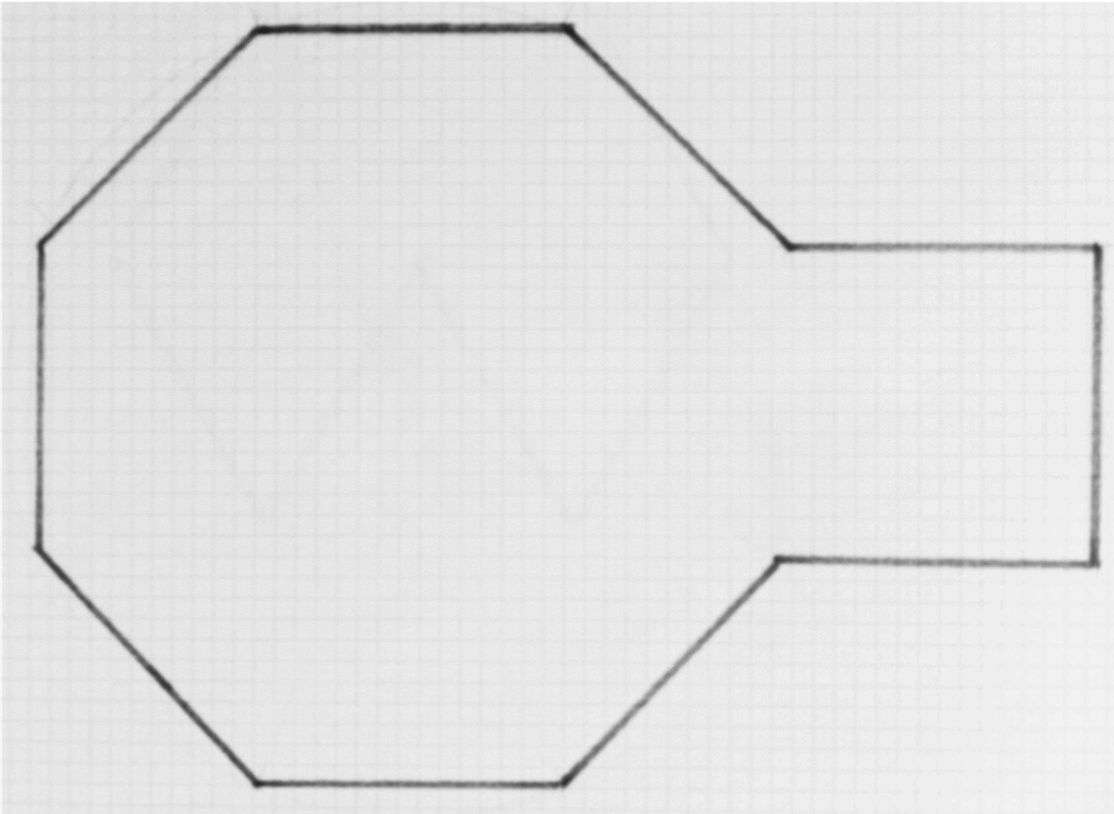
¿Ves algún error que se pueda corregir?

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

GRUPO 7_ Nombre y Apellidos:

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero al dibujo original?

¿Ves algún error que se pueda corregir?

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

9.1.3. Actividad 3: Polígonos estrellados

POLÍGONOS ESTRELLADOS:

Los polígonos estrellados son polígonos regulares cóncavos y se obtienen al unir de forma alterna los vértices de un polígono convexo. Aunque no de todos los polígonos convexos se pueden obtener polígonos estrellados.

RECUERDA: Si la estrella que obtenemos la hemos realizado superponiendo dos o más polígonos no se trata de un polígono estrellado, para que se considere así se debe haber pasado por todos los vértices del polígono convexo antes de cerrarlo.

Para denominar los polígonos estrellados utilizamos la siguiente notación:

En un polígono convexo de 5 vértices, si construimos un polígono estrellado de cinco puntas, saltando un vértice intermedio, es decir cada dos pasos, se denota $\binom{5}{2}$, si lo construimos cada tres pasos se denota $\binom{5}{3}$.

Busca en las siguientes plantillas todos los polígonos estrellados que encuentres y anótalo en la siguiente tabla con su nomenclatura correspondiente:

NÚMERO DE VERTICES	ESTRELLAS QUE HE ENCONTRADO
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Explica qué has descubierto:

¿Puedes hacer polígonos estrellados con todos los polígonos convexos? Si no es posible, explica en qué casos sí se puede y en qué casos no se puede.

Cuando aumenta el número de vértices ¿siempre puedo realizar más polígonos estrellados?

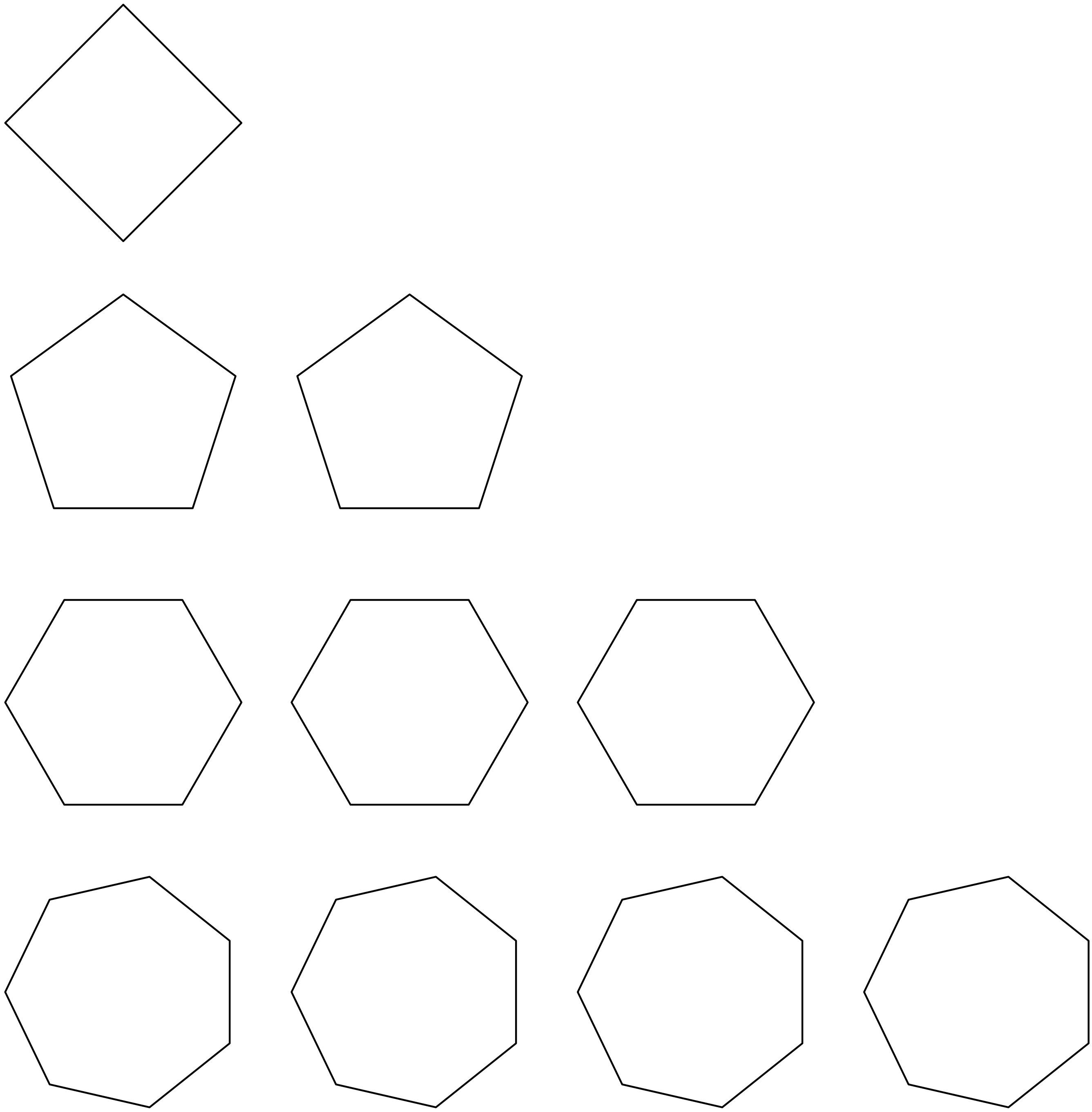
¿Qué números de vértices me permiten dibujar más polígonos estrellados? ¿Qué tienen en común?

4

5

6

7

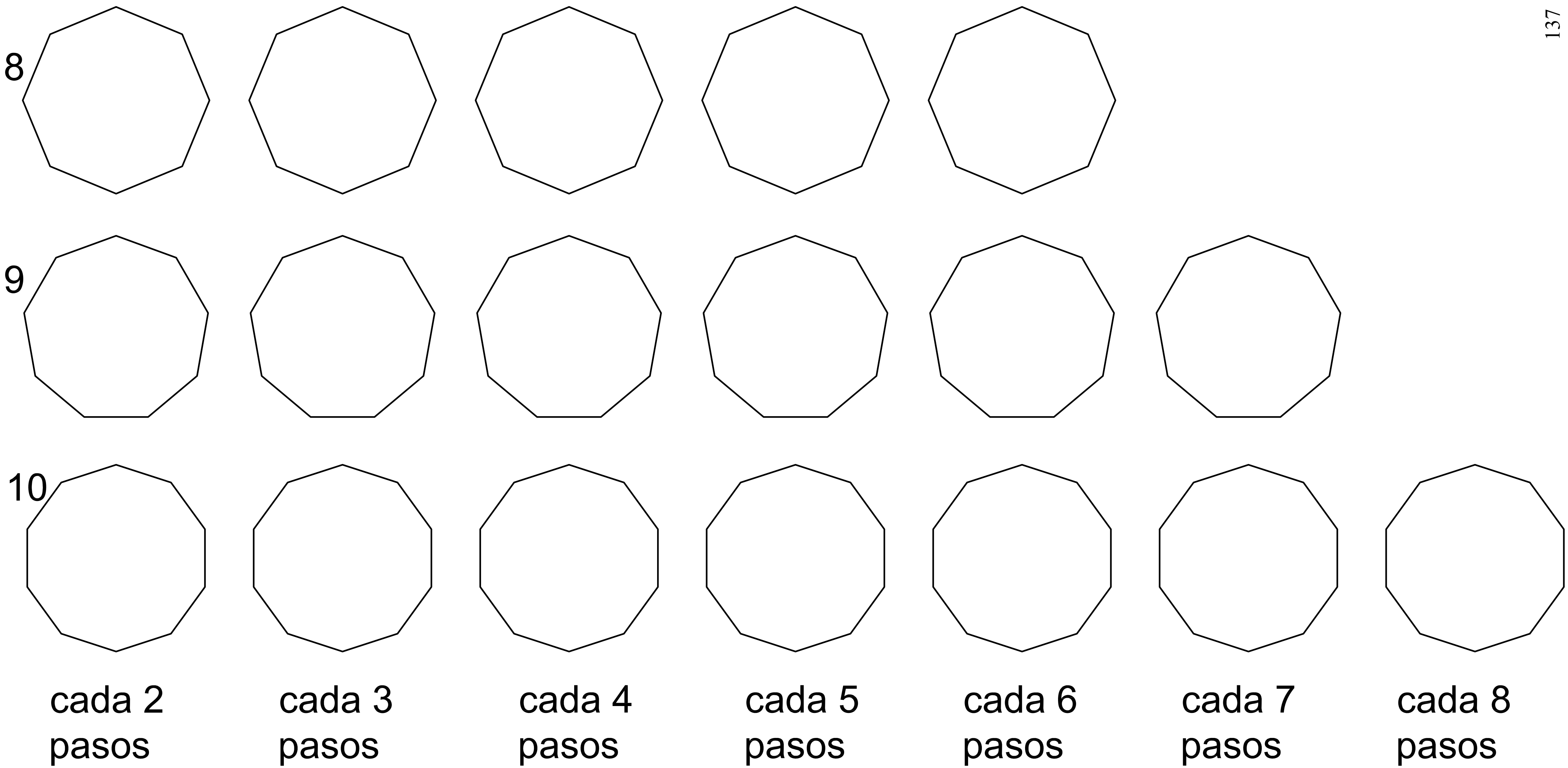


cada 2 pasos

cada 3 pasos

cada 4 pasos

cada 5 pasos


8
9
10
cada 2 pasos
cada 3 pasos
cada 4 pasos
cada 5 pasos
cada 6 pasos
cada 7 pasos
cada 8 pasos

RETO 1:

Trata de encontrar el número de cuerdas que pueden trazarse desde los puntos dados de una circunferencia.

¿Cuántas cuerdas pueden trazarse desde el punto 1?

Si llamamos *"n"* al número de puntos ¿cómo podemos llamar al número de cuerdas que trazo desde el punto 1?

¿Cuántas cuerdas puedo trazar en total utilizando los 9 puntos?

¿Cómo lo has hallado?, ¿Cómo escribirías esa operación si el número de puntos es *"n"*?

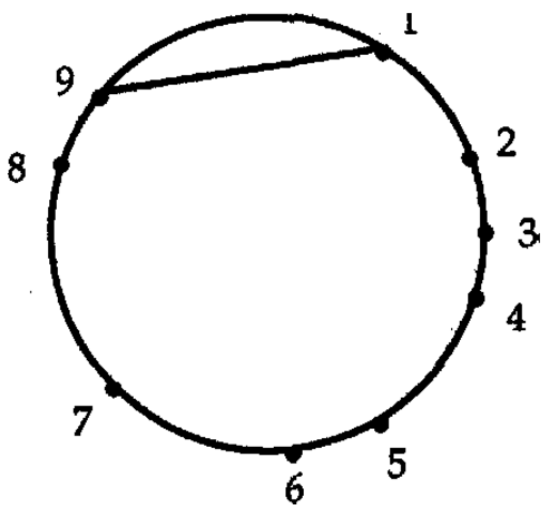


Diagrama para hallar el número de cuerdas de una circunferencia (Corberán, y otros, 1994, pág. 53).

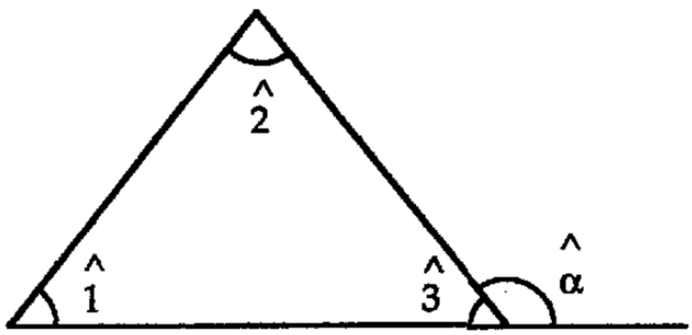
Si hubiera 50 puntos, ¿Cuántas cuerdas podría trazar?

¿Y su hubiera 100 puntos?

RETO 2:

Hallar las relaciones entre los ángulos interiores y exteriores de un triángulo:

Observa la siguiente figura



Teorema del ángulo exterior (Corberán, y otros, 1994, pág. 75)

Sabemos que $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o$ porque …

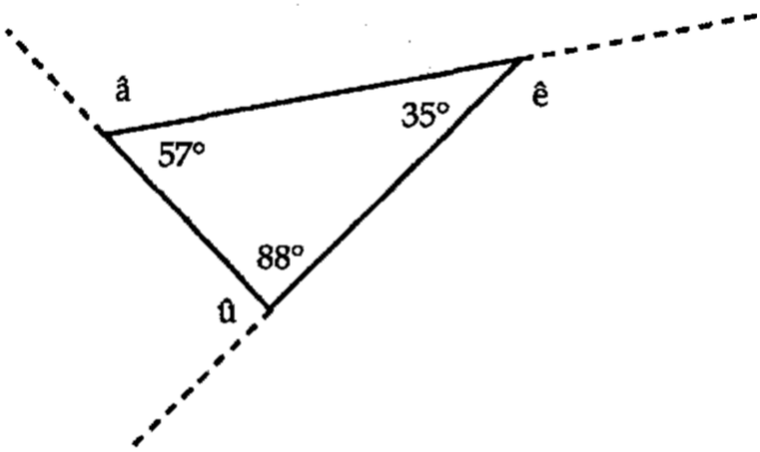
$\angle 3 + \angle \alpha = 180^o$ porque…

Entonces: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^o = \angle 3 + \angle \alpha$

De donde $\angle 1 + \angle 2 = \angle \alpha$ porque …

RETO 3:

¿Sabrías decir cuánto valen los ángulos *â, û* y *ê*, de la siguiente figura sin utilizar el transportador de ángulos?



Cálculo de ángulos (Corberán, y otros, 1994, pág. 70)

RETO 4:

¿Sabrías calcular cuánto mide la suma de los ángulos de un polígono estrellado, es decir la suma de $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma + \angle \delta + \angle 3$?

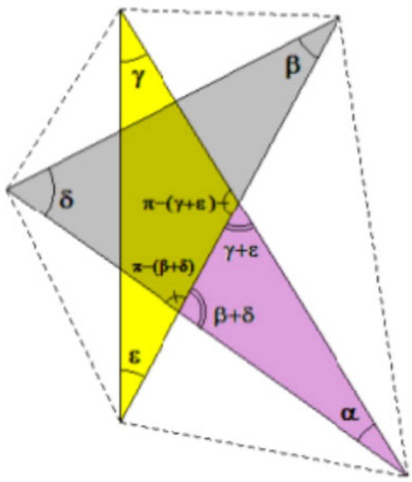
Considera primero el triángulo gris:

Conocemos el valor de δ y de β, ¿cuánto mide el ángulo que nos falta de ese triángulo gris? ¿Cuánto mide el ángulo exterior a ese triángulo gris?

Considera ahora el triángulo amarillo:

Conocemos el valor de ε y de γ ,¿cuánto mide el ángulo que nos falta de ese triángulo amarillo? ¿Cuánto mide el ángulo exterior a ese triángulo amarillo?

¿Cuál es la suma de los ángulos del triángulo rosa?



Suma de los ángulos de un polígono estrellado de cinco puntas (Reyes Iglesias & Fernández Benito, Pentágonos, Construcciones, Mosaicos. Geometría sagrada, 2015, pág. 64)

9.1.4. Actividad 4: Polígonos convexos y Movimientos en el plano

POLÍGONOS CONVEXOS:

RETO 1:

En la figura 1, O es el centro de la circunferencia.

El cuadrilátero OCBA es un rectángulo, donde OA = 5 cm y AP = 1 cm.

¿Cuánto mide CA? Razona la respuesta.

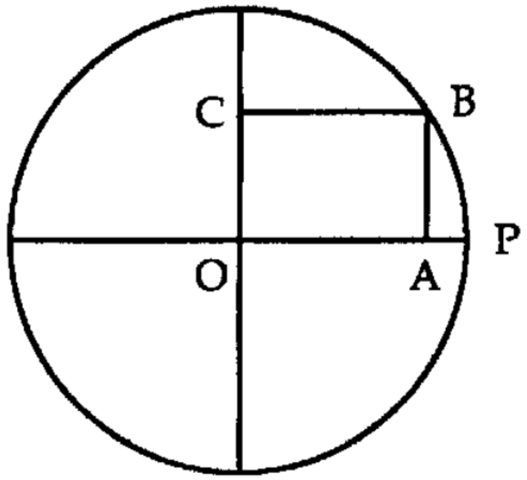


Figura 1 (Corberán, y otros, 1994, pág. 86)

RETO 2:

Dadas dos circunferencias de centros A y B, de distintos radios que se cortan en dos puntos C y D, como vemos en la Figura 2.

Mostrar que el segmento AB es perpendicular al segmento CD.

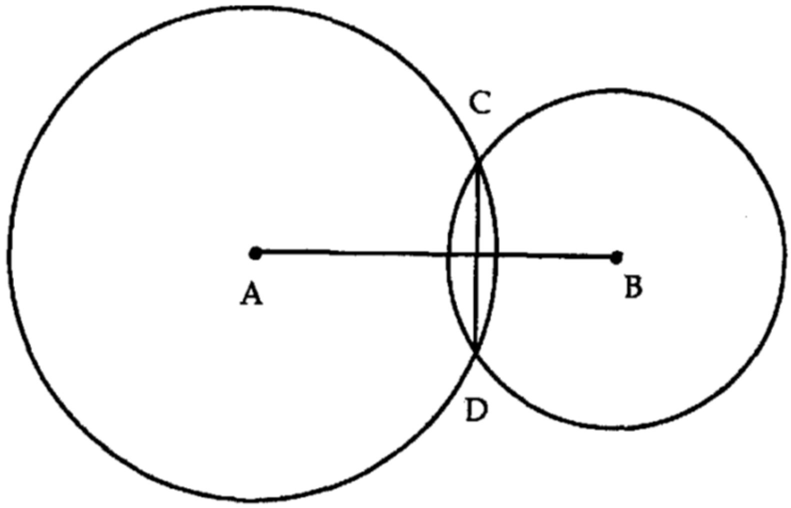


Figura 2 (Corberán, y otros, 1994, pág. 87)

RETO 3:

Diagonales de un polígono:

Dibuja y observa el número de diagonales que hay en los distintos polígonos: cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono.

¿Cuántas diagonales hay en un isodecágono, polígono de 20 lados?

¿Y en un polígono de 50 lados? Razona la respuesta.

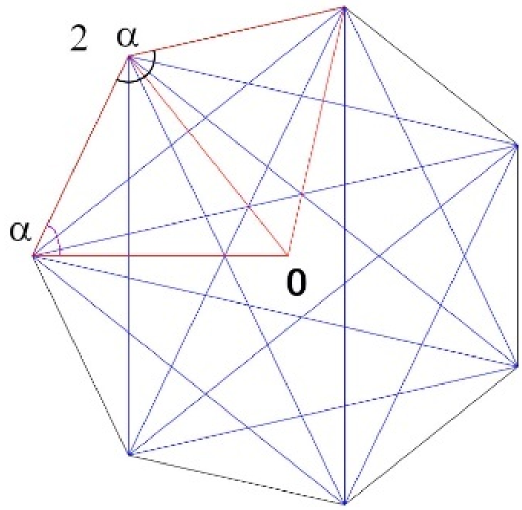
RETO 4:

Si de un polígono regular conocemos que la suma de sus ángulos interiores mide 7200 grados, razona y responde:

¿Cuál será la medida de su ángulo interior?

¿Cuántos lados tiene?

¿Cuántas diagonales tiene ese polígono regular? (Corberán, y otros, 1994, pág. 55)



Ángulo interior de un polígono regular

RETO 5:

Observa la siguiente imagen, sin utilizar el transportador de ángulos ¿Cuántos grados mide el ángulo ∠C en el primer triángulo (Figura 1)? ¿Y en el segundo triángulo (Figura 2? Explica cómo has llegado a esa conclusión.

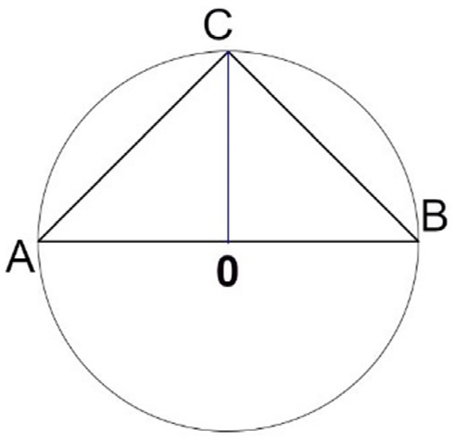


Figura 1

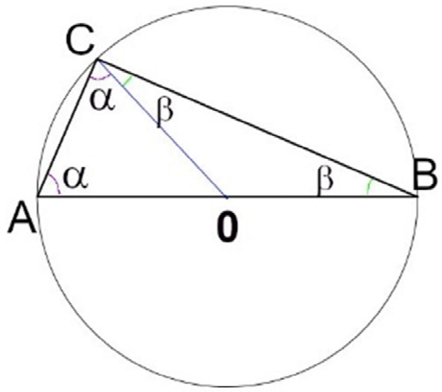


Figura 2

RETO 6:

Suma de ángulos

Explica cómo podemos hallar la suma de los ángulos internos de un polígono irregular como el de la figura 1.

¿Y si el polígono tuviera 10 lados?

¿Y si tuviera 100 lados?

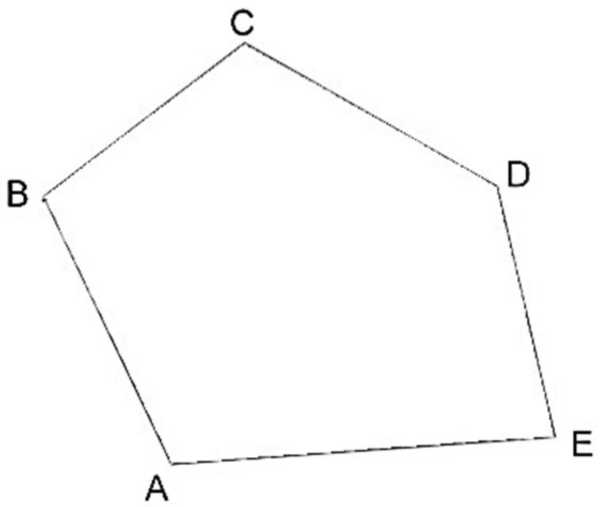


Figura 1

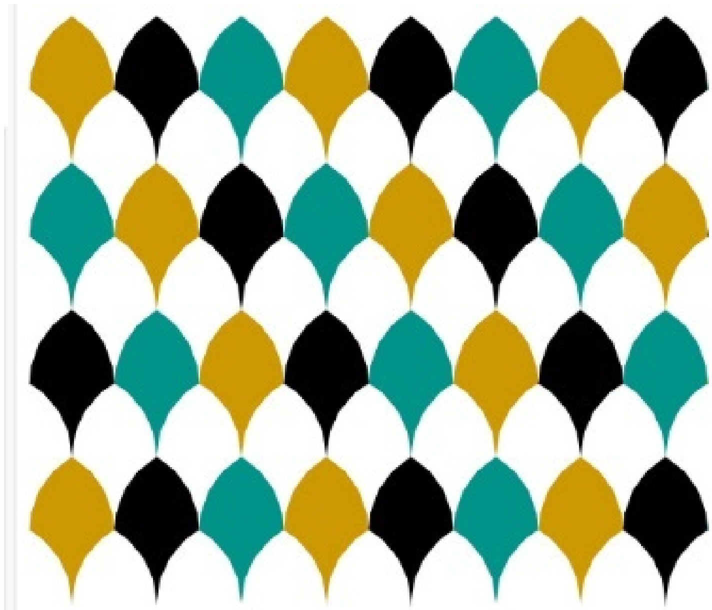
TAREA 8: MOSAICOS POR DEFORMACIÓN Y MOVIMIENTOS EN EL PLANO

Observa el siguiente mosaico, se llama la hoja o pétalo nazarí y se encuentra en el alicatado de la Sala Caliente de la Alhambra de Granada.

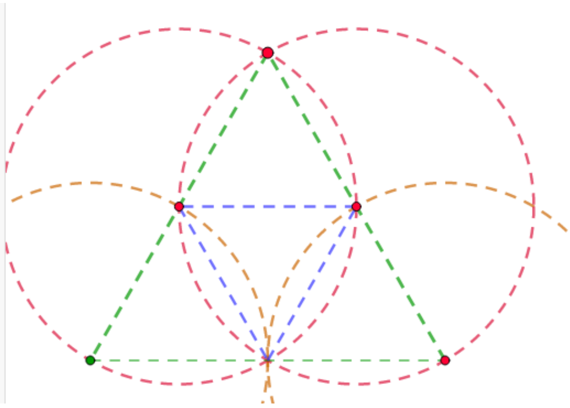
Trata de encontrar el polígono matriz desde donde se obtiene por deformación el pétalo.

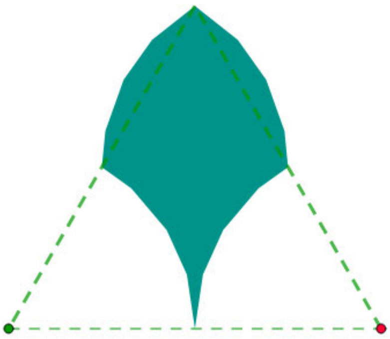
¿Qué movimientos se utilizan para formar este mosaico?

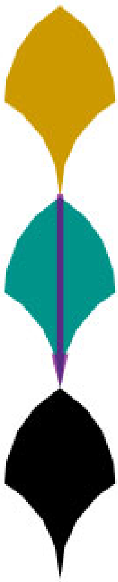
Dibuja los vectores de traslación que hay que utilizar

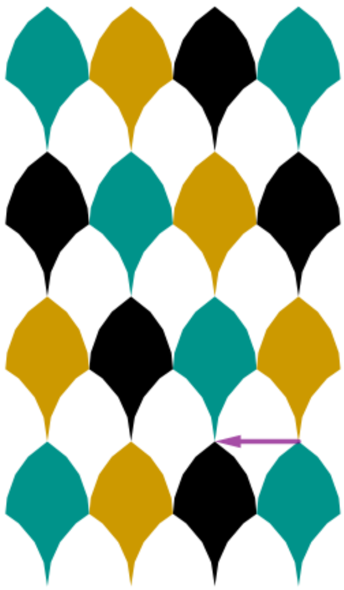


Ver solución en https://www.geogebra.org/m/accseyfs#material/hkawzrws









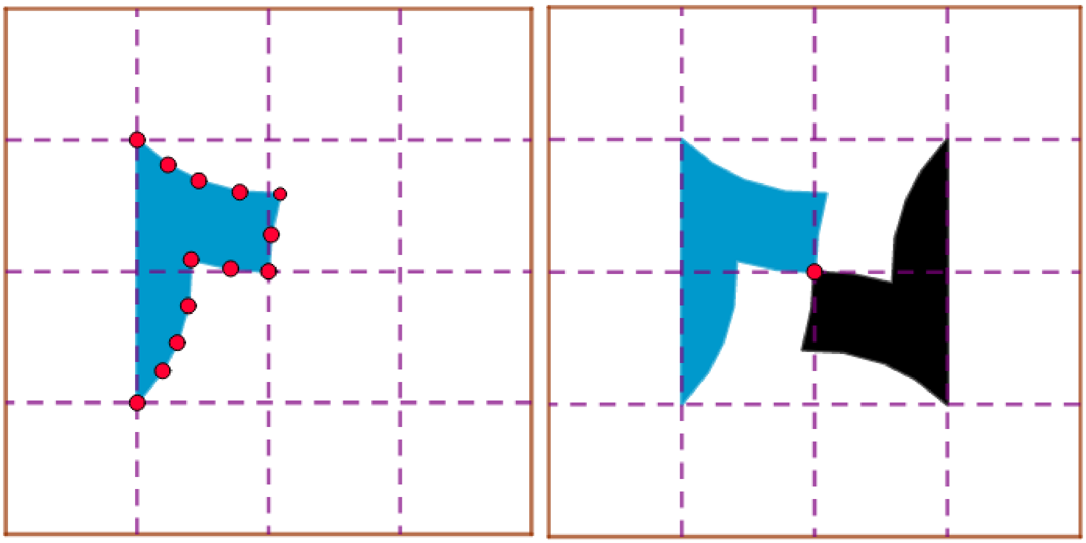
El siguiente mosaico se llama el avión y se encuentra en el patio del cuarto Dorado de la Alhambra de Granada.

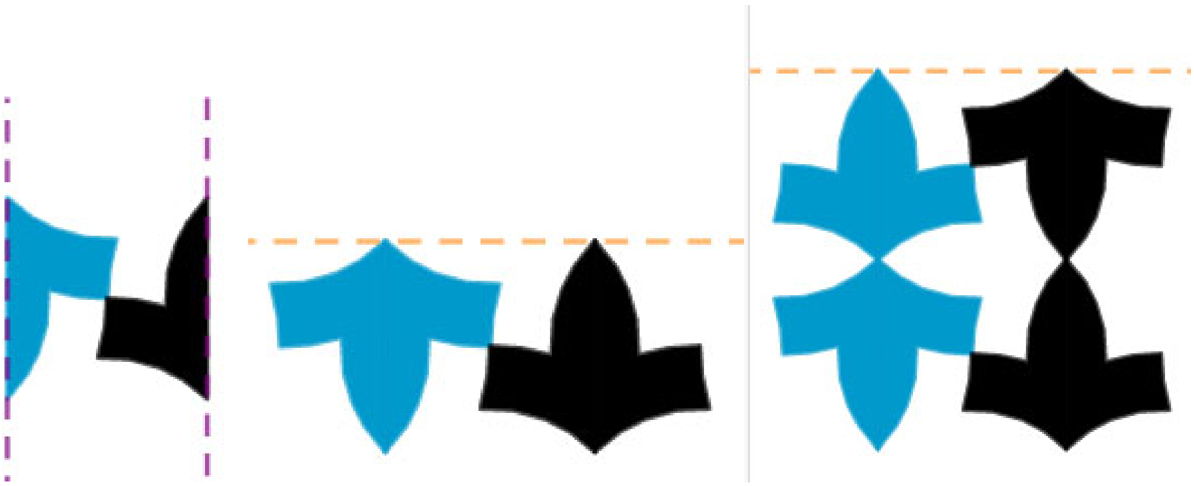
Trata de encontrar el polígono matriz desde donde se obtiene por deformación esta forma de avión.

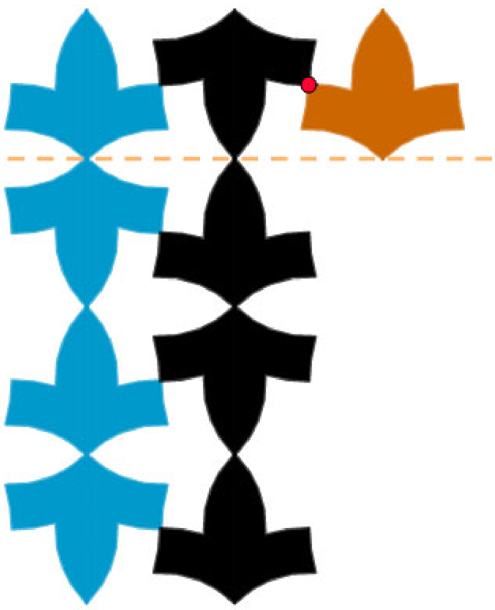
¿Qué movimientos se utilizan para formar este mosaico?

Dibuja los ejes de simetría y los centros de giro que hay que utilizar.

Ver solución en https://www.geogebra.org/m/accseyfs#material/tjgbhj7x





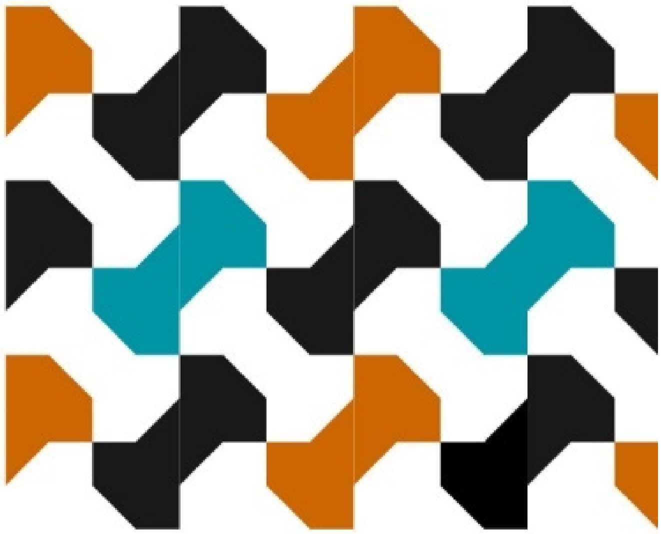


El siguiente mosaico se llama el “Hueso” y se encuentra en la Sala de Comares de la Alhambra de Granada.

Trata de encontrar el polígono matriz desde donde se obtiene por deformación esta forma de hueso.

¿Qué movimientos se utilizan para formar este mosaico?

Dibuja los ejes de simetría, los centros y ángulos de giro y los vectores de traslación que hay que utilizar.



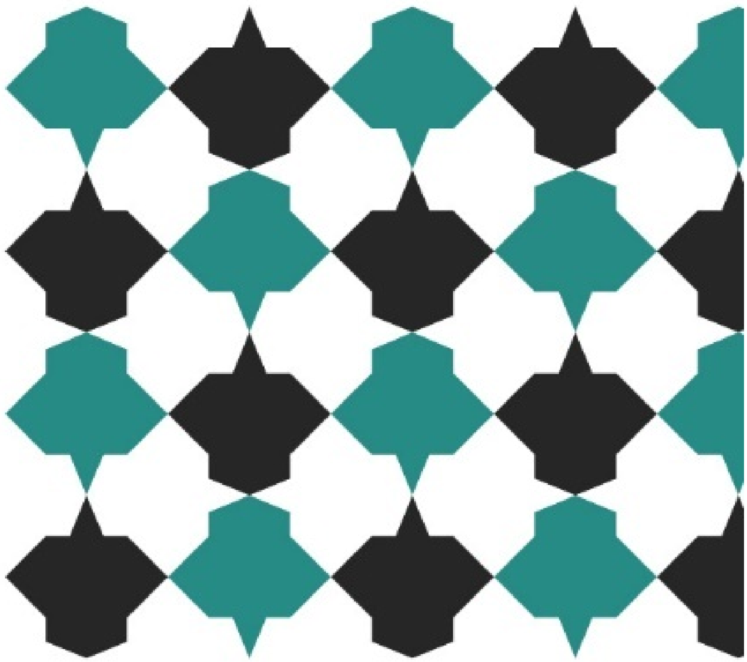
Ver solución en https://www.geogebra.org/m/accseyfs#material/ygp2qeme

El siguiente mosaico se llama “el pez volador” y se encuentra en la alcoba del Salón de Comares en la Alhambra de Granada.

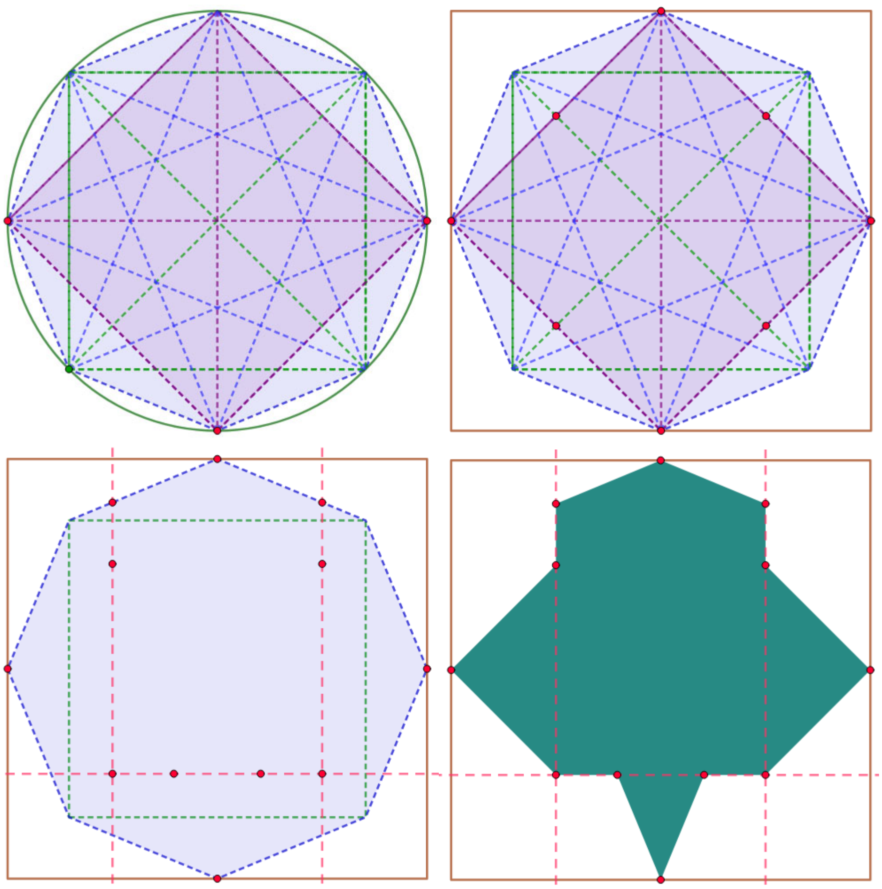
Trata de encontrar el polígono matriz desde donde se obtiene por deformación esta forma de pez volador.

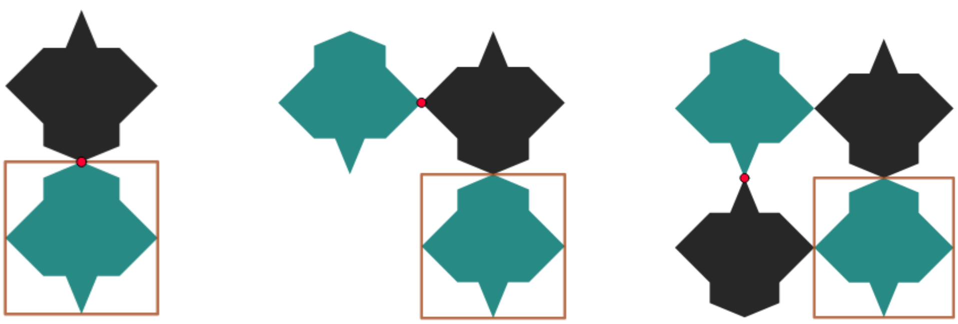
¿Qué movimientos se utilizan para formar este mosaico?

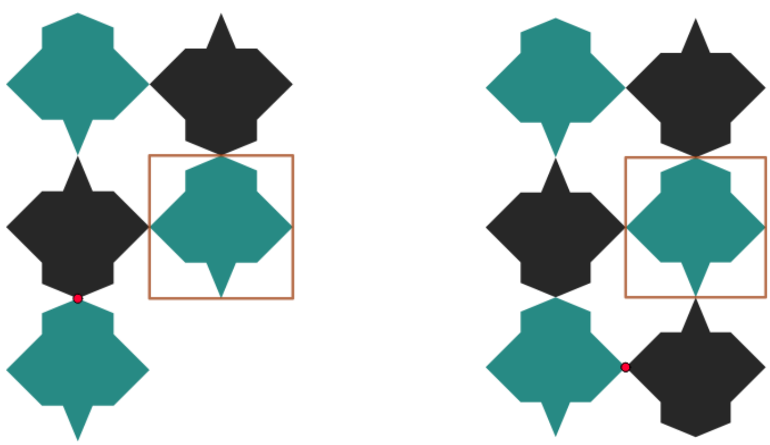
Dibuja los centros y ángulos de giro que hay que utilizar.



Ver solución en https://www.geogebra.org/m/accseyfs#material/yagyud3z





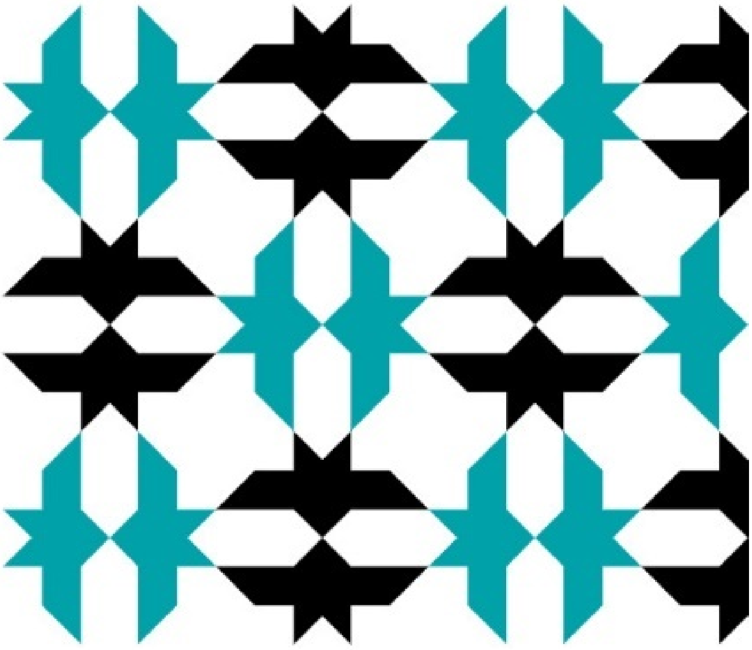


El siguiente mosaico se llama “el murciélago” y se encuentra también en una de las alcobas del Salón de Comares en la Alhambra de Granada.

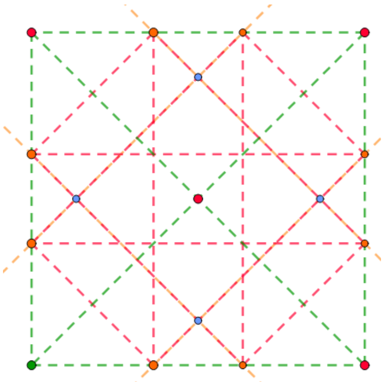
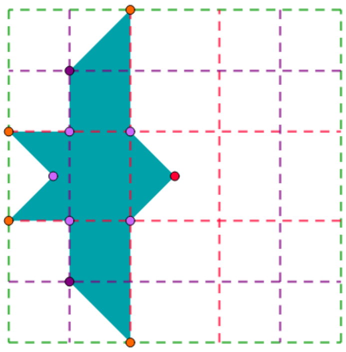
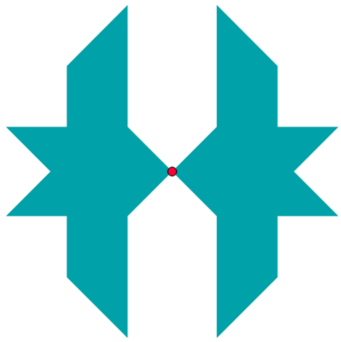
Trata de encontrar el polígono matriz desde donde se obtiene por deformación esta forma de murciélago.

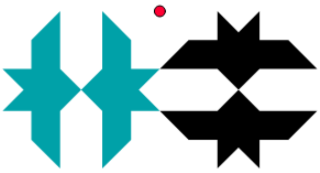
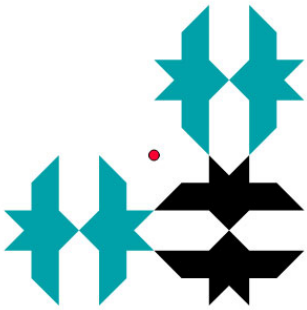
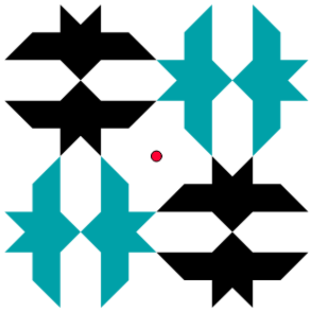
¿Qué movimientos se utilizan para formar este mosaico?

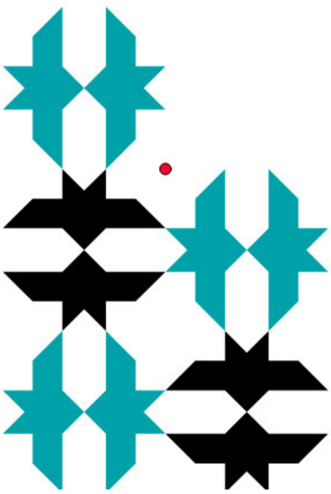
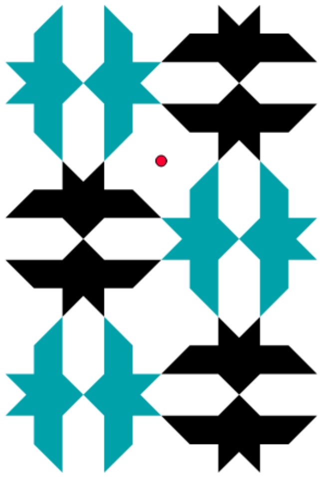
Dibuja los centros y ángulos de giro que hay que utilizar.



Ver solución en https://www.geogebra.org/m/accseyfs#material/w7sypf5c

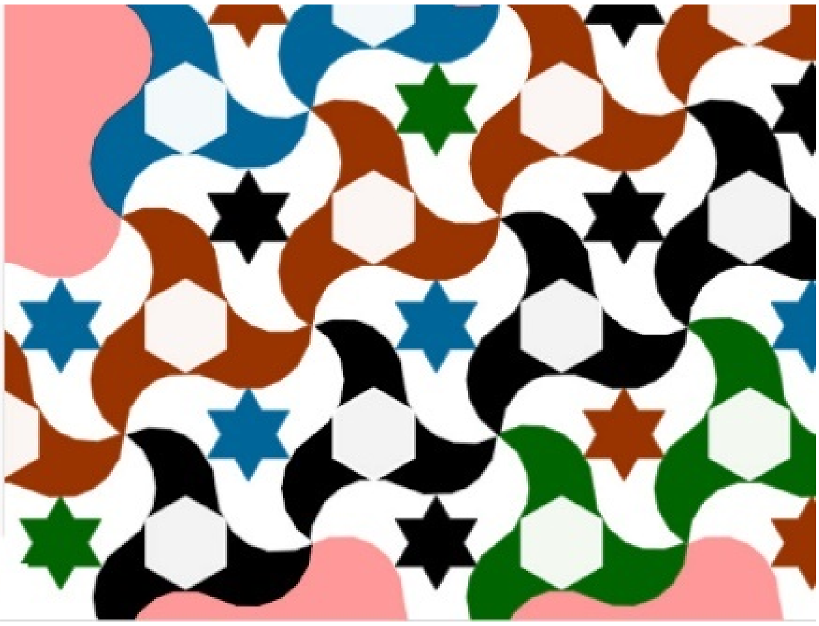



El siguiente mosaico se llama “la pajarita” y se encuentra en los alicatados del pórtico Norte de la Alhambra de Granada.

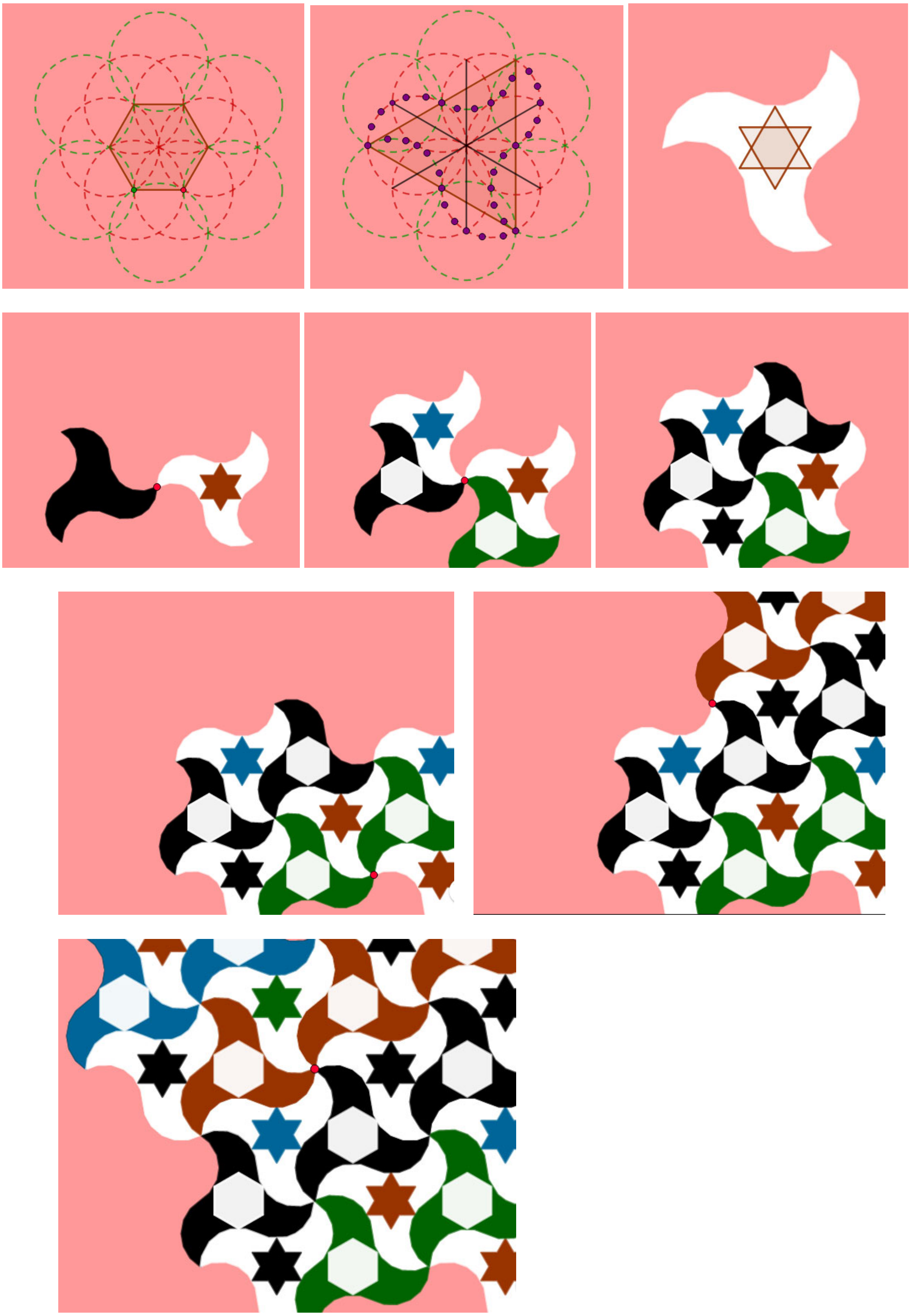
Trata de encontrar el polígono matriz desde donde se obtiene por deformación esta forma de pajarita.

¿Qué movimientos se utilizan para formar este mosaico?

Dibuja los centros y ángulos de giro que hay que utilizar.



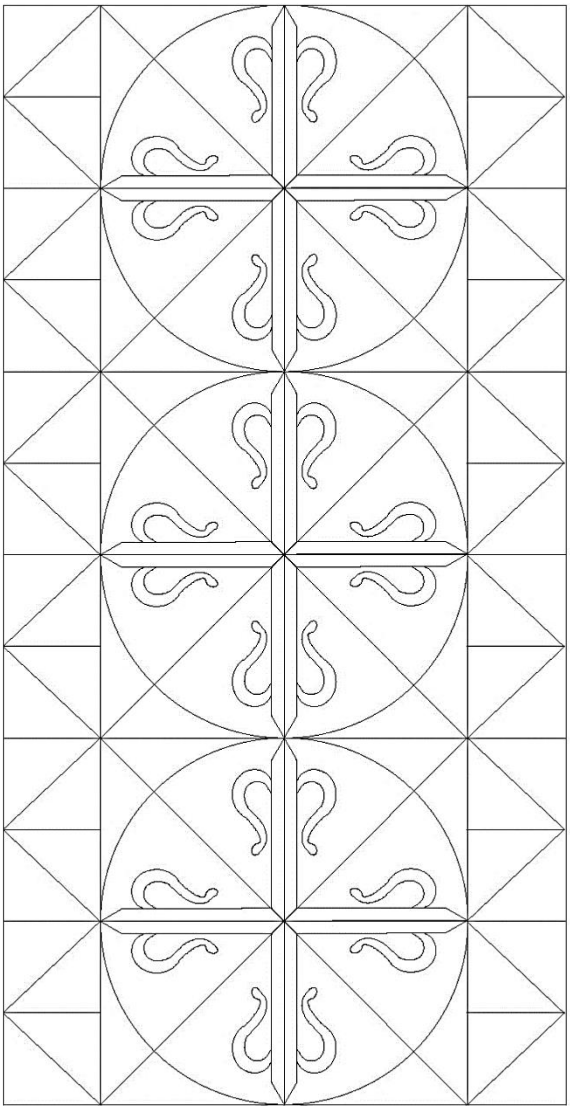
Ver solución en https://www.geogebra.org/m/accseyfs#material/dygrxf2d

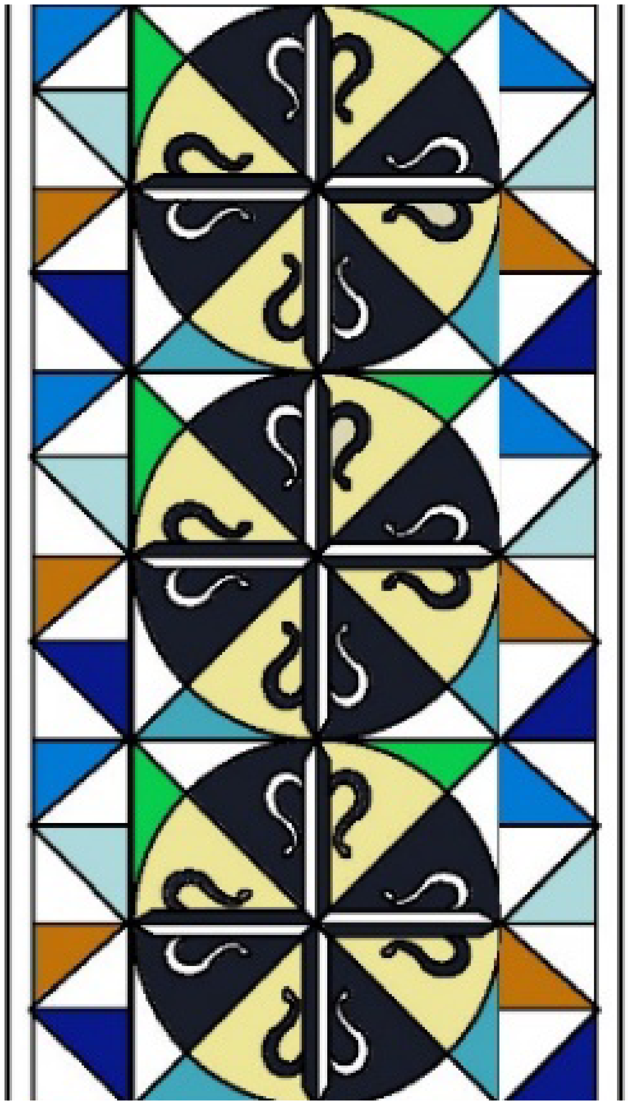


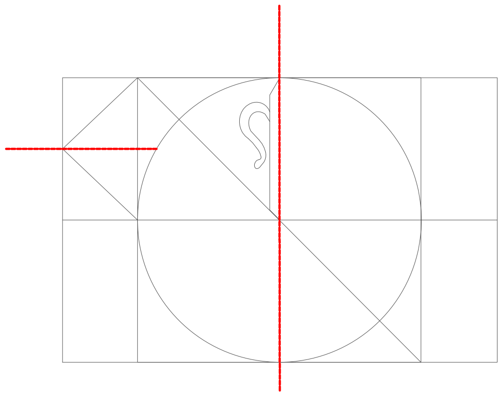
La siguiente figura corresponde con el diseño de las vidrieras de la iglesia de San Pablo de Valladolid.

Descubre cómo se ha trazado y señala los ejes de simetría axial, centros de simetría central o centros y ángulos de giro y los vectores de traslación utilizados para construir este diseño.

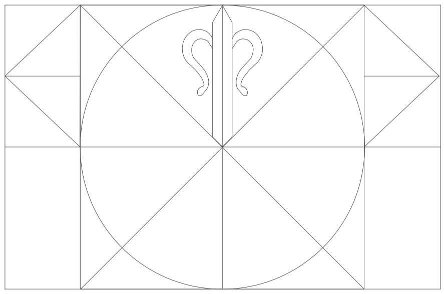
Observa que los colores no siguen una simetría axial, ¿qué otro movimiento se ha utilizado? Señálalo en el dibujo.

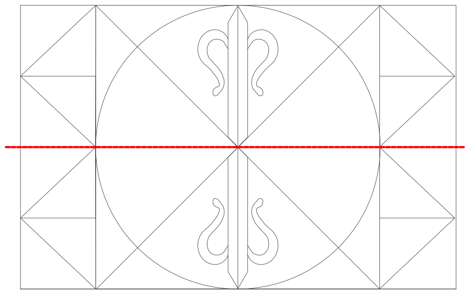




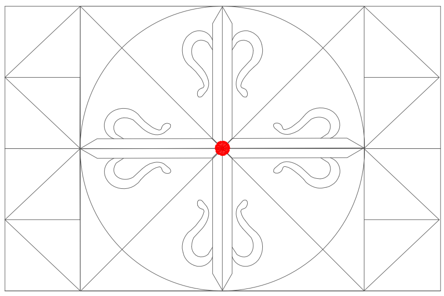


simetría axial

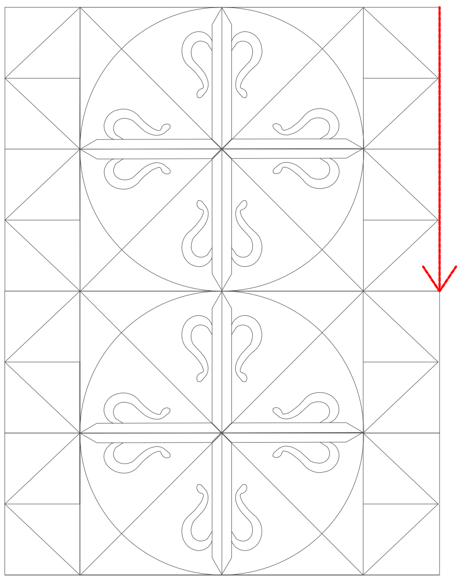




simetría axial



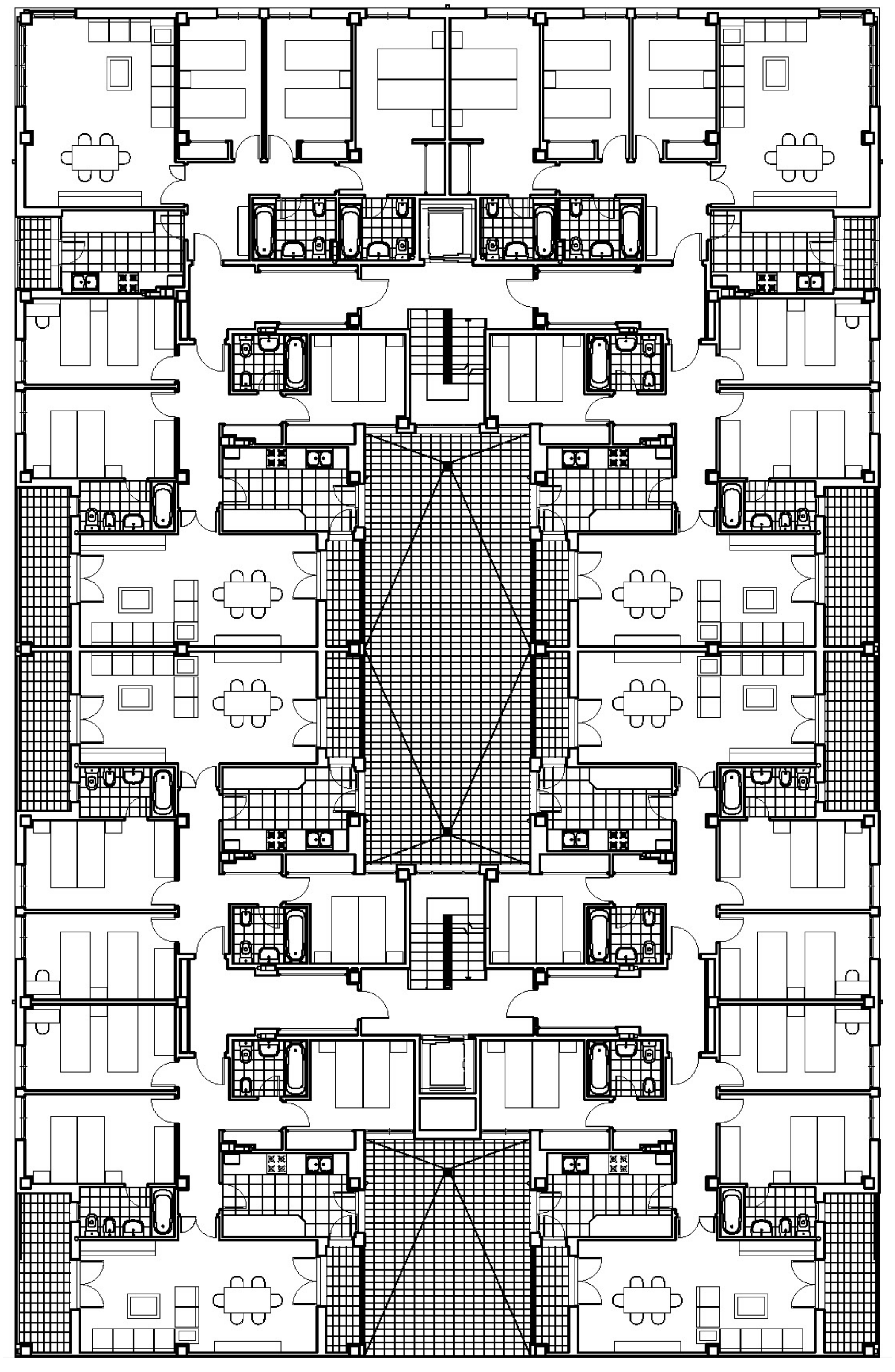
simetría central

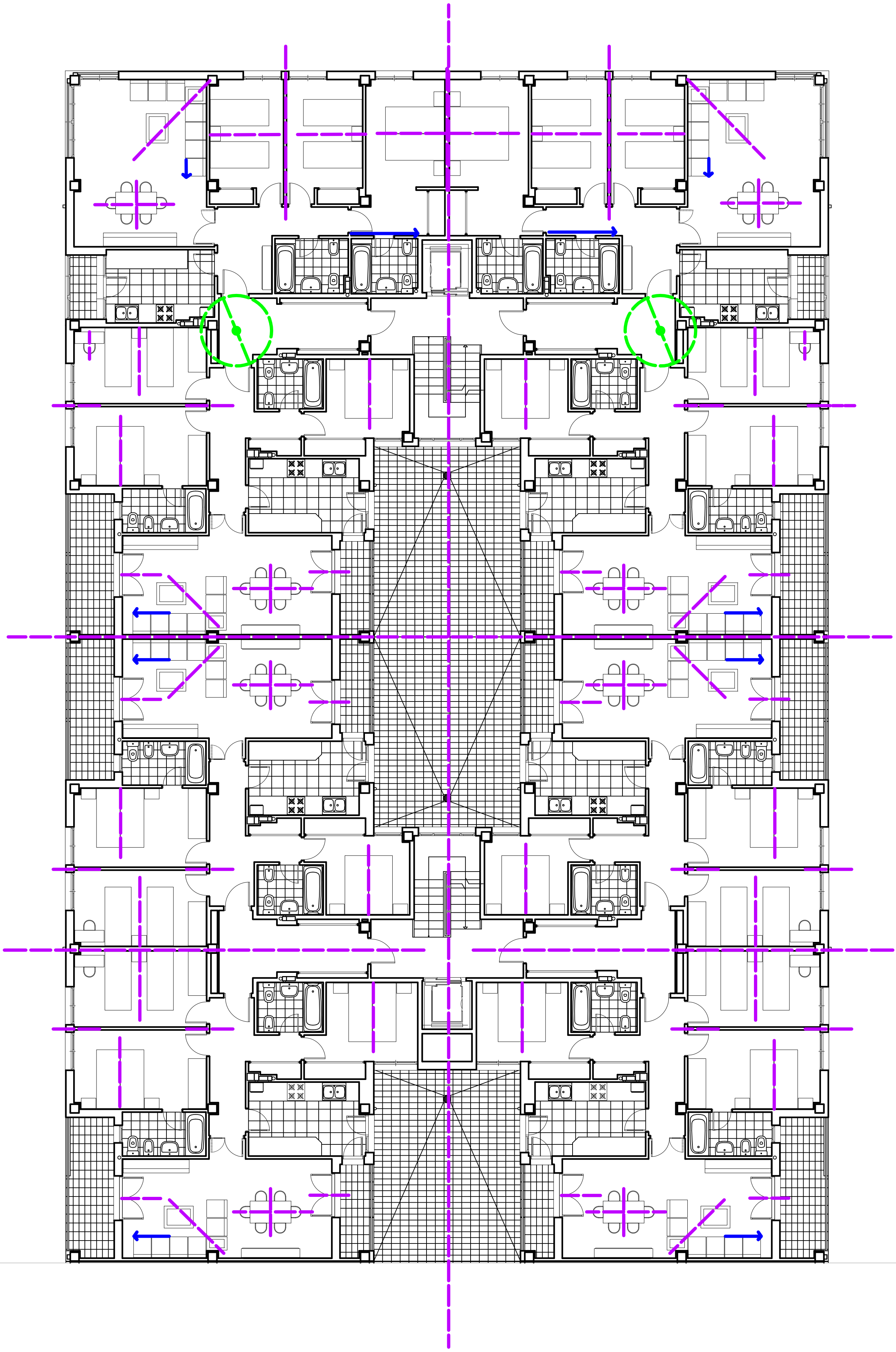


traslación

La siguiente figura corresponde con la planta de distribución de un edificio de viviendas en Valladolid.

Para dibujarlo se han trazado las mínimas líneas posibles. Toda la ejecución se realiza utilizando los movimientos en el plano que ya conoces. Trata de señalar todas isometrías que encuentres en el plano: ejes de simetría axial, centros y ángulos de giro, centros de simetría central y vectores de traslación.

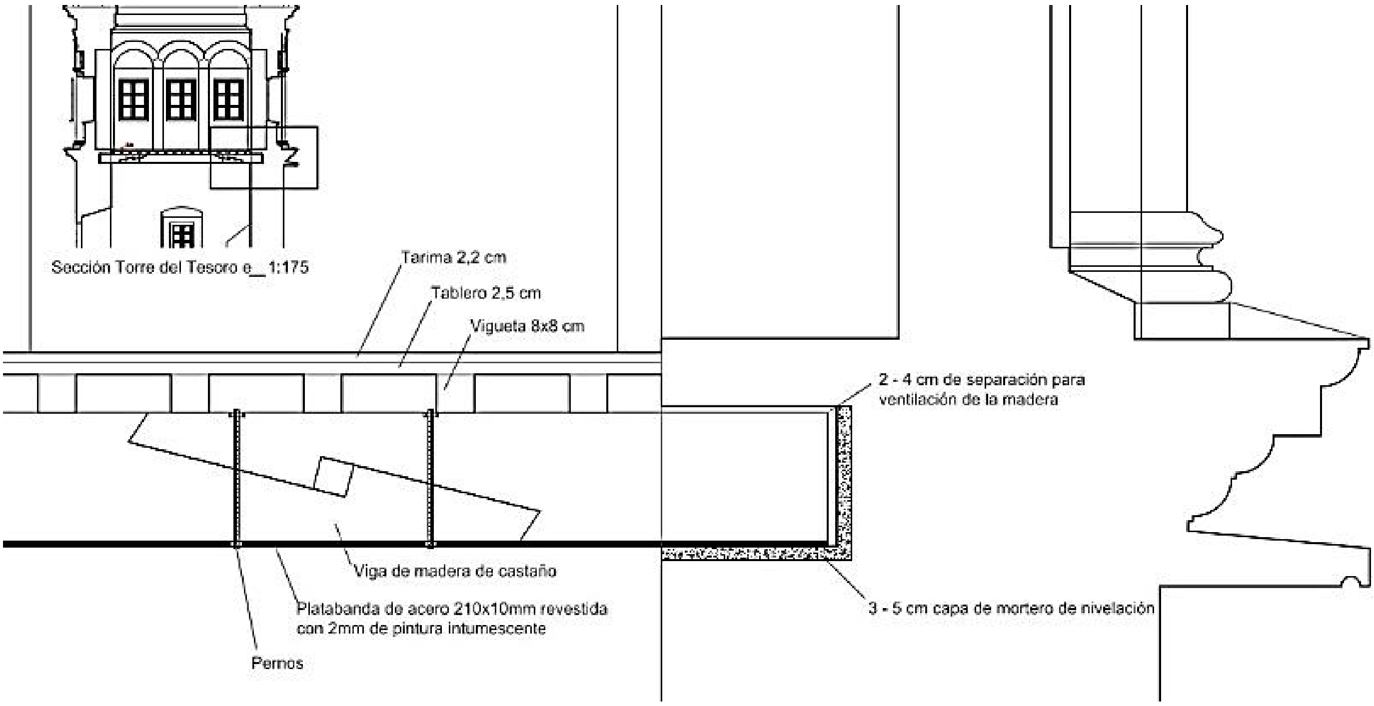




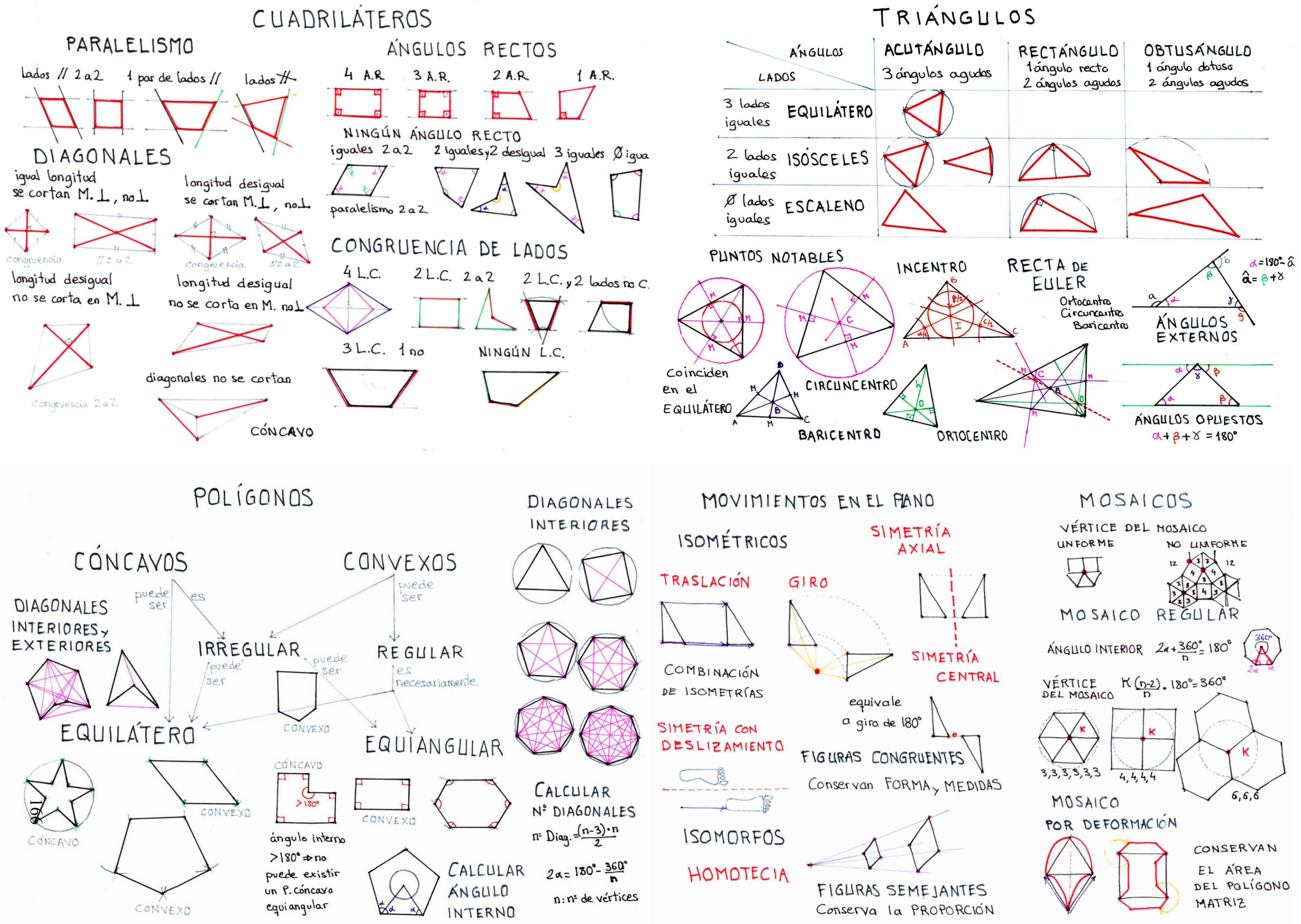
La siguiente figura corresponde con un detalle de la sección del forjado de la Catedral de Santiago de Compostela.

¿Qué tipo de movimiento en el plano se ha utilizado para realizar esta representación?

¿Con qué propósito se utiliza este comando? ¿Qué propiedades obtenemos?



9.1.5. Actividad 5: *Visual Thinking*


CUADRILÁTEROS
PARALELISMO
lados // 2 a 2
1 par de lados //
lados ∦
DIAGONALES
igual longitud se cortan M. ⊥, no ⊥
longitud desigual se cortan M. ⊥, no ⊥
congruencia
// 2 a 2
longitud desigual no se corta en M. ⊥
longitud desigual no se corta en M. no ⊥
congruencia 2 a 2
diagonales no se cortan
CÓNCAVO
ÁNGULOS RECTOS
4 A.R.
3 A.R.
2 A.R.
1 A.R.
NINGÚN ÁNGULO RECTO
iguales 2 a 2
2 iguales y 2 desigual
3 iguales
Ø igua
paralelismo 2 a 2
CONGRUENCIA DE LADOS
4 L.C.
2 L.C. 2 a 2
2 L.C. y 2 lados no C.
3 L.C. 1 no
NINGÚN L.C.
TRIÁNGULOS
ÁNGULOS
LADOS
ACUTÁNGULO
3 ángulos agudos
RECTÁNGULO
1 ángulo recto
2 ángulos agudos
OBTUSÁNGULO
1 ángulo obtuso
2 ángulos agudos
3 lados iguales
EQUILÁTERO
2 lados iguales
ISÓSCELES
Ø lados iguales
ESCALENO
PUNTOS NOTABLES
Coinciden en el EQUILÁTERO
CIRCUNCENTRO
BARICENTRO
INCENTRO
ORTOCENTRO
RECTA DE EULER
Ortocentro
Circuncentro
Baricentro
ÁNGULOS EXTERNOS
α = 180° - â
â = β + γ
ÁNGULOS OPUESTOS
α + β + γ = 180°
POLÍGONOS
CÓNCAVOS
CONVEXOS
puede ser
es
puede ser
DIAGONALES INTERIORES y EXTERIORES
IRREGULAR
REGULAR
puede ser
puede ser
es necesariamente
EQUILÁTERO
EQUIANGULAR
CONVEXO
CÓNCAVO
> 180°
ángulo interno > 180° ⇏ no puede existir un P. cóncavo equiangular
DIAGONALES INTERIORES
CALCULAR Nº DIAGONALES
nº Diag. = (n-3)·n / 2
CALCULAR ÁNGULO INTERNO
2α = 180° - 360° / n
n: nº de vértices
MOVIMIENTOS EN EL PLANO
ISOMÉTRICOS
TRASLACIÓN
GIRO
SIMETRÍA AXIAL
SIMETRÍA CENTRAL
equivale a giro de 180°
COMBINACIÓN DE ISOMETRÍAS
SIMETRÍA CON DESLIZAMIENTO
FIGURAS CONGRUENTES
Conservan FORMA y MEDIDAS
ISOMORFOS
HOMOTECIA
FIGURAS SEMEJANTES
Conserva la PROPORCIÓN
MOSAICOS
VÉRTICE DEL MOSAICO
UNIFORME
NO UNIFORME
MOSAICO REGULAR
ÁNGULO INTERIOR 2α + 360°/n = 180°
VÉRTICE DEL MOSAICO K (n-2)/n · 180° = 360°
3,3,3,3,3,3
4,4,4,4
6,6,6
MOSAICO POR DEFORMACIÓN
CONSERVAN EL ÁREA DEL POLÍGONO MATRIZ

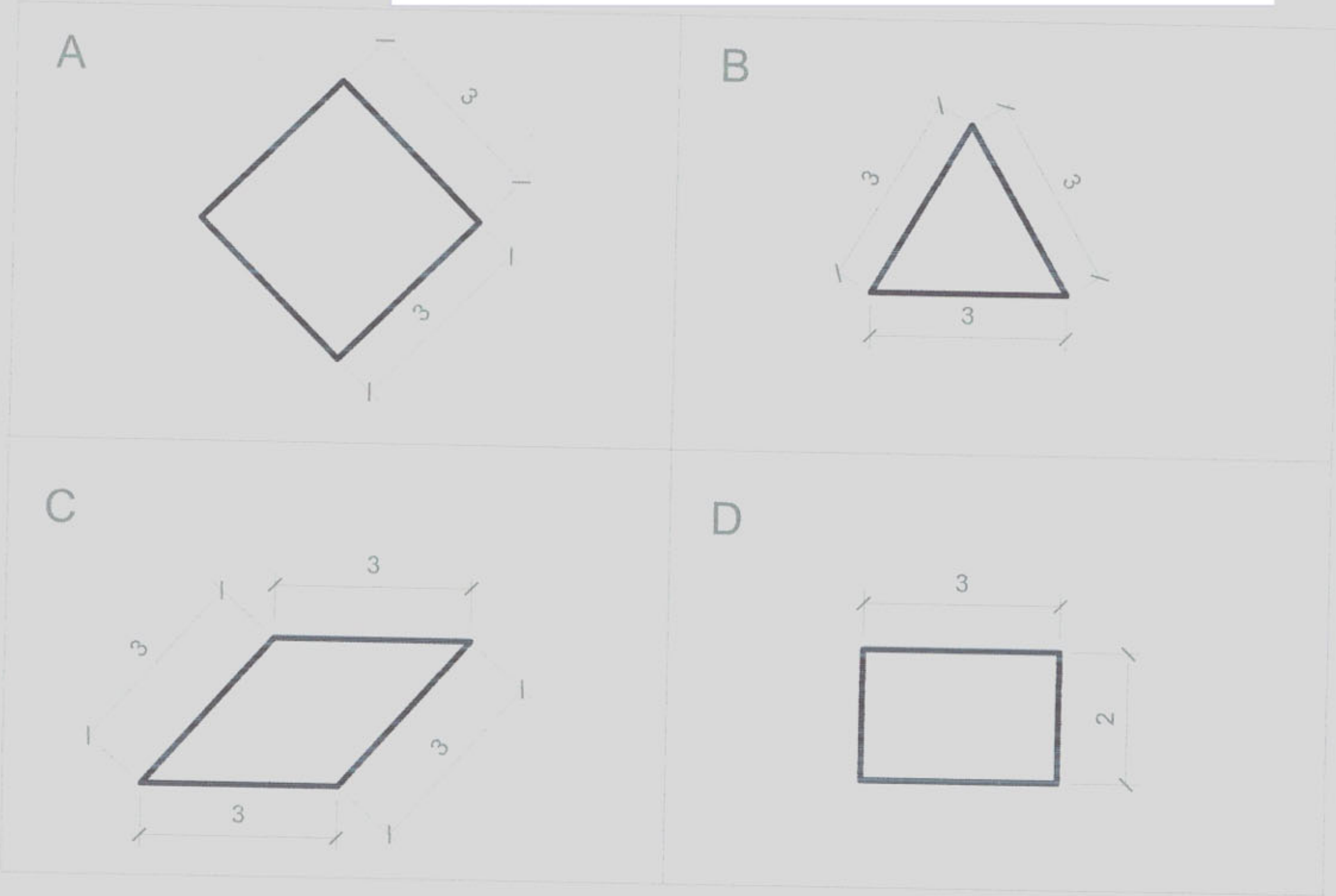
9.2. TRABAJOS DE LOS ALUMNOS EN LAS ACTIVIDADES IMPLANTADAS EN EL AULA DURANTE EL MÓDULO DE PRÁCTICAS.

9.2.1. Actividad 1: WODB *(Wich One Doesn't Belong)*

9.2.2. Actividad 2: Dictado Geométrico

9.2.1. Actividad 1: WODB *(Wich One Doesn't Belong)*

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo A
Corrige: Grupo B



La figura A es el intruso porque
es la unica que no esta apoyada en la base

A: "es la única que no está apoyada en la base"

La figura B es el intruso porque
es el unico de tres lados

A: "es el único de tres lados"

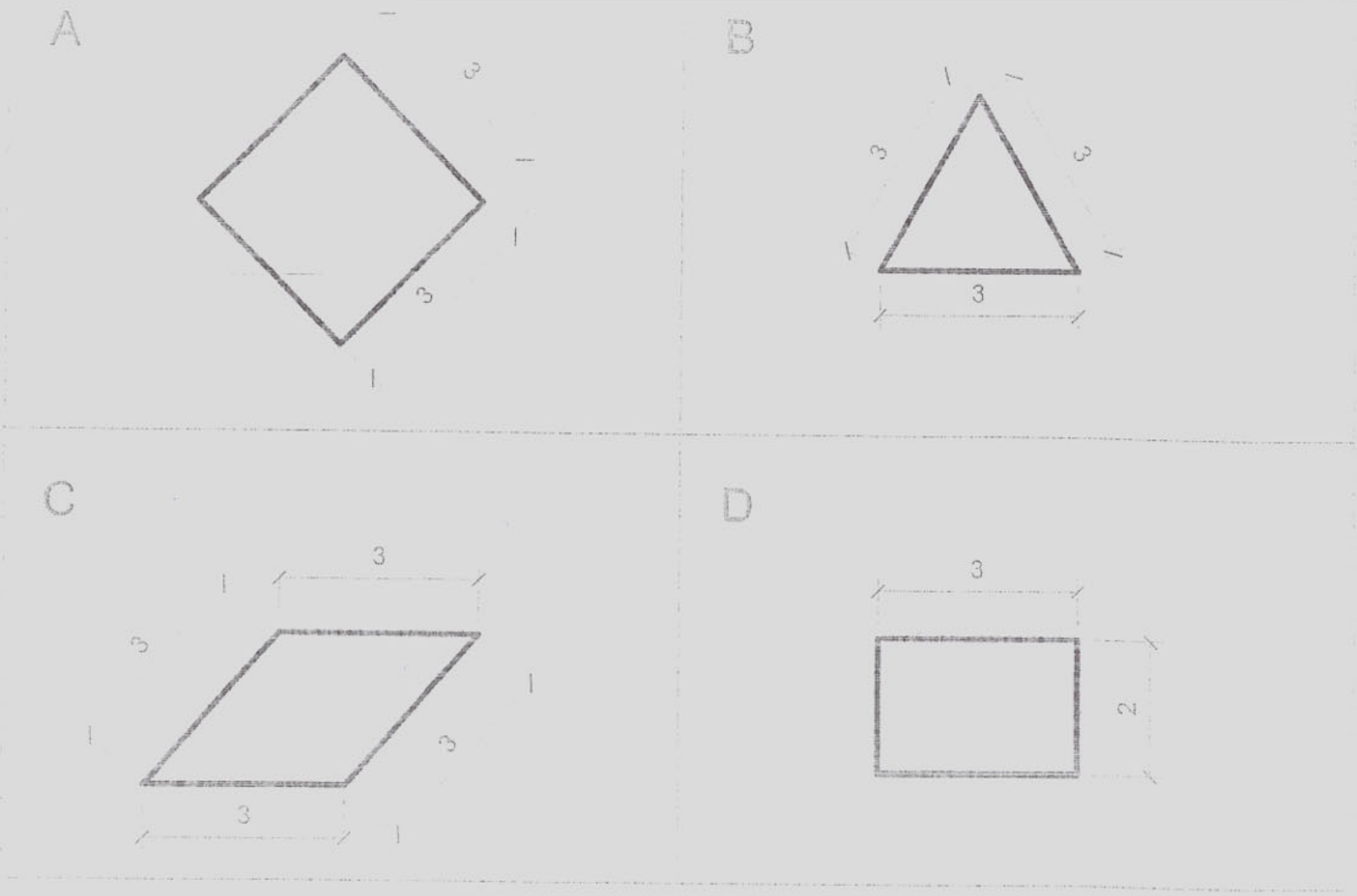
La figura C es el intruso porque
~~tiene mayor numero de grados en sus angulos~~
es el unico que no todos sus angulos son iguales

A: "tiene mayor número de grados en sus ángulos"
"es el único que no todos sus ángulos son iguales"

La figura D es el intruso porque
tiene diferente medida de lados

A: "tiene diferente medida de lados"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo D
Corrige: Grupo E



La figura A es el intruso porque

Está apollado en un vértice
APOYADO

D: "Está apollado en un vértice"
E: "Apoyado"

La figura B es el intruso porque

No es un cuadrilátero

D: "No es un cuadrilátero"

La figura C es el intruso porque

ANGULOS
No tiene todos los ~~lados~~ iguales

Si todos miden 3 ??

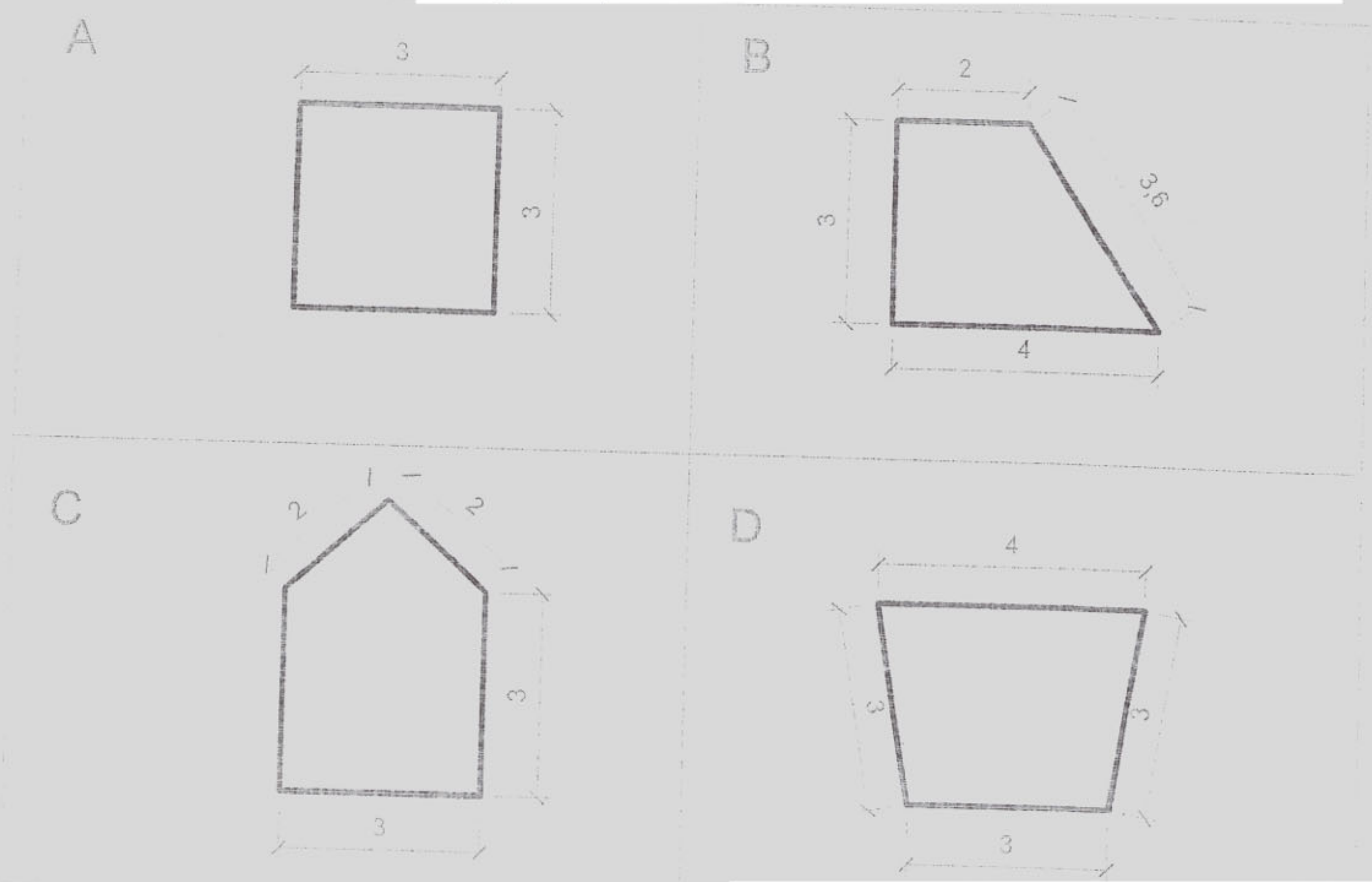
D: "No tiene todos los lados iguales"
E: "Si todos miden 3??" "ÁNGULOS"

La figura D es el intruso porque

Porque sus lados no miden lo mismo

D: "Porque sus lados no miden lo mismo"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo F
Corrige: Grupo C



F:"Tiene todos los ángulos rectos"

C: "Porque es el único que todos sus lados son iguales. Porque es el único que tiene todos sus ángulos iguales"

La figura A es el intruso porque

Tiene ~~los~~ ángulos sectos todos. / Porque es el único que todos sus lados son iguales. Porque es el único que tiene todos sus ángulos iguales

La figura B es el intruso porque

Por que tiene ~~a~~ un solo ángulo agudo. / No, porque los demás también tienen ángulos agudos

F: "Porque tiene un solo ángulo agudo"

C: "No, porque los demás también tienen ángulos agudos"

La figura C es el intruso porque

Porque tiene más lados / Es la figura más alta

F: "Porque tiene más lados"

C: "Es la figura más alta"

La figura D es el intruso porque

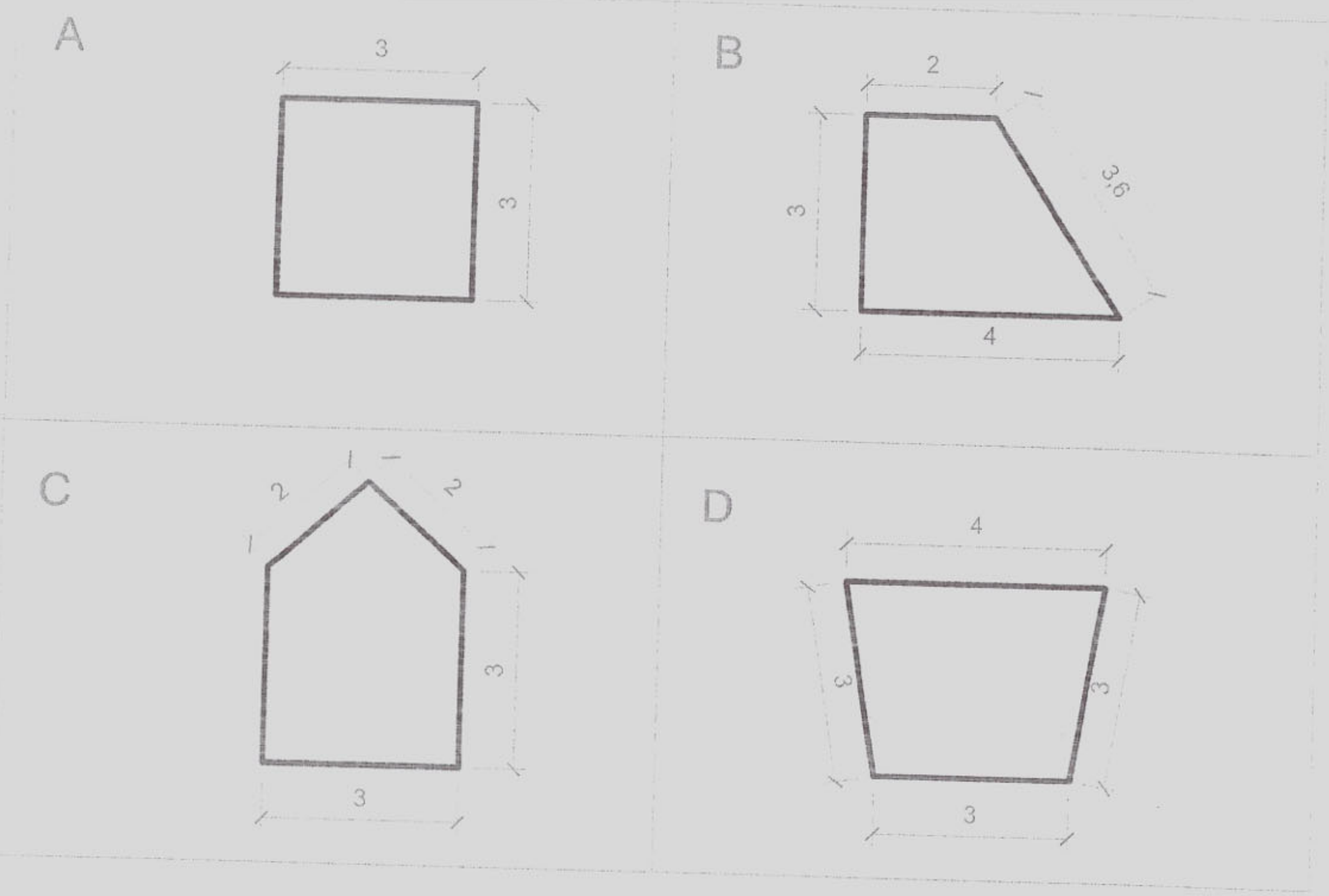
F: "Porque está boca abajo"

Por que esta ~~esta~~ boca abajo.

No tiene porque ~~haber~~ estar boca abajo
Es intruso porque no tiene ningún ángulo recto

C: "No tiene por qué estar boca abajo. Es intruso porque no tiene ningún ángulo recto"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo E
Corrige: Grupo G



La figura A es el intruso porque Tiene Todos sus lados iguales.

E: "Tiene todos sus lados iguales"

La figura B es el intruso porque es el único lado ~~a~~ que Tiene decimales. Cada lado Tiene una medida diferente.

E: "es el único lado que tiene decimales"
G: "Cada lado tiene una medida diferente"

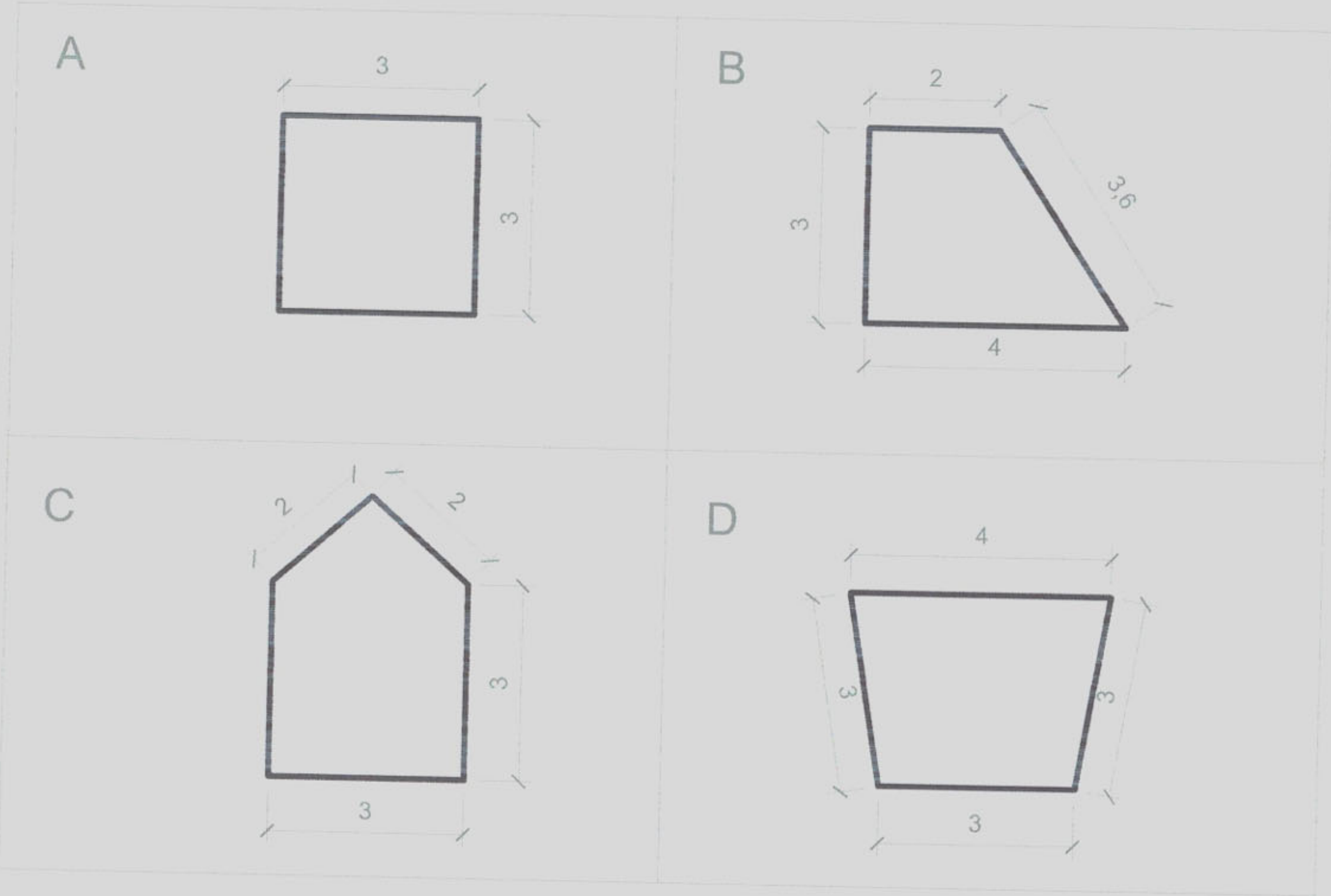
La figura C es el intruso porque no es un cuadrilátero

E: "no es un cuadrilátero"

La figura D es el intruso porque tiene todos los lados iguales menos uno

E: "Tiene todos los lados iguales menos uno"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo A
Corrige: Grupo B



La figura A es el intruso porque todos sus lados son iguales.

A: "todos sus lados son iguales"

La figura B es el intruso porque sus lados son de diferente medida.

A: "sus lados son de diferente medida"

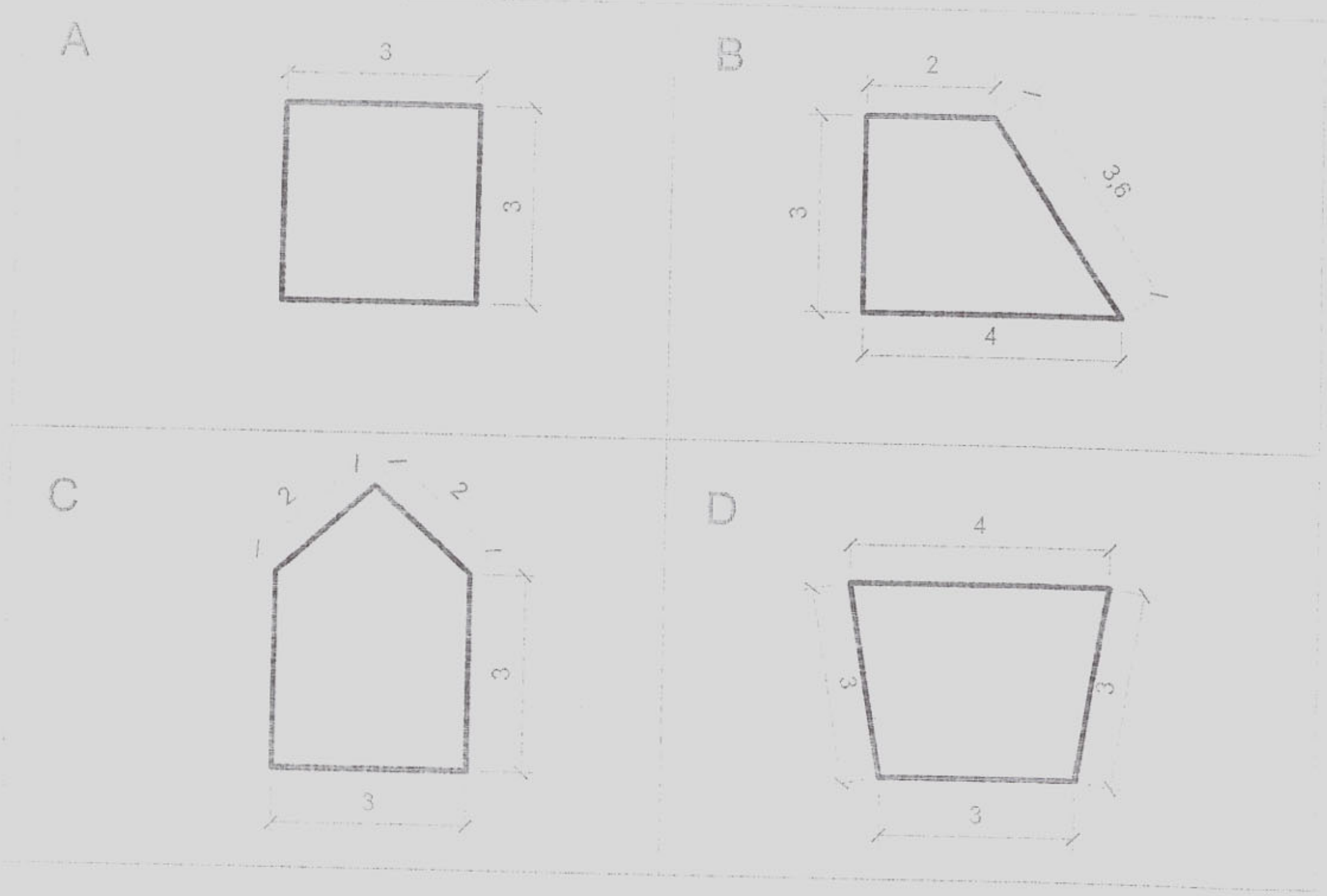
La figura C es el intruso porque ~~[illegible]~~ termina en un vértice.

A: "termina en un vértice"

La figura D es el intruso porque todos sus lados son iguales menos uno, que es el que está en la parte superior.

A: "todos sus lados son iguales menos uno, que es el que está en la parte superior"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo C
Corrige: Grupo F



La figura A es el intruso porque todos sus lados son iguales
Todos sus ángulos son rectos.

C: "todos sus lados son iguales"

F: "Todos sus ángulos son rectos"

La figura B es el intruso porque la longitud de uno de sus lados tiene decimales.
Tiene 2 ángulos distintos

C: "la longitud de uno de sus lados tiene decimales"

F: "Tiene 2 ángulos distintos"

La figura C es el intruso porque no tiene 4 lados (tiene más) → Qué tiene más!
Porque tiene doble forma (Triángulo y cuadrado)

F: "Porque tiene doble forma (triángulo y cuadrado)

C: "no tiene 4 lados (tiene más)

F: "Qué tiene más?"

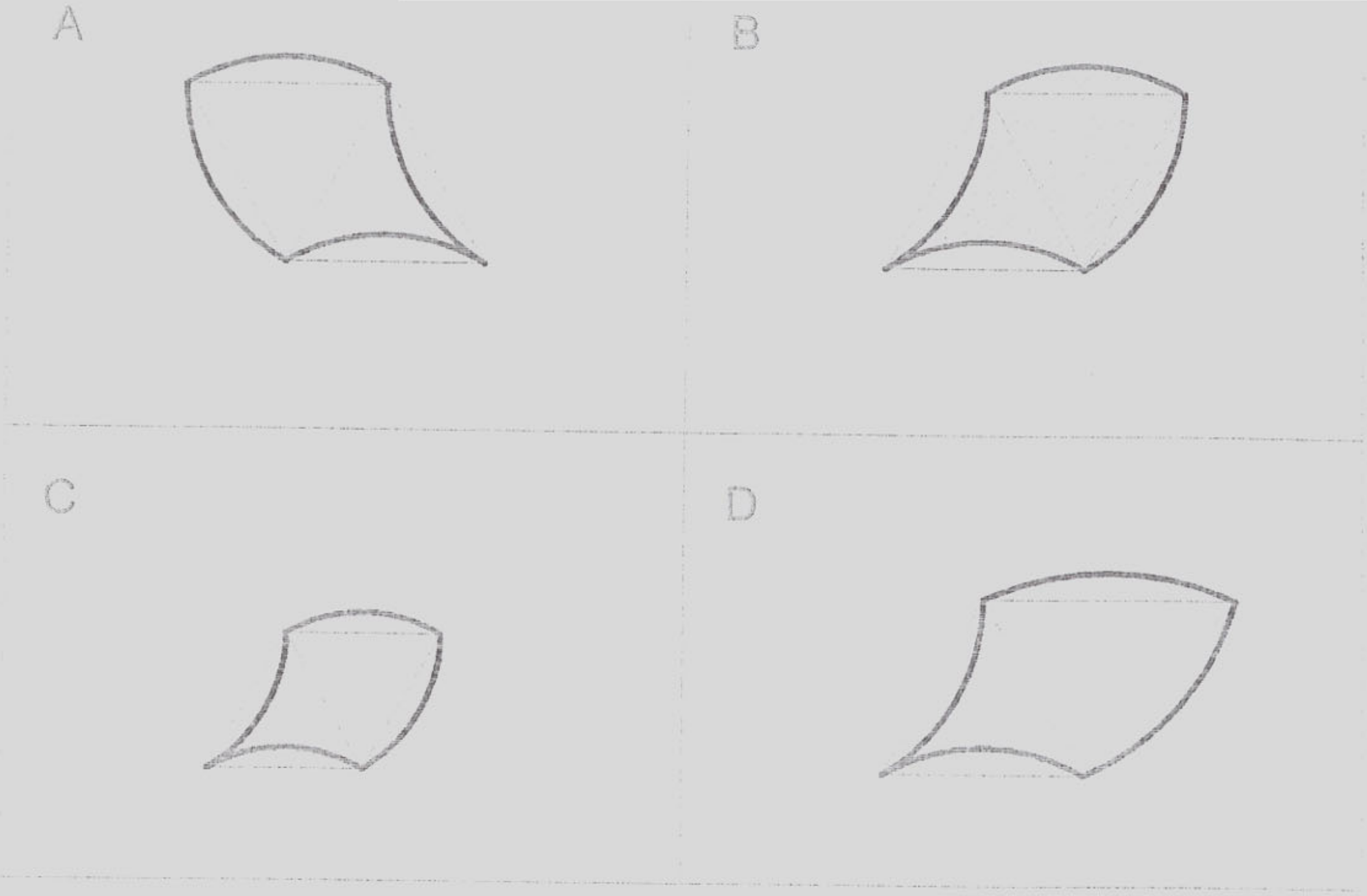
La figura D es el intruso porque es la única que no tiene ángulos rectos
Tiene un lado de 4 cm.

C: "es la única que no tiene ángulos rectos"

F: V

F: "tiene un lado de 4 cm"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo D
Corrige: Grupo E



La figura A es el intruso porque

D: "Está mirando hacia otro lado"

Esta mirando hacia otro lado

La figura B es el intruso porque

D: "Tiene líneas en paralelo"

Tiene líneas en paralelo

La figura C es el intruso porque

NO TIENE TRIÁNGULO DE BASE 3 cm

~~Es el más pequeño~~

D: "Es el más pequeño"

E: "No tiene triángulo de base 3 cm"

La figura D es el intruso porque

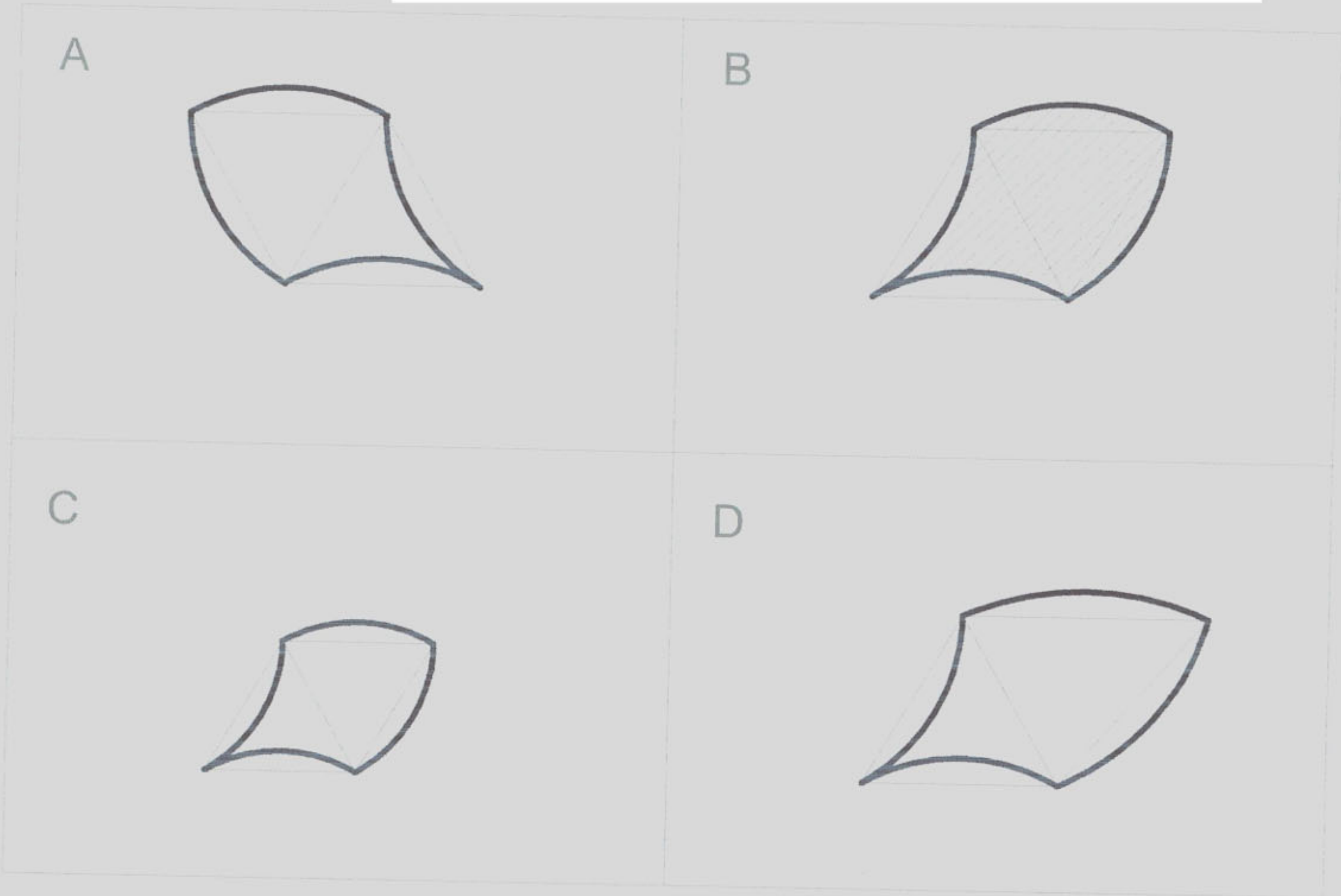
~~Es el más grande~~
~~por que ¿?~~ NO VÁLIDO

POR QUE ES EL MAS GRADE.

D: "Es el más grande"

E: "¿Por qué?. No válido

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo B
Corrige: Grupo A



La figura A es el intruso porque
Mira hacia el lado contrario.
Tiene simetría.

B: "Mira hacia otro lado"
A: "Tiene simetría"

La figura B es el intruso porque
Tiene rayas.

B: "tiene rayas"

La figura C es el intruso porque
Es más pequeño.

B. "Es más pequeño"

La figura D es el intruso porque
Tiene un ángulo diferente.
Es la forma más grande.

B: "Tiene un ángulo diferente"
A: "Es la forma más grande"

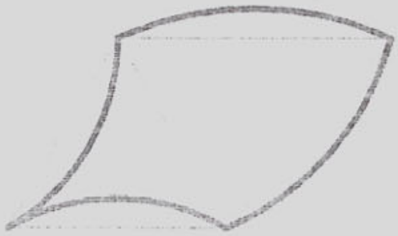
Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo G
Corrige: Grupo D

A

B

C

D



La figura A es el intruso porque esta rotada de lado hacia la izqui

G: "está rotada de lado hacia la izquierda"

La figura B es el intruso porque esta rotada hacia la derecha.

Tiene rayas por ejemplo, se trata de que sea algo que no coincida y el resto si

G: "está rotada hacia la derecha" D: "tiene rayas por ejemplo, se trata de que sea algo que no coincide y el resto sí"

La figura C es el intruso porque es más pequeña que los demás.

No tiene triángulo de base 3

G: "es más pequeña que las demás"

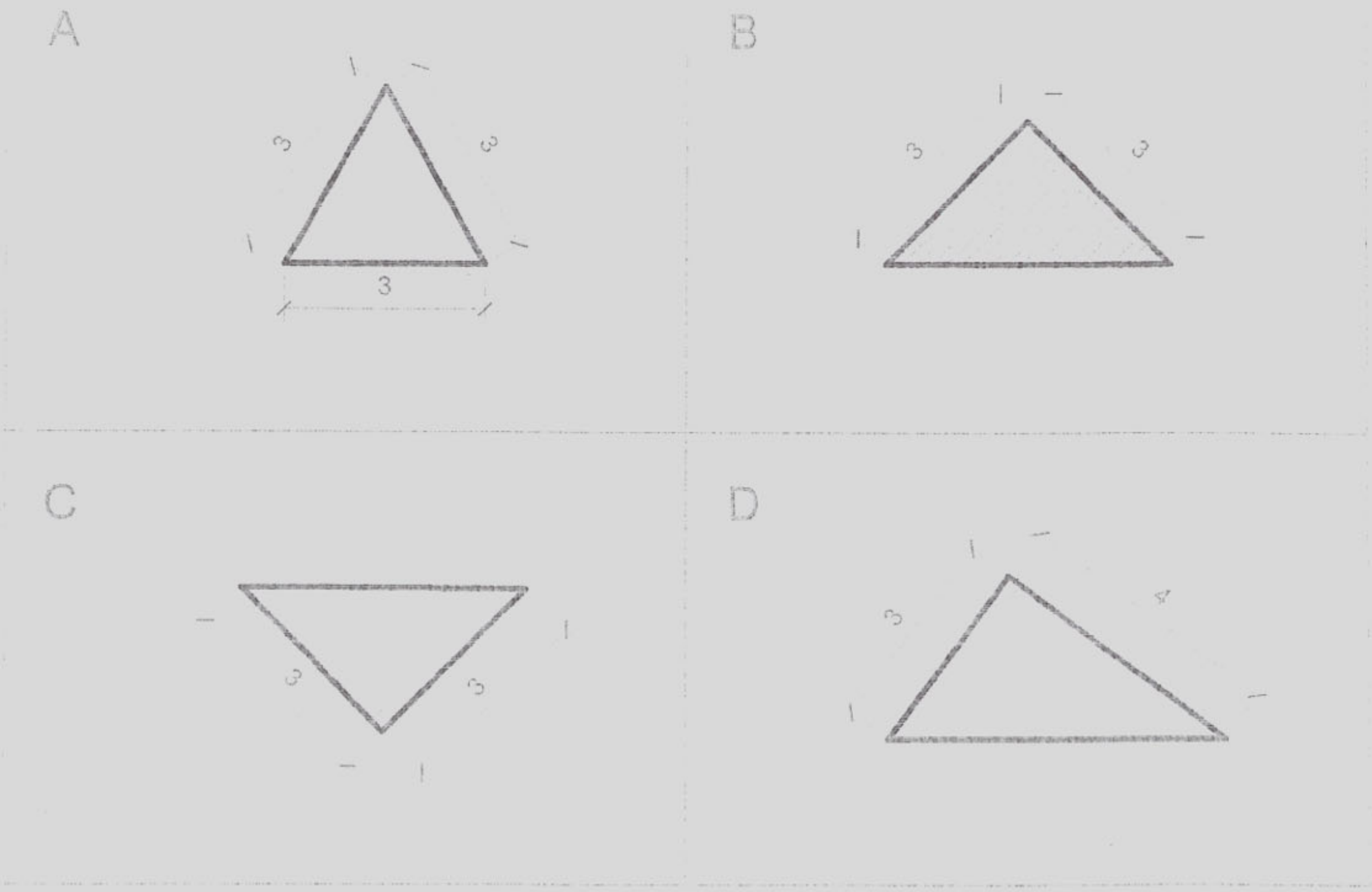
D: "No tiene triángulo de base 3"

La figura D es el intruso porque es más grande que los demás.

Sus triángulos no son iguales

G: "es más grande que los demás"
D: "sus triángulos no son iguales"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo G
Corrige: Grupo D



La figura A es el intruso porque es un triangulo equilatero.

G: "es un triángulo equilátero"

La figura B es el intruso porque tiene rayas por dentro

G: "tiene rayas por dentro"

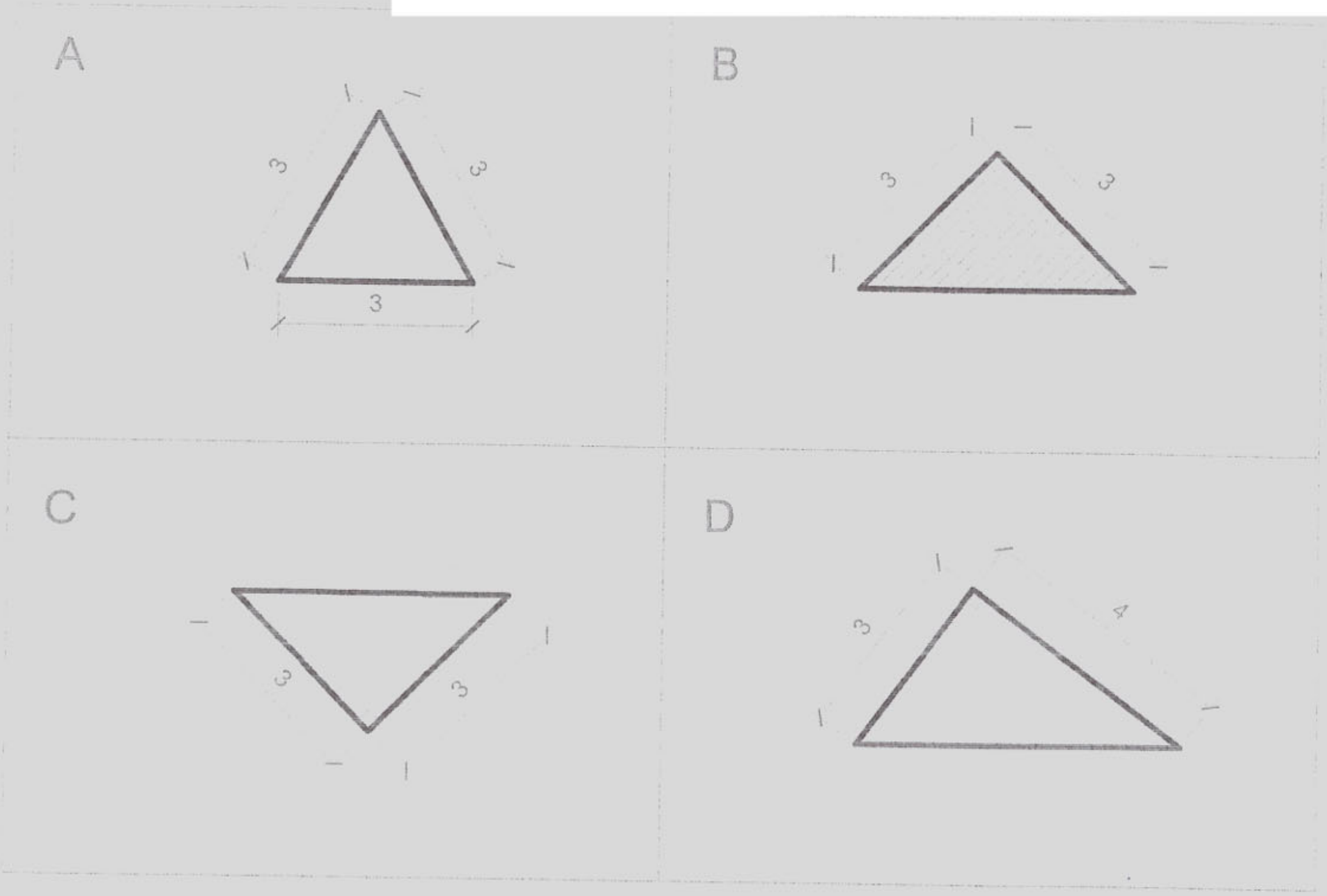
La figura C es el intruso porque Esta al reves Esta apoyado en un vértice

G: "Está al revés" D: "Está apoyado en un vértice"

La figura D es el intruso porque Un lado esta mas alargados

G: "Un lado está más alargado"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo E
Corrige: Grupo G



La figura A es el intruso porque es un equilátero

E: "Es un equilátero"

La figura B es el intruso porque es el único que dentro tiene líneas

E: "es el único que dentro tiene líneas"

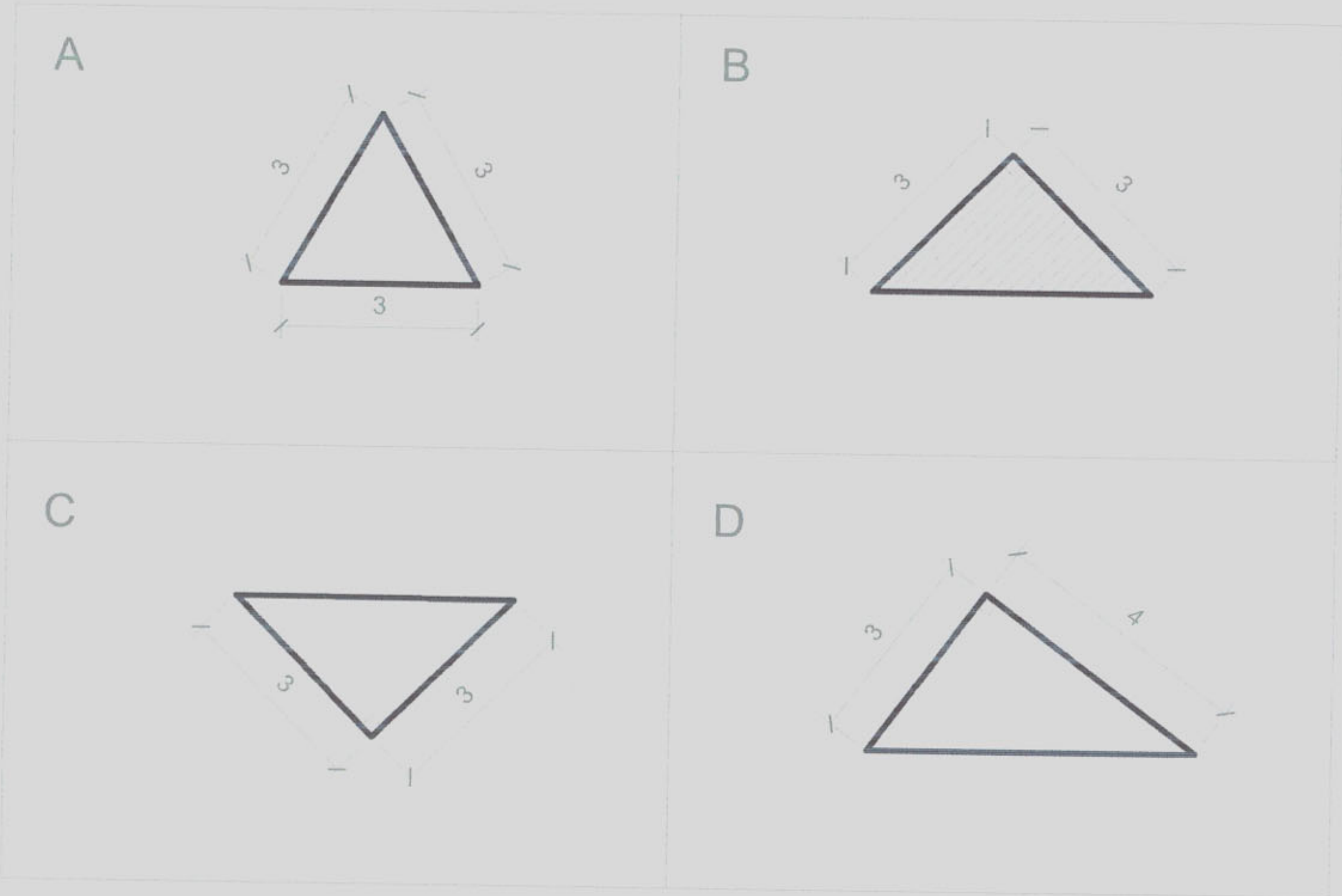
La figura C es el intruso porque está apoyado en un vértice

E: "está apoyado en un vértice"

La figura D es el intruso porque tiene un lado más largo

E: "tiene un lado más largo"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo B
Corrige: Grupo A



La figura A es el intruso porque

Tiene tres números.
Sus lados miden lo mismo.

B: "Tiene tres números"
A: "sus lados miden lo mismo"

La figura B es el intruso porque

Tiene rayas.
Dos lados son iguales menos uno.

B: "Tiene rayas"
A: "Dos lados son iguales menos uno"

La figura C es el intruso porque

No está apoyado a base.
Está al revés y dos lados son iguales menos uno.

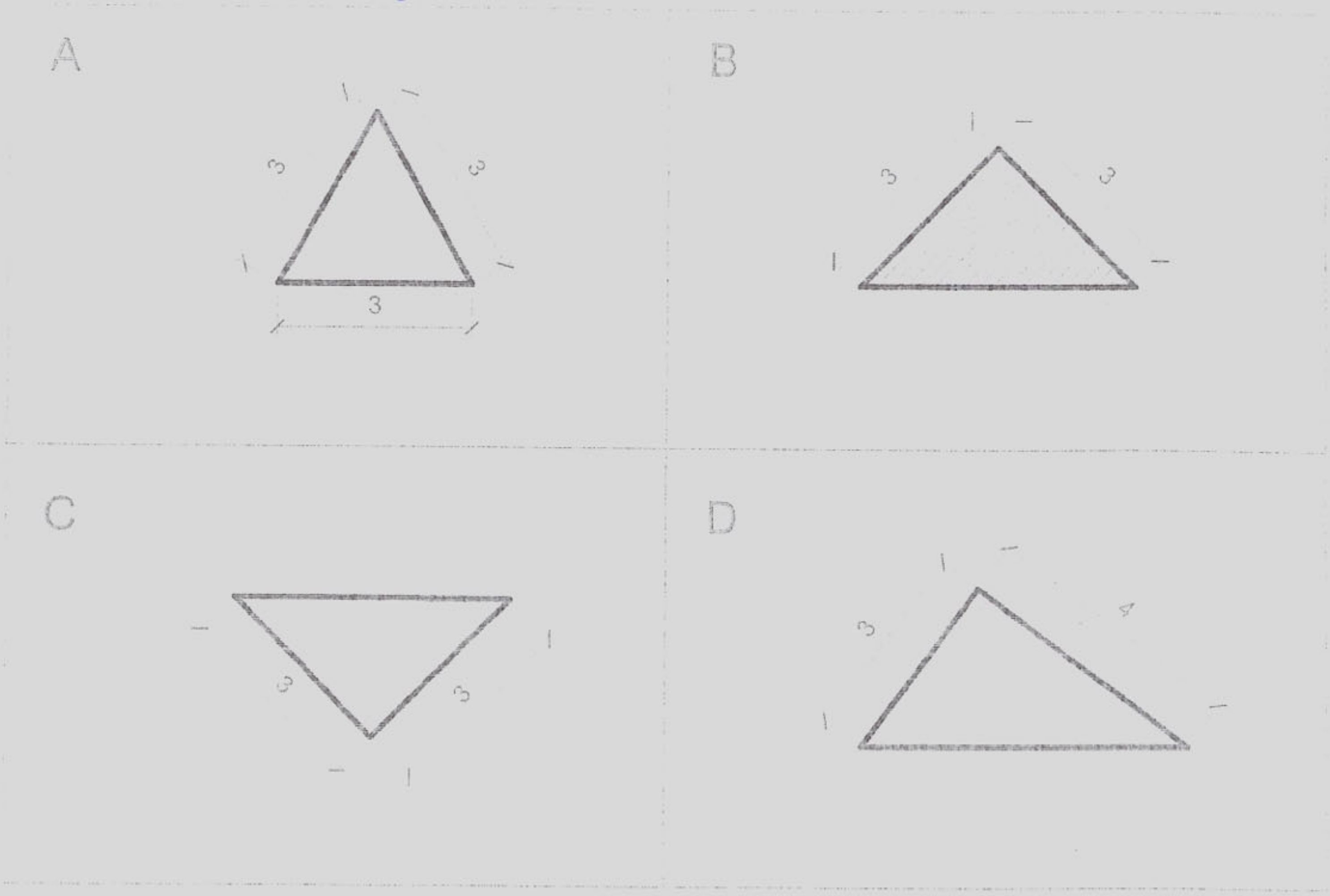
B: "No está apoyado a base"
A: "Está al revés y dos lados son iguales menos uno"

La figura D es el intruso porque

Tiene lados más grandes.
Sus lados no miden lo mismo.

B: "Tiene lados más grandes"
A: "Sus lados no miden lo mismo"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo F
Corrige: Grupo C



La figura A es el intruso porque

tiene todos los ángulos iguales / Porque es equilátero

F: "tiene todos los ángulos iguales"
C: "Porque es equilátero"

La figura B es el intruso porque

Su interior está lleno de rayas / Porque es el único ~~que no~~ isósceles que está apoyado por su base.

F: "Su interior está lleno de rayas"
C: "Porque es el único isósceles que está apoyado por su base"

La figura C es el intruso porque

Está dado la vuelta su vértice, apuntando hacia abajo

F: "Está dado la vuelta su vértice apuntando hacia abajo"

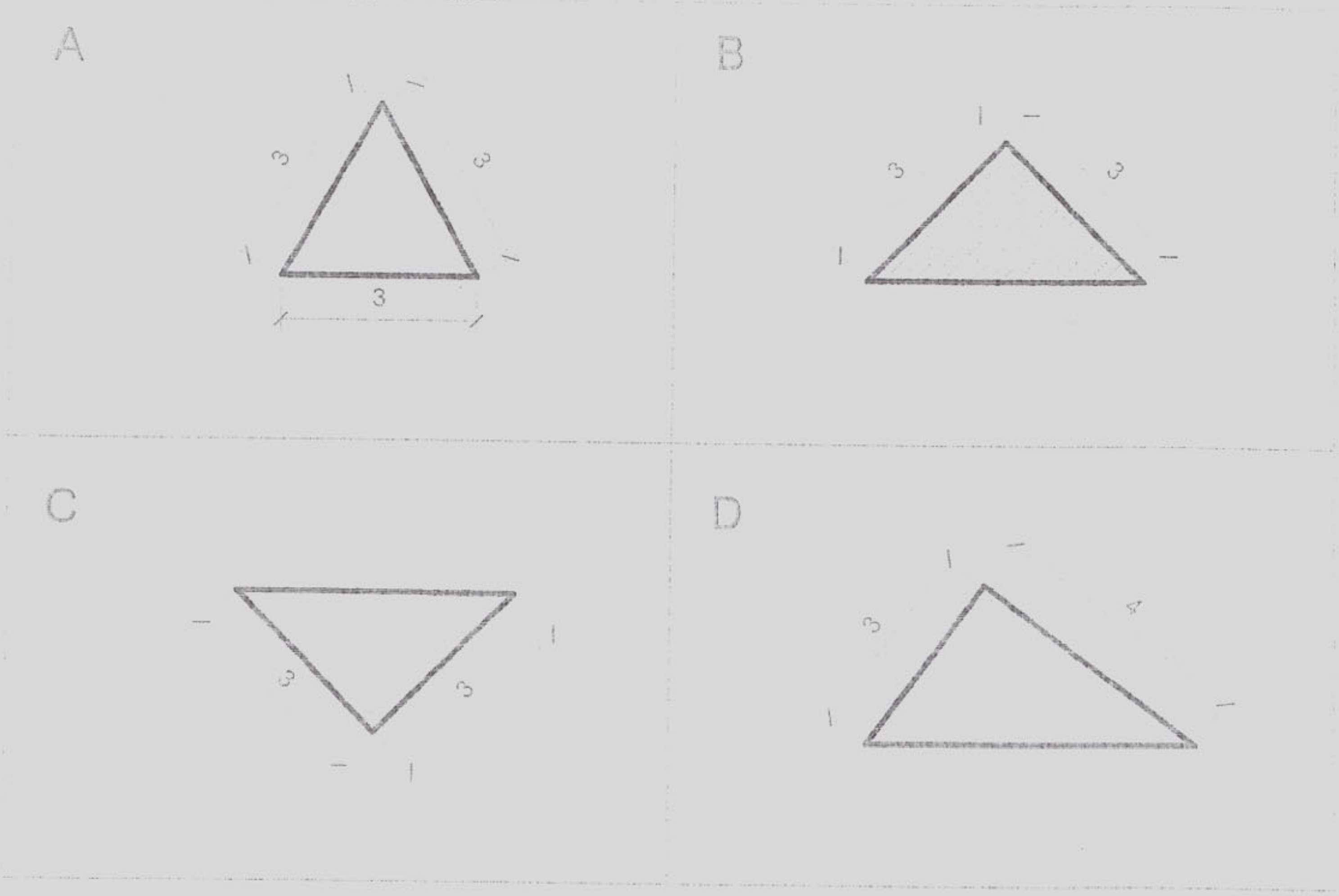
La figura D es el intruso porque

Tiene lados más grandes que las demás figuras

No, es porque es escaleno y los demás no

F: "Tiene lados más grandes que las demás figuras"
C: "No, es porque es escaleno y los demás no"

Nombre y Apellidos: Realiza: grupo C
Corrige: Grupo F



La figura A es el intruso porque todos sus lados son iguales.
Es un triángulo isósceles

C: "Todos sus lados son iguales"
F: "Es un triángulo isósceles"

La figura B es el intruso porque es el único triángulo isósceles apoyado en la base
Tiene un solo lado desigual.

C: "es el único triángulo isósceles apoyado en la base"

F: "Tiene un solo lado desigual"

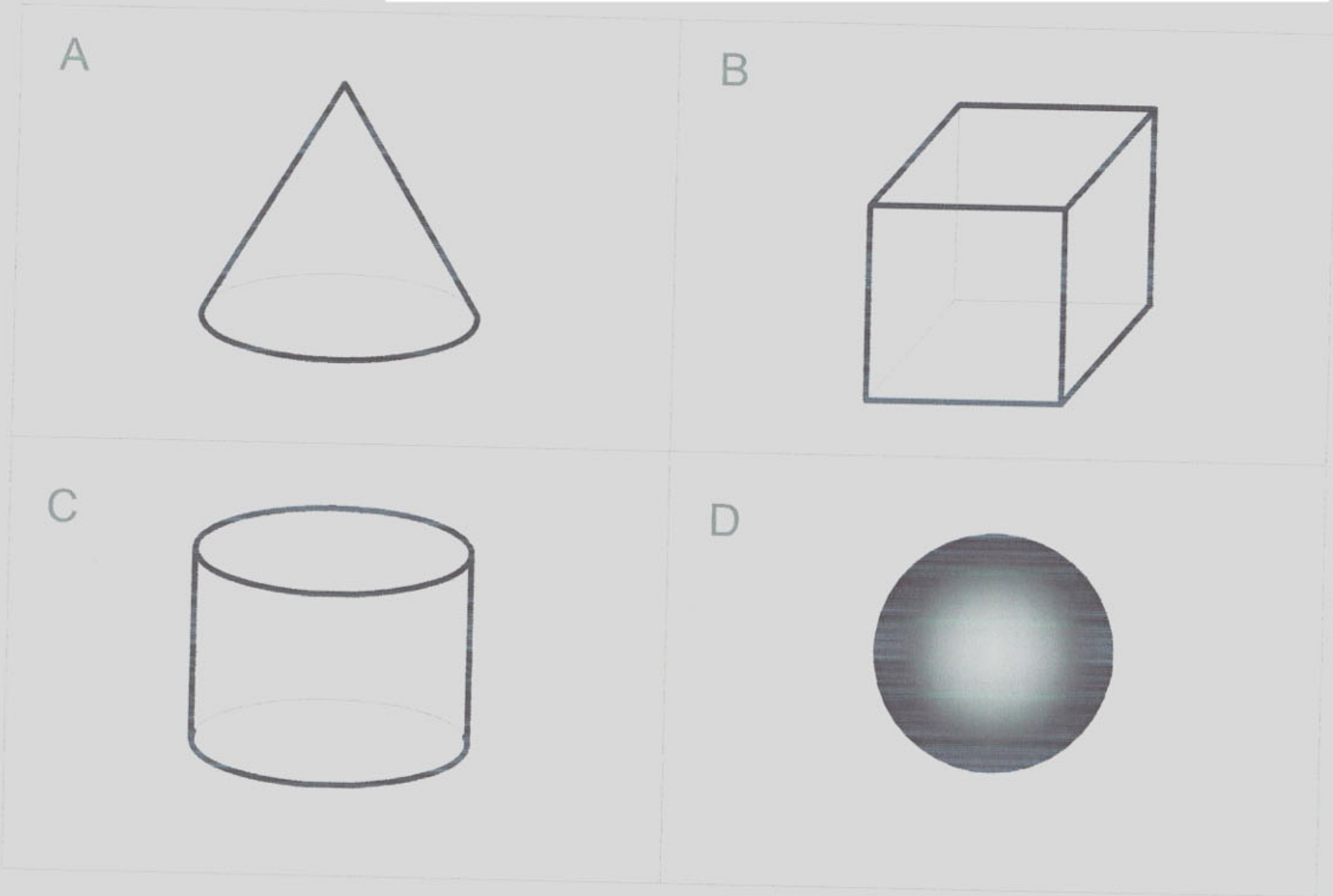
La figura C es el intruso porque dado la ~~vul~~ vuelta vocabulario!!
La figura está apoyada por su vértice.

C: "dado la vuelta"
F: "vocabulario!!". La figura está apoyada por su vértice"

La figura D es el intruso porque es el único triángulo escaleno
Su vértice esta inclinado ligeramente a la izquierda.

C: "es el único triángulo escaleno"
F: "Su vértice está inclinado ligeramente a la izquierda"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo A
Corrige: Grupo B



La figura A es el intruso porque
Solo tiene una base circular

A:
B: "solo tiene una base circular"

La figura B es el intruso porque sus lados son iguales.

A: "sus lados son iguales"

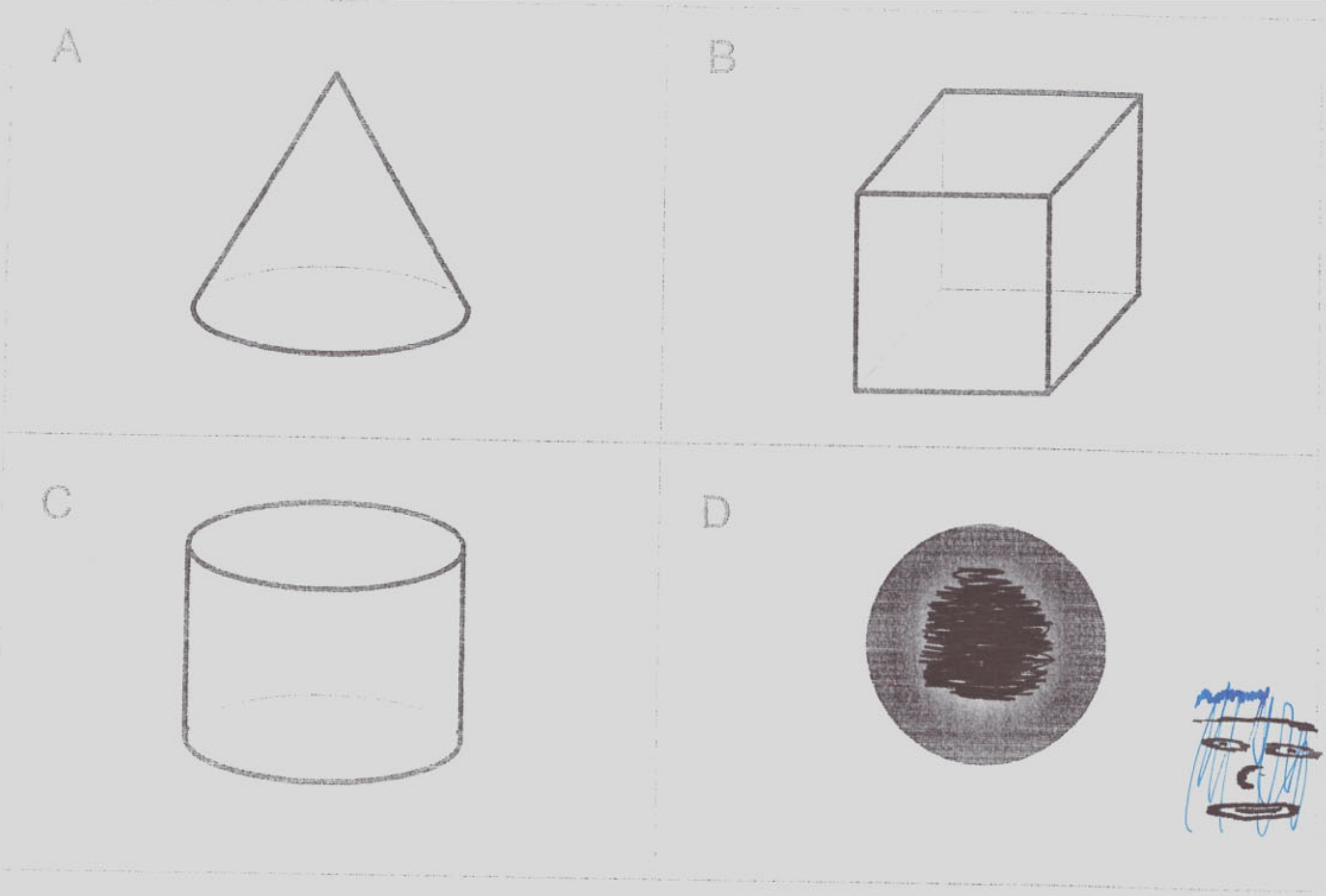
La figura C es el intruso porque
Tiene dos bases circulares

A:
B: "Tiene dos bases circulares"

La figura D es el intruso porque es de diferente color y porque es plano.

A: "es de diferente color y porque es plano"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo C
Corrige: Grupo G



La figura A es el intruso porque todos sus lados se unen en un vértice

C: "todos sus lados se une en un vértice"

La figura B es el intruso porque es el único que no tiene una circunferencia en su estructura.

C: "es el único que no tiene una circunferencia en su estructura"

La figura C es el intruso porque es el único con dos circunferencias como base.

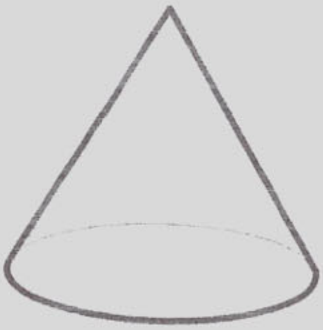
C: "es el único con dos circunferencias como base"

La figura D es el intruso porque ~~es negro~~. su interior es negro.

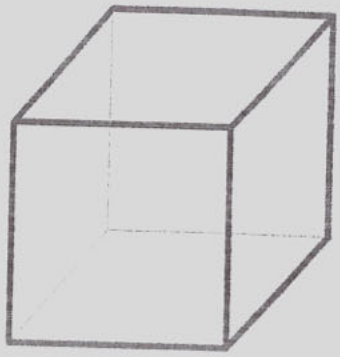
C: "su interior es negro"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo F
Corrige: Grupo E

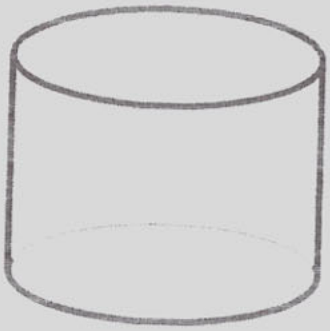
A



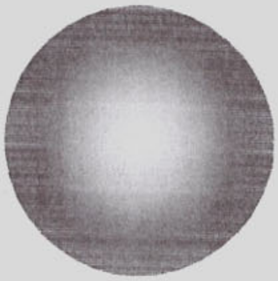
B



C



D



La figura A es el intruso porque

Es la única que forma un triangulo

F: "Es la única que forma un triángulo"

La figura B es el intruso porque

Tiene 4 lados y forma angulos iguales

F: "Tiene 4 lados y forma ángulos iguales"

La figura C es el intruso porque

Porque tiene 2 bases

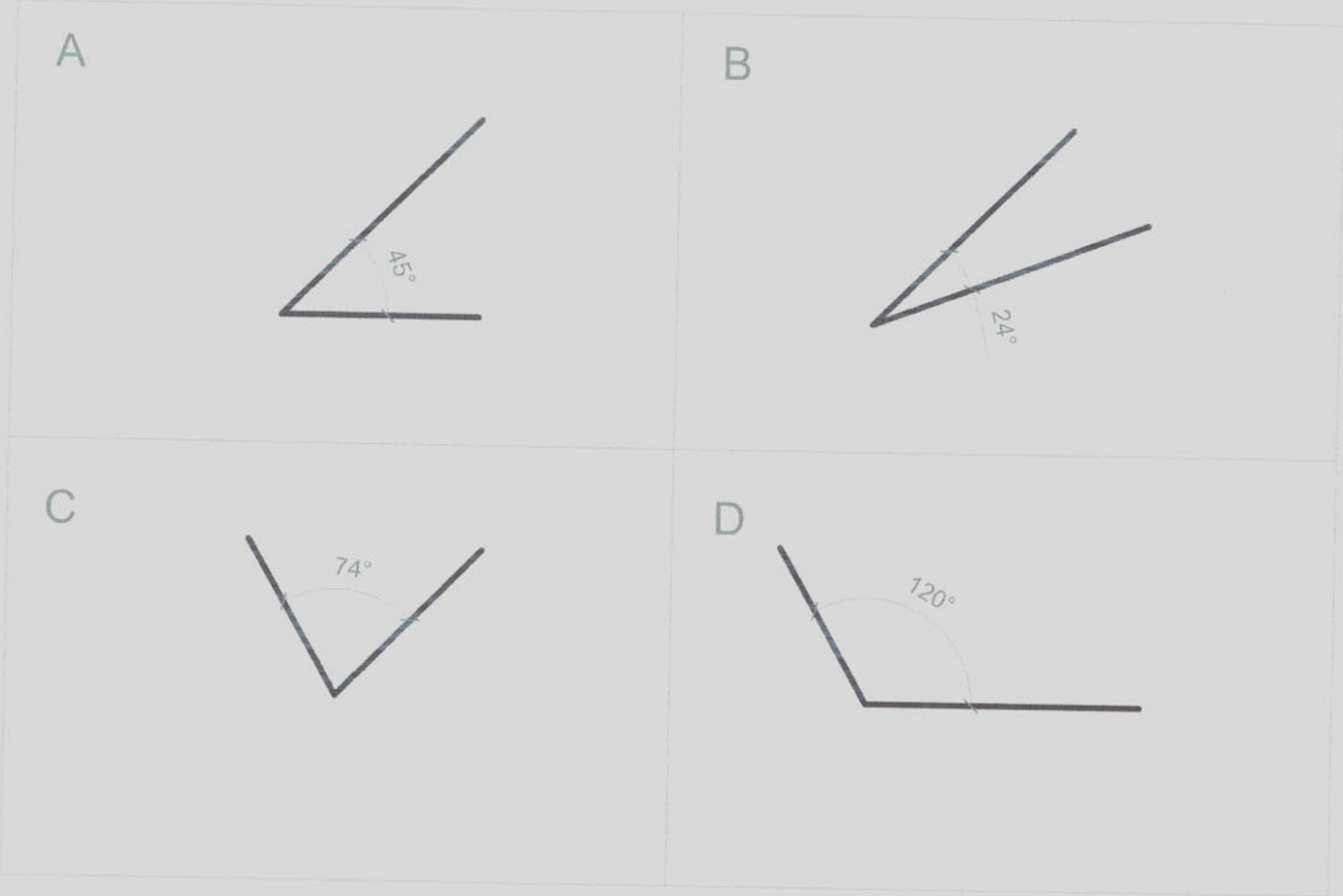
F: "Tiene dos bases"

La figura D es el intruso porque

no tiene base ni lados y está pintada de otro color

F: "no tiene base ni lados"
E: "y está pintada de otro color"

Nombre y Apellidos: Realiza: Grupo B
Corrige: Grupo A



La figura A es el intruso porque
Es la unica impar

B: "Es la única impar"

La figura B es el intruso porque
Es la unica que no supera los 25 grados

B: "Es la única que no supera los 25 grados"

La figura C es el intruso porque
Que tiene mal los grados

B: "Que tiene mal los grados"

La figura D es el intruso porque
Es la unica que supera los 90* grados

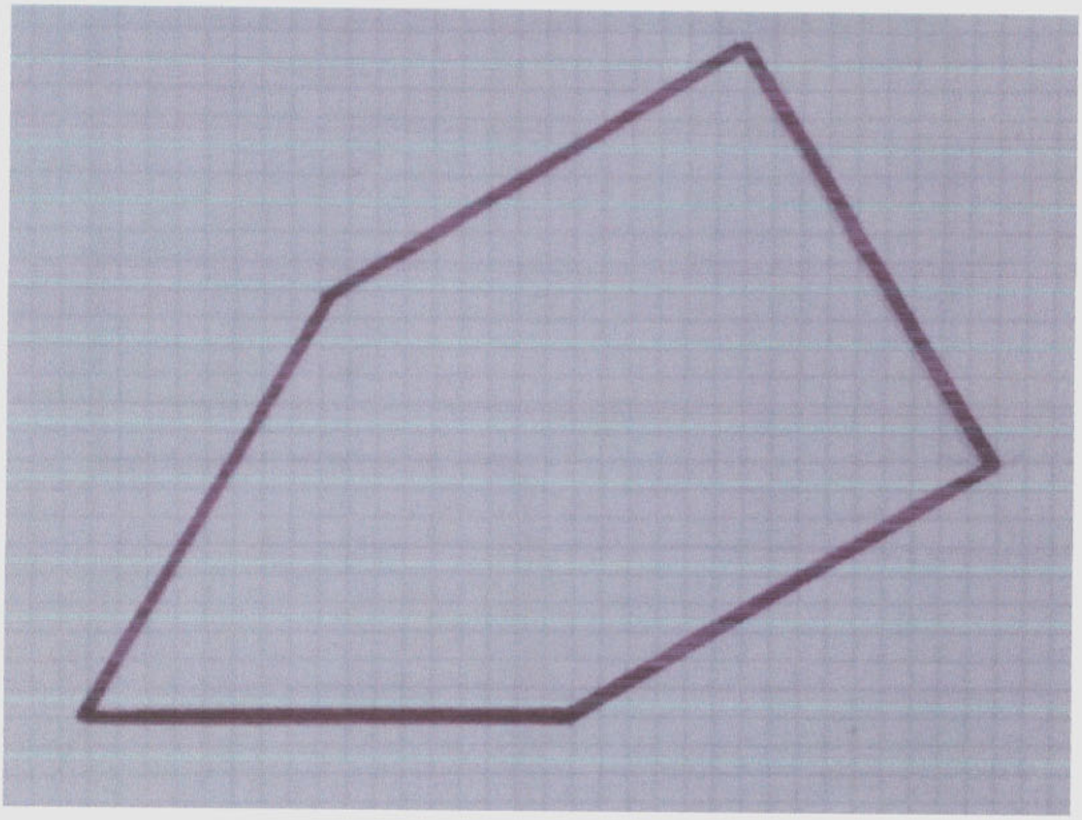
B: "Es la única que supera los 90 grados"

9.2.1. Actividad 2: Dictado Geométrico

Describe: Alumna 2
Representa: Alumno 1

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero al dibujo original? Sí

¿Ves algún error que se pueda corregir?

que esta recto en vez de lado

"Sí". "que está recto en vez de lado"

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

diciendo las medidas y del lado que se encuentran

"diciendo las medidas y del lado que se encuentran"

Describe: Alumna 2
Representa: Alumno 1

-Describe la figura:

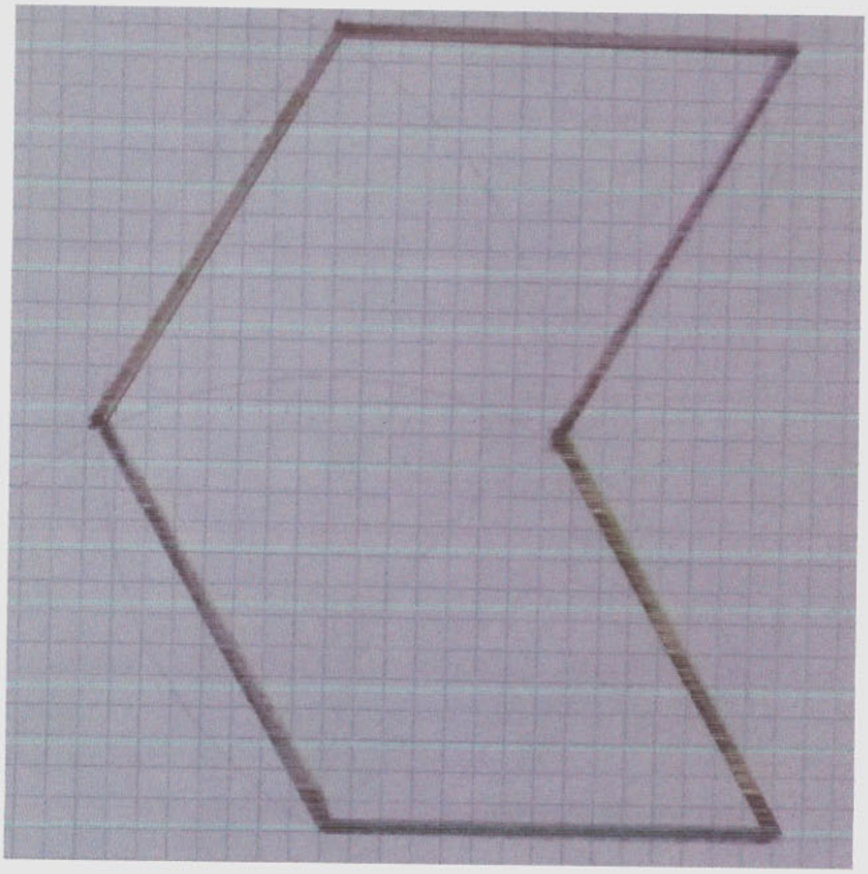
Un triangulo sin un lado unido a un cuadrado sin un lado

"Un triángulo sin un lado unido a un cuadrado sin un lado"

Describe: Alumno 5.
Representa: Alumno 4

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un **transportador de ángulos para dar medidas exactas.**

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero al dibujo original? No.

¿Ves algún error que se pueda corregir? Todo.

"No". "Todo"

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta? escribiendo con buena letra y con dibujos.

"escribiendo con buena letra y con dibujos"

Describe: Alumno 5
Representa: Alumno 4

-Describe la figura:

Tienes que hacer una flecha cerrada de 26 cuadrados de altos.
Desde la punta hasta la parte de atrás 15 cuadrados y la parte de atrás es como la forma de flecha pero para adentro de la flecha.

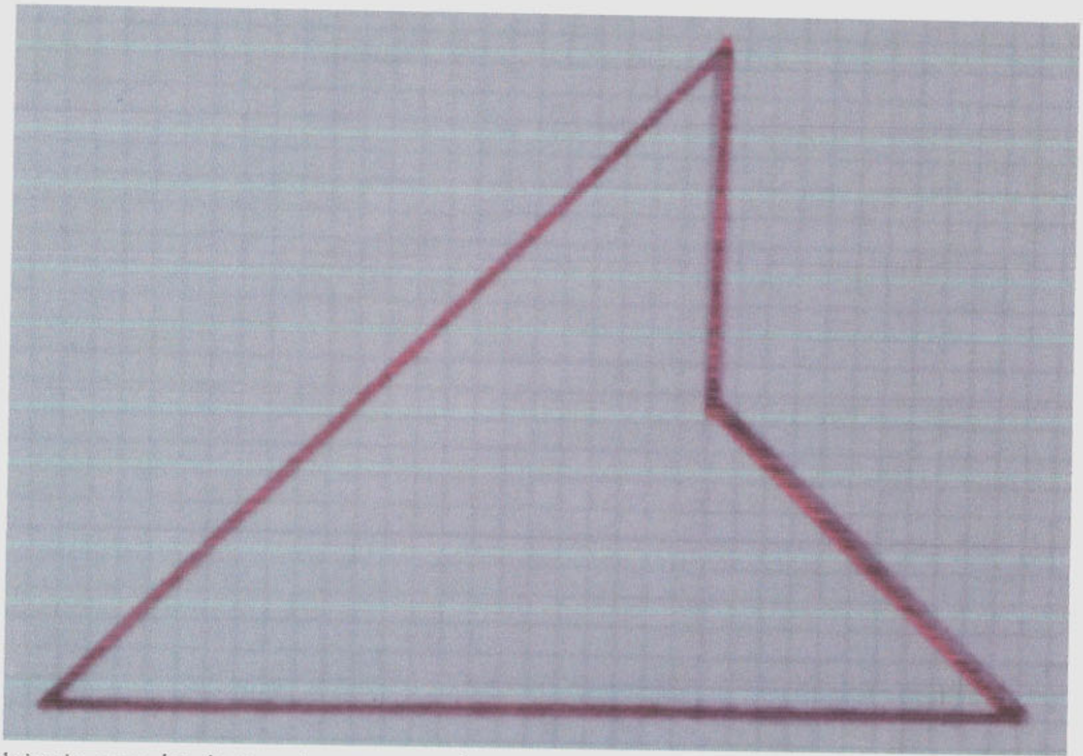
Arriba y abajo tiene una recta de 15 cuadrados.

"Tienes que hacer una flecha cerrada de 26 cuadrados de alto. Desde la punta hasta la parte de atrás 15 cuadrados y la parte de atrás es como la forma de flecha pero para adentro de la flecha. Arriba y abajo tiene una recta de 15 cuadrados."

Describe: Alumno 1
Representa: Alumno 5

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado, con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero, al dibujo original?

Mos o Menos

¿Ves algún error que se pueda corregir?

Si nuchos. "Más o menos". "Sí, muchos"

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

Diciendo cosas mos especifices y los dimensiones que tiene.

"Diciendo cosas más específicas y las dimensiones que tiene"

Describe: Alumno 1
Representa: Alumno 5

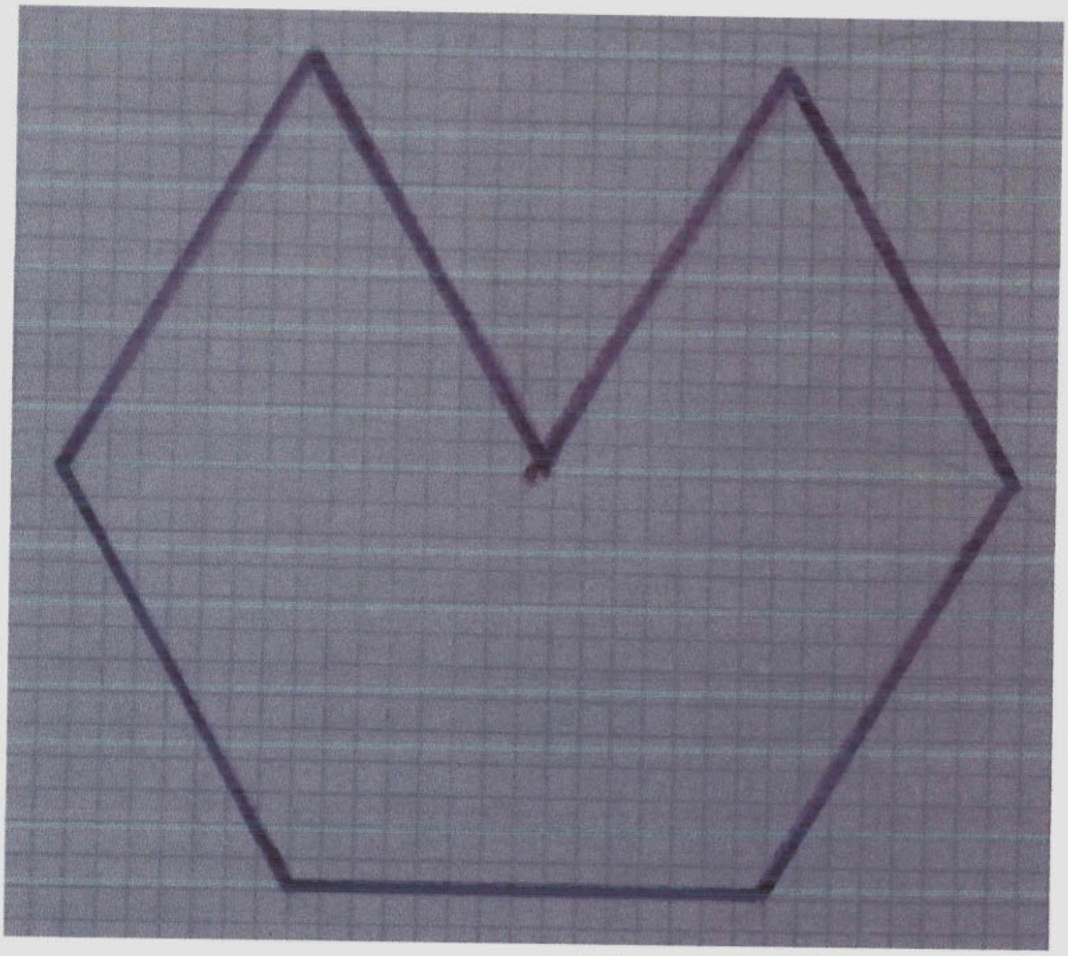
- Describe la figura: la flecha de el ordenador osea o la figura que esta en el ordenador que lo manejas tu con el ~~raton~~ raton

"La flecha del ordenador, o sea la figura que está en el ordenador que lo manejas tú con el ratón"

Descripción: Alumno 4
Representación: Alumno 3

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero al dibujo original? No

¿Ves algún error que se pueda corregir? Sí, le podría haber dicho que haga dos rombos pegando pero sin la raya del medio.

"Sí, le podría haber dicho que haga dos rombos pegando pero sin la raya del medio"

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

Podría mejorarlo diciendo que hiciera dos rombos pegados sin la línea del medio.

"Podría mejorarlo diciendo que hiciera dos rombos pegados sin la línea del medio"

Describe: Alumno 4
Representa: Alumno 3

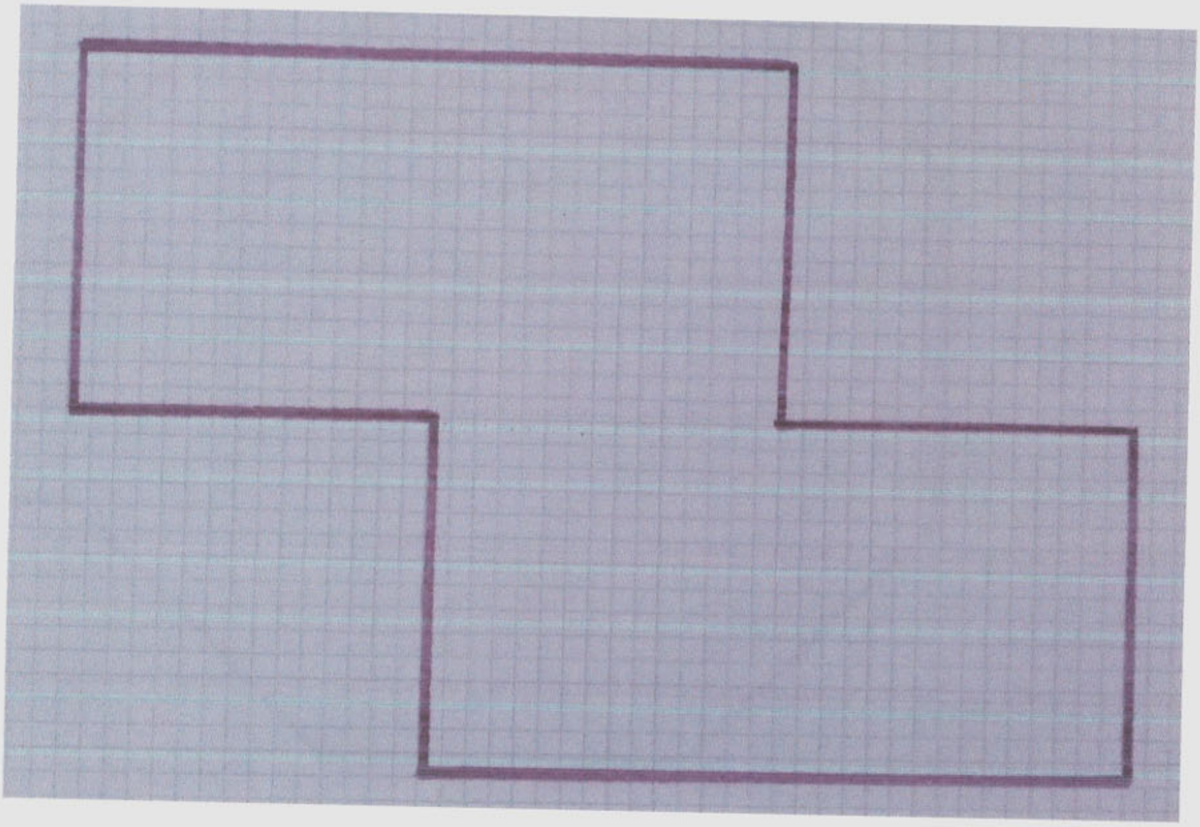
- Describe la figura: Haces una base de 6 cm, haces otras 2 líneas un poco torcidas, luego ~~subes~~ haces otras igual en cada lado y luego haces 3 triangulos, ~~uno~~ uno boca arriba sin base otro hacia abajo y sin base y otro hacia riba sin base.

"Haces una base de 6 cm, haces otras dos líneas un poco torcidas, luego subes haces otras igual en cada lado y luego haces 3 triángulos, uno boca arriba sin base otro hacia abajo y sin base y otro hacia arriba sin base."

Descripción: Alumno 3
Representación: Alumna 2

Comunicar las ideas con claridad.

Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo que necesita dibujar una figura que no puede ver, la cámara de tu teléfono no funciona y no puedes enviar imágenes. Escribe, en la hoja adjunta, un conjunto de instrucciones para que tu amigo pueda dibujar exactamente la figura que tú estás viendo.



Intenta que las instrucciones sean claras y precisas, puedes ayudarte de una regla y un transportador de ángulos para dar medidas exactas.

Después de ver lo que tu compañero ha dibujado, con las instrucciones que le diste, responde:

¿Se parece el dibujo que ha hecho tu compañero, al dibujo original? Si

¿Ves algún error que se pueda corregir? La linea del centro

"Sí". "La línea del centro"

¿Cómo podrías mejorar las instrucciones para que la comunicación sea más efectiva y consiga dibujar la figura de manera más exacta?

No lo se, abec hablado en mas detalle

"No lo sé, haber hablado en más detalle"

Descripción: Alumno 3
Representación: Alumna 2

-Describe la figura:

Hay dos reztangulos de 15 cuadrados de alto y 30 cuadrados de largo. Uno va encima del otro pero el rectangulo de arriba lo mueves 15 bloques a la izquierda.

"Hay dos rectángulos de 15 cuadrados de alto y 30 cuadrados de largo. uno va encima del otro pero el rectángulo de arriba lo mueves 15 bloques a la izquierda."