



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER
Máster en Matemáticas

IDEALES TROPICALES

Autor: Gonzalo Rodríguez Pajares
Tutores: Philippe Gimenez, Diego Ruano Benito
Curso 2023/2024

Abstract

Tropical ideals form a class of ideales defined in the semiring of tropical polynomials, as introduced in [MR18]. These ideals include the tropicalizations of classical ideals and show a close connection to valuated matroids. The aim of this project is to investigate that relation and show the most important properties and results concerning tropical ideals. In particular, we will show that, similar to the classical framework, it is possible to define a Hilbert function for these ideals. Every tropical ideal has an associated variety, which we will demonstrate is a finite polyhedral complex. We will also prove that they satisfy the ascending chain condition, although they are not finitely generated, and we show that they satisfy a tropical version of Nullstellensatz.

Resumen

Los ideales tropicales, introducidos en [MR18], son una clase de ideales definidos sobre el semianillo de polinomios tropicales. Estos ideales engloban las tropicalizaciones de los ideales clásicos y mantienen una estrecha relación con las matroides valoradas. El objetivo principal de este trabajo es explorar dicha relación y mostrar las propiedades y resultados más relevantes acerca de los ideales tropicales. En particular, demostraremos que, al igual que en el caso clásico, se puede definir una función de Hilbert para estos ideales, aprovechando su relación con las matroides. Probaremos también que satisfacen la condición de cadena ascendente, pese a no ser finitamente generados, y presentaremos una versión tropical del Nullstellensatz. Finalmente, estudiaremos las variedades definidas por los ideales tropicales y mostraremos que se tratan de complejos poliedrales finitos.

Índice general

Introducción	1
1 Matroides	5
1.1 Conceptos básicos	5
1.1.1 Conjuntos dependientes e independientes	6
1.1.2 Bases	11
1.1.3 Rango	14
1.2 Matroides valoradas	16
1.2.1 Motivación de la definición de matroide valorada	18
1.2.2 Circuitos y vectores valorados	19
2 Fundamentos de geometría tropical	23
2.1 Valoraciones	23
2.2 Geometría poliedral	26
2.3 Geometría tropical	33
2.3.1 Ideales iniciales y teoría de bases de Gröbner	36
2.3.2 Teorema Fundamental de la Geometría Tropical	39
2.3.3 Teorema de estructura	42
3 Ideales tropicales	45
3.1 Definición y primeros ejemplos	46
3.2 Ideales iniciales de ideales tropicales	55
3.2.1 Función de Hilbert	59
3.2.2 Condición de cadena ascendente	62
4 Complejos de Gröbner y Nullstellensatz	65
4.1 Variedades de ideales tropicales	65
4.2 Nullstellensatz e ideales maximales	71
A Cálculos con <i>Macaulay2</i>	73
Bibliografía	77

Introducción

La geometría tropical es una rama de la geometría algebraica que tiene su origen en la segunda mitad del siglo XX, y establece conexiones entre la geometría algebraica clásica y la combinatoria. El término “tropical” fue acuñado por el matemático francés Jean-Eric Pin, [Pin98], en honor al matemático brasileño Imre Simon, [Sim88], que fue pionero en trabajar en lo que ahora conocemos como *semianillo tropical*, o min-plus álgebra.

El núcleo de la geometría tropical es el semianillo $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$, en el cual las operaciones están definidas como $a \oplus b := \min\{a, b\}$ y $a \odot b := a + b$. Este cambio en las operaciones hace que los polinomios clásicos se transformen en funciones lineales a trozos y reemplaza las variedades algebraicas clásicas asociadas a un ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$, con K un cuerpo, por variedades tropicales, que tienen una estructura combinatoria, lo cual precisa el estudio de la geometría poliedral. Existen dos principales vías para introducirse a la geometría tropical, la primera de ellas es la versión “extrínseca”, que es la que seguiremos en este trabajo y la más habitual en los textos como [MS15], que se basa en tropicalizar ideales y variedades clásicas. Existe, no obstante, una vía que desarrolla una teoría abstracta de variedades tropicales intrínseca, donde destacan los trabajos de Mikhalkin, [Bru+15], [Mik06].

El objetivo de este trabajo es presentar los conceptos básicos, tanto a nivel algebraico como a nivel combinatorio, para estudiar una clase de ideales en el semianillo de polinomios tropicales, introducida en [MR18], llamados ideales tropicales. Esta clase engloba aquellos ideales que provienen de tropicalizar los ideales clásicos y se definen de manera puramente combinatoria utilizando matroides valoradas. Gracias a su buen comportamiento “matroidal”, los ideales tropicales satisfacen numerosos resultados que no se cumplen para ideales en general y que recuerdan a los análogos para ideales clásicos. En primer lugar, se puede definir una función de Hilbert asociada a ellos, que al igual que en el caso clásico, resulta ser un polinomio para grado suficientemente alto. También, verifican la condición de cadena ascendente, pese a que en general no son finitamente generados, y una versión del Nullstellensatz, completamente análoga a la versión clásica. Veremos también que las variedades definidas por ideales tropicales se comportan bien a nivel combinatorio, al tratarse de complejos poliedrales finitos.

La manera en que se estructura el presente trabajo es la siguiente:

- El Capítulo 1 está dedicado al estudio de las matroides y de las matroides valoradas. Estos objetos combinatorios generalizan de manera abstracta las propiedades de dependencia lineal y son la base de la definición de los ideales tropicales. Las referencias básicas que seguiremos para este capítulo son [Oxl11], para la teoría general de matroides, y [DW92], [MT01], para el estudio particular de las matroides valoradas.
- El Capítulo 2 presenta conceptos más puramente ligados a la geometría tropical, incluyendo una breve exposición de valoraciones sobre $\mathbb{R}$ y conceptos básicos de geometría poliedral. Este capítulo sienta las bases de lo que se conoce como geometría algebraica tropical y en él incluimos los primeros resultados y ejemplos relevantes dentro de este campo. Cabe destacar los dos teoremas principales dentro de la geometría tropical: el Teorema Fundamental de la Geometría Tropical, 2.67, y el Teorema de Estructura, 2.69. Estos dos resultados establecen la conexión entre las variedades clásicas y tropicales y describen la estructura combinatoria de estas últimas. La principal referencia a seguir dentro de este capítulo es [MS15]. Estos dos primeros capítulos constituyen la base teórica necesaria para abordar los siguientes.
- En el Capítulo 3 introducimos el objeto que motiva el presente trabajo: los ideales tropicales. En este capítulo mostramos los primeros ejemplos de ideales tropicales, y ayudados por la teoría de formas iniciales que podemos definir para esta clase de ideales, probaremos algunas de sus propiedades fundamentales. Entre ellas cabe destacar el estudio de sus funciones de Hilbert, 3.29, y la prueba de que no existen cadenas infinitas de ideales tropicales, 3.31. La referencia principal de este capítulo, y en general del grueso del trabajo, es [MR18].
- Finalmente, en el Capítulo 4 estudiaremos un complejo poliedral de gran relevancia que se puede asociar a cada ideal tropical conocido como *complejo de Gröbner*. Utilizando la existencia de este complejo, garantizada por el Teorema 4.6, podremos hacer un estudio combinatorio de las variedades definidas por ideales tropicales, llegando al resultado de que se tratan de complejos poliedrales finitos. Culminaremos el capítulo y el trabajo con la prueba del Nullstellensatz, 4.14, que enunciaremos ahora. Los conceptos del enunciado tomarán sentido a lo largo de la exposición. La principal referencia para este capítulo es de nuevo [MR18].

Teorema 0.1 (Nullstellensatz). *Sea $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un ideal tropical. Entonces $V(I) \subset \mathbb{R}^n$ es vacía si y solo si $I = \langle 0 \rangle$.*

- Junto a la exposición teórica del trabajo, hemos añadido un apéndice A dedicado al cálculo de variedades tropicales haciendo uso del paquete `tropical`, [Amé+19], y, en particular, de la función `tropicalVariety` de `Macaulay2`, [GS]. Los cálculos de variedades tropicales en varios de los

INTRODUCCIÓN

ejemplos de este trabajo se han realizado utilizando estas funciones. Este paquete hace uso del programa **Gfan**, introducido por Anders Jensen, [Jen], que a día de hoy supone la mayor herramienta de cálculo computacional para la geometría tropical. Los cálculos de variedades tropicales se basan fundamentalmente en el cálculo del complejo de Gröbner asociado a un ideal.

Capítulo 1

Matroides

Las matroides son objetos combinatorios fundamental surgidas con el propósito de generalizar y aislar las propiedades de las relaciones de dependencia. Fueron introducidas en [Whi35]. En dicho artículo, se extraen las propiedades fundamentales de dependencia que son comunes en el ámbito de la teoría de grafos y del álgebra lineal. Por su carácter puramente combinatorio, las matroides son fundamentales para la geometría tropical ya que una gran cantidad de resultados y conceptos pueden entenderse desde el punto de vista de las mismas.

La primera sección del presente capítulo está dedicada a explicar los conceptos básicos de las matroides ordinarias. En ella definimos y estudiamos los conceptos de conjunto independiente, circuitos, bases y rango y vemos las relaciones entre dichas definiciones.

La segunda sección del capítulo va dedicada al estudio de las matroides valoradas, que fueron introducidas por Dress y Wenzel en [DW92]. Las matroides valoradas son el marco de trabajo ideal para definir los ideales tropicales. Muchas de las buenas propiedades que nos interesan de los ideales tropicales, en relación al estudio de sus funciones de Hilbert o de la condición de cadena ascendente, se heredan precisamente del buen comportamiento de las matroides valoradas.

1.1 Conceptos básicos

Como mencionamos anteriormente, en esta primera sección vamos a dar diversas definiciones equivalentes de matroides y a explicar algunos de los conceptos básicos asociados a ellas como son los circuitos, las bases, el rango, etc. Pese a no ser el objetivo fundamental de esta memoria, introduciremos algunas de las pruebas para mostrar las técnicas básicas de demostración con estos objetos. Las principales referencias a seguir en cuanto a la teoría básica de matroides son [Oxl11] y [Wel76].

Existen varias definiciones alternativas para las matroides. En esta memoria

optamos por presentarlas por sus conjuntos independientes, y a partir de ellos definiremos los circuitos, bases, función de rango, etc. La representación mediante circuitos será especialmente práctica cuando presentemos las matroides valoradas en la siguiente sección.

1.1.1 Conjuntos dependientes e independientes

Comenzamos la exposición de esta sección introduciendo la definición de las matroides en relación a los conjuntos independientes.

Definición 1.1. Una *matroide* es un par $(E, \mathcal{I})$ donde E es un conjunto finito e $\mathcal{I}$ es una colección de subconjuntos de E que satisfacen las siguientes propiedades:

- I1. $\emptyset \in \mathcal{I}$.
- I2. Si $I \in \mathcal{I}$ y $I' \subset I$, entonces $I' \in \mathcal{I}$.
- I3. Si I_1 e I_2 están en $\mathcal{I}$, y si $|I_1| < |I_2|$, existe un elemento $e \in I_2 \setminus I_1$ tal que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Si M es la matroide $(E, \mathcal{I})$, se dice que M es una matroide sobre E . Los elementos de $\mathcal{I}$ se llaman *conjuntos independientes* de M , mientras que los subconjuntos de E que no están en $\mathcal{I}$ se llaman *conjuntos dependientes*. Denotamos la familia de conjunto independientes de la matroide M por $\mathcal{I}(M)$, o simplemente $\mathcal{I}$ si no existe ambigüedad.

Los conjuntos dependientes minimales para la inclusión reciben el nombre de *circuitos*. Denotamos el conjunto de circuitos de una matroide M como $\mathcal{C}(M)$ o $\mathcal{C}$ si no hay ambigüedad.

En la definición anterior hemos cometido un pequeño abuso de notación: en la propiedad I3, el elemento e es un elemento de E y está en el conjunto $I_2 \setminus I_1$. Al unirlo a I_1 , la notación más correcta debería ser $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$. A lo largo de la memoria cometeremos este pequeño abuso de notación, confundiendo el elemento $e \in E$ con el conjunto $\{e\}$.

Observación 1.2. Es claro que dado $\mathcal{I}(M)$ es sencillo conocer cómo es $\mathcal{C}(M)$. Recíprocamente, si conocemos $\mathcal{C}$ podemos determinar $\mathcal{I}$ ya que los miembros de $\mathcal{I}$ son precisamente los subconjuntos de E que no contienen a ningún miembro de $\mathcal{C}$. Por tanto, una matroide queda también determinada por su familia de circuitos. Es por ello que podemos utilizar también la notación $M = (E, \mathcal{C})$, para referirnos a una matroide cuyos circuitos son los elementos de $\mathcal{C}$.

El primer ejemplo de matroide que encontramos surge de las propiedades de independencia lineal, como refleja la siguiente proposición y el ejemplo posterior.

Proposición 1.3. Sea E el conjunto de columnas de una matriz A de tamaño $m \times n$ con entradas en un cuerpo K y sea $\mathcal{I}$ el conjunto de subconjuntos de índices que corresponden a columnas linealmente independientes en el espacio vectorial K^m . Entonces $(E, \mathcal{I})$ es una matroide.

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Proof. Es claro que $\mathcal{I}$ satisface las condiciones I1 e I2. Veamos que se cumple también I3. Sean I_1, I_2 conjuntos linealmente independientes de E con $|I_1| < |I_2|$. Sea W el subespacio de K^m generado por $I_1 \cup I_2$. Se tiene que $\dim W \geq |I_2|$. Supongamos que para todo $e \in I_2 \setminus I_1$, $I_1 \cup e$ es dependiente. Entonces W está contenido en el subespacio generado por I_1 y así

$$|I_2| \leq \dim W \leq |I_1| < |I_2|,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $e \in I_2 \setminus I_1$ tal que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$. $\square$

Ejemplo 1.4. Consideremos la siguiente matriz sobre $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y cada índice corresponde a una columna en la matriz A . De acuerdo con la Proposición 1.3, los conjuntos independientes de la matroide asociada a la matriz A serían

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\},$$

mientras que sus circuitos son los siguientes

$$\mathcal{C} = \{\{3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 4, 5\}\}.$$

$\triangle$

Las matroides obtenidas a partir de matrices como hemos explicado reciben el nombre de *matroides vectoriales*. Si A es la matriz de partida, denotamos la correspondiente matroide vectorial por $M[A]$.

Vamos a caracterizar a continuación qué subconjuntos de E pueden formar el conjunto de circuitos de una matroide M y a conocer algunas de las propiedades de los circuitos.

Proposición 1.5. *El conjunto $\mathcal{C}$ de circuitos de una matroide satisface las siguientes propiedades:*

- C1. $\emptyset \notin \mathcal{C}$.
- C2. Si C_1 y C_2 están en $\mathcal{C}$ y $C_1 \subset C_2$, entonces $C_1 = C_2$.
- C3. Si C_1 y C_2 son miembros distintos no disjuntos de $\mathcal{C}$ y $e \in C_1 \cap C_2$, existe un circuito $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subset (C_1 \cup C_2) \setminus e$.

La condición (C3) se llama *axioma de eliminación de circuitos*.

Proof. Las dos primeras propiedades son claras. Probaremos la tercera por reducción al absurdo. Supongamos que $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ no contiene ningún circuito, entonces es un conjunto independiente. Por (C2), como C_1 y C_2 son circuitos distintos, existe $f \in C_2 \setminus C_1$. Como C_2 es un circuito, $C_2 \setminus f$ es independiente.

Tomemos $I \subset C_1 \cup C_2$ maximal con la propiedad de ser independiente y de contener a $C_2 \setminus f$. Claramente $f \notin I$. Como C_1 es un circuito, existe $g \in C_1$ que no está en I y además $f \neq g$. Por tanto

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{f, g\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus e|.$$

Aplicando la propiedad (I3) a los conjuntos independiente I y $(C_1 \cup C_2) \setminus e$, obtenemos un conjunto independiente que contradice la maximalidad de I . $\square$

Además, estas tres propiedades caracterizan a las familias de conjuntos que pueden ser la colección de circuitos de una matroide, en el sentido que precisa el siguientes teorema.

Teorema 1.6. *Sea E un conjunto finito y sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de E que satisfacen las propiedades (C1)–(C3). Sea $\mathcal{I}$ la familia de subconjuntos de E que no contienen a ningún miembro de $\mathcal{C}$, entonces $(E, \mathcal{I})$ es una matroide que tiene a $\mathcal{C}$ como conjunto de circuitos.*

Proof. Ver [Oxl11, Th. 1.1.4]. $\square$

Combinando la Proposición 1.5 con el Teorema 1.6 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.7. *Sea $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos de un conjunto E . Entonces $\mathcal{C}$ es la colección de circuitos de una matroide M sobre E si y solo si satisface las siguientes propiedades:*

- C1. $\emptyset \notin \mathcal{C}$.
- C2. Si C_1 y C_2 están en $\mathcal{C}$ y $C_1 \subset C_2$, entonces $C_1 = C_2$.
- C3. Si C_1 y C_2 son miembros distintos de $\mathcal{C}$ y $e \in C_1 \cap C_2$, existe un circuito $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subset (C_1 \cup C_2) \setminus e$.

Presentamos ahora el segundo tipo de matroides que se introdujeron en el artículo fundacional [Whi35]. El primero de ellos lo hemos visto en la Proposición 1.3. Este segundo tipo surge de la teoría de grafos, como muestra la siguiente proposición.

Recordemos que un *ciclo* en un grafo G es un subgrafo conexo cuyos vértices tienen grado dos. Básicamente, un ciclo es un camino donde no se repiten aristas ni vértices salvo el vértice inicial y final, que es el mismo. Recordemos también que un grafo conexo es aquel en el que cada par de vértices distintos pueden unirse mediante un camino.

Proposición 1.8. *Sea E el conjunto de aristas de un grafo G y sea $\mathcal{C}$ el conjunto de conjuntos de aristas que corresponden a ciclos en G . Entonces $\mathcal{C}$ es el conjunto de circuitos de una matroide sobre E .*

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Proof. Es claro que $\mathcal{C}$ satisface las propiedades C1 y C1. Veamos que satisface el axioma de eliminación C3, nos ayudaremos de la Figura 1.1 en la demostración. Sean C_1 y C_2 conjuntos de aristas de dos ciclos distintos de G que tienen e como arista común. Sean u, v los vértices que une e . Vamos a construir un ciclo de G cuyo conjunto de aristas esté contenido en $(C_1 \cup C_2) \setminus e$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, sea P_i el camino de u a v en G cuyo conjunto de aristas es $C_i \setminus e$. Empezamos en u y vamos recorriendo P_1 . Llamamos w al primer vértice a partir del cual la siguiente arista de P_1 no está en P_2 . Recorremos P_1 desde w hasta el primer vértice que también esté en P_2 , que llamamos x . Este vértice existe ya que P_1 y P_2 acaban ambos en v . Ahora, juntamos la sección de P_1 de w a x con la sección de P_2 de w a x . El resultado es un ciclo con aristas contenidas en $(C_1 \cup C_2) \setminus e$. Por tanto, se verifica C3.

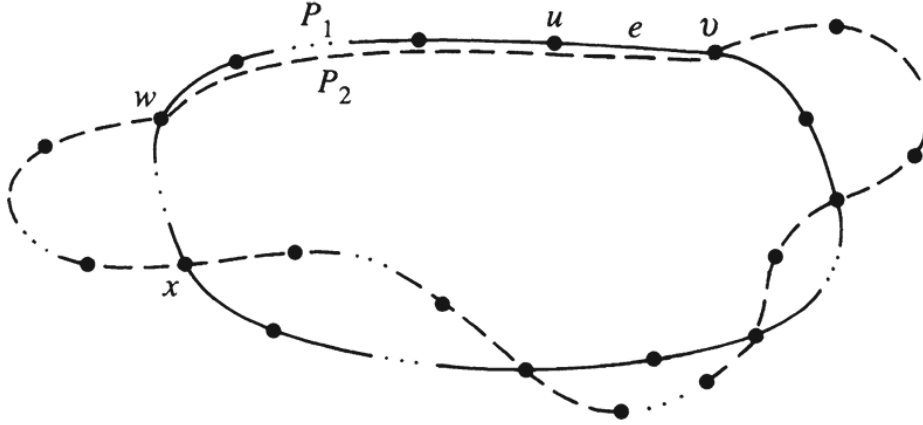


Figura 1.1: Axioma de eliminación de circuitos (figura extraída de [Oxl11, Fig. 1.1, Prop. 1.1.7]).

□

Las matroide obtenida a partir de un grafo G se llama *matroide de ciclos* y se denota por $M(G)$. Un conjunto X de aristas es independiente en $M(G)$ si y solo si X no contiene el conjunto de aristas de un ciclo. Recordemos que un *bosque* es un grafo que no contiene ciclos. Luego la condición anterior es equivalente a que el subgrafo inducido por X , $G[X]$, sea un bosque.

Veamos un ejemplo de este tipo de matroides.

Ejemplo 1.9. Consideremos el grafo G de la Figura 1.2 y tomemos su matroide de ciclos. Se tiene que $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y que el conjunto de circuitos es el siguiente

$$\mathcal{C} = \{\{e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_2, e_4, e_5\}\}.$$

Si comparamos la matroide de ciclos $\mathcal{M}(G)$ con la matroide vectorial $M[A]$ del

Ejemplo 1.4, observamos que bajo la correspondencia

$$\phi: \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \longleftrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

se tiene que X es un circuito en $M(G)$ si y solo si $\phi(X)$ es un circuito en $M[A]$, y de igual manera ocurre con los conjuntos independientes. Se dice que ambas matroides son entonces *isomorfas*.

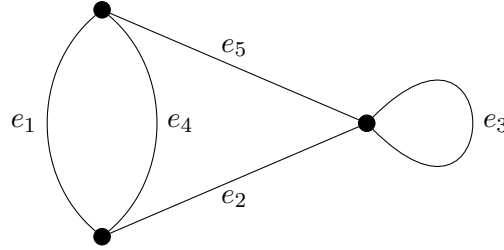


Figura 1.2

△

Definición 1.10. Dos matroides M_1 y M_2 son *isomorfas*, y lo denotamos por $M_1 \cong M_2$ si existe una biyección $\phi: E(M_1) \rightarrow E(M_2)$ tal que para todo subconjunto $X \subset E(M_1)$, el conjunto $\phi(X)$ es independiente en M_2 si y solo si X es independiente en M_1 . Una aplicación ϕ de ese tipo se llama *isomorfismo de matroides*.

Definición 1.11. Una matroide que es isomorfa a la matroide de ciclos para algún grafo G se llama *matroide gráfica*. Una matroide que es isomorfa a la matroide vectorial de una matriz A con entradas en un cuerpo K se dice que es *representable sobre K* , o *K -representable*.

En general, se puede probar que toda matroide gráfica es representable sobre cualquier cuerpo K , [Oxl11, Prop. 5.1.2]. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Tampoco es cierto que solo existan matroides representables, como se muestra en [Oxl11, Prop. 2.2.26].

Terminamos la sección destinada a los circuitos para introducir las definiciones de algunos conceptos importantes de las matroides. Es interesante observar que toman su nombre de la teoría de grafos.

Definición 1.12. Sea M una matroide sobre E .

- Un elemento $e \in E$ es un *bucle* de M si $\{e\}$ es un circuito de M .
- Si $f, g \in E$ cumplen que $\{f, g\}$ es un circuito, se dice que son *paralelos*. Una *clase paralela* de M es un conjunto maximal $X \subset E$ tal que cualquier par de elementos de X son paralelos y ninguno es un bucle. Una clase paralela es *trivial* si contiene un solo elemento.

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

- Si M no contiene bucles ni clases paralelas no triviales, se dice que es una *matroide simple* o una *geometría combinatoria*.

1.1.2 Bases

En esta sección introducimos las bases de las matroides, que generalizan las bases del álgebra lineal. Veremos que, al igual que los conjuntos independientes y los circuitos, permiten caracterizar las matroides. Como el concepto de base de una matroide generaliza el de base vectorial, veremos que comparten algunas de sus propiedades, por ejemplo, veremos en la Proposición 1.14 que todas las bases de una matroide tienen el mismo cardinal.

Definición 1.13. Sea $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide. Una base de M es un conjunto independiente maximal. Denotamos por $\mathcal{B}(M)$ el conjunto de bases de la matroide M .

Proposición 1.14. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$, entonces $|B_1| = |B_2|$.

Proof. Supongamos que $|B_1| < |B_2|$. Por I3, existe $e \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_1 \cup e$ es independiente, en contra de la maximalidad de B_1 . En consecuencia $|B_1| \geq |B_2|$. Análogamente se prueba que $|B_2| \geq |B_1|$. $\square$

El conjunto de bases de una matroide cumple las siguientes propiedades:

Proposición 1.15. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de bases de una matroide M . Se cumplen las siguientes propiedades:

B1. $\mathcal{B}$ es un conjunto no vacío.

B2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \setminus B_2$, existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}$.

La condición B2 es uno de los varios axiomas de intercambio de base que cumplen las matroides.

Proof. (B1) es inmediata consecuencia de (I1). Probemos la segunda condición. Tanto $B_1 \setminus x$ como B_2 son independientes, además puesto que $|B_1| = |B_2|$, se tiene que $|B_1 \setminus x| < |B_2|$. Por la propiedad (I3) existe $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus x)$ tal que $(B_1 \setminus x) \cup y$ es independiente, y por tanto está contenido en una base B'_1 . Sabemos que $|B'_1| = |B_1| = |(B_1 \setminus x) \cup y|$, luego $B'_1 = (B_1 \setminus x) \cup y$, como queríamos probar. $\square$

Estas dos propiedades caracterizan los conjuntos que pueden ser bases de una matroide, en el sentido que precisamos a continuación.

Teorema 1.16. Sea E un conjunto finito y $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de E que satisfacen (B1) y (B2). Sea $\mathcal{I}$ la familia de subconjuntos de E contenidos en algún elemento de $\mathcal{B}$. Entonces $(E, \mathcal{I})$ es una matroide que tiene $\mathcal{B}$ como conjunto de bases.

Proof. Ver [Oxl11, Th. 1.2.3]. □

Combinando los resultados de la Proposición 1.15 y del Teorema 1.16 se obtiene el siguiente corolario que indica qué propiedades caracterizan al conjunto de bases de una matroide.

Corolario 1.17. *Sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de un conjunto E . Entonces $\mathcal{B}$ es la familia de bases de una matroide M sobre E si y solo si verifica las siguientes propiedades:*

B1. $\mathcal{B}$ es un conjunto no vacío.

B2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \setminus B_2$, existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}$.

Puesto que el conjunto de bases de una matroide M la caracteriza, utilizaremos la notación $M = (E, \mathcal{B})$ para denotar una matroide sobre E con conjunto de bases $\mathcal{B}$.

Vamos a ver un par de ejemplo des matroides definidas a partir de sus conjunto de bases.

Ejemplo 1.18. Sean m, n enteros no negativos con $m \leq n$. Sea E un conjunto de n elementos y sea $\mathcal{B}$ la familia de subconjuntos de E de cardinal m . Es claro que $\mathcal{B}$ cumple las condiciones (B1) y (B2) y por lo tanto es el conjunto de bases de una matroide. Esta matroide recibe el nombre de *matroide uniforme* y la denotamos por $U_{m,n}$. Es claro que la familia de sus conjuntos independientes es

$$\mathcal{I}(U_{m,n}) = \{X \subset E : |X| \leq m\},$$

y que su familia de circuitos es

$$\mathcal{C} = (U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } m = n, \\ \{X \subset E : |X| = m + 1\}, & \text{si } m < n. \end{cases}$$

Si $m = 0$, entonces $U_{0,n}$ consiste en n bucles, mientras que si $m = 1$, entonces $U_{1,n}$ consiste en una única clase paralela de n elementos. Si $m \geq 2$, $U_{m,n}$ es simple. Si $m = n$, la matroide $U_{n,n}$ no tiene conjuntos dependientes. Dichas matroides se llaman *libres*. △

Ejemplo 1.19. Sean $(E_1, E_2, \dots, E_r)$ una partición π de un conjunto finito E y sea $\mathcal{B}$ la familia de subconjuntos de E que contienen exactamente un elemento de cada E_i . Es sencillo comprobar que $\mathcal{B}$ satisface las condiciones (B1) y (B2) y por tanto es el conjunto de bases de una matroide sobre E . Dicha matroide se llama *matroide partición* y se denota por M_π . Se tiene que

$$\mathcal{I}(M_\pi) = \{X \subset E : |X \cap E_i| \leq 1 \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, r\}\},$$

mientras que sus circuitos son

$$\mathcal{C}(M_\pi) = \{\{a, b\} : a \neq b \text{ y } \{a, b\} \subset E_i \text{ par algún } i \in \{1, 2, \dots, r\}\}.$$

Notemos que si $|E_i| = 1$ para todo i , entonces $M_\pi \cong U_{r,r}$. △

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Observación 1.20. Vamos a ver cuáles son las bases de las matroides gráficas y las representables.

- En el caso de las matroides gráficas, habíamos mencionado que un subconjunto X es independiente en $M(G)$ si el subgrafo inducido por X es un bosque. De este modo, X es una base de $M(G)$ si $G[X]$ es un bosque tal que para todo $e \notin X$, el grafo $G[X \cup e]$ contiene un ciclo.
- Tratemos ahora el caso representable. Sea A una matriz $m \times n$ con entradas en el cuerpo K . Las columnas de A generan un subespacio $W \subset K^m$ de dimensión $\dim W$. Un subconjunto B de índices de columnas es una base de $M[A]$ si y solo si $|B| = \dim W$ y las columnas indicadas por B son una base de W . Por ejemplo, sea A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, $\dim W = 2$ y las bases de $M[A]$ son todos los subconjuntos de 2 elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$, de modo que $M[A] \cong U_{2,4}$.

Proposición 1.21. Sea I un conjunto independiente de M y sea $e \in E$ un elemento tal que $I \cup e$ es dependiente. Existe un único circuito contenido en $I \cup e$ y dicho circuito contiene a e .

Proof. Es claro que $I \cup e$ contiene algún circuito y cualquier circuito contenido en $I \cup e$ debe contener a e . Veamos que es único. Sean C y C' dos circuitos distintos con la propiedad anterior. Por (C3), existe un circuito contenido en $(C \cup C') \setminus e$, pero $(C \cup C') \setminus e$ está contenido en I , lo cual es absurdo. $\square$

Como consecuencia inmediata se obtiene el siguiente corolario, que permite definir los llamados circuitos fundamentales.

Corolario 1.22. Sea B una base de una matroide M y sea $e \in E \setminus B$, entonces $B \cup e$ contiene un único circuito $C(e, B)$, y además $e \in C(e, B)$. Dicho circuito se llama *circuito fundamental de e con respecto a B* .

La importancia de los circuitos fundamentales es que todos los circuitos de una matroide se pueden ver como circuitos fundamentales de sus elementos con respecto a una base adecuada.

Proposición 1.23. Si C es un circuito de la matroide M y $e \in C$, entonces M tiene una base B de tal forma que C es el circuito fundamental de e con respecto a B , es decir, $C = C(e, B)$.

Proof. Como C es un circuito, $C \setminus e$ es un conjunto independiente y por tanto está contenido en una base B . Dicha base no puede contener a e por que B es un conjunto independiente y $C \setminus e \subset B$. Se tiene entonces que C es un circuito contenido en $B \cup e$, por el Corolario 1.22, $C = C(e, B)$. $\square$

Proposición 1.24. *Sea M una matroide sobre un conjunto E , B una base de M , $f \in E$ y $e \in E \setminus B$. Se tiene que $(B \cup e) \setminus f$ es una base de M si y solo si $f \in C(e, B)$.*

Proof. Recordamos que $C(e, B)$ es el único circuito de M contenido en $(B \cup e)$. Supongamos que $f \in C(e, B)$, si probamos que $(B \cup e) \setminus f$ es independiente, sería una base por tener el mismo cardinal que B , pero es claro que es independiente ya que si $(B \cup e) \setminus f$ contiene un circuito C entonces $C \subset (B \cup e)$, por lo que $C = C(e, B)$, lo cual es absurdo ya que $f \in C(e, B)$ y $f \notin C$. Supongamos ahora que $f \notin C(e, B)$, entonces $C(e, B) \subset (B \cup e) \setminus f$ y no sería una base. $\square$

1.1.3 Rango

La siguiente sección está dedicada al estudio del rango de una matroide, que generaliza el concepto de dimensión vectorial. Para definir la función de rango de una matroide, esto es, una función que a cada subconjunto $X \subset E$ le asocia un valor numérico llamado *rango*, es previamente necesario que introduzcamos el concepto de matroide restricción.

Sea $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide y sea $X \subset E$. Sea $\mathcal{I}|X = \{I \subset X : I \in \mathcal{I}\}$. Es sencillo comprobar que $(E, \mathcal{I}|X)$ es una matroide, que llamamos *matroide restricción* y denotamos por $M|X$. También es fácil ver que sus circuitos son $\mathcal{C}(M|X) = \{C \subset X : C \in \mathcal{C}(M)\}$. Puesto que $M|X$ es una matroide, por la Proposición 1.14 todas sus bases tienen el mismo cardinal. Definimos el *rango* de X , $r(X)$, como el cardinal de una base B de $M|X$, y decimos que B es una base de X , es decir,

$$r(X) = \max\{|I| : I \subset X, I \text{ independiente}\}.$$

Proposición 1.25. *Sea $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide y sea $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ su función de rango, donde $\mathcal{P}(E)$ denota el conjunto de partes de E . Se cumplen las siguientes propiedades:*

- R1. *Si $X \subset E$, entonces $0 \leq r(X) \leq |X|$.*
- R2. *Si $X \subset Y \subset E$, entonces $r(X) \leq r(Y)$.*
- R3. *Si $X, Y \subset E$, entonces*

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y).$$

Proof. Las dos primeras propiedades son inmediatas de la definición de rango. Probemos R3. Sea $B_{X \cap Y}$ una base de $X \cap Y$. Se tiene que $B_{X \cap Y}$ es un conjunto independiente de $M|(X \cup Y)$ y está por tanto contenido en una base $B_{X \cup Y}$ de $X \cup Y$. Ahora, $B_{X \cup Y} \cap X$ y $B_{X \cup Y} \cap Y$ son independientes en $M|X$ y $M|Y$, respectivamente y por lo tanto, $r(X) \geq |B_{X \cup Y} \cap X|$ y $r(Y) \geq |B_{X \cup Y} \cap Y|$, por

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

lo que

$$\begin{aligned}
 r(X) + r(Y) &\geq |B_{X \cup Y} \cap X| + |B_{X \cup Y} \cap Y| \\
 &= |(B_{X \cup Y} \cap X) \cup (B_{X \cup Y} \cap Y)| \\
 &\quad + |(B_{X \cup Y} \cap X) \cap (B_{X \cup Y} \cap Y)| \\
 &= |B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y)| + |B_{X \cup Y} \cap (X \cap Y)|.
 \end{aligned}$$

Ahora bien, $B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y) = B_{X \cup Y}$ y $B_{X \cup Y} \cap (X \cap Y) = B_{X \cap Y}$ obteniendo así que $r(X) + r(Y) \geq |B_{X \cup Y}| + |B_{X \cap Y}| = r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$. $\square$

Estas tres propiedades caracterizan las funciones que pueden ser la función de rango de una matroide.

Teorema 1.26. *Sea E un conjunto finito y sea $r: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ una función que satisface (R1) – (R3). Sea $\mathcal{I}$ la colección de subconjuntos X de E tal que $r(x) = |X|$, entonces $(E, \mathcal{I})$ es una matroide que tiene función de rango r .*

Proof. Ver [Oxl11, Th. 1.3.2]. $\square$

Combinando la Proposición 1.25 y el Teorema 1.26 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.27. *Sea E un conjunto finito. Una función $r: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ es la función de rango de una matroide M sobre E si y solo si cumple las siguientes propiedades:*

- R1. *Si $X \subset E$, entonces $0 \leq r(X) \leq |X|$.*
- R2. *Si $X \subset Y \subset E$, entonces $r(X) \leq r(Y)$.*
- R3. *Si $X, Y \subset E$, entonces*

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(x) + r(Y).$$

Los conjuntos independientes, los circuitos y las bases se pueden caracterizar también mediante la función de rango. La demostración se sigue fácilmente de la definición del rango de una matroide, explicitamos el primer caso.

Proposición 1.28. *Sea M una matroide con función de rango r y sea $X \subset E$. Entonces*

- *X es independiente si y solo si $r(X) = |X|$.*
- *X es base si y solo si $r(X) = r(M) = |X|$.*
- *X es un circuito si y solo si X es no vacío y para todo $x \in X$, se tiene que $r(X \setminus x) = |X| - 1 = r(X)$.*

Proof. Si X es independiente, entonces X es una base de $M|X$ y por lo tanto $r(X) = |X|$. Por otro lado, por la definición de rango,

$$r(X) = \max\{|I| : I \subset X, I \text{ independiente}\},$$

es claro que si $r(X) = |X|$, entonces X es independiente. $\square$

Ejemplo 1.29. Vamos a explicitar la función de rango para la clase de matroides uniformes y para la clase de representables.

- Si $M = U_{m,n}$, entonces es claro que

$$r(X) = \begin{cases} |X|, & \text{si } |X| < m, \\ m, & \text{si } |X| \geq m. \end{cases}$$

- Si $M = M[A]$ donde A es una matriz $m \times n$ con entradas en un cuerpo K , entonces $r(X)$ es el rango de la submatriz de A correspondiente a las columnas de A indicadas por los elementos de X , o equivalentemente, $r(X)$ es la dimensión como subespacio vectorial del espacio generado por los vectores columna correspondientes a los índices de X .

$\triangle$

1.2 Matroides valoradas

Explicaremos en esta sección el concepto de matroide valorada, introducido por Dress y Wenzel en [DW92]. Este es el marco de trabajo necesario para introducir los ideales tropicales y también para poder hablar de subespacios lineales tropicales. Esta última parte no la desarrollaremos porque excede los contenidos del trabajo, pero tiene una estrecha relación con los ideales tropicales. Para más información sobre este tema se puede consultar [MS15, §4.4], [Spe08].

Pese a que las matroides valoradas se pueden definir sobre grupos abelianos totalmente ordenados más generales como se hace en el artículo original de Dress y Wenzel, nosotros vamos a particularizar al caso de la geometría tropical: a lo largo de la sección, y en adelante en la presente memoria, supondremos que $(R, \oplus, \odot)$ es un semianillo al que le pedimos además que $a \oplus b := \min\{a, b\}$. Vamos a denotar por ∞ al elemento neutro aditivo y por $R^* = R \setminus \{\infty\}$. Pediremos que $(R^*, \odot)$ sea un grupo totalmente ordenado y extendemos el orden a R haciendo que ∞ sea el elemento máximo. Recordemos que un semianillo es un anillo en el que se prescinde de la condición de que cada elemento tenga un neutro aditivo.

Los principales ejemplos con los que se trabaja dentro del ámbito de la geometría tropical son el semianillo tropical (o min-plus álgebra), $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\mathbb{R}} := (\mathbb{R} \cup \infty, \oplus, \odot), \text{ donde } \oplus := \min; \odot := +,$$

1.2. MATROIDES VALORADAS

y el subsemianillo Booleano $\mathbb{B}$ de $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\mathbb{B} := (\{0, \infty\}, \oplus, \odot).$$

Un *ideal* I en un semianillo R es un subconjunto no vacío de R cerrado por suma, y por multiplicación por elementos de R . Vamos a denotar por $R[x_0, \dots, x_n]$ el semianillo de polinomios en las variables $x_0, \dots, x_n$ con coeficientes en R . En el caso de que $R = \overline{\mathbb{R}}$, los elementos de $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ son vistos como polinomios y no como funciones, por ejemplo, los polinomios $f = x^2 \oplus 0$ y $g = 2 \odot x^2 \oplus 0$ son distintos pese a que tomen los mismos valores en todo $\mathbb{R}$. Dado un polinomio $f = \bigoplus a_u \odot x^u \in \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$, su *soporte* es el conjunto siguiente

$$\text{supp}(f) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1} : a_{\mathbf{u}} \neq \infty\}.$$

De aquí en adelante, vamos a denotar por $\binom{E}{r}$ el conjunto de subconjuntos de E de r elementos.

Definición 1.30. Sea E un conjunto finito, $r \in \mathbb{N}$. Una *matroide valorada* sobre E con valores en el semicuerpo R es un par $\mathcal{M} = (E, p)$, donde $p: \binom{E}{r} \rightarrow R$ satisface las siguientes propiedades:

(VB1) Existe $B \in \binom{E}{r}$ tal que $p(B) \neq \infty$.

(VB2) Para cada $A, B \in \binom{E}{r}$ y todo $a \in A \setminus B$ existe $b \in B \setminus A$ tal que

$$p(A) \odot p(B) \geq p(A \cup b \setminus a) \odot p(B \cup a \setminus b).$$

La propiedad (VB2) recibe el nombre de *axioma de intercambio de bases valoradas*. La función p recibe el nombre de *función de valoración* de $\mathcal{M}$. Dos valoraciones p_1, p_2 son equivalentes si existe $\lambda \in R^*$ tal que $p_1 = \lambda \odot p_2$.

Observación 1.31. Si $\mathcal{M} = (E, p)$ es una matroide valorada, por el Teorema 1.16, su *soporte* $\mathcal{B} = \{B \in \binom{E}{r} : p(B) \neq \infty\}$ es la colección de bases de una matroide de rango r sobre E , que llamamos *matroide subyacente* $\underline{\mathcal{M}}$. De este modo, podemos definir una matroide valorada como una terna $(E, \mathcal{B}, p)$, donde $(E, \mathcal{B})$ es una matroide con conjunto de bases $\mathcal{B}$ y p es una función de valoración sobre el conjunto de bases de $\mathcal{M}$ que verifique (VB2). Conviene tener esta idea en mente, una matroide valorada es una matroide M junto con una función de valoración p que a cada base B de M le asocia un valor $p(B) \in R$.

Observación 1.32. Toda matroide M sobre E con conjunto de bases $\mathcal{B}(M)$ tiene una función de valoración trivial dada por

$$p(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } X \in \mathcal{B} \\ \infty, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1.2.1 Motivación de la definición de matroide valorada

Dedicamos esta sección a dar el ejemplo motivador que sirvió para la definición de las matroides valoradas en [DW92]. La referencia que seguimos para la presentación de este ejemplo es [MT01, Section 2] y [Mur10, Sect. 5.2.2]. En estas referencias, las desigualdades están invertidas con respecto a nuestra definición porque en lugar de introducir el elemento ∞ introducen $\{-\infty\}$.

Sea $A(s)$ una matriz de tamaño $m \times n$ y rango m que tiene como entradas funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{R}$ en la variable s . Consideremos ahora $M[A]$ la matroide vectorial asociada a la matriz A , como presentamos en la Proposición 1.3. Dada una función racional $f(s)$, se escribe como cociente de polinomios $f(s) = p(s)/q(s)$ y su grado se define como la diferencia de los grados de dichos polinomios, es decir, $\deg_s(f) = \deg_s(p) - \deg_s(q)$. Vamos a definir una valoración sobre esta matroide. Para ello, debemos utilizar una identidad muy importante acerca de los determinantes, que resulta muy útil en el estudio combinatorio de las matroides: la identidad de Grassmann-Plücker.

Consideremos una matriz A , R su conjunto de filas y C su conjunto de columnas. Para $I \subset R$ y $J \subset C$, vamos a denotar por $A[I, J]$ la submatriz de A obtenida al quedarnos con las filas en I y las columnas en J , esto es,

$$A[I, J] = (a_{ij} : i \in I, j \in J).$$

Proposición 1.33 (Identidad de Grassmann-Plücker). *Sea A una matriz, R su conjunto de filas y C su conjunto de columnas y supongamos que $|R| \leq |C|$. Para cada $J, J' \subset C$ con $|J| = |J'| = |R|$ y $i \in J \setminus J'$ se tiene que*

$$\det A[R, J] \cdot \det A[R, J'] = \sum_{j \in J' \setminus J} \det A[R, J - i + j] \cdot \det A[R, J' + i - j], \quad (1.1)$$

donde $J - i + j$ indica que la columna j se pone en el lugar que ocupaba la columna i en J , y análogamente con $J' + i - j$.

Proof. [Mur10, Prop. 2.1.4] □

Recordemos que la matroide vectorial $M[A]$ tiene como conjunto de bases $\mathcal{B} = \{B \subset C : \det[R, B] \neq 0\}$. Sobre dicho conjunto de bases vamos a definir una valoración $p: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $p(B) = \deg_s \det A[R, B]$. Si reinterpretemos (1.1) en base a esta función definida, tomando el grado, obtenemos que

$$p(B) + p(B') \geq \min_{j \in B' \setminus B} p(B - i + j) + p(B' + i - j) \quad (1.2)$$

Esta última ecuación es similar al axioma de intercambio de bases valoradas (VB2) de la definición de matroide valorada.

1.2.2 Circuitos y vectores valorados

Nuestro siguiente paso es definir cómo son los circuitos y vectores de las matroides valoradas. Estos conceptos son tremendamente importantes ya que son la base de cómo se definen los ideales tropicales. La principal referencia a seguir es [MT01]. En dicho artículo se muestran las principales propiedades de los circuitos y los vectores valorados y se prueba que dichas propiedades caracterizan también las matroides valoradas. Nos limitaremos a enunciar los resultados más importantes y citar los teoremas correspondientes de dicho artículo para las demostraciones que no completemos.

Definición 1.34. Dado un vector $H \in R^E$, definimos su *soporte* como el conjunto

$$\underline{H} = \text{supp}(H) = \{e \in E : H_e \neq \infty\}.$$

Definición 1.35. Sea $\mathcal{M} = (E, p)$ una matroide valorada. Para cada base $B \in \mathcal{B}$ de $\underline{\mathcal{M}}$ y cada $e \in E \setminus B$, definimos el *circuito fundamental* $H(B, e)$ de $\mathcal{M}$ como el vector de R^E , que tiene como coordenadas:

$$H(B, e)_{e'} := p(B \cup e - e') / p(B).$$

En esta definición, $/$ denota la división en R , (la resta en el caso de que $R = \overline{\mathbb{R}}$), y $p(B') = \infty$ si $|B'| > r$ y $\infty / \lambda = \infty$ para todo $\lambda \in R^*$.

Observación 1.36. Es importante remarcar que el soporte de $H(B, e)$ coincide con el circuito fundamental $C(e, B)$ en la matroide subyacente $\underline{\mathcal{M}}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \underline{H(B, e)} &= \{e' \in E : p(B \cup -e') \neq \infty\} \\ &= \{e' \in E : (B \cup e - e') \text{ es base de } \underline{\mathcal{M}}\} \\ &= C(e, B), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la Proposición 1.24.

Definición 1.37. Un *circuito* (o circuito valorado), en $\mathcal{M}$ es un elemento de R^E de la forma $\lambda \odot H(B, e)$, donde $\lambda \in R^*$ y $H(B, e)$ es un circuito fundamental. Denotamos por $\mathcal{C}$ la familia de circuitos de $\mathcal{M}$, o $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ si existe ambigüedad.

Observación 1.38. La Observación 1.36 implica que la familia de soportes de los circuitos de $\mathcal{M}$, $\underline{\mathcal{C}} = \{\underline{C} : C \in \mathcal{C}(\mathcal{M})\}$, es el conjunto de circuitos de la matroide subyacente $\underline{\mathcal{M}}$.

La familia de circuitos de una matroide valorada presenta las propiedades que enunciamos en la Proposición 1.39. La más importante de ellas es la que marcamos como (VCE), y que llamaremos axioma de eliminación de circuitos valorados. La demostración, junto con el enunciado del teorema, pueden encontrarse en [MT01, Th. 3.1]. Las operaciones en el enunciado han de interpretarse componente a componente del vector.

Proposición 1.39. Sea $\mathcal{M} = (E, p)$ una matroide valorada y sea $\mathcal{C}$ su familia de circuitos. Se verifican las siguientes propiedades:

- (VC1) $(\infty, \dots, \infty) \notin \mathcal{C}$.
- (VC2) Si $F, G \in \mathcal{C}$ con $\underline{F} \neq \underline{G}$, entonces $F \not\leq G$.
- (VC3) Si $F \in \mathcal{C}$, $\lambda \in R^*$, entonces $\lambda \odot F \in \mathcal{C}$.
- (VC3_e) Si $F, G \in \mathcal{C}$ con $\underline{F} = \underline{G}$, existe $\lambda \in R^*$ tal que $G = \lambda \odot F$.
- (VCE) Para todos $G, H \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ y todos $e, e' \in E$ tal que $G_e = H_e \neq \infty$ y $G_{e'} < H_{e'}$, existe $F \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ con $F_e = \infty$, $F_{e'} = G_{e'}$ y $F \geq G \oplus H$.

En [MT01, Th. 3.3] se prueba que (VC1), (VC2), (VC3) y (VCE) equivalen, en el sentido de que sirven para definir una matroide valorada, a los axiomas (VB1) y (VB2).

En relación a la noción de circuito valorado introducida, vamos a abordar ahora la de vector valorado, que generaliza el concepto de ciclo de las matroides ordinarias.

Definición 1.40. Un *ciclo* en una matroide es una unión de circuitos. Un *vector* de una matroide valorada es un elemento de R^E generado por circuitos valorados. Explícitamente, el conjunto de vectores de $\mathcal{M}$ es

$$\mathcal{V}(\mathcal{M}) := \left\{ \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(\mathcal{M})} \lambda_H \odot H : \lambda_H \in R \right\}.$$

Esto es, un vector valorado consiste en tomar, componente a componente, el mínimo de una familia de circuitos.

Los vectores de una matroide valorada pueden caracterizarse mediante una serie de axiomas, recogidos en [MT01, Th. 3.4]. La condición más importante, y que nos servirá para definir los ideales tropicales es la que marcamos como (VVE), y llamamos axioma de eliminación de vectores valorados.

Proposición 1.41. Sea $\mathcal{M} = (E, p)$ una matroide valorada. El conjunto de vectores $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ verifica las siguientes propiedades:

- (VV1) $(\infty, \dots, \infty) \in \mathcal{V}$.
- (VV2) Si $F, G \in \mathcal{V}$, entonces $\min(F, G) \in \mathcal{V}$.
- (VV3) Si $F \in \mathcal{V}$, $\alpha \in R$, entonces $\alpha \odot F \in \mathcal{V}$.
- (VVE) Para cada $G, H \in \mathcal{V}$ y $e \in E$ tal que $G_e = H_e \neq \infty$, existe $F \in \mathcal{V}$ cumpliendo $F_e = \infty$, $F \geq G \oplus H$, y $F_{e'} = G_{e'} \oplus H_{e'}$ para todo $e' \in E$ tal que $G_{e'} \neq H_{e'}$.

La Proposición 1.41, junto a los dos siguientes resultados que vamos a enunciar, correspondientes a [MT01, Th. 3.5] y [MT01, Th. 3.6], respectivamente, muestran que los axiomas de vectores definen también la matroide valorada, es decir, son equivalentes a los axiomas de bases valoradas y circuitos valorados.

1.2. MATROIDES VALORADAS

Para un $X \subset R^E$, definimos el siguiente conjunto

$$\text{Minsupp}(X) = \{A \subset X : A \text{ es de soporte minimal en } X\}.$$

Dada una familia de elementos de R^E que satisfagan los axiomas de la Proposición 1.41 definimos

$$\Psi_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}}(\mathcal{V}) := \text{Minsupp}(\mathcal{V}).$$

A su vez, si partimos de una familia $\mathcal{C}$ que satisface los axiomas de circuitos introducidos en la Proposición 1.39, definimos

$$\Psi_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{V}}(\mathcal{C}) := \mathcal{V}(\mathcal{M}),$$

es decir, el conjunto de vectores de la matroide valorada correspondiente a ese conjunto de circuitos, que recordemos que se obtiene tomando el mínimo de los circuitos, componente a componente.

Teorema 1.42. *Para una familia $\mathcal{V} \subset R^E$ que satisface (VV1) – (VVE), se tiene que $\Psi_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}}(\mathcal{V})$ verifica los axiomas de circuitos (VC1) – (VCE).*

Proof. Ver [MT01, Th. 3.5] □

El siguiente teorema explica cómo recuperar el conjunto de circuitos a partir del de vectores y viceversa.

Teorema 1.43. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{V}$ conjuntos de elementos de R^E que satisfacen los axiomas de circuitos y de vectores, respectivamente. Entonces se cumple lo siguiente:*

$$\Psi_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}}(\Psi_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{V}}(\mathcal{C})) = \mathcal{C}, \tag{1.3}$$

$$\Psi_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{V}}(\Psi_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}}(\mathcal{V})) = \mathcal{V}. \tag{1.4}$$

Observación 1.44. La parte (1.3) del Teorema 1.43 muestra que los circuitos valorados son los vectores de soporte minimal.

Observación 1.45. En el caso particular en que $R = \mathbb{B} = \{0, \infty\}$, las matroides valoradas son simplemente matroides ordinarias ya que las condiciones (VB1) y (VB2) de la Definición 1.30 equivalen a las propiedades (B1) y (B2) de la Proposición 1.15. En efecto, si los únicos valores posibles son $\{0, \infty\}$ y A y B son bases, es decir, $p(A) \neq \infty \neq p(B)$, entonces, por (VB2), para todo $a \in A \setminus B$ existe $b \in B \setminus A$ tal que $p(A \cup b - a) \neq \infty$, y por tanto es una base. En este caso, los circuitos valorados y los vectores están en correspondencia con los circuitos y los ciclos, respectivamente, de la matroide subyacente $\underline{\mathcal{M}}$.

Capítulo 2

Fundamentos de geometría tropical

Como mencionamos en la Introducción, la geometría tropical es una rama de reciente aparición en las matemáticas que ha establecido numerosos puentes entre la geometría algebraica clásica y la geometría poliedral y combinatoria. Este capítulo está dedicado al estudio de los principales conceptos de una y otra rama, necesarios para comprender dichos puentes y poder estudiar las variedades y los objetos propios de la geometría tropical.

La Sección 2.1, de corte más algebraico, está dedicada al estudio de las valoraciones sobre un cuerpo K . Esta herramienta nos permite pasar de polinomios definidos sobre un cuerpo arbitrario K , a polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, que van a definir variedades tropicales en $\mathbb{R}^n$.

La Sección 2.2, de corte más combinatorio, estudia los conceptos de geometría poliedral y convexa necesario para comprender cómo son las variedades que se estudian en la geometría tropical.

En la Sección 2.3 nos adentramos en los aspectos propios de la geometría tropical. Definimos en ella el semianillo tropical $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$, sobre el cual vamos a definir polinomios, que a su vez tendrán variedades asociadas. Para entender cómo son esas variedades son imprescindibles los conceptos de ideal inicial y complejo de Gröbner de un ideal, que aparecen en 2.3.1. En 2.3.2 y 2.3.3 aparecen, respectivamente, el Teorema Fundamental de la Geometría Tropical, Teorema 2.67 y el Teorema de Estructura, Teorema 2.69 que culminan el estudio algebraico y combinatorio de las variedades tropicales.

2.1 Valoraciones

A continuación, introducimos el concepto de valoración sobre un cuerpo arbitrario K , restringiéndonos al caso en que el grupo de valores es un subgrupo de

los números reales, que es el caso que ocupa a la geometría tropical. La principal referencia de esta sección es [MS15, §2.1].

Definición 2.1. Sea K un cuerpo y sea $K^* = K \setminus \{0\}$. Una *valoración* sobre K es una función $\text{val}: K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\text{val}(a) = \infty$ si y solo si $a = 0$,
- $\text{val}(ab) = \text{val}(a) + \text{val}(b)$,
- $\text{val}(a + b) \geq \min\{\text{val}(a), \text{val}(b)\}$.

Denotaremos una valoración sobre un cuerpo K por el par (K, val) , o simplemente val si no existe ambigüedad.

Lema 2.2. Si $\text{val}(a) \neq \text{val}(b)$, entonces $\text{val}(a + b) = \min\{\text{val}(a), \text{val}(b)\}$.

Proof. Podemos suponer que $\text{val}(b) > \text{val}(a)$, es decir, $\text{val}(a + b) \geq \text{val}(a)$. Se tiene que $\text{val}(1) = \text{val}(1^2) = \text{val}(1) + \text{val}(1)$, luego $\text{val}(1) = 0$. De igual modo, $\text{val}(-1) = 0$, por tanto $\text{val}(b) = \text{val}(-b)$ para todo $b \in K$. Se tiene entonces que

$$\text{val}(a) \geq \min\{\text{val}(a + b), \text{val}(-b)\} = \min\{\text{val}(a + b), \text{val}(b)\},$$

y por tanto $\text{val}(a) \geq \text{val}(a + b)$. En consecuencia, $\text{val}(a + b) = \text{val}(a)$. □

Observación 2.3. Es habitual identificar una valoración con su restricción al grupo de unidades del cuerpo K , es decir, $\text{val}: K^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Como $\text{val}(1) = 0$, se cumple que $\text{val}(a^{-1}) = -\text{val}(a)$. Es claro entonces que el conjunto imagen de una valoración es un subgrupo de $\mathbb{R}$, que llamamos *grupo de valores* y denotamos por Γ_{val} .

Observación 2.4. Todo cuerpo K tiene una valoración trivial, dando el valor nulo a todos los elementos, es decir, $\text{val}(a) = 0$ para todo $a \in K$. Dada una valoración no trivial, no supone restricción asumir que $1 \in \Gamma_{\text{val}}$ puesto que $(\lambda \cdot \text{val}): K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es también una valoración, para todo $\lambda > 0$.

Dada una valoración (K, val) , podemos considerar su *anillo de valoración*, que consiste en los elementos que tienen valoración no negativa:

$$R = \{a \in K : \text{val}(a) \geq 0\}.$$

Este anillo es local, y su maximal es $\mathfrak{m} = \{a \in K : \text{val}(a) > 0\}$. El cuerpo $\mathbb{k} = R/\mathfrak{m}$ se llama cuerpo de residuos de (K, val) .

Algunas de los ejemplos más importantes de valoraciones no triviales son los siguientes:

Ejemplo 2.5 (Valoración p -ádica). Sea $K = \mathbb{Q}$ el cuerpo de números racionales y sea p un número primo. Dado un $q \in \mathbb{Q}$, podemos sacar todas las potencias de p y escribir $q = p^k \frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y p no divide a a o b . Definimos entonces

2.1. VALORACIONES

$\text{val}_p(q) = k$. Por ejemplo, $\text{val}_3(9/12) = 1$. El anillo de valoración asociado es la localización de $\mathbb{Z}$ en el ideal primo (p) , es decir,

$$R = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \text{mcd}(a, b) = 1 \text{ y } p \nmid b \right\}.$$

Su ideal maximal es $(p) \cdot \mathbb{Z}_{(p)}$ y el cuerpo de residuos es $\mathbb{k} = \mathbb{F}_p$. $\triangle$

Ejemplo 2.6 (Orden de una serie). Consideremos el cuerpo de series de Puiseux $K\{\{t\}\}$ con coeficientes en un cuerpo K algebraicamente cerrado. Estas son las series formales de exponentes fraccionarios con un denominador acotado, esto es

$$s(t) = a_1 t^{b_1} + a_2 t^{b_2} + \cdots,$$

donde $a_i \in K$ y $b_1 < b_2 < \cdots$ son números racionales con denominador común. Definimos $\text{val}(s(t))$ como el menor exponente que aparece en la expansión de $s(t)$. $\triangle$

Vamos a resumir ahora algunas de las propiedades algebraicas más relevantes que necesitaremos de los anillos de valoración. La existencia de escisiones, 2.11, es relevante ya que se utilizan para definir los ideales iniciales que estudiaremos en 2.3.1.

Proposición 2.7. *Sea (K, val) una valoración. El anillo de valoración asociado es íntegramente cerrado.*

Proof. Sea R el anillo de valoración asociado y sea K su cuerpo de fracciones. Debemos ver que todo elemento $x \in K$ entero sobre R cumple que $x \in R$. Sea $x \in K$ entero sobre R , existen $a_0, \dots, a_n \in R$ tal que $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$. Supongamos que $x \notin R$, lo que equivale a que $\text{val}(x) < 0$. En este caso, $\text{val}(x^{-1}) > 0$ y por lo tanto $x^{-1} \in \mathfrak{m}$. Multiplicando la ecuación anterior por x^{-n} obtenemos

$$a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_1x^{-n+1} + a_0x^{-n} = -1,$$

obteniendo por tanto que $-1 \in \mathfrak{m}$, lo cual es absurdo. $\square$

Proposición 2.8. *Sea (K, val) una valoración. Si K es algebraicamente cerrado, entonces el cuerpo de residuos $\mathbb{k} = R/\mathfrak{m}$ es algebraicamente cerrado.*

Proof. Sea $f(x) = x^n + \overline{a_{n-1}}x^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}x + \overline{a_0} \in \mathbb{k}[x]$. Para cada $1 \leq i \leq n-1$, existe $a_i \in R$ tal que $\overline{a_i}$ es su clase en $\mathbb{k} = R/\mathfrak{m}$. Como K es algebraicamente cerrado, existe $z \in K$ raíz del polinomio mónico $h(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in K[x]$. Por la Proposición 2.7, $a \in R$ y además se tiene que

$$f(\overline{z}) = \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1z} + \overline{a_0} = \overline{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0} = 0,$$

como queríamos probar. $\square$

Definición 2.9. Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Se dice que G es *divisible* si para cada $g \geq 1$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $g' \in G$ tal que $ng' = g$.

Proposición 2.10. Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado con una valoración no trivial. El grupo de valores Γ_{val} es un subgrupo divisible de $\mathbb{R}$, y denso en $\mathbb{R}$.

Proof. Sea $\text{val}(a) \in \Gamma_{\text{val}}$ y sea $n \geq 1$. Como K es algebraicamente cerrado, $a^{1/n} \in K$ y se tiene que $n \cdot \text{val}(a^{1/n}) = \text{val}(a)$, con lo que Γ_{val} es un grupo divisible. Veamos ahora que es denso en $\mathbb{R}$. Recordemos que se puede suponer $1 \in \Gamma_{\text{val}}$, (Observación 2.4). Puesto que Γ_{val} es divisible, $\frac{1}{n} \in \Gamma_{\text{val}}$ para todo $n \geq 1$, luego $\frac{m}{n} \in \Gamma_{\text{val}}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Puesto que $\mathbb{Q} \subset \Gamma_{\text{val}}$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, se deduce que Γ_{val} es denso en $\mathbb{R}$. $\square$

En ocasiones, sucederá que la aplicación sobreyectiva $K^* \twoheadrightarrow \Gamma_{\text{val}}$ escinda, es decir, que exista un homomorfismo (de grupos), $\phi: (\Gamma_{\text{val}}, +) \rightarrow (K^*, \cdot)$ tal que $\text{val}(\phi(w)) = w$. Equivalentemente, que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{\text{val}} & \xrightarrow{\phi} & K^* \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \text{val} \\ & & \Gamma_{\text{val}} \end{array}$$

Proposición 2.11. Si K es algebraicamente cerrado, la aplicación sobreyectiva $K^* \twoheadrightarrow \Gamma_{\text{val}}$ escinde.

Proof. Ver [MS15, Lemma 2.1.15]. $\square$

Ejemplo 2.12. Consideremos el cuerpo $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ el cuerpo de series de Puiseux de coeficientes complejos en la variable t con la valoración dada por el orden. Este cuerpo es algebraicamente cerrado y por tanto admite una escisión. Una posible es la *escisión canónica* $\phi: \Gamma_{\text{val}} = \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}\{\{t\}\}$ dada por $\phi(w) = t^w$ para cada $w \in \mathbb{Q}$. $\triangle$

Observación 2.13. Debido al Ejemplo 2.12, es habitual denotar por t^w al elemento $\phi(w) \in \Gamma_{\text{val}}$ donde ϕ sea una escisión. Otros ejemplos notables de escisiones son $0 \rightarrow 1$ si $K = \mathbb{C}$ con la valoración trivial, o $u \rightarrow p^u$ si $K = \mathbb{Q}$ con la valoración p -ádica.

2.2 Geometría poliedral

La naturaleza de las variedades definidas por la geometría tropical hace necesario el estudio de la geometría poliedral para poder comprender y trabajar con ellas. En esta sección damos algunos de los conceptos y resultados más importantes con respecto a los poliedros. Las principales referencias que seguiremos en esta sección son [Zie95], [Ewa96].

2.2. GEOMETRÍA POLIEDRAL

Definición 2.14. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ y para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene que $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in X$. La *envolvente convexa* de un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es el menor conjunto convexo que contiene a U , denotado por $\text{conv}(U)$. En caso de que $U = \{u_1, \dots, u_r\}$ sea un conjunto finito, entonces

$$\text{conv}(U) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \text{ tal que } 0 \leq \lambda_i \leq 1; \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \right\}.$$

Ahora vamos a definir los objetos fundamentales necesarios para comprender las variedades tropicales, que son los poliedros y los complejos poliedrales.

Definición 2.15. Un *poliedro* $P \subset \mathbb{R}^n$ es una intersección de un número finito de semiespacios cerrados. Es decir, un poliedro P tiene una expresión del tipo siguiente:

$$P = P(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\},$$

donde A es una matriz $d \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$.

Las *caras* de un poliedro P están determinadas por formas lineales $\mathbf{w} \in (\mathbb{R}^n)^\vee$ y tienen como expresión:

$$\text{face}_{\mathbf{w}}(P) = \{\mathbf{x} \in P : \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{w} \cdot \mathbf{y} \text{ para cada } \mathbf{y} \in P\}.$$

Las caras que no están propiamente contenidas en otras reciben el nombre de *facets* o caras maximales.

Definición 2.16. Sea P un poliedro, $P \subset \mathbb{R}^n$, de la forma $P = P(A, \mathbf{b})$ y sea $\Gamma \subset \mathbb{R}$ un subgrupo aditivo de los números reales. Se dice que P es Γ -racional si la matriz A tiene entradas en $\mathbb{Q}$ y $\mathbf{b} \in \Gamma^d$. En caso de que $\Gamma = \mathbb{Q}$ se dice que P es racional.

Observación 2.17. En la definición de caras estamos identificando el espacio dual con el original por medio de la identificación natural que da el producto escalar, es decir, identificamos un vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ con el funcional lineal asociado al producto escalar $\mathbf{w}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$.

Definición 2.18. Diremos que un poliedro es un *politopo* si es acotado para la métrica euclídea de $\mathbb{R}^n$.

Se puede dar la siguiente caracterización de los politopos:

Teorema 2.19. Un subconjunto $P \subset \mathbb{R}^d$ es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos $P = \text{conv}(V)$ para algún $V = \{v_1, \dots, v_t\} \subset \mathbb{R}^d$ si y solo si P es un politopo, en el sentido de la Definición 2.15

Proof. [Zie95, Th. 1.1]. □

Ejemplo 2.20. Consideremos el siguiente conjunto de vértices en $\mathbb{R}^2$

$$X = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 0)\}.$$

Su envolvente convexa es, de acuerdo con el teorema anterior, un politopo. Es de hecho, un cuadrado.

Desde el punto de vista de la Definición 2.15, podemos describir el mismo politopo P mediante la siguiente descripción

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.1)$$

Estamos describiendo el mismo politopo P bien como la envolvente convexa de sus vértices, bien como intersección de un número finito de semiespacios, ver Figura 2.1.

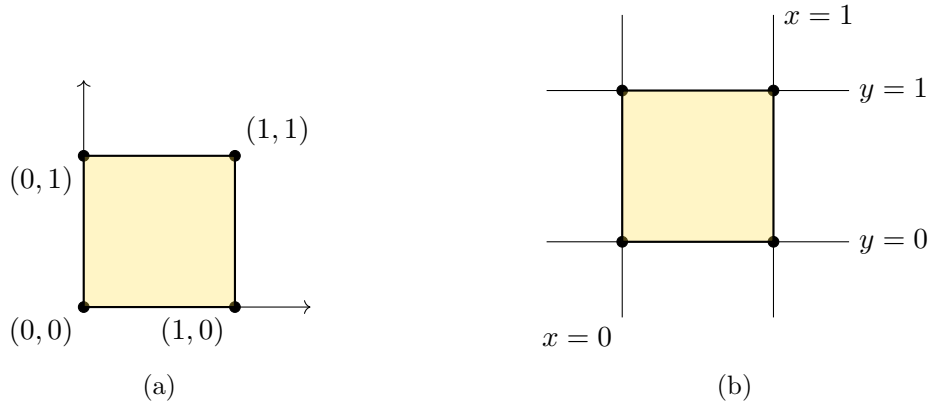


Figura 2.1: Descripciones equivalentes del mismo politopo.

Algunos ejemplos de caras para este politopo, usando la notación introducida en 2.15 son

- $\text{face}_{(1,0)}(P)$ es la arista de P que une los vértices $(0,0)$ y $(0,1)$.
- $\text{face}_{(1,1)}(P) = (0,0)$.
- $\text{face}_{(0,1)}(P)$ es la arista que une los vértices $(0,0)$ y $(1,0)$.
- $\text{face}_{(0,0)}(P) = P$.

△

Definimos ahora el concepto de cono poliedral, que no es más que una clase particular dentro de los poliedros.

Definición 2.21. Un *cono poliedral* C es la envolvente positiva de un subcon-

2.2. GEOMETRÍA POLIEDRAL

junto finito $V = \{v_1, \dots, v_s\}$ de $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$C = \text{pos}(v_1, \dots, v_s) = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Las caras de un cono se definen de manera totalmente análoga a las de un poliedro.

Al igual que en el caso de los poliedros, podemos interpretar los conos como una intersección finita de semiespacios, forzando al vector $\mathbf{b}$ de la Definición 2.15 a ser el vector nulo.

Teorema 2.22. *Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es la envolvente positiva de un número finito de puntos de $\mathbb{R}^n$ si y solo si C puede escribirse como intersección finita de semiespacios cerrados de la siguiente forma*

$$C = P(A, 0), \text{ para una matriz } A \in \mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R}).$$

Proof. [Zie95, Th. 1.3]. □

Introducimos a continuación los conceptos de complejo y abanico poliedrales, que juegan un papel fundamental en el estudio y comprensión de las variedades tropicales.

Definición 2.23. Un *complejo poliedral* Σ es una familia de poliedros que satisfacen las siguientes condiciones:

- Si $P \in \Sigma$, cada cara de P pertenece también a Σ .
- Si $P, Q \in \Sigma$, entonces $P \cap Q$ es o bien una cara común a P y Q , o bien vacía.

Los poliedros de un complejo Σ reciben el nombre de *celdas*. Las celdas de Σ que no son caras de alguna celda más grande reciben el nombre de *celdas maximales*. El *soporte* de un complejo poliedral Σ es

$$|\Sigma| = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in P \text{ para algún } P \in \Sigma\}.$$

Definición 2.24. Un *abanico* $\mathcal{F}$ es una colección finita de conos poliedrales que satisfacen las siguientes condiciones:

- Si $C \in \mathcal{F}$, cada cara de C pertenece también a $\mathcal{F}$.
- Si $C, C' \in \mathcal{F}$, entonces $C \cap C'$ es o bien vacía, o bien una cara común a C y C' .

El siguiente ejemplo presenta un abanico poliedral y una colección de conos que no cumplen las condiciones para ser abanico.

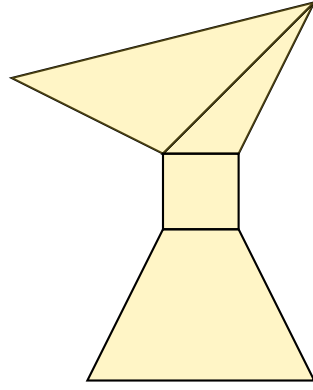


Figura 2.2: Complejo poliedral.

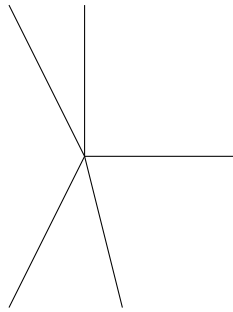
Ejemplo 2.25. Consideremos el conjunto siguiente de vértices

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \{(-1, 2), (0, 2), (2, 0), (1/2, -2), (-1, 2)\}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la colección formada por los siguientes conos:

- $\text{pos}(v_i, v_{i+1})$ para $i = 1, 2, 3, 4$ y $\text{pos}(v_5, v_1)$.
- $\text{pos}(v_i)$ para $i = 1, \dots, 6$.
- $\text{pos}(0, 0)$.

Se tiene que $\mathcal{F}$ es un abanico poliedral, representado en la Figura 2.3a. $\triangle$



(a) Abanico poliedral.



(b) No abanico poliedral.

Figura 2.3

Ejemplo 2.26. Como ejemplo de una colección de conos que no forman un abanico, consideremos $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ y $v_3 = (-1, 0)$ y sea $\mathcal{G}$ la familia que contiene a los siguientes conos:

- $C_1 = \text{pos}(v_1, v_2)$, $C_2 = \text{pos}(v_2, v_3)$, $C_3 = \text{pos}(v_1, v_2)$.
- $C_4 = \text{pos}(v_2)$.

2.2. GEOMETRÍA POLIEDRAL

En este caso, $\mathcal{G}$ no es un cono ya que $C_1 \cap C_3 = \text{pos}(v_1)$ no es una cara de C_3 . Si añadimos $\text{pos}(v_1)$ y $\text{pos}(v_3)$ a $\mathcal{G}$ entonces sí que forma un abanico. Esta familia de conos está representada en la Figura 2.3b. $\triangle$

Presentamos ahora algunos conceptos relacionados con la estructura afín de los poliedros.

Definición 2.27. Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro. El *espacio de linealidad* V de P es el mayor subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ tal que si $\mathbf{x} \in P, v \in V$, entonces $\mathbf{x} + v \in P$. Si Σ es un complejo poliedral, su espacio de linealidad es la intersección de los espacios de linealidad de P , con $P \in \Sigma$.

El *espacio afín* de un poliedro P es el menor subespacio afín que contiene a P . Este subespacio afín es la traslación de un subespacio vectorial que se llama *espacio lineal paralelo* a P , y que denotamos por $\text{lin}(P)$.

La *dimensión* de un poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ es la dimensión como espacio vectorial de $\text{lin}(P)$.

Observación 2.28. Si $P = P(A, \mathbf{b})$ es un poliedro, con $A \in \mathcal{M}_{d \times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, entonces el espacio de linealidad de P es igual al subespacio vectorial dado por el núcleo de la matriz A .

Definición 2.29. Dado un complejo poliedral Σ , decimos que es *puro* si todos los poliedros maximales que lo conforman tienen la misma dimensión.

Definición 2.30. Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro, $\mathbf{x} \in P$. Se dice que $\mathbf{x}$ es un *punto interior* a P si $\mathbf{x}$ no está contenido en ninguna cara de dimensión menor que n . El conjunto de puntos interiores a P se denota por $\text{int}(P)$. El *interior relativo* de P , que se denota por $\text{relint}(P)$ es el interior de P con respecto a su espacio afín.

Definición 2.31. Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro. El *abanico normal* a P es el abanico poliedral $N(P)$ que tiene como conos los siguientes conjuntos

$$C[\mathbf{w}] = \text{cl}(\{\mathbf{w}' \in (\mathbb{R}^n)^\vee : \text{face}'_{\mathbf{w}'}(P) = \text{face}_{\mathbf{w}}(P)\}),$$

donde cl denota la clausura en $(\mathbb{R}^n)^\vee$, el espacio dual a $\mathbb{R}^n$.

Observación 2.32. En ocasiones el abanico normal también recibe el nombre de abanico normal interno ya que los conos que corresponden a caras maximales de P son los vectores perpendiculares a dichas caras.

Definición 2.33. Sea $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. El *politopo de Newton* de $f = \sum c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ es la envolvente convexa de los $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n$ tales que $c_{\mathbf{u}} \neq 0$.

Ejemplo 2.34. Consideremos el polinomio $f = x^2y + 5y^2 - 3x + 2$. El politopo de Newton P es la envolvente convexa del conjunto de vértices siguientes, correspondientes a los vectores de exponentes, $\{(2, 1), (0, 2), (1, 0), (0, 0)\}$. En la Figura 2.4 aparece el politopo de Newton y el abanico normal.

$\triangle$

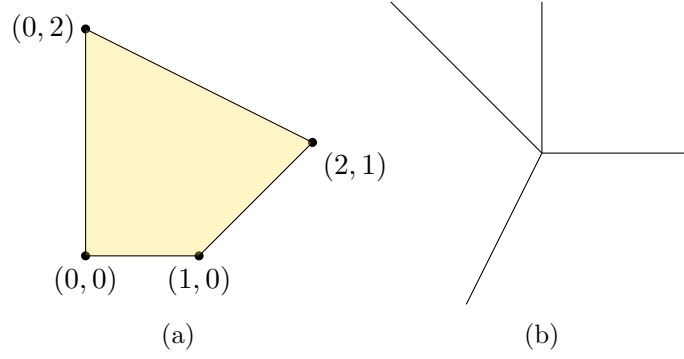
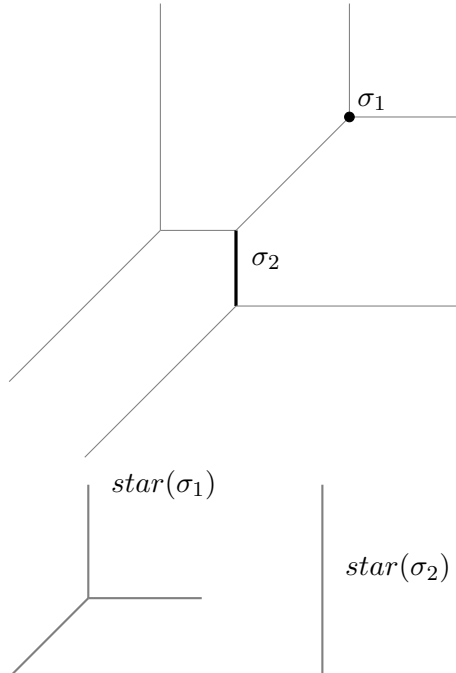


Figura 2.4: Politopo de Newton y abanico normal.

Finalizamos la sección de geometría poliedral con la definición de estrella de una celda, que será necesaria para poder hablar de la condición de equilibrio de un complejo poliedral a la hora de enunciar el Teorema de estructura, 2.69.

Definición 2.35. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ un complejo poliedral y sea $\sigma \in \Sigma$ una de sus celdas. La *estrella* de σ en Σ es un abanico, denotado por $\text{star}_{\Sigma}(\sigma)$, compuesto por conos que están indexados por las celdas $\tau \in \Sigma$ que tienen a σ como una de sus caras. El cono de $\text{star}_{\Sigma}(\sigma)$ indexado por τ es el conjunto

$$\bar{\tau} = \{\lambda(x - y) : \lambda \geq 0, x \in \tau, y \in \sigma\}.$$



2.3 Geometría tropical

Vamos a comenzar esta sección por definir la estructura sobre la que vamos a operar en la geometría tropical: el semianillo tropical $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$. Posteriormente, veremos cómo se comportan los polinomios en este semianillo y estudiaremos las variedades que definen, culminando con el Teorema Fundamental de la Geometría Tropical y el Teorema de Estructura, respectivamente, Teorema 2.67 y Teorema 2.69.

Definición 2.36. El semianillo tropical $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$ tiene como conjunto base $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y dos operaciones definidas como sigue:

$$\begin{aligned} a \oplus b &:= \min\{a, b\}, \\ a \odot b &:= a + b. \end{aligned}$$

Observación 2.37. Es claro que la suma tropical $\oplus$ es conmutativa y asociativa y tiene ∞ como elemento neutro. Además, el producto tropical $\odot$ es también asociativo y conmutativo y distribuye con respecto a $\oplus$. El elemento neutro multiplicativo es 0. Además, todos los elementos distintos del neutro aditivo tienen inverso multiplicativo. Se trata, sin embargo, de un semianillo ya que no existen elementos opuestos para la suma tropical, por ejemplo, no existe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $a \oplus 1 = \infty$.

Esta carencia de inverso en la suma tropical hace que no sea puedan solucionar ecuaciones polinómicas sencillas, por ejemplo, $x \oplus 2 = 7$

Con estas nuevas operaciones, los polinomios tropicales se interpretan como funciones lineales en la aritmética usual.

Definición 2.38. Un *polinomio tropical* $f \in \overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$ es una combinación finita de monomios tropicales de la forma

$$f = a \odot x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \oplus b \odot x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \oplus \cdots$$

Todo polinomio tropical representa una función lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Evaluando dichas funciones en la aritmética usual obtenemos el mínimo de funciones lineales. El polinomio tropical f se reinterpreta en la aritmética clásica como $f(x_1, \dots, x_n) = \min(a + x_1 i_1 + \cdots x_n i_n, b + x_1 j_1 + \cdots x_n j_n, \dots)$.

Observación 2.39. Las funciones lineales que determinan los polinomios tropicales son funciones continuas lineales a trozos. Son además funciones cóncavas.

Observación 2.40. Es importante remarcar que dos polinomios tropicales distintos pueden dar lugar a una función lineal a trozos que tome los mismo valores en todo $\mathbb{R}$, y en esta memoria los consideraremos como polinomios distintos. Por ejemplo, los polinomios

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \oplus 0, \\ g(x) &= x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 0. \end{aligned}$$

son distintos pese a que las funciones lineales asociadas

$$\begin{aligned} f(x) &= \min\{2x, 0\}, \\ g(x) &= \min\{2x, 1+x, 0\}. \end{aligned}$$

toman los mismos valores en todo $\mathbb{R}$. Obsérvese también que el coeficiente de f en x es ∞ , neutro para la suma tropical, mientras que el coeficiente en x^2 es 0, neutro multiplicativo. Para nosotros, pese a definir la misma función, los polinomios f y g son distintos.

Ejemplo 2.41. Consideremos el polinomio tropical $f(x) = -2 \odot x^3 \oplus -1 \odot x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 5$. Este polinomio consiste en la aritmética usual es $\min\{3x-2, 2x-1, x+1, 5\}$. La gráfica del polinomio tropical se muestra en la Figura 2.5.

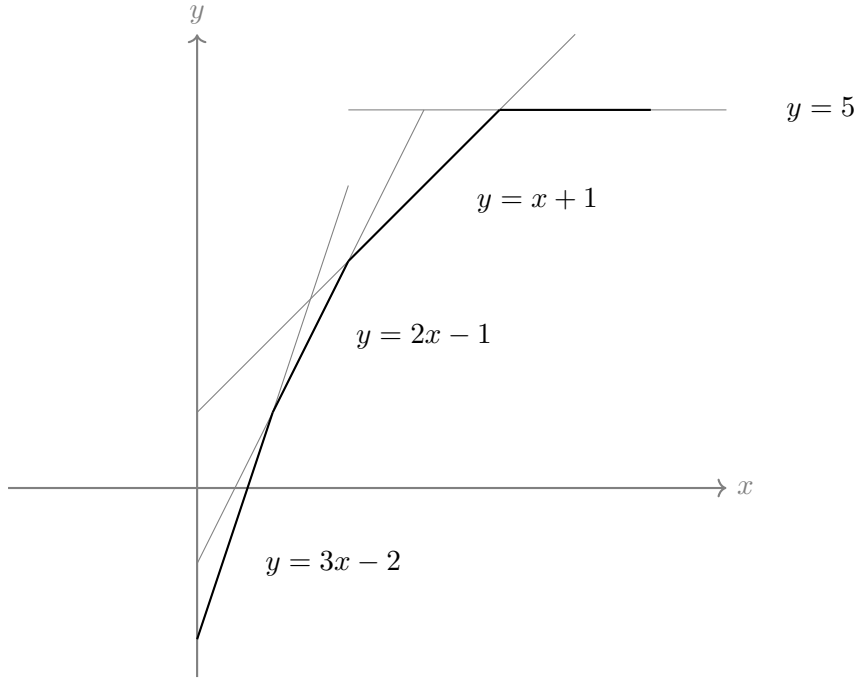


Figura 2.5: Gráfica de $f(x) = -2 \odot x^3 \oplus -1 \odot x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 5$

△

Ejemplo 2.42. El polinomio tropical en varias variables $g(x, y) = x \oplus y \oplus 0$ es la función $\min\{x, y, 0\}$ en aritmética usual. El 0 no se puede quitar ya que no es el elemento neutro aditivo. Este polinomio g da una función lineal $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo dominio está representado en la Figura 2.6. △

Definición 2.43. Las raíces de $f \in \overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$ son los lugares donde la gráfica de f no es diferenciable, es decir, el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que el mínimo de f se alcanza al menos dos veces en x .

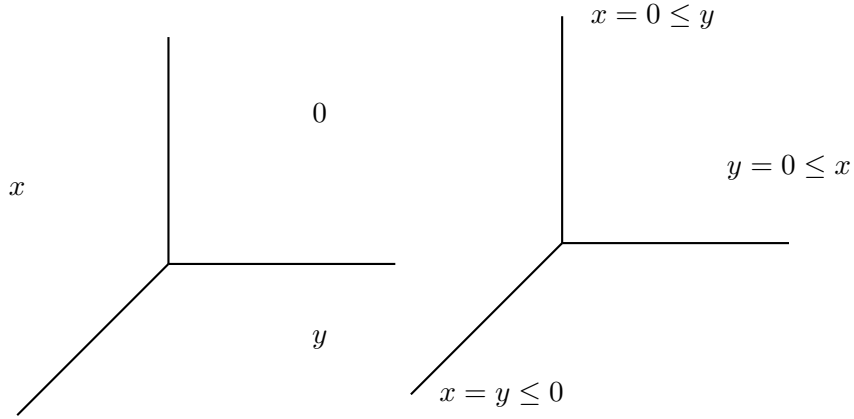


Figura 2.6: Grafo de $x \oplus y \oplus 0$

Ejemplo 2.44. En el polinomio f del Ejemplo 2.41 se tiene que sus raíces son $\{1, 2, 4\}$. Para el polinomio g del Ejemplo 2.42, sus raíces son la unión de los tres rayos que aparecen en la Figura 2.6. $\triangle$

La conexión entre los polinomios en $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ y los polinomios tropicales en $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$ se basa en las valoraciones que permiten pasar de polinomios con coeficientes en un cuerpo cualquiera a polinomios tropicales con coeficientes en $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 2.45. Sea K un cuerpo dotado de una valoración y sea $f = \sum c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ un polinomio en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Se define la *tropicalización* de f como el polinomio que resulta de cambiar los coeficientes de f por su valoraciones e interpretar las operaciones tropicalmente, es decir,

$$\text{trop}(f) := \bigoplus_{\mathbf{u}} \text{val}(c_{\mathbf{u}}) \odot \mathbf{x}^{\mathbf{u}}.$$

También lo podemos ver como una función $\text{trop}(f): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min\{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\}.$$

Ejemplo 2.46. Consideremos el cuerpo $K = \mathbb{Q}$ con la valoración 2-ádica y sea $f = 6x^2 + 5xy + 10y^2 + 3x - y + 4 \in \mathbb{Q}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. Se tiene entonces que $\text{trop}(f) = 1 \odot x^2 \oplus xy \oplus 1 \odot y^2 \oplus x \oplus y \oplus 2$, que se corresponde con la función $\min\{2x + 1, x + y, 2y + 1, x, y, 2\}$. La gráfica de $\text{trop}(f)$ está en la Figura 2.7. $\triangle$

Definición 2.47. Sea $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un polinomio de Laurent. Se define la *hipersuperficie tropical*, $\text{trop}(V(f))$, como el lugar no diferenciable de $\text{trop}(f)$,

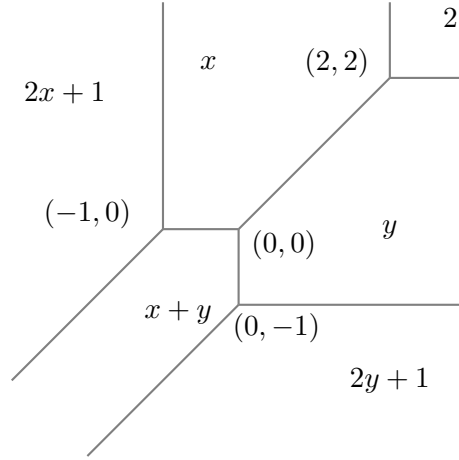


Figura 2.7: $\text{trop}(f) = 1 \odot x^2 \oplus xy \oplus 1 \odot y^2 \oplus x \oplus y \oplus 2$.

es decir,

$$\text{trop}(V(f)) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \text{el mínimo en } \text{trop}(f)(\mathbf{w}) \\ \text{se alcanza al menos dos veces} \end{array}\}.$$

Ejemplo 2.48. Si consideramos el polinomio

$$\text{trop}(f) = 1 \odot x^2 \oplus xy \oplus 1 \odot y^2 \oplus x \oplus y \oplus 2$$

del Ejemplo 2.46, su variedad tropical está formada por los segmentos y rayos que aparecen en la gráfica de la Figura 2.5 y los vértices $\{(-1, 0), (0, 0), (2, 2), (0, -1)\}$. $\triangle$

2.3.1 Ideales iniciales y teoría de bases de Gr bner

En esta subsección presentamos algunas nociones de la teoría de bases de Gr bner para cuerpos dotados de una valoración, que supone una generalización de la teoría de bases de Gr bner clásica. Vamos a comenzar por definir el término inicial de un polinomio tropical, que llevará de manera natural a la noción de ideal inicial. Posteriormente, veremos algunos resultados relacionados con éstos, como la existencia de bases de Gr bner o del complejo de Gr bner asociado a un ideal.

Esta teoría supone una aproximación computacional muy fructífera a la hora de calcular variedades tropicales ya que las variedades tropicales est n relacionadas con conjuntos de términos iniciales, como afirma el Teorema Fundamental de la Geometría Tropical, 2.67.

Nos limitaremos a enunciar sin demostración la mayoría de los resultados, ya que en la Sección 3.2 y en el Capítulo 4 trataremos esta misma teoría con

2.3. GEOMETRÍA TROPICAL

más detalle, particularizada a caso de los ideales tropicales. Las principales referencias a seguir son [MS15, Chap. 2, §2.4-§2.6] y [Mac13].

A lo largo de la sección supondremos que K es un cuerpo con una valoración que admite una escisión, que vamos a denotar por $\phi: \Gamma_{\text{val}} \rightarrow \mathbb{K}^*$, $w \mapsto t^w$. Esto sucede si K es algebraicamente cerrado o si val es la valoración trivial, entre otros casos. Vamos a denotar por R al anillo de valoración asociado a (K, val) y por $\mathbb{k} = R/\mathfrak{m}$ al cuerpo de residuos.

Sea $f = \sum c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_0, \dots, x_n]$ un polinomio. Recordemos que su tropicalización es el polinomio que resulta de sustituir los coeficientes por sus valoraciones e interpretar las operaciones tropicalmente, esto es,

$$\text{trop}(f) = \bigoplus \text{val}(c_{\mathbf{u}}) \odot \mathbf{x}^{\mathbf{u}}.$$

De este modo $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min\{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}\}$.

Definición 2.49. Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ un vector peso. El *término inicial* de f con respecto de $\mathbf{w}$ es

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \text{trop}(f)(\mathbf{w})}} \overline{c_{\mathbf{u}} t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}[\mathbf{x}]. \quad (2.2)$$

Observación 2.50. En caso de que $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^{n+1}$, el término inicial de f se puede escribir también de la forma siguiente

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \overline{t^{-\text{trop}(f)(\mathbf{w})} f(t^{w_0} x_0, \dots, t^{w_n} x_n)} \quad (2.3)$$

$$= \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \text{trop}(f)(\mathbf{w})}} \overline{c_{\mathbf{u}} t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}. \quad (2.4)$$

Ejemplo 2.51. Sea $f = 6x^2 + 5xy + 7y^2 \in \mathbb{Q}[x, y]$ con la valoración 2-ádica. Se tiene que $\text{trop}(f) = 1 \odot x^2 \oplus xy \oplus y^2$. Para $\mathbf{w} = (1, 2)$, se tiene que $\text{trop}(f)(1, 2) = \min\{3, 3, 4\} = 3$. El mínimo se alcanza en los dos primeros términos luego

$$\text{in}_{(1,2)}(f) = \overline{3}x^2 + \overline{5}xy = x^2 + xy \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

△

Ejemplo 2.52. Sea $f = (t + t^2)x_0 + 2t^2x_1 + 3t^4x_2 \in \mathbb{C}\{\{t\}\}[x_0, x_1, x_2]$. Vamos a calcular el término inicial con respecto a $\mathbf{w} = (4, 2, 0)$. Se tiene que $\text{trop}(f) = 1 \odot x_0 \oplus 2 \odot x_1 \oplus 4 \odot x_2$ y por lo tanto $\text{trop}(f)(4, 2, 0) = \min\{5, 4, 4\} = 4$, que se alcanza en los dos últimos términos, de modo que su término inicial es

$$\text{in}_{(4,2,0)}(f) = \overline{t^{-2}2t^2}x_1 + \overline{t^{-4}3t^4}x_2 = 2x_1 + 3x_2.$$

△

Observación 2.53. Si $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$ es un ideal homogéneo, entonces se tiene que $\text{in}_{\mathbf{w}+\lambda\mathbf{1}}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, donde $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ así que podemos ver $\mathbf{w}$ como un elemento de $\text{trop}(\mathbb{P}^n) = \overline{\mathbb{R}}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ donde la relación de equivalencia viene dada por $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \lambda\mathbf{1}$.

Definición 2.54. Sea $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo. Su *ideal inicial* con respecto al peso $\mathbf{w}$ es

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle \text{in}_{\mathbf{w}}(f) : f \in I \rangle \subset \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n].$$

Un conjunto $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ es una *base de Gröbner* para I con respecto a $\mathbf{w}$ si $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle \text{in}_{\mathbf{w}}(g_1), \dots, \text{in}_{\mathbf{w}}(g_s) \rangle$.

Vamos a denotar por $S_K = K[x_0, \dots, x_n]$ y $S_{\mathbb{k}} = \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$ para los anillos de polinomios que contienen un ideal homogéneo dado I , y sus correspondientes ideales iniciales $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$, respectivamente. Una medida del tamaño de un ideal homogéneo $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$ es la llamada *función de Hilbert*, $H_I: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que asigna a cada grado $d \geq 0$, la dimensión de $(S_K/I)_d$ como K -espacio vectorial. En el marco clásico, las bases de Gröbner sirven para calcular invariantes asociados al ideal I , como su dimensión, ya que la función de Hilbert de un ideal y de su ideal inicial coinciden. En teoría de Gröbner con valoraciones que hemos presentado también ocurre esto, en el sentido que precisa la siguiente proposición.

Proposición 2.55. Sea $I \subset S_K$ un ideal homogéneo y sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d$ está generado, como $\mathbb{k}$ -espacio vectorial, por monomios. Entonces, los monomios $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ de grado d que no están en $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ forman una base de $(S_K/I)_d$ como K -espacio vectorial.

Proof. Ver [MS15, Lemma 2.4.8]. □

Observación 2.56. Este resultado es el análogo en nuestra definición de ideales iniciales al que podemos encontrar en [CLO15, §5.2, Prop. 4] para la teoría de Gröbner básica.

Corolario 2.57. Para cada $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ y cada ideal homogéneo $I \subset S_K$, la función de Hilbert de I coincide con la de su ideal inicial $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$, esto es

$$\dim_K((S_K/I)_d) = \dim_{\mathbb{k}}((S_{\mathbb{k}}/\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d)).$$

Proof. Ver [MS15, Cor. 2.4.9] □

En la Sección 3.2.1 veremos cómo definir la función de Hilbert para los ideales tropicales y estudiaremos su relación con los ideales iniciales y algunas de sus propiedades. Vamos ahora a dar alguna pincelada acerca del complejo de Gröbner asociado a un ideal. En el Capítulo 4 estudiaremos con más detalle el complejo de Gröbner asociado a un ideal tropical en $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$.

2.3. GEOMETRÍA TROPICAL

Vamos a comenzar por definir cómo van a ser las celdas que van a formar el complejo de Gröbner. Dado un ideal $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$ homogéneo, y dado $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ definimos los siguientes conjuntos

$$C_I[\mathbf{w}] = \{\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)\},$$

y denotamos por $\overline{C_I[\mathbf{w}]}$ la clausura de $C_I[\mathbf{w}]$ para la topología usual en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposición 2.58. *Sea I un ideal homogéneo de $K[x_0, \dots, x_n]$. Existe únicamente una cantidad finita de ideales iniciales distintos $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ cuando $\mathbf{w}$ recorre $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Proof. Ver [Mac13, Prop. 3.5] □

Utilizando esta proposición se tiene el siguiente resultado, que afirma la existencia del complejo de Gröbner.

Teorema 2.59. *Sea $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo. Se tiene que los poliedros $C_I[\mathbf{w}]$ cuando $\mathbf{w}$ recorre $\mathbb{R}^{n+1}$ forman un complejo poliedral finito Γ_{val} racional con soporte en $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\mathbf{1}$. Este complejo recibe el nombre de complejo de Gröbner asociado a I .*

Proof. Ver [Mac13, Th. 2.4]. □

2.3.2 Teorema Fundamental de la Geometría Tropical

Es interesante conocer la relación entre la hipersuperficie algebraica clásica definida por un polinomio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ y la hipersuperficie tropical que define. El resultado que da esa relación es el llamado Teorema de Kapranov, 2.60, que relaciona la hipersuperficie tropical asociada a un polinomio con su término inicial y con las valoraciones de los puntos que están en la hipersuperficie algebraica clásica. Este resultado se puede generalizar para variedades tropicales de cualquier dimensión, esto es el contenido del llamado Teorema Fundamental de la Geometría Tropical, 2.67.

Teorema 2.60 (Teorema de Kapranov). *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado con una valoración no trivial y sea $f = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un polinomio de Laurent, se tiene que los siguientes tres conjuntos coinciden*

1. *La hipersuperficie tropical $\text{trop}(V(f)) \subset \mathbb{R}^n$.*
2. *$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{w}}(f) \text{ no es un monomio}\}$.*
3. *La clausura en $\mathbb{R}^n$ del conjunto*

$$\{(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) : (y_1, \dots, y_n) \in V(f)\}.$$

Además, si f es irreducible y $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n \cap \text{trop}(V(f))$, se tiene que el conjunto $\{y \in V(f) : \text{val}(y) = \mathbf{w}\}$ es un denso de Zariski en la hipersuperficie $V(f)$.

Proof. [MR19, Th. 3.1.3] □

Vamos ahora a generalizar este resultado a variedades tropicales de cualquier dimensión. Para ello, necesitamos definir las variedades tropicales para cualquier ideal $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$.

Definición 2.61. Sea $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, un ideal en el anillo de polinomios de Laurent y sea $X = V(I)$ la variedad algebraica que define sobre el toro algebraico $T_K^n := (K^*)^n$. Se define la *tropicalización de X* como la intersección de todas las hipersuperficies tropicales asociadas a elementos $f \in I_X$, donde I_X es el ideal asociado a la variedad $V(I)$. Explícitamente,

$$\text{trop}(X) = \bigcup_{f \in I_X} \text{trop}(V(f)) \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Observación 2.62. En la definición anterior, no basta tomar la intersección en un conjunto de generadores de I , lo que muestra que la tropicalización no conmuta con las intersección. El siguiente ejemplo muestra un caso en el que no es suficiente tomar los generadores.

Ejemplo 2.63. Sea $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ el cuerpo de series de Puiseux, $n = 2$, y el ideal $I = \langle f, g \rangle \subset K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, donde $f = x + y + 1$; $g = x + 2y$. Se tiene lo siguiente:

- $\text{trop}(f)(w_1, w_2) = \min\{w_1, w_2, 0\}$, por lo tanto $\text{trop}(V(f))$ es la unión de los tres rayos que aparecen en la Figura 2.6.
- $\text{trop}(g)(w_1, w_2) = \min\{w_1, w_2\}$, por lo tanto

$$\text{trop}(V(g)) = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : w_1 = w_2\}.$$

Se tiene entonces que

$$\text{trop}(V(f)) \cap \text{trop}(V(g)) = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : w_1 = w_2 \leq 0\}.$$

Sin embargo, $\text{trop}(X)$ no es el conjunto anterior. Si consideramos el polinomio $h = g - f = y - 1$, entonces se tiene que $\text{trop}(h)(w_1, w_2) = \min\{w_2, 0\}$ y por tanto $\text{trop}(V(h)) = \{w_2 = 0\}$. De este modo,

$$\text{trop}(X) \subset \text{trop}(V(f)) \cap \text{trop}(V(g)) \cap \text{trop}(V(h)) = \{(0, 0)\}.$$

△

Observación 2.64. El ejemplo anterior muestra que no basta tomar la intersección en un conjunto de generadores arbitrario del ideal. Sin embargo, existen sistemas de generadores que sí que lo permiten, reciben el nombre de bases tropicales, y su existencia viene garantizada por el complejo de Gröbner.

2.3. GEOMETRÍA TROPICAL

Definición 2.65. Sea $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un ideal y sean $\{f_1, \dots, f_s\}$ una colección de polinomios de I . Se dice que $\{f_1, \dots, f_s\}$ es una *base tropical* para I si

$$\text{trop}(V(I)) = \bigcap_{i=1}^s \text{trop}(V(f_i)),$$

y además $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

Teorema 2.66. Sea $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un ideal. Siempre existe una base tropical para I .

Proof. Ver [Mac13, Th. 2.8]. □

Estamos ya en condiciones de enunciar el Teorema Fundamental de la Geometría Tropical. Una demostración se puede encontrar en [MR19, Th. 3.2.3].

Teorema 2.67 (Teorema Fundamental de la Geometría Tropical). Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado dotado de una valoración no trivial, sea $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un ideal, y sea $X = V(I)$ la variedad que define el ideal I en el toro algebraico $T^n = (K^n)^*$. Entonces, los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ coinciden

- La variedad tropical $\text{trop}(X)$ definida como en (2.5).
- El conjunto $\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{w}} \neq \langle 1 \rangle\}$.
- La clausura para la topología usual de $\mathbb{R}^n$ del conjunto

$$\text{val}(X) = \{(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) : (y_1, \dots, y_n) \in X\}.$$

Además, si X es irreducible y se tiene $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n \cap \text{trop}(X)$, entonces el conjunto $\{\mathbf{x} \in X : \text{val}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}\}$ es un denso de Zariski en la variedad X .

Aunque no demos la demostración, vamos a ver un ejemplo de aplicación del Teorema Fundamental de la Geometría Tropical al cálculo de la variedad tropical asociada a un ideal utilizando valoraciones.

Ejemplo 2.68. Sea $f = x + y + 1 \in K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, con $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ y la valoración val dada por el orden. La variedad $X = V(I)$ que define el polinomio en $(\mathbb{C}\{\{t\}\}^2)^*$ viene dada por

$$V(I) = \{(a, -1 - a) : a \in K, a \neq 0, a \neq -1\}.$$

Si calculamos entonces el conjunto $\text{val}(X)$ del Teorema 2.67 tenemos

$$(\text{val}(a), \text{val}(-1 - a)) = \begin{cases} (\text{val}(a), 0), & \text{si } \text{val}(a) > 0, \\ (\text{val}(a), \text{val}(a)), & \text{si } \text{val}(a) < 0, \\ (0, \text{val}(a + 1)), & \text{si } \text{val}(a) = 0, \text{val}(a + 1) > 0, \\ (0, 0), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como K es algebraicamente cerrado con una valoración no trivial, por la Proposición 2.10, se tiene que Γ_{val} es denso en $\mathbb{R}$, de modo que al tomar la clausura de $\text{val}(X)$ obtenemos la recta tropical que aparece en la Figura 2.8, que coincide con lo calculado en el Ejemplo 2.42. $\triangle$

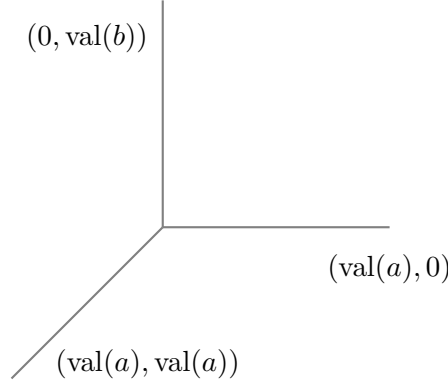


Figura 2.8: $\text{trop}(V(x + y + 1))$.

2.3.3 Teorema de estructura

Una vez hemos entendido la relación entre las variedades algebraicas clásicas y las variedades tropicales, es momento de saber cómo son, en un sentido combinatorio, las variedades tropicales que definen los ideales. La respuesta a esta cuestión la encontramos en el llamado Teorema de Estructura, 2.69, que resume la estructura combinatoria de las variedades tropicales. Para entender el enunciado del teorema conviene recordar los conceptos definidos en la Sección 2.2 y entender varios nuevos que definiremos después del enunciado. La demostración del teorema la omitimos, ya que es de elevada dificultad y no es el objetivo fundamental de este trabajo. Se puede encontrar en [MS15, Sect. 3.3].

Teorema 2.69 (Teorema de estructura). *Sea X una variedad irreducible de dimensión $\dim(X) = d$ definida sobre el toro algebraico T^n . Entonces $\text{trop}(X)$ es el soporte de un complejo poliedral equilibrado, Γ_{val} -racional, puro de dimensión d y conectado a través de codimensión 1.*

Recordemos que dado un poliedro de la forma $P = P(A, b)$, se dice que P es Γ -racional si A tiene entradas en $\mathbb{Q}$ y b en Γ .

Recordemos a su vez que dado un complejo poliedral $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, se define su *soporte* como el conjunto $|\Sigma| = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in P \text{ para algún } P \in \Sigma\}$. Además, dado un complejo poliedral, se dice que es *puro* si las celdas maximales tienen la misma dimensión.

Vamos a dar entonces las condiciones de ser *equilibrado* y *conectado a través de codimensión 1* para entender el Teorema de Estructura.

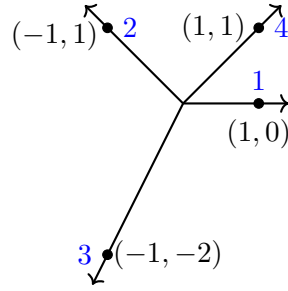


Figura 2.9: Abanico equilibrado

Definición 2.70. Una *estructura de pesos* en un complejo poliedral Σ es una asignación que a cada celda maximal σ de Σ le asocia un peso $w_\sigma \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.71. Un abanico poliedral racional de dimensión 1 con estructura de pesos es equilibrado si

$$\sum_i m_i \mathbf{u}_i = 0,$$

donde m_i es el peso asociado al rayo i -ésimo y $\mathbf{u}_i \in \mathbb{Z}^n$ es el primer punto de coordenadas enteras en el rayo i -ésimo.

Ejemplo 2.72. El abanico que muestra la Figura 2.9 es equilibrado ya que

$$4(1, 1) + 2(-1, 1) + 1(1, 0) + 3(-1, -2) = (0, 0).$$

△

Vamos ahora a generalizar la definición a complejos poliedrales de dimensión arbitraria. Sea Σ un complejo poliedral puro de dimensión d , y sea τ un poliedro de dimensión $d - 1$ de Σ . Consideremos $L = \text{span}(x - y : x, y \in \tau)$ el espacio afín generado por τ . Consideremos ahora el abanico $\text{star}_\Sigma(\tau)$, el cual recordemos que tiene un cono por cada poliedro $\sigma \in \Sigma$ que contiene a τ como una de sus caras. Además, tiene L como espacio de linealidad. Se puede comprobar que el cociente $\text{star}_\Sigma(\tau)/L$ es un abanico de dimensión uno que hereda la estructura de pesos de Σ .

Definición 2.73. En las condiciones anteriores, se dice que Σ es *equilibrado en τ* si el abanico de dimensión uno, $\text{star}_\Sigma(\tau)/L$ es equilibrado. Se dice que el complejo poliedral Σ es equilibrado si es equilibrado en todas las celdas de dimensión $d - 1$.

Nos queda entonces entender qué significa estar conectado a través de codimensión 1.

Dado un complejo poliedral Σ , le vamos a asociar su *grafo de cadenas de facets* de la siguiente forma: por cada celda maximal de Σ escribimos un vértice y unimos dichos vértices con una arista si los correspondientes poliedros se intersectan en una cara de codimensión 1.

Definición 2.74. Un complejo poliedral Σ , puro, de dimensión d , está *conectado a través de codimensión 1* si el grafo de cadenas de facets es conexo.

Capítulo 3

Ideales tropicales

El objetivo del presente capítulo es definir el principal objeto de estudio de la memoria: los ideales tropicales. Esta clase de ideales fue introducida por Diane Maclagan y Felipe Rincón en [MR18]. Estos ideales incluyen a los ideales de $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$ que surgen de tropicalizar ideales de polinomios en $K[x_1, \dots, x_n]$, donde K es un cuerpo dotado de una valoración, como veremos en el Ejemplo 3.12, pero también incluye ideales más general que no son de esa forma, como veremos en el Ejemplo 3.15. El hecho de restringirnos a esta clase de ideales permite obtener propiedades que no son ciertas para ideales en general de $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$. Veremos, por ejemplo, en el Ejemplo 3.32 que el semianillo $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$ no es noetheriano. No obstante, demostraremos en el Teorema 3.31 que los ideales tropicales satisfacen la condición de cadena ascendente, hecho que no entra en contradicción ya que estamos trabajando en un semianillo.

De forma general se tiene también que los ideales de $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$ no satisfacen el Nullstellensatz, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. Consideremos el ideal $I = \langle x \oplus 1, x \oplus 2 \rangle \subsetneq \overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$. Este ideal es claramente un ideal propio del semianillo $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$, sin embargo, la variedad tropical que define dicho ideal es vacía ya que los polinomios tropicales $f = x \oplus 1$, $g = x \oplus 2$ no comparten raíces. $\triangle$

Sin embargo, veremos en el Teorema 4.14 que se cumple un análogo tropical al Nullstellensatz clásico si nos restringimos a la clase de ideales tropicales.

Por último, las variedades tropicales de un ideal $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$ pueden no ser poliedrales, como veremos en el Ejemplo 4.10. Sin embargo, de nuevo al restringirnos al marco de los ideales tropicales se tiene el resultado de que las variedades que definen son poliedrales, como veremos en el Teorema 4.9.

En la Sección 3.1 definiremos la clase de ideales tropicales en el contexto un poco más general en que $(R, \oplus, \odot)$ es un semianillo con las condiciones pedidas al comienzo de la Sección 1.2. No obstante, a la hora de entender los conceptos, y como se podrá ver en los ejemplos a lo largo de todo el capítulo, conviene tener

en mente que $R = \overline{\mathbb{R}}$ es el semianillo tropical, definido en 2.36, o el subsemianillo $\mathbb{B} = \{0, \infty\}$ de $\overline{\mathbb{R}}$. En dicha sección estudiaremos la relación de la clase de ideales tropicales con las matroides valoradas y daremos varios ejemplos de ideales tropicales, entre los que destaca la clase de ideales tropicales realizables, que aparecen en el Ejemplo 3.12.

La sección 3.2 presenta la teoría de ideales iniciales para los ideales tropicales homogéneos de $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ y $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$. En esta sección probaremos que los ideales tropicales cumplen algunos de los resultados clásicos de álgebra conmutativa, en particular, veremos cómo se define la función de Hilbert para un ideal tropical y demostraremos en el Teorema 3.29 que, al igual que en el caso clásico, la función de Hilbert de un ideal tropical es un polinomio para grado suficientemente alto. Utilizando las funciones de Hilbert, terminaremos el capítulo probando en el Teorema 3.31 que los ideales tropicales satisfacen la condición de cadena ascendente.

3.1 Definición y primeros ejemplos

Comenzamos la sección introduciendo el concepto de ideal tropical. Los ideales tropicales se pueden definir a partir de un axioma de eliminación de monomios, que no es más que el axioma de eliminación de vectores (VVE) de la Proposición 1.41. Esto permite definir los ideales tropicales haciendo uso de la teoría de matroides valoradas de la Sección 1.2.

Vamos a denotar por Mon_d al conjunto de monomios de grado d en las variables $x_0, \dots, x_n$. De este modo, los elementos de R^{Mon_d} son vectores, cuyas entradas son monomios de grado d en las variables $x_0, \dots, x_n$. Así, podemos identificar dichos elementos con polinomios homogéneos de grado d en $R[x_0, \dots, x_n]$. De este modo, si $\mathcal{M}$ es una matroide valorada sobre Mon_d , los circuitos y los vectores valorados de $\mathcal{M}$ son polinomios homogéneos en $R[x_0, \dots, x_n]$ de grado d .

Ejemplo 3.2. Consideremos $n = 1, R = \overline{\mathbb{R}}$. Se tiene que el conjunto de monomios $\text{Mon}_2 = \{x_0^2, x_0x_1, x_1^2\}$, de modo que el vector $(2, 1, 0) \in \overline{\mathbb{R}}^{\text{Mon}_2}$ se identifica con el polinomio $f = 2 \odot x_0^2 \oplus 1 \odot x_0x_1 \oplus 0 \odot x_1^2$. $\triangle$

Definición 3.3. Sea $I \subset R[x_0, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo. Se dice que I es un *ideal tropical* si para cada $d \geq 0$, la parte homogénea de grado d del ideal, I_d , es la familia de vectores de una matroide valorada $\mathcal{M}_d$ sobre Mon_d . Si $I \subset R[x_0, \dots, x_n]$ es un ideal tropical homogéneo, vamos a denotar por $\mathcal{M}_d(I)$ la matroide valorada tal que $\mathcal{V}(\mathcal{M}_d(I)) = I_d$.

Observación 3.4. Si atendemos a la caracterización de vectores de una matroide valorada de la Proposición 1.41, los ideales tropicales homogéneos son aquellos ideales homogéneos $I \subset R[x_0, \dots, x_n]$ que verifican el siguiente axioma de eliminación de monomios:

3.1. DEFINICIÓN Y PRIMEROS EJEMPLOS

- Para cada $f, g \in I_d$, y cualquier monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ con $[f]_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}} = [g]_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}} \neq \infty$, existe un $h \in I_d$ tal que $[h]_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}} = \infty$ y $[h]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}} \geq \min([f]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}}, [g]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}})$ para todos los monomios $\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$, teniendo la igualdad siempre que $[f]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}} \neq [g]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}}$. Este axioma de eliminación suele denotarse por $h \leftarrow \text{elim}_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}}(f, g)$.

La definición de ideal tropical no se restringe solo al caso homogéneo, sino que podemos ampliarla a ideales $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$ e incluso a ideales I en el semianillo de polinomios de Laurent $R[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, la clave es que se cumpla el axioma de eliminación de monomios. Vamos a explicitar la definición para estos dos casos y a ver la relación que existe entre las tres definiciones.

Definición 3.5. Un ideal $I \subset R[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ es tropical si se satisface el axioma de eliminación de monomios:

- Para cada $f, g \in I$ y cada monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ con $[f]_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}} = [g]_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}} \neq \infty$, existe $h \in I$ tal que $[h]_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}} = \infty$ y $[h]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}} \geq \min([f]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}}, [g]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}})$ para todos los monomios $\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$, teniendo la igualdad siempre que $[f]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}} \neq [g]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}}$.

Definición 3.6. Un ideal $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$ es un *ideal tropical* si para cada $d \geq 0$, el conjunto $I_{\leq d}$ de polinomios de I de grado menor o igual que d es un espacio tropical lineal, o equivalentemente, el conjunto de vectores de una matroide valorada sobre $\text{Mon}_{\leq d}$.

Vamos a ver la relación entre los ideales tropicales homogéneos en $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ y los ideales tropicales en $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$ y $\overline{\mathbb{R}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$.

Definición 3.7. Dado un polinomio $f = \oplus_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in R[x_1, \dots, x_n]$, se define su *homogeneizado* como el polinomio

$$\tilde{f} = \bigoplus c_{\mathbf{u}} x_0^{d-|\mathbf{u}|} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in R[x_0, x_1, \dots, x_n],$$

donde $|\mathbf{u}| := \sum_{i=1}^n u_i$ y $d = \max\{|\mathbf{u}| : c_{\mathbf{u}} \neq \infty\}$. Dado un ideal $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$, se define su homogeneizado como el ideal

$$I^h := \langle \tilde{f} : f \in I \rangle \subset R[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

Se puede realizar una operación inversa para pasar de un polinomio homogéneo a uno en el semianillo $R[x_1, \dots, x_n]$.

Definición 3.8. Sea $f \in R[x_0, x_1, \dots, x_n]$ un polinomio homogéneo. Se define su *deshomogeneizado* como el polinomio $f|_{x_0=0} := f(0, x_1, \dots, x_n) \in R[x_1, \dots, x_n]$. Si tenemos un ideal homogéneo $J \subset R[x_0, x_1, \dots, x_n]$, el ideal deshomogeneizado es el ideal de $R[x_1, \dots, x_n]$ siguiente: $J|_{x_0=0} = \{f|_{x_0=0} : f \in J\}$.

Si $J \subset R[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ es un ideal en el semianillo de polinomios de Laurent, la intersección $J \cap R[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal en el semianillo $R[x_1, \dots, x_n]$. Recíprocamente, todo ideal $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$ genera un ideal $IR[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ cuyos elementos son los polinomios de Laurent de la forma $f\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$, donde $f \in I$ y $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ es un monomio de Laurent.

El siguiente lema precisa las relaciones entre los ideales en los diferentes semianillos.

- Lema 3.9.** (1) Si $J \subset R[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ es un ideal tropical, entonces $J \cap R[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal tropical. Recíprocamente, si $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal tropical, entonces también lo es $IR[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$.
- (2) Si $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal tropical, entonces I^h es un ideal tropical. Recíprocamente, si $J \subset R[x_0, \dots, x_n]$ es un ideal tropical homogéneo, entonces $J|_{x_0=0} \subset R[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal tropical.

Proof. (1) Supongamos que $J \subset R[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ es un ideal tropical y sea $I = J \cap R[x_1, \dots, x_n]$. Si $f, g \in I$ con $[f]_{\mathbf{x}^u} = [g]_{\mathbf{x}^u}$, entonces $f, g \in J$, luego existe $h \in J$ tal que $h \leftarrow \text{elim}_{\mathbf{x}^u}(f, g)$. En particular, esto implica que $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ ya que $f, g \in R[x_1, \dots, x_n]$, luego $h \in I$. Recíprocamente, supongamos que $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal tropical y sea $J = IR[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Sean $f, g \in J$ con $[f]_{\mathbf{x}^u} = [g]_{\mathbf{x}^u}$. Tomemos un monomio $\mathbf{x}^v$ tal que $f\mathbf{x}^v, g\mathbf{x}^v \in I$. Puesto que $[f\mathbf{x}^v]_{\mathbf{x}^{u+v}} = [g\mathbf{x}^v]_{\mathbf{x}^{u+v}}$, existe $h \in I$ cumpliendo $h \leftarrow \text{elim}_{\mathbf{x}^{u+v}}(f\mathbf{x}^v, g\mathbf{x}^v)$. Se tiene que $h\mathbf{x}^{-v} \in J$ y que $h\mathbf{x}^{-v} \leftarrow \text{elim}_{\mathbf{x}^u}(f, g)$, luego J es un ideal tropical.

- (2) Supongamos que $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal tropical. Sean $f, g \in I^h$ de grado d tal que $[f]_{\mathbf{x}^u} = [g]_{\mathbf{x}^u}$ y sea $\mathbf{u}'$ las últimas n -coordenadas de $\mathbf{u}$ (que tiene $n+1$ coordenadas). Entonces $f' = f|_{x_0=0}, g' = g|_{x_0=0} \in I$ y $[f']_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}'}} = [g']_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}'}}$. Por el axioma de eliminación en I , existe $h' \in I$ tal que $h' \leftarrow \text{elim}_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}'}}(f', g')$. Se tiene entonces que $h = x_0^{d-\deg(h')} \tilde{h}'$ cumple que $h \leftarrow \text{elim}_{\mathbf{x}^u}(f, g)$, luego I^h es tropical. Recíprocamente, supongamos que $J \subset \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ es un ideal tropical homogéneo y sean $f, g \in J|_{x_0=0}$ con $[f]_{\mathbf{x}^u} = [g]_{\mathbf{x}^u}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $d := \deg(f) - \deg(\tilde{g}) \geq 0$. Tomamos $c \in \mathbb{N}$ tal que $x_0^c \tilde{f}, x_0^{c+d} \tilde{g} \in J$. Denotamos $e = c + \deg(\tilde{f}) - |u|$. Por el axioma de eliminación de monomios para J , existe $h \in J$ con $h \leftarrow \text{elim}_{x_0^e \mathbf{x}^u}(x_0^c \tilde{f}, x_0^{c+d} \tilde{g})$, y por tanto $h|_{x_0=0} \leftarrow \text{elim}_{\mathbf{x}^u}(f, g)$ lo que muestra que $J|_{x_0=0}$ es un ideal tropical.

□

La clase de ideales tropicales es una clase estrictamente más pequeña que la de ideales en general de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. El siguiente ejemplo muestra un ideal homogéneo de $\mathbb{R}[x, y]$ que no es tropical.

Ejemplo 3.10 (Existen ideales no tropicales). Consideremos el ideal $I = \langle x \oplus y \rangle \subset \mathbb{R}[x, y]$. La parte homogénea de grado 2 de I está generada por $x^2 \oplus xy$ y por $xy \oplus y^2$. Esto no es el conjunto de vectores de una matroide valorada sobre $\text{Mon}_2 = \{x^2, xy, y^2\}$ ya que el polinomio $x^2 \oplus y^2$ debería estar en I por el axioma de eliminación aplicado a los dos generadores de I_2 . $\triangle$

La siguiente observación es muy relevante ya que nos dice cómo son las relaciones de dependencia en la matroide subyacente $\underline{\mathcal{M}}_d(I)$ si I es un ideal

3.1. DEFINICIÓN Y PRIMEROS EJEMPLOS

tropical.

Observación 3.11. Dado un ideal tropical $I \subset R[x_0, \dots, x_n]$ es importante entender cómo son las relaciones de dependencia de los polinomios en la matroide $\mathcal{M}_d(I)$. Si I es un ideal tropical, se tiene que I_d , para cada $d \geq 0$, es el conjunto de vectores de una matroide valorada, que hemos denotado $\mathcal{M}_d(I)$. Por el Teorema 1.43 sabemos que los circuitos valorados de $\mathcal{M}_d(I)$ son los vectores de soporte minimal. Además, sabemos que el soporte de los circuitos valorados forman la familia de circuitos de la matroide subyacente. Por lo tanto, en la matroide subyacente $\underline{\mathcal{M}}_d(I)$ se tiene que un conjunto $C \subset \text{Mon}_d$ es un circuito de $\underline{\mathcal{M}}_d(I)$ si y solo si existe un polinomio $h \in I_d$ de soporte mínimo tal que $C = \text{supp}(h)$. Es más, un conjunto $A \subset \text{Mon}_d$ es dependiente en $\underline{\mathcal{M}}_d(I)$ si y solo si existe un polinomio $g \in I_d$ tal que $\text{supp}(g) \subset A$.

Presentamos ahora una clase de ideales tropicales, los conocidos como *realizables*. Estos ideales surgen de tropicalizar ideales clásicos $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$, siendo K un cuerpo con una valoración. Son el primer ejemplo que vamos a estudiar de ideales tropicales. Recordemos que dado un polinomio $f = \bigoplus a_{\mathbf{u}} \odot \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$, su soporte es el conjunto $\text{supp}(f) = \{\mathbf{u} : a_{\mathbf{u}} \neq \infty\}$.

Ejemplo 3.12 (Ideales tropicales realizables). Sea (K, val) una valoración sobre el cuerpo K . Habíamos visto en 2.45 que todo polinomio $g \in K[x_0, \dots, x_n]$ se puede tropicalizar y dar lugar a un polinomio tropical $\text{trop}(g) \in R[x_0, \dots, x_n]$ interpretando las operaciones tropicalmente y cambiando los coeficientes por sus valoraciones, es decir, si $g = \sum c_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_0, \dots, x_n]$, entonces definimos $\text{trop}(g) := \bigoplus \text{val}(c_{\mathbf{u}}) \odot \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$. Para cualquier ideal $J \subset K[x_0, \dots, x_n]$, su tropicalización es el ideal

$$\text{trop}(J) := \langle \text{trop}(g) : g \in J \rangle \subset R[x_0, \dots, x_n].$$

Queremos ver que estos ideales son tropicales. Afirmamos que si f es un polinomio de soporte minimal en $\text{trop}(J)$, entonces existe $g \in J$ y $\lambda \in R^*$ tal que $f = \lambda \odot \text{trop}(g)$. En efecto, si $f \in \text{trop}(J)$, podemos escribirlo de la forma $f = \bigoplus \lambda_i \odot \mathbf{x}^{\mathbf{u}_i} \odot \text{trop}(g_i)$ con $g_i \in J$, entonces $f = \bigoplus \lambda_i \odot \text{trop}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}_i} g_i)$, ya que $\text{trop}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}} g) = \text{trop}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}}) \oplus \text{trop}(g)$ para todo polinomio $g \in K[x_0, \dots, x_n]$. Puesto que no hay cancelación en R , se tiene que $\text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}_i} g_i) \subset \text{supp}(f)$, para cada i , luego se da la igualdad porque f era de soporte minimal, es decir, $\text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}_i} g_i) = \text{supp}(f)$ para todo i . Como todos los $\mathbf{x}^{\mathbf{u}_i} g_i$ son de soporte minimal en J , cada uno de ellos es un múltiplo escalar de otro, luego $f = \lambda \odot \text{trop}(g)$ para algún $g \in J$.

Vamos a ver que si $J \subset K[x_0, \dots, x_n]$ es un ideal homogéneo, para cada $d \geq 0$, los polinomios de grado d en $\text{trop}(J)$ de soporte minimal satisfacen el axioma de eliminación de circuitos de matroides valoradas (VCE), 1.39. El resto de axiomas (VC1), (VC2) y (VC3) son claros. Se tendrá entonces que $\text{trop}(J)$ es un ideal tropical.

Veamos que cumple entonces el axioma de eliminación. Sean $f_1, f_2 \in \text{trop}(J)_d$ de soporte minimal. Entonces existen $\lambda_1, \lambda_2 \in R^*$ y $g_1, g_2 \in J$ tal que $f_1 =$

$\lambda_1 \odot \text{trop}(g_1)$ y $f_2 = \lambda_2 \odot \text{trop}(g_2)$. Puesto que los circuitos valorados son cerrados por multiplicación tropical se puede suponer $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Sean $e, e' \in \text{Mon}_d$ tal que $[f_1]_e = [f_2]_e \neq \infty$ y $[f_2]_{e'} > [f_1]_{e'}$. Pongamos

$$g_1 = a_1 \mathbf{x}^{\mathbf{u}_1} + a_2 \mathbf{x}^{\mathbf{u}_2} + \cdots + a_r \mathbf{x}^{\mathbf{u}_r}, \quad (3.1)$$

$$g_2 = b_1 \mathbf{x}^{\mathbf{u}_1} + b_2 \mathbf{x}^{\mathbf{u}_2} + \cdots + b_s \mathbf{x}^{\mathbf{u}_s}. \quad (3.2)$$

Entonces sus tropicalizados son

$$f_1 = \text{val}(a_1) \mathbf{x}^{\mathbf{u}_1} \oplus \text{val}(a_2) \mathbf{x}^{\mathbf{u}_2} \oplus \cdots \oplus \text{val}(a_r) \mathbf{x}^{\mathbf{u}_r}, \quad (3.3)$$

$$f_2 = \text{val}(b_1) \mathbf{x}^{\mathbf{u}_1} \oplus \text{val}(b_2) \mathbf{x}^{\mathbf{u}_2} \oplus \cdots \oplus \text{val}(b_s) \mathbf{x}^{\mathbf{u}_s}. \quad (3.4)$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer $e = \mathbf{x}^{\mathbf{u}_1}$ y $e' = \mathbf{x}^{\mathbf{u}_2}$, por lo tanto $\text{val}(b_1) = \text{val}(a_1)$ y $\text{val}(b_2) > \text{val}(a_2)$. Consideremos el polinomio $g = \frac{a_1}{b_1} g_2 - g_1 \in \text{trop}(J)_d$. Consideremos ahora $f = \text{trop}(g)$. Veamos que f cumple lo que queremos. Se tiene que $[g]_e = 0$, luego $[f]_e = \infty$. Además, $[g]_{e'} = \frac{a_1 b_2}{b_1} - a_2$, luego al tomar la valoración se obtiene

$$\begin{aligned} [f]_{e'} &= \text{val} \left(\frac{a_1 b_2}{b_1} - a_2 \right) = \min \left\{ \text{val} \left(\frac{a_1 b_2}{b_1} \right), \text{val}(a_2) \right\} \\ &= \min \{ \text{val}(a_1) + \text{val}(b_2) - \text{val}(b_1), \text{val}(a_2) \} \\ &= \min \{ \text{val}(b_2), \text{val}(a_2) \} = \text{val}(a_2) = [f_1]_{e'} \end{aligned}$$

Además, $[f]_r = \text{val}([g_2]_r - [g_1]_r) \geq \min \{ [f_1]_r, [f_2]_r \}$ para el resto de monomios fuera de e, e' . Encontramos por tanto $f \in \text{trop}(J)_d$ tal que $f \leftarrow \text{elim}_e(f_1, f_2)$. $\triangle$

Ejemplo 3.13 (Ideal tropical homogéneo de un punto). Sea $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \text{trop}(\mathbb{P}^n) = (\overline{\mathbb{R}}^{n+1} \setminus (\infty, \dots, \infty)) / \mathbb{R}\mathbf{1}$. Sea $I_{\mathbf{a}}$ el ideal generado por los polinomios homogéneos $f \in \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ tales que $\mathbf{a} \in V(f)$, es decir, $f(\mathbf{a}) = \infty$ o el mínimo en $f(\mathbf{a})$ se alcanza al menos dos veces. Queremos probar que $I_{\mathbf{a}}$ es un ideal tropical. Además, si (K, val) es un cuerpo valorado con $a_i \in \Gamma_{\text{val}}$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces $I_{\mathbf{a}}$ es la tropicalización de cualquier ideal $J_{\alpha} = \{f \in K[x_0, \dots, x_n] : f \text{ homogéneo y } f(\alpha) = 0\}$ de un punto $\alpha \in \mathbb{P}^n$ cumpliendo $\text{val}(\alpha_i) = a_i$.

En primer lugar, vamos a ver que $I_{\mathbf{a}}$ está generado como $\overline{\mathbb{R}}$ -semimódulo por el conjunto $\mathcal{S}$ de polinomios de la forma $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \odot \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \oplus (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \odot \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ tales que $\deg(\mathbf{x}^{\mathbf{u}}) = \deg(\mathbf{x}^{\mathbf{v}})$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Es claro que todos estos binomios (o monomios, en caso de que alguno de los a_i sea ∞) están contenidos en $I_{\mathbf{a}}$. Sea ahora $f = \bigoplus c_{\mathbf{u}} \odot \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in I_{\mathbf{a}}$ que esté fuera del ideal generado por $\mathcal{S}$. Podemos suponer que f tiene el menor número de términos posible y que $f(\mathbf{a}) < \infty$ ya que en caso contrario los monomios de f estarían en el ideal generado por $\mathcal{S}$. Sea $c_{\mathbf{v}} \odot \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ un término de f tal que $c_{\mathbf{v}} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} > f(\mathbf{a})$ en caso de que exista tal término, o cualquier término de f , en caso contrario. Tomemos ahora $\mathbf{v}' \neq \mathbf{v}$ de manera que $f(\mathbf{a}) = c_{\mathbf{v}'} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}'$ y sea $g = \bigoplus_{\mathbf{u} \neq \mathbf{v}} c_{\mathbf{u}} \odot \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$. Es claro entonces que

$$f = g \oplus (c_{\mathbf{v}} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}') \odot ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}') \odot \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \oplus (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \odot \mathbf{x}^{\mathbf{v}'}). \quad (3.5)$$

3.1. DEFINICIÓN Y PRIMEROS EJEMPLOS

En caso de que el mínimo en $f(\mathbf{a})$ no se alcance en $\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$, esto es, $c_{\mathbf{v}} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} > f(\mathbf{a})$, entonces el mínimo en $g(\mathbf{a})$ se sigue alcanzando dos veces porque $f \in I_{\mathbf{a}}$. En caso de que no exista un término de f mayor que $f(\mathbf{a})$, el mínimo en $f(\mathbf{a})$ se alcanza en todos los términos de f y por tanto f debe tener al menos 3 términos ya que si no sería un múltiplo escalar por un polinomio de $\mathcal{S}$. En este caso, el mínimo en $g(\mathbf{a})$ se alcanza de nuevo dos veces. Por lo tanto, $g(\mathbf{a}) \in I_{\mathbf{a}}$ y tiene menos términos que f , luego g está en el ideal generado por $\mathcal{S}$. Por (3.5), f está también en $\mathcal{S}$, lo que prueba que $I_{\mathbf{a}}$ está generado por $\mathcal{S}$. Los polinomios de grado d de soporte mínimo en $\mathcal{S}$ cumplen el axioma de eliminación de circuitos para una matroide valorada, lo que implica que $(I_{\mathbf{a}})_d$ es el conjunto de vectores de una matroide valorada, y por tanto $I_{\mathbf{a}}$ es un ideal tropical.

Para probar la segunda parte, supongamos que $\alpha \in \mathbb{P}^{\times}$ verifica que $\text{val}(\alpha_i) = a_i$ para cada i . El ideal homogéneo $J_{\alpha} \subset K[x_0, \dots, x_n]$ contiene a los binomios de la forma $\alpha^{\mathbf{v}}\mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \alpha^{\mathbf{u}}\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ para todos los pares de monomios $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}, \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ con $\deg(\mathbf{x}^{\mathbf{u}}) = \deg(\mathbf{x}^{\mathbf{v}})$, luego $I_{\mathbf{a}} \subset \text{trop}(J_{\alpha})$. Si esta inclusión fuera propia, existiría $h \in \text{trop}(J_{\alpha})$ tal que $h \notin I_{\mathbf{a}}$. Podemos escribir $h = \bigoplus h_i \odot \text{trop}(g_i)$, con $g_i \in J_{\alpha}$. Puesto que $\mathbf{a} = \text{val}(\alpha) \in \text{trop}(V(g_i)) = V(\text{trop}(g_i))$, se tiene que $\mathbf{a} \in h$, en contra de lo supuesto. $\triangle$

A continuación vamos a ver un ejemplo que muestra cómo dos ideales tropicales diferentes pueden tener la misma variedad asociada, lo que indica que las variedades asociadas a ideales dan menos información que la que tiene el ideal.

Ejemplo 3.14 (Ideales con la misma variedad). Consideremos $\mathbb{C}$ el cuerpo de números complejos con la valoración trivial $\text{val}: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, y los ideales

$$J = \langle (x + y + z)(xy + xz + yz) \rangle, J' = \langle (x + y)(x + z)(y + z) \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z].$$

Sus tropicalizaciones $I = \text{trop}(J)$ y $I' = \text{trop}(J')$ son como sabemos ideales tropicales homogéneos en $\overline{\mathbb{R}}[x, y, z]$ y además dan la misma variedad. El cálculo de las variedades tropicales asociadas a esos ideales se ha obtenido haciendo uso de la función `tropicalVariety` de Macaulay2, [GS], ver Apéndice A.

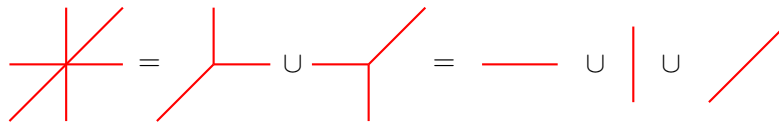


Figura 3.1: Variedad tropical de J y J' con su descomposición.

Sin embargo, los ideales son diferentes. Por ejemplo, el polinomio

$$f = x^3y \oplus x^3z \oplus xy^3 \oplus y^3z \oplus xz^3 \oplus yz^3 \oplus xy^2z \oplus xyz^2 \oplus y^2z^2$$

es igual a $\text{trop}((x + y)(x + z)(y + z)(x - y - z)) \in I'$. Basta observar que

$$\begin{aligned} (x + y)(x + z)(y + z)(x - y - z) &= \\ &= x^3y + x^3z - xy^3 - 2xy^2z - 2xyz^2 - xz^3 - y^3z - 2y^2z^2 - yz^3, \end{aligned}$$

y tomando la valoración trivial e interpretando las operaciones tropicalmente se obtiene f . Sin embargo, veamos f no está en I : para que f estuviera en I , debería ser de la forma $f = \text{trop}(g)$ con $g \in J = \langle (x + y + z)(xy + xz + yz) \rangle$. Como el generador de I es homogéneo de grado 3, g tendría que ser de la forma $(x + y + z)(xy + xz + yz)(ax + by + cz)$, pero es sencillo comprobar que ningún polinomio de esa forma puede tener un soporte igual al de f . Por ejemplo, si $a \neq 0$, x^2y^2 es un monomio de g , que no es uno de los de f . Por lo tanto, $f \notin I$.

△

Ya hemos visto en el Ejemplo 3.12 que los ideales de la forma $\text{trop}(I)$ para un ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ son ideales tropicales. Dichos ideales se llaman *realizables*. No obstante, la familia de ideales tropicales es más extensa, y existen algunos ideales tropicales que no son de la forma $\text{trop}(I)$ para un ideal I de $K[x_1, \dots, x_n]$. Este tipo de ideales se llaman *no realizables*. El siguiente ejemplo muestra un ejemplo de ideal tropical no realizable en $\overline{\mathbb{R}}[x, y]$.

La idea a la hora de definir este ideal no realizable es buscar relaciones geométricas entre los generadores del ideal de forma que lo que estemos construyendo sean los soportes que constituyen la familia de circuitos de una matroide. Vamos a definir los generadores del ideal en función de si están o no en un *triángulo* estándar en $\overline{\mathbb{R}}[x, y]$.

Ejemplo 3.15 (Ideal tropical no realizable). Un *triángulo estándar* de tamaño k en el semianillo $\overline{\mathbb{R}}[x, y]$ es una colección de monomios de la forma

$$\Delta = \{x^{n+i}y^{m+j} : i, j \geq 0 \text{ y } i + j \leq k\},$$

para $k, n, m \in \mathbb{N}$ fijos.

Consideremos el ideal $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x, y]$ generado (como semimódulo) por los polinomios de la forma

$$f = \bigoplus_{\mathbf{u} \in C} \mathbf{x}^{\mathbf{u}},$$

donde C es un conjunto minimal de $k + 2$ monomios de Mon_d en un triángulo estándar de tamaño k . De esta manera realmente lo que estamos haciendo es construir los circuitos de la matroide valorada asociada al ideal I . Es conveniente entender cuáles son los generadores de I de una manera geométrica.

En la Figura 3.2a podemos ver un triángulo estándar de tamaño 1, y marcado en verde, vemos que los 3 monomios $\{0, x, y\}$ están en I . En la Figura 3.2b, vemos un triángulo estándar de tamaño 2. A su vez, dicho triángulo estándar contiene dentro varios triángulos estándar de tamaño 1, marcados en color azul. Algunos de los generadores que obtenemos fijándonos en ese triángulo estándar de tamaño 2 son los que muestra la Figura 3.3:

Recordemos que no todo conjunto de $k + 2$ monomios en un triángulo estándar de tamaño k está en I , también debe satisfacerse que el conjunto

3.1. DEFINICIÓN Y PRIMEROS EJEMPLOS

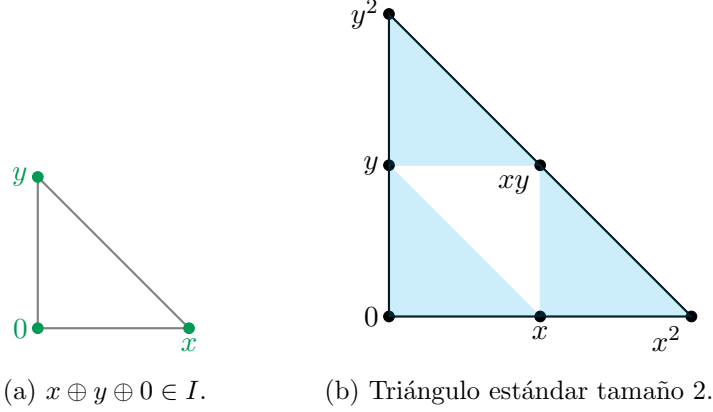


Figura 3.2

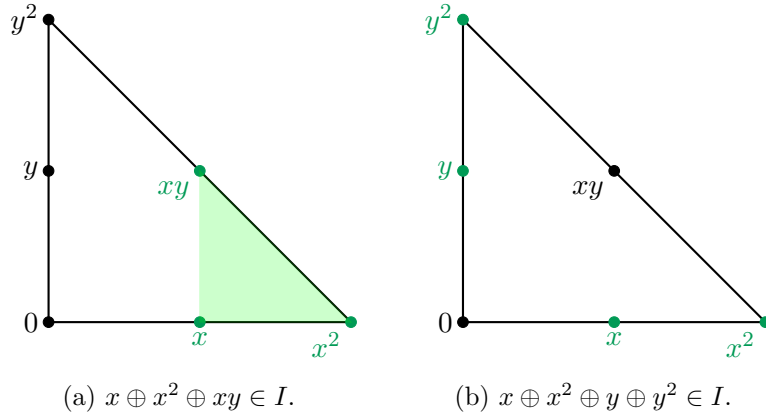


Figura 3.3: Algunos generadores de I en $\text{Mon}_{\leq 2}$.

sea minimal. Lo vemos en el siguiente ejemplo con $\text{Mon}_{\leq 3}$ donde el polinomio $x \oplus y \oplus xy \oplus x^2y \oplus xy^2 \notin I$ ya que $xy \oplus x^2y \oplus xy^2 \in I$. Ver Figura 3.4.

Para ver que I es un ideal tropical, debemos ver que los generadores de I cumplen el axioma de eliminación de monomios, que recordamos nuevamente aquí:

- Para cada $f, g \in I_{\leq d}$, y cualquier monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ con $[f]_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}} = [g]_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}} \neq \infty$, existe un $h \in I_{\leq d}$ tal que $[h]_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}} = \infty$ y $[h]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}} \geq \min([f]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}}, [g]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}})$ para todos los monomios $\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$, teniendo la igualdad siempre que $[f]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}} \neq [g]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}}$.

Vamos a ver algunos ejemplos de que se cumple dicha propiedad. En la Figura 3.5 podemos observar que tanto $f = 0 \oplus x^2 \oplus y \oplus xy$ como $g = y^2 \oplus y \oplus x \oplus x^2$ están en I . Se tiene que coinciden sus coeficientes en los monomios $\{y, x^2\}$.

Se tiene que $[f]_y = [g]_y$. Buscamos $h \in I_{\leq 2}$ tal que $[h]_y = \infty$ y que $[h]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}} \geq \min([f]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}}, [g]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}})$ para el resto de monomios, dándose igualdad si $[f]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}} \neq [g]_{\mathbf{x}^{\mathbf{v}}}$. Dicho polinomio h se consigue eliminando los monomios comunes a f y a g y

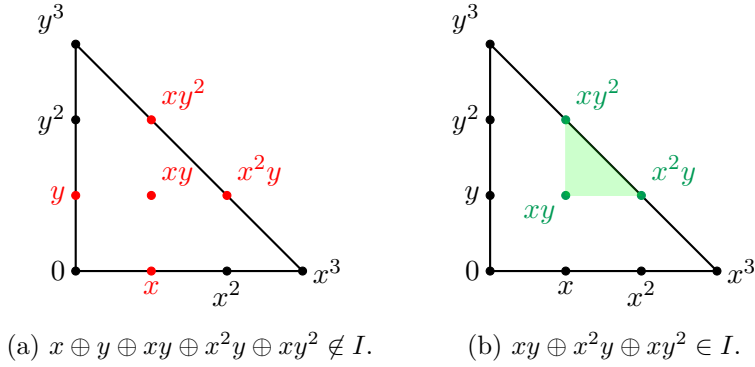
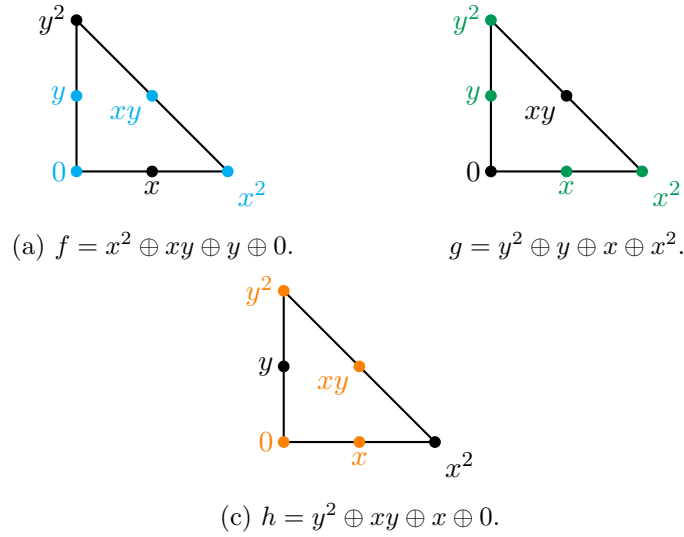

 Figura 3.4: Ejemplos de generadores en $\text{Mon}_{\leq 3}$.


Figura 3.5

sumando el resto de monomios de f y g , es decir, $h = y^2 \oplus xy \oplus x \oplus 0$ cumple lo pedido. Al retirar los monomios comunes a f y g garantizamos que $[h]_{\mathbf{x}^u} = \infty$ donde $[f]_{\mathbf{x}^u} = [g]_{\mathbf{x}^u}$ y al sumar el resto de monomios que no comparten f y g garantizamos la condición de desigualdad del axioma. El polinomio h resultante está en I porque es un conjunto minimal de 4 monomios dentro de un triángulo estándar de tamaño 4. En general, si hacemos este proceso obtenemos siempre un polinomio h con el número adecuado de monomios que forman un soporte minimal dentro de un triángulo estándar del tamaño adecuado gracias a que los polinomios de partida f y g cumplían dicha minimalidad.

Pese a que I sea un ideal tropical, veamos que no es realizable. Supongamos que $I = \text{trop}(J)$ para algún ideal $J \subset K[x, y]$. Se tiene que J tiene algún polinomio de la forma $ax + by + c$ ya que $x \oplus y \oplus 0 \in I$. Podemos suponer, tras reescalar las variables por un escalar de valor 0, lo cual no cambia la tropical-

3.2. IDEALES INICIALES DE IDEALES TROPICALES

ización, que $a = b = c = 1$ y que $x + y + 1 \in J$. En este caso, se tendría que $f = (1 + x^3 + y^3 - 3xy) \in J$ ya que

$$(1 + x^3 + y^3 - 3xy) = (x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y).$$

Sin embargo, al tropicalizar f , dotando a K de la valoración trivial, obtenemos que $x^3 \oplus y^3 \oplus xy \oplus 0 \in I$, lo cual es absurdo ya que tiene únicamente 4 monomios y el menor tamaño de triángulo estándar en el que puede estar es 3 por contener a los monomios $0, x^3, y^3$ con lo que debería tener al menos 5 monomios.

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & y^3 & & & & & \\ & \bullet & y^2 & & \bullet & xy^2 & \\ & \bullet & y & & \bullet & xy & \bullet & x^2y \\ & \bullet & 0 & & \bullet & x & \bullet & x^2 & \bullet & x^3 \end{array}$$

$$x^3 \oplus y^3 \oplus xy \oplus 0 \notin I.$$

△

3.2 Ideales iniciales de ideales tropicales

En esta sección vamos a introducir la teoría de ideales iniciales para los ideales tropicales homogéneos de $\mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ y $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$. Como comentamos al principio del presente capítulo, nuestro objetivo es utilizar los ideales iniciales para probar algunos resultados que satisfacen los ideales tropicales. Dentro de los mencionados resultados, destaca el estudio de la función de Hilbert de los ideales tropicales y la condición de cadena ascendente.

Comenzaremos la sección dando las definiciones básicas de término inicial de un polinomio, que lleva de forma natural al concepto de ideal inicial y generalizaremos dichos conceptos al marco de las matroides valoradas, lo que nos permitirá trabajar con los ideales tropicales de un modo más directo. Una de las claves de los ideales iniciales es que los ideales iniciales de ideales tropicales siguen siendo tropicales, lo que permite reducir muchas demostraciones a un caso más sencillo. Este es el contenido del Teorema 3.23.

Utilizando el comportamiento “matroidal” de los ideales tropicales es posible asignarles una función de Hilbert relacionada con el rango de la matroide subyacente $\mathcal{M}_d(I)$ que además resulta ser un polinomio para $d \gg 0$, al igual que en el caso clásico, como veremos en el Teorema 3.29. Finalizaremos la sección utilizando los resultados mencionados para probar que los ideales tropicales satisfacen la condición de cadena ascendente, 3.31.

Definición 3.16. Sea $\mathbf{w} \in \overline{\mathbb{R}}^{n+1}$, $\mathbf{w} \neq (\infty, \dots, \infty)$. El *término inicial* de un polinomio $f = \bigoplus a_{\mathbf{u}} \odot \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ con respecto a $\mathbf{w}$ es el polinomio tropical en $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$ dado por

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f) := \begin{cases} \bigoplus_{a_{\mathbf{u}} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = f(\mathbf{w})} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} & \text{si } f(\mathbf{w}) < \infty, \\ \infty & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Es decir, el término inicial de f es el polinomio formado por los monomios de f en los cuales se alcanza el mínimo al sustituir por $\mathbf{w}$. El *ideal inicial* $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ de un ideal homogéneo $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ es el ideal generado por los términos iniciales de los polinomios de I , explícitamente,

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(I) := \langle \text{in}_{\mathbf{w}}(f) : f \in I \rangle \subset \mathbb{B}[x_0, \dots, x_n].$$

En el caso en que I sea un ideal homogéneo de $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$, definimos su ideal inicial $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ como el ideal inicial de $I\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ utilizando la inclusión de $\mathbb{B}$ en $\overline{\mathbb{R}}$.

Observación 3.17. Se tiene que $\text{in}_{\mathbf{w}}(a \odot f \oplus b \odot g) = \text{in}_{\mathbf{w}}(f) \oplus \text{in}_{\mathbf{w}}(g)$ para todos $f, g \in I$ y $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $a \odot f(\mathbf{w}) = b \odot f(\mathbf{w}) < \infty$. Además, $\text{in}_{\mathbf{w}}(x_i \odot f) = x_i \odot \text{in}_{\mathbf{w}}(f)$, luego se tiene que

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(I_d) = (\text{in}_{\mathbf{w}}I)_d. \quad (3.7)$$

Vamos a extender el concepto de término inicial para los vectores de cualquier matroide valorada sobre $\overline{\mathbb{R}}$ y así poder trabajar mejor con los ideales tropicales.

Definición 3.18. Sea E un conjunto finito, $H \in \overline{\mathbb{R}}^E$ y $\mathbf{w} \in \overline{\mathbb{R}}^E \setminus (\infty, \dots, \infty)$. El *término inicial* de H con respecto a $\mathbf{w}$ es el subconjunto de E siguiente

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(H) := \{e \in E : H_e + w_e \text{ es mínimo entre } e \in E\},$$

si $\min(H_e + w_e) < \infty$, y $\text{in}_{\mathbf{w}}(H) = \emptyset$, en caso contrario.

El siguiente lema es de gran importancia ya que permitirá probar que los ideales iniciales de ideales tropicales son también tropicales.

Lema 3.19. Sea $\mathcal{M} = (E, p)$ una matroide valorada de rango r con función de valoración $p: \binom{E}{r} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, y sea $\mathbf{w} \in \overline{\mathbb{R}}^E$. Entonces

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(\mathcal{B}(\mathcal{M})) := \left\{ B \in \binom{E}{r} : p(B) - \sum_{e \in B} w_e \text{ es mínimo entre } B \in \binom{E}{r} \right\}$$

es el conjunto de bases de una matroide de rango r sobre E , que denotamos $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{M}$. Los circuitos de dicha matroide son los elementos de

$$\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{C}(\mathcal{M}) := \{\text{in}_{\mathbf{w}}H : H \in \mathcal{C}(\mathcal{M})\}$$

que son minimales para la inclusión y su conjunto de ciclos es

$$\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{V}(\mathcal{M}) := \{\text{in}_{\mathbf{w}}H : H \in \mathcal{V}(\mathcal{M})\}.$$

3.2. IDEALES INICIALES DE IDEALES TROPICALES

Proof. Para todo $B \in \binom{E}{r}$, vamos a denotar $p_{\mathbf{w}} = p(B) - \sum_{e \in B} w_e$. Debemos ver que $\text{in}_{\mathbf{w}}(\mathcal{B}(\mathcal{M}))$ cumple las condiciones del Teorema 1.16. Sean $A, B \in \binom{E}{r}$ y sea $a \in A \setminus B$. Puesto que p es función de valoración, existe $b \in B \setminus A$ tal que

$$p(A) + p(B) \geq p(A \cup b - a) + p(B \cup a - b).$$

Restando $\sum_{e \in A} w_e + \sum_{e \in B} w_e$ a los dos lados, obtenemos que

$$p_{\mathbf{w}}(A) + p_{\mathbf{w}}(B) \geq p_{\mathbf{w}}(A \cup b - a) + p_{\mathbf{w}}(B \cup a - b). \quad (3.8)$$

Por lo tanto, $p_{\mathbf{w}}$ también es una función de valoración ya que satisface VB2, es más, la desigualdad (3.8) prueba que si $A, B \in \text{in}_{\mathbf{w}}(\mathcal{B}(\mathcal{M}))$, entonces tanto $A \cup b - a$ como $B \cup a - b$ están en $\text{in}_{\mathbf{w}}(\mathcal{B}(\mathcal{M}))$ y por tanto $\text{in}_{\mathbf{w}}(\mathcal{B}(\mathcal{M}))$ verifica (B2). Vamos ahora a comprobar que los circuitos de $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{M}$ tienen la forma del enunciado. El término inicial de un circuito fundamental $H(B, e)$ (recordemos que se definió en 1.35) es

$$\{e' \in E : p(B \cup e - e') - p(B) + w_{e'} \text{ es mínimo}\}.$$

Sumando $p(B) - \sum_{a \in B \cup e} w_a$, (que no depende de e'), tenemos que

$$\text{in}_{\mathbf{w}}H(B, e) = \{e' \in E : p_{\mathbf{w}}(B \cup e - e') \text{ es mínimo entre } e' \in E\}.$$

Todo circuito C de la matroide $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{M}$ es el circuito fundamental de un elemento $e \in E$ con respecto a una base $B \in \text{in}_{\mathbf{w}}(\mathcal{B}(\mathcal{M}))$, y por tanto es de la forma

$$\begin{aligned} C &= \{e' \in E : B \cup e - e' \in \text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{B}(\mathcal{M})\} \\ &= \{e' \in E : p_{\mathbf{w}}(B \cup e - e') = p_{\mathbf{w}}(B)\} \\ &= \text{in}_{\mathbf{w}}H(B, e). \end{aligned}$$

Por lo tanto, todo circuito de $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{M}$ es un elemento de $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{C}(\mathcal{M})$. Para probar la otra contención basta probar ahora que todo conjunto de $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ es dependiente en $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{M}$. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que $\text{in}_{\mathbf{w}}H \subset B$ para algún $H \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ y alguna base $B \in \text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{B}(\mathcal{M})$. Sea $e \in \text{in}_{\mathbf{w}}H$ y sea B' una base de la matroide subyacente $\mathcal{M}$ tal que $H = \lambda \odot H(B', e)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $e \in B \setminus B'$ y $p_{\mathbf{w}}$ es función de valoración, existe $e' \in B' \setminus B$ tal que

$$p_{\mathbf{w}}(B) + p_{\mathbf{w}}(B') \geq p_{\mathbf{w}}(B \cup e' - e) + p_{\mathbf{w}}(B' \cup e - e'). \quad (3.9)$$

Como $\text{in}_{\mathbf{w}}H(B', e) \subset B$ y $e' \notin B$, se tiene que $p_{\mathbf{w}}(B') < p_{\mathbf{w}}(B' \cup e - e')$. Además, puesto que $B \in \text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{B}(\mathcal{M})$, también tenemos $p_{\mathbf{w}}(B) \leq p_{\mathbf{w}}(B \cup e' - e)$. Sumando estas dos desigualdades contradecimos (3.9).

Falta probar que el conjunto de ciclos de $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{M}$ es igual a $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{V}(\mathcal{M})$. Todo vector $H \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ es de la forma $H^1 \oplus \dots \oplus H^k$ donde $H^i \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ para todo i . Su término inicial $\text{in}_{\mathbf{w}}H$ es la unión de los términos iniciales $\text{in}_{\mathbf{w}}H^i$ tal que $\min_{e \in E}(H_e^i + w_e) = \min_{e \in E}(H_e + w_e)$, luego la familia $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{V}(\mathcal{M})$ es cerrada por uniones. Además, contiene a los circuitos de $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{M}$. Para terminar la prueba es

suficiente probar que para cualquier $G \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$, el conjunto $\text{in}_{\mathbf{w}}G$ es un ciclo en $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{M}$.

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que G es un circuito de $\mathcal{M}$ tal que $\text{in}_{\mathbf{w}}G$ no es un ciclo y elijamos G tal que $\text{in}_{\mathbf{w}}G$ sea minimal para la inclusión cumpliendo dicha propiedad. Como $\text{in}_{\mathbf{w}}G$ es dependiente en $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{M}$, contiene un circuito C , que hemos visto que es de la forma $C = \text{in}_{\mathbf{w}}H$ para algún $H \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$.

Podemos suponer, tras multiplicar tropicalmente por un escalar, que el valor del mínimo es el mismo tanto para G como para H , es decir, $\min(G_e + w_e) = \min(H_e + w_e)$. Sea $e \in \text{in}_{\mathbf{w}}H \subset \text{in}_{\mathbf{w}}G$. Se tiene que $G_e + w_e = H_e + w_e$, luego $G_e = H_e$. Tomemos $e' \in \text{in}_{\mathbf{w}}G$ tal que e' no esté en ningún circuito de $\text{in}_{\mathbf{w}}\mathcal{M}$ contenido en $\text{in}_{\mathbf{w}}G$ (se puede tomar porque $\text{in}_{\mathbf{w}}G$ no es un ciclo). En particular, $e' \notin \text{in}_{\mathbf{w}}H$. Por tanto, $G_{e'} + w_{e'} < H_{e'} + w_{e'}$. Podemos aplicar el axioma de eliminación de circuitos para conseguir un circuito F de $\mathcal{M}$ tal que $F_e = \infty$, $F_{e'} = G_{e'}$ y $F \geq G \oplus H$. Esto implica que $e' \in \text{in}_{\mathbf{w}}F$, $\text{in}_{\mathbf{w}}F \subset \text{in}_{\mathbf{w}}G$ y que $e \notin \text{in}_{\mathbf{w}}F$. Por tanto $\text{in}_{\mathbf{w}}F$ debe ser un ciclo, lo que contradice la elección de e' ya que $e' \in \text{in}_{\mathbf{w}}F$. $\square$

Para poder presentar los resultados relativos a la función de Hilbert de un ideal tropical, es necesario hablar primero de la contracción de una matroide valorada. Esta operación, junto a otras como la restricción, el dual, o la truncación de una matroide valorada vienen explicadas de manera precisa en [Mur10, Section 5.2.3]. Nos limitaremos a explicar la construcción de la matroide contracción y a usar los resultados necesarios para continuar nuestra exposición.

Definición 3.20. Sea $\mathcal{M}$ una matroide valorada sobre E y sea $A \subset E$ de rango s . Fijemos una base B_A de la matroide restricción $\mathcal{M}|A$ (recordemos que definimos matroide restricción en 1.1.3). La *contracción* $\mathcal{M}/A$ con respecto a B_A es la matroide valorada $\mathcal{M}/A = (E \setminus A, q)$ de rango $r - s$ cuya función de valoración $q: \binom{E \setminus A}{r-s} \rightarrow R$ está dada por

$$q(B) = p(B \sqcup B_A).$$

Observación 3.21. Si cambiamos la base elegida por otras base B'_A de A , la función de valoración q cambia en un múltiplo escalar tropical, ver [Mur10, Th. 5.2.5] y por lo tanto las matroides valoradas son equivalentes, lo que indica que la contracción con respecto a A no depende de la base de A elegida.

Puesto que nosotros estamos trabajando con ideales tropicales, que son el conjunto de vectores de ciertas matroides valoradas, nos interesa saber cómo son los vectores de la matroide contracción. En [BB18, Th. 4.17], se prueba que

$$\mathcal{V}(\mathcal{M}/A) = \{H[E \setminus A]: H \in \mathcal{V}(\mathcal{M})\}, \quad (3.10)$$

donde $H[E \setminus A] \in R^{E \setminus A}$ está dado por $(H[E \setminus A])_e := H_e$ para todo $e \in E \setminus A$. Es decir, los vectores de la matroide contracción se obtienen de los vectores de $\mathcal{M}$ proyectando sobre las coordenadas que no están en A .

3.2. IDEALES INICIALES DE IDEALES TROPICALES

Definición 3.22. Si M es una matroide sobre E y F es un conjunto finito, la extensión $M \oplus F$ es la matroide sobre $E \sqcup F$ obtenida al añadir todos los elementos de F como cobucles, es decir, es la matroide que tiene como bases $\mathcal{B}(M \oplus F) = \{B \sqcup F : B \in \mathcal{B}(M)\}$.

Recordamos que si I es un ideal tropical homogéneo, denotamos por $\mathcal{M}_d(I)$ la matroide valorada tal que $I_d = \mathcal{V}(\mathcal{M}_d(I))$. En el caso de que I sea un ideal tropical homogéneo de $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$, denotaremos $M_d(I) := \mathcal{M}_d(I)$ para enfatizar que no hay ninguna información extra en la matroide valorada $\mathcal{M}_d(I)$ más allá de la contenida en la matroide subyacente.

Presentamos ahora el teorema que afirma que los ideales iniciales de ideales tropicales son también tropicales. Su demostración se basa fuertemente en el Lema 3.19.

Teorema 3.23. Sea I un ideal tropical homogéneo de $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ y sea $\mathbf{w} \in \overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ con $\mathbf{w} \neq (\infty, \dots, \infty)$. El ideal inicial $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ es un ideal tropical homogéneo en $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$.

Además, si $\sigma = \{i : w_i = \infty\}$ y Mon_d^σ es el conjunto de monomios divisibles por las variables x_i con $i \in \sigma$, la matroide asociada $M_d(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$ es igual a la matroide inicial $\text{in}_{\hat{\mathbf{w}}}(\mathcal{M}_d(I)/\text{Mon}_d^\sigma) \oplus \text{Mon}_d^\sigma$, donde $\hat{\mathbf{w}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\text{Mon}_d \setminus \text{Mon}_d^\sigma}$ está dado por $\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}} := \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$.

Proof. Para cada $f \in I_d$, denotamos por f^σ el polinomio obtenido al eliminar todos los términos de f que tuvieran un monomio de Mon_d^σ . Por definición se tiene que $\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \text{in}_{\mathbf{w}}(f^\sigma)$, ya que hemos eliminado términos donde no se alcanzaba el mínimo. Además, por (3.10), el conjunto $I_d^\sigma = \{f^\sigma : f \in I_d\}$ es el conjunto de vectores de la matroide valorada contracción $\mathcal{M}_d(I)/\text{Mon}_d^\sigma$, luego $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ es un ideal tropical.

Para la segunda parte, por (3.7) y el Lema 3.19,

$$(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))_d = \text{in}_{\mathbf{w}}(I_d) = \{\text{in}_{\mathbf{w}}(f^\sigma) = \text{in}_{\mathbf{w}}(f) : f \in I_d\}$$

es el conjunto de ciclos de la matroide $\text{in}_{\hat{\mathbf{w}}}(\mathcal{M}_d(I)/\text{Mon}_d^\sigma)$, que es también el conjunto de ciclos de la extensión $\text{in}_{\hat{\mathbf{w}}}(\mathcal{M}_d(I)/\text{Mon}_d^\sigma) \oplus \text{Mon}_d^\sigma$. $\square$

3.2.1 Función de Hilbert

Como avanzamos al comienzo de la sección, gracias a que los ideales tropicales son el conjunto de vectores de una matroide, podemos definir una función de Hilbert asociada al ideal utilizando el rango de dicha matroide.

Definición 3.24. Sea I un ideal tropical homogéneo en $R[x_0, \dots, x_n]$. Su función de Hilbert es la función $H_I : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definida como sigue

$$H_I(d) := \text{rank}(\mathcal{M}_d(I)).$$

Existen dos observaciones pertinentes y muy relevantes con respecto a esta definición. En primer lugar, conviene saber qué mide el rango de la matroide asociada a un ideal tropical. En segundo lugar, vamos a ver que la función de Hilbert se preserva al tropicalizar ideales clásicos.

Observación 3.25. Dado un ideal tropical I , de la Observación 3.11, sabemos cómo son las relaciones de dependencia de los polinomios en la matroide $\mathcal{M}_d(I)$ y además sabemos que el rango de una matroide es el cardinal de cualquiera de sus bases. Tenemos por tanto que

$$\begin{aligned} H_I(d) &:= \text{rank}(\mathcal{M}_d(I)) \\ &= |B|, \text{ siendo } B \subset \text{Mon}_d \text{ un conjunto maximal tal que} \\ &\quad \text{supp}(f) \not\subset B \text{ para todo } f \in I. \end{aligned}$$

Observación 3.26. Si tenemos un ideal homogéneo $J \subset K[x_0, \dots, x_n]$, $\text{trop}(J)$ es un ideal tropical y por tanto es el conjunto de vectores valorados de una matroide, que denotamos $\mathcal{M}_d(\text{trop}(J))$. En el Ejemplo 3.12 vimos que los polinomios de grado d en $\text{trop}(J)$ de soporte minimal satisfacen los axiomas de circuitos valorados. Por lo tanto, la matroide subyacente $\mathcal{M}_d(\text{trop}(J))$ indica las relaciones de dependencia de $(K[x_0, \dots, x_n]/J)_d$ entre Mon_d y las bases de $\mathcal{M}_d(\text{trop}(J))$ corresponden a bases monomiales del $(K[x_0, \dots, x_n]/J)_d$, como K -espacio vectorial. En consecuencia, la función de Hilbert se preserva por tropicalización

$$\text{rank}(\mathcal{M}_d(\text{trop}(J))) = H_{\text{trop}(J)}(d) = \dim_K(K[x_0, \dots, x_n]/J)_d = H_J(d). \quad (3.11)$$

Un hecho fundamental en el estudio clásico de las funciones de Hilbert es que son invariantes al pasar al ideal inicial del ideal de partida. El siguiente resultado muestra que ocurre lo mismo en el caso tropical y permite reducir el estudio al caso de ideales iniciales. Nótese que en el enunciado de la proposición no se admite que $\mathbf{w}$ tenga alguna coordenada que sea ∞ .

Proposición 3.27. Sea I un ideal tropical homogéneo en $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ o en $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$ y sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Para todo $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se tiene que $H_I(d) = H_{\text{in}_{\mathbf{w}}(I)}(d)$.

Proof. Sea $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal tropical homogéneo. Por el Teorema 3.23, la matroide asociada al ideal inicial $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ (que también es un ideal tropical), $\mathcal{M}_d(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$, es igual a $\text{in}_{\hat{\mathbf{w}}}(\mathcal{M}_d(I))$. En este caso, $\mathbf{w}$ tiene todas sus coordenadas distintas de ∞ y $\sigma = \emptyset$.

La descripción dada en el Lema 3.19 muestra que si B es una base de $\text{in}_{\hat{\mathbf{w}}}(\mathcal{M}_d(I))$ entonces es una base de la matroide subyacente $\mathcal{M}_d(I)$ y por lo tanto $\text{rank}(\mathcal{M}_d(I)) = \text{rank}(\mathcal{M}_d(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)))$, con lo que se preservan las funciones de Hilbert.

3.2. IDEALES INICIALES DE IDEALES TROPICALES

Para el caso en que I es un ideal tropical homogéneo en $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$, consideremos $I' := I\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ el ideal generado por I en $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$. Se tiene que I' es un ideal tropical homogéneo de $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ y, por definición, $\text{in}_{\mathbf{w}}(I') = \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$. Además, I' tiene la misma función de Hilbert que I ya que $\mathcal{M}_d(I') = \mathcal{M}_d(I) = M_d(I)$. El resultado es entonces consecuencia del caso anterior. $\square$

Presentamos ahora un lema, que combinado con la proposición anterior, nos permitirá probar que la función de Hilbert de un ideal tropical homogéneo es un polinomio.

Lema 3.28. *Sea I un ideal tropical homogéneo contenido en $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ o $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$, existe un $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ está generado por monomios.*

Es más, el conjunto de $\mathbf{w}$ para los cuales $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ no está generado por monomios está contenido en una unión numerable de hiperplanos de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proof. [MR18, Lemma 3.7] $\square$

Teorema 3.29. *Sea I un ideal tropical homogéneo en $R[x_0, \dots, x_n]$, entonces su función de Hilbert H_I es un polinomio, para grado suficientemente alto.*

Proof. Consideremos la siguiente función:

$$\begin{array}{rcl} \varphi: & R & \longrightarrow \mathbb{B} \\ & a & \longmapsto 0 \\ & \infty & \longmapsto \infty \end{array}$$

Es claro que φ es sobreyectivo, es además un homomorfismo ya que estamos suponiendo que la primera operación de R es $a \oplus b = \min(a, b)$, luego $a \oplus b \neq \infty$ si alguno de los dos no es infinito. Este morfismo induce un morfismo entre los semianillos de polinomios $R[x_0, \dots, x_n]$ y $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$. Si I es un ideal tropical homogéneo de $R[x_0, \dots, x_n]$, entonces $\varphi(I)$ es un ideal tropical homogéneo en $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$ y además $M_d(\varphi(I)) = \mathcal{M}_d(I)$. Puesto que sus matroides son iguales, los ideales tropicales I y $\varphi(I)$ tienen la misma función de Hilbert. Podemos entonces restringirnos al caso de ideales tropicales homogéneos en $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$.

En este caso, por la Proposición 3.27, podemos cambiar I por $\text{in}(I)$ y estudiar el ideal inicial, que también es tropical, y por el Lema 3.28, podemos suponer que está generado por monomios. En este caso, la función de Hilbert $H_I(d)$ es igual al número de monomios de grado d que no están en I . Este número es, por otro lado, la función de Hilbert de un ideal $J \subset K[x_0, \dots, x_n]$ generado por los monomios en I , con K un cuerpo. El teorema enunciado es entonces consecuencia del resultado clásico, ver [Eis95, Th. 1.11] para una demostración, de que la función de Hilbert de un ideal homogéneo en un anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo es un polinomio para grado suficientemente alto. $\square$

Definición 3.30. Sea I un ideal tropical homogéneo. El *polinomio de Hilbert* P_I de I es el polinomio que coincide con H_I para d suficientemente alto, cuya existencia está garantizada por el teorema anterior. Llamamos *dimensión* de I al grado de P_I .

3.2.2 Condición de cadena ascendente

Los resultados anteriores acerca de ideales iniciales y de la función de Hilbert de un ideal tropical, permiten probar que no existen cadenas infinitas de ideales tropicales. Sin embargo, como veremos en un ejemplo, los ideales tropicales no son necesariamente finitamente generados.

Teorema 3.31. Si $I, J \subset R[x_0, \dots, x_n]$ con ideales tropicales homogéneos con $I \subset J$ y misma función de Hilbert, entonces $I = J$. En consecuencia, toda cadena ascendente de ideales tropicales homogéneos en $R[x_0, \dots, x_n]$ estabiliza.

Proof. Consideremos el homomorfismo de semianillos

$$\varphi: R[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$$

que hemos definido en el Teorema 3.29. Sabemos que si I, J son ideales tropicales homogéneos en $R[x_0, \dots, x_n]$ y $I \subset J$, entonces $\varphi(I) \subset \varphi(J)$ y ambos son ideales tropicales homogéneos en $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$. Puesto que φ no altera las matroides subyacentes, si I, J tienen la misma función de Hilbert, también se tendrá $H_{\varphi(I)} = H_{\varphi(J)}$.

En este caso, para todo $d \geq 0$, las matroides $M_d(\varphi(I))$ y $M_d(\varphi(J))$ tienen el mismo rango y cualquier circuito de $M_d(\varphi(I))$ es una unión de circuitos de $M_d(\varphi(J))$, por tanto, por [Oxl11, Prop. 7.3.6], $M_d(\varphi(J))$ es un cociente de $M_d(\varphi(I))$. Por [Oxl11, Cor. 7.3.4], se da la igualdad $M_d(\varphi(I)) = M_d(\varphi(J))$. Puesto que $I_d \subset J_d$ y que los circuitos de una matroide están determinados, salvo escalar, por su soporte, se tiene que $\mathcal{M}_d(I) = \mathcal{M}_d(J)$. Como I y J son el conjunto de vectores de dichas matroides, se sigue que $I = J$.

Supongamos ahora que tenemos una cadena ascendente $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ de ideales tropicales homogéneos de $R[x_0, \dots, x_n]$. Al aplicar φ , se obtiene una cadena ascendente $\varphi(I_1) \subset \varphi(I_2) \subset \varphi(I_3) \subset \dots$ de ideales tropicales homogéneos de $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$. Por el Lema 3.28, podemos elegir $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\text{in}_{\mathbf{w}}(\varphi(I_j))$ está generado por monomios, para cada j . Tenemos entonces que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I_1) \subset \text{in}_{\mathbf{w}}(I_2) \subset \text{in}_{\mathbf{w}}(I_3) \subset \dots$ es una cadena ascendente de ideales monomiales. Estos ideales pueden verse como ideales en $K[x_0, \dots, x_n]$ con K un cuerpo cualquiera. Como $K[x_0, \dots, x_n]$ es noetheriano, la cadena debe estabilizarse. Puesto que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I_j)$ e I_j tienen la misma función de Hilbert, se tiene que para j suficientemente grande, las funciones de Hilbert de los I_j son iguales y la primera parte del teorema muestra que los I_j son entonces iguales, con lo que la cadena se estabiliza. $\square$

3.2. IDEALES INICIALES DE IDEALES TROPICALES

Pese a satisfacer la condición de cadena ascendente, pueden existir ideales tropicales que no sean finitamente generados, esto se que estamos trabajando en un semianillo, donde la condición de cadena ascendente no es equivalente a que todo ideal sea finitamente generado. El siguiente ejemplo muestra un ideal tropical realizable que no es finitamente generado.

Ejemplo 3.32. Sea $J = \langle x - y \rangle \subset K[x, y]$. Consideremos $I = \text{trop}(J) \subset R[x, y]$, que sabemos que es un ideal tropical. Como $x^d - y^d = (x - y)(x^{d-1} + x^{d-2}y + \dots + xy^{d-2} + y^{d-1})$, se tiene que $x^d - y^d \in J$ para todo $d \geq 1$, y por tanto, $x^d \oplus y^d \in I$ para todo $d \geq 1$. Supongamos que I está generado por un número finito de polinomios homogéneos $f_1, \dots, f_r$. Para cada $d \geq 1$, podemos escribir

$$x^d \oplus y^d = \bigoplus_{i=1}^r h_{id} f_i. \quad (3.12)$$

Puesto que no hay cancelación en $R[x, y]$, si $\mathbf{u}$ es un monomio de h_{id} para algún d y $\mathbf{v}$ es un monomio de f_i , entonces $\mathbf{uv}$ es un monomio en $h_{id} \odot f_i$ y por tanto de $x^d \oplus y^d$. Esto solo es posible si cada uno de los f_i son o bien $x^d \oplus y^d$, o bien una potencia de x o de y . Así, para cada $d \geq \max(\deg(f_i))$, cada f_i que aparezca en (3.12) debe ser una potencia de x o de y . Esto quiere decir que para d suficientemente grande, $I_d = R[x, y]_d$ y por tanto la función de Hilbert de I es 0 para d suficientemente grande, lo que contradice el hecho de que las funciones de Hilbert de I y de J coinciden. $\triangle$

Capítulo 4

Complejos de Gröbner y Nullstellensatz

En este último capítulo introduciremos los complejos de Gröbner asociados a ideales tropicales homogéneos. Estos complejos poliedrales nos van a permitir probar que los ideales tropical admiten bases tropicales finitas, como veremos en el Teorema 4.8 y que la variedad definida por un ideal tropical homogéneo es un complejo poliedral, de hecho es un subcomplejo del complejo de Gröbner asociado, como recoge el Teorema 4.9.

Finalizaremos el capítulo con la prueba del Nullstellensatz para ideales tropicales, 4.14 y caracterizando los ideales tropicales maximales del semianillo de polinomios $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$.

4.1 Variedades de ideales tropicales

En esta primer sección definiremos el complejo de Gröbner asociado a un ideal tropical homogéneo y estudiaremos algunas de sus propiedades. Veremos en particular que la existencia de este complejo permite probar que todo ideal tropical homogéneo tiene una base tropical finita, 4.8 y que las variedades de los ideales tropicales son poliedrales, 4.9.

Empezamos por definir los complejos poliedrales en $\overline{\mathbb{R}}^n$ con los que vamos a trabajar. A modo de notación, para un subconjunto $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ denotamos por $\overline{\mathbb{R}}_\sigma^n = \{\mathbf{w} \in \overline{\mathbb{R}}^n : w_i = \infty \text{ para } i \in \sigma, w_i \neq \infty \text{ para } i \notin \sigma\} \cong \mathbb{R}^{n-|\sigma|}$.

Definición 4.1. Un *complejo poliedral* Δ en $\overline{\mathbb{R}}^n$ es una colección de complejos poliedrales $\Delta_\sigma \subset \overline{\mathbb{R}}_\sigma^n$ indexados por $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ con la condición adicional de que, si $\tau \subset \sigma$, y P es un poliedro en Δ_τ , entonces la clausura de P en $\overline{\mathbb{R}}^n$ intersecada con $\overline{\mathbb{R}}_\sigma^n$ está contenida en un poliedro de Δ_σ .

El soporte de un complejo poliedral es por tanto un subconjunto cerrado de $\overline{\mathbb{R}}^n$. Un complejo poliedral Δ es $\mathbb{R}$ -racional si para cada $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$, todo

poliedro $P \in \Delta_\sigma$ es de la forma $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-|\sigma|} : A\mathbf{x} \leq b\}$ con $b \in \mathbb{R}^l$ y $A \in \mathbb{Q}^{l \times (n-|\sigma|)}$ para algún l .

La existencia del complejo de Gröbner para un ideal tropical homogéneo es garantizada por el siguiente teorema. La prueba del mismo la vamos a demorar hasta que demostremos el Teorema 4.6, que lo engloba. El complejo de Gröbner asociado a un ideal tropical homogéneo I forma una partición de $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ en función de los términos iniciales $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ del ideal.

Teorema 4.2. *Sea $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal tropical homogéneo. Existe un complejo poliedral $\mathbb{R}$ -racional finito $\Sigma(I) \subset \overline{\mathbb{R}}^{n+1}$, cuyo soporte es $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$, de tal modo que para todo $\sigma \subset \{0, \dots, n\}$ y $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \overline{\mathbb{R}}_\sigma^{n+1}$, los vectores $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ están en la misma celda de $\Sigma(I)$ si y solo si $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)$.*

Vamos ahora a introducir dos lemas técnicos que serán importantes para poder probar la existencia del complejo de Gröbner asociado a un ideal tropical homogéneo. Necesitamos el concepto de complejo normal asociado a un polinomio.

Definición 4.3. El *complejo normal* $N(f)$ de un polinomio $f \in \overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_l]$ es el complejo poliedral $\mathbb{R}$ -racional en $\mathbb{R}^l$ cuyos poliedros son las clausuras de los conjuntos $C[\mathbf{w}] = \{\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^l : \text{in}_{\mathbf{w}'}(f) = \text{in}_{\mathbf{w}}(f)\}$, para $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^l$.

Lema 4.4. *Sea $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal tropical homogéneo y fijemos un grado $d \geq 0$. Existe un complejo poliedral $\mathbb{R}$ -racional, $\Sigma(I_d) \subset \overline{\mathbb{R}}^{n+1}$, cuyo soporte es todo $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ tal que, para cada $\sigma \subset \{0, \dots, n\}$, y para cada $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \overline{\mathbb{R}}_\sigma^{n+1}$, los vectores $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ están en la misma celda de $\Sigma(I_d)$ si y solo si $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)_d$.*

Proof. Sea $\sigma \subset \{0, \dots, n\}$. Sea Mon_d^σ el conjunto de monomios de Mon_d que son divisibles por alguna variables x_i con $i \in \sigma$ y sea $\mathcal{M}_d^\sigma$ la matroide valorada $\mathcal{M}_d(I)/\text{Mon}_d^\sigma$. Consideremos $F_d^\sigma \in \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ el polinomio tropical siguiente

$$F_d^\sigma = \bigoplus_{B \text{ base de } \underline{\mathcal{M}}_d^\sigma} p(B) \odot \left(\prod_{x^u \in \text{Mon}_d \setminus (\text{Mon}_d^\sigma \cup B)} x^u \right). \quad (4.1)$$

Queremos probar que si $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \overline{\mathbb{R}}_\sigma^{n+1}$, tenemos que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)_d$ si y solo si $\text{in}_{\mathbf{w}}(F_d^\sigma) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(F_d^\sigma)$. Denotamos por f^σ el polinomio obtenido a partir de f quitando los términos con algún monomio en Mon_d^σ . Cambiando I por $I^\sigma = \langle f^\sigma : f \in I \rangle \subset \overline{\mathbb{R}}[x_i : i \notin \sigma]$, podemos suponer que $\sigma = \emptyset$. De hecho, salvo multiplicación tropical por escalares, $F_d^\sigma(I) = F_d^\emptyset(I^\sigma)$ y $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \text{in}_{\overline{\mathbf{w}}}(I^\sigma)$ para cualquier $\mathbf{w} \in \overline{\mathbb{R}}_\sigma^{n+1}$, donde $\overline{\mathbf{w}}$ es la proyección de $\mathbf{w}$ a coordenadas que no estén en σ .

Por el Teorema 3.23, $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \overline{\mathbb{R}}_\emptyset^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ cumplen que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)_d$ si y solo si $\text{in}_{\hat{\mathbf{w}}}(\mathcal{M}_d) = \text{in}_{\hat{\mathbf{w}}'}(\mathcal{M}_d)$, donde $\hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{\text{Mon}_d}$ viene dado por $\hat{\mathbf{w}}_{x^u} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$. Sea $r = \text{rank}(\mathcal{M}_d(I))$. Por el Lema 3.28, un conjunto $B \in \binom{\text{Mon}_d}{r}$ es una base

4.1. VARIEDADES DE IDEALES TROPICALES

de $\text{in}_{\mathbf{w}}(\mathcal{M}_d(I))$ si y solo si B minimiza $p(B) - \sum_{\mathbf{u} \in B} \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$, o equivalentemente, si maximiza $p(B) + \sum_{\mathbf{u} \in \text{Mon}_d \setminus B} \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$. Por tanto, $\text{in}_{\mathbf{w}}(\mathcal{M}_d(I)) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(\mathcal{M}_d(I))$ si y solo si las bases B de $\mathcal{M}_d^\sigma$ en las cuales el mínimo en $F_d^\emptyset(\mathbf{w})$ se alcanza son las mismas que para $F_d^\sigma(\mathbf{w}')$, lo que ocurre si y solo si $\text{in}_{\mathbf{w}}(F_d^\emptyset) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(F_d^\emptyset)$.

Definimos $\Sigma(I_d)_\sigma$ como el complejo normal $N(F_d^\sigma)$ en $\overline{\mathbb{R}}_\sigma^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1-|\sigma|}$. Falta ver que $\Sigma(I_d)_\sigma$ pegan bien para formar un complejo poliedral $\Sigma(I_d)$ en $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$, esto es, queremos ver que si $\tau \subset \sigma$ y P es un poliedro de $\Sigma(I_d)_\tau$, entonces la intersección de la clausura de P en $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ con $\overline{\mathbb{R}}_\sigma^{n+1}$ está contenida en un poliedro de $\Sigma(I_d)_\sigma$. De nuevo podemos considerar el caso en que $\sigma = \emptyset$. Sea $C \subset \overline{\mathbb{R}}_\emptyset^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ una celda maximal abierta de $\Sigma(I_d)_\emptyset$ y supongamos que $(\mathbf{v}_i)_{i \geq 0}$ es una sucesión de vectores en C que convergen a $\mathbf{w} \in \overline{\mathbb{R}}_\sigma^{n+1}$, donde $\mathbf{w}$ está en una celda maximal abierta de $\Sigma(I_d)_\sigma$. Puesto que C es una celda de $\Sigma(I_d)_\emptyset$, los ideales iniciales $\text{in}_{\mathbf{v}_i}(I)$ son los mismos para todo i . Vamos a probar que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d$ depende únicamente de $\text{in}_{\mathbf{v}_i}(I)_d$, lo que prueba la inclusión que queríamos.

Por el Lema 3.19 y el Teorema 3.23, el $\overline{\mathbb{R}}$ -semimódulo $\text{in}_{\mathbf{v}_i}(I)_d$ es determinado por la matroide cuyas bases son los conjuntos $B \in \binom{\text{Mon}_d}{r}$ minimizando

$$p(B) - \sum_{\mathbf{u} \in B} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}. \quad (4.2)$$

Queremos ver que dicho mínimo se alcanza en una única base B_0 . Por el Lema 3.28, existe $\mathbf{v} \in C$ con $\text{in}_{\mathbf{v}}(I)$ generado por monomios. Por lo tanto, $\text{in}_{\mathbf{v}'}(I)_d$ está generado como $\overline{\mathbb{R}}$ -semimódulo, para todo $\mathbf{v}' \in C$, por monomios, y por tanto su correspondiente matroide inicial tiene una única base, B_0 . La matroide del $\overline{\mathbb{R}}$ -semimódulo $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d$ tiene como bases los subconjuntos de la forma $B' \sqcup \text{Mon}_d^\sigma$ con $B' \in \binom{\text{Mon}_d \setminus \text{Mon}_d^\sigma}{r'}$ que minimizan

$$p(B' \sqcup B_{\text{Mon}_d^\sigma}) - \sum_{\mathbf{u} \in B'} \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}, \quad (4.3)$$

donde $B_{\text{Mon}_d^\sigma}$ es cualquier base fijada de Mon_d^σ y $r' = \text{rank}(\mathcal{M}_d(I)) - |B_{\text{Mon}_d^\sigma}|$. De nuevo, queremos ver que este mínimo se alcanza en un único subconjunto B'_0 y afirmamos que $B'_0 = B_0 \setminus \text{Mon}_d^\sigma$, lo que implica que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d$ depende únicamente de $\text{in}_{\mathbf{v}_i}(I)_d$, como queríamos. Probemos esto último, vamos a reescribir la expresión en (4.2) como

$$p(B) - \sum_{\mathbf{u} \in B \setminus \text{Mon}_d^\sigma} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u} - \sum_{\mathbf{u} \in B \cap \text{Mon}_d^\sigma} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}. \quad (4.4)$$

Cuando i tiende a ∞ , las coordenadas de $\mathbf{v}_i$ indexadas por σ tienden a ∞ mientras que las demás tienden a valores finitos; de este modo, los términos $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}$ en (4.4) con $\mathbf{u} \in B \cap \text{Mon}_d^\sigma$ pueden hacerse arbitrariamente grandes, mientras que para $\mathbf{u} \in B \setminus \text{Mon}_d^\sigma$ permanecen acotados. Se sigue entonces que la base B_0

que minimiza (4.4) contiene tantos elementos de Mon_d^σ como sea posible, y por tanto $|B_0 \cap \text{Mon}_d^\sigma| = r(\text{Mon}_d^\sigma)$. La intersección $B_0 \cap \text{Mon}_d^\sigma$ es por tanto una base $B_{\text{Mon}_d^\sigma}$ de Mon_d^σ . Además, el conjunto $B_0 \setminus B_{\text{Mon}_d^\sigma}$ debe ser el conjunto B'_0 que minimiza (4.3) ya que de no ser así, $B'_0 \sqcup B_{\text{Mon}_d^\sigma}$ llevaría a un menor valor de (4.4) que B_0 , lo cual sería una contradicción.

□

Lema 4.5. *Sea $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal tropical homogéneo. Existe un grado $D \geq 0$ tal que, para cada $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^{n+1}$, si $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)_d$ para todo $d \leq D$, entonces $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)$.*

Proof. Sea H_I la función de Hilbert de I . Existe un número finito de ideales monomiales en $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$, ya que esto ocurre en el anillo de polinomios $K[x_0, \dots, x_n]$ con coeficientes en un cuerpo K ; ver [Mac01]. Sea D el máximo grado de cualquier generador de un ideal monomial con función de Hilbert H_I .

Sea $e > D$ y sea $\Sigma(I_e)_\emptyset$ el complejo poliedral cuya existencia está probada en el Lema 4.4. Vamos a probar que $\Sigma(I_e)_\emptyset$ se puede refinar por $\Sigma(I_D)_\emptyset$. Para ello, es suficiente probar que el interior relativo de cualquier cara maximal en $\Sigma(I_D)_\emptyset$ está contenido en una cara maximal de $\Sigma(I_e)_\emptyset$. Sea $\mathbf{v}$ en el interior relativo de una cara maximal de $\Sigma(I_e)_\emptyset$, por el Lema 3.28 el ideal inicial $\text{in}_{\mathbf{v}}(I)$ es un ideal monomial con función de Hilbert H_I , por tanto, para todo $\mathbf{v}$ en esa celda, $\text{in}_{\mathbf{v}}(I)_e$ está generado por monomios (como $\mathbb{B}$ -semimódulo). Por la elección de D , existen monomios que son divisibles por algún monomio en $\text{in}_{\mathbf{v}}(I)_D$. Por tanto, para $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$ genéricos, si $\text{in}_{\mathbf{v}}(I)_D = \text{in}_{\mathbf{v}'}(I)_D$, entonces $\text{in}_{\mathbf{v}}(I)_e = \text{in}_{\mathbf{v}'}(I)_e$, luego $\Sigma(I_e)_\emptyset$ se puede refinar por $\Sigma(I_D)_\emptyset$.

Para concluir, sean $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \overline{\mathbb{R}}_0^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$, tales que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_e \neq \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)_e$ para algún $e > D$. Esto quiere decir que $\mathbf{w}$ y $\mathbf{w}'$ viven en celdas diferentes de $\Sigma(I_e)_\emptyset$. Como $\Sigma(I_e)_\emptyset$ se refina por $\Sigma(I_D)_\emptyset$, esto implica que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_D \neq \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)_D$. □

Procedemos ahora a enunciar y demostrar el teorema que sirve como generalización al Teorema 4.2, y que garantiza la existencia del complejo de Gröbner.

Teorema 4.6. *Sea $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal tropical homogéneo. Para cada $\sigma \subset \{0, \dots, n\}$ existe un polinomio $F^\sigma \in \overline{\mathbb{R}}[x_i : i \notin \sigma]$ tal que, si $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \overline{\mathbb{R}}_\sigma^{n+1}$, se tiene que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)$ si y solo si $\text{in}_{\mathbf{w}}(F^\sigma) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(F^\sigma)$. Además, la unión de los complejos normales $N(F^\sigma) \subset \overline{\mathbb{R}}_\sigma^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1-|\sigma|}$ forma un complejo poliedral $\mathbb{R}$ -racional en $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$.*

Proof. Para cada $\sigma \subset \{0, \dots, n\}$ tomemos el ideal $I^\sigma = \langle f^\sigma : f \in I \rangle \subset \overline{\mathbb{R}}[x_i : i \notin \sigma]$. Sea $D_\sigma \geq 0$ el grado dado por el Lema 4.5 para el ideal I^σ y sea $D = \max_\sigma D_\sigma$. Para todo $d \leq D$, sea F_d^σ el polinomio definido en (4.1). Definimos $F^\sigma := \prod_{d \leq D} F_d^\sigma$.

4.1. VARIEDADES DE IDEALES TROPICALES

Dos vectores $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \overline{\mathbb{R}}_\sigma^{n+1}$ cumplen que $\text{in}_{\mathbf{w}}(F^\sigma) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(F^\sigma)$ si y solo si $\text{in}_{\mathbf{w}}(F_d^\sigma) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(F_d^\sigma)$ para todo $d \leq D$. En el Lema 4.4 vimos que esto es igual que $\text{in}_{\overline{\mathbf{w}}}(I^\sigma)_d = \text{in}_{\overline{\mathbf{w}'}}(I^\sigma)_d$ para todo $d \leq D$, donde $\overline{\mathbf{w}}$ y $\overline{\mathbf{w}'}$ son las proyecciones de $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ sobre las coordenadas que no están en σ . Por el Lema 4.5, esto es equivalente a que $\text{in}_{\overline{\mathbf{w}}}(I^\sigma) = \text{in}_{\overline{\mathbf{w}'}}(I^\sigma)$, lo que es lo mismo que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)$.

Para finalizar, si $\sigma \subset \{0, \dots, n\}$, el complejo normal $N(F^\sigma) \subset \overline{\mathbb{R}}_\sigma^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1-|\sigma|}$ es el complejo poliedral obtenido como el refinamiento común de los complejos normales $N(F_d^\sigma)$ con $d \leq D$. Los complejos $N(F_d^\sigma)$ con $\sigma \subset \{0, \dots, n\}$ forman un complejo poliedral en $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$; ver Lema 4.4, luego también lo formarán sus refinamientos comunes $N(F_d^\sigma)$. $\square$

Recordamos que si $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, su variedad asociada es

$$V(f) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{w}) = \infty \text{ o el mínimo en } f(\mathbf{w}) \text{ se alcanza al menos dos veces}\}$$

Si $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal, la variedad asociada al ideal es

$$V(I) = \bigcap_{f \in I} (V(f)).$$

Recordemos que si I es un ideal en $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$, $\mathbf{w} \in V(I)$ si y solo si $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ no contiene monomios. En efecto, como no existen cancelación en $\mathbb{B}[x_0, \dots, x_n]$, se tiene que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ contiene un monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ si y solo si existe $f \in I$ tal que $\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$. Esto ocurre precisamente cuando $f(\mathbf{w}) < \infty$ y el mínimo en $f(\mathbf{w})$ se alcanza solo una vez, lo que es equivalente a que $\mathbf{w} \notin V(I)$.

La existencia del complejo de Gröbner para los ideales tropicales permite probar que todo ideal tropical homogéneo en $\overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ tiene una base tropical finita. Vamos primeramente a recordar la definición de base tropical.

Definición 4.7. Sea $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal tropical homogéneo. Un conjunto $\{f_1, \dots, f_t\}$ de polinomios homogéneos es una *base tropical* para I si

$$V(I) = V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_t).$$

Teorema 4.8. *Todo ideal tropical homogéneo $I \subset \overline{\mathbb{R}}[x_0, \dots, x_n]$ admite una base tropical finita.*

Proof. En primer lugar, la variedad $V(I) \subset \overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ es la unión de las celdas de $\Sigma(I)$ correspondientes a ideales iniciales que no contengan monomios. Supongamos que C es una celda de $\Sigma(I)$ correspondiente a un ideal inicial $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ que contiene un monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ de grado d . Vamos a construir un polinomio homogéneo $f \in I$ con $V(f) \cap C = \emptyset$. Si $C \subset \overline{\mathbb{R}}_\tau^{n+1}$ para algún $\tau \subset \{0, \dots, n\}$ no vacío, podemos cambiar I por I^τ ya que si $V(f^\tau) \subset \overline{\mathbb{R}}_\tau^{n+1}$ no corta a C , entonces $V(f) \cap C = \emptyset$. Podemos entonces suponer que $C \subset \overline{\mathbb{R}}_\emptyset^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$.

Por definición, el ideal inicial $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ es el mismo para cualquier $\mathbf{w} \in C$. Sea B una base de la matroide $M_d(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$. Por el Lema 3.19 y el Teorema 3.23, B es una base de $\mathcal{M}_d(I)$. Como $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ es un bucle en $M_d(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$, tenemos que $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \notin B$. Consideremos el circuito fundamental $f := H(B, \mathbf{x}^{\mathbf{u}})$. Afirmamos que, para cada $\mathbf{w} \in C$, $\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$. Razonemos por reducción al absurdo, si no fuera así, por el Lema 3.19 y el Teorema 3.23, el soporte D de $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ es un ciclo en $M_d(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$. En este caso, $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in D$ ya que de no ser así, D estaría contenido en B y B contendría un circuito de $M_d(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$. Como $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ es un bucle en $M_d(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$, el axioma de eliminación de vectores en $M_d(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$ implica que el subconjunto $D \setminus \{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}\}$ debe ser un ciclo en $M_d(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$. Pero $D \setminus \{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}\}$ está contenido en B , lo cual es una contradicción.

Hemos probado entonces que para cada celda $C \in \Sigma(I)$ que no está en la variedad $V(I)$, existe un polinomio homogéneo $f \in I$ tal que $V(f) \cap C = \emptyset$. Una base tropical puede obtenerse entonces tomando la colección de estos polinomios correspondientes a la finitas celdas de $\Sigma(I)$ que no están en $V(I)$. $\square$

Utilizando que los ideales tropicales homogéneos admiten bases tropicales finitas y la existencia de los complejos de Gröbner, podemos demostrar que la variedad $V(I)$ asociada a un ideal tropical homogéneo es el soporte de un complejo polidral $\mathbb{R}$ -racional.

Teorema 4.9. *Las variedades tropicales de ideales tropicales son complejos polidrales.*

Proof. Por el Teorema 4.8, sabemos que podemos encontrar polinomios homogéneos $f_1, \dots, f_l \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ tales que $V(I) = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_l)$. Puesto que la intersección de dos complejos polidrales $\mathbb{R}$ -racionales es nuevo un complejo polidral $\mathbb{R}$ -racional, es suficiente probar que cada una de los $V(f_i)$ son complejos polidrales $\mathbb{R}$ -racionales.

Vamos a probar que $V(f) \subset \overline{\mathbb{R}}^m$ es un complejo polidral finito $\mathbb{R}$ -racional para cualquier polinomio $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$. Es suficiente probar esto para el homogeneizado $\tilde{f}$ de f ya que $V(f) \subset \overline{\mathbb{R}}^m$ es igual a $V(\tilde{f}) \cap \{w_0 = 0\}$, bajo la identificación de $\{\mathbf{w} \in \overline{\mathbb{R}}^{m+1} : w_0 = 0\}$ con $\overline{\mathbb{R}}^m$. Sea $N(\tilde{f}) \subset \overline{\mathbb{R}}^{m+1}$ la unión sobre todos los $\sigma \subset \{0, \dots, m\}$ de los complejos normales $N(\tilde{f}^\sigma) \subset \overline{\mathbb{R}}_\sigma^{m+1} \cong \mathbb{R}^{m+1-|\sigma|}$, donde $\tilde{f}^\sigma$ se obtiene haciendo la proyección de $\tilde{f}$ sobre las coordenadas que no están en σ . La variedad $V(\tilde{f})$ es una unión de celdas de $N(\tilde{f})$. La prueba procede como en la del Lema 4.4, ya que solo se precisa que I_d determine una matroide valorada sobre Mon_d , que es precisamente el caso en grado $d = \deg(\tilde{f})$ para el ideal generado por $\tilde{f}$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la hipótesis de que el ideal sea tropical es necesaria, ya que si consideramos ideales en general, las variedades que definen pueden ser no polidrales.

Ejemplo 4.10 (Variedades de ideales no tropicales pueden ser no poliedrales). Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de polinomios tropicales en $\overline{\mathbb{R}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ y sea I el ideal generado por los f_α , es decir, $I = \langle f_\alpha : \alpha \in \Lambda \rangle$. La variedad $V(I) \subset \mathbb{R}^n$ cumple que

$$V(I) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(f_\alpha).$$

Esto indica que cualquier intersección de hipersuperficies tropicales puede ser la variedad de un ideal de $\overline{\mathbb{R}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Además, cualquier semihiperplano $\mathbb{R}$ -racional es igual a una intersección de este tipo. Explícitamente, si H es el semihiperplano dado por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = c$ y $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} \geq d$ con $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ y $c, d \in \mathbb{R}$, entonces

$$H = V(\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \oplus c) \cap V(\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \oplus (d - c) \odot \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \oplus d).$$

Puesto que una intersección infinita de semihiperplanos puede dar un conjunto no poliedral, la variedad de un ideal arbitrario en $\overline{\mathbb{R}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ puede no ser poliedral. $\triangle$

4.2 Nullstellensatz e ideales maximales

Dedicamos esta última sección el resultado a la prueba del Nullstellensatz para ideales tropicales. Como aplicación de este teorema, vamos a clasificar los ideales tropicales maximales de $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$.

Previo al desarrollo del teorema, es necesario hacer una pequeña introducción a los espacios lineales tropicales. Mostraremos algunos de los resultados sin demostración ya que exceden el objetivo del trabajo. Las principales referencias a seguir son [Spe08], [MS15, §2.2-2.4].

Definición 4.11. Sea M una matroide sobre un conjunto finito E . Se define el *espacio lineal tropical* $\text{trop}(M)$ como el conjunto de vectores $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que, para cada circuito C de M , el mínimo de los w_i se alcanza al menos dos veces cuando i recorre C .

Definición 4.12. Sea M una matroide sobre E . Para cada $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ se define la *matroide inicial* $M_{\mathbf{w}}$ como la matroide sobre E que tiene como conjunto de circuitos

$$\mathcal{C}(M_{\mathbf{w}}) = \{j \in C : w_j = \min_{i \in C} (w_i)\},$$

donde C recorre la familia de circuitos de M y solo consideramos conjuntos minimales para la inclusión.

Proposición 4.13. Sea M una matroide sobre E . El espacio lineal tropical $\text{trop}(M)$ viene dado por

$$\text{trop}(M) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1} / \mathbb{R}\mathbf{1} : M_{\mathbf{w}} \text{ no tiene bucles}\}. \quad (4.5)$$

Proof. Ver [MS15, Cor. 4.2.11]. $\square$

Teorema 4.14 (Nullstellensatz tropical). *Si I es un ideal tropical en el semianillo $\overline{\mathbb{R}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, entonces la variedad $V(I) \subset \mathbb{R}^n$ es vacía si y solo si I es el ideal total $\langle 0 \rangle$.*

Proof. Es claro que si $I = \langle 0 \rangle$, entonces $V(I) = \emptyset$. Para el recíproco, supongamos que I es un ideal tropical en $\overline{\mathbb{R}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ con $V(I) = \emptyset$. Tomemos $J = I \cap \overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$, que es de nuevo un ideal tropical. La variedad $V(J)$ es de nuevo vacía. De hecho, para cualquier $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ existe $f \in I$ tal que el mínimo en $f(\mathbf{w})$ se alcanza una única vez, y por tanto $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}f \in J$ para algún monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ de modo que el mínimo en $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}f(\mathbf{w})$ se alcanza una única vez. Por el Teorema 4.8, existe una base tropical $\{f_1, \dots, f_l\}$ de J . Sea d_i el máximo grado de un monomio en f_i . Para un grado fijo $d \geq \max\{d_i\}$, consideremos la familia de polinomios $\{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}f_i : |\mathbf{u}| \leq d - d_i\}$. Podemos ver los coeficientes de estos polinomios como vectores en $\overline{\mathbb{R}}^{\text{Mon}_{\leq d}}$. Sea $\mathcal{F}_d \subset \overline{\mathbb{R}}^{\text{Mon}_{\leq d}}$ la colección de dichos vectores. Por [GP18, Th. 3.3], puesto que $f_1, \dots, f_l$ no tienen solución común en $\mathbb{R}^n$, para d suficientemente grande, el conjunto

$$\mathcal{F}_d^{\perp} := \{\mathbf{y} \in \overline{\mathbb{R}}^{\text{Mon}_{\leq d}} : \text{el mínimo en } \min(a_{\mathbf{u}} + y_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \text{Mon}_{\leq d}) \text{ se alcanza al menos dos veces para todo } \mathbf{a} = (a_{\mathbf{u}}) \in \mathcal{F}_d\}$$

es vacío. Sea $\mathcal{J}_d$ el conjunto de vectores de $\overline{\mathbb{R}}^{\text{Mon}_{\leq d}}$ correspondientes a los polinomios de J hasta grado d . Como $\mathcal{F}_d \subset \mathcal{J}_d$, el conjunto

$$\mathcal{J}_d^{\perp} := \{\mathbf{y} \in \overline{\mathbb{R}}^{\text{Mon}_{\leq d}} : \text{el mínimo en } \min(a_{\mathbf{u}} + y_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \text{Mon}_{\leq d}) \text{ se alcanza al menos dos veces para todo } \mathbf{a} = (a_{\mathbf{u}}) \in \mathcal{J}_d\} \subset \mathcal{F}_d^{\perp} = \emptyset.$$

Como J es un ideal tropical, $\mathcal{J}_d$ es el conjunto de vectores de una matroide valorada $\mathcal{M}_{\leq d}(J)$. El conjunto $\mathcal{J}_d^{\perp}$ es el espacio tropical lineal generado por los polinomios de grado 1 de $\mathcal{J}_d$. Por lo tanto, $\mathcal{J}_d^{\perp}$ es vacío si y solo si la matroide valorada $\mathcal{M}_{\leq d}(J)$ tiene un bucle, lo que quiere decir que J contiene un monomio, y por tanto, $I = \langle 0 \rangle$. $\square$

Como aplicación del Nullstellensatz tropical, podemos conocer de manera sencilla cuáles son los ideales tropicales maximales del semianillo de polinomios $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$.

Ejemplo 4.15. Para todo $\mathbf{a} \in \overline{\mathbb{R}}^n$, vamos a denotar por $J_{\mathbf{a}}$ al ideal del semianillo de polinomios $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$ formado por todos los polinomios f cuya variedad contenga $\mathbf{a}$, es decir,

$$J_{\mathbf{a}} = \{f \in \overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n] \text{ tales que } \mathbf{a} \in V(f)\}.$$

Si I es un ideal tropical tal que $V(I) \neq \emptyset$, entonces $I \subset J_{\mathbf{a}}$ para algún $\mathbf{a}$. Si, por el contrario, $V(I) = \emptyset$, por el Nullstellensatz tropical, $I = \langle 0 \rangle$. Por lo tanto, los ideales tropicales maximales de $\overline{\mathbb{R}}[x_1, \dots, x_n]$ son los ideales de la forma $J_{\mathbf{a}}$. $\triangle$

Apéndice A

Cálculos con *Macaulay2*

Dedicamos este apéndice a comentar y mostrar algunos ejemplos de cálculo de variedades tropicales utilizando *Macaulay2*, [GS]. En particular, vamos a trabajar con el paquete *Tropical*, el cual fue introducido en [Amé+19]. En dicho artículo se muestran algunos ejemplos de cálculo. A día de hoy, la herramienta computacional más completa para la geometría tropical es *gfan*, [Jen]. El programa *Polymake*, [GJ00], es otra herramienta de cálculo tropical importante, se basa fundamentalmente en geometría poliedral y tiene varias funciones que no están implementadas en *gfan*. El propio software de *Macaulay2* tiene un paquete, llamado *gfanInterface*, [HS], que permite al usuario utilizar *gfan* pero dentro del propio sistema de *Macaulay2*.

El objetivo del paquete *Tropical*, como sus autores afirman en [Amé+19], es lograr una herramienta de uso más amigable, llamando a las funciones necesarias de *Gfan* via *gfanInterface* y *Polymake* cuando sea necesario. No obstante, este paquete es de reciente aparición y sigue en desarrollo, por ejemplo, aún carece de un método para trabajar con distintas valoraciones, que sí presenta *Gfan*. En todo caso, vamos a ver algunos ejemplos de cálculo, que complementan varios de los ejemplos vistos a lo largo del trabajo.

Comenzamos viendo un ejemplo básico de cálculo de la variedad tropical de un ideal sencillo.

Ejemplo A.1. Consideremos el ideal $I = \langle x+y+1 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$. Con la valoración trivial en $\mathbb{C}$, el tropicalizado del polinomio $f = x + y + 1$ es $\text{trop}(f) = x \oplus y \oplus 0$. Este es el polinomio del Ejemplo 2.42. Su hipersuperficie tropical se puede calcular en *Macaulay2* con el siguiente código:

```
i1 : needsPackage("Tropical");
i2 : R = QQ[x,y];
i3 : I =ideal(x+y+1);
o3 : Ideal of R
i4 : T = tropicalVariety I;
```

```

i5 : rays T
o5 = | 1 -1 0 |
      | 0 -1 1 |

      2      3
o5 : Matrix ZZ <--- ZZ
    
```

Como podemos ver, la variedad tropical $\text{trop}(V(f))$ es un abanico de dimensión 1 que tiene como rayos $(-1, -1)$, $(1, 0)$ y el $(0, 1)$. La Figura 2.6 muestra dicha variedad tropical. $\triangle$

Ejemplo A.2. Vamos a comprobar que los ideales $J = \langle (x+y+z)(xy+xz+yz) \rangle$ y $J' = \langle (x+y)(x+z)(y+z) \rangle$ del Ejemplo 3.14 definen la misma variedad tropical. La variedad tropical que define J es:

```

i1 : R = QQ[x,y,z];
i2 : J = ideal((x+y)*(x+z)*(y+z));
o2 : Ideal of R
i3 : needsPackage("Tropical")
i4 : T = tropicalVariety J;
i5 : rays(T)
o5 = | 1 2 -1 1 -2 -1 |
      | 1 -1 2 -2 1 -1 |
      | -2 -1 -1 1 1 2 |
      3      6
o5 : Matrix ZZ <--- ZZ
    
```

Calculemos ahora la variedad de J' :

```

i6 : J2 = ideal((x+y)*(x+z)*(y+z));
o6 : Ideal of R
i7 : T2 = tropicalVariety(J2);
i8: rays(T2)
o8 = | 1 2 -1 1 -2 -1 |
      | 1 -1 2 -2 1 -1 |
      | -2 -1 -1 1 1 2 |
      3      6
o8 : Matrix ZZ <--- ZZ
    
```

Podemos ver que los rayos de los conos que forman la variedad tropical son los mismos, de modo que definen el mismo abanico, que se muestra en la Figura 3.1. $\triangle$

Vamos a ver ahora un ejemplo que muestra que un sistema de generadores de un ideal no es necesariamente una base tropical.

Ejemplo A.3. Consideremos los polinomios $f = x + y + z, g = x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Vamos a calcular las hipersuperficies $\text{trop}(V(f))$ y $\text{trop}(V(g))$ y a compararlo con $\text{trop}(V(I))$ siendo $I = \langle f, g \rangle$.

```
i9 : R=QQ[x,y,z];
i10 : f=x+y+z;
i11 : g=x^2+y^2+z^2;
i12 : l={f,g};
i13 : Tp=tropicalPrevariety l;
i14 : Tv=tropicalVariety ideal l;
i15 : isTropicalBasis l
o15 = false
i16 : dim Tp
o16 = 2
i17 : dim Tv
o17 = 1
```

Podemos ver que los polinomios f, g no forman una base tropical y que la variedad $\text{trop}(V(I))$ es diferente de la prevariedad $\text{trop}(V(f)) \cap \text{trop}(V(g))$ ya que la primera tiene dimensión 1 mientras que la segunda tiene un cono de dimensión 2. △

Bibliografía

- [Amé+19] Carlos Améndola et al. *Computing Tropical Varieties in Macaulay2*. 2019. arXiv: [1710.10651](https://arxiv.org/abs/1710.10651) [math.AG]. URL: <https://arxiv.org/abs/1710.10651>.
- [AK06] Federico Ardila and Caroline J. Klivans. “The Bergman complex of a matroid and phylogenetic trees”. *Journal of Combinatorial Theory. Series B* 96.1 (2006), pp. 38–49.
- [BB18] Matt Baker and Nathan Bowler. “Matroids over hyperfields”. In: *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1978. 1. AIP Publishing, 2018.
- [Bat+24] Luca Battistella et al. “Buildings, valuated matroids, and tropical linear spaces”. *J. Lond. Math. Soc. (2)* 109.1 (2024), Paper No. e12850, 37 pp.
- [Bru+15] Erwan Brugallé et al. “Brief introduction to tropical geometry”. In: *Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2014*. Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2015, pp. 1–75.
- [CLO15] David A. Cox, John Little, and Donal O’Shea. *Ideals, varieties, and algorithms, an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, 4th ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015.
- [DW92] Andreas W.M. Dress and Walter Wenzel. “Valuated matroids”. *Advances in Mathematics* 93.2 (1992), pp. 214–250.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer, New York, 1995.
- [Ewa96] Günter Ewald. *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 168, Springer-Verlag, New York, 1996.

- [FS05] Eva Maria Feichtner and Bernd Sturmfels. “Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans.” *Portugaliae Mathematica. Nova Série* 62.4 (2005), pp. 437–468.
- [GJ00] Evgenij Gawrilow and Michael Joswig. “Polymake: a framework for analyzing convex polytopes”. In: *Polytopes—combinatorics and computation*. Springer. 2000, pp. 43–73.
- [GS] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman. *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*. Available at <http://www2.macaulay2.com>.
- [GP18] Dima Grigoriev and Vladimir V Podolskii. “Tropical effective primary and dual Nullstellensätze”. *Discrete & Computational Geometry* 59 (2018), pp. 507–552.
- [HS] Andrew Hoefel and Michael Stillman. *Interface to Anders Jensen’s Gfan software*. A Macaulay2 package.
- [Jen] Anders N. Jensen. *Gfan, a software system for Gröbner fans and tropical varieties*. Available at <http://home.imf.au.dk/jensen/software/gfan/gfan.html>.
- [Mac01] Diane Maclagan. “Antichains of monomial ideals are finite”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 129.6 (2001), pp. 1609–1615.
- [Mac13] Diane Maclagan. “Polyhedral structures on tropical varieties”. In: *Tropical and non-Archimedean geometry*. Vol. 605. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 1–13.
- [MR18] Diane Maclagan and Felipe Rincón. “Tropical ideals”. *Compositio Mathematica* 154.3 (2018), pp. 640–670.
- [MR19] Diane Maclagan and Felipe Rincón. “Tropical schemes, tropical cycles, and valuated matroids”. *Journal of the European Mathematical Society* 22.3 (2019), pp. 777–796.
- [MR22] Diane Maclagan and Felipe Rincón. “Varieties of tropical ideals are balanced”. *Advances in Mathematics* 410 (2022), Paper No. 108713, 44 pp.
- [MS15] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels. *Introduction to tropical geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 161, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [Mik06] Grigory Mikhalkin. “Tropical geometry and its applications”. In: *International Congress of Mathematicians. Vol. II*. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 827–852. ISBN: 978-3-03719-022-7.

BIBLIOGRAFÍA

- [Mur10] Kazuo Murota. *Matrices and matroids for systems analysis*, Algorithms and Combinatorics, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [MT01] Kazuo Murota and Akihisa Tamura. “On circuit valuation of matroids”. *Advances in Applied Mathematics* 26.3 (2001), pp. 192–225.
- [Oxl11] James Oxley. *Matroid theory*, 2nd ed., Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 21, Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [Pin98] Jean-Eric Pin. “Tropical semirings”. In: *Idempotency (Bristol, 1994)*. Vol. 11. Publ. Newton Inst. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 50–69.
- [Sim88] Imre Simon. “Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring”. In: *Mathematical foundations of computer science, 1988 (Carlsbad, 1988)*. Lecture Notes in Comput. Sci., vol 324. Springer, Berlin, 1988, pp. 107–120.
- [Spe08] David E. Speyer. “Tropical Linear Spaces”. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 22.4 (2008), pp. 1527–1558.
- [Wel76] D. J. A. Welsh. *Matroid theory*, L. M. S. Monographs, No. 8, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1976.
- [Whi35] Hassler Whitney. “On the Abstract Properties of Linear Dependence”. *American Journal of Mathematics* 57.3 (1935), pp. 509–533.
- [Zie95] Günter M. Ziegler. *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 152, Springer-Verlag, New York, 1995.