Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MASTER

Grado en Matemáticas

CLASES DE GELFAND-SHILOV

Autor: Mariano San José Gómez
Tutor: Javier Sanz Gil
Año 2023/24

Agradecimientos

A Javi Sanz, por ser una constante fuente de inspiración para mí, por la dedicación, trabajo duro y pasión en su trabajo. Gracias por transmitirme cada ápice de pasión por esta bella ciencia y por aceptar tutorizarme. Sin ti, este trabajo no habría sido posible.

A mi familia, por apoyarme en mi camino y hacer esfuerzos inhumanos para que yo pueda vivir mis sueños. Cada logro que obtenga es vuestro también. Gracias por tanto, ojalá algún día pueda devolveros todo el amor que me dais.

A mis amigos, por ser la medicina en los malos momentos y el motor en los buenos. Es una suerte poder compartir con vosotros mi tiempo. Sé que aún tenemos muchas historias que vivir y espero poder hacerlo con vosotros.

A Alba, por acompañarme en los peores momentos haciendo de sustento y celebrar en los buenos momentos juntos. Gracias por ayudarme a brillar como tú y alentarme a que me supere cada día.

Resumen

El objetivo fundamental de este trabajo es el de introducir las clases de Gelfand-Shilov y algunas de sus propiedades y caracterizaciones más interesantes. Se trabajará con las clases en su sentido más general posible, definiéndolas a través de sucesiones peso y de funciones peso, tanto en el sentido de Roumieu como en el de Beurling. Se comentará cómo actúan los operadores más usuales sobre ellas y se discutirá su continuidad. Se probarán algunos resultados de caracterización para estas clases, y se estudiará bajo qué condiciones un espacio definido por sucesiones peso puede ser definido por funciones peso, y viceversa. Se abordará la difícil cuestión de la no trivialidad de estas clases en un contexto concreto. Por último, se comentarán brevemente algunas generalizaciones y líneas actuales de investigación, así como otros contextos de aplicación de estas clases.

Abstract

The main goal of this work is to introduce the Gelfand-Shilov classes and some of their most interesting properties and characterizations. The classes will be dealt with in their most general form, defining them by means of either weight sequences or weight functions, both in the Roumieu and Beurling setting. The behaviour of the most common operators will be discussed, and their continuity will be analized. Some characterization results for these classes will be proved, and conditions under which a space defined by weight sequences can be defined by weight functions, and vice versa, will be studied. We will work on the difficult problem of the non-triviality of these spaces in a restricted setting. To conclude the work, we will briefly comment on some generalizations and current research topics, and on some other fields of application of these spaces.

Introducción

La memoria presente tiene como objetivo fundamental presentar la teoría elemental de los espacios de Glenfad-Shilov, subespacios de la clase de Schwartz con multitud de aplicaciones en el Análisis Matemático. El trabajo entronca fundamentalmente con la asignatura obligatoria del Grado en Matemáticas *"Introducción a los espacios de funciones"* y con las asignatura optativas del Máster en Matemáticas *"Teoría de Operadores"*, *"Seminario de Análisis"* y *"Ampliación de teoría de funciones"* del área de Análisis Matemático. Se aplicarán técnicas del estudio de operadores en espacios de funciones y del estudio de los espacios de Banach.

La memoria se divide en tres capítulos. En el primer capítulo, donde han sido referencias los libros de W. Rudin [29] y [30], el libro de R. Meise y D. Vogt [20], el libro de J. Horváth [15], el libro de N. Bourbaki [4] y los libros de I. M. Gelfand y G. E. Shilov [12] y [13], establecemos los resultados básicos necesarios acerca de los espacios vectoriales topológicos. Comentamos cómo entender su topología y cómo caracterizarla. También ahondamos en los conceptos de espacio localmente convexo, espacio de Fréchet y límite inductivo estableciendo una base topológica que será fundamental a lo largo del trabajo. Concretamente, daremos resultados que nos permiten establecer en qué condiciones un operador entre espacios de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu o de tipo Beurling, es continuo.

En el segundo capítulo, donde han sido referencia los libros de I. M. Gelfand y G. E. Shilov [12], el libro de H. Komatsu [17], el libro de R. T. Rockafellar [27] y [13] y los artículos [5], [22], [23], [28] y [18], se definen los espacios de Gelfand-Shilov con los que trabajamos, tanto de tipo Roumieu como de tipo Beurling. En primer lugar se estudian los espacios de tipo Roumieu y se tratan algunas de las posibles operaciones que pueden realizarse en ellos de manera continua, como la derivación, el producto por una función o la transformada de Fourier. A continuación, se caracterizan los espacios, bien usando la transformada de Fourier, bien por equivalencia entre los dos tipos que definimos, los de tipo S y tipo W, definidos respectivamente a partir de sucesiones peso y de funciones peso. Después se comenta la cuestión de la no trivialidad de estos espacios en un caso muy concreto pues es un problema abierto aún a día de hoy en el caso general. Por último, se desarrolla de qué manera podemos utilizar todo lo que hemos trabajado sobre los espacios de tipo Roumieu para aplicarlo sobre los espacios de tipo Beurling: operaciones, caracterizaciones y no trivialidad.

El tercer y último capítulo, donde son referencia los artículos [1], [8], [24] y [26] y el libro de A. Böttcher y B. Silbermann [3], pretende ilustrar las posibles generalizaciones y aplicaciones fruto de las líneas de investigación actuales con artículos extremadamente recientes. Comentamos como se desarrolla el caso del análisis de estos espacios en varias variables y vía matrices peso. Esbozamos el Análisis Armónico y de Wavelets que puede hacerse y qué ventajas aporta cuando utilizamos funciones de estos espacios. Y, por último, comentamos las posibles aplicaciones de esta teoría al estudio de los operadores de Toeplitz, lo que concluye el trabajo.

Índice general

1. Nociones de la teoría de espacios vectoriales topológicos **7**
1.1. Preliminares 7
1.2. Espacios de Fréchet. Topología final 13

2. Clases de Gelfand-Shilov **19**
2.1. Espacios de tipo Roumieu 20
2.1.1. Introducción. 20
2.1.2. Operaciones en los espacios de tipo Roumieu. 32
2.1.3. Transformación de Fourier. 41
2.1.4. Definición vía la transformada de Fourier. 49
2.1.5. Equivalencia entre los espacios de tipo S y de tipo W. . 61
2.1.6. No trivialidad de los espacios de tipo Roumieu. 69
2.2. Espacios de tipo Beurling. 76

3. Generalizaciones. Aplicaciones de las clases de Gelfand-Shilov y líneas de investigación. **81**
3.1. Generalizaciones y otras cuestiones 81
3.2. Análisis armónico y wavelets. 84
3.3. Operadores de Toeplitz 87

1

Nociones de la teoría de espacios vectoriales topológicos

Contenidos

1.1. Preliminares 7

1.2. Espacios de Fréchet. Topología final 13

A lo largo de este capítulo vamos a introducir las nociones básicas necesarias acerca de la topología inductiva, donde hablaremos de límites inductivos, y los espacios de Fréchet. Estos conceptos serán necesarios para abordar los *espacios de Gelfand-Shilov de tipo S y W*.

1.1. Preliminares

Comenzamos introduciendo el concepto de espacio vectorial topológico.

Definición 1.1. Un **espacio vectorial topológico** E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, que generalmente será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial equipado con una topología que hace continuas sus operaciones, es decir, de manera que la aplicación $+ : E \times E \to E$ dada por $(x, y) \mapsto x + y$ y la aplicación $\cdot$: $\mathbb{K} \times E \to E$ dada por $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ son continuas considerando en $E \times E$ y en $\mathbb{K} \times E$ la topología producto correspondiente. Diremos que una topología τ en el espacio vectorial E es **vectorial** si (E, τ) es un espacio vectorial topológico.

Definición 1.2. Una **función distancia o distancia** d en un conjunto X es una función que actúa sobre $X \times X$ y llega sobre $\mathbb{R}$ y verifica las siguientes propiedades:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$. Es más, la igualdad se da únicamente si $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.

(iii) **Desigualdad triangular**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Ahora bien, dada una distancia d en un conjunto X podemos definir la **bola de radio** ε y centro x como el conjunto

$$\mathbb{B}_d(x, \varepsilon) := \{y : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Por último, si d es una distancia sobre un conjunto X, entonces la colección de todas las bolas abiertas $\mathbb{B}(x, \varepsilon)$ para todo $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ es una base para una topología en X que se denomina **topología métrica**. Recordamos que la **bola cerrada de radio** ε **y centro** x es

$$\overline{\mathbb{B}_d}(x, \varepsilon) = \{y : d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Además, omitiremos el subíndice d cuando no haya lugar a confusión.

Diremos además que un espacio topológico X con topología τ es **metrizable** si existe una distancia d en X cuya topología métrica asociada τ' es la misma que τ. En general, si $X = \mathbb{K}$ con $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y la topología usual, entonces la distancia es el módulo de la resta y se puede denotar también $\mathbb{B}_d(x, \varepsilon) = \mathbb{B}_{\mathbb{K}}(x, \varepsilon)$ para cualesquiera $x \in \mathbb{K}$ y $\varepsilon > 0$.

Observación 1.3. La forma de caracterizar esta topología para poder manejarla más cómodamente es la siguiente: Una topología τ en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial es vectorial si, y solo si, se tiene:

(i) Para cada par de puntos $x, y \in E$ y cada entorno U de $x + y$ existen entornos V de x y W de y tales que

$$V + W := \{v + w : v \in V, w \in W\} \subset U.$$

(ii) Para cada $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, para cada $x_0 \in E$ y para cada entorno U de $\lambda_0 x_0$ existe un $\varepsilon > 0$ y un entorno V de x_0 tal que

$$\overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{K}}(\lambda_0, \varepsilon) \times V := \{\lambda v : |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon, v \in V\} \subset U.$$

Definición 1.4. Un espacio vectorial topológico E se dice que es **localmente convexo** si todo punto tiene un sistema fundamental de entornos convexos.

Observación 1.5. Puesto que la suma es continua para la topología que dota a E de estructura de espacio vectorial topológico, las traslaciones son claramente homeomorfismos en E, y podemos escribir los entornos U de cualquier punto $x \in E$ como $U = x + V$ para algún entorno V de 0 en E. De este hecho se deduce el siguiente lema.

Lema 1.6. Sea E un espacio vectorial topológico, son equivalentes:

(i) E es un espacio localmente convexo.

(ii) E tiene un sistema fundamental de entornos convexos del 0.

Definición 1.7. Definamos $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$, se entiende por **seminorma** en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E a una función $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ verificando:

(SN1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

(SN2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in E$.

Podemos ahora caracterizar los espacios localmente convexos vía familias de seminormas o de entornos del 0 de la siguiente manera.

Definición 1.8. Sea E un espacio vectorial topológico, una familia $\mathscr{U}$ de entornos del 0 en E se dice que **genera un sistema fundamental de entornos convexos del 0** si para todo entorno U del 0 existe un $V \in \mathscr{U}$ y un $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon V \subset U$.

Una familia $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ de seminormas en un espacio vectorial topológico E se dice que es un **sistema fundamental de seminormas** si los conjuntos

$$U_\alpha = \{x \in E : \|x\|_\alpha < 1\}, \ \ \alpha \in A,$$

generan un sistema fundamental de entornos de 0.

Observación 1.9. Notemos que la continuidad de las seminormas de un sistema fundamental está implícita en la definición, pues pedimos que las contraimágenes por las mismas de entornos de 0 en $\mathbb{R}$ sean entornos de 0 en E, y esto garantiza la continuidad de hecho en todo punto de E. Además, la convexidad de los conjuntos U_α se deduce de que $\|\cdot\|_\alpha$ sea una seminorma, pues si $x, y \in U_\alpha$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces para $\alpha \in A$ se tiene que

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|_\alpha \underset{(SN2)+(SN1)}{\leq} |\lambda|\|x\|_\alpha + |1-\lambda|\|y\|_\alpha < \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $\lambda \in [0,1]$. Así pues, $\lambda x + (1-\lambda)y \in U_\alpha$ y U_α es convexo. Es inmediato que también lo será εU_α para todo $\varepsilon > 0$.

Por lo tanto, un espacio vectorial topológico que admita un sistema fundamental de seminormas será siempre localmente convexo.

Proposición 1.10. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de seminormas en E tales que para cada par de elementos $\alpha, \beta \in A$ existe $\gamma \in A$ y $C > 0$ tal que

$$\text{máx}\{\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta, x \in E\} \leq C\|x\|_\gamma \tag{1.1}$$

para todo $x \in E$.

Entonces existe una única topología τ que dota a E de estructura de espacio localmente convexo para el cual la familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un sistema fundamental de seminormas. En este caso se suele denotar a este espacio por $(E, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in A})$.

Demostración:

Para cada $x \in E$, $\alpha \in A$ y $\varepsilon > 0$ definamos el conjunto

$$U_{\alpha,\varepsilon}(x) = \{\xi \in E : \|x - \xi\|_\alpha < \varepsilon\}.$$

Entonces tomemos el conjunto

$$\mathscr{O} = \{G \subset E : \text{para todo } x \in G \text{ existe } \alpha \in A \text{ y } \varepsilon > 0 \text{ con } U_{\alpha,\varepsilon}(x) \subset G\}.$$

Veamos que este conjunto define una topología: sea $\cup_{i\in I} G_i$ con $G_i \in \mathscr{O}$ para todo $i \in I$. Dado $x \in \cup_{i\in I} G_i$ existe $i_0 \in I$ tal que $x \in G_{i_0}$. Por tanto, existen $\alpha \in A$ y $\varepsilon > 0$ tales que $U_{\alpha,\varepsilon}(x) \subset G_{i_0} \subset \cup_{i\in I} G_i$ lo que implica que la unión cualquiera de elementos de $\mathscr{O}$ es un nuevo elemento del conjunto. Sea ahora $\cap_{k=1}^{n} G_k$ con $G_k \in \mathscr{O}$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dado $x \in \cap_{k=1}^{n} G_k$ entonces $x \in G_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ lo que significa que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ tales que $U_{\alpha_k, \varepsilon_k}(x) \subset G_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Por la propiedad (1.1) aplicada recurrentemente, existen $\gamma \in A$ y $C > 0$ tales que $\text{máx}\{\|\cdot\|_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n} \leq C\|\cdot\|_{\gamma}$. Así si tomamos $\varepsilon \leq \frac{\text{mín}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}}{C}$ y $\xi \in U_{\gamma, \varepsilon}$, entonces

$$\|x - \xi\|_{\alpha_k} \leq C\|x - \xi\|_{\gamma} < \varepsilon_k \text{ para todo } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Es decir, $U_{\gamma, \varepsilon}(x) \subset U_{\alpha_k, \varepsilon_k}(x) \subset G_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, $\cap_{k=1}^{n} G_k \in \mathscr{O}$. Además, $\emptyset$ y E están en $\mathscr{O}$. Entonces $\mathscr{O}$ es una topología en E, veamos ahora que con esta topología E es un espacio vectorial topológico (es decir, respecta la estructura de espacio vectorial) y que la familia de seminormas es un sistema fundamental de seminormas para esta topología.

En primer lugar E es un espacio vectorial topológico pues las operaciones son continuas para la topología inducida: sean $x, y \in E$ y $G \in \mathscr{O}$ tales que $x + y \in G$ entonces existen $\alpha \in A$ y $\varepsilon > 0$ tales que $U_{\alpha, \varepsilon}(x + y) \subset G$. Si consideramos, $U_{\alpha, \varepsilon/2}(x)$ y $U_{\alpha, \varepsilon/2}(y)$ entonces

$$U_{\alpha, \varepsilon/2}(x) + U_{\alpha, \varepsilon/2}(y) \subset U_{\alpha, \varepsilon}(x + y)$$

pues si $z + w \in U_{\alpha, \varepsilon/2}(x) + U_{\alpha, \varepsilon/2}(y)$ se tiene

$$\|x + y - z - w\|_{\alpha} \leq \|x - z\|_{\alpha} + \|_{\|} y - w_{\alpha} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Lo que significa que la suma de E es continua para la topología.

Por otro lado, dados $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, $x_0 \in E$ y $G \in \mathscr{O}$ tales que $\lambda_0 x_0 \in G$ entonces existen $\alpha \in A$ y $\varepsilon > 0$ tales que $U_{\alpha, \varepsilon}(\lambda_0 x_0) \subset G$.Sea $\delta > 0$ tal que $\delta(|\lambda_0| + \delta + \|x_0\|_{\alpha}) < \varepsilon$. Si consideramos λ tal que $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ y $v \in U_{\alpha, \delta}(x_0)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\lambda_0 x_0 - \lambda v\|_{\alpha} &\leq |\lambda_0|\|x_0 - v\|_{\alpha} + |\lambda - \lambda_0|\|v\|_{\alpha} \\
&\leq |\lambda_0|\|x_0 - v\|_{\alpha} + |\lambda - \lambda_0|(\|x_0 - v\|_{\alpha} + \|x_0\|_{\alpha}) \\
&< \delta(|\lambda_0| + \delta + \|x_0\|_{\alpha}) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo que la multiplicación por escalar es también continua para la topología, es decir, E es un espacio vectorial topológico.

Consideremos ahora $\mathscr{B} = \{U_{\alpha, \varepsilon}(0), \alpha \in A, \varepsilon > 0\}$, veamos que este conjunto es un sistema fundamental de entornos de 0. Si tomamos un abierto G de $\mathscr{O}$ que contenga al 0 existirán un α y un ε tales que $U_{\alpha, \varepsilon}(0) \subset G$ y además los elementos de $\mathscr{B}$ son abiertos que contienen a 0 pues $\|0\|_{\alpha} = 0$ para todo $\alpha \in A$. Como los conjuntos de $\mathscr{B}$ son convexos, E será un espacio localmente convexo con la topología inducida por $\mathscr{O}$.

Para terminar con la prueba de la existencia, veamos que la familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un sistema fundamental de seminormas para esta topología. Para ello debemos ver que los conjuntos $U_\alpha = \{x \in E : \|x\|_\alpha < 1\}$ generan un sistema fundamental de entornos convexos del 0. Sea G un entorno del 0, entonces por definición de la topología existen $\alpha \in A$ y $\varepsilon > 0$ tales que $U_{\alpha,\varepsilon}(0) \subset G$. Pero observemos que

$$U_{\alpha,\varepsilon}(0) = \{x \in E : \|x\|_\alpha < \varepsilon\} = \{x \in E : \|x/\varepsilon\|_\alpha < 1\} = \varepsilon U_\alpha$$

lo que significa que los conjuntos U_α generan un sistema fundamental de entornos convexos del 0 como queríamos probar.

Para la cuestión de la unicidad basta tomar $\mathscr{O}'$ otra topología que verifique las mismas condiciones, entonces dado U abierto de $\mathscr{O}'$ existen $\alpha \in A$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\varepsilon U_\alpha = U_{\alpha,\varepsilon}(0) \subset U$ por generar los U_α un sistema fundamental de entornos convexos del 0 para τ'. Pero por definición de $\mathscr{O}$ entonces U es abierto de $\mathscr{O}$. Por otro lado, el hecho de que $U_{\alpha,\varepsilon} = x + \varepsilon U_\alpha$, de que las operaciones sean continuas para ambas topologías y de que los U_α generen un sistema fundamental de entornos convexos del 0 de $\mathscr{O}'$ hace que los $U_{\alpha,\varepsilon}$ sean una base de entornos de cada punto para $\mathscr{O}'$ lo que nos da la otra contención. ∎

Definición 1.11. A una familia de seminormas que verifican la condición (1.1) se le llama **familia filtrante**.

Observación 1.12. Diremos que una familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de seminormas es **separante** si satisface la siguiente propiedad:

$$\text{Para todo } x \in E \text{ no nulo, existe un } \alpha \in A \text{ tal que } \|x\|_\alpha > 0. \tag{1.2}$$

Observemos que si el sistema fundamental de seminormas es separante, la topología generada es Hausdorff, pues si $x \neq 0$ entonces existe $\alpha \in A$ tal que $\|x\|_\alpha > 0$, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|x\|_\alpha \geq \varepsilon/2 > 0$. Así $U_{\alpha,\varepsilon/2}(x) \cap U_{\alpha,\varepsilon/2}(0) = \emptyset$. Ahora si $x, y \in E$ con $x \neq y$, entonces existen $\alpha \in A$ y $\varepsilon' > 0$ tales que $\|x - y\|_\alpha \geq \varepsilon' > 0$. Como $y + U_{\alpha,\text{mín}(\varepsilon'/2,\varepsilon/2)}(0)$ es un entorno de y por continuidad de la suma, entonces

$$U_{\alpha,\text{mín}(\varepsilon'/2,\varepsilon/2)}(x) \cap \Big(y + U_{\alpha,\text{mín}(\varepsilon'/2,\varepsilon/2)}(0)\Big) = \emptyset$$

ya que y no está en el entorno de x y la intersección entre el entorno de x y de 0 es vacía.

De hecho, puede probarse que la topología generada es Hausdorff si, y solo si, la familia es separante.

1.2. Espacios de Fréchet. Topología final

En esta sección abordaremos las cuestiones topológicas relativas a espacios de Fréchet y topología final en su caso concreto de topología de límite inductivo. Seremos concisos en los resultados, añadiendo solo aquellos que vayan a resultarnos de utilidad.

En particular, no se introducirá el concepto de completitud en un espacio vectorial topológico general, por estar interesados únicamente en esta propiedad para espacios metrizables. Por lo tanto, es suficiente considerar la completitud secuencial, equivalente en este contexto.

Definición 1.13. Sea E un espacio métrico con distancia d y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de E, diremos que es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Sea E un espacio métrico con distancia d, diremos que es **completo** si toda sucesión de Cauchy en él converge.

Como hemos indicado, aunque el concepto anterior es el de espacio **secuencialmente completo**, se puede probar que para espacios vectoriales topológicos metrizables la definición más general de completitud y la completitud secuencial son equivalentes.

Definición 1.14. Un espacio vectorial topológico F se dice que es un **espacio de Fréchet** si es localmente convexo, metrizable y completo.

Damos a continuación un resultado que determina la metrizabilidad de los espacios vectoriales topológicos que admiten un sistema fundamental de seminormas adecuado.

Proposición 1.15. Sea F un espacio localmente convexo y sea $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un sistema fundamental de seminormas numerable y separante, entonces el espacio F es metrizable (es decir, existe una métrica d en F que induce la misma topología que la de espacio localmente convexo).

Demostración:
Podemos definir, a partir de la familia $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$, una nueva familia de seminormas esta vez creciente de la siguiente manera

$$p_k = \text{máx}\{\|\cdot\|_j, 1 \leq j \leq k\}.$$

De hecho, los conjuntos

$$V_k = \{x \in F : p_n(x) < 1\}$$

verifican que $V_{k+1} \subset V_k$ y $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de seminormas para la topología de F. Si tomamos U entorno del 0 en F entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $U_{n,\varepsilon}(0) = \{x \in F : \|x\|_n < \varepsilon\} \subset U$. Sin embargo, si $k \geq n$ y $x \in \varepsilon V_k$ entonces se tiene que $p_k(x/\varepsilon) < 1$, es decir, que $\text{máx}\{\|x\|_j, 1 \leq j \leq k\} < \varepsilon$, luego $\|x\|_j < \varepsilon$ para todo $j \leq k$. En particular, $\|x\|_n < \varepsilon$ y, por tanto, $\varepsilon V_k \subset U_{n,\varepsilon}(0)$ que prueba que la familia $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de seminormas.

Si definimos ahora la aplicación

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \ , \quad x, y \in F$$

es la distancia que andábamos buscando. Veámoslo: en primer lugar la serie converge porque es de términos positivos y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Además, si $x = 0$ entonces $p_n(0) = \text{máx}\{\|0\|_k, 1 \leq k \leq n\} = \text{máx}\{0_k, 1 \leq k \leq n\} = 0$ luego $d(x,x) = 0$. Recíprocamente, si $d(x,y) = 0$, por ser una serie de términos positivos entonces $p_n(x-y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $\|x-y\|_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por ser la familia separante, ver (1.2), se tiene que $x - y = 0$, es decir, $x = y$. De la misma caracterización se deduce que si $x \neq y$ entonces $d(x,y) > 0$ pues existirá un $k \in \mathbb{N}$ tal que $p_k(x-y) > 0$ por ser $x - y \neq 0$. Que $d(x,y) = d(y,x)$ es evidente pues $p_n(x-y) = p_n(y-x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos por tanto la desigualdad triangular. La función $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ es creciente para todo $x \geq 0$ pues su derivada es $\frac{1}{(1+x)^2}$. Por tanto, se tiene que

$$\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \leq \frac{p_n(x-z)+p_n(z-y)}{1+p_n(x-z)+p_n(z-y)} \leq \frac{p_n(x-z)}{1+p_n(x-z)} + \frac{p_n(z-y)}{1+p_n(z-y)},$$

donde en la primera desigualdad hemos usado la monotonía de la función $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ y que $p_n(x-y) \leq p_n(x-z) + p_n(z-y)$, y en la segunda que las seminormas son cantidades positivas y entonces

$$\frac{1}{1+p_n(x-z)+p_n(z-y)} \leq \frac{1}{1+p_n(x-z)}$$

y

$$\frac{1}{1+p_n(x-z)+p_n(z-y)} \leq \frac{1}{1+p_n(z-y)}.$$

Por tanto, d es una métrica.

Puesto que $p_n(x-z+z-y) = p_n(x-y)$ entonces $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ y d es por tanto una distancia invariante por traslaciones. Veamos que la topología generada por d induce la topología de espacio localmente convexo y viceversa. Para ello, como para ambas dada una base de entornos del 0 podemos obtener, mediante traslaciones, una base de entornos de cualquier otro punto, basta comparar sus bases de entornos en 0.

Consideremos $U = \{x : d(0,x) \leq 1/2^k\}$, entorno de 0 para la topología inducida por d que llamaremos τ'. Queremos ver que el conjunto

$$V = \{x : p_{k+1}(x) \leq \frac{1}{2^{k+2}}\},$$

que es un entorno de 0 en la topología τ inducida por las seminormas, está contenido en U. Si $x \in V$ entonces

$$p_0(x) \leq p_1(x) \leq \ldots \leq p_{k+1}(x) \leq \frac{1}{2^{k+2}},$$

y por tanto,

$$\sum_{n=0}^{k+1} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \leq \frac{1}{2^{k+2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

pues $\dfrac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \leq p_n(x)$. Por otro lado, se tiene que $\dfrac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \leq 1$, luego,

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \leq \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Por tanto, juntando ambas desigualdades

$$d(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k},$$

es decir, $V \subset U$.

Recíprocamente, probemos que el entorno $W = \{x : p_n(x) \leq 1/2^k\}$ de 0 en τ contiene al entorno $Z = \{x : d(x,0) \leq 1/2^{n+k+1}\}$ de 0 en τ'. Sea $x \in Z$ entonces se tiene que

$$\frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \leq \frac{1}{2^{n+k+1}},$$

es decir,

$$\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \leq \frac{1}{2^{k+1}},$$

lo que implica que

$$p_n(x)\Big(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\Big) \leq \frac{1}{2^{k+1}},$$

de donde se deduce que

$$p_n(x) \leq \frac{1}{2^{k+1}-1} \leq \frac{1}{2^k},$$

y por tanto que $Z \subset W$.

Por tanto, las topologías generadas por τ y τ' son la misma.

■

Observación 1.16. Es posible caracterizar los espacios vectoriales topológicos metrizables en ausencia de convexidad, pero este resultado no es necesario para nuestros propósitos.

El siguiente resultado caracteriza la continuidad de las aplicaciones lineales entre espacios localmente convexos cuya topología viene dada por un sistema fundamental de seminormas creciente. Notemos que, como se ha visto en la prueba de la proposición 1.15, la condición de que los sistemas fundamentales de seminormas sean crecientes no es restrictiva, ya que dado un sistema fundamental de seminormas arbitrario podemos obtener otro que genera la misma topología y que es creciente.

Teorema 1.17. Sean E y F espacios localmente convexos metrizables cuyos sistemas fundamentales de seminormas son $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, y se suponen crecientes. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Son equivalentes:

(i) f es continua.

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existen un $k \in \mathbb{N}$ y un $C > 0$ tales que $q_n(f(x)) \leq Cp_k(x)$ para todo $x \in E$.

Pasamos ya al estudio de un segundo tipo de estructuras frecuentes en la teoría de espacios vectoriales topológicos y que, como veremos, corresponderá a los espacios de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu.

Definición 1.18. Consideremos F un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales topológicos sobre $\mathbb{K}$. Para cada $i \in I$ sea $f_i : E_i \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Tomemos Φ el conjunto de todas las topologías que dotan a F de estructura de espacio localmente convexo para las que las aplicaciones f_i son continuas. Este conjunto es no vacío porque contiene a la topología discreta ($\tau = \{\emptyset, F\}$). Consideremos τ la cota superior del conjunto Φ que es compatible con la estructura de espacio vectorial, es decir, las operaciones son aplicaciones continuas con esta topología. Esta topología se conoce como **topología final de F**. Además, para esta topología, una base de entornos del 0 está dada por uniones de imagenes por las aplicaciones j_i de entornos de 0 en E_i. Por tanto, F toma estructura de espacio localmente convexo y τ es la topología más fina que dota a F de esta estructura y hace las aplicaciones j_i continuas.

Con esta construcción podemos definir los límites inductivos de espacios localmente convexos (o de Fréchet) que nos ayudarán posteriormente a dotar de una topología a las clases de Gelfand-Shilov. La referencia en este sentido es [4].

Definición 1.19. Consideremos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subespacios de un espacio E, de manera que

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Además, denotemos por τ_n a la topología de E_n que suponemos es localmente convexa (o de espacio de Fréchet) y supongamos que la topología τ_{n+1} en E_{n+1} es menos fina que τ_n, es decir, que la inyección $i : E_n \hookrightarrow E_{n+1}$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. En esta situación, la topología final de E que genera esta familía se llama **topología de límite inductivo** y se dice que E es el **límite inductivo** de los E_n.

Observación 1.20. Notemos que es una estructura compleja pues, aunque las topologías τ_n fuesen Hausdorff, puede ocurrir que τ no lo sea. Es más, puede ocurrir que E_n sea cerrado en E_{n+1} con la topología τ_{n+1} pero no lo sea en E con τ.

Presentamos ahora un resultado relativo a la continuidad de aplicaciones lineales establecidas entre un límite inductivo y un espacio localmente convexo. La demostración puede encontrarse en [15], nos limitaremos a enunciarlo para no extender en exceso el trabajo. Este resultado será clave para estudiar qué operadores son continuos en las clases de Gelfand-Shilov que introduciremos posteriormente.

Teorema 1.21. Sea E un espacio vectorial, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia creciente (con respecto de la inclusión) de subespacios localmente convexos tal que

$E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea la inyección canónica $i_n : E_n \hookrightarrow E$. Tomemos en F la topología de límite inductivo, y consideremos G otro espacio localmente convexo y una aplicación lineal $g : E \to G$. Entonces g es continua para la topología de límite inductivo si, y solo si, las aplicaciones $g \circ i_n = g|_{E_n} : E_n \to G$ son continuas para todo $n \in \mathbb{N}$.

Corolario 1.22. Sean E y G dos espacios vectoriales y sean $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dos familias crecientes de subespacios localmente convexos con $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $G = \cup_{k=1}^{\infty} G_k$, con sus respectivas inyecciones $i_n : E_n \hookrightarrow E$ y $\tilde{ß}_k : G_k \hookrightarrow G$. Consideremos en E y G las topologías de límite inductivo y sea $g : E \to G$ una aplicación lineal. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(E_i) \subset G_k$ y $g|_{E_n} : E_n \to G_k$ es continua, entonces g es continua.

Demostración:
Basta aplicar el teorema 1.21 teniendo en cuenta que G es en particular localmente convexo por definición de límite inductivo y que $g \circ j_i$ no es más que la aplicación que nos da la hipótesis del teorema que es continua para todo $i \in I$. ■

Observación 1.23. Los espacios de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu resultan estar dotados de topología de límite inductivo, y este resultado simplifica mucho la cuestión de la continuidad de operadores entre límites inductivos. Si F es el límite inductivo de $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con F_n espacio de Banach para todo $n \in \mathbb{N}$ y E es el límite inductivo de $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con E_n espacio de Banach para todo $k \in \mathbb{N}$ y consideramos un operador lineal $T : E \to F$, entonces el operador T será continuo si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T(E_k) \subset F_n$ y $T|_{E_k} : E_k \to F_n$ es continuo. La continuidad del operador restringido a estos elementos, espacios de Banach, equivale a la acotación. En este contexto llamaremos eslabón a los elementos F_n o E_k de las respectivas familias y, por tanto y *grosso modo*, habría que probar que el operador es continuo de un eslabón arbitrario del espacio origen en otro eslabón adecuado del espacio imagen.

2

Clases de Gelfand-Shilov

A lo largo de este capítulo desarrollaremos los elementos básicos de la teoría de las clases de Gelfand-Shilov o espacios de Gelfand-Shilov, detallando con precisión la construcción y propiedades de este tipo de espacios que introducimos en el capítulo 1. Estos espacios fueron primeramente introducidos por Gelfand y Shilov en sus trabajos [12] y [13]. Sin embargo, han sido posteriormente estudiados en numerosos otros trabajos recientemente como [23], [5], [8], [1], [26] ...

Contenidos

2.1. Espacios de tipo Roumieu **20**

2.1.1. Introducción. 20

2.1.2. Operaciones en los espacios de tipo Roumieu. . . . 32

2.1.3. Transformación de Fourier. 41

2.1.4. Definición vía la transformada de Fourier. 49

2.1.5. Equivalencia entre los espacios de tipo S y de tipo W. 61

2.1.6. No trivialidad de los espacios de tipo Roumieu. . . 69

2.2. Espacios de tipo Beurling. **76**

Separaremos estos espacios en dos tipos, los de tipo Roumieu y los de tipo Beurling, y daremos la definición formal en ambas secciones. A modo de introducción, comentamos brevemente la diferencia entre ambos tipos. Estos espacios son subespacios vectoriales de la clase de Schwartz $\mathscr{S}$ de las funciones indefinidamente derivables y de decrecimiento rápido, es decir, tales que los productos de monomios por derivadas sucesivas de sus elementos están acotados en $\mathbb{R}$. De hecho, nos quedaremos con las funciones que están en esta clase y verifican un control explícito para tales productos bien marcado por unas sucesiones de constantes, bien por funciones. La diferencia entre los dos tipos estará en si consideramos la unión, y por tanto la topología como límite inductivo, o la intersección, y por tanto la topología de espacio de Fréchet. En la literatura más reciente se abordan los espacios de tipo Beurling pues los de tipo Roumieu fueron los primeros en introducirse y estudiarse.

Uno de los problemas más interesantes que plantea esta teoría, y que en algunas casos sigue aún abierto, es el dar condiciones sobre las cotas que se imponen para que los espacios sean no triviales. Comentaremos ciertos casos relativamente sencillos de este problema. Esta teoría es muy rica, y da lugar también a otros problemas muy interesantes como el de la nuclearidad de estos espacios o el de sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales.

Nos dedicaremos al estudio de los espacios en el caso unidimensional y a la imposición de cotas mediante sucesiones y funciones peso. Comentaremos además en el último capítulo algunas líneas actuales de investigación que se centran en el estudio de clases asociadas a matrices peso y en varias variables.

2.1. Espacios de tipo Roumieu

2.1.1. Introducción.

Dentro de las clases de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu distinguiremos dos tipos de espacios, espacios de tipo S que vienen definidos por sucesiones peso, y espacios de tipo W que vienen definidos por funciones peso. Estudiaremos bajo qué condiciones son equivalentes o generan el mismo espacio, qué operaciones pueden considerarse en estos espacios y comentaremos algunas condiciones bajo las que estos espacios son no triviales, es decir, qué condiciones son necesarias o suficientes para que exista al menos una función no nula en estos espacios.

Definición 2.1. Denotaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, y denotaremos por $\mathbb{N}_0$ al conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definición 2.2. Sean $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ dos sucesiones crecientes de números reales y sean $A, B > 0$ constantes. Definimos el **espacio de Schwartz o clase de Schwartz** como

$$\mathscr{S} = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \sup_x |x^q f^{(p)}(x)| < \infty, \quad \text{para todo } p, q \in \mathbb{N}_0\},$$

y definimos, para cada $A, B > 0$, los subespacios

$$\mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p} = \{\varphi \in \mathscr{S} : \exists C > 0,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^q \varphi^{(p)}(x)| < CA^pB^qM_pN_q,\ \forall p, q \in \mathbb{N}_0\}.$$

Observación 2.3. En lo sucesivo, y sin pérdida de generalidad, supondremos que $M_0 = N_0 = 1$ por simplicidad, pues este convenio no altera la definición de las clases consideradas.

Proposición 2.4. Los espacios $\mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p}$, dotados de la norma

$$\|\varphi\|_{A,B} = \sup_{p,q,x} \frac{|x^q \varphi^{(p)}(x)|}{A^p B^q M_p N_q}$$

son espacios de Banach.

Demostración:

Veamos que se tiene una norma: $\|\varphi\|_{A,B} = 0$ si, y solo si, el numerador es 0 para todo $x \in \mathbb{R}$ y $p, q \in \mathbb{N}$ lo que da lugar a que la función es nula. Respecto a la desigualdad triangular es consecuencia de la linealidad de la derivada y que el superior de la suma de cantidades positivas es menor o igual que la suma de los superiores de esas mismas cantidades. Por último la cuestión sobre los escalares es inmediata de nuevo por la linealidad de la derivación.

Veamos que el espacio $\mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p}$ es completo. Sea entonces $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$ se tiene que $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{A,B} < \varepsilon$. Por tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $p, q \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|x^q(\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi_m^{(p)}(x))| \leq \varepsilon A^p M_p B^q N_q. \tag{2.1}$$

Ahora bien, podemos comprobar que

$$\begin{aligned} |(1 + x^2)\big(\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi_m^{(p)}(x)\big)| &\leq |\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi_m^{(p)}(x)| + |x^2\big(\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi_m^{(p)}(x)\big)| \\ &\leq (1 + B^2 N_2)\varepsilon A^p M_p \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $p \in \mathbb{N}_0$. Por tanto,

$$|\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi_m^{(p)}(x)| \leq \frac{(1 + B^2 N_2)\varepsilon A^p M_p}{1 + x^2} \leq (1 + B^2 N_2)\varepsilon A^p M_p,$$

y la sucesión $\{\varphi_n^{(p)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es uniformemente de Cauchy en todo $\mathbb{R}$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$, y por lo tanto converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Un resultado clásico del Análisis establece entonces que la función φ, definida por $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$ y sus derivadas sucesivas son el límite de las sucesiones $\{\varphi_n^{(p)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ para cada $p \in \mathbb{N}$. Por último, haciendo tender m hacia infinito en (2.1) tenemos que

$$|x^q(\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi^{(p)}(x))| \leq \varepsilon A^p M_p B^q N_q$$

lo que significa que $\varphi_n - \varphi \in \mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p}$ si $n \geq n_0$, de donde $\varphi = \varphi_n - (\varphi_n - \varphi) \in \mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p}$, y además

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{A,B} \leq \varepsilon$$

si $n \geq n_0$, con lo que φ es el límite de $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p}$. ■

Definición 2.5. Llamaremos **espacio de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu de tipo S** al espacio

$$\mathscr{S}^{M_p,N_p} = \bigcup_{A,B>0} \mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p}.$$

Observación 2.6. Es inmediato que

$$\mathscr{S}^{M_p,N_p} = \bigcup_{A,B>0} \mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{S}_{n,n}^{M_p,N_p},$$

siendo la unión creciente en n. La topología que consideraremos en $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ será la de límite inductivo para dicha representación. Alternativamente, si tomamos $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, dos sucesiones crecientes que tienden a infinito, entonces se puede poner

$$\mathscr{S}^{M_p,N_p} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{S}_{n_k,m_k}^{M_p,N_p},$$

y es sencillo comprobar que la topología límite inductivo para esta escritura coincide con la anterior. El mismo comentario puede hacerse sobre los espacios de tipo W que introducimos a continuación.

Definición 2.7. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en $[0,\infty)$, cuya derivada es no negativa y crece tendiendo a infinito en infinito, y tales que $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$. Sean $a, b > 0$ constantes. Definimos los espacios

$$W_{a,b}^{f,g} = \{\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \varphi \text{ es entera y } |\varphi(x+iy)| \leq Ce^{-f(ax)+g(by)},\ x+iy \in \mathbb{C}\}.$$

De manera análoga a la proposición 2.4 se comprueba el siguiente resultado.

Proposición 2.8. Los espacios $W_{a,b}^{f,g}$ dotados de la norma

$$\|\varphi\|_{a,b} = \sup_{x+iy\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(x+iy)|}{e^{f(ax)-g(by)}}$$

son espacios de Banach.

Definición 2.9. Llamaremos **espacio de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu de tipo W** al espacio

$$W^{f,g} = \bigcup_{a,b>0} W_{a,b}^{f,g}.$$

Es sencillo comprobar que

$$W^{f,g} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_{n,1/n}^{f,g},$$

y la topología que se considera en el espacio es la de límite inductivo para esta representación. Como se indicó para los espacios de tipo S, cualquier otra representación del tipo

$$W^{f,g} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_{a_n,b_n}^{f,g},$$

donde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números positivos y crece hacia infinito, y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números positivos y decrece hacia 0, induce la misma topología.

Observación 2.10. Generalmente, para abreviar, nos referiremos a estas clases como espacios de tipo S y W y será el contexto el que nos indique si nos referimos a estos espacios de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu o a los de tipo Beurling que veremos más adelante.

Son ejemplos de sucesiones para definir los espacios de tipo S el factorial, o en general sus potencias $\{p!^{\alpha}\}$ con $\alpha > 0$, y para los de tipo W las funciones del tipo $f(t) = t^{\alpha}$ con $\alpha > 1$.

Veremos más adelante, en la sección sobre los espacios de tipo Beurling, que la topología dada en estos espacios resulta ser de espacio de Fréchet. Sin embargo, en el caso Roumieu no es conocido si la topología es metrizable o completa, como se menciona en un artículo reciente de A. Petersson [24, Observación 2.6].

Antes de meternos de lleno en los operadores en estos espacios listaremos una serie de condiciones o propiedades que se imponen en este contexto a las sucesiones. Esta lista, que resulta ser bastante estándar en cuanto a notación en la literatura, hará de diccionario para que no tengamos que citar expresamente la propiedad.

Convexidad logarítmica.

Definición 2.11. Sea $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales positivos, diremos que tiene la propiedad de la **convexidad logarítmica** o que es **logarítmicamente convexa** o que **verifica (M1)** si

$$M_p^2 \leq M_{p+1}M_{p-1}, \qquad \text{para todo } p \in \mathbb{N}_0.$$

Observación 2.12. Si se define la **sucesión de cocientes** de $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ como la sucesión $\{m_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ dada por

$$m_p = \frac{M_p}{M_{p-1}}, \qquad p \in \mathbb{N},$$

es inmediato que la convexidad logarítmica de $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ equivale al no decrecimiento de su sucesión de cocientes, pues

$$M_p^2 \leq M_{p+1}M_{p-1} \iff \frac{M_p}{M_{p-1}} \leq \frac{M_{p+1}}{M_p}.$$

.

Recordamos, para su uso posterior, que si $\{m_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ es no decreciente, es conocido que $\lim\limits_{p\to\infty} M_p^{1/p} = \infty$ si, y solo si, $\lim\limits_{p\to\infty} m_p = \infty$.

Proposición 2.13. Sea $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales positvos logarítmicamente convexa, entonces

$$M_pM_q \leq M_{p+q}$$

para todo $p, q \in \mathbb{N}_0$ con $0 \leq q \leq p$.

Demostración:

De la convexidad logarítmica de$\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ se obtienen las siguientes desigualdades para $q \leq p$:

$$\begin{aligned}
&M_q M_q \leq M_{q-1} M_{q+1}\\
&M_{q+1} M_{q+1} \leq M_{q+2} M_q\\
&\qquad\quad \vdots\\
&M_p M_p \leq M_{p-1} M_{p+1}.
\end{aligned}$$

Multiplicando ahora todas estas desigualdades obtenemos que

$$M_p M_q \leq M_{q-1} M_{p+1}$$

para cualesquiera p y q con $q \leq p$. Si ahora aplicamos la desigualdad a $M_{q-1}M_{p+1}$ entonces se tiene $M_pM_q \leq M_{q-1}M_{p+1} \leq M_{q-2}M_{p-2}$. Si aplicamos esta desigualdad q veces llegamos a $M_pM_q \leq M_0M_{p+q} = M_{p+q}$ como queríamos probar. ■

Otras propiedades interesantes de las sucesiones.

Definición 2.14. Consideramos $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se consideran las siguientes propiedades y notaciones:

(M2) **Estabilidad por operadores ultradiferenciables:** existe una constante $H \geq 1$ tal que $M_{p+q} \leq H^{p+q}M_pM_q$para todo $p \in \mathbb{N}$.

(M3) **No casi-analiticidad fuerte:** existe una constante H tal que

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{M_{k-1}}{M_k} \leq Hp\frac{M_p}{M_{p+1}}$$

para todo $p \geq 1$.

(M4) **No trivialidad:** existen $h > 0$ y $\eta > 1/2$ tales que $M_p \geq h^p p^{p\eta}$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

(M1)' **Convexidad logarítmica fuerte:** $\dfrac{M_p}{M_{p-1}} := m_p$ es creciente y tiende a infinito cuando $p \to \infty$.

(M1)* **Dualidad:** $\dfrac{p!}{M_p}$ verifica $(M1)'$

(M2)’ **Estabilidad por operadores diferenciables:** existe una constante $H \geq 1$ tal que $M_{p+1} \leq H^{p+1} M_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

(M3)’ **No casi-analiticidad:**

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty.$$

Observación 2.15. Notemos que (M1)’ es más fuerte que (M1) pues estamos pidiendo además de que $\{m_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ crezca, que tienda a infinito. Por otra parte, (M2)’ y (M3)’ son más débiles que (M2) y (M3), respectivamente.

Veamos que (M1)* implica (M2): si $\frac{p!}{M_p}$ verifica la propiedad (M1)’ entonces verifica (M1) y, por tanto,

$$\frac{p!}{M_p}\frac{q!}{M_q} \leq \frac{(p+q)!}{M_{p+q}},$$

de donde

$$M_{p+q} \leq \binom{p+q}{q} M_p M_q \leq 2^{p+q} M_p M_q.$$

Además, si se tienen (M1) y (M4) entonces se tiene (M1)’, pues de acuerdo con lo indicado en la observación 2.12 basta comprobar que $\lim_{p\to\infty} M_p^{1/p} = \infty$. Pero si se tiene (M4), entonces $M_p^{1/p} \geq hp^{\eta}$ con $\eta > 1/2$, sucesión que tiende a infinito.

Introducimos a continuación dos nociones fundamentales, la de sucesión asociada a una función, y la función asociada a una sucesión, que permitirán en muchos casos reescribir los espacios de formas equivalentes y adecuadas para agilizar o simplificar razonamientos.

Definición 2.16. Dada una sucesión de números reales positivos $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ su **función asociada** se definirá como

$$w_M(x) = \sup_{p\in\mathbb{N}_0} (p \log x - \log M_p).$$

Observación 2.17. Tal y como hemos definido la función asociada esta podría tomar el valor infinito en ciertos puntos. Para evitar esta situación, basta pedir que se tenga (M1)’. De acuerdo con la observación 2.12, esto asegura que la sucesión de cocientes crece y que $\lim\limits_{p\to\infty} M_p^{1/p} = \infty$. Veamos que $w_M(x) < \infty$ para todo $x > 0$ si, y solo si, $\lim\limits_{p\to\infty} M_p^{1/p} = \infty$. Si fuera $\lambda := \varliminf\limits_{p\to\infty} M_p^{1/p} < \infty$, tomemos $x > \lambda$. Existirán infinitos elementos de la sucesión $M_p^{1/p}$ entre λ y $(\lambda + x)/2$, y por tanto, para infinitos $p \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left(\frac{x}{M_p^{1/p}}\right)^p \geq \left(\frac{2x}{x+\lambda}\right)^p,$$

valores estos últimos que tienden a infinito cuando p lo haga, con lo que $w_M(x) = \infty$. Recíprocamente, supongamos que $\underset{p\to\infty}{M_p^{1/p}} = \infty$, entonces para cada $x > 0$ se tiene que $\frac{x}{M_p^{1/p}}$ estará acotado por 1 de un p en adelante, y lo estarán sus potencias p-ésimas, de modo que podemos garantizar que $w_M(x)$ es finito.

Definimos ahora una construcción en cierto modo dual.

Definición 2.18. Dada $f\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$ no decreciente, entonces la sucesión $\{M_p^{[f]}\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ definida por

$$\log M_p^{[f]} = \sup_{r>0}(p \log r - f(r)), \qquad p \in \mathbb{N}_0,$$

se llama la **sucesión asociada a** f.

Observación 2.19. Tal y como hemos definido la sucesión asociada a una función esta podría tener elementos que son infinito. Para evitar esta posibilidad, es sencillo comprobar que basta que se satisfaga la condición

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{\log(r)} = \infty.$$

Proposición 2.20. Sea $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim\limits_{p\to\infty} M_p^{1/p} = \infty$. Entonces, $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ es logarítmicamente convexa si, y solo si, coincide con la sucesión asociada a su función asociada.

Demostración:

Notemos primero que la condición es suficiente, pues toda sucesión asociada a una función f, y en particular a w_M, es logarítmicamente convexa: si $p \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\log M_{p+1}^{[w_M]} + \log M_{p-1}^{[w_M]} &= \sup_{r>0}((p+1)\log r - w_M(r)) \\ &+ \sup_{r>0}((p-1)\log(r) - w_M(r)) \\ &\geq 2\sup_{r>0}(p\log r - w_M(r)) = 2\log M_p^{[w_M]},\end{aligned}$$

por tanto $(M_p^{[w_M]})^2 \leq M_{p+1}^{[w_M]} M_{p-1}^{[w_M]}$.

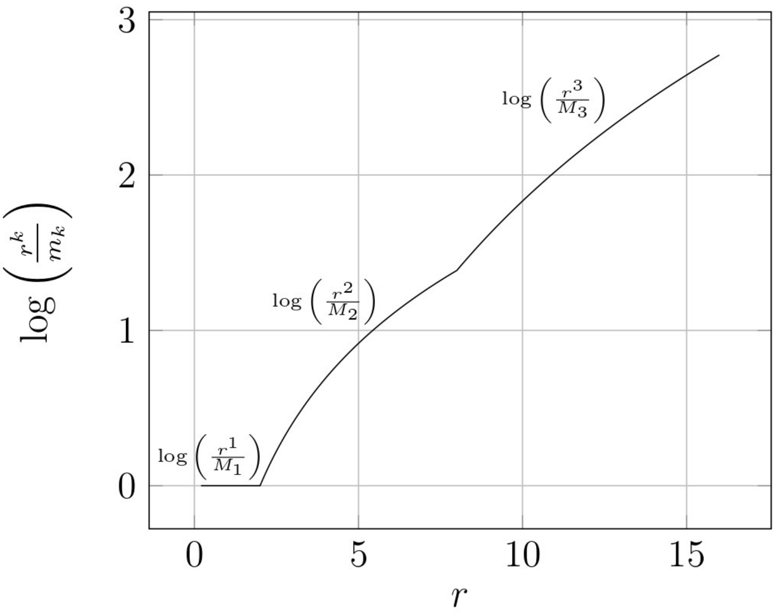

Figura 2.1: Gráfica de $\log\left(\frac{r^k}{M_k}\right)$ para $k = 0, 1, 2$ con $M_k = 2^{k^2}$.

Recíprocamente, supongamos que $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ es logarítmicamente convexa. Podemos escribir $w_M(r) = \log \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{r^p}{M_p}$. Ahora bien, tenemos que

$$\frac{r^p}{M_p} \leq \frac{r^{p+1}}{M_{p+1}}$$

si, y solo si, $r \geq \frac{M_{p+1}}{M_p} = m_{p+1}$. Como $\{m_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ es creciente, la función w_M se puede dar de manera explícita teniendo en cuenta que para r en cada uno de los intervalos $[m_{p-1}, m_p)$ los cocientes $\frac{r^q}{M_q}$ crecerán hasta alcanzar su máximo en la posición p, y serán decrecientes a partir de ella. Por lo tanto, $w_M(r) = \log(\frac{r^p}{M_p})$ si $r \in [m_{p-1}, m_p)$ con $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, y $w_m(r) = 0$ si $r \in (0, m_1)$ (ver figura 2.1). Con esta expresión es claro que $\text{lím}_{r\to\infty} \frac{w_M(r)}{\log(r)} = \infty$, lo que asegura que su sucesión asociada está bien definida. Si llamamos $\{M_p^*\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ a la sucesión asociada a la función asociada a $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$, recordemos que $\log M_p^* = \sup\limits_{r>0}(p\log r - w_M(r))$. Ahora bien, $r^p e^{-w_M(r)} = r^{p-q}M_q$ si $r \in [m_{q-1}, m_q)$, y es inmediato que esta función crece si $r \leq m_{p-1}$, es constante igual a M_p si $r \in [m_{p-1}m_p)$, y decrece si $r \geq m_p$, entonces su valor máximo es M_p, como queríamos ver. ∎

Veamos ahora algunos ejemplos de sucesiones y qué propiedades verifican de las que hemos listado.

Ejemplos 2.21. **(i) Potencias del factorial:** Consideramos la sucesión $M_p = p!^{1/\alpha}$ para $\alpha > 0$ y veamos que verifica la convexidad logarítmica, la estabilidad por operadores ultradiferenciales y la no trivialidad si $0 < \alpha < 2$. En primer lugar estimemos con cotas por encima y por debajo el tamaño de su sucesión asociada. Recordemos que $p^p \geq p! \geq \frac{p^p}{e^p}$. Así,

$$w_M(r) = \sup_{p\in\mathbb{N}_0}(p\log(r) - \log(p!^{1/\alpha}) geq \sup_{p\in\mathbb{N}_0}(p\log(r) - \frac{p}{\alpha}\log(p)).$$

Ahora consideremos $h(p) = p\log(r) - \frac{p}{\alpha}\log(p)$ y derivemos para hallar su máximo, $h'(p) = \log(r) - \frac{1}{\alpha}\log(p) - \frac{1}{\alpha}$, así el máximo se alcanza en $p = \frac{r^\alpha}{e}$. Como el supremo se calcula en los naturales y este p puede no serlo, entonces sustituimos tomando la parte entera (por defecto) y resulta que

$$\begin{aligned} w_M(r) &\geq \left[\frac{r^\alpha}{e}\right]\log(r) - \frac{\left[\frac{r^\alpha}{e}\right]}{\alpha}\log\left(\left[\frac{r^\alpha}{e}\right]\right) \\ &\geq \left(\frac{r^\alpha}{e\alpha} - 1\right)\log(r) - \frac{r^\alpha}{e\alpha}(\log(\frac{r^\alpha}{e}) = \frac{r^\alpha}{e} - \log(r). \end{aligned}$$

Recíprocamente,

$$w_M(x) \leq \sup_{p\in\mathbb{N}_0}(p\log(r) - \frac{p}{\alpha}\log(p/e)).$$

Considerando $h(p) = (p\log(r) - \frac{p}{\alpha}\log(p/e)$ y derivando, se tiene que esta función alcanza su máximo en $p = r^\alpha$, así

$$w_M(x) \leq \sup_{p\in\mathbb{N}_0}(p\log(r) - \frac{p}{\alpha}\log(p/e)) \leq \sup_{p>0}(p\log(r) - \frac{p}{\alpha}\log(p/e)) = \frac{r^\alpha}{\alpha}.$$

Veamos ahora que verifica la estabilidad por operadores diferenciales, la convexidad logarítmica y la no trivialidad.

- **Convexidad logarítmica.** Observemos que para esta sucesión $p!^{2/\alpha} \leq (p+1)!^{1/\alpha}(p-1)!^{1/\alpha} = ((p+1)p)^{1/\alpha}(p-1)!^{2/\alpha} \iff p^{2/\alpha} \leq ((p+1)p)^{1/\alpha} \iff p^{1/\alpha} \leq (p+1)^{1/\alpha}$ que es cierto siempre que $\alpha \geq 0$
- **Estabilidad por operadores ultradiferenciales.** Buscamos una constante $H \geq 1$ para la que se verifique la siguiente desigualdad $(p+q)!^{1/\alpha} \leq H^{p+q} p!^{1/\alpha} q!^{1/\alpha}$. Como
$$\binom{p+q}{p} \leq 2^{p+q},$$
entonces
$$(p+q)!^{1/\alpha} \leq (2^{1/\alpha})^{p+q} p!^{1/\alpha} q!^{1/\alpha}.$$
- **No trivialidad.** Queremos encontrar un par de constantes $h > 0$ y $\eta > 1/2$ tales que $p!^{1/\alpha} \geq h^p p^{p\eta}$. Entonces,
$$p!^{1/\alpha} \geq \frac{p^{p/\alpha}}{e^{p/\alpha}},$$
luego $h = e^{-1/\alpha}$ y $\eta = \frac{1}{\alpha} > 1/2$.

(ii) Potencia de una constante: Consideramos la sucesión $M_p = B^p$ con $B > 0$ entonces se tiene que
$$w_M(r) = \sup_{p \in \mathbb{N}_0}(p \log(\frac{r}{B})),$$
ahora bien, entonces $w_M(r) = \infty$ si $r > B$ y $w_M(r) = 0$ si $r \leq B$. Veamos que efectivamente esta sucesión no genera una clase de Gelfand-Shilov. En primer lugar, $M_0 = B^0 = 1$ y $B^{2p} \leq B^{p+1}B^{p-1} = B^{2p}$. Además, $B^{p+q} \leq H^{p+q}B^pB^q = H^{p+q}B^{p+q}$ para toda constante $H \geq 1$. Sin embargo, no se da la condición de no trivialidad pues $B^p \geq h^p p^{p\eta} \iff B \geq hp^\eta$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$ lo que es absurdo pues para toda constante $h > 0$ y $\eta > 1/2$ existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que $B < hp^\eta$.

(iii) Función potencia: Tomemos ahora una función $f(r) = r^\alpha$ con $\alpha > 0$. Entonces
$$\log M_p^{[M]} = \sup_{r>0}(p \log r - r^\alpha).$$

Consideremos ahora la función $f(r) = p\log r - r^{\alpha}$ cuya derivada es $f'(r) = \frac{p}{r} - \alpha r^{\alpha-1}$. Entonces f alcanza un máximo en $r = (\frac{p}{\alpha})^{1/\alpha}$ luego

$$M_p^{[M]} = \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\frac{p}{\alpha}} e^{-\frac{p}{\alpha}}, \qquad M_0^{[M]} = 1.$$

Para concluir esta sección, veamos ahora un resultado elemental que simplifica en muchas ocasiones los razonamientos en este tipo de clases de funciones, al expresar las estimaciones propias de los espacios S en términos de la función asociada a una de las dos sucesiones intervinientes en la definición.

Proposición 2.22. Sean $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ sucesiones de números reales positivos, y supongamos que $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ satisface (M1)', entonces una función φ pertenece a $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ si, y solo si, existen constantes C, A y b positivas tales que

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leq CA^p M_p e^{-w_N(b|x|)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $w_N(r)$ es la función asociada a $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$.

Demostración:

En primer lugar, supongamos que $|\varphi^{(p)}(x)| \leq CA^p M_p e^{-w_N(b|x|)}$, entonces por definición de supremo y de función asociada se tiene que

$$e^{w_N(b|x|)} \geq \frac{|x|^q b^q}{N_q}$$

para cada $q \in \mathbb{N}_0$. Por tanto se tiene que

$$|x^q \varphi^{(p)}(x)| \leq |\varphi^{(p)}(x) e^{w_N(b|x|)} b^{-q} N_q| \leq CA^p b^{-q} M_p N_q.$$

Por otro lado, puesto que la exponencial es una función continua y creciente se tiene que

$$e^{\sup\limits_{p\geq 0}\log(\frac{|x|^q}{B^q\delta^q N_q})} = \sup_{p\geq 0}\{e^{\log(\frac{|x|^q}{B^q\delta^q N_q})}\} = \sup_{p\geq 0}\frac{|x|^q}{B^q\delta^q N_q},$$

de donde se deduce que

$$e^{w_N(|x|/(B\delta))} \leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|x|^q}{B^q\delta^q N_q}.$$

Por tanto, como $|x^q\varphi^{(p)}(x)| \leq \|\varphi\|_{A,B}A^pB^qM_pN_q$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que para todo $\delta > 1$

$$\begin{aligned} |\varphi^{(p)}(x)\sum_{q=0}^{\infty}\frac{|x|^q}{B^q\delta^qN_q}| &\leq \sum_{q=0}^{\infty}\frac{|x|^q|\varphi^{(p)(x)}|}{B^q\delta^qN_q} \\ &\leq \sum_{q=0}^{\infty}\frac{\|\varphi\|_{A,B}A^pB^qM_pN_q}{B^q\delta^qN_q} \\ &= \frac{\|\varphi\|_{A,B}A^pM_p\delta}{\delta-1}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leq \frac{\delta\|\varphi\|_{A,B}}{\delta-1}A^pM_pe^{-w_N(|x|/(B\delta))}.$$

■

2.1.2. Operaciones en los espacios de tipo Roumieu.

1. **Multiplicación por x.**

Comenzamos tratando la operación multiplicación por x en los espacios de tipo Roumieu de tipo S. Queremos dar condiciones para que el operador $\varphi(x) \mapsto \varphi(x)\cdot x$ esté bien definido y sea un operador continuo.

Teorema 2.23. Supongamos que $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ verifica (M2)', entonces la multiplicación por x es un operador continuo en $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$.

Demostración:
Denotemos al operador por T, es decir, $T(\varphi)(x) = x\varphi(x)$. En primer lugar observemos que el operador es evidentemente lineal pues si consideramos $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ y $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}$ entonces se tiene que

$$T(\lambda\varphi_1+\mu\varphi_2) = x(\lambda\varphi_1(x)+\mu\varphi_2(x)) = \lambda x\varphi_1(x)+\mu x\varphi_2(x) = \lambda T(\varphi_1)+\mu T(\varphi_2)$$

y lo es de igual manera si restringimos a $\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}$ para $A, B > 0$ constantes. Ahora bien, por el corolario 1.22 basta comprobar que fijadas constantes $A, B > 0$ existen constantes $A', B' > 0$ tales que $T(\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}) \subset \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A',B'}$ y que $T|_{\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}} : \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B} \to \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A',B'}$ es continuo (donde bastará comprobar que es acotado).

Así pues, fijemos $A, B > 0$ y consideremos $\varphi \in \mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p}$, entonces se tiene que

$$|x^q \varphi^{(p)}(x)| \leq \|\varphi\|_{A,B} A^p M_p B^q N_q$$

para todo $p, q \in \mathbb{N}_0$ y $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
|x^q T(\varphi)^{(p)}(x)| = |x^q (x\varphi(x))^{(p)}| &= \left| x^q \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{(k)} \varphi^{(p-k)} \right| \\
&= \left| x^q \left(\binom{p}{0} x\varphi^{(p)}(x) + \binom{p}{1} \varphi^{(p-1)}(x) \right) \right| \\
&\leq |x^{q+1} \varphi^{(p)}(x)| + |p x^q \varphi^{(p-1)}(x)| \\
&\leq \|\varphi\|_{A,B} A^p M_p B^{q+1} N_{q+1} + p\|\varphi\|_{A,B} A^{p-1} M_{p-1} B^q N_q \\
&\leq \|\varphi\|_{A,B} B A^p M_p B^q N_{q+1} + p\frac{\|\varphi\|_{A,B}}{A} A^p M_p B^q N_q \\
&\leq (BH + \frac{1}{A}) \|\varphi\|_{A,B} (2A)^p M_p (HB)^q N_q.
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $\|T(\varphi)\|_{2A,HB} \leq (BH + \frac{1}{A})\|\varphi\|_{A,B}$ donde hemos usado (M2)' y que $\binom{p}{k} \leq 2^p$ para todo $k \leq p$ en la penúltima desigualdad. De donde concluimos que $T(\mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p}) \subset \mathscr{S}_{2A,HB}^{M_p,N_p}$ y que $T|_{\mathscr{S}_{A,B}^{M_p,N_p}}$ es continuo por ser acotado. Y, por tanto, gracias al corolario 1.22 el operador multiplicación por x es continuo de $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ en sí mismo. ■

Observación 2.24. Cuando queramos probar, en general, que un operador es continuo entre espacios de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu seguiremos esta estructura de demostración. Primero veremos que es lineal, después veremos que la imagen de todo eslabón está contenida en algún eslabón del espacio al que queremos llegar y después que el operador restringido a estos eslabones es continuo.

Pasamos a ver qué ocurre con este operador cuando actúa sobre espacios de tipo W. En este caso como se trata de funciones enteras multiplicamos por $z = x + iy$. Comenzamos con un lema auxiliar.

Lema 2.25. Si $f \in \mathscr{C}^1$ es una función convexa entonces f es superaditiva, es decir, para todo $a, b > 0$ se tiene que

$$f(a) + f(b) \leq f(a + b).$$

Demostración:
Gracias a la convexidad de f se tiene que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

para todos $a < b < c$. Así, si tomamos $a = 0$, $b = x$ y $c = x + h$ entonces se tiene que

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

y haciendo tender h hacia 0 en ambos lados se deduce que $\frac{f(x)}{x} \leq f'(x)$. Por tanto, la función $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente pues $h'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \geq 0$. Por ser h creciente se tiene que

$$\frac{1}{a}f(a) \leq \frac{1}{a+b}f(a+b)$$

y que

$$\frac{1}{b}f(b) \leq \frac{1}{a+b}f(a+b)$$

cualesquiera que sean $a, b > 0$. Si ahora multiplicamos la primera desigualdad por a y la segunda por b y sumamos ambas se tiene que $f(a)+f(b) \leq f(a+b)$ cualesquiera que sean $a, b > 0$. ■

Teorema 2.26. La multiplicación por z es un operador continuo entre espacios de tipo W.

Demostración:
El operador T es evidentemente lineal siguiendo el mismo razonamiento que en 2.23. Sean por tanto $a, b > 0$ y $\varphi \in W_{a,b}^{f,g}$, entonces por definición de espacio de tipo W se tiene que

$$|\varphi(x+iy)| \leq \|\varphi\|_{a,b} e^{-f(ax)+g(by)}.$$

Por tanto, tenemos que

$$|T(\varphi)(z)| = |z\varphi(z)| \leq \|\varphi\|_{a,b}|z|e^{-f(ax)+g(by)} \leq \|\varphi\|_{a,b}e^{-f(ax)+g(by)}(|x|+|y|).$$

Ahora bien, por la convexidad de f y g tenemos que dados $\delta > 0$ y $\rho > 0$,

$$|x|e^{-f(ax)+f((a-\delta)x)} \leq |x|e^{-f(\delta x)}$$

y

$$|y|e^{g(by)} \leq |y|e^{-g(\rho y)}e^{g((b+\rho)y)},$$

sin embargo, tanto $|x|e^{-f(\delta x)}$ como $|y|e^{-g(\rho y)}$ permanecen acotados por unas constantes C_ρ y C_δ gracias al decrecimiento exponencial. Es decir,

$$|x|e^{-f(ax)} \leq C_\delta e^{-f((a-\delta)x)}$$

y

$$|y|e^{g(by)} \leq C_\rho e^{g((b+\rho)y)}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}|\psi(z)| &\leq \|\varphi\|_{a,b}(C_\delta e^{-f((a-\delta)\xi)}e^{g(b\eta)} + C_\rho e^{-f(ax)}e^{g((b+\rho)y)})\\ &\leq C' e^{-f((a-\delta)x)+g((b+\rho)y)},\end{aligned}$$

donde hemos usado que $a-\delta < a$, que $b+\rho > b$ y la monotonía de f y g, y donde $C' = \text{máx}\{\|\varphi\|_{a,b}C_\delta, \|\varphi\|_{a,b}C_\rho\}$.

Por tanto,

$$\|\psi\|_{a-\delta,b+\rho} \leq \text{máx}\{C_\delta, C_\rho\}\|\varphi\|_{a,b}.$$

De donde concluimos que $T(W^{f,g}_{a,b}) \subset W^{f,g}_{a-\delta,b+\rho}$ para $\delta,\rho > 0$ cualesquiera con $\delta < a$ lo que implica que el operador $T|_{W^{f,g}_{a,b}}$ es continuo por ser acotado. Y, por tanto, gracias al corolario 1.22 el operador multiplicación por z es continuo de $W^{f,g}$ en sí mismo. ■

2. **Multiplicación por una función.**

Estudiamos ahora si la multiplicación por una función adecuada da lugar a un operador continuo en las clases de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu. En el caso de los de tipo S, en [12] abordan primero el estudio en espacios que imponen restricciones de tipo $|x^q\varphi^{(p)}(x)| \leq C_q A^p M_p$ y después en los que imponen restricciones de tipo $|x^q\varphi^{(p)}(x)| \leq C_p B^q N_q$ para después con dichos resultados dar lugar a los que imponen ambas, los que hemos denotado $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ pero asociados a las sucesiones de Gevrey (o potencias del factorial). Estas sucesiones son particularmente buenas, en concreto su función asociada tiene un crecimiento preciso como hemos visto en los ejemplos. Veamos en qué condiciones podemos multiplicar por una función en dichos espacios.

Teorema 2.27. Supongamos que $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ verifica (M1) y que $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0} = \{p!^\alpha\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ para $\alpha > 0$. Sea f una función tal que para todo $a > 0$ existen K_a y L_a constantes de manera que

$$|f^{(q)}(x)| \leq K_a L_a^q M_q e^{w_N(a|x|)},$$

entonces el operador multiplicación por f transforma el espacio $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ en sí mismo. Es más, transforma de manera continua cada $\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}$ para $A,B > 0$ en $\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{(A+L_a),(\frac{1}{2B}-a)}$ (con $a < \frac{1}{2B}$) y es por tanto un operador continuo.

Demostración:

Sean $A, B > 0$ constantes, por la definición de las clases de Gelfand-Shilov se tiene que

$$|x^q \varphi(x)^{(p)}| \leq \|\varphi\|_{A,B} A^p B^q M_p N_q$$

y recordemos que gracias a la proposición 2.22 sabemos que entonces

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leq 2\|\varphi\|_{A,B} r A^p M_p e^{-w_N(\frac{1}{2B}|x|)}$$

tomando $\delta = 2 > 1$. Así pues,

$$\begin{aligned}
|(f\varphi)^{(p)}(x)| &\leq \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} |f^{(k)}(x)||\varphi^{(p-k)}(x)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} K_a L_a^k M_k e^{w_N(a|x|)} 2\|\varphi\|_{A,B} A^{p-k} M_{p-k} e^{-w_N(\frac{1}{2B}|x|)} \\
&= 2K_a \|\varphi\|_{A,B} A^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{L_a}{A}\right)^k M_k M_{p-k} e^{w_N(a|x|) - w_N(\frac{1}{2B}|x|)} \\
&\leq 2K_a \|\varphi\|_{A,B} (A + L_a)^p M_p e^{-w_N((\frac{1}{2B} - a)|x|)}
\end{aligned}$$

donde hemos usado en la última desigualdad que $w_N(x)$ es comparable con la función $x^{1/\alpha}$, de acuerdo con el ejemplo desarrollado en 2.21.(i). De nuevo, por la proposición 2.22 se tiene que

$$|x^q (f\varphi)^{(p)}(x)| \leq 2K_a \|\varphi\|_{A,B} (A + L_a)^p M_p (\frac{1}{2B} - a)^q N_q.$$

Así pues, $f\varphi \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{(A+L_a),(\frac{1}{2B}-a)}$ con $a < \frac{1}{2B}$ y

$$\|f\varphi\|_{(A+L_a),(\frac{1}{2B}-a)} \leq 2K_a \|\varphi\|_{A,B}$$

para todo $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}$ lo que implica que el operador es continuo de $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ en sí mismo. ∎

Veamos ahora qué pasa con este mismo operador sobre los espacios de tipo W. En este caso, multiplicamos por una función entera.

Teorema 2.28. Sea f una función entera que verifica que

$$|f(z)| \leq C e^{h(a_0 x) + g(b_0 y)} \qquad z = x + iy,$$

siendo $a_0, b_0 > 0$ constantes y $h(x), g(x)$ las funciones que definen $W^{h,g}$. Entonces, siempre que $a_0 < a$, el operador $\varphi \mapsto f\varphi$ para $\varphi \in W^{h,g}$ es un operador continuo.

Demostración:

De nuevo, como en 2.23, el operador T es evidentemente lineal. Sean $a, b > 0$ con $a_0 < a$, entonces si $\varphi \in W^{h,g}_{a,b}$ se tiene que

$$|\varphi(x+iy)| \leq \|\varphi\|_{a,b} e^{-h(ax)+g(by)}.$$

Así pues, teniendo en cuenta las cotas para la función f, se tiene que

$$|T(\varphi)| = |f(z)\varphi(z)| \leq C\|\varphi\|_{a,b} e^{h(a_0x)-h(ax)} e^{g(b_0y)+g(by)}.$$

Ahora bien, por la convexidad de las funciones h y g se tiene que

$$|f(z)\varphi(z)| \leq C\|\varphi\|_{a,b} e^{-h(a-a_0)+g(b+b_0)}.$$

Por tanto, se deduce que

$$\|f\varphi\|_{a-a_0,b+b_0} \leq C\|\varphi\|_{a,b}$$

y que el producto $f\varphi$ pertenece al espacio $W^{h,g}_{a-a_0,b+b_0}$, es decir, que $T(W^{h,g}_{a,b}) \subset W^{h,g}_{a-a_0,b+b_0}$ y que $T|_{w^{f,g}_{a,b}}$ es continuo. Podemos concluir entonces, gracias al corolario 1.22, que el operador es continuo de $W^{h,g}$ en sí mismo. ■

3. **Traslación.**

El siguiente operador que introducimos en los espacios de tipo Roumieu, concretamente en los de tipo S, es la traslación. Veamos que resulta ser un operador continuo en este tipo de espacios.

Teorema 2.29. El operador traslación es continuo entre espacios de tipo S.

Demostración:

Sea $h > 0$ y el operador de traslación T_h dado por $T_h(\varphi)(x) = \varphi(x-h)$, que es evidentemente lineal. Sean $A, B > 0$, si $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}$ se tiene que

$$|x^q \varphi^{(p)}(x)| \leq \|\varphi\|_{A,B} A^p M_p B^q N_q.$$

Así, se tiene que, si ponemos $x - h = y$,

$$\begin{aligned}
|x^q T_h(\varphi)^{(p)}(x)| &= |x^q \varphi^{(p)}(x-h)| = |(y+h)^q \varphi^{(p)}(y)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} |h|^{q-k} |y^k \varphi^{(p)}(y)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} |h|^{q-k} \|\varphi\|_{A,B} A^p M_p B^k N_k \\
&\leq \|\varphi\|_{A,B} A^p M_p N_q \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} |h|^{q-k} B^k \\
&\leq \|\varphi\|_{A,B} A^p M_p N_q (B + |h|)^q,
\end{aligned}$$

donde hemos usado en la tercera desigualdad que la sucesión $\{N_q\}_{q\in\mathbb{N}_0}$ crece. Por tanto,

$$\|T_h(\varphi)\|_{A,(|h|B+B^2)} \leq \|\varphi\|_{A,B},$$

de donde se deduce que $T_h(\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}) \subset \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,(B+|h|)}$ y que el operador $T_h|_{\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}}$ es continuo por ser acotado. Por tanto, gracias a 1.22 se tiene que T_h es continuo de $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ en sí mismo. ■

Teorema 2.30. El operador traslación es continuo entre espacios de tipo W.

Demostración:

Sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ y el operador T_{z_0} definido ahora como $T_{z_0}(\varphi)(z) = \varphi(z + z_0)$, que es obviamente lineal. Sean $a, b > 0$ y sea $\varphi \in W^{f,g}_{a,b}$, entonces

$$|\varphi(z)| \leq \|\varphi\|_{a,b} e^{-f(ax)+g(by)}$$

con $z = x + iy$. Por tanto, si ponemos $z + z_0 = w$ tenemos que

$$|T_{z_0}(\varphi)| = |\varphi(z + z_0)| = |\varphi(w)| \leq \|\varphi\|_{a,b} e^{-f(a(x+x_0))+g(b(y+y_0))}.$$

Ahora bien, por la subaditividad de f resultado del lema 2.25 se tiene que $-f(a(x+x_0)) \leq -f(ax) - f(ax_0)$. Por otro lado, si $y \geq b$ entonces $b(y+y_0) \leq y(b+y_0)$. Si $y \in [0, b]$ que es compacto, por ser g continua, sabemos que existe C_{y_0} de manera que $g(b(y + y_0)) \leq g(y(b + y_0)) + C_{y_0}$. Por tanto, para todo $y \geq 0$ se tiene que $g(b(y + y_0)) \leq g(y(b + y_0)) + C_{y_0}$. Así, podemos concluir que

$$|T_{z_0}(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{a,b} e^{-f(ax_0)+C_{y_0}} e^{-f(ax)+g(by)},$$

es decir, que

$$\|T_{z_0}(\varphi)\|_{a,b} \leq e^{-f(ax_0)+C_{y_0}}\|\varphi\|_{a,b}.$$

Deducimos así que $T(W^{f,g}_{a,b})_{z_0} \subset W^{f,g}_{a,b}$ y que el operador $T_{z_0}|_{W^{f,g}_{a,b}}$ es continuo por ser acotado. Por el corolario 1.22 se tiene que el operador traslación es continuo de $W^{f,g}$ en sí mismo. ■

4. **Dilatación.**

Pasamos ahora a tratar el operador dilatación. Nos centramos en los espacios de tipo S, donde este operador va a resultar continuo.

Teorema 2.31. El operador dilatación por $\lambda > 0$ es un operador continuo de $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ en sí mismo.

Demostración:

Consideremos $\lambda > 0$, el operador T es lineal. Sean constantes $A, B > 0$ y sea $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}$ y consideremos $\psi(x) = \varphi(\lambda x)$, entonces $\psi^{(p)}(x) = \lambda^p \varphi^{(p)}(\lambda x)$. Por tanto tenemos que, poniendo $\lambda x = y$

$$\begin{aligned}|x^q \psi^{(p)}(x)| &= |x^q \lambda^p \varphi^{(p)}(\lambda x)| = |\frac{y^q}{\lambda^q}\lambda^p \varphi^{(p)}(y)| \\ &\leq \|\varphi\|_{A,B}(\lambda A)^p M_p \Big(\frac{B}{\lambda}\Big)^q N_q.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|\psi\|_{\lambda A,\frac{B}{\lambda}} \leq \|\varphi\|_{A,B},$$

$T(\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}) \subset \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{\lambda A,\frac{B}{\lambda}}$ y $T|_{\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}}$ es continuo. Así, por el corolario 1.22 la dilatación por λ es un operador continuo de $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ en sí mismo. ■

Teorema 2.32. El operador dilatación por $\lambda > 0$ es un operador continuo de $W^{f,g}$ en sí mismo.

Demostración:

Consideremos $\lambda > 0$, el operador T es lineal. Sean constantes $A, B > 0$ y sea $\varphi \in W^{f,g}_{A,B}$, entonces

$$|\varphi(z)| \leq \|\varphi\|_{a,b} e^{-f(ax)+g(by)}$$

con $z = x + iy$. Entonces, tenemos que

$$|T(\varphi)| = |\varphi(\lambda z)| \leq \|\varphi\|_{a,b} e^{-f(a\lambda x)+g(b\lambda y)}.$$

Por tanto,

$$\|T(\varphi)\|_{\lambda a,\lambda b} \leq \|\varphi\|_{a,b},$$

$T(W^{f,g}_{a,b}) \subset W^{f,g}_{\lambda a,\lambda b}$ y el operador $T|_{W^{f,g}_{a,b}}$ resulta continuo por ser acotado. Por tanto, gracias al corolario 1.22 se tiene que el operador dilatación por λ es continuo de $W^{f,g}$ en sí mismo. ■

5. **Derivación.**

La última operación que trataremos antes de la transformada de Fourier en ambos tipos de espacios, tanto S como W, será la derivación.

Teorema 2.33. Supongamos que $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ verifica (M2)', entonces el operador derivación es un operador continuo de $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ en sí mismo.

Demostración:
El operador D es un operador lineal. Sean $A, B > 0$ constantes, por definición de las clases de Gelfand-Shilov de tipo S se tiene que

$$|x^p \varphi^{(q)}(x)| \leq \|\varphi\|_{A,B} A^p M_p B^q N_q.$$

Así pues, se tiene, en virtud de (M2)', que

$$\begin{aligned}|x^q D(\varphi)^{(p)}(x)| = |x^q \varphi^{(p+1)}(x)| &\leq \|\varphi\|_{A,B} A^{p+1} M_{p+1} B^q N_q \\ &\leq \|\varphi\|_{A,B} AH(HA)^p M_p B^q N_q.\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$\|\psi\|_{HA,B} \leq HA\|\varphi\|_{A,B},$$

que $T(\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}) \subset \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{HA,B}$ y que el operador $T|_{\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}}$ es un operador continuo por ser acotado. Así, por el corolario 1.22, el operador derivación es continuo de $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ en sí mismo. ■

Observación 2.34. El resultado anterior permite generalizar por inducción sobre el orden de derivación a cualquier derivada de orden superior.

Veamos cómo se comporta la derivación en los espacios de tipo W.

Teorema 2.35. El operador derivación es un operador continuo de $W^{f,g}$ en sí mismo.

Demostración:
El operador D es lineal. Sean $a, b > 0$ y sea $\varphi \in W^{f,g}_{a,b}$, entonces

$$|\varphi(z)| \leq \|\varphi\|_{a,b} e^{-f(ax)+g(by)}, \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

Por la Fórmula Integral de Cauchy, sabemos que

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt$$

siendo C_r el círculo de radio r centrado en z con $r < a$. Así pues, tenemos que

$$\begin{aligned}
|D(\varphi)| = |\varphi'(z)| &= |\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \max_{t \in C_r} \{|\varphi(t)|\} \int_0^{2\pi} \frac{|re^{it}|}{|(z + re^{it} - z)|^2} dt \\
&= \frac{1}{r} \max_{t \in C_r} \{|\varphi(t)|\} \leq \frac{\|\varphi\|_{a,b}}{r} e^{-f((x-r)a)+g((y+r)b)},
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado en la última desigualdad el no decrecimiento de las funciones f y g. Ahora bien, utilizando el mismo razonamiento que hicimos en 2.30, si x e y son suficientemente grandes entonces se tiene que $(x-r)a \geq (a-r)x$ y que $b(y+r) \leq (b+r)y$. Por tanto, tenemos que $-f((x-r)a) \leq -f((a-r)x) + K_r$ y que $g((y+r)b) \leq g(y(r+b)) + K'_r$, y en consecuencia

$$|D(\varphi)| = |\varphi'(z)| \leq \frac{\|\varphi\|_{a,b} e^{K'_r + K_r}}{r} e^{-f((a-r)x)+g((b+r)y)},$$

de donde deducimos que

$$\|D(\varphi)\|_{a-r,b+r} \leq \frac{e^{K'_r + K_r} \|\varphi\|_{a,b}}{r},$$

que $D(W^{f,g}_{a,b}) \subset W^{f,g}_{a-r,b+r}$ y que $D|_{W^{f,g}_{a,b}}$ es continuo por ser acotado. Por tanto, gracias al corolario 1.22 se tiene que la derivación es un operador continuo de $W^{f,g}$ en sí mismo. ■

2.1.3. Transformación de Fourier.

Comenzamos definiendo esta operación en su contexto más general ya que usualmente las definiciones varían ligeramente entre diferentes autores según dónde se prefiera situar la constante. Tomaremos concretamente la siguiente definición:

Definición 2.36. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ se define su **transformada de Fourier**, denotada por $\hat{f}$ o $\mathscr{F}(f)$, como la función

$$\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i w t} f(t)dt, \qquad w \in \mathbb{R}.$$

Manejaremos a lo largo del trabajo las propiedades que esta transformada tiene, teniendo en cuenta que estamos trabajando con funciones de la clase de Schwartz donde la transformada de Fourier es una biyección. Todas estas propiedades, por ejemplo cómo se transforman diferentes operaciones (productos por monomios, derivación, modulación...) por la transformada de Fourier, se darán por sabidas con el afán de no sobrecargar el texto. Todas han sido introducidas tanto en las asignaturas de *Análisis Real* y *Funciones generalizadas y sus aplicaciones* del *Grado en Matemáticas*, como en las asignaturas *Transformadas funcionales* y *Análisis armónico y wavelets* del *Máster en Matemáticas*. Sin embargo, una buena referencia para este tipo de cuestiones pueden ser los textos de C. Gasquet y G. Witomski [11], W. Rudin [29], D. Mitrea [21] o G. B. Folland [9]. Comenzamos por tratar la transformada de Fourier en los espacios de tipo S.

Teorema 2.37. Supongamos que $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (M2)' y (M1), que $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (M1) y que $M_pN_p \geq DL^p p!$. Entonces la transformada de Fourier es un operador continuo entre $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ y $\mathscr{S}^{N_p,M_p}$.

Demostración:
Gracias a la linealidad de la integral, sabemos que la transformada de Fourier es un operador lineal. Sean $A, B > 0$ constantes y $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}$, entonces, por definición, se tiene que

$$|x^q \varphi^{(p)}(x)| \leq \|\varphi\|_{A,B} A^p M_p B^q N_q, \qquad x \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{N}_0.$$

Recordemos que además $\varphi \in \mathscr{S}$, y por tanto, está bien definida su transformada de Fourier. La pregunta ahora es si podemos encontrar una cota como la anterior pero sustituyendo φ por $\hat{\varphi}$. Por las propiedades de la transformada de Fourier, se tiene que $\mathscr{F}(\varphi)^{(p)}(w) = \mathscr{F}((-2\pi i x)^p \varphi(x))(w)$. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} w^q \mathscr{F}(\varphi)^{(p)}(w) &= w^q \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i t)^p \varphi(t) e^{-2\pi i t} dt \\ &= (-2\pi i)^p \int_{\mathbb{R}} t^p \varphi(t) w^q e^{-2\pi i w t} dt. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $\varphi \in \mathscr{S}$, entonces $\lim_{t\to\pm\infty} t^m \varphi^{(n)}(t) = 0$ para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$. Podemos por tanto integrar por partes q veces para obtener

$$w^q \mathscr{F}(\varphi)^{(p)}(w) = (-2\pi i)^{p-q} \int_{\mathbb{R}} (t^p \varphi(t))^{(q)} e^{-2\pi i w t} dt,$$

luego

$$\begin{aligned}
|w^q \mathscr{F}(\varphi)^{(p)}(w)| &= (2\pi)^{p-q} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} (t^p \varphi(t))^{(q)} e^{-2\pi i w t} dt \Big| \\
&\leq (2\pi)^{p-q} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} |(t^p)^{(k)} \varphi^{(q-k)}(t)| dt \\
&= (2\pi)^{p-q} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\min\{p,q\}} \binom{q}{k} \frac{p!}{(p-k)!} |t^{p-k} \varphi^{(q-k)}(t)| dt \\
&= (2\pi)^{p-q} \sum_{k=0}^{\min\{p,q\}} \binom{q}{k} \frac{p!}{(p-k)!} \Big(\int_{-\infty}^{-1} |t^{p-k+2} \varphi^{(q-k)}| \frac{dt}{t^2} \\
&+ \int_{-1}^{1} |t^{p-k} \varphi^{(q-k)}(t)| dt + \int_{1}^{\infty} |t^{p-k+2} \varphi^{(q-k)}| \frac{dt}{t^2} \Big) \\
&\leq (2\pi)^{p-q} \sum_{k=0}^{\min\{p,q\}} \binom{q}{k} \frac{p!}{(p-k)!} 2 \|\varphi\|_{A,B} (A^{q-k} M_{q-k} B^{p-k+2} N_{p-k+2} \\
&+ A^{q-k} M_{q-k} B^{p-k} N_{p-k}).
\end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $H \geq 1$, las propiedades $(M2)'$ y $(M1)$, que $M_p N_p \geq D L^p p!$ y suponiendo sin pérdida de generalidad que $p \leq q$, pues sino basta intercambiar los papeles y las constantes aparecen cambiadas, deducimos que

$$\sum_{k=0}^{\min\{p,q\}} \binom{q}{k} \frac{p!}{(p-k)!} 2\|\varphi\|_{A,B}(A^{q-k}M_{q-k}B^{p-k+2}N_{p-k+2} + A^{q-k}M_{q-k}B^{p-k}N_{p-k})$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\min\{p,q\}} \binom{q}{k}\binom{p}{k} k! 2\|\varphi\|_{A,B}B^2H^3A^{q-k}M_{q-k}(BH^2)^{p-k}N_{p-k}$$
$$\leq 22^q\|\varphi\|_{A,B}B^2H^3A^qM_q(BH^2)^pN_p\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{k!}{M_kN_k}\frac{1}{(AH^2B)^k}$$
$$\leq 2\|\varphi\|_{A,B}B^2H^3(2A)^qM_q(BH^2)^pN_p\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{1}{(LABH^2)^k}$$
$$= \frac{2\|\varphi\|_{A,B}B^2H^3}{D}(2A)^qM_q(H^2B)^pN_p(1+\frac{1}{LABH^2})^p$$
$$= \frac{2\|\varphi\|_{A,B}B^2H^3}{D}(2A)^qM_q(BH^2+\frac{1}{LA}))^pN_p.$$

Por tanto, se tiene que

$$|w^q\mathscr{F}(\varphi)^{(p)}(w)| \leq \frac{2\|\varphi\|_{A,B}B^2H^3}{D}\left(\frac{A}{\pi}\right)^q M_q(2\pi(BH^2+\frac{1}{LA}))^pN_p$$

lo que implica que

$$\|\mathscr{F}(\varphi)\|_{2\pi(BH^2+\frac{1}{LA}),\frac{A}{\pi}} \leq \frac{2B^2H^3}{D}\|\varphi\|_{A,B},$$

que $\mathscr{F}(\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}) \subset \mathscr{S}^{N_p,M_p}_{2\pi(BH^2+\frac{1}{LA}),\frac{A}{\pi}}$ y que $\mathscr{F}|_{\mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}}$ es continuo por ser acotado. Así, por el corolario 1.22 se tiene que la transformada de Fourier es un operador continuo entre $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ y $\mathscr{S}^{N_p,M_p}$. ■

A continuación haremos el estudio de la transformada de Fourier en los espacios de tipo W. Para ello, necesitamos introducir el concepto de funciones duales en el sentido de Young. Una referencia para esta teoría puede ser el tercer tomo de la obra de I. M. Gelfand y G. E. Shilov [13], que trata este tipo de espacios y sus aplicaciones. Para la teoría de funciones convexas y la dualidad en sentido Young una opción puede ser el texto de J. M. Borwein y A. S. Lewis [2].

Definición 2.38. Dada $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ una función continua y creciente con $f(0) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{f(x)} = 0$, definimos su **transformada de Young**

o **conjugada de Young** $F^* : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por

$$f^*(x) = \sup_{r \geq 0}(rx - f(r))$$

Observación 2.39. En primer lugar observamos que la transformada de Young está bien definida: si tomamos $r = 0$ entonces $rx - f(r)$ es 0. Por otro lado, si hacemos r tender hacia infinito, como $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{f(x)} = 0$ existe un $r(x) > 0$ tal que $rx - f(r) < 0$ si $r > r(x)$, por tanto, el supremo es finito.

El resultado fundamental acerca de la transformada de Young es el teorema de biconjugación de Fenchel presentado en [2]. Se puede encontrar la demostración así como la teoría necesaria para desarrollarla en esta referencia. Nos limitaremos a presentar el teorema y a ilustrar de qué modo vamos a utilizarlo.

Definición 2.40. Diremos que una función f es **cerrada** si su epigrafo, dado por $\{(x, y) \colon y \geq f(x)\}$, es un conjunto cerrado en el plano.

Teorema 2.41. Dada una función h son equivalentes:

(i) h es cerrada y convexa.

(ii) $h = h^{**}$.

(iii) $h(x) = \sup\{\alpha(x) : \alpha \text{ es un minorante afín de } h\}$.

Observación 2.42. En este contexto, si asumimos que f^* sea la conjugada de Young de f entonces se tiene la desigualdad de Young

$$f(x) + f^*(y) \geq f(x) + xy - f(x) = xy, \tag{2.2}$$

que se deduce de la definición de la transformada de Young. Es más, si f es continua, para cada x existe un $y(x)$ de manera que la desigualdad se convierte en una igualdad.

Lema 2.43. Consideremos funciones convexas f y g y supongamos que $f(x) \leq g(x)$ para valores suficientemente grandes de x, entonces $f^*(y) \geq g^*(y)$ para valores de y suficientemente grandes.

Demostración:

Supongamos que se tiene $f(x) \leq g(x)$ para $x > x_0$. Busquemos el valor y, que dependerá de x_0 tal que se tiene $xy = g(x) + f^*(y)$. Para los mismos x e y se tendrá que $xy = f(x) + g^*(y)$. Por tanto,

$$g(x) - f(x) + g^*(y) - f^*(y) \geq 0,$$

luego se tiene que $0 \leq f(x) - g(x) \leq f^*(y) - g^*(y)$ como queríamos probar. ■

Definición 2.44. Diremos que dos funciones f y g de clase $\mathcal{C}^1$ en $[0, \infty)$, con derivada no negativa y que crece tendiendo a infinito en infinito, y que verifican que $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$, son **duales en sentido de Young** si sus derivadas son inversas respecto de la composición la una de la otra, es decir, si $f'(g'(x)) = x$ para todo $x \in [0, \infty)$.

Observación 2.45. Si fuera necesario evaluar las funciones en valores negativos asumimos la extensión de las mismas por paridad: $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$ para todo $x \in [0, \infty)$. Un ejemplo de funciones que son duales en sentido de Young son las funciones $f(x) = \frac{x^p}{p}$ y $g(y) = \frac{y^q}{q}$ si $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, pues $f'(x) = x^{p-1}$ y $g'(y) = y^{q-1}$, luego $f'(g'(y)) = y^{pq-p-q+1} = y$.

Observemos además, que siempre que se tengan las condiciones de regularidad que asumimos sobre las funciones peso en los espacios de tipo W, es decir, derivables con continuidad y de derivada creciente y no negativa que tiende a infinito en infinito, entonces la transformada de Young será una función continua y derivable, ver [27, p. 259–261]. Es más, $(f^*)'(x) = (f')^{-1}(x)$ y si f y g son duales en sentido de Young, querrá decir que $f^* = g$. Para deducir esto basta observar que si estudiamos $rx - f(r)$ como función en r y derivamos para hallar su máximo, obtenemos que $x - f'(r) = 0$. Ahora bien, si suponemos (sin pérdida de generalidad) que $f'(x)$ es invertible, para cada x existirá un $p(x)$ tal que $x = f'(p(x))$. Por tanto, $f^*(x) = xp(x) - f(p(x))$, y si derivamos ahora con respecto de x la expresión, se tiene que $(f^*)'(x) = p(x) + xp'(x) - f'(p(x))p'(x) = p(x) = (f')^{-1}(x)$.

Pasamos a estudiar el comportamiento de la transformada de Fourier en los espacios de tipo W con las herramientas que acabamos de desarrollar sobre la conjugada de Young.

Teorema 2.46. Sean f y g funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en $[0,\infty)$, con derivada no negativa y que crece tendiendo a infinito en infinito, y tales que $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$, y sean $a, b > 0$ constantes. Entonces, se tiene que la transformada de Fourier es un operador continuo de $W^{f,g}$ en W^{g^*,f^*}.

Demostración:

Ya hemos definido la transformada de Fourier en valores reales, como suele ser estándar, pasamos ahora a dar significado a la expresión $\mathscr{F}(\varphi)(w+it) = \hat{\varphi}(w+it)$ definida de la siguiente manera

$$\hat{\varphi}(w+it) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2\pi i(w+it)x} dx. \tag{2.3}$$

Veamos que dichas integrales convergen absolutamente. Puesto que f es convexa y su derivada tiende a infinito en infinito entonces $e^{f(ax)}$ tiende hacia infinito más rápido que $e^{\lambda x}$ para todo $\lambda > 0$. Así,

$$|\hat{\varphi}(w+it)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| e^{2\pi tx} dx \leq 2\|\varphi\|_{a,b} \int_0^\infty e^{2\pi tx - f(ax)} dx < \infty$$

donde hemos usado en la segunda desigualdad que $f(x) = f(-x)$. Ahora bien, si consideramos una banda en la parte imaginaria, digamos $|y| \leq y_0$, entonces, por ser $\varphi \in W^{f,g}_{a,b}$, se tiene que en dicha banda φ decrece de manera exponencial hacia 0 si hacemos $|x| \to \infty$. Así pues, entendiendo

$$\hat{\varphi}(w+iu) = \lim_{s\to\infty} \int_{-s}^{s} \varphi(x) e^{-2\pi i(w+iu)x} dx,$$

podemos intercambiar la integración sobre la recta real por cualquier otra recta horizontal en el plano complejo gracias al teorema de los residuos. Para ello, basta tomar el rectángulo formado por el segmento $[-s, s]$ y su homólogo en la recta en la que se quiere integrar y tomar los segmentos verticales que los unen. Gracias a la acotación sobre φ, cuando tomamos límites en las integrales los segmentos verticales no aportan a la integral y entonces la integral a lo largo de la recta real y de la recta deseada se igualan. Para ver esta afirmación basta mencionar que por ser $\varphi(x)e^{-2\pi iwx}$ analítica en $\mathbb{C}$ entonces la integral sobre este rectángulo R será 0 por el teorema de Cauchy-Goursat. Por tanto, la suma de las integrales a lo largo de los cuatro segmentos es 0. Ahora bien, si parametrizamos el segmento vertical $[s, s+iy_0]$ por $h(t) = s + it$ si $t \in [0, y_0]$, el otro se razona igual, entonces

$$\int_{[s,s+iy_0]} \varphi(x) e^{-2\pi i(w+iu)x} dx = i \int_0^{y_0} \varphi(s+it) e^{-2\pi i(w+iu)(s+it)} dt.$$

Tomando valores absolutos deducimos que

$$|\int_0^{y_0} \varphi(s+it)e^{-2\pi i(w+iu)(s+it)}dt| \leq \int_0^{y_0} e^{-f(as)}e^{g(bt)}e^{2\pi(wt+us)}dt,$$

pero como $e^{g(bt)+2\pi(wt)}$ es una función continua en $[0, y_0]$ entonces está acotada y se deduce que

$$|\int_0^{y_0} \varphi(s+it)e^{-2\pi i(w+iu)(s+it)}dt| \leq y_0 K e^{2\pi us - f(as)}.$$

Si ahora tomamos límites en s tendiendo hacia infinito se tiene que

$$|\int_{[s,s+iy_0]} \varphi(x)e^{-2\pi i(w+iu)x}dx| \leq 0$$

pues ya sabemos que $e^f(ax)$ tiende hacia infinito más rápido que $e^{\lambda x}$ para todo $\lambda > 0$. Gracias a este argumento podemos intercambiar la recta de integración por la recta $y = y_0$ para escribir

$$\hat{\varphi}(w+it) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+iy_0)e^{-2\pi i(w+it)(x+iy_0)}dx.$$

Podemos por tanto deducir que

$$\begin{aligned}|\hat{\varphi}(w+it)| &\leq \|\varphi\|_{a,b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(ax)+g(by_0)}e^{2\pi(y_0 w + xt)}dx \\ &\leq \|\varphi\|_{a,b} e^{wy_0+g(by_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(ax)+|2\pi x||t|}dx.\end{aligned}$$

Ahora bien si tomamos $2a > \delta > 0$, y haciendo uso de la desigualdad de Young (2.2) se tiene que $\frac{|2\pi t|}{a-2\delta}|x|(a-2\delta) \leq f((a-2\delta)x) + f^*(\frac{2\pi t}{a-2\delta})$, y por tanto,

$$\begin{aligned}|\hat{\varphi}(w+it)| &\leq \|\varphi\|_{a,b} e^{wy_0+g(by_0)} e^{f^*(\frac{2\pi t}{a-2\delta})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(ax)+f((a-\delta)x)}dx \\ &\leq \|\varphi\|_{a,b} e^{wy_0+g(by_0)} e^{f^*(\frac{2\pi t}{a-2\delta})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f((a-\delta)x)+f((a-2\delta)x)}dx \\ &\leq \|\varphi\|_{a,b} e^{wy_0+g(by_0)} e^{f^*(\frac{2\pi t}{a-2\delta})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(\delta x)}dx\end{aligned}$$

donde hemos usado que f es superaditiva por ser convexa, es decir, que $f((a-2\delta)x)+f(\delta x) \leq f((a-\delta)x) \implies f((a-2\delta)x)-f((a-\delta)x) \leq f(-\delta x)$. Además, la integral es finita gracias al decrecimiento exponencial, luego

$$|\hat{\varphi}(w+it)| \leq C_\delta \|\varphi\|_{a,b} e^{wy_0+g(by_0)} e^{f^*(\frac{2\pi t}{a-2\delta})}.$$

Por otro lado, para acotar el otro término, ya que y_0 hasta el momento era arbitrario, tomamos el signo de y_0 de manera que $-wy_0 = |w||y_0|$ y su valor absoluto de manera que se de la igualdad en la desigualdad de Young (2.2), es decir,

$$|w||y_0| = \left|\frac{w}{b}\right||y_0|b = g(by_0) + g^*\left(\frac{w}{b}\right).$$

Así,

$$wy_0 + g(by_0) = -|w||y_0| + g(by) = -g^*\left(\frac{w}{b}\right).$$

Por tanto, podemos concluir que

$$|\hat{\varphi}(w+it)| \leq C_\delta \|\varphi\|_{a,b} e^{-g^*(\frac{w}{b})} e^{f^*(\frac{2\pi t}{a-2\delta})}.$$

Por tanto, tenemos que

$$\|\hat{\varphi}\|_{\frac{2\pi}{a(a-2\delta)},1/b} \leq C_\delta \|\varphi\|_{a,b},$$

que

$$\mathscr{F}(W_{a,b}^{f,g}) \subset W^{g^*,f^*}_{\frac{2\pi}{a(a-2\delta)},1/b}$$

y que $\mathscr{F}|_{W_{a,b}^{f,g}}$ es un operador continuo. Así pues, por el corolario 1.22 se tiene que la transformada de Fourier es un operador continuo de $W^{f,g}$ en W^{g^*,f^*}. ■

Observación 2.47. Observemos que escribir W^{g^*,f^*} es perfectamente correcto, pues las funciones g^* y f^* son crecientes por ser integral de la inversa de la derivada de g y f respectivamente que eran crecientes y sus derivadas, que ya hemos visto en la observación 2.45 estaba bien definida, es también creciente por el mismo motivo. Además, tanto g^* como f^* y sus derivadas valen 0 en 0 pues en un caso estamos integrando de 0 a 0 y en otro buscamos el valor inverso de la derivada en 0, que es 0.

2.1.4. Definición vía la transformada de Fourier.

Presentamos ahora algunos resultados relativos a como caracterizar los espacios de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu de tipo S y W vía la transformada de Fourier. El espacio de Schwartz se caracteriza por las cotas

$$\sup_x |x^\alpha \varphi(x)| < \infty \qquad \sup_\xi |\xi^\beta \hat{\varphi}(\xi)| < \infty, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0,$$

en las que no intervienen las derivadas sucesivas de φ y aparecen en cambio cotas para $\hat{\varphi}$ tal y como se menciona en [6]. Buscamos replicar o generalizar estas cotas para las que nos definen las clases de Gelfand-Shilov y poder manejar la transformada de Fourier en lugar de las derivadas de las funciones.

1. **Caracterizaciones de los espacios de Gelfand-Shilov de tipo S.**

Definición 2.48. Dadas $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ dos sucesiones de números reales positivos, decimos que son **equivalentes** si existen $L, L', C, C' > 0$ constantes tales que

$$M_p \leq CL^p N_p \text{ y } N_p \leq C'L'^p M_p.$$

Lema 2.49. Supongamos que $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifican (M2)'. Una función φ pertenece a $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ si, y solo si, existen C, A y B constantes positivas tales que

$$\|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_2 \leq CA^pB^qM_pN_q, \qquad p, q \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración:
Supongamos que $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}$, es decir, que existen A y B tales que $\sup_x |x^q\varphi^{(p)}(x)| \leq \|\varphi\|_{A,B}A^pB^qM_pN_q$. Entonces por las desigualdades de Hölder y Minkowski se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_2^2 &\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_\infty \|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_1 \\
&\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_\infty \|(1+x^2)^{-1}\|_1 \|(1+x^2)x^q\varphi^{(p)}(x)\|_\infty \\
&= \pi\|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_\infty \|(1+x^2)x^q\varphi^{(p)}(x)\|_\infty \\
&\underset{\text{Minkowski}}{\leq} \pi\|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_\infty \big(\|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_\infty + \|x^{q+2}\varphi^{(p)}(x)\|_\infty\big) \\
&\leq \pi\|\varphi\|_{A,B}A^pB^qM_pN_q(\|\varphi\|_{A,B}A^pB^qM_pN_q \\
&+ \|\varphi\|_{A,B}A^pB^{q+2}M_pN_{q+2}).
\end{aligned}$$

Por la estabilidad por operadores diferenciales tenemos que $N_{q+2} \leq H^{2q+3}N_q$, así

$$\begin{aligned}
\|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_2^2 &\leq \pi\|\varphi\|_{A,B}A^pB^qM_pN_q(\|\varphi\|_{A,B}A^pB^qM_pN_q \\
&+ \|\varphi\|_{A,B}B^2A^pB^qM_pH^{2q}H^3N_q) \\
&\underset{H\geq 1}{\leq} \pi\|\varphi\|_{A,B}^2(1+B^2H^3)A^{2p}(BH)^{2q}M_p^2N_q^2.
\end{aligned}$$

Recíprocamente supongamos que existen C, A y B tales que $\|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_2 \leq CA^pB^qM_pN_q$. Recordemos que

$$\hat{f}^{(p)}(w) = \mathscr{F}((-2\pi ix)^pf(x))(w),$$

que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ y notemos que

$$x^q f^{(p)}(x) = x^q \hat{\hat{f}}^{(p)}(-x) = x^q \mathscr{F}((-2\pi i t)^p \hat{f}(t))(-x),$$

integrando por partes q veces en la expresión anterior se obtiene que

$$x^q f^{(p)}(x) = (-1)^p (2\pi i)^{p-q} \mathscr{F}((t^p \hat{f}(t))^{(q)})(-x).$$

Por tanto, se tiene que

$$\|x^q \varphi^{(p)}(x)\|_\infty = \|(-1)^p (2\pi i)^{p-q} \mathscr{F}((t^p \hat{\varphi}(t))^{(q)})(-x)\|_\infty \leq (2\pi)^{p-q} \|(t^p \hat{\varphi}(t))^{(q)}\|_1.$$

Ahora bien,

$$\|(x^p \hat{\varphi}(x))^{(q)}\|_1 \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|(1+x^2)^{-1}\|_2 \|(1+x^2)(x^p \hat{\varphi}(x))^{(q)}\|_2.$$

Gracias a la manera en que hemos definido la transformada de Fourier sabemos, por el teorema de Plancherel que resulta ser una isometría biyectiva de $L^2(\mathbb{R})$ en sí mismo. Así pues, utilizando el teorema de Plancherel, la regla de Leibniz, la desigualdad de Minkowski y que

$$\mathscr{F}^{(k)}(\varphi)(x) = \mathscr{F}((-2\pi i t)^p \varphi(t))(x)$$

y que

$$\mathscr{F}(\varphi^{(p)}(t))(x) = (2\pi i x)^p \mathscr{F}(\varphi)(x),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x^2 (x^p \hat{\varphi}(x))^{(q)}\|_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \|(2\pi i x)^2 (x^q \mathscr{F}(\varphi(t))(x))^{(q)}\|_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \|(2\pi i x)^2 \Big(\frac{(2\pi i x)^p \mathscr{F}(\varphi(t))(x)}{(2\pi i)^p} \Big)^{(q)} \|_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \|(2\pi i x)^2 \Big(\frac{1}{(2\pi i)^p} \mathscr{F}(\varphi^{(p)}(t)) \Big)^{(q)} \|_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{p+2}} \|(2\pi i x)^2 \mathscr{F}^{(q)}(\varphi^{(p)}(t))(x)\|_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{p+2}} \|(2\pi i x)^2 \mathscr{F}((-2\pi i t)^q \varphi^{(p)}(t))(x)\|_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{p+2}} \|\mathscr{F}((-2\pi i t)^q \varphi^{(p)}(t))^{(2)}(x)\|_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{p+2}} \|(-2\pi i t)^q \varphi^{(p)}(t)^{(2)}(x)\|_2,
\end{aligned}$$

por tanto,

$$
\begin{aligned}
\|x^2(x^p\hat{\varphi}(x))^{(q)}\|_2 &= \frac{1}{(2\pi)^{p-q+2}}\|\binom{2}{0}x^q\varphi^{(p+2)}(x) + \binom{2}{1}qx^{q-1}\varphi^{(p+1)}(x) \\
&+ \binom{2}{2}q(q-1)x^{q-2}\varphi^p(x)\|_2 \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{p-q+2}}\Bigg(\|\binom{2}{0}x^q\varphi^{(p+2)}(x)\|_2 + \|\binom{2}{1}qx^{q-1}\varphi^{(p+1)}(x)\|_2 \\
&+ \|\binom{2}{2}q(q-1)x^{q-2}\varphi^p(x)\|_2\Bigg) \\
&\leq \frac{\|\varphi\|_{A,B}}{(2\pi)^{p-q+2}}\Big(A^{p+2}M_{p+2}B^qN_q + 22^qA^{p+1}M_{p+1}N_{q-1}B^{q-1} \\
&+ 2^{q-1}A^pM_pB^{q-2}N_{q-2}\Big) \\
&\leq \frac{2\|\varphi\|_{A,B}2^q}{(2\pi)^{p-q+2}}\Big(A^{p+2}M_{p+2}B^qN_q + A^{p+1}M_{p+1}N_{q-1}B^{q-1} \\
&+ A^pM_pB^{q-2}N_{q-2}\Big).
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que $N_q \leq N_{q+1}$ para todo q, (M2)' y que la constante H de (M2)' es mayor que 1, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|x^2(x^p\hat{\varphi}(x))^{(q)}\|_2 &\leq \frac{2\|\varphi\|_{A,B}2^qA^pB^qM_pN_q}{(2\pi)^{p-q+2}}(A^2H^3(H^2)^p + AHH^p\frac{1}{B} + \frac{1}{B^2}) \\
&\leq \frac{2\|\varphi\|_{A,B}(A^2H^3B^2 + AHB + 1)}{(2\pi B)^2}\Big(\frac{H^2A}{2\pi}\Big)^pM_p(4\pi B)^qN_q.
\end{aligned}
$$

Podemos por tanto concluir que

$$
\begin{aligned}
\|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_\infty &\leq (2\pi)^{p-q}\|(x^p\mathscr{F}(\varphi)(x))^{(q)}\|_1 \\
&\leq \frac{\|(1+x^2)^{-1}\|_2}{(2\pi)^{q-p}}\Big(\|(x^p\mathscr{F}(\varphi)(x))^{(q)}\|_2 + \|x^2(x^p\mathscr{F}(\varphi)(x))^{(q)}\|_2\Big) \\
&= (2\pi)^{p-q}\frac{\pi}{2}\Big(\frac{\|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_2}{(2\pi)^{p-q}} + \|x^2(x^p\mathscr{F}(\varphi)(x))^{(q)}\|_2\Big) \\
&\leq \frac{\pi\|\varphi\|_{A,B}M_pN_q}{2}\Big(A^pB^q \\
&+ \frac{2(A^2H^3B^2 + AHB + 1)(H^2A)^p(2B)^q}{(2\pi B)^2}\Big) \\
&\leq \frac{\pi\|\varphi\|_{A,B}K}{2}(A')^pM_p(B')^qN_q
\end{aligned}
$$

donde $K = \text{máx}(1, \frac{2(A^2H^3B^2+AHB+1)}{(2\pi B)^2})$, $A' = \text{máx}(A, H^2A$ y $\text{máx}(B, 2B)$ lo que prueba el recíproco. ■

Teorema 2.50. Dadas $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ sucesiones verificando las propiedades (M1)',(M2) y que existen $L, K > 0$ tales que $M_pN_p \geq KL^pp!$ entonces son equivalentes:

(i) $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}$.

(ii) Existen A, B y C constantes positivas tales que

$$\sup_x |x^q\varphi(x)| \leq CB^qN_q \qquad \text{y} \qquad \sup_x |\varphi^{(p)}(x)| \leq CA^pM_p$$

para todo p y q.

(iii) Existen A, B y C constantes positivas tales que

$$\sup_x |x^q\varphi(x)| \leq CB^qN_q \qquad \text{y} \qquad \sup_x |\xi^p\hat{\varphi}(\xi)| \leq CA^pM_p$$

para todo p y q.

Demostración:
$(i) \implies (iii)$: Recordemos que, por el teorema 2.37, sabemos que si se verifica (M1) para ambas sucesiones y (M2)' para $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ entonces $\mathscr{F}(\varphi) \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}$, pero si se tiene (M2) se tiene (M2)' por tanto estamos en las condiciones de dicho teorema. Así

$$|x^q\mathscr{F}^{(p)}(\varphi)(x)| \leq \|\mathscr{F}(\varphi)\|_{A,B}A^pM_pB^qN_q$$

para ciertas constantes $A, B > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ y $p, q \in \mathbb{N}_0$. Tomando $q = 0$ tenemos que

$$|\mathscr{F}^{(p)}(\varphi)(x)| \leq \|\mathscr{F}(\varphi)\|_{A,B}A^pM_p$$

para todo $p \in \mathbb{N}_0$ y todo $x \in \mathbb{R}$. Si tomamos $p = 0$ tenemos que

$$|x^q\mathscr{F}(\varphi)(x)| \leq \|\mathscr{F}(\varphi)\|_{A,B}B^qN_q$$

para todo $q \in \mathbb{N}_0$ y $x \in \mathbb{R}$ como queríamos probar.
$(iii) \implies (ii)$: Observemos que la condición

$$\sup_\xi |\xi^p\hat{\varphi}(\xi)| \leq CA^pM_p, \qquad p \in \mathbb{N}_0,$$

es equivalente a que

$$\sup_{\xi} |\hat{\varphi}(\xi)| \leq Ce^{-w_M(\frac{|x|)}{A})}.$$

Y por ser la sucesión logarítmicamente convexa sabemos que es la sucesión de definición de su función asociada gracias a la observación 2.20. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\varphi^{(p)}(x)| &\leq (2\pi)^p \int_{\mathbb{R}} |\xi^p \hat{\varphi}(\xi)| d\xi \\
&\leq (2\pi)^p C_1 \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p e^{-w_M(|\xi|/A)} d\xi \\
&\leq (2\pi)^p C_1 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \Big(|\xi|^{2p} e^{-w_M(|\xi|/A)} \Big)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} (e^{-w_M(|\xi|/A)})^{1/2} d\xi \\
&= (2\pi)^p C_1 M_{2p}^{1/2} A^p \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-w_M(|\xi|/A)}{2}} d\xi \\
&\leq C_2 M_{2p}^{1/2} A^p \\
&\leq C_2 (H^2 A)^p M_p
\end{aligned}$$

donde en la penúltima desigualdad hemos usado que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-w_M(|x|/A)} dx \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^p/A^p} dx$$

para todo p lo que implica que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-w_M(|x|/A)} dx \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|/A} dx = 2A$$

tomando $p = 1$. En la última desigualdad hemos usado (M2) de $\{M_p\}_{p \in \mathbb{N}_0}$.

$(ii) \implies (i)$: En primer lugar observamos que podemos trabajar con la norma $\|\cdot\|_2$ gracias al lema 2.49. Así pues, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la regla de Leibniz, integrando por partes y teniendo en cuenta que $\varphi \in \mathscr{S}$, y por tanto al multiplicarla por cualquier monomio su límite en infinito es 0, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} x^{2q}\varphi^{(p)}(x)\varphi^{(p)}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (x^{2q}\varphi^{(p)}(x))^{(p)}(x)\varphi(x)dx \\
&\underset{\text{Leibniz}}{=} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(2q)\dots(2q-k+1)x^{2q-k}\varphi(x)\varphi^{(2p-k)}(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(2q)\dots(2q-k+1) < x^{2q-k}\varphi(x), \varphi^{(2p-k)} > \\
&\leq \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(2q)\dots(2q-k+1)|< x^{2q-k}\varphi(x), \varphi^{(2p-k)} >| \\
&\leq \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(2q)\dots(2q-k+1)\|x^{2q-k}\varphi(x)\|_2\|\varphi^{(2p-k)}\|_2 \\
&\leq C^2B^{2q}A^{2p}\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(2q)\dots(2q-k+1)A^{-k}B^{-k}M_{2p-k}N_{2q-k}
\end{aligned}
$$

donde hemos usado Cauchy-Schwarz en la penúltima desigualdad. Teniendo en cuenta que de la convexidad logarítmica se deduce que $M_pM_q \leq M_{p+q}$ para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}_0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|x^q\varphi^{(p)}(x)\|_2^2 &\leq C^2B^{2q}A^{2p}M_{2p}N_{2q}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{2q}{k}\frac{k!}{M_kN_kA^kB^k} \\
&\leq C^2A^{2p}B^{2q}H^{2q}H^{2p}M_p^2N_q^2 2^{2q}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{1}{KL^k} \\
&\leq C^2A^{2p}B^{2q}H^{2q}H^{2p}M_p^2N_q^2 2^{2q}\frac{1}{K}\Big(1+\frac{1}{L}\Big)^p \\
&\leq \Big(\frac{C}{K^{1/2}}\Big)^2(AH(1+\frac{1}{L})^{1/2})^{2p}(2BH)^{2q}M_p^2N_q^2
\end{aligned}
$$

donde en la segunda desigualdad usamos que $M_pN_p \geq KL^pp!$ y la estabilidad por operadores diferenciales, y en la tercera hemos supuesto sin pérdida de generalidad que $2q \geq p$, pues si fuese el caso contrario entonces las constantes invertirían papeles y acotaríamos los números combinatorios en p en su lugar, y hemos tenido en cuenta que

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = 2^p.$$

Por tanto, $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}$.

$\blacksquare$

Corolario 2.51. Si $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ son sucesiones verificando (M1)' y (M2) tales que existen constantes K, L con $M_pN_p \geq KL^pp!$ entonces son equivalentes:

(i) $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}$.

(ii) Existen constantes positivas a y b tales que

$$\sup_x |\varphi(x)|e^{w_N(b|x|)} < \infty, \quad \sup_\xi |\hat{\varphi}(\xi)|e^{w_M(a|\xi|)} < \infty.$$

Demostración:
Repitiendo las cuentas que hemos hecho en el teorema deducimos que son equivalentes:

(i) Existen constantes a y b tales que

$$\sup_x |\varphi(x)|e^{w_N(b|x|)} < \infty, \quad \sup_\xi |\hat{\varphi}(\xi)|e^{w_M(a|\xi|)} < \infty.$$

(ii) Existen constantes C, A y B tales que

$$\sup_x |x^q\varphi(x)| \leq CB^qN_q, \quad \sup_\xi |\xi^p\hat{\varphi}(x)| \leq CA^pM_p.$$

Y por tanto, si $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}$ entonces se da (ii) y por tanto (i) por el teorema 2.50, y recíprocamente, si se da (i) se da (ii) y de nuevo por el teorema 2.50 se tiene que $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p,N_p}$. $\blacksquare$

2. **Caracterizaciones de los espacios de Gelfand-Shilov de tipo W.**

Tratamos ahora de dar una descripción en términos de la transformada de Fourier para las clases de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu de tipo W. Consideramos $f(x)$ y $g(y)$ funciones diferenciables en $[0,\infty)$ tales que $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$ cuyas derivadas son continuas, crecientes y tienden a infinito. A parte del estudio previo que hemos realizado para relacionar las sucesiones de definición y las funciones asociadas, necesitaremos los siguientes lemas a lo largo de la sección.

Definición 2.52. Decimos que dos funciones f y g son **equivalentes** si existen $L, L', C, C' > 0$ constantes tales que $f(x) \leq g(Lx) + C$ y $g(x) \leq d(L'x) + C'$.

Lema 2.53. Sea $f(x)$ una función tal que $f(0) = f'(0) = 0$ y cuya derivada es continua, creciente y tiende a infinito. Entonces la sucesión asociada $(M_p^{[f^*]})^* := M_p^*$ a la transformada de Young $f^*(x)$ de $f(x)$ es equivalente a $\frac{p!}{M_p}$, donde $M_p^{[f]} := M_p$ es la sucesión asociada a $f(x)$. De hecho, $M_p^* = \frac{p^p}{e^p M_p^{[f]}}$. En consecuencia M_p verifica las siguientes condiciones:

(i) (Convexidad logarítmica fuerte) $m_p = \frac{M_p}{M_{p-1}}$ es creciente y tiende hacia infinito.

(ii) (Dualidad) $\frac{p!}{M_p}$ verifica la condición de convexidad logarítmica fuerte.

Recíprocamente, si M_p es logarítmicamente convexa, $\frac{M_p}{M_{p-1}}$ es creciente y tiende a infinito y $\frac{pM_{p-1}}{M_p}$ es también creciente y tiende a infinito, entonces la función asociada $w_{M'}(x)$ a $M'_p = \frac{p!}{M_p}$ y la transformada de Young $w_M^*(x)$ de la función asociada $w_M(x)$ a M_p son equivalentes.

Demostración:

Como hemos visto en la observación 2.45, sabemos que

$$f^*(x) = \int_0^x (f')^{-1}(t)dt$$

donde $(f')^{-1}$ es la inversa de f'. Tomemos ahora $g(t) = t^p e^{-f^*(t)}$, buscamos los posibles máximos para $t > 0$. Tomando logaritmos, derivando e igualando a 0 obtenemos, gracias al teorema fundamental del cálculo, la ecuación

$$\frac{p}{t} = (f')^{-1}(t).$$

Sea t_0 la solución a la ecuación, que es única pues la parte izquierda tiende a infinito en 0 y decrece a 0 en infinito y la parte derecha a la inversa, entonces para $r_0 = \frac{p}{t_0}$ se tiene que $f'(r_0) = t_0$ pues $(f')^{-1}(t_0) = \frac{p}{t_0}$. Así, obtenemos que $r_0 f'(r_0) = p$, y por tanto,

$$f^*(f'(r_0)) = \sup_x (xf'(r_0) - f(x)) = r_0 f'(r_0) - f(r_0)$$

donde hemos usado que la función $h(x) = xf'(r_0) - f(x)$ alcanza el máximo en r_0 pues $h'(x) = f'(r_0) - f'(x)$. Recurriendo ahora a la definición de sucesión asociada a una función tenemos que

$$\begin{aligned} M_p^* &= \sup_{r>0}\Big(\frac{r^p}{e^{f^*(r)}}\Big) = \frac{t_0^p}{e^{f^*(t_0)}} = \frac{f'(r_0)^p}{e^{f^*(f'(r_0)))}} \\ &= \frac{f'(r_0)^p}{e^{r_0 f'(r_0) - f(r_0)}} = \frac{f'(r_0)^p}{e^{p - f(r_0)}} \\ &= \Big(\frac{p}{e}\Big)^p \frac{e^{f(r_0)}}{r_0^p} = \Big(\frac{p}{e}\Big)^p \frac{1}{M_p}. \end{aligned}$$

donde hemos usado en la penúltima desigualdad que $r_0^p f'(r_0)^p = p^p$. Hemos usado también en la última igualdad que

$$M_p = \sup_{r>0}\Big(\frac{r^p}{e^{f(r)}}\Big)$$

y la expresión $F(r) = \dfrac{r^p}{e^{f(r)}}$ alcanza su máximo en r_0 pues si tomamos logaritmos y derivamos obtenemos $(\log F)'(r) = \dfrac{p}{r} - f'(r)$ e igualando a 0 tenemos $\dfrac{p}{r} = f'(r)$ que se da en r_0. Además, se verifica la convexidad logarítmica fuerte gracias a que las sucesiones $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ y $\{\frac{p^p}{e^p M_p}\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ son sucesiones asociadas a funciones con propiedades adecuadas.

Recíprocamente, si tomamos $r, t > 0$ y tenemos en cuenta que $p^p \geq p!$ se tiene que

$$\begin{aligned} w_{M'}(r) + w_M(t) &= \sup_{p\in\mathbb{N}_0}\Big(\log\frac{t^p}{M_p}\Big) + \sup_{p\in\mathbb{N}_0}\Big(\log\frac{r^p M_p}{p!}\Big) \\ &\geq \sup_{p\in\mathbb{N}_0}\Big(\log\frac{t^p}{M_p} + \log\frac{r^p M_p}{p!}\Big) \\ &= \sup_{p\in\mathbb{N}_0}\Big(\log\frac{(tr)^p}{p!}\Big) \\ &\geq \sup_{p\in\mathbb{N}_0}\Big(\log\Big[\Big(\frac{tr}{p}\Big)^p\Big]\Big). \end{aligned}$$

Ahora bien la función $f(p) = \log(\frac{tr}{p})^p = p\log[(\frac{tr}{p})]$ alcanza su máximo cuando $f'(p) = \log(\frac{tr}{p}) - 1 = 0$, es decir, cuando $p = tr/e$. Sustituyendo se tiene

$$p\log(\frac{tr}{p}) = \frac{tr}{e}\log(\frac{tre}{tr}) = \frac{tr}{e}.$$

Por tanto, como $w_{M'} \geq \sup_{p\in\mathbb{N}_0}\Big(\log\Big[\Big(\frac{tr}{p}\Big)^p\Big]\Big) \geq \frac{tr}{e} - 1$ pues $\frac{tr}{e}$ no tiene porqué ser natural, tenemos que $w_{M'}(t) \geq \frac{tr}{e} - 1 - w_M(r)$, y tomando el supremo en r a la derecha, obtenemos que $w_{M'} \geq w_M^*(r/e)$. Ahora, por la observación 2.45 se tiene que

$$w_M^*(r) = \sup_{x>0}(rx - w_M(x)) = \sup_{x>0}\int_0^x \frac{rz - m(z)}{z}dz.$$

Tomando, $r = \frac{p}{m_p}$ y $x = m_p$ se deduce que

$$\begin{aligned}
w_M^*\Big(\frac{p}{m_p}\Big)p - \int_0^{m_p}\frac{m(z)}{z}dz& \\
&= p - \sum_{j=1}^{p-1}\int_{m_j}^{m_{j+1}}\frac{j}{z}dz = p - \sum_{j=1}^{p-1} j\log\Big(\frac{m_{j+1}}{m_j}\Big)\\
&= p - \Big(\log\Big(\frac{m_2m_3^2\dots m_p^{p-1}}{m_1m_2^2\dots m_{p-1}^{p-1}}\Big)\Big) = p + \log\Big(\frac{m_1m_2\dots m_{p-1}}{m_p^{p-1}}\Big)
\end{aligned}$$

donde hemos usado en la segunda igualdad que al ser $m_j \leq \lambda \leq m_{j+1}$ hay exactamente j elementos del tipo m_j tales que $\lambda \geq m_j$ por ser la sucesión m_j creciente.

Por otro lado, sea $m'(x)$ el número de $m'_p = \frac{p}{m_p}$ tales que $m'_p = \frac{p}{m_p} \leq x$. Entonces por la observación 2.45, tenemos que

$$\begin{aligned}
w_{M'}\Big(\frac{p}{m_p}\Big) &= \int_0^{p/m_p}\frac{m'(z)}{z}dz = \sum_{j=1}^{p-1}\int_{j/m_j}^{(j+1)/m_{j+1}}\frac{j}{z}dz\\
&= \sum_{j=1}^{p-1} j\log\Big(\frac{(j+1)m_j}{jm_{j+1}}\Big) = \log\Big(\frac{2m_13^2m_2^2\dots p^{p-1}m_{p-1}^{p-1}}{1m_22^2m_3^2\dots(p-1)^{p-1}m_p^{p-1}}\Big)\\
&= \log\Big(\frac{p^p}{p!}\frac{m_1\dots m_{p-1}}{m_p^{p-1}}\Big) \leq \log\Big(\frac{p^pe^p}{p^p}) + \log(\frac{m_1\dots m_{p-1}}{m_p^{p-1}}\Big)\\
&= p + \log\Big(\frac{m_1\dots m_{p-1}}{m_p^{p-1}}\Big)\\
&\leq w_M^*\Big(\frac{p}{m_p}\Big)
\end{aligned}$$

donde hemos usado en la segunda igualdad el mismo razonamiento que antes y en la primera desigualdad que $p^p \geq p! \geq \frac{p^p}{e^p}$. Por tanto, para todo $x > 0$ con $\frac{p}{m_p} < x < \frac{p+1}{m_{p+1}}$ tenemos que

$$w_M^*(x) \geq w_M^*(p/m_p) \geq w_{M'}(p/m_p) \geq w_{M'}\Big(\frac{p+1}{2m_{p+1}}\Big) \geq w_{M'}\Big(\frac{x}{2}\Big),$$

y podemos concluir pues las funciones $w_{M'}$ y w_M^* son equivalentes. ■

Teorema 2.54. Sean f y g funciones $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ con derivada positiva que tiende a infinito en infinito y tales que $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$. Sea $L > 0$ una constante tal que $f(x) \leq g(Lx)$, entonces el espacio $W^{f,g}$ está caracterizado por las cotas:

$$|\varphi(x)| \leq Ce^{-f(ax)}, \quad |\hat{\varphi}(\xi)| \leq Ce^{-g^*(b\xi)},$$

con a, b constantes.

Demostración:

Si $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ satisface las desigualdades del enunciado, entonces de la misma manera que en el teorema 2.50 se tiene que

$$\sup_x |x^q \varphi(x)| \leq CA^q M_q^{[f]}, \quad \sup_\xi |\xi^p \hat{\varphi}(\xi)| \leq CA^p M_p^{[g^*]}$$

para A y B constantes positivas y con $M_p^{[f]}$ y $M_p^{[g^*]}$ las sucesiones asociadas a $f(x)$ y $g^*(x)$ respectivamente. Así, las sucesiones $M_p^{[f]}$ y $M_p^{[g^*]}$ verifican las condiciones de convexidad logarítmica fuerte y dualidad por el lema 2.53. Además, la condición $f(x) \leq g(Lx)$ implica que $M_p^{[f]} M_p^{[g^*]} \geq KM^p p!$ para K y M constantes positivas pues

$$M_p^{[f]} = \sup_{r>0} \frac{r^p}{e^{f(r)}} \geq \sup_{r>0} \frac{r^p}{e^{g(Lr)}} = \frac{1}{L^p} \sup_{r>0} \frac{(Lr)^p}{e^{g(Lr)}} = \frac{1}{L^p} M_p^{[g]} \underset{2.53}{\geq} \frac{1}{K^p} \frac{p!}{M_p^{[g^*]}}.$$

Ahora bien, como (M1)' y (M1)* son más fuertes que (M1) y (M2) respectivamente entonces por el teorema 2.50 se tiene que $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p^{[g^*]}, M_p^{[f]}}$. Veamos ahora que $\mathscr{S}^{M_p^{[g^*]}, N_p^{[f]}} \subset W^{f,g}$. Sea $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p^{[g^*]}, M_p^{[f]}}$, entonces se tiene que

$$|x^q \varphi^{(p)}(x)| \leq \|\varphi\|_{A,B} A^p M_p^{[g^*]} B^q M_q^{[f]}$$

para ciertas constantes $A, B > 0$. Puesto que $\{M_p^{[f]}\}_{p \in \mathbb{N}_0}$ verifica (M1)* entonces para toda constante $L > 0$ existe $C > 0$ tal que $M_p^{[f]} \leq CL^p p!$, ya que al crecer hacia infinito los cocientes $\frac{p}{m_p}$ se tiene que para todo $L > 0$ existe $p_0 \in \mathbb{N}_0$ tañ que si $p \geq p_0$ entonces $\frac{p}{m_p} \geq L$. Así, $m_p \leq \frac{p}{L}$ y multiplicando desde p_0 hasta p tenemos $\frac{M_p}{M_{p_0-1}} \leq \frac{1}{L^{p-p_0+1}} \frac{p!}{(p_0-1)!}$, luego $M_p \leq C_0 \frac{1}{L^p} p!$ siendo $C_0 = \frac{L^{p_0-1} M_{p_0-1}}{(p_0-1)!}$. Además, si $p \leq p_0$ basta agrandar C_0 lo suficiente para mantener la cota. Así pues, la función φ se puede extender analíticamente al plano complejo como función entera ya que con las cotas que definen los espacios de Gelfand-Shilov junto con la que acabamos de deducir podemos acotar los coeficientes del desarrollo de Taylor de la función haciendo L arbitrariamente pequeño, de manera que al tomar el límite superior en p de las raíces p-ésimas de los módulos de estos coeficientes sea 0 y, por la fórmula de Cauchy-Hadamard, dicho desarrollo tenga radio de convergencia infinito. Aplicando ahora la expansión como serie de Taylor y la desigualdad resultado de que $\varphi \in \mathscr{S}^{M_p^{[g^*]}, M_p^{[f]}}$, se tiene que

$$\begin{aligned}|x^q\varphi(x+iy)| &\leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|x^q\varphi^{(p)}(x)|}{p!}|(x+iy-x)|^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|x^q\varphi^{(p)}(x)|}{p!}|(y)|^p \\ &\leq \|\varphi\|_{A,B} \sum_{p=0}^{\infty} A^p M_p^{[g^*]} B^q M_q^{[f]} \frac{|y|^p}{p!} \\ &\leq \|\varphi\|_{A,B} \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{M_p^{[g^*]} 2A|y|}{p!} B^q M_q^{[f]} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} \\ &= 2\|\varphi\|_{A,B} \exp(w_{p!/M_p^{[g^*]}}(2A|y|)) B^q M_q^{[f]}.\end{aligned}$$

Dividiendo ahora por $|x^q|$ y tomando el ínfimo en q se tiene que

$$\begin{aligned}|\varphi(x+iy)| &\leq 2\|\varphi\|_{A,B} \exp(w_{p!/M_p^{[g^*]}}(2A|y|)) \inf_{q\in\mathbb{N}_0} \frac{B^q M_q^{[f]}}{|x|^q} \\ &= 2\|\varphi\|_{A,B} \exp(-w_{M_p^{[f]}}(|x|/B) + w_{p!/M_p^{[g^*]}}(2A|y|)).\end{aligned}$$

Por el lema 2.53 se tiene que $w_{\frac{p!}{M_p}}$ y g^* son equivalentes, luego

$$w_{p!/M_p^{[g^*]}}(2A|y|) \leq w^*_{M_p^{[g^*]}}(A'|y|) \leq (g^*)^*(B''x) = g(B''x)$$

donde la última igualdad se tiene por verificar g las condiciones del teorema 2.41. Por tanto, tenemos que

$$|\varphi(x+iy)| \leq 2\|\varphi\|_{A,B} \exp(-f(|x|/B) + g(B''|y|))$$

por ser f equivalente a la función asociada de su sucesión de definición. ∎

2.1.5. Equivalencia entre los espacios de tipo S y de tipo W.

Sabemos, por lo estudiado en secciones anteriores, que se pueden definir espacios de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu en función de sucesiones y de funciones peso. La cuestión que nos planteamos ahora es: ¿bajo qué condiciones son estas clases equivalentes? Queremos estudiar que hipótesis deben cumplir tanto las sucesiones como las funciones para que existan, ya sean funciones en el caso de sucesiones o sucesiones en el caso de funciones, de manera que unos espacios y otros sean equivalentes. Es decir, el estudio de la equivalencia entre los espacios de tipo S y los de tipo W.

Definición 2.55. Una función no decreciente $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ se dice que es **admisible Gelfand-Shilov** si verifica las siguientes propiedades:

(AGS1) $f(r) = 0$ si $r \in [0,1]$.

(AGS2) Existe $\alpha \geq 1$ tal que $2f(r) \leq f(\alpha r)$ para todo $r \geq 0$.

(AGS3) $f \circ \exp$ es una función convexa.

(AGS4) Existen dos constantes positivas $C > 0$ y $2 > \beta > 0$ tales que $f(r) \leq C r^{\beta}$ para todo $r \geq 0$.

Proposición 2.56. Sea f una función admisible Gelfand-Shilov y $\{M_p^{[f]}\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ su sucesión asociada. Entonces $M_0 = 1$ y $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (M1), (M2) y (M4).

Demostración:
Puesto que $\log M_0^{[w_M]} = \sup_{r>0}(-w_M(r))$, que $-w_M(r)$ es no creciente (ver figura 2.1) y que $w_M(r) = 0$ si $r \in [0,1]$ entonces $\log M_0^{[w_M]} = 0$ lo que implica que $M_0^{[w_M]} = 1$. Por la proposición 2.20 sabemos que $\{M_p^{[f]}\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ es logarítmicamente convexa. Veamos ahora que se verifica (M2):

$$\begin{aligned}
\log M_{p+q}^{[f]} &= \sup_{r>0}(p\log r + q\log r - f(r)) \underset{(AGS2)}{\leq} \sup_{r>0}(p\log r + q\log r - 2f\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)) \\
&= \sup_{r>0}(p\log\frac{r}{\alpha} + p\log\alpha + q\log\frac{r}{\alpha} + q\log\alpha - 2f\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)) \\
&\leq \log\alpha^{p+q} + \sup_{r>0}\Big(p\log\frac{r}{\alpha} - f\Big(\frac{r}{\alpha}\Big) + \sup_{r>0}(q\log\frac{r}{\alpha} - f\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)\Big) \\
&= \log\alpha^{p+q} + \log M_p^{[f]} + \log M_q^{[f]},
\end{aligned}$$

lo que implica que $H = \alpha$ es la constante que andábamos buscando. Por último, veamos (M4): tenemos que

$$\log(M_p^{[f]}) = \sup_{r>0}(p\log r - f(r)) \underset{(AGS1)}{=} \sup_{r\geq 1}(p\log r - f(r)) = \sup_{t\geq 0}(pt - f(e^t)).$$

Sea $\delta > 0$ tal que $\beta + \delta > 2$ podemos econtrar $h > 0$ de manera que

$$\log(M_p^{[f]}) \underset{(AGS4)}{\geq} \sup_{t\geq 0}(pt - Ce^{\beta t}) = \frac{p}{\beta}(\log p - \log \beta C - 1) \geq \frac{p}{\beta+\delta}\log(p) + p\log(h)$$

para todo $p > \beta C$ pues la función $pt - Ce^{\beta t}$ alcanza un máximo en $\frac{\log \frac{p}{\beta C}}{\beta}$ si $p > \beta C$ si no se convierte en un mínimo. Notemos que basta con probar que la desigualdad es cierta para p suficientemente grande, pues el resto son una cantidad finita que podemos ajustar modificando la constante h de la siguiente manera:

Supongamos que $M_p \geq h^p p^{p\eta}$ para $p \geq p_0$. Entonces, veamos que podemos ajustar h para que se verifique para los anteriores, como la sucesión es no decreciente tenemos que $M_p \geq M_0 = 1$. Por tanto, si tomamos $\tilde{h} \leq \frac{1}{\text{máx}(0,\ldots,p_0-1)^\eta} \leq \frac{1}{p^\eta} \leq 1$ para todo $p < p_0$, entonces $M_p \geq 1 \geq \tilde{h}^p p^\eta$ y tomando $h' = \text{mín}(h, \tilde{h})$ se tiene la desigualdad buscada.

Así, para todo $\delta > 0$ existirá $p_\delta > C\beta$ tal que $\tilde{f}(p) \geq \dfrac{p}{\beta+\delta}\log p$ y por tanto si $1 > h > 0$ entonces $\tilde{f}(p) \geq \dfrac{p}{\beta+\delta}\log p > h^p\dfrac{p}{\beta+\delta}\log p$ si $p > p_\delta$. Además, como $\beta < 2$ podemos tomar δ tal que $\frac{1}{\beta+\delta} > 1/2$. ■

Veamos dos lemas auxiliares que serán necesarios para la posterior proposición.

Lema 2.57. Sean $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ dos sucesiones logarítmicamente convexas tales que

$$\lim_{p\to\infty} M_p^{1/p} = \lim_{p\to\infty} N_p^{1/p} = \infty.$$

Entonces la sucesión definida por $Q_p = \inf\limits_{0\leq q\leq p} M_{p-q}N_q$ es también logarítmicamente convexa. Además, si w_M, w_N y w_Q son las funciones asociadas entonces se tiene que

$$w_Q(r) = w_M(r) + w_N(r).$$

Demostración:

Notemos que, por ser el ínfimo, $Q_p \leq M'_{p-r}M_p$ para todo $0 \leq r \leq p$. Por tanto $Q_p^2 \leq (M'_{p-r})^2 M_p^2 \leq M'_{p-r+1}M_{p+1}M'_{p-r-1}M_{p-1}$ para todo $0 \leq r \leq p$. Si tomamos ínfimos en r a ambos lados, entonces

$$\begin{aligned} Q_p^2 &\leq \inf_{0\leq r\leq p} M'_{p-r+1}M_{p+1}M'_{p-r-1}M_{p-1} \\ &\leq \inf_{0\leq r\leq p} M'_{p-r+1}M_{p+1} \inf_{0\leq r\leq p} M'_{p-r-1}M_{p-1} \\ &= Q_{p+1}Q_{p-1}, \end{aligned}$$

y por lo tanto la sucesión Q_p es logarítmicamente convexa.

Veamos ahora que $w_Q(r) = w_M(r) + w'_M(r)$: dada $w_M(r)$ (idem para $w'_M(r)$) no decreciente y nula si $r \in [0,1]$, sea $m(r)$ el número de términos $m_p = \frac{M_p}{M_{p-1}}$ más pequeños que r. Se llama a $m(r)$ la función de distribución de m_p y

$$\begin{aligned} w_M(r) &= \sup_{p\geq 0} \sum_{q=1}^{p} (\log r - \log \frac{M_p}{M_{p-1}}) \\ &= \sum_{m_q \leq r} \log \frac{r}{m_q} \underset{2.20}{=} \int_0^r \frac{m(z)}{z} dz \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se tiene porque si $m_q > r$ entonces la fracción se hace cada vez más pequeña y buscamos el supremo (además, como log es continua y no decreciente puede intercambiarse con el supremo). Ahora observemos que $Q_p = Q_0 \inf_{q\leq p}\{m_1, \ldots, m_q, m'_1, \ldots, m'_{p-q}\}$, luego $\frac{Q_p}{Q_0} = q_p$ se obtiene ordenando $\{m_1, m_2, \ldots, m'_1, m'_2, \ldots\}$. Así, q_p es el número de términos m_p, m'_p que son más pequeños que r, es decir, $m(r) + m'(r)$ y se tiene que $w_Q(p) = w_M(r) + w'_M(r)$ utilizando la expresión integral. ■

Lema 2.58. Si $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión logarítmicamente convexa que verifica (M1)' y (M2) y w_M es la función asociada entonces

$$w_M(br) + w_M(cr) \leq w_M(ar)$$

para todo $b, c, r > 0$ con $a = H \max(b, c)$.

Demostración:

Notemos que su función asociada viene dada por $w_M(r) = \sup_{p\geq 0}(p \log r - \log M_p)$, así si tomamos $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ otra sucesión que verifique las condiciones y tal que $M_p \leq N_p$ entonces

$$w_M(r) = \sup_{p\geq 0}(p \log r - \log M_p) \geq \sup_{p\geq 0}(p \log r - \log N_p) = w_N(r)$$

para todo $r \geq 0$. Ahora bien, la sucesión cuya función asociada es $w_M(ar)$ no es más que $a^{-p}M_p$ pues

$$w_M(ar) = \sup_{p\geq 0}(p\log(a) + p\log r - \log M_p) = \sup_{p\geq 0}\Big(p\log r - \log\frac{M_p}{a^p}\Big).$$

Usando el lema 2.57 deducimos que la sucesión cuya función asociada es $w_M(br) + w_M(cr)$ es

$$\inf_{0\leq q\leq p} b^{-q}M_q c^{q-p}M_{p-q}.$$

Así, como

$$\frac{1}{b^q c^{p-q}} \geq \frac{1}{\max(b,c)^p},$$

entonces

$$\frac{\max(b,c)^p}{b^q c^{p-q}} \geq 1,$$

y como $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (M2) entonces

$$M_p \leq H^{p+q}M_qM_{p-q} \leq H^{p+q}M_qM_{p-q}\frac{\max(b,c)^p}{b^q c^{p-q}},$$

lo que prueba el lema. ■

Proposición 2.59. Sea $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números positivos. Si se tiene que $M_0 = 1$ y que $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (M1), (M2) y (M4), entonces su función asociada w_M es admisible Gelfand-Shilov.

Demostración:

Recordemos que w_M se define como

$$w_M(r) = \sup_{p\geq 0}(p\log r - \log M_p)$$

luego es no decreciente. Además, si $r \in [0,1]$ entonces $p\log r - \log M_p < 0$ para todo $p > 0$ y si $p = 0$ entonces $0\log r - \log M_0 = 0$ y $w_M(r) = 0$ para $r \in [0,1]$. Ahora bien, $w_M(e^r) = \sup_{p\geq 0}(pr - \log M_p)$, sea $t \in [0,1]$ entonces

$$\begin{aligned}
w_M(e^{(1-t)x+ty}) &= \sup_{p\geq 0}((1-t)xp + pty - \log M_p)\\
&= \sup_{p\geq 0}((1-t)px + pty - (1-t)\log M_p - t\log M_p)\\
&\leq \sup_{p\geq 0}((1-t)(px - \log M_p)) + \sup_{p\geq 0}(t(py - \log M_p))\\
&= (1-t)\sup_{p\geq 0}((px - \log M_p)) + t\sup_{p\geq 0}((py - \log M_p))\\
&= (1-t)w_M(e^x) + tw_M(e^y)
\end{aligned}$$

y $w_M(e^r)$ es convexa. Afirmamos ahora que

$$w_M(br) + w_M(cr) \leq w_M(ar)$$

para todo $b, c, r > 0$ con $a^{-p} \leq H^{-p-q} b^{-q} c^{p-q}$. Para probarlo debemos antes comprobar los siguientes dos lemas de [28] y [22] respectivamente:

Así pues, si tomamos $b = c = 1$ en el lema 2.58, entonces $a = H \leq 1 \implies a \geq 1$ y se tiene también que $2w_M(r) \leq w_M(ar)$ lo que prueba $(AGS2)$. Por último, probemos $(AGS4)$: puesto que $M_p \geq p^{p\eta} h^p$ se tiene que

$$\begin{aligned} w_M(r) &= \sup_{p\geq 0}(p \log r - \log M_p) \\ &\leq \sup_{p\geq 0}(p \log \frac{r}{h} - p\eta \log p). \end{aligned}$$

Si consideramos la función $F(p) = p \log \frac{r}{h} - p\eta \log p$, que es derivable y su derivada es $F'(p) = \log \frac{r}{h} - \eta \log p - \eta$, entonces F alcanza su máximo en $p = (\frac{r}{h})^{1/\eta} \frac{1}{e}$. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} w_M(r) &\leq \left(\frac{r}{h}\right)^{1/\eta} \frac{1}{e} \log \frac{r}{h} - \left(\frac{r}{h}\right)^{1/\eta} \frac{1}{e} \eta [\log \left(\frac{r}{h}\right)^{1/\eta} \frac{1}{e} - \log e] \\ &= \left(\frac{r}{h}\right)^{1/\eta} \frac{1}{e} \eta = C r^{1/\eta} \end{aligned}$$

para todo $r > 0$ con $C = \dfrac{\eta}{h^{1/\eta} e}$ y $1/\eta < 2$ lo que prueba $(AGS4)$. ■

Lema 2.60. Si f es una función admisible Gelfand-Shilov, entonces existen $c, q > 0$ constantes tales que $cr^q \leq f(r)$ para todo $r \geq 0$.

Demostración:

Por $(AGS2)$ sabemos que existe $\alpha \geq 1$ tal que $2f(r) \leq f(\alpha r)$ para todo $r \geq 0$. Por recurrencia se deduce que

$$2^n f\left(\frac{r}{\alpha^n}\right) \leq f(r).$$

Y si ahora tomamos $n = \lfloor \frac{\log r}{\log \alpha} \rfloor$ y teniendo en cuenta que, si $2^p = e^{p \log 2}$ entonces $2^{\frac{\log r}{\log \alpha}} = r^{\frac{\log 2}{\log \alpha}}$, entonces deducimos que

$$f(r) \geq 2^n f\left(\frac{r}{\alpha^n}\right) \geq 2^{\frac{\log r}{\log \alpha} - 1} f\left(\frac{r}{\alpha^{\frac{\log r}{\log \alpha}}}\right) = \frac{1}{2} r^{\frac{\log 2}{\log \alpha}} f(1) = C r^{\beta}$$

con $C = \frac{1}{2} f(1)$ y $\beta = \frac{\log 2}{\log \alpha}$. ■

Para concluir esta sección hacemos uso del concepto de transformación de Young y de funciones equivalentes en este contexto que hemos introducido en la sección sobre la transformada de Fourier. Estos temas se tratan en [5] donde se abordan los espacios de Gelfand-Shilov de ambos tipos (S y W) y sus relaciones en determinadas situaciones.

Proposición 2.61. Si f es una función admisible Gelfand-Shilov, $\{M_p^{[f]}\}_{p\in\mathbb{N}}$ su sucesión asociada y w_M es la función asociada a $\{M_p^{[f]}\}_{p\in\mathbb{N}}$, entonces w_M es equivalente a f.

Demostración:
Por ser f admisible Gelfand-Shilov, sabemos que existen constantes positivas c y q tales que $f(x) \geq cx^q$. Por tanto, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(e^t)}{t} = \infty.$$

Se puede entonces definir su transformada de Young y por el teorema 2.41 se tiene que f debe ser igual a la transformada de Young de su transformada de Young f^*:

$$f(x) = \sup_{r\geq 0}(rx - f^*(r)).$$

Queremos ver que f es equivalente con

$$w_M(x) = \sup_{p\in\mathbb{N}_0}(p\log(x) - \log(M_p))$$

donde

$$\log(M_p) = \sup_{r>0}(p\log(r) - f(r)) = \sup_{t>0}(pe^t - f(e^t)).$$

Puesto que $f^*(p) = \log(M_p)$ entonces $w_M(e^t) =\leq f(x)$. Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned}
\log M_{q+1} &= \sup_{x>0}[(q+1)\log(x) - f(x)] \leq \sup_{x>0}\Big[(q+1)\log(x) - 2f\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\Big] \\
&\leq \sup_{x>0}\Big[q\log(x) - f\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\Big] + \sup_{x>0}\Big[\log(x) - f\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)\Big] \\
&\leq \sup_{x>0}\Big[q\log(x) - f\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\Big] + \sup_{x>0}\Big[\log(x) - c\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)^q\Big] \\
&\leq \sup_{x>0}[q\log(\alpha x) - f(x)] + C = C + q\log\alpha + \log M_q
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos hecho uso de que tomamos $q \geq 1$ (pues para $q = 0$ es trivial que existe una constante K tal que $\log M_0 \leq \log(K) + \log M_0$) y de que la función $F(x) = \log(x) - c\left(\frac{x}{\alpha}\right)^q$ alcanza un máximo en $x = (qc\alpha^{q-2})^{\frac{1}{q}}$ para todo $q \geq 1$. Por tanto existe una constante γ tal que

$$\log M_{q+1} \leq (q+1)\log\gamma + \log M_q.$$

Sea $r \in \mathbb{R}$ y sea $q = \lfloor r \rfloor$ entonces

$$\log M_{\lfloor r \rfloor + 1} \leq (\lfloor r \rfloor + 1)\log\gamma + \log M_{\lfloor r \rfloor} \leq (\lfloor r \rfloor + 1)\log\gamma + f^*(r)$$

por ser f^* creciente. De donde se deduce que

$$r\log(x) - f^*(r) \leq (\lfloor r \rfloor + 1)\log\gamma + (\lfloor r \rfloor + 1)\log x - \log M_{\lfloor r \rfloor + 1}$$

Así pues, deducimos que

$$f(x) = \sup_{p \geq 0}(p\log(x) - f^*(p)) \leq \sup_{p \in \mathbb{N}}(p\log(\gamma x) - \log(M_p)) = w_M(\gamma x)$$

como queríamos probar. ■

Observación 2.62. Si f_1 es equivalente a f_2 y g_1 es equivalente a g_2 entonces

$$W^{M_1,N_1} = W^{M_2,N_2}.$$

Como f_1 es equivalente a f_2 y g_1 a g_2 existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C_1, C_1', C_2, C_2'$ tales que $f_1(\alpha_1 x) + C_1 \leq f_2(x) \leq f_1(\beta_1 x) + C_1'$ y $g_1^*(\alpha_2 x) + c_2 \leq g_2^*(x) \leq g_1^*(\beta_2 x) + C_2'$. Si $\varphi \in W^{f_1,g_1}$ entonces, gracias al teorema 2.54,

$$\sup_x |\hat{\varphi}(x)| e^{g_1^*(a|x|)} < \infty$$

luego

$$\sup_x |\hat{\varphi}(x)| e^{g_2^*(\frac{a|x|}{\beta_2})} e^{-C_2'} < \infty.$$

Por otro lado,

$$\sup_x |\varphi(x)| e^{f_1(a|x|)} < \infty,$$

luego

$$\sup_x |\varphi(x)| e^{f_2(\frac{b|x|}{\beta_1})} e^{-C_1'} < \infty,$$

y por tanto $\varphi \in W^{f_2,g_2}$. El razonamiento para la contención recíproca es análogo.

Por tanto, hemos conseguido probar el resultado fundamental de [23] que nos permite caracterizar bajo qué condiciones los espacios definidos vía las funciones peso son espacios de Gelfand-Shilov, tanto de tipo Roumieu como de tipo Beurling, lo que nos permitirá trabajar en ocasiones de manera más cómoda.

Teorema 2.63. El espacio $W^{f,g}$ se puede entender como un espacio de Gelfand-Shilov $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$, siendo $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ sucesiones:

(i) Logarítmicamente convexas.

(ii) Estables por operadores ultradiferenciales: existe una constante $H \geq 1$ de manera que $M_{p+q} \leq H^{p+q} M_p M_q$ y $N_{p+q} \leq H^{p+q} N_p N_q$.

(iii) No trivialidad: existen constantes $\eta > 1/2$ y $h > 0$ tales que $M_p \geq h^p p^{p\eta}$ y $N_p \geq h^p p^{p\eta}$.

si, y solo si, las funciones f y g son funciones peso admisibles Gelfand-Shilov.

Observación 2.64. De hecho, hemos probado más, ya que hemos dado una demostración constructiva de cómo a partir de la sucesión se puede encontrar la función peso vía la cuál entender el espacio definido por sucesiones como un espacio definido por funciones. Y recíprocamente, dada una función hemos dado la manera de encontrar la sucesión y de entender el espacio definido vía funciones como una clase de Gelfand-Shilov clásica.

2.1.6. No trivialidad de los espacios de tipo Roumieu.

Pasamos en esta sección a abordar uno de los problemas más interesantes de esta teoría: ¿bajo qué condiciones existen funciones (no triviales) que pertenezcan a estas clases? La respuesta no es fácil y, en según qué casos, sigue aún sin respuesta. Usaremos como referencia [18].

A lo largo de la sección trabajaremos con los espacios de tipo Roumieu ligeramente modificados, $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ será una sucesión de números positivos con $M_0 = 1$. Asumiremos que verifica lo que en este contexto suele entenderse como (M2)' que no es más que lo que hemos llamado estabilidad por operadores diferenciales: existe $A \geq 1$ tal que

$$M_{p+1} \leq A^{p+1} M_p$$

para todo $p \in \mathbb{N}_0$. Así, definiremos

$$\mathscr{S}_A^{M_p} = \{\varphi \in \mathscr{S} : \exists C > 0,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^q \varphi^{(p)}(x)| < CA^{p+q} M_{p+q},\ \forall p, q \in \mathbb{N}_0\},$$

y por ende,

$$\|\varphi\|_A = \sup_{p,q,x} \frac{|x^q \varphi^{(p)}(x)|}{A^{p+q} M_{p+q}}$$

y

$$\mathscr{S}^{M_p} = \bigcup_{A>0} \mathscr{S}_A^{M_p}.$$

Observación 2.65. Comencemos comentando un caso en el que la no trivialidad resulta ser relativamente sencilla. Si suponemos que la sucesión $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (M3)' entonces el espacio $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ es no trivial, porque de hecho se puede construir una función de soporte compacto que verifique las cotas $|\varphi^{(p)}(x)| \leq CA^p M_p$ y, por tanto, verificará las que definen el espacio. Este resultado se conoce como teorema de Denjoy-Carleman y resuelve el problema de la inyectividad de la aplicación de Borel. Hacemos precisamente este último comentario, aunque no hemos ahondado en dar significado a esos conceptos, porque la propiedad (M3) es la que resuelve la sobreyectividad de esta aplicación. Así pues, cuando las condiciones son favorables, resulta relativamente sencillo asegurar la no trivialidad. Consultar [25] para más detalles.

Veamos algunas cuestiones acerca de las funciones de Hermite que serán de vital importancia en esta cuestión de la no trivialidad.

Definición 2.66. Sea $\gamma \in \mathbb{N}_0$, la **función de Hermite $\mathbf{H}_\gamma$** se define como

$$H_\gamma(x) = (2^\gamma \gamma! \pi^{1/2})^{-1/2} e^{-x^2/2} h_\gamma(x),$$

donde $h_\gamma(x)$ es el **polinomio de Hermite** definido por

$$h_\gamma(x) = (-1)^\gamma e^{x^2} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} e^{-x^2}.$$

Observación 2.67. Observemos que lo que hemos llamado polinomios de Hermite son efectivamente polinomios, pues al derivar de manera sucesiva la función $f(x) = e^{-x^2}$ vamos obteniendo sumas de monomios multiplicados de nuevo por esta función y, por tanto, al multiplicar por e^{x^2} sobrevivirán únicamente los monomios.

Puesto que los polinomios de Hermite son una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ (ver [20] capítulo 14, corolario 14.8) parece apropiado trabajar con la norma de este espacio en lugar de trabajar con la norma del supremo. Sin embargo, esto no es ningún problema ya que vimos en el lema 2.49 que se podía trabajar con ambas normas.

Para el próximo resultado necesitamos introducir la siguiente acotación: existe $H > 0$ tal que existen $C, B > 0$ tales que

$$p^{p/2} M_q \leq BC^p H^{p+q} M_{p+q} \tag{2.4}$$

para todo $p, q \in \mathbb{N}_0$. En el caso Beurling, que comentaremos más adelante, necesitaremos que esta acotación sea de la forma existe $H > 0$ tal que para todo $C > 0$ existe B de manera que

$$p^{p/2} M_q \leq BC^p H^{p+q} M_{p+q}.$$

Teorema 2.68. (a) Dados $p, q, \gamma \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\|x^q H_\gamma^{(p)}\|_2 \leq 2^{(p+q)/2} \Big(\frac{(p+q+\gamma)!}{\gamma!} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Supongamos que $\{M_p\}_{p \in \mathbb{N}_0}$ verifica (2.4). Entonces,

$$\sup_{p,q \in \mathbb{N}_0} \frac{\|x^q H_\gamma^{(p)}\|_2}{(2\gamma^{1/2} HC)^{p+q} M_{p+q}} \leq B$$

para todo $\gamma \in \mathbb{N}_0$.

Demostración:

Utilizaremos en la demostración las siguientes relaciones existentes en los polinomios de Hermite que se encuentran detalladas en [20], capítulos 12 y 29:

$$H'_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\gamma} H_{\gamma-1} - \sqrt{\gamma+1} H_{\gamma+1}),$$

y

$$x H_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\gamma} H_{\gamma-1} + \sqrt{\gamma+1} H_{\gamma+1}).$$

(a) Si $p = q = 0$, entonces $\|H_\gamma\|_2 = 1 \leq 2^0 1^{1/2} = 1$. Ahora si $p = 1$ y $q = 0$, entonces $\|H'_\gamma\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\sqrt{\gamma} H_{\gamma-1} - \sqrt{\gamma+1} H_{\gamma+1}\| = \sqrt{\gamma + \frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\gamma}$ para todo $\gamma \geq 1$. Si $\gamma = 0$, entonces $H_0 = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$ y $H'_0 = -\pi^{-1/4} x e^{-x^2/2}$ de donde se deduce que $\|H'_0\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{2}$. Por otro lado, si $q = 1$

y $p=0$, entonces $\frac{1}{\sqrt{2}}\|\sqrt{\gamma}H_{\gamma-1}+\sqrt{\gamma+1}H_{\gamma+1}\| = \sqrt{\gamma+\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\gamma}$ para todo $\gamma \geq 1$. Si $\gamma=0$, entonces $xH_0 = -H_0'$ luego $\|xH_0\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{2}$. Notemos que el caso $p=2$ y $q=-1$ no se da por definición, igual que a la inversa.

Supongamos ahora que la acotación es cierta para todo $p,q \in \mathbb{N}_0$ con $p+q \leq m$ con $m \geq 1$ y tomemos $p+q=m$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\|x^q H_\gamma^{(p+1)}\|_2 = \|x^q (H_\gamma')^{(p)}\|_2 &= \|x^q (\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\gamma}H_{\gamma-1}+\sqrt{\gamma+1}H_{\gamma+1}))^{(p)}\|_2 \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{\gamma}\|x^q H_{\gamma-1}^{(p)}\|_2 + \sqrt{\gamma+1}\|x^q H_{\gamma+1}^{(p)}\|_2\Big) \\
&\leq 2^{\frac{p+q-1}{2}}\Big(\sqrt{\gamma}\Big(\frac{(p+q+\gamma-1)!}{(\gamma-1)!}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{(p+q+\gamma+1)!}{\gamma!}\Big)^{1/2}\Big) \\
&\leq 2^{\frac{p+q+1}{2}}\Big(\frac{(p+q+\gamma+1)!}{\gamma!}\Big)^{1/2}
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado en la última desigualdad que

$$
\Big(\sqrt{\gamma}\frac{(p+q+\gamma-1)!}{(\gamma-1)!}\Big) \leq \Big(\frac{(p+q+\gamma+1)!}{\gamma!}\Big).
$$

Resta, por tanto, comprobar el caso en que $p=0$ y $q=m+1$, así

$$
\begin{aligned}
\|x^{m+1}H_\gamma\|_2 = \|x^m(xH_\gamma)\|_2 &= \|x^m(\sqrt{\gamma}H_{\gamma-1}+\sqrt{\gamma+1}H_{\gamma+1})\|_2 \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{\gamma}\|x^m H_{\gamma-1}\|_+ \sqrt{\gamma+1}\|x^m H_{\gamma+1}\|_2\Big) \\
&\leq 2^{(m-1)/2}\Big(\Big(\frac{(m+\gamma)!}{(\gamma-1)!}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{(m+\gamma+1)!}{\gamma!}\Big)^{1/2}\Big) \\
&\leq 2^{(m+1)/2}\Big(\Big(\frac{(m+\gamma+1)!}{\gamma!}\Big)^{1/2}\Big).
\end{aligned}
$$

(b) Por el apartado (a) y la acotación 2.4 tenemos que

$$
\|x^q H_\gamma^{(p)}\|_2 \leq 2^{(p+q)/2}(p+q+\gamma)^{(p+q)/2},
$$

ahora bien, si $p+q \leq \gamma$ entonces

$$
\|x^q H_\gamma^{(p)}\|_2 \leq 2^{(p+q)}(\gamma)^{(p+q)/2},
$$

y si $p+q > \gamma$, entonces

$$
\|x^q H_\gamma^{(p)}\|_2 \leq 2^{(p+q)}(p+q)^{(p+q)/2}.
$$

Por tanto,

$$\|x^q H_\gamma^{(p)}\|_2 \leq 2^{(p+q)}(p+q)^{(p+q)/2}\gamma^{(p+q)/2} \underset{2.4}{\leq} B\gamma^{(p+q)/2}(2HC)^{p+q}M_{p+q}\frac{1}{M_0},$$

de donde se deduce que

$$\frac{\sup\limits_{p,q\in\mathbb{N}_0} \|x^q H_\gamma^{(p)}\|_2}{(2\gamma^{1/2}HC)^{p+q}M_{p+q}} \leq B$$

■

Observación 2.69. Observemos que el segundo apartado del lema anterior en realidad nos da la no trivialidad, siempre y cuando se verifique (2.4). Sin embargo, podemos comprobar que esta acotación es óptima si imponemos la convexidad logarítmica fuerte, como veremos en el siguiente teorema, es decir, que las funciones de Hermite están en el espacio si, y solo si, se da dicha acotación.

Teorema 2.70. Supongamos que $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (M2)' y (M1)'. Son equivalentes:

(a) Las funciones de Hermite pertenecen a $\mathscr{S}^{M_p}$.

(b) Existen $C > 0$ y $K > 0$ tales que

$$p^{p/2} \leq KC^p M_p.$$

(c) $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ satisface (2.4) para algún $C > 0$.

Demostración:
$(c) \implies (a)$: Se deduce del teorema 2.68.
$(a) \implies (b)$: Si $H_0 = \pi^{-1/4}e^{-x^2/2}$ verifica

$$\frac{\|x^q H_0^{(p)}(x)\|_2}{C^{p+q}M_{p+q}}_{p,q\in\mathbb{N}_0} < \infty$$

para algún $C > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{(w_M(x/(AC))-x^2/2)} &= \sup_{q\in\mathbb{N}_0} \|x^q \exp\Big(\frac{w_M(x/(AC))}{M_q(AC)^q}\Big)\|_\infty \\
&\leq C_4 \sup_{p\leq 4} \|\partial^p (x^q \exp\Big(\frac{w_M(x/(AC))}{M_q(AC)^q}\Big))\|_2 \\
&\leq C_4 \sup_{p\leq 4} \sum_{k=0}^{p} \|2^p 2^q x^{q-k} \exp\Big(\frac{w_M(x/(AC))}{M_q(AC)^q}\Big)^{p-k})\|_2 \\
&\leq C_5 \sup_{p,q\in\mathbb{N}_0} \|x^q \partial^p \frac{H_0(x)}{M_{p+q}C^{p+q}}\|_2 < \infty,
\end{aligned}$$

por la convexidad logarítmica y la regla de Leibniz y donde hemos usado que

$$\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_1 \leq C_2 \|(1+x^2)^2 \hat{f}\|_2 \leq C_3 \|(1-D^2)^2 f\|_2 \leq C_4 \sup_{p\leq 4} \|D^p f\|_2.$$

Por tanto, $w_M(x/(AC)) \leq x^2/2 + K$ con $K > 0$ de donde se deduce que

$$\frac{M_q}{(AC)^q} \geq \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^q e^{-w_M(x/(AC))}| \geq \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^q e^{-x^2/2} e^K| \geq q^{q/2} e^{-q/2} e^K$$

como queríamos ver.

$(b) \implies (c)$: Puesto que $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ es logarítmicamente convexa entonces $M_p M_q \leq M_{p+q}$. Así,

$$p^{p/2} \leq K C^p M_p \leq K C^p \frac{M_{p+q}}{M_q} \implies p^{p/2} M_q \leq K C^p H^{p+q} M_{p+q}$$

con $H \geq 1$.

∎

Observación 2.71. Observemos que la cota que aparece en el apartado (b), es más debil que lo que hemos llamado (M4) o cota de no trivialidad.

De hecho, los resultados no solo se quedan en que las funciones de Hermite estén o no contenidas en $\mathscr{S}^{M_p}$ bajo ciertas condiciones. Se pueden dar resultados más fuertes, para los que necesitamos introducir algunas definiciones y que no demostraremos, acerca de las funciones de Hermite en estos espacios.

Definición 2.72. Sean $(E, (||_j)_{j\in\mathbb{N}})$ y $(F, (\|\|_j)_{j\in\mathbb{N}})$ espacios de Fréchet cuyos sistemas de seminormas son crecientes. Se dice que una aplicación lineal y continua

$$T : (E, (||_j)_{j\in\mathbb{N}}) \to (F, (\|\|_j)_{j\in\mathbb{N}})$$

es "mansa" (en inglés "tame") si existen $C(j)$ constante y $j_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$ con $j \geq j_0$ existe $K > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$\|T(x)\|_j \leq K|x|_{C(j)}.$$

Definición 2.73. Una sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ en un espacio localmente convexo E se dice que es una base absoluta si para todo $x \in E$ existen escalares $\xi_n(x) \in \mathbb{C}$ tales que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(x) e_n$$

de manera única y tal que para toda seminorma continua p en E exista otra seminorma continua q en E y una constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n(x)| p(e_n) \leq Cq(x)$$

para todo $x \in E$.

Además, las aplicaciones lineales y continuas $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ se llaman coeficientes funcionales de la base.

Teorema 2.74. Sean

$$\wedge^{M_p} = \{(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} : \exists j \in \mathbb{N}_0 : \|(c_k)\|_j = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} |c_k| e^{w_M(k^{1/2}/j)} < \infty\}$$

y $\Xi : L_2(\mathbb{R}) \to l_2$, dado por

$$\Xi(f) = (\xi_n(f))_{n\in\mathbb{N}_0} := \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) dx \Big)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Sea $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verificando (M2)' y (2.4) para algún $C > 0$. Entonces las funciones de Hermite son una base absoluta de $\mathscr{S}^{M_p}$ con coeficientes funcionales $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ y Ξ define un isomorfismo manso

$$\Xi : \mathscr{S}^{M_p} \to \wedge^{M_p}.$$

Este teorema nos brinda mucha más información de la que ya conocíamos cuando se daba la acotación (2.4), afirma que cualquier función de $\mathscr{S}^{M_p}$ se puede escribir como una serie de funciones de Hermite de manera única.

2.2. Espacios de tipo Beurling.

Recordemos que los espacios de tipo Beurling son una clase de Gelfand -Shilov, como los de tipo Roumieu, en la que imponemos que las ya mencionadas cotas sobre las funciones no se verifiquen únicamente para una de las seminormas sino para todas. En este contexto, podemos destacar que estas clases contienen menos funciones que las de tipo Roumieu, y por tanto, podemos en muchas ocasiones, adaptando los cálculos, obtener las mismas propiedades y resultados que hemos conseguido en el capítulo anterior. Así pues, veamos de quá manera podemos adaptar algunos de ellos.

Comencemos entonces definiendo este tipo de espacios y cuestiones relacionadas con su topología.

Definición 2.75. Llamaremos **espacio de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu de tipo S** al espacio

$$\mathscr{S}^{M_p,N_p} = \bigcap_{A,B>0} \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B}.$$

Observación 2.76. Es inmediato que

$$\mathscr{S}_{M_p,N_p} = \bigcap_{A,B>0} \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{A,B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{1/n,1/n}$$

siendo la intersección decreciente en n. La topología que consideraremos en $\mathscr{S}_{M_p,N_p}$ será la de espacio de Fréchet dado por el sistema fundamental de seminormas $\{\|\cdot\|_{1/n,1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alternativamente, si tomamos $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones decrecientes que tienden hacia 0, entonces se puede poner

$$\mathscr{S}_{M_p,N_p} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{S}^{M_p,N_p}_{n_k,m_k},$$

y es sencillo comprobar que la topología de límite inductivo para esta escritura coincide con la anterior. El mismo comentario puede hacerse sobre los espacios de tipo W que introducimos a continuación.

Definición 2.77. Llamaremos **espacio de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu de tipo W** al espacio

$$W^{f,g} = \bigcap_{a,b>0} W^{f,g}_{a,b}.$$

Proposición 2.78. Sean $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ sucesiones de números reales positivos que verifican (M1)'. Entonces $\varphi \in \mathscr{S}_{M_p,N_p}$ si, y solo si, para todo $A, b > 0$ existe $C > 0$ tal que

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leq CA^p M_p e^{-w_N(b|x|)}.$$

Demostración:
Basta repetir la prueba de la proposición 2.22 atendiendo a que las cotas han de verificarse para todas constantes, es decir, para todo $A, b > 0$ ha de existir un $C > 0$. ■

Atendiendo a la sección de las operaciones, es claro, por lo que hemos visto relativo a la topología de los espacios de tipo S y de tipo W de tipo Beurling, que se tienen los siguientes teoremas.

Teorema 2.79. (a) Supongamos que $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (M2)', entonces la multiplicación por x es un operador continuo en $\mathscr{S}_{M_p,N_p}$.

(b) Supongamos que $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (M1) y que $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0} = \{p!^\alpha\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ para $\alpha > 0$. Sea f una función tal que para todo $a > 0$ existen K_a y L_a constantes de manera que

$$|f^{(q)}(x)| \leq K_a L_a M_q e^{w_N(a|x|)},$$

entonces el operador multiplicación por f es un operador continuo en $\mathscr{S}_{M_p,N_p}$.

(c) El operador traslación es un operador continuo en $\mathscr{S}_{M_p,N_p}$.

(d) El operador dilatación es un operador continuo en $\mathscr{S}_{M_p,N_p}$.

(e) Supongamos que $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (M1), que $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (M1) y (M2)' y que $M_pN_p \leq DL^p p!$. Entonces la transformada de Fourier es un operador continuo entre $\mathscr{S}_{M_p,N_p}$ y $\mathscr{S}_{N_p,M_p}$.

Demostración:
Basta repetir las pruebas que hemos realizado en las secciones 2.1.2 y 2.1.3 poniendo atención a que las cotas han de verificarse para todas constantes positivas, sin embargo esto no presenta dificultad. ■

Teorema 2.80. (a) La multiplicación por z es un operador continuo en $W_{f,g}$.

(b) Sea f una función entera que verifica que para todo $a_0, b_0 > 0$ constantes existe $C > 0$ tal que $|f(z)| \leq Ce^{h(a_0 x)+g(b_0 y)}$ y siendo $h(x), g(x)$ las funciones que definen $W_{h,g}$ entonces el operador multiplicación por f es continuo en $W_{h,g}$.

(c) La transformada de Fourier es un operador continuo entre $W_{f,g}$ y $W_{g^*,f}$

Demostración:
De nuevo, basta repetir las pruebas que hemos realizado en las secciones 2.1.2 y 2.1.3. ■

Avanzando en las secciones que hemos ido desarrollando a lo largo del trabajo para las clases de Gelfand-Shilov de tipo Roumieu llegamos a la sección 2.1.4 donde aseguramos que las cotas sobre las derivadas en este tipo de espacios pueden intecambiarse por cotas sobre la transformada de Fourier. Podemos observar que, tal y como probamos para el espacio $\mathscr{S}^{M_p,N_p}$ podemos conseguir el mismo resultado retocando ligeramente la demostración. Además, el lema que nos permite trabajar con la norma 2 es también cierto si lo modificamos para adecuarlo al contexto. Podemos por tanto concluir que:

Lema 2.81. Supongamos que $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ son sucesiones de números reales verificando (M2)'. Entonces $\varphi \in \mathscr{S}_{M_p,N_p}$ si, y solo si, para cualesquiera constantes $A, B > 0$ existe $C > 0$ tal que

$$\|x^q \varphi^{(p)}(x)\|_2 \leq CA^p B^q M_p N_q.$$

Teorema 2.82. Sean $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ sucesiones de numeros reales que verifican (M1)', (M2) y que existen $L, K > 0$ tales que $M_p N_p \geq KL^p p!$, entonces son equivalentes:

(a) $\varphi \in \mathscr{S}_{M_p,N_p}$.

(b) Para cualesquiera constantes $A, B > 0$ existe $C > 0$ tal que

$$\sup_x |x^q \varphi(x)| \leq CB^q N_q \qquad \text{y} \qquad \sup_x |\varphi^{(p)}(x)| \leq CA^p M_p$$

para todo $p, q \in \mathbb{N}_0$.

(c) Para cualesquiera constantes $A, B > 0$ existe $C > 0$ tal que

$$\sup_x |x^q \varphi(x)| \leq CB^q N_q \qquad \text{y} \qquad \sup_x |\xi^p \hat{\varphi}(\xi)| \leq CA^p M_p$$

para todo $p, q \in \mathbb{N}_0$.

De igual manera, para los espacios de tipo W basta con tener en cuenta que los espacios de tipo Beurling imponen las cotas para todas las constantes. Como ya hemos comentado, no ha de resultar sorprendente que tantos resultados sean generalizables o reproducibles pues los espacios de tipo Beurling son más restrictivos. Así pues:

Teorema 2.83. Sea $L > 0$ tal que $f(x) \geq g(Lx)$, entonces el espacio $W_{f,g}$ se puede caracterizar por las cotas

$$|\varphi(x)| \leq Ce^{-f(ax)}, |\hat{\varphi(\xi)}| \leq Ce^{-g^*(b\xi)}.$$

En cuanto a las equivalencias entre los espacios de tipo S y W que hemos presentado en la sección 2.1.5 de nuevo es cuestión de repetir argumentos. Básicamente podemos capitalizar todo el trabajo que hemos venido haciendo directamente a estos espacios para poder deducir que:

Teorema 2.84. El espacio $W_{f,g}$ puede entenderse como una clase de Gelfand-Shilov de tipo S, es decir, como $\mathscr{S}_{M_p,N_p}$ siendo $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ y $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ sucesiones que verifiquen (M1), (M2) y (M4) si, y solo si, las funciones f y g son admisibles Gelfand-Shilov.

Por último nos resta, como para el caso de los espacios de tipo Roumieu, la cuestión de la no trivialidad. De nuevo, es una pregunta compleja y sería ambicioso querer resolverla de manera absolutamente general. Vamos a conformarnos con resolverla para el mismo caso que en los espacios de tipo Roumieu, pues el trabajo ya está hecho. Simplemente observar que mientras que en aquel caso pedíamos que se verificase la condición

$$p^{p/2} M_q \leq BC^p H^{p+q} M_{p+q}$$

para todo $p, q \in \mathbb{N}_0$ y algún $C > 0$, en este caso pediremos que se verifique dicha cota para todo $C > 0$. Podemos por tanto afirmar que:

Teorema 2.85. Sea $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión que verifica (M1)' y (M2)'. Son equivalentes:

(a) Las funciones de Hermite pertenecen a $\mathscr{S}_{M_p}$.

(b) Para todo $C > 0$ existe $K > 0$ tal que

$$p^{p/2} \leq KC^p M_p.$$

(c) $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ verifica (2.4) para todo $C > 0$.

3

Generalizaciones. Aplicaciones de las clases de Gelfand-Shilov y líneas de investigación.

Este capítulo tiene como objetivo principal comentar algunas de las aplicaciones y generalizaciones de esta teoría que son foco de investigaciones recientes, sin ahondar en los detalles técnicos. Queremos ilustrar como todo el desarrollo que hemos hecho puede ser el punto de partida de numerosos trabajos de investigación, y que aún quedan numerosas preguntas sin responder en el estudio de estos espacios.

Contenidos

3.1. Generalizaciones y otras cuestiones **81**

3.2. Análisis armónico y wavelets. **84**

3.3. Operadores de Toeplitz **87**

3.1. Generalizaciones y otras cuestiones

En esta sección comentamos cuestiones relativas al propio estudio de las clases de Gelfand-Shilov, es decir, propiedades intrínsecas de los mismos y no tanto estos espacios en otros contextos como haremos en las prosiguientes secciones. Trataremos dos, el caso de las varias variables y definiciones vía matrices peso y la nuclearidad de estos espacios. Si bien estos casos son abordables sin un salto de dificultad tan cuantitativo como los que veremos después requieren de un estudio detallado que no tiene cabida en este trabajo. Sin embargo, queremos dejar constancia de hasta dónde se puede llegar en este ámbito.

Clases de Gelfand-Shilov a partir de matrices de sucesiones.

Tal y como hemos definido las clases de Gelfand-Shilov a través de sucesiones podemos reproducir dicha definición vía matrices de sucesiones de números reales, seguiremos el texto [1]. En este contexto de varias variables trabajaremos con multiíndices, es decir, elementos de $\mathbb{N}_0^d$. La suma será por tanto la suma componente a componente, la potencia también será en cada componente y $|p| = p_1 + \ldots + p_d$ para los elementos de $\mathbb{N}_0^d$.

Definición 3.1. Consideremos

$$\mathscr{M} = \{\{\mathbf{M}^{(\lambda)}\}_{\lambda>0} : \mathbf{M}^{(\lambda)} = \{M_n^{(\lambda)}\}_{n\in\mathbb{N}_0^d}, M_0^{(\lambda)} = 1, \mathbf{M}^{(\lambda)} \leq \mathbf{M}^{(\kappa)} \text{ si } 0 < \lambda < \kappa\}.$$

Llamamos a $\mathscr{M}$ **matriz peso**. Podemos por tanto definir los espacios:

$$\mathscr{S}^{\mathbf{M}} = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d) : \exists C, h, \lambda > 0, \|f\|_{\infty,\mathbf{M},h} = \sup_{p,q\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\|x^q \partial^p f\|_\infty}{h^{|p+q|} M_{p+q}^{(\lambda)}} < \infty\}$$

y

$$\mathscr{S}_{\mathbf{M}} = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d) : \forall h, \lambda > 0, \exists C > 0, \|f\|_{\infty,\mathbf{M},h} < \infty\}.$$

Estos son los espacios de tipo Roumieu y Beurling. respectivamente, para matrices peso. Se les dotará de las topologías de límite inductivo y proyectiva como hemos venido haciendo.

En este contexto necesitamos reformular las condiciones (M1), (M2) y (M2)' para que se adapten a la estructura de matrices peso. Para los espacios de tipo Roumieu, la condición (M1) queda de la siguiente forma: para todo $\lambda > 0$ existen $\kappa \geq \lambda$ y $H \geq 1$ tales que

$$M_p^{(\lambda)} M_q^{(\lambda)} \leq H^{|p+q|} M_{p+q}^{(\kappa)};$$

en el caso Beurling queda: para todo $\lambda > 0$ existen $0 < \kappa < \lambda$ y $H \geq 1$ tales que

$$M_p^{(\kappa)} M_q^{(\kappa)} \leq H^{|p+q|} M_{p+q}^{(\lambda)}.$$

Respecto a la condición (M2)' queda como sigue para el caso Roumieu: para todo $\lambda > 0$ existen $\kappa \geq \lambda$ y $H \geq 1$ tales que

$$M_{p+e_j}^{(\lambda)} \leq H^{|p|+1} M_p^{(\kappa)}, \qquad j \in \{1, \ldots, d\},$$

donde e_j es el vector que tiene 0 en todas posiciones excepto en la $j-$ésima donde tiene un 1; para el caso Beurling queda: para todo $\lambda > 0$ existen $0 < \kappa < \lambda$ y $H \geq 1$ tales que

$$M^{(\kappa)}_{p+e_j} \leq H^{|p|+1} M^{(\lambda)}_p.$$

Por último la condición (M2) en el caso Roumieu queda: para todo $\lambda > 0$ existen $\kappa \geq \lambda$ y $H \geq 1$ tales que

$$M^{(\lambda)}_{p+q} \leq H^{|p+q|} M^{(\kappa)}_p M^{(\kappa)}_q;$$

en el caso Beurling queda: para todo $\lambda > 0$ existen $0 < \kappa \leq \lambda$ y $H \geq 1$ tales que

$$M^{(\kappa)}_{p+q} \leq H^{|p+q|} M^{(\lambda)}_p M^{(\lambda)}_q.$$

Con estas propiedades se puede probar, como hemos hecho para el caso de sucesiones, que es indiferente trabajar en norma infinito o en norma 2. Además, se puede llegar a probar también que las funciones de Hermite pertenecen a estas clases de Gelfand-Shilov siempre que la matriz peso verifique la condición que imponíamos adaptada a esta situación, que queda: para todo $\lambda > 0$ existen $\kappa \geq \lambda$ y $H > 0$, y para todo $C > 0$ existe $B > 0$ tales que

$$p^{p/2} M^{(\lambda)}_q \leq B C^{|p|} H^{|p+q|} M^{(\lambda)}_{p+q}$$

en el caso Roumieu. En el caso Beurling la condición es idéntica intercambiando λ y κ y pidiendo que $0 < \kappa \leq \lambda$. Además de verificar esta acotación necesitamos que verifiquen también la condición (M2)' adaptada. Por tanto, podemos obtener también información acerca de la no trivialidad de estos espacios adaptando el resultado que obtuvimos en dicha sección.

En cuanto a la nuclearidad, tal y como se presenta en [8], bajo ciertas condiciones y suponiendo a la matriz peso que verifique los análogos a las condiciones (M1), (M2)' y (M2) (al menos las que se requieran en cada caso) se puede demostrar que los espacios que hemos introducido son nucleares. La definición exacta de espacio nuclear es la siguiente:

Definición 3.2. Un espacio localmente convexo E se dice que es nuclear si para cada entorno absolutamente convexo del 0, U en E existe un entorno absolutamente convexo del 0, V y una medida μ en el σ^*-compacto V° de manera que

$$\|x\|_U \leq \int_{V^\circ} |y(x)| d\mu(y)$$

para todo $x \in E$.

3.2. Análisis armónico y wavelets.

Sin duda el análisis de Fourier es una de las herramientas más potentes que nos ha brindado las matemáticas, con aplicaciones y usos a todo lo ancho y largo de la ciencia y tecnología. Desde resolución de ecuaciones diferenciales mediante su algebrización, hasta la compresión de archivos o imágenes para reducir su tamaño. Sin embargo, como casi todo, no es perfecta, y es que el hecho de que las funciones que se utilizan para construir esta herramienta, $e^{2\pi iwx}$, tengan por soporte todo el espacio resulta particularmente molesto. Parafraseando a mi profesor de la asignatura de *Análisis armónico y wavelets* del Máster en matemáticas: "*la transformada de Fourier es como si uno intentase escuchar primero toda la pieza de música para después comprender lo que está escuchando. Necesitaríamos escuchar la obra completa para poder entenderla.*"No es hasta 1946 que Dennis Gabor, al que se considera padre de esta teoría y cuyo nombre recibe la **transformada de Fourier en ventanas o transformada Gabor**, introduce el concepto de una transformada de Fourier localizada. La idea consiste en utilizar una función auxiliar que haga de ventana para localizar tanto tiempo como frecuencia mediante la expresión:

$$G_g f(t,w) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x-t)}e^{-2\pi iwx}dx,$$

la función g se denomina **función ventana** y es usual tomar funciones del tipo $\chi_{[-1/2,1/2]}(x)$ o $(1-|x|)\chi_{[-1,1]}$. Sin embargo, de nuevo nos volvemos a topar con un muro en esta teoría, y no es otro que el principio de incertidumbre que aplicado a este caso afirmará que la ventana no puede ser arbitrariamente pequeña y ha de tener un tamaño fijo lo que limita mucho la construcción. Además, otro punto duro es el teorema de Balian-Low que afirma que si se supone cierta regularidad entonces no es posible construir una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ a partir de la transformada Gabor.

No es hasta 1981 que Alex Grossmann y Jean Morlet resuelven sendos problemas mediante lo que se conoce como **wavelet o transformada wavelet o transformada de ondículas** que tiene por expresión

$$W_\psi f(t,s) = \frac{1}{|s|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi\Big(\frac{x-t}{s}\Big)}dx,$$

para $t, s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ y donde ψ se conoce como **ondícula madre**. No es salvable el principio de incertidumbre pero sí pueden modificarse altura y anchura de la ventana y construirse bases ortonormales. La primera de estas bases era conocida mucho antes que está teoría pues fue construida por Haar en 1909, pero no es hasta 1982 que el matemático Jan Olov Strömberg construye un ejemplo con cierta regularidad. Con la continuidad en el estudio de este campo y técnicas modernas Meyer consigue construir un ejemplo de un wavelet que pertenezca a la clase de Schwartz (muy relacionada con los espacios que hemos estudiado) y que Mallat y Meyer crean el análisis en multirresolución. Es en el proceso de creación de esta última técnica donde se obtiene una base ortonormal con regularidad y propiedades de localización.

Son textos insignia para esta teoría [7], [19], [14] y [10]. Es en este contexto de transformada de ondículas y análisis en multirresolución donde veremos que papel juegan los espacios de Gelfand-Shilov tal y como se presenta en [26], un artículo de hace tan solo 4 años.

Trabajaremos con los espacios definidos mediante sucesiones de tipo factorial, $\mathscr{S}^{\rho_1,\rho_2}(\mathbb{R}^d)$, de la siguiente forma:

$$|x^q \varphi^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{h^{|p+q|}} q!^{\rho_2} p!^{\rho_1}$$

con $x \in \mathbb{R}^d$, $p, q \in \mathbb{N}^d$. Como hemos visto a lo largo del trabajo se considera la topología de límite inductivo (aunque manejado con cuidado pues aquí estamos en el caso de varias variables, que comentaremos en el siguiente capítulo). Además, en analogía también con lo visto, la transformada de Fourier es un isomorfismo entre $\mathscr{S}^{\rho_1,\rho_2}(\mathbb{R}^d)$ y $\mathscr{S}^{\rho_2,\rho_1}(\mathbb{R}^d)$. Dada $\psi \in \mathscr{S}^{\rho_1,\rho_2}(\mathbb{R}^d)$ definimos la transformada de ondículas en el contexto de los espacios de Gelfand-Shilov de manera un poco diferente a lo convencional: sea $f \in \mathscr{S}^{\rho_1,\rho_2}(\mathbb{R}^d)$, la transformada de ondículas de f con respecto a ψ será

$$W_\psi f(t,s) = \left\langle f(x), \frac{1}{s^d}\overline{\psi\Big(\frac{x-t}{a}\Big)}\right\rangle = \frac{1}{a^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\psi\Big(\frac{x-t}{s}\Big)}dx$$

con $(t,s) \in \mathbb{R}^d \times R_+$.

Veamos el concepto de análisis en multirresolución (ρ_1, ρ_2)-regular. Para ello comenzamos definiendo lo que es un análisis en multirresolución.

Definición 3.3. Sea $\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ una sucesión creciente (para la contención) de subespacios lineales de $L^2(\mathbb{R}^d)$ que verifica las siguientes propiedades:

(a) $\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} V_m = \{0\}$ y $\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} V_m$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

(b) $f(x) \in V_m$ si, y solo si, $f(2x) \in V_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

(c) $f(x) \in V_0$ si, y solo si, $f(x-n) \in V_0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^d$.

(d) Existe $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\{\phi(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ es una base ortonormal de V_0.

Entonces, se dice que la familia $\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es un **análisis en multirresolución** y que ϕ es una **función de escala** para el análisis en multirresolución.

Así, con este concepto, podemos definir cuando es (ρ_1, ρ_2)-regular.

Definición 3.4. Sean $\rho_1 \geq 0$ y $\rho_2 > 1$. Un análisis en multirresolución se dice que es (ρ_1, ρ_2)**-regular** si tiene una función de escala tal que $\phi \in \mathscr{S}^{\rho_1,\rho_2}(\mathbb{R}^d)$.

Observación 3.5. Se puede probar que la condición $\rho_2 > 1$ surge naturalmente por la definición de análisis en multirresolución. Es más, si $\rho_2 \leq 1$ se sabe que no existe un análisis en multirresolución con función de escala en $\mathscr{S}^{\rho_1,\rho_2}(\mathbb{R}^d)$.

Resulta que este tipo de análisis en multirresolución tiene magníficas propiedades de aproximación y convergencia como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 3.6. Sean $\rho_2 > 1$ y $\rho_1 \geq 0$. Sea $\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ un análisis en multirresolución (ρ_1, ρ_2)-regular. Tomemos $\sigma = \rho_1 + \rho_2 - 1$, $s \geq \sigma$ y $t \geq \rho_2$.

(a) Si $\varphi \in \mathscr{S}^{s-\sigma,t}(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\lim_{m\to\infty} q_m\varphi = \varphi$$

en $\mathscr{S}^{s,t}(\mathbb{R}^d)$, donde q_m es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en V_m.

(b) Si $f \in \mathscr{S}^{s,t}(\mathbb{R}^d)'$, entonces $\lim\limits_{m\to\infty} q_m f = f$ en $\mathscr{S}^{s-\sigma,t}(\mathbb{R}^d)$.

Por supuesto la prueba es verdaderamente compleja y técnica además de requerir construcciones que no están englobadas en el trabajo; nótese que estamos tratando espacios de Gelfand-Shilov en varias variables con ligereza sin haberlos definido, ni estudiado sus propiedades.

A modo de conclusión a esta sección hacer notar la utilidad de las clases de Gelfand-Shilov y su conexión con vías actuales de estudio en el análisis matemático. Hay aún muchas cuestiones por resolver en este sentido: ¿qué pasa sin en lugar de tomar espacios de tipo factorial tomamos sucesiones arbitrarias? ¿Deberíamos imponer condiciones sobre las mismas? ¿Se puede encontrar siempre un análisis en multirresolución con una función de escala que pertenezca a una clase de Gelfand-Shilov de tipo S? ¿Y de tipo W?

3.3. Operadores de Toeplitz

Los operadores de Toeplitz se enmarcan en el análisis funcional abstracto como una potentísima herramienta en la geometría conmutativa. Requiere de conceptos avanzados de Análisis Funcional como los espacios de Hardy. Esta teoría da lugar a teoremas como el teorema del índice bebé (traducción literal del inglés: *The baby index theorem*) o el teorema de Coburn. Este tipo de operadores surgen a partir del concepto de matrices de Toeplitz y fueron intensamente estudiados por el matemático Norbert Wiener quien se encontraba enfrascado en problemas de filtrado y predicción. Se encontró problemas para resolver ciertas ecuaciones integrales de convolución que requerían información en el sentido negativo del tiempo. Wiener utilizó las transformadas de Fourier y Laplace para obtener una nueva ecuación que se dividía en términos de funciones holomorfas en el semiplano superior y el semiplano inferior. Demostró que podía, bajo ciertas condiciones, factorizar una función en un producto de dos funciones holomorfas, una en el semiplano superior y otra en el inferior. Reorganizando los términos de la ecuación obtuvo una ecuación con una parte holomorfa en cada semiplano obteniendo una función entera que podía demostrar si era acotada o tenía un crecimiento polinomial. Gracias a esto pudo elimar la parte que requería sentido negativo del tiempo y resolver el problema.

Veamos ahora como se entienden este tipo de operadores en el marco del trabajo y qué relación tienen con las clases de Gelfand-Shilov. Usaremos como referencia para los operadores de Toeplitz el texto [16] por su brevedad, es también referencia en la materia el texto [3].

Comenzamos definiendo el espacio de Hardy H^p.

Definición 3.7. Sea $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad dotada de la medida de Haar $d\lambda$. Escribiremos $L^p(\mathbb{T})$ para referirnos a $L^p(\mathbb{T}, d\lambda)$ por comodidad. Como la medida de Haar es finita se tendrá que $L^p(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T})$ si $1 \leq p < q$. Además, si $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces

$$\int f(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt.$$

Denotaremos por ϵ_n a la función continua de $\mathbb{T}$ en sí mismo de manera que $\epsilon_n(\lambda) = \lambda^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Y escribiremos Γ y Γ_+ para referirnos a los espacios vectoriales generados por $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Estos espacios suelen llamarse **polinomios trigonométricos** y **polinomios trigonométricos analíticos.**

Definición 3.8. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el **espacio de Hardy** H^p como el conjunto

$$H^p = \{f \in L^p(\mathbb{T}) \quad | \quad \hat{f}(n) = 0 \quad (n < 0)\}$$

donde

$$\hat{f}(n) = \int f(\lambda)\overline{\epsilon_n(\lambda)}d\lambda.$$

Así, H^p es un subespacio vectorial cerrado de $L^p(\mathbb{T})$ para la norma L^p. Además, si $p = 2$ entonces H^2 es un espacio de Hilbert y Γ_+ es base ortonormal.

Esta construcción da lugar a una teoría muy extensa y a multitud de trabajos en Análisis Funcional. Aunque todo este área es muy interesante vamos de lleno con la definición de los operadores para poder dar alguna pincelada de estos en las clases de Gelfand-Shilov.

Definición 3.9. Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces el **operador Toeplitz** T_φ **con símbolo** φ se define como

$$T_\varphi : H^2 \to H^2, \quad f \mapsto P(\varphi f),$$

donde P es la proyección ortogonal de L^2 sobre H^2.

Veamos ya la relación entre estos operadores y las clases de Gelfand-Shilov, seguiremos el texto [24] del año pasado.

En primer lugar, trabajaremos con clases de Gelfand-Shilov particulares y con sus duales, así que definamos ambas.

Definición 3.10. (a) Diremos que $f \in \mathscr{S}_s(\mathbb{R}^n)$ si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y existe $h > 0$ tal que

$$\sup_x |x^q D^p f(x)| \leq C_p h^{|q|} q!^s.$$

(b) Diremos que $f \in \mathscr{S}^\sigma(\mathbb{R}^n)$ si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y existe $h > 0$ tal que

$$\sup_x |x^q D^p f(x)| \leq C_q h^{|p|} p!^\sigma.$$

(c) Diremos que $f \in W_s$ si $f \in \mathscr{C}^\infty$ y se da la cota de (a) para todo $h > 0$.

(d) Diremos que $f \in W^\sigma$ si $f \in \mathscr{C}^\infty$ y se da la cota de (b) para todo $h > 0$.

(e) Diremos que $u \in (\mathscr{S}_s)'(\mathbb{R}^n)$ si para todo $r > 0$ existe un $N \geq 0$ tal que

$$|< u, f >| \leq C_N \sum_{|p| \leq N} \|D^p f(x) e^{r|x|^{1/s}}\|_\infty$$

para toda $f \in \mathscr{S}_s(\mathbb{R}^n)$.

(f) Diremos que $u \in (\mathscr{S}^\sigma)'(\mathbb{R}^n)$ si para todo $r > 0$ existe un $N \geq 0$ tal que

$$|< u, f >| \leq C_N \sum_{|p| \leq N} \|D^p \hat{f}(x) e^{r|x|^{1/\sigma}}\|_\infty$$

para toda $f \in \mathscr{S}^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

(g) Diremos que $u \in (W_s)'(\mathbb{R}^n)$ si existen $r > 0$ y $N \geq 0$ tal que

$$|< u, f >| \leq C_N \sum_{|p|} \|D^p f(x) e^{r|x|^{1/s}}\|_\infty$$

para toda $f \in W_s(\mathbb{R}^n)$.

(h) Diremos que $u \in (W^\sigma)'(\mathbb{R}^n)$ si existe $r_0 > 0$ y $N \geq 0$ tal que

$$|< u, f >| \leq C_N \sum_{|p|} \|D^p \hat{f}(x) e^{r|x|^{1/\sigma}}\|_\infty$$

para toda $f \in W^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Estos son los espacios generales con los que se trabajará, pero además necesitaremos recurrir a $2n$ dimensiones. Así pues, debemos introducir la siguiente definición.

Definición 3.11. Sean $s_1, s_2, \sigma_1, \sigma_2 > 0$. Entonces $\mathscr{S}^{s_1,s_2}_{\sigma_1,\sigma_2}(\mathbb{R}^{2n})$ consiste en las funciones $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ para las que existe $h > 0$ tal que

$$\sup_{(x,\xi)} \frac{|x^{q_1} \xi^{q_2} D_x^{q_1} D_\xi^{q_2} f(x,\xi)|}{h^{|p_1+p_2+q_1+q_2|}(q_1)!^{s_1}(q_2)!^{s_2}(p_1)!^{\sigma_1}(p_2)!^{\sigma_2}} < \infty.$$

Se pueden entender este tipo de espacios como funciones que pertenecen a $\mathscr{S}^{\sigma_1}_{s_1}(\mathbb{R}^n)$ en la primera variable y a $\mathscr{S}^{\sigma_2}_{s_2}(\mathbb{R}^n)$ en la segunda. Además, se usa la siguiente notación $\mathscr{S}^\infty_s = \mathscr{S}_s$ y $\mathscr{S}^\sigma_\infty = \mathscr{S}^\sigma$.

Los operadores Toeplitz que se manejan requieren de la definición de transformada de Fourier en ventanas para elementos del dual. Así pues veámosla junto a la de los operadores.

Definición 3.12. La **transformada de Fourier en ventanas** de $f \in (\mathscr{S}_s)'(\mathbb{R}^n)$ con ventana $\phi \in \mathscr{S}_s(\mathbb{R}^n)$ viene dada por

$$V_\phi f(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} f(y)\overline{\phi(x-y)}\exp(< y, \xi >)dy.$$

Definición 3.13. Sean $s, \sigma > 0$, $\phi_1, \phi_2 \in \mathscr{S}_s(\mathbb{R}^n)$ y $a \in \mathscr{S}_{s,\infty}^{\infty,s}(\mathbb{R}^{2n})$. El operador Toeplitz $T_{\phi_1,\phi_2}(a) : \mathscr{S}_s(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}_s(\mathbb{R}^n)$ viene dado por

$$< T_{\phi_1,\phi_2}(a)f, g >_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = < a, \overline{V_{\phi_1} f} V_{\phi_2} g >_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}$$

para toda $f \in \mathscr{S}_s(\mathbb{R}^n)$ y $g \in (\mathscr{S}^\sigma)'(\mathbb{R}^n)$.

Trabajando estos espacios se puede llegar a teoremas como el que mencionamos ahora. Nótese el aumento de complejidad a la hora de manejar cotas y parámetros respecto a lo que hemos visto en el desarrollo del trabajo y obsérvese que únicamente trabajamos con sucesiones de tipo factorial y no en general como hemos venido haciendo. Sin duda hay aún muchas preguntas que responder en esta teoría.

Teorema 3.14. Supongamos que $\phi_1, \phi_2 \in \mathscr{S}_s(\mathbb{R}^n)$. Entonces se tiene que:

(a) La definición de $T_{\phi_1,\phi_2}(a)$ se puede extender de manera única a todo $a \in (\mathscr{S}_{s,\infty}^{\infty;s})'(\mathbb{R}^{2n})$ y es continua de $\mathscr{S}_s(\mathbb{R}^n)$ en $(\mathscr{S}_s)'(\mathbb{R}^n)$.

(b) Si $a \in (\mathscr{S}_{s,\infty}^{\infty;s})'(\mathbb{R}^{2n})$ entonces $T_{\phi_1,\phi_2}(a)$ es continuo en $\mathscr{S}_s(\mathbb{R}^n)$ y se puede extender de manera única a un operador continuo en $(\mathscr{S}_s)'(\mathbb{R}^n)$.

Además, este teorema es cierto si en lugar de tratar con estos espacios tratamos con los análogos que hemos introducido, es decir, los $\mathscr{S}^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Bibliografía

[1] Chiara Boiti et al. «Nuclear global spaces of ultradifferentiable functions in the matrix weighted setting». En: *Banach journal of mathematical analysis* 15.1 (2021), pág. 14.

[2] J.M. Borwein y A. S. Lewis. *Convex Analysis and Nonlinear Optimization Theory and Examples*. Springer New York., 2006.

[3] A. Böttcher y B. Silbermann. *Analysis of Toeplitz operators*. Springer Berlin Heidelberg, 1990.

[4] N. Bourbaki. *Topological Vector Spaces Chapters 1-5*. Springer Berlin Heidelberg, 2003.

[5] Jaeyoung Chung, Soon-Yeong Chung y Dohan Kim. «Equivalence of the Gelfand–Shilov spaces». En: *Journal of mathematical analysis and applications* 203.3 (1996), págs. 828-839.

[6] Jaeyoung Chung, Soon-Yeong Chung y Dohan Kim. «Une caractérisation de l'espace S de Schwartz». En: *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique* 316.1 (1993), págs. 23-25.

[7] Ingrid Daubechies. *Ten lectures on Wavelets*. Society for industrial y applied Mathematics, 1999.

[8] Andreas Debrouwere, Lenny Neyt y Jasson Vindas. «The nuclearity of Gelfand–Shilov spaces and kernel theorems». En: *Collectanea Mathematica* 72 (2021), págs. 203-227.

[9] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 1999.

[10] Dennis Gabor. «Theory of communication». En: *Journal of the Institution of Electrical Engineers* (1946), págs. 429-457.

[11] C. Gasquet y P. Witomski. *Fourier Analysis and Applications: Filtering Numerical Computations. Wavelets*. Springer-Verlag, 1999.

[12] I. M. Gelfand y G. E. Shilov. *Generalized functions. 2, Spaces of fundamental and generalized functions.* Academic Press, 1968.

[13] I.M. Gelfand y G. E. Shilov. *Generalized functions. 3, Theory of diferential equations.* Academic Press, 1967.

[14] E Hernandez y G Weiss. *A first course on Wavelets.* CRC Press, 1996.

[15] John Horváth. *Topological vector spaces and distributions.* Courier Corporation, 2012.

[16] Hideki Inoue. «Toeplitz operators and their applications».

[17] Hikosaburo Komatsu. «Ultradistributions. I: Structure theorems and a characterization». English. En: *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A* 20 (1973), págs. 25-105. ISSN: 0040-8980.

[18] Michael Langenbruch. «Hermite functions and weighted spaces of generalized functions». En: *Manuscripta Mathematica* 119.3 (2006), págs. 269-285.

[19] Stephane G. Mallat. *A Wavelet tour of signal processing.* Academic Press, 1999.

[20] Reinhold Meise y Dietmar Vogt. *Introduction to functional analysis.* Clarendon Press, 1997.

[21] Dorina Mitrea. *Distributions, Partial Differential Equations and Harmonica Analysis.* Springer-Verlag, 2018.

[22] Mihai Pascu. «Classes of infinite order pseudodifferential operators». En: *Buletinul Universităţii Petrol-Gaze din Ploieşti, Seria Matematică-Informatică-Fizică* 59 (2007), pág. 2.

[23] Mihai Pascu. «On the definition of Gelfand-Shilov spaces». En: *Ann. Univ. Buchar. Math. Ser* 1.1 (2010), págs. 125-133.

[24] Albin Petersson. «Fourier characterizations and non-triviality of Gelfand–Shilov spaces, with applications to Toeplitz operators». En: *Journal of Fourier Analysis and Applications* 29.3 (2023), pág. 29.

[25] Hans-Joachim Petzsche. «On E. Borel's theorem». En: *Mathematische Annalen* 282 (1988), págs. 299-313.

[26] S Pilipovic et al. «Multiresolution expansions and Wavelets in Gelfand-Shilov spaces.» En: *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* 114 (2020).

[27] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton university press, 1970.

[28] Charles Roumieu. «Sur quelques extensions de la notion de distribution». En: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Vol. 77. 1. 1960, págs. 41-121.

[29] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, 2021.

[30] Walter Rudin. *Functional analysis*. Mc Graw Hill, 1991.