



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

**Dpto. de Didáctica de las Ciencias Experimentales, sociales y de
la matemática.**

Aprendizaje Matemático percibido en el alumnado de ESO

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación
Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y
Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.**

Alumno: Diego Martín Garzón

Tutor: José Roberto Arias García

Valladolid, julio de 2024

Índice

1	Introducción.....	1
1.1	Justificación	1
1.2	Objetivos	2
2	Marco teórico	4
2.1	Aprendizaje y aprendizaje percibido	4
2.1.1	Aprendizaje.....	4
2.1.2	Aprendizaje percibido.....	8
2.1.3	Relación entre aprendizaje, aprendizaje percibido y otros factores	10
2.1.4	Otros factores relacionados con el aprendizaje percibido en la investigación.	12
2.1.5	Importancia del aprendizaje percibido	18
2.2	Estrategias de aprendizaje. Metacognición.	20
2.2.1	Estrategias de aprendizaje.....	20
2.2.2	Clasificación de estrategias de aprendizaje	22
2.2.3	Evaluación de las estrategias de aprendizaje	28
2.2.4	Papel del profesor de matemáticas con respecto a las estrategias de aprendizaje	29
2.2.5	Importancia de la metacognición y de las estrategias metacognitivas en este trabajo	32
2.2.6	Importancia de las estrategias de aprendizaje y la metacognición en la LOMLOE	33
3	Propuesta de autoevaluación y tareas interrogativas	36
3.1	Propuesta para trabajar el aprendizaje percibido en geometría analítica	39
4	Propuesta didáctica	44
4.1	Contextualización	44
4.2	Fundamentación curricular	45
4.2.1	Competencias específicas.....	45
4.2.2	Descriptorios operativos de las competencias clave involucradas.....	47
4.2.3	Criterios de evaluación	50
4.2.4	Indicadores de logro	51
4.2.5	Contenidos.....	52
4.3	Metodología	52
4.4	Desarrollo de las sesiones	53
4.4.1	Sesión I.....	54
4.4.2	Sesión II.....	55
4.4.3	Sesión III.....	55
4.4.4	Sesión IV	56

4.4.5	Sesión V	57
4.4.6	Sesión VI	58
4.4.7	Sesión VII	58
4.4.8	Sesiones VIII y IX	59
4.4.9	Sesión X.....	59
4.4.10	Sesión XI.....	60
4.4.11	Sesión XII.....	60
4.5	Actividades por sesión.....	60
4.5.1	Actividades sesión I	60
4.5.2	Actividades sesión II	66
4.5.3	Actividades sesión III	66
4.5.4	Actividades sesión IV	67
4.5.5	Actividades sesión V	69
4.5.6	Actividades sesión VI	70
4.5.7	Actividades sesión VII	70
4.5.8	Actividades sesiones VIII y IX.....	71
4.5.9	Actividades sesión X	74
4.5.10	Actividades sesión XI.....	75
4.5.11	Actividades sesión XII.....	75
4.6	Evaluación	76
4.7	Atención a diferencias individuales.....	80
4.8	Valoración de la propuesta didáctica	80
5	Reflexión final	82
6	Referencias bibliográficas	84

1 Introducción

En todo el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje en la ESO intervienen multitud de agentes que dan forma al entorno en el que este se produce. Uno de estos agentes es la percepción que el estudiante tiene sobre su propio aprendizaje de las matemáticas. En este trabajo tratamos de indagar en esta realidad subjetiva del alumno, que en muchas ocasiones dista del verdadero aprendizaje del estudiante y que creemos que impide que este logre un desempeño académico óptimo. Una de las causas de este desalineamiento entre aprendizaje percibido y aprendizaje real es la falta de autoconciencia del alumno sobre sus propios procesos, fortalezas y áreas de mejora, y afecta negativamente en su progreso. Por tanto, es necesario que el alumno no solo adquiera competencias y conocimientos propiamente matemáticos, sino que también desarrolle una comprensión precisa y crítica de su propio aprendizaje, fundamental para su avance tanto académico como personal a lo largo de toda su vida.

Así, en este trabajo pretendemos por un lado demostrar la adquisición de los conocimientos y destrezas que a lo largo del máster se han trabajado, y hacer uso de ellas para desarrollarlo. Por otro lado, buscamos realizar una profundización en la investigación educativa de lo que significa el aprendizaje percibido, su relación con el aprendizaje y los factores que influyen en este. Así como también reflexionar sobre el papel del docente en el aprendizaje percibido y lo que aporta a la educación basándonos en la LOMLOE. Además, buscamos desarrollar y proponer una serie de herramientas de utilidad para el profesorado y el alumnado que les hagan conscientes del aprendizaje matemático percibido de los estudiantes, y estos últimos adquieran estrategias de autoevaluación y autorregulación que les ayuden a progresar en su aprendizaje. Si bien la elaboración de estas herramientas está enfocada en el área de matemáticas, son perfectamente adaptables a otras materias, dotándolas de transversalidad. Por último, queremos realizar el diseño de una propuesta didáctica sobre geometría analítica en la que se ponga en práctica las herramientas elaboradas en este trabajo, así como también algunas de las estrategias aprendidas en este máster.

1.1 Justificación

Como futuro docente de matemáticas, me afecta e interesa que los alumnos de ESO logren establecer y desarrollar las bases en esta etapa que les permitan desenvolverse en los distintos ámbitos de su vida presente y futura, buscando su continuo desarrollo personal y académico o profesional. Para conseguir esto, encuentro necesario que el estudiante adquiera una autonomía y un autoconocimiento, que solo se puede lograr a través de una continua reflexión de uno mismo

y sus procesos de aprendizaje. Es necesario que despliegue un pensamiento y visión realista y crítica con respecto a su aprendizaje.

Centrándonos en matemáticas, muchas veces la percepción que tiene el alumno de su aprendizaje no es realista o está alineado con su aprendizaje real o el requerido. Por ejemplo, puede que piense que por saberse de memoria las características de un vector ya maneja el concepto, o por saber hacer operaciones con él ya sabe resolver problemas en los que esté involucrado.

Con la motivación de entender qué influye en esta percepción que tiene el estudiante sobre su proceso de aprendizaje, y de ayudarlo a que también él entienda su realidad y emplee los medios necesarios para calibrarlo y mejore su aprendizaje, realizamos este trabajo.

Como mostraremos, son varios los agentes que están relacionados con el aprendizaje percibido, si bien encuentro uno de ellos especialmente útil y manejable sobre el que trabajar con el objetivo arriba propuesto: las estrategias de aprendizaje, y en especial las metacognitivas. En mi etapa educativa y experiencia en prácticas, muy raramente se reconocía y enseñaba la importancia de estas estrategias, ni se dedicaba tiempo efectivo para trabajarlas. Como mucho, el profesor aconsejaba alguna vez realizar las actividades de autoevaluación de final de un tema, como una actividad más.

La práctica de las estrategias de aprendizaje y metacognición persigue y consigue precisamente la autonomía, autoconocimiento y reflexión que remarcaba tan importante al inicio de esta justificación. Ahora bien, hay que trabajarlas de forma coherente con las características y objetivos de la propuesta didáctica. En matemáticas, la memorización de definiciones sin comprensión o de problemas tipo, o la repetición de los mismos ejercicios, son estrategias poco efectivas, y que pueden causar una sensación de aprendizaje que no se corresponde con el real. De igual forma, el empleo de la representación gráfica o visual, utilización de recursos digitales, la explicación de los conceptos a otras personas o la reflexión sobre las dificultades y fortalezas, son herramientas útiles para aprender y calibrar el aprendizaje percibido. Por esto, tenemos interés en el aprendizaje percibido y las estrategias de aprendizaje que permitan situar las carencias que evitan un óptimo desempeño académico del estudiante.

Además, la puesta en práctica de la propuesta didáctica elaborada en este TFM podría suponer una base sobre la que hacer un estudio que compare aprendizaje y aprendizaje percibido, tarea que no he visto abordada en la bibliografía consultada.

1.2 Objetivos

Con este Trabajo de Fin de Máster, pretendemos alcanzar una serie de objetivos, que listamos a continuación y podemos categorizarlos en personales, prácticos e intelectuales:

➤ Objetivos personales:

- Adquirir variedad de estrategias y metodologías que pueda aplicar en mi futura práctica docente.
- Desarrollar una comprensión más profunda de elementos que intervienen en el aprendizaje de los alumnos, como la motivación, las estrategias de aprendizaje o la metacognición.
- Mejorar mis habilidades de búsqueda y análisis de bibliografía sobre el campo de la educación como fuente de conocimiento y desarrollo personal y profesional.
- Afianzar y demostrar competencias trabajadas en el máster, como la comprensión y aplicación del currículo, y de estrategias didácticas.
- Reflexionar sobre la relación entre el aprendizaje percibido y otros factores del proceso enseñanza-aprendizaje para poder identificar posibles obstáculos causantes del desalineamiento entre el aprendizaje real y el percibido.

➤ Objetivos prácticos:

- Desarrollar herramientas y recursos educativos que permitan a los estudiantes ser más conscientes y activos en su aprendizaje, y que los profesores puedan adaptar fácilmente a su práctica diaria para mejorar el rendimiento del alumnado y su propia labor docente.
- Diseñar una propuesta de trabajo de geometría analítica basada en el currículo de la legislación vigente, que integre competencias matemáticas y desempeños propios del aprender a aprender. Esta propuesta movilizará competencias mediante la implementación de metodologías motivadoras y actividades que conecten las matemáticas con la vida cotidiana y otras disciplinas, utilizando además una variedad de formas de evaluación diagnóstica y formativa.

2 Marco teórico

A lo largo de todo este trabajo, empleamos algunas ideas y conceptos que consideramos clave, y es por ello por lo que procedemos a continuación a definirlos y situarlos en un marco conceptual, recapitulando su naturaleza y las interconexiones entre ellos.

2.1 Aprendizaje y aprendizaje percibido

Consideramos conveniente enmarcar y definir algunos de los conceptos o constructos sobre los que vamos a construir este trabajo. Dado que tratamos en este escrito de explorar el aprendizaje percibido por parte del alumnado, comprobar su mayor o menor correspondencia con el aprendizaje real, y reflexionar sobre posibles estrategias para acercar ambas concepciones, pasamos a continuación a presentar las ideas de aprendizaje y aprendizaje percibido.

2.1.1 Aprendizaje

Primero intentemos definir el concepto de aprendizaje para dar más sentido al de aprendizaje percibido posteriormente. Bien es cierto que el aprendizaje ha sido abordado por la investigación desde diversos focos: cómo se produce, procesos, consecuencias, factores que influyen en él, etc. Esto ha generado el desarrollo de cantidad de teorías del aprendizaje, y definiciones de este concepto. Es decir, no hay una única concepción de aprendizaje válida y aceptada por la totalidad de profesionales de la educación.

Describimos a continuación brevemente algunas de las teorías o enfoques más conocidos y su concepción de aprendizaje:

- Teoría/enfoque conductista o conductual: Con su origen en la obra del psicólogo americano John B. Watson, y posterior investigación y trabajo de figuras como B.F. Skinner. Conciben la definición de aprendizaje como el cambio relativamente permanente en la conducta observable, que surge de la asociación entre estímulos y respuestas, y que está reforzado por las consecuencias de dicha conducta. Esto es, el aprendizaje ocurre cuando el aprendiz experimenta un estímulo, provocando en él una respuesta. Si la respuesta tiene consecuencias positivas (un refuerzo), es más probable que la conducta se repita en un futuro cuando se presente el mismo estímulo. De igual forma, si la conducta es castigada, el comportamiento se debilita y se volverá menos probable que se repita en un futuro (Reyes, 2023).

En estas condiciones, el docente asume un papel más dirigente del aprendizaje, siendo su función principal diseñar un entorno de aprendizaje en el que los alumnos puedan asociar las conductas deseadas con las consecuencias positivas, y las conductas no deseadas con las consecuencias negativas. A esto puede contribuir establecer objetivos claros y concretos para los alumnos, que sean observables y alcanzables para ellos, así como proporcionarles instrucciones precisas que sean fáciles de entender y seguir. En el conductismo, por tanto, la evaluación del aprendizaje por parte del docente se centra en la valoración del cambio en la conducta del alumno. En línea con lo anterior, un ejemplo de metodología de enseñanza que casa bien con las ideas del conductismo, es la clase magistral, en la que el docente expone de forma organizada y clara los contenidos, explica cómo realizar la conducta deseada, y comprueba la comprensión y aprendizaje del alumno a través de preguntas, ejercicios y exámenes. Además, el docente establece un conjunto de normas o reglas que especifiquen las conductas deseadas y no deseadas, y sus consecuencias (refuerzos y castigos).

- Teoría/enfoque cognitivo: Con sus raíces en la teoría cognitivista del psicólogo Jean Piaget y posteriores aportaciones de profesionales como Ausubel, Bruner o Vygotski, se aleja del planteamiento que pone todo el peso del aprendizaje en factores externos y deja al aprendiz con un rol pasivo, propio de las teorías conductistas. Bajo este enfoque, el aprendizaje se define como un proceso activo, interno y significativo en el que el individuo procesa, almacena y recupera información para construir su propio conocimiento. Es decir, el aprendiz interactúa con la información y construye esquemas mentales que moldea a lo largo del tiempo. Así, no solo aprende nuevas conductas, sino que también adquiere nuevos conocimientos, habilidades y estrategias que le permiten comprender el mundo que les rodea y desenvolverse de forma autónoma.

En este enfoque, se da especial importancia a la metacognición, que es la capacidad del alumno para reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje, por lo que un docente alineado con el cognitvismo ha de guiar a sus estudiantes para que sean conscientes de sus propios procesos mentales, de cómo aprenden, y piensen de forma crítica sobre ello.

- Teoría/Enfoque sociocultural: Es una teoría del desarrollo expuesta por el psicólogo L. Vygotsky que propone que el desarrollo cognitivo y el aprendizaje no ocurre en un vacío, sino que son el resultado de la interacción social y la participación en actividades culturales. Es decir, que las personas aprendemos a través de la interacción con los demás y al ser guiados por personas más expertas. Vygotsky introdujo dos conceptos clave para explicar el aprendizaje: la zona de desarrollo próximo (ZDP), y la mediación.

La ZDP es el rango de conocimientos y habilidades que una persona no domina de forma

independiente, pero que puede lograr con la ayuda o guía de otra persona más experta. En este punto, la persona está en un proceso de aprendizaje “asistido” donde la interacción social juega un papel fundamental. En cuanto a la mediación, se refiere a la ayuda y herramientas que se le proporciona al aprendiz para que se desenvuelva en la ZDP, como puede ser la presencia de un docente, el uso de tecnologías, libros, instrucciones... (Mentes abiertas Psicología, s.f.). En este marco, el aprendizaje se define como un proceso socialmente mediado que ocurre dentro de la Zona de Desarrollo Próximo, donde la interacción con personas más expertas y la participación en actividades culturales permiten al aprendiz internalizar estructuras de pensamiento y comportamiento.

- Teoría/enfoque constructivista: Las bases de este enfoque reposan sobre las teorías del ya mencionado Jean Piaget, y se basan en la idea de que los estudiantes construyen su propio conocimiento y comprensión a partir de su experiencia, reflexión y conocimientos previos. Así, esta corriente defiende que el aprendizaje es un proceso activo, en el que los alumnos no son meros receptores de información, sino que han de participar activamente en la construcción de su conocimiento. En este proceso es importante la experiencia, pues el aprendizaje es más rico cuando los alumnos pueden relacionar y conectar la nueva información con sus experiencias y conocimientos previos, haciendo así proceso más significativo. De igual forma, también es importante el contexto social y cultural en el que se da el aprendizaje, siendo mejor, por ejemplo, cuando los alumnos pueden colaborar y compartir sus ideas con otros. Entonces, una definición de aprendizaje acorde a las premisas que propone el constructivismo es que el aprendizaje es un proceso activo, dinámico y personal de construcción del conocimiento por parte del aprendiz, donde resalta la importancia de la experiencia previa, la colaboración con otros, las ideas y las acciones del estudiante en la construcción de su propio saber, y la continuidad de esta construcción a lo largo de toda la vida.

En estas condiciones, el docente también tiene un papel en el proceso de aprendizaje, pues es responsable de conseguir un entorno que alimente los factores recién comentados. Por ejemplo, el docente no es un transmisor de información, sino que ha de actuar como facilitador y guía del alumno a lo largo de su proceso de construcción del conocimiento. Así, ha de encargarse de diseñar situaciones de aprendizaje que se basen en los conocimientos previos del alumno, que sean activas para dar la oportunidad a los estudiantes de ser participativos y colaborar unos con otros, y que sean estimulantes y motivadoras (Escuela de profesores del Perú [EPPERU], 2024).

Teniendo en cuenta estas características del constructivismo, resultan interesantes algunas metodologías concretas de enseñanza que pueden llegar a ser muy eficaces para conseguir un aprendizaje significativo de los estudiantes. Son buenos ejemplos el

aprendizaje colaborativo y el aprendizaje basado en problemas, en los que se proponen problemas abiertos, reales o ficticios que los estudiantes han de intentar resolver trabajando en equipo y haciendo uso de los conocimientos y habilidades que ya poseen.

Estas teorías son útiles para confeccionar una definición de aprendizaje que se adapte lo más posible a cómo interpretamos el aprendizaje a lo largo de este escrito. Por ejemplo, la teoría sociocultural tiene importantes implicaciones para la educación, ya que nos recuerda la importancia de crear entornos de aprendizaje donde los estudiantes puedan colaborar, recibir apoyo y ser guiados por otros para alcanzar su máximo potencial, lo cual remarcaremos más adelante es un factor a tener en cuenta tanto en el aprendizaje como en el aprendizaje percibido. Los enfoques cognitivo-constructivistas tienen rasgos que considero muy alineados con el tema principal de este trabajo. Por un lado, señalan la importancia de la metacognición, y es que este constructo no solo es importante en el proceso de aprendizaje ayudando al alumno a ser consciente de cómo aprende, a planificarse y autorregularse, sino que también constituye un papel vital en la de su aprendizaje percibido, pues es lo que les permite autoevaluar sus procesos cognitivos y juzgar su propia comprensión y progreso en el aprendizaje. Por otro lado, enfatizan en la relevancia del análisis y la reflexión en la construcción del conocimiento del alumno, y por tanto del pensamiento crítico. Esto es importante también a la hora de conectar aprendizaje con aprendizaje percibido, pues los fundamentos y las ideas que usen los estudiantes para reflexionar sobre su aprendizaje son buenos elementos a tener en cuenta si nos interesamos por el constructo del aprendizaje percibido.

Por otro lado, siguiendo con la revisión del concepto de aprendizaje en investigaciones, una definición que integra elementos considerados importantes por buena parte de profesionales de la educación según Schunk (2017, p.3) es: “El aprendizaje es un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de comportarse de cierta manera, el cual es resultado de la práctica o de otras formas de experiencia”.

Esta definición es interesante, pues pone el foco en un cambio en el comportamiento, en habilidades o conductas del que aprende, más que en conocimientos teóricos. Así como también considera relevante la temporalidad de estos cambios y la intencionalidad del aprendiz, descartando aquellos de corta duración, y poniendo en duda si cambios que se pueden revertir debido al olvido son realmente aprendizaje, como por ejemplo los adquiridos por memorización con la única pretensión de aprobar un examen.

Me gustaría añadir un último uso del concepto de aprendizaje en investigación, por su brevedad y sencillez, alejándonos un poco del nivel de detalle y concreción de las definiciones

anteriormente mostradas. Bacon (2016, p.1) utiliza este término, para referirse a “la ganancia en conocimiento o habilidades que el estudiante posee”.

Personalmente, y también con la intención de ser lo más claro posible al utilizar a lo largo del texto el término, contextualizarlo y compararlo con otros términos, la definición elegida de aprendizaje se inspira en la citada de Schunk (2017):

El aprendizaje es un cambio perdurable en los conocimientos, la conducta o en la capacidad de comportarse de cierta manera, el cual es resultado de la práctica o de otras formas de experiencia.

2.1.2 Aprendizaje percibido

Habiendo realizado ya una revisión sobre el concepto de aprendizaje, estamos en condiciones de definir y situar el de aprendizaje percibido.

En la labor de investigar sobre el tópico de aprendizaje percibido, se hace evidente en la literatura la necesidad de distinguirlo del de aprendizaje. Mismamente en las palabras utilizadas encontramos diferencias y puntualizaciones que pretenden remarcar esta distinción.

Para hacer la diferenciación de aprendizaje y aprendizaje percibido, algunos autores en sus investigaciones recurren al término de aprendizaje como “aprendizaje real”, o “aprendizaje cognitivo” o en escritos en inglés “*actual learning*”, “*real learning*” o “*actual performance*”.

Por su parte, al aprendizaje percibido se refieren como “*perceived learning*” o “*self-assessed knowledge gain*”.

En mi proceso de revisión de literatura, es cierto que el aprendizaje percibido forma parte de la investigación de una forma indirecta. Por lo general, las investigaciones pretenden medir el éxito de alguna actividad formativa, las sensaciones de los alumnos al aplicar alguna metodología didáctica concreta (aprendizaje colaborativo, aprendizaje basado en problemas) o en alguna modalidad en particular (online, mixto online-presencial). Esto lo hacen a través de cuestionarios tipo Likert la mayoría de las veces, recogiendo así las impresiones de los estudiantes. Pero en algunas de estas investigaciones, aunque se pretende usar los resultados para evidenciar el mejor o peor aprendizaje, causa un poco de confusión, pues los resultados obtenidos son de aprendizaje percibido, y no se hace una comparación de las percepciones recogidas de los estudiantes con su aprendizaje real. De hecho, tampoco proporcionan ni reflexionan sobre una definición de aprendizaje percibido. Esto puede llevar a confusión, ya que los resultados de estas investigaciones no son referidos al aprendizaje real que los estudiantes puedan haber obtenido en el contexto planteado por el estudio, sino que son referidos al aprendizaje percibido, que por supuesto no tiene por qué ser igual. Es decir, se corre el riesgo de no distinguir cómo una

intervención que nos interese estudiar, afecta al aprendizaje real o al percibido.

Así, los autores Bacon (2016) , Sitzmann et al. (2010) advierten sobre la necesidad de ser precavidos en el uso de los conceptos de aprendizaje y aprendizaje percibido en la investigación pues son constructos diferentes, y es importante reconocer la diferencia y hacerla visible en los estudios si se quiere conseguir un avance y mejora en el aprendizaje de los estudiantes y en la investigación dedicada a ello.

Procedemos pues a explicar a qué nos referimos en este trabajo con aprendizaje percibido, haciendo uso de las definiciones que establecen autores ya mencionados.

Bacon (2016, p.1) entiende el aprendizaje percibido como “la autoevaluación de un estudiante sobre la adquisición de conocimientos, generalmente basada en cierta reflexión y retrospección”.

De una forma similar se refieren Sitzmann et al. (2010, p.171), definiendo el concepto como “la autoevaluación que los aprendices hacen sobre sus actuales niveles de conocimiento o incremento en sus niveles de conocimiento en un dominio particular”.

Ambas definiciones son muy similares, pero tomaremos la primera por hacer más explícita la tarea del estudiante en pensar sobre su aprendizaje. Así, en nuestro trabajo entendemos que:

El aprendizaje percibido es la autoevaluación basada en cierta reflexión e introspección sobre la adquisición de conocimientos y habilidades.

A partir de la anterior definición, podríamos proponernos entrar ahora en detalle sobre la idea de autoevaluación, o la de evaluación, con la intención de ser más completos. La razón por lo que no lo hacemos, es porque se tratará más adelante de una manera más explicativa y ejemplificada. Por ahora, nos basta con aportar una definición de evaluación: es el proceso de recogida y análisis de información de forma fiable y válida, que nos permite efectuar juicios de valor necesarios para orientar y facilitar la toma de decisiones con respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje (Equipo Pedagógico de Campuseducación, 2024).

En este sentido, deducimos de la anterior definición, la definición de autoevaluación como la evaluación que el estudiante hace sobre su propio proceso de aprendizaje.

Una diferencia clave entre el aprendizaje percibido y el aprendizaje real, es la fuente de la que obtenemos la información para definir cada una. Para el aprendizaje percibido, es la autoevaluación que se hace el alumno sobre sus niveles de conocimiento, mientras que, para el aprendizaje, la valoración se hace con respecto al desempeño académico que observa y evalúa el profesor (notas de exámenes, observación diaria, puntuaciones según alguna rúbrica diseñada...).

Una pequeña reflexión que estimo importante realizar es que teniendo en cuenta la definición de aprendizaje que manejamos, esta implica un cambio, que es la que considero palabra clave. Por ello, para que tenga sentido por tanto hablar de aprendizaje percibido, es necesario hacer una

comparación entre un antes y un después en momentos determinados, para poder decir con propiedad que observamos o no algún cambio. Por eso, considero de gran importancia que el alumno se autoevalúe antes y después de realizar las actividades con las que se pretende conseguir un aprendizaje (estudio individual, trabajos en equipo, búsqueda de información...). Así, este incremento (o no) de conocimientos o habilidades que el alumno determine, es lo que entendemos por aprendizaje percibido. Si la autoevaluación del alumno se realiza solamente al final (al terminar trimestre, a final de curso...), este tendrá menos fuentes de información sobre las que reflexionar y fundamentar su mayor o menor avance, lo que implica una autoevaluación más pobre y mucho más influida por sensaciones subjetivas u otros agentes afectivos.

2.1.3 Relación entre aprendizaje, aprendizaje percibido y otros factores

La bibliografía relativa al tema consultada sugiere que la autoevaluación de sus propios conocimientos y el aprendizaje percibido tienen un rol esencial en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, los cuales se ven muy beneficiados de tener un entendimiento preciso de sus niveles reales de aprendizaje y conocimientos (Dunning et al., 2004).

La relación entre estos dos constructos puede variar a causa de distintos factores, si bien es cierto que consideramos deseable como repetimos en numerables ocasiones en este trabajo, que haya una fuerte correspondencia entre ambas realidades referentes al alumno y estén lo más próximas entre sí posible.

Por ejemplo, parte de la retroalimentación que el profesor pueda aportar a los estudiantes está basada a priori en el aprendizaje real que este ha evaluado en ellos. El docente evalúa alguna parte del desempeño del alumno, y después le proporciona algunas orientaciones o comentarios que considere que le ayudará a mejorar el aprendizaje. El alumno, a la hora de autoevaluar su aprendizaje (este es, aprendizaje percibido), reflexionará sobre distintos aspectos para obtener información, uno de los cuales es la retroalimentación que haya ido recibiendo de otras personas. De esta forma, su aprendizaje percibido se verá influido para estar más alineado con el aprendizaje real (o el que debería ser real) sobre el que ha recibido la retroalimentación.

Esta retroalimentación considerada positiva en la tarea de poner en sintonía el aprendizaje y el aprendizaje percibido, puede ser más o menos complicada de dar por parte del docente o recibir por parte del alumno dependiendo del contexto (medio presencial u online, materia, tipo de actividad sobre la que se da, características personales del alumno). En tareas o actividades relativas al desempeño interpersonal, la retroalimentación que el alumno puede recibir es fácil que se presente de manera natural. Por ejemplo, al colaborar con compañeros estos dan información al alumno con su comunicación tanto verbal como no verbal. Sin embargo, en tareas

que el estudiante realice individualmente y pongan a prueba sus conocimientos, este no va a recibir en principio ninguna respuesta instantánea que le ayude a comparar lo que cree que sabe con lo que sabe en realidad. Aunque bien es cierto que, en matemáticas, por su naturaleza y construcción, la gran mayoría de tareas permiten al estudiante hacer esta comparación, por ejemplo, en actividades que se pida una solución y esta sea comprobable si realmente es o no solución, dicha comprobación puede requerir un nivel de aprendizaje mayor y más profundo al demandado por la tarea original. Así, la relación entre aprendizaje real y aprendizaje percibido se presenta más fuerte cuando se proporciona retroalimentación a lo largo del curso (Sitzmann et al., 2010).

Como señalaremos más adelante, pero adelantamos ahora, el rol social que desempeñan los compañeros de clase y el profesor también tiene una influencia. Los estudiantes utilizan a sus compañeros de clase como elementos de referencia en gran parte de aspectos de su vida, siendo el académico uno de estos, por ejemplo, al comparar calificaciones o al observar sus acciones dentro del aula, así como la respuesta docente ante estas y lo que se espera de ellas. De esta forma, cuando el alumno identifica una discrepancia entre su aprendizaje percibido y el desempeño que le parece el deseado, este trata de reconducir su conducta centrando su atención en el comportamiento de los demás en busca de aprender el desempeño adecuado (Bandura, 1977, como se citó en Sitzmann, 2010).

Aunque el aprendizaje percibido esté relacionado con multitud de factores, algunos ya nombrados y otros que revisaremos a continuación, estamos especialmente interesados por un lado en que los estudiantes autoevalúen su aprendizaje, y por otro, en que esta autoevaluación sea lo más precisa posible en relación con su aprendizaje real. Así, una buena forma de conseguir estos objetivos en línea con lo que sugieren Levine et al. (1977), es brindar varias oportunidades al alumnado para que se autoevalúe, pues estos autores concluyeron en su estudio que el ejercicio de autoevaluación es *“una habilidad que se mejora con la experiencia y la retroalimentación”*, y por tanto ayudará al estudiante a calibrar mejor su percepción de lo aprendido.

Varias investigaciones sugieren que hay una relación moderada o alta entre el aprendizaje percibido y el ámbito afectivo. De hecho, así lo veremos a continuación al hacer referencia a estudios que correlacionan el aprendizaje percibido de los estudiantes con la motivación, su satisfacción sobre el curso en general, o la valoración que tienen sobre el profesor que imparte. Es más, Sitzmann et al. (2010) señalan que la relación entre el ámbito socioafectivo y el aprendizaje percibido es mayor que la de este último con el aprendizaje real, encontrando que la relación entre aprendizaje real y percibido, aunque positiva, es baja o moderada.

Esta percepción de los estudiantes está caracterizada por diversidad de factores, tanto internos como externos al alumno, y puede de hecho tener una influencia relevante en su relación con la materia, su motivación, y rendimiento académico como exponemos seguidamente.

2.1.4 Otros factores relacionados con el aprendizaje percibido en la investigación.

A continuación, exponemos algunos de los agentes internos y externos que afectan al aprendizaje percibido, y son dignos de investigación de cara a entender y mejorar esta percepción para el desarrollo personal del estudiante. Además, añadimos algunos estudios en los que aparecen.

- **Factores internos:**

- Autoeficacia: Hace referencia a las creencias del estudiante sobre su capacidad de aprendizaje, su confianza en sus habilidades matemáticas y desempeño en la materia. Este es un factor que puede contribuir a la baja o nula correlación entre aprendizaje y aprendizaje percibido como sugieren Kruger y Dunning (1999). En primer lugar, los estudiantes en general son propensos a valorar por encima de la realidad sus propios niveles de aprendizaje. Además, estudiantes en principio menos competentes, tienden a sobreestimar más sus habilidades y conocimientos que los estudiantes más competentes, de acuerdo con el conocido efecto Dunning-Kruger.
- Estrategias de aprendizaje: La forma en que el estudiante aborda su aprendizaje también influye en su percepción. Las estrategias de aprendizaje son, sin entrar en detalle, actividades intencionales que guían las acciones a seguir para las metas de aprendizaje por parte del estudiante. Cuando el alumno utiliza distintos tipos de estrategias de aprendizaje, se hace más explícito y es más consciente de su proceso de aprendizaje, ayudando así a identificar mejor sus puntos de mejora y a redirigir en consecuencia sus esfuerzos mediante distintas técnicas de estudio, por ejemplo. De igual manera son útiles para evaluar su aprendizaje de forma más efectiva. Además, el uso de estrategias de aprendizaje influye también en el aspecto afectivo como por ejemplo en el aumento de la motivación y la sensación de control, lo cual está relacionado con el aprendizaje y el aprendizaje percibido. Entraremos en profundidad sobre este factor en la siguiente sección de este trabajo.
- Valoración del curso/aprendizaje/conocimientos: Es importante la percepción que los alumnos tengan sobre la materia que están cursando. La importancia que el estudiante asigne, el valor al conocimiento o la utilidad que los contenidos y competencias trabajados aporten en su vida cotidiana o futura condiciona, entre otros factores, la

motivación, repercutiendo así en el aprendizaje percibido. En el estudio que llevaron a cabo Franganillo et al. (2021) aplicando cierta metodología de enseñanza en un curso universitario, interpretaron a partir de cuestionarios y preguntas abiertas a los alumnos que estos valoraban la metodología y los contenidos por la utilidad social, la orientación a entornos de trabajo real, o la novedad entre otros, y presentaban un alto nivel de aprendizaje percibido, motivación, y resultados académicos. Añadiendo otro ejemplo, Martínez-Ferreira et al. (2022) estudian la importancia atribuida y el dominio percibido de competencias tras el prácticum del máster de profesorado, en el que encuentran categorías de competencias que los encuestados valoran menos, y también mostraron un nivel más bajo de dominio percibido. Siguiendo el mismo objeto de estudio, Rodríguez y Pedrajas (2017) establecen una correspondencia entre la valoración y el dominio percibido:

Podemos observar que existe un patrón similar en la valoración del grado de importancia formativa y del nivel de desarrollo alcanzado, ya que existe bastante paralelismo entre las competencias mejor adquiridas y las más importantes de acuerdo a las opiniones de los encuestados, y viceversa, las principales debilidades se enmarcan dentro de las mismas competencias con un grado de adquisición menor y con un nivel de importancia inferior.

Si bien es cierto, que ambas investigaciones señalan que los resultados han de ser tomados con cautela

- Conocimientos previos: La base matemática o de conocimiento, habilidades y experiencias que el alumno ya posee, previa a construir nuevo aprendizaje.

En línea con los estudios realizados en cursos basados en la web y uso de ordenadores, Horvath y Teles (1999) analizan la percepción de los estudiantes ante la falta de una base de conocimientos informáticos, y cómo esto afecta en su predisposición y motivación, otro de los factores que influyen en el aprendizaje y aprendizaje percibido:

Los problemas con los ordenadores generaban altos niveles de frustración y ansiedad. Las dificultades de los estudiantes fueron causadas no solo por la falta de las habilidades necesarias para diagnosticar el problema o la falta de conocimientos y habilidades informáticas para resolver el problema, sino, lo que es más importante, por el elevado nivel de ansiedad que bloqueaba la conducta racional, en oposición a la conducta efectivamente motivada. Los estudiantes tienden a sentirse avergonzados en respuesta a estos problemas.

La inseguridad, el miedo o la vergüenza son sentimientos que afectan negativamente al alumno a la hora de adquirir nuevos conocimientos, y estos se ven reforzados si no cuentan o perciben que no cuentan con unos conocimientos previos sólidos. En el estudio realizado por Hong et al. (2002), recogieron por medio de cuestionarios y entrevistas personales las percepciones y declaraciones de los alumnos en un curso basado en la web en el que se implementó la metodología de aprendizaje basado en problemas, y algunos alumnos transmitían que no sentían que habían aprendido y participado poco, debido a la falta de experiencia en esa metodología, su inadecuado conocimiento matemático e informático, y la vergüenza e inseguridad a la hora de compartir su trabajo.

- Motivación: La motivación en el estudiante es un factor vital en su proceso de aprendizaje, pues es lo que le impulsa y le hace mantener el esfuerzo en la tarea de conseguir sus objetivos académicos. La motivación intrínseca, esta es, la que nace del estudiante por propio interés o gusto en la realización de una actividad, tiene mucho más valor en el aprendizaje que la motivación extrínseca, esta es, la que pone el foco en recompensas externas concretas o evitar algún castigo como motor de actuación en el alumno. De igual forma afecta al aprendizaje percibido, pues el alumnado intrínsecamente motivado tiende a ser más honesto y preciso en sus autoevaluaciones, estando más interesado en comprender sus propias fortalezas y debilidades para mejorar. Así, el estudiante motivado tiene más predisposición a recibir retroalimentación (de gran importancia en la calibración del aprendizaje percibido, como ya hemos visto) y hacer una reflexión más constructiva y abierta a realizar los cambios necesarios.

La motivación intrínseca está estrechamente relacionada con el placer y la satisfacción experimentados al explorar y aprender, y afecta positivamente al aprendizaje percibido (Jaramillo y Spector, 2004). Por tanto, es más probable que alumnos con un mayor nivel de motivación intrínseca tengan sentimientos más positivos hacia el estudio, y se evalúen a sí mismos como si hubiesen aprendido mucho, lo cual son indicadores que caracterizan el aprendizaje percibido (Ferreira et al., 2011).

Por ejemplo, Pintrich y García (1991) encuentran una fuerte relación entre la motivación y la metacognición, pues de su estudio destacan que los estudiantes con una alta motivación intrínseca tenían más probabilidades de utilizar estrategias metacognitivas, las cuáles son esenciales tanto para el aprendizaje como para el aprendizaje percibido, pues a través de ellas los estudiantes son más conscientes y realistas sobre su aprendizaje. En la misma línea Franganillo et al (2021) concluyen

en su investigación que “Los datos analizados muestran que hay una relación significativa entre rendimiento académico objetivo, motivación y percepción subjetiva de aprendizaje del estudiante”.

- **Factores externos:**

- Metodología en el proceso de enseñanza: La modalidad, estrategias y recursos utilizados para impartir la materia y seleccionados por los docentes u organizadores del curso. Por ejemplo, existen estudios relativos a etapas universitarias que comparan cómo afecta la modalidad de enseñanza (presencial, o mixta presencial-virtual) al aprendizaje percibido por los estudiantes. Bien es cierto que la modalidad presencial ha sido la única o predominante durante siglos, pero las nuevas necesidades de la sociedad (flexibilidad, avances tecnológicos, COVID...) requieren nuevos ambientes de educación. En el caso de Castillo et al. (2022), se llevó a cabo un estudio cuantitativo de diseño no experimental para averiguar en qué modalidad los estudiantes perciben mayor nivel de aprendizaje y desarrollo de habilidades, concluyendo que es en la modalidad presencial. Por otro lado, Bandara y Wijekularathna (2017) compararon la otra realidad, la del desempeño académico, en ambas modalidades, concluyendo mejores resultados académicos en la modalidad presencial. Aun así, existen otras investigaciones en las que los resultados muestran diferencias significativas en favor de la modalidad virtual (Soffer y Nachmias, 2018). De la misma manera, hay estudios que no manifiestan diferencias estadísticamente significativas, como Neuhauser (2002) que en su comparación de ambas modalidades la gran mayoría de estudiantes online percibieron esta modalidad como igual o más efectiva que la presencial, pero los resultados del estudio no mostraron diferencias significativas en desempeño académico. Todas estas versiones y diferencias tienen sentido, pues evidencian lo que estos mismos estudios también defienden: la compleja realidad de los conceptos de aprendizaje y aprendizaje percibido, y la multitud de factores que influyen en estos y que aquí estamos analizando.
- Evaluación: La evaluación es una parte esencial del proceso enseñanza-aprendizaje, el qué, cómo, cuándo y quién evalúa afecta necesariamente al aprendizaje, y a la percepción que los estudiantes tienen sobre su proceso. Por poner un ejemplo sobre cómo afectó el quién y cómo, en el estudio de Hong et al. (2003) comentado anteriormente sobre el curso en que se implementa el aprendizaje basado en problemas en la modalidad online, la evaluación consistió en el envío de tutoriales sobre el temario, la participación en las conferencias online en grupos, la confección de respuestas escritas por los grupos a los problemas, y la propia evaluación de los

compañeros a las distintas tareas. Precisamente algunos de los alumnos transmitieron su sensación de poco aprendizaje por el miedo y vergüenza de compartir su trabajo, a los comentarios de sus compañeros, o la sensación de falta de colaboración. Es decir, la evaluación afectó en parte a la percepción del alumnado sobre su aprendizaje. Sobre este factor profundizaremos más adelante.

- Clima/contexto social y de aula: El contexto en el que se desarrolla el aprendizaje también influye en la percepción del alumno. La conexión y el apoyo que el estudiante recibe del profesor, las opiniones y actitudes tanto de las familias como de los compañeros de clase hacia las matemáticas, así como la ayuda/colaboración entre ellos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Ambientes más colaborativos, con miembros que apoyen y motiven al estudiante, se identifican con un aprendizaje percibido más positivo. El centro educativo (ya sea colegio, instituto...) es un lugar de vital relevancia para los estudiantes pues es en el que se desarrolla una de las etapas más importantes de su vida, tanto a nivel personal, familiar y social. Es por esto que el sentimiento que los estudiantes tienen sobre su centro afecta al proceso de enseñanza-aprendizaje. Un sentimiento de pertenencia al centro, en el sentido en que los alumnos ven en este un ambiente en el que se sienten aceptados, respetados, incluidos y apoyados, tiene consecuencias en particular en el desempeño académico. Aspectos como la participación de los jóvenes en el aula, el esfuerzo académico, el éxito y el abandono escolar no solo están influenciados por características individuales como habilidades o actitudes, sino también por circunstancias en el entorno como las relaciones sociales con el centro educativo (Goodenow, 1993). Por tanto, un sentimiento pobre de pertenencia al centro puede conducir en muchos casos a una menor motivación (factor de gran relevancia en el aprendizaje y aprendizaje percibido como ya hemos mencionado) y a un bajo rendimiento académico (Goodenow, 1993). Diversas variables afectan al sentimiento de pertenencia al centro como exponen Ros et al. (2012), por ejemplo, atendiendo a la tipología de centro, los estudiantes de centros privados y concertados tienen una mayor implicación y un mayor sentimiento de pertenencia. La influencia de este sentido de pertenencia y la motivación en el aprendizaje percibido son el objeto de estudio de Ferreira et al. (2011), que previo análisis de los constructos e instrumentos de encuesta, entregaron a una muestra de 1986 estudiantes de secundaria de Portugal un cuestionario con una escala tipo Likert. Sus resultados revelaban que un sentimiento negativo de pertenencia al centro tiene un impacto negativo tanto en la motivación como en el aprendizaje percibido, y la motivación intrínseca afecta positivamente al aprendizaje percibido.

Bien es cierto que, a lo largo de los años, ha ido cobrando especial importancia un paradigma de aprendizaje constructivista, en el que la figura del alumno desempeña un papel protagonista, pasando de ser meros receptores de los contenidos que el docente transmitía a ser partícipes del conocimiento y competencias que construyen y desarrollan. Esta evolución no resta protagonismo a la figura del docente, al contrario, este resulta más importante que antes, pues es el responsable de diseñar, proporcionar y analizar el ambiente óptimo en el que se desarrolle a su máximo potencial el aprendizaje de los estudiantes (Barr y Tagg, 1995). De hecho, el éxito académico depende de determinadas características de estos entornos de aprendizaje que el docente crea (metodologías, agrupamientos, ...). La responsabilidad recién comentada del docente se plasma por ejemplo en su labor de evaluar el aprendizaje, y también en la satisfacción y aprendizaje percibido por parte de los alumnos, en coherencia con los estilos de enseñanza empleados, viéndose influidos precisamente estos factores por la labor comentada. El compromiso mostrado por el docente es un factor fuertemente relacionado con la satisfacción y aprendizaje percibido (Garrison, 2007). La relación entre estas percepciones subjetivas de satisfacción y aprendizaje percibido con éxito académico fue el objeto de estudio de Lo (2010), en el que exploró utilizando un cuestionario con preguntas tipo Likert si la satisfacción de los estudiantes con el docente y su apoyo, la satisfacción con el entorno brindado por el docente y el compromiso propio con el aprendizaje, y la satisfacción con el programa planteado del curso, podían explicar el aprendizaje percibido. Los resultados revelaron una alta relación entre sí, relacionando una alta satisfacción con el entorno con un alto éxito académico percibido.

Queda claro que en conceptos subjetivos como lo son la satisfacción del estudiante o su aprendizaje percibido, intervienen multitud de factores como los que aquí se están listando, y esta influencia ha sido de interés en cantidad de investigaciones que pretenden explorar la experiencia educativa y cómo los estudiantes la viven y sienten. El objetivo de Barbera et al (2013) es de hecho indagar en los factores que influyen en la satisfacción y aprendizaje percibido, y averiguar cuáles son los que más influyen, dentro de un contexto de cursos online. Tras la recogida de datos a través de cuestionarios con escala Likert a 499 estudiantes de 3 universidades distintas, y el posterior análisis, las conclusiones muestran que los factores que presentan una mayor correlación con los conceptos comentados son el diseño del curso y los contenidos de aprendizaje de este. Estos resultados están consonancia con lo que dice demás literatura, como por ejemplo Eom et al (2006) que concuerda con la importancia de estos factores, que, aunque no relacione tan fuertemente el diseño del curso con el aprendizaje percibido, lo atribuye a que otros factores pueden compensar

esta deficiencia. Por ejemplo, aunque los estudiantes valoren pobremente el diseño del curso, si el docente proporciona una buena retroalimentación (factor que influye en el aprendizaje percibido), los estudiantes pueden percibir que han desarrollado un buen aprendizaje (a pesar del diseño).

Insistiendo en la relevancia del rol del profesor, y sobre todo en nuestro sistema educativo competencial, Meroño et al. (2018) diseñan y validan un cuestionario sobre la percepción del profesor sobre el aprendizaje basado en competencias del alumnado de Primaria. Es interesante en línea con la reflexión que en este trabajo hacemos sobre el aprendizaje percibido del alumnado ESO, reconocer también la dimensión del profesor en cuanto a la percepción que este mismo tiene sobre el aprendizaje de sus alumnos, pues de igual manera que el aprendizaje percibido y el real del alumnado pueden estar en puntos distintos, el aprendizaje real del estudiante y el que percibe el docente podrían no estar alineados, siendo de gran interés acercarlos para mejorar la calidad de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los factores recién abordados que influyen en el aprendizaje y el aprendizaje percibido del estudiante son algunos de los que hemos considerado más importantes y tratados en la literatura, no lo únicos. En nuestro interés por indagar y aprender sobre la idea de aprendizaje percibido, tendría mucho sentido profundizar en cualquiera de ellos, lo cual podría abarcar mucho más que lo esperable de este trabajo en cuanto a extensión y tiempo empleado. Teniendo en cuenta que el objetivo de este trabajo no es solo presentar el concepto de aprendizaje percibido, sino también (entre otros) proponer alguna técnica para ayudar al alumnado a calibrar su concepción de su aprendizaje y alinearla lo más posible con su aprendizaje real, nos centraremos en lo que sigue de trabajo en los factores que más nos acerque a ello.

Primero haremos una breve reflexión sobre la importancia del aprendizaje percibido en base a lo ya tratado. Después, pasaremos a hacer una revisión sobre uno de los factores arriba enumerados, las estrategias y técnicas de aprendizaje, y a argumentar su importancia en el tema principal del trabajo.

2.1.5 Importancia del aprendizaje percibido

Uno de los objetivos del sistema educativo en España, y en particular de la reciente LOMLOE en cuanto a los estudiantes de Educación Secundaria se refiere, es la de “propiciar el aprendizaje competencial, autónomo, significativo y reflexivo” según el Real Decreto 217/2022, (2022, p.4). Esto es lo que conseguirá que los alumnos alcancen no solo un desarrollo académico adecuado, sino también un desarrollo personal, social y profesional que les permite ahora y en el futuro una

integración en la sociedad óptima a todos los niveles. Este objetivo pone de manifiesto la importancia de la consciencia por parte del alumno de su propio proceso de aprendizaje.

Por lo recién comentado, la dimensión socioafectiva del alumno, las impresiones que este tenga con respecto a su aprendizaje, y su gestión de este, cobra especial relevancia. Así, se considera vital para que los alumnos gestionen su propio aprendizaje y construyan hábitos de aprendizaje duraderos para toda su vida, que sean capaces de evaluar de forma crítica sus niveles de conocimientos y habilidades, su evolución en el tiempo, e identificar cómo y cuándo usar las estrategias adecuadas y tomar las decisiones dirigidas a una mejora de todo su proceso de aprendizaje. Es decir, el aprendizaje percibido es una realidad subjetiva muy a tener en cuenta.

Al ser importante para el alumnado, esto se hereda también para el docente y la comunidad investigadora. Se convierte en una necesidad conocer lo más posible esta realidad del alumno, realizar estudios sobre ella, y encontrar estrategias como metodologías de enseñanza, o utilización de determinados recursos para conseguir que el estudiante sea consciente de esta realidad y la utilice en su beneficio en la labor de aprender.

El entendimiento del aprendizaje percibido pasa por entender la importancia de la metacognición en el alumnado, es decir, de la capacidad de este para conocerse y ser reflexivo con su pensamiento y aprendizaje. La capacidad de un estudiante para entender e identificar de forma crítica sus capacidades, sus niveles de conocimiento y sus limitaciones forman parte del aprendizaje percibido, y es algo que como docentes estamos interesados en ayudar a mejorar pues forma parte del proceso enseñanza-aprendizaje. Por ello, es de gran interés como docentes o futuros docentes buscar formas o estrategias de hacer consciente al alumnado de la percepción de su propio aprendizaje, la importancia que esta tiene, y lo cercana o alejada que se encuentra de la realidad de conocimientos y competencias adquiridos. De igual forma, es necesario para el profesor conocer esta realidad subjetiva del aprendizaje percibido del alumnado y el rendimiento académico real de este. Así, resulta conveniente el desarrollo de herramientas que permitan realizar esta doble función, tanto para alumnado como profesorado, de hacer partícipe a cada parte de ambas realidades, así como también es vital poseer recursos que las acerquen lo más posible, y las mejoren.

Una de estas herramientas son las conocidas como estrategias y técnicas de aprendizaje, en especial las metacognitivas, que nos ocuparemos de exponer en la siguiente sección.

Kruger y Dunning (1999) hablan precisamente de la importancia de las habilidades metacognitivas necesarias para una autoevaluación precisa por parte del estudiante.

Sitzmann et al. (2010) también encuentran necesaria la profundización sobre el papel de las estrategias metacognitivas en el aprendizaje percibido. Entre las múltiples cuestiones que se detectan como reseñables están el efecto de las estrategias de autorregulación en el aprendizaje

percibido del alumnado, o cómo de preciso es este en cuanto al aprendizaje y conocimientos reales cuando el estudiante utiliza estrategias de aprendizaje.

En resumen, en nuestra tarea por ayudar a acercar las realidades de aprendizaje real y aprendizaje percibido en los estudiantes, consideramos fundamental el desarrollo de estrategias de aprendizaje adecuadas, la puesta en práctica continuada de estas para entrenarlas, y la retroalimentación sobre estas estrategias y sobre el aprendizaje del docente al estudiante.

2.2 Estrategias de aprendizaje. Metacognición.

Acabamos de introducir la importancia y el sentido que tiene en nuestro trabajo el papel de las estrategias de aprendizaje en el proceso de formación de un estudiante.

Estas son fundamentales, entre otros motivos, porque ayudarán significativamente en la mejora del rendimiento académico del alumno, en el desarrollo de habilidades metacognitivas que le permitirán conocerse mejor a sí mismo y ser capaz de autorregularse y ser más autónomo en el aprendizaje, y por tanto ser capaz de aprender a lo largo de toda la vida.

Por ello, en esta sección vamos a presentar qué son las estrategias de aprendizaje, cómo se clasifican y algunos ejemplos. Después, nos centraremos en particular en la que más nos interesan en este trabajo.

2.2.1 Estrategias de aprendizaje

Para empezar, revisemos algunas de las definiciones que sugiere la literatura para este concepto, pues al igual que no hay un consenso único sobre una definición de aprendizaje, tampoco lo hay sobre lo que se entiende por estrategia.

La realidad, es que hay cierta confusión sobre lo constructos de estrategia de aprendizaje, procesos de aprendizaje y técnicas de aprendizaje. Bien es cierto que hay relación entre las tres, pero son diferentes y es conveniente puntualizar las diferencias. Por ejemplo, y hablo de mi experiencia previa al cursar el Máster, es usual confundir o tratar como sinónimos los términos de estrategia de aprendizaje y técnica de aprendizaje, asociándolas ambas a tareas como la del subrayado.

Beltrán (2003) aclara un poco la distinción entre los tres términos comentados. Por un lado, los procesos (de aprendizaje) son las operaciones mentales (por tanto, ocultas o poco visibles) que están involucradas en el acto de aprender, como pueden ser la atención o la comprensión.

Por otro lado, las técnicas de aprendizaje son las actividades que habitualmente el público general denomina como técnicas de estudio. Estas son actividades visibles, y a veces mecánicas que realiza el alumno como pueden ser la realización de resúmenes o la repetición de las tablas

de multiplicar en alto.

Por último, las estrategias de aprendizaje están ubicadas entre los procesos y las técnicas. Estas herramientas no son rutinarias o repetitivas como pueden ser algunas técnicas, sino que implican una intencionalidad y una planificación del estudiante, el cual establece un plan de acción para la construcción significativa de su aprendizaje como puede ser la selección o la organización de la información disponible. Así, las estrategias de aprendizaje están íntimamente vinculadas con la calidad del aprendizaje del alumno, permitiendo identificar causas del alto o bajo rendimiento académico, y permitiendo a través de su buen manejo mejorar y optimizar el aprendizaje.

De esta forma, Beltrán (2003) se refiere a las estrategias de aprendizaje como “las actividades u operaciones mentales que el estudiante puede llevar a cabo para facilitar y mejorar la realización de la tarea, cualquiera que sea el ámbito o el contenido del aprendizaje”.

Otra definición, aportada por Weinstein y Mayer (1983) establece que las estrategias de aprendizaje “pueden ser definidas como conductas y pensamientos que un aprendiz utiliza durante el aprendizaje con la intención de influir en su proceso de codificación”.

Así la meta de una estrategia de aprendizaje debe ser la de influir en la manera en que el estudiante selecciona, adquiere, organiza e integra nuevo conocimiento.

Una última definición que aportamos es la propuesta por Monereo et al. (2000) que definen las estrategias de aprendizaje como procesos de toma de decisiones en los cuales el alumno elige y recupera, de manera coordinada, los conocimientos que necesita para cumplimentar un determinado objetivo.

Revisadas estas definiciones, podemos destacar entonces algunos elementos que consideramos fundamentales en este concepto:

- Son una secuencia de actividades o planes dirigidos a aprender.
- Tienen un carácter claramente intencional y consciente por parte del estudiante.
- Están relacionados con el procesamiento y codificación de la información.
- Dependen de las características de la situación de aprendizaje concreta.
- Las estrategias llevan asociadas las técnicas de aprendizaje.

A continuación, vamos a hacer una categorización de las estrategias de aprendizaje, siguiendo un esquema general que reúne la idea general de la literatura sobre el tipo de clasificaciones que se puede realizar.

2.2.2 Clasificación de estrategias de aprendizaje

En la literatura se proponen distintas clasificaciones de estrategias que optan por distintos criterios de agrupación, como las diferencias del objeto a las que van destinadas, su facilidad de ser enseñadas a los alumnos, grado de generalidad, o procesos cognitivos involucrados, por ejemplo.

Nosotros expondremos una primera gran agrupación, y a partir de esta detallaremos cada una en otros subgrupos conocidos en la literatura. Como recogen Valle et al. (1998), estando de acuerdo buena parte de autores, se puede establecer tres grandes grupos de estrategias: las estrategias cognitivas, las estrategias metacognitivas, y las estrategias de apoyo. Dentro de cada uno de estos grupos, se pueden hacer subclasificaciones atendiendo a diferentes elementos estudiados por diferentes investigadores, como haré yo en este caso:

- Estrategias cognitivas: Son las estrategias dedicadas a la integración del nuevo conocimiento al conocimiento que ya posee el alumno. Es decir, son las que utilizan los estudiantes para procesar y manipular la información con el fin de mejorar el aprendizaje. Estas estrategias están directamente relacionadas con la comprensión, la codificación, el almacenamiento y la recuperación de la información necesaria para determinado objetivo de aprendizaje. Podemos entender que estas estrategias son las que tienen que ver con los contenidos y las habilidades concretas de las tareas de aprendizaje, y son las que más común y fácilmente son enseñadas. Dentro de este grupo, pueden distinguirse otras clases. Por ejemplo, Weinstein y Mayer (1983) distinguen entre estrategias de repetición, de elaboración y de organización. Las primeras implican decir repetidamente los estímulos de una actividad para mantenerlos en la memoria a corto plazo, las segundas se encargan de integrar la nueva información con la ya almacenada en memoria, y las terceras tienen como objetivo combinar los elementos informativos en un todo que sea coherente y significativo.

Otra clasificación que atiende a los procesos psicológicos implicados en el aprendizaje, es la utilizada por Antón et al. (2005), que es la que he estudiado en la asignatura del máster “Aprendizaje y desarrollo de la personalidad” y detallo a continuación.

Distinguiamos entre estrategias de adquisición, codificación y recuperación:

- Adquisición de la información: son las dedicadas a seleccionar y traspasar la información percibida por los sentidos, a la memoria a corto plazo. Dentro de estas podemos distinguir entre atencionales, si tratan de hacer una selección de la información relevante, o de repetición, que se emplean para repasar una y otra vez la materia a aprender. A continuación, pongo algunos ejemplos concretando estas estrategias y respectivas técnicas en el ámbito de las matemáticas. Por

ejemplo, una estrategia atencional en matemáticas sería la lectura activa de un problema: realizar una prelectura para obtener una visión general de lo que se pide sin entrar en detalles y a continuación localizar los elementos clave. Un ejemplo de estrategia de repetición sería la iteración mental de la fórmula de resolución de ecuación de segundo grado.

- Codificación de la información: son las encargadas de pasar la información de la memoria a corto plazo a la memoria a largo plazo. Implica un procesamiento profundo donde a partir del conocimiento previo se integra la nueva información. Exige mayor esfuerzo y tiempo que las de adquisición. En estas estrategias consideramos la nemotecnia, la elaboración y la organización.

Un ejemplo de nemotecnia, podría ser la utilización de la frase “un día vi una vaca vestida de uniforme”, para recordar la expresión de la integración por partes. Un ejemplo de estrategia de elaboración sería la confección de un mapa conceptual en la hora de trabajar las áreas de las figuras geométricas usuales, dibujando la figura, escribiendo la fórmula de su área, y poniendo un ejemplo inmediato con datos.

- Recuperación de la información: son las encargadas de la búsqueda de información en la memoria y la generación de respuesta. Esto es, la búsqueda de palabras o representaciones icónicas, y el modo en que el estudiante organiza y produce la respuesta. Por ejemplo, una estrategia puede ser la recuperación de la regla nemotécnica anteriormente aprendida sobre integración por partes. Un ejemplo de estrategia de generación de respuesta es utilizar el modelo de resolución de problemas de George Pólya al enfrentarse a cualquier problema: comprender el problema (¿Qué me piden? ¿Qué tengo? ¿Cuáles son las condiciones?), trazar un plan (por ejemplo, buscar algún problema de similares características del que se pueda extrapolar algún razonamiento), ejecutar el plan (realizar lo planeado en la etapa previa) y examinar la solución obtenida (reflexionar sobre lo obtenido, y tenerlo en cuenta para problemas posteriores).

- Estrategias de apoyo: también llamadas de manejo de recursos, o afectivas por algunos autores. Estas estrategias potencian la utilidad de las estrategias de adquisición, codificación y recuperación, mediante la creación de un ambiente adecuado, incrementando la motivación, autoestima y atención del estudiante. Podemos hacer una subclasificación:

- Estrategias afectivas: consistentes en controlar nuestro entorno y nuestras propias emociones. Por ejemplo, buena gestión de las expectativas negativas, de la ansiedad o del esfuerzo realizado. También controlar el tiempo dedicado a cada tarea, tener una buena organización del ambiente de estudio libre de distracciones y con las herramientas adecuadas.
- Estrategias sociales: son aquellas en las que se involucra a otras personas. Por ejemplo, siendo capaz de pedir ayuda, o buscar interacciones sociales en las que se discuta sobre algún aspecto de la materia para aprender distintos puntos de vista.
- Estrategias motivacionales: son aquellas consistentes en la autoestimulación con la intención de activar, regular y mantener la conducta de aprendizaje del estudiante. Es decir, están relacionadas con la dimensión afectiva y motivacional del sujeto hacia el aprendizaje. Ya hemos destacado anteriormente en este trabajo la importancia de los elementos afectivos y motivacionales tanto en el aprendizaje como en el aprendizaje percibido. Y es que las metas y los motivos que posean los estudiantes condicionan en gran medida las estrategias concretas que utilizan en cada situación de aprendizaje por lo que la motivación es un elemento imprescindible para que el alumno empiece a utilizar y aprovechar las estrategias.

La identificación por parte del aprendiz de cómo de motivado hacia la tarea de aprendizaje está, y de dónde proviene esta motivación, es favorable para tener éxito en la actividad a la que se enfrenta. En este sentido, la motivación puede ser intrínseca o extrínseca dependiendo de su origen, siendo el primer tipo el ideal y más favorable durante el aprendizaje, pues hace que el estudiante esté más involucrado e interesado en su proceso de aprendizaje, comprometiéndose más con este lo que contribuye a una mayor autodeterminación y satisfacción personal. Por otro lado, la motivación extrínseca (proveniente de recompensas externas o evitación de castigos) no siempre son beneficiosas pues se genera una dependencia externa negativa, ya que estos agentes de motivación externa no siempre estarán presentes y el alumno tendrá una mala predisposición a afrontar el aprendizaje. Por tanto, la calidad del aprendizaje y la autonomía del estudiante se verán negativamente afectadas.

- Estrategias metacognitivas: son aquellas que se refieren a la planificación, control y evaluación por parte del estudiante de su propia cognición. Así, son un conjunto de

estrategias que están encargadas de conocer (autoconocimiento) los procesos mentales que pone en marcha el estudiante cuando procesa la información, y de controlar y regular (automanejo) aquellos procesos que sean óptimos para la meta concreta:

- El uso de estrategias de autoconocimiento implica por un lado que el alumno tenga conciencia de sus propias fortalezas, debilidades, preferencias y estilos de aprendizaje, ya que al conocerse a ellos mismos pueden identificar estos elementos con eficacia y son capaces de seleccionar los recursos de una forma adecuada a la tarea a abordar. Por otro lado, estas estrategias permiten al alumno determinar cuándo es adecuado usar una estrategia de aprendizaje, elegir y seleccionar la estrategia de aprendizaje más adecuada para una situación concreta, y comprobar durante y finalmente la eficacia de la selección realizada:
 - Por ejemplo, es importante que el estudiante conozca qué momentos son adecuados para la puesta en marcha de una tarea: al iniciar una nueva unidad, cuando se va a enfrentar a conceptos totalmente nuevos, el estudio diario, o los momentos previos a algún examen.
 - La selección de la estrategia también es relevante, y se verá influida por el momento concreto, la naturaleza de la tarea a la que se enfrente, los conocimientos previos o las preferencias personales entre otros. Si el estudiante se dispone a realizar una sesión de estudio individual tras haber dado en clase conceptos nuevos sobre una rama con la que está familiarizado como la aritmética, quizá utiliza estrategias de lectura previa y asimilación de los conceptos y visualización de pequeños ejemplos de ejercicios simples. Mientras que, si se encuentra en periodos previos a un examen, quizá quiere enfrentarse a problemas complejos para comprobar su nivel de conocimiento, y realizar autoevaluaciones para determinar cómo de preparado cree que está para la prueba, o reunirse con compañeros para compartir y comprobar su nivel y hacer comparaciones que le ayuden a situarse.
 - La comprobación de la eficacia de las estrategias de aprendizaje utilizadas es en sí una estrategia de aprendizaje. Es crucial que el alumno verifique si las estrategias que está utilizando, están ayudando a lograr el objetivo que buscan. Acciones como pedir retroalimentación al profesor o a los compañeros, realizar autoevaluaciones y reflexiones tanto de los contenidos supuestamente aprendidos de la materia como de los procesos utilizados para llevar a cabo el aprendizaje, y ser capaz de evaluar y situar

críticamente el nivel del propio aprendizaje percibido, son extremadamente importantes para tomar acciones posteriores coherentes con el proceso de aprendizaje.

Las estrategias como autoevaluaciones, cuestionarios y tareas interrogativas, las consideramos muy alineadas con los objetivos de este trabajo de fin de máster, por su capacidad de explicar tanto el aprendizaje como el aprendizaje percibido del alumno, y es por ello que trabajaremos con ellas más adelante.

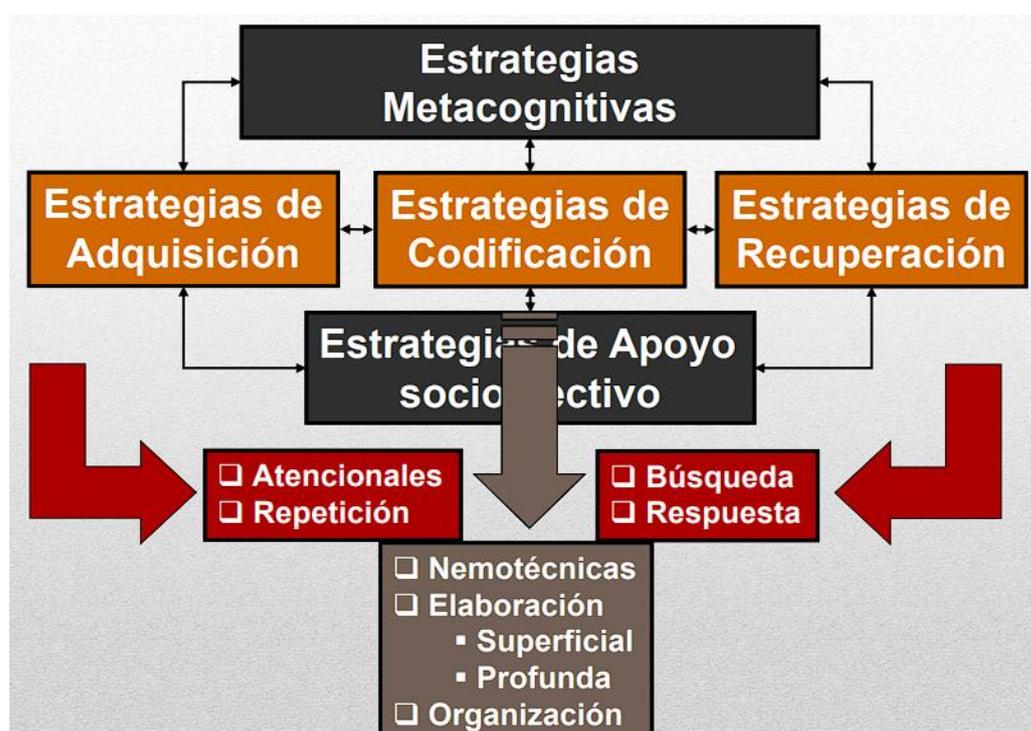
- El uso de estrategias de automanejo ayuda al estudiante a ser más consciente de su proceso de aprendizaje, consiguiendo que tome responsabilidad sobre este y se implique a lo largo de todo lo que conlleva. Así, estas estrategias están destinadas a planificar su aprendizaje, evaluarlo, y por último regularlo:
 - La planificación pasa por el establecimiento de metas de aprendizaje por parte del estudiante. Es muy importante el proceso de elección de estas metas, pues el nivel de conocimiento de la situación de aprendizaje y autoconocimiento del alumno influirá en gran medida en él. Estas metas han de ser lo más claras y específicas posibles, que se puedan medir para ser capaces de hacer una autoevaluación posterior, y deberían ir enmarcadas en un periodo de tiempo. De igual forma, las metas han de ser realistas, es decir alcanzables, y deben tener algún sentido académico o personal de aprendizaje. Ejemplos de estas estrategias pueden ser, al enfrentarse a una sesión de estudio, establecer una meta dividida en pequeños objetivos, asignar un tiempo a la sesión o decidir el orden en que estará organizada la sesión.
 - La evaluación, en el sentido de valoración y comprobación del grado de cumplimiento de los objetivos propuestos, es también una estrategia de aprendizaje. Aquí entran técnicas como las autoevaluaciones, cuestionarios o simulaciones de exámenes. Hay que tener en cuenta, que parte de las conclusiones que el alumno saque de estas estrategias pueden ser subjetiva, de ahí la importancia de la metacognición. Al igual que en las estrategias de autoconocimiento, las tareas interrogativas y autoevaluaciones son de especial interés en este trabajo, ya que le permiten al alumno. Por ejemplo, cuestiones sobre la propia materia, sobre el nivel que cree que tiene el estudiante y el que se le pide o los

motivos por los que cree que llega a esas conclusiones son preguntas interesantes en este tipo de estrategias.

- La regulación de la conducta y de las estrategias se considera también una estrategia de aprendizaje. Tras hacer una evaluación de algún aspecto del aprendizaje y analizar las causas que han podido llevar a la consecución o no de los objetivos planteados inicialmente, es necesario realizar modificaciones que acerquen al estudiante al logro o mejora de estos objetivos. Por ello las estrategias de evaluación son tan importantes, ya que condicionan las medidas tomadas posteriormente. Esta regulación puede hacerse a muchos niveles, dependiendo del análisis realizado: se pueden revisar las metas propuestas, cómo de realistas eran, la gestión del tiempo, el compromiso con el plan demostrado, las estrategias utilizadas...

La clasificación recién detallada, trata de enmarcar todas las estrategias de aprendizaje que preparan al alumno y su entorno para tener éxito en su proceso de aprendizaje. Hemos presentado las estrategias como un conjunto de herramientas o actividades dirigidas a facilitar el aprendizaje del aprendiz. Así, es esencial para el alumno tener estrategias de aprendizaje adecuadas, así como ser capaz de determinar cómo, cuándo y por qué utilizarlas, controlar su eficacia, y ajustarlas según las demandas de la actividad que lleve a cabo. La siguiente figura, recoge gráficamente las estrategias de las que hablamos.

FIGURA 1 ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE (APUNTES APRENDIZAJE Y DESARROLLO DE LA PERSONALIDAD, ANTÓN, 2022)



2.2.3 Evaluación de las estrategias de aprendizaje

Para los alumnos en general, el área de las estrategias de aprendizaje es algo que no resulta tan cercano como el conocer las materias que tienen en cada curso. Por supuesto dependerá del alumno. Algunos conocerán qué son las estrategias de aprendizaje y pondrán en práctica alguna técnica de aprendizaje; otros las pondrán en práctica sin ser totalmente conscientes, y otros simplemente no serán conocedores de su existencia. Como se ha dicho anteriormente, es conveniente la enseñanza de estrategias de aprendizaje a los alumnos. Ahora bien, es interesante saber primero qué conocimientos tiene cada uno de los estudiantes de estas herramientas y el uso que le dan. Por ejemplo, una manera de averiguar esta realidad del estudiante puede ser directamente a través de la observación en el aula fijándonos en cómo plantea y qué procesos sigue en la tarea de aprendizaje al inicio, durante y finalización de esta. O a través de una entrevista personal con él. Estos enfoques serían de gran utilidad seguro, sin embargo, hay otros que permiten evaluar las estrategias de los estudiantes de una forma mucho más rápida, permitiendo tratar la información obtenida de manera más cómoda cuando nos interesamos por muchos alumnos (Beltrán, 2003). Con el fin de diagnosticar las estrategias del alumnado, se han confeccionado una variedad de escalas o instrumentos de medida con numerosos ítems. Las escalas se corresponden con una categoría general que agrupa varias estrategias de aprendizaje relacionadas, mientras que los ítems de cada escala son las preguntas o afirmaciones que se plantean a las que el estudiante debe responder para medir cada estrategia de aprendizaje particular. A continuación, enumeramos los instrumentos más utilizados en Educación Secundaria según consideran Beltrán (2003) y Antón et al. (2005):

- *LASSI (Learning And Study Strategies Inventory)*: compuesto por 77 ítems y 10 escalas. Las escalas miden las actitudes, la motivación, el procesamiento de la información, habilidades de aprendizaje, el control del tiempo, la ansiedad, la concentración, la idea principal, las ayudas a la hora de estudiar y la autoevaluación.
- *CEA-R*: compuesto por 90 ítems y 4 escalas. Las escalas son autonomía (estrategias metacognitivas), voluntad (estrategias de apoyo) y capacidad (estrategias cognitivas de elaboración y personalización). Las subescalas miden: la recuperación, la transferencia, la planificación, la regulación/evaluación, la motivación, las actitudes, el control emocional, la selección, la organización, la elaboración, el pensamiento crítico y el pensamiento creativo.
- *IDEA (Inventario de estrategias de aprendizaje)*: compuesto por 153 ítems y 14 factores. Los factores miden: el aprendizaje reflexivo, las condiciones para el aprendizaje, la

búsqueda adicional, la metacognición, el diseño de tareas, los exámenes, el aprendizaje repetitivo, la percepción de control, la motivación, la actitud asertiva con el profesor, la expresión oral y escrita, la representación del conocimiento, el establecimiento de conexiones y la atención.

- *MSLQ (Motivated strategies for learning Questionnaire)*: compuesto por 90 ítems y 12 factores. Los factores miden: la capacidad de control, la ansiedad, la autoeficacia, la motivación intrínseca, la orientación a la meta, el manejo del contexto, el pensamiento crítico, la metacognición, la elaboración, la organización, y la adquisición y repetición de la información.
- *ACRA (Adquisición, Codificación, Recuperación y Apoyo)*: compuesto por 119 ítems y 4 escalas. Las escalas miden: la adquisición de la información, la codificación de la información, la recuperación de la información y el apoyo al procesamiento. En particular, evalúan la utilización de por parte de los alumnos de 7 estrategias de adquisición, 13 de codificación, 4 de recuperación y 9 de apoyo. Los resultados que se obtienen con este instrumento facilitan una evaluación tanto cuantitativa (puntuación total de la escala y de cada estrategia individual) como cualitativa (identificación de las dificultades específicas de aprendizaje del estudiante), lo cual es muy útil para el diagnóstico y orientación del alumnado.

Los ítems específicos de estos instrumentos no están disponibles abiertamente siendo necesaria la compra de la herramienta, los permisos especiales o la licencia para ver su contenido. Igualmente, existen algunas adaptaciones interesantes como la que propone Txabarri (2016). Aunque no profundice en estas escalas y no me pueda servir de los ítems que utilizan, la existencia de estas y el objetivo que pretenden cumplir nos sirve en este trabajo para poner en valor la necesidad y utilidad de estar informados como docentes de la relación con las estrategias de aprendizaje de nuestros alumnos.

2.2.4 Papel del profesor de matemáticas con respecto a las estrategias de aprendizaje

Es sabido que el conocimiento y puesta en marcha de estrategias de aprendizaje por parte del alumnado durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, es fundamental para el desarrollo tanto personal como académico, independientemente de la materia tratada. En la materia que nos interesa en particular según Txabarri (2016, p.490) “el empleo de estrategias metacognitivas correlaciona positivamente con el rendimiento en matemáticas”. Parte de la importancia de estas herramientas metacognitivas en los alumnos, radica en saber seleccionar las estrategias adecuadas

para aprender matemáticas, pues no todas son eficaces. Por ejemplo, las estrategias de repetición o de memorización de definiciones no son aconsejables pues ignoran una comprensión profunda de los conceptos, la interconexión entre ellos y la aplicabilidad a diversos tipos de problemas, aspectos fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas. De hecho, estas estrategias están asociadas negativamente con el rendimiento en matemáticas.

Así, se presenta como necesario que el docente incluya en su trabajo la enseñanza de las estrategias tanto cognitivas como metacognitivas, y cómo ponerlas en práctica. En esta línea la literatura demuestra que el entrenamiento en uso de estrategias de aprendizaje en matemáticas da buenos resultados tanto en la mejora del uso de las estrategias, como en el desempeño matemático concreto (Txabarri, 2016; Carbonero y Navarro, 2006).

Teniendo todo lo anterior en cuenta, algunas de las acciones que podría llevar a cabo en relación con la enseñanza de estrategias de aprendizaje son:

- Realizar un primer diagnóstico de la relación de sus alumnos con las estrategias de aprendizaje, bien con alguna de las escalas presentadas en este trabajo, bien de una forma individualizada a través de entrevistas, o bien con los medios que tenga disponible. Esto dará una base para tomar decisiones sobre qué estrategias enseñar y cómo.
- Realizar una evaluación, o tener una idea a partir de la ya realizada de forma continua en el curso sobre los conocimientos y competencias matemáticas de sus alumnos. Esto proporcionará una visión de la realidad del aprendizaje de los alumnos.
- Realizar una evaluación del aprendizaje que los alumnos perciben que tienen, esto es una visión sobre el aprendizaje percibido, antes y después de la evaluación comentada en el punto anterior. Con esto, se tendrá un esquema de en qué punto se encuentran las realidades de aprendizaje y aprendizaje percibido, y también se obtendrá una noción de la metacognición.
- Enseñar estrategias de aprendizaje específicas y útiles, tanto cognitivas como metacognitivas y de apoyo.
 - Por ejemplo, en la resolución de problemas, mostrar formas de abordarlos como el método de Pólya, u estrategias de actuación: entender el problema, buscar problemas similares, separar el problema en partes más asequibles, considerar casos sencillos particulares, realizar dibujos o gráficas, trabajar hacia atrás...
 - Insistir en la importancia de planificar el estudio en casa, horarios, zonas de estudio, objetivos a alcanzar.
 - Hacerse preguntas a uno mismo: ¿comprendo lo que estoy estudiando? ¿Lo he aprendido? ¿Sino lo comprendo, persevero? ¿Puedo relacionarlo con conocimientos previos? ¿Conozco herramientas para trabajarlo? ¿Puedo poner ejemplos o usos de lo que he aprendido?

- Reflexionar sobre las estrategias empleadas: ¿Identifico las estrategias que más me convienen en cada área? ¿Soy consciente de las estrategias utilizadas? ¿Han resultado útiles y eficaces? ¿Me desenvuelvo bien con ellas? ¿Puedo mejorarlas o adaptarlas? ¿Cambio de estrategia si no tengo éxito con la utilizada? ¿El aprendizaje logrado se corresponde con lo que se espera de mí?
- Pedir ayuda si lo considera necesario, en casa, a compañeros, al profesor.
- Poner a disposición del alumno los recursos necesarios y guiarlos en su uso para que sea capaz de desarrollar su aprendizaje por múltiples vías. Por ejemplo, mostrándoles el uso de la tecnología para apoyar y enriquecer su aprendizaje (bien software como por ejemplo GeoGebra, o herramientas como la calculadora u otro material).
- Establecer los objetivos y las formas de evaluar de una forma clara y precisa: esto ayudará a los alumnos a entender mejor qué se espera de ellos y cómo tendrán que demostrar su aprendizaje, promoviendo así su autorregulación.
- Proporcionar retroalimentación continuada y constructiva. Es conveniente que el profesor evalúe formativamente a los alumnos con diferentes actividades y pruebas, y tan pronto como sea posible proporcionar comentarios sobre las evaluaciones para que puedan entender los fallos y corregirlos. También, el docente debe ser lo más específico posible, identificando y explicando cuáles son los errores más comunes, y desglosando paso a paso el proceso de resolución de las tareas para ver cómo corregirlos. Además, ayudar al alumno a orientar sus esfuerzos a metas en línea con la retroalimentación recibida, por ejemplo, si el estudiante domina las estrategias y procesos de resolución de problemas, pero siempre se equivoca en los cálculos, podemos aconsejar que a partir de ahora trate de estar más concentrado y hacer con calma las cuentas, comprobándolas al final también. Como hemos remarcado ya en este escrito, la retroalimentación es esencial para que la relación entre aprendizaje y aprendizaje percibido sea fuerte, ya que los alumnos la utilizarán como guía en su tarea de conocer su aprendizaje y regular sus estrategias para ajustarlas al objetivo planteado, corrigiendo o reforzando las conductas que considere.
- Crear un entorno de aprendizaje positivo: desde el planteamiento de las situaciones de aprendizaje y hasta las relaciones interpersonales en la clase. Por ejemplo, fomentar un ambiente en el que los errores no se perciban como algo negativo y penalizable, sino como fuente de aprendizaje, ya que nos da información sobre dónde puede el alumno tener más dificultades, y gracias a esto puede redirigir sus esfuerzos y replantear sus metas. Es interesante el análisis y la propuesta que hace Rueda (2022) sobre los errores matemáticos para el aprendizaje.
- Crear un entorno de aprendizaje motivador. Y es que la dimensión afectiva está muy vinculada con las estrategias de aprendizaje. Las estrategias de aprendizaje no pueden ser concebidas de forma aislada como herramientas cognitivas que utilizar para ayudar al

aprendizaje, ya que la dimensión motivacional es la que condiciona la puesta en marcha de estas, por lo que la motivación es un requisito previo para utilizar estrategias. Si bien es cierto que para lograr un buen aprendizaje son necesarias capacidades, conocimientos y estrategias, “también se precisa de una disposición favorable por parte del estudiante para poner en funcionamiento todos los recursos mentales disponibles que contribuyan a un aprendizaje eficaz” (Valle et al., 1998, p.60).

2.2.5 Importancia de la metacognición y de las estrategias metacognitivas en este trabajo

La metacognición en el contexto del aprendizaje implica reflexionar sobre los propios procesos de pensamiento, sobre qué estrategias conocemos y sabemos utilizar, y sobre cuáles utilizamos, cuándo, cómo, en qué condiciones y por qué dependiendo de la demanda de la situación de aprendizaje.

Como se ha expuesto recientemente, es favorable para el alumno conocer y disponer de un abanico de estrategias de aprendizaje cognitivas durante su proceso de aprendizaje, pero estas carecen de sentido si no se tienen en cuenta las estrategias de apoyo y metacognitivas que las acompañan. Es fundamental que el alumno posea consciencia, conocimiento y control de sus propios procesos mentales, tanto a nivel afectivo, como estratégico frente a la tarea. Como indican Valle et al. (1998, p.59):

Una buena base de conocimientos de las características y demandas de la tarea, de las capacidades, intereses y actitudes personales, y de las estrategias necesarias para completar la tarea, son requisitos básicos de la consciencia y conocimientos metacognitivo; a lo que debemos de añadir la regulación y control que el propio sujeto debe ejercer sobre todo lo anterior.

Esto implica entre otras cosas ser capaz de identificar sus capacidades y limitaciones. Ahora bien, buena parte del conocimiento que el alumno tiene o va desarrollando tanto sobre sí mismo como de las situaciones de aprendizaje (en nuestro caso, en el ámbito escolar), lo hace a través de su realidad subjetiva de apreciaciones, percepciones y comprensiones. En este sentido, si no tiene las herramientas metacognitivas suficientes o no tiene un buen desarrollo de estas, el aprendizaje percibido y el grado de importancia que le otorgue puede variar mucho con respecto al que realmente ha adquirido o el desempeño que se espere de este.

Por esto mismo resulta tan adecuado que los alumnos se conozcan, conozcan sus procesos cognitivos, y sean capaces de juzgar lo más realista y críticamente su realidad, para que la relación entre su aprendizaje percibido y su aprendizaje real sea la más fuerte posible. Así, serán capaces por un lado de comparar en qué punto se encuentra cada realidad, cómo de distanciadas están, y qué herramientas o estrategias utilizar para acercarlas entre sí. Uno de los objetivos buscados con

esto, por supuesto, es el óptimo desempeño académico del alumno, y el empleo de estrategias metacognitivas correlaciona de forma positiva con el rendimiento en Matemáticas.

El conocimiento metacognitivo del estudiante incluirá pues, variedad de elementos relativos a su desarrollo y desempeño académico. Por un lado, la comprensión de las capacidades y limitaciones en cuanto al conocimiento propio de las matemáticas. Por otro lado, la comprensión de la dificultad de la actividad concreta a la que se enfrenta con relación a sus conocimientos. Y, por otro lado, la capacidad de entender el papel y usar variedad de estrategias de aprendizaje para lograr su objetivo de aprendizaje. De forma resumida: qué sabe el alumno, cómo percibe la tarea que tiene delante, y qué estrategias sigue para superarla.

2.2.6 Importancia de las estrategias de aprendizaje y la metacognición en la LOMLOE

La ley educativa en vigor en España es la LOMLOE, esta es la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. El Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, establece propiamente el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

La utilidad y necesidad de las estrategias de aprendizaje y la metacognición en el desarrollo del alumno, viene respaldada por los objetivos que estos decretos establecen en las primeras páginas para la Educación Secundaria. Estos son los que se espera que el alumnado haya conseguido al finalizar la etapa. Así, la ley subraya la necesidad de propiciar el aprendizaje competencial, autónomo, significativo y reflexivo.

De entre los 15 objetivos a los que busca contribuir la Educación Secundaria en Castilla y León, destacamos en relación con el tema tratado en este trabajo los siguientes, pues las estrategias de aprendizaje y la metacognición ayudan en su consecución:

- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Desarrollar las competencias tecnológicas básicas y avanzar en una reflexión ética sobre su funcionamiento y utilización.

El perfil de salida de los estudiantes establece las competencias clave que estos han de haber desarrollado al finalizar la etapa, y por tanto es el pilar sobre el que se construye las estrategias, y decisiones curriculares y su puesta en práctica. Estas competencias clave, por un lado, garantizan el logro de los objetivos arriba comentados. Por otro, están estrechamente vinculadas con los retos y desafíos del siglo XXI con los que el alumnado tendrá que confrontar, pues han sido definidas en parte con esas referencias. Así, se espera que cualquier alumno que alcance el

Perfil de salida sea capaz de utilizar sus aprendizajes para hacer frente a estos retos y desafíos. De entre los retos comentados, la metacognición y las estrategias de aprendizaje consideramos que tienen especial valor en los siguientes:

- Aceptar la incertidumbre como una oportunidad para articular respuestas más creativas, aprendiendo a manejar la ansiedad que puede llevar aparejada
- Desarrollar las habilidades que le permitan seguir aprendiendo a lo largo de la vida, desde la confianza en el conocimiento como motor del desarrollo y la valoración crítica de los riesgos y beneficios de este último.

Centrándonos ahora en las competencias clave recogidas en el Perfil de salida, el conocimiento y uso de estrategias de aprendizaje y el desarrollo de la metacognición aportan valor a las siguientes:

- Competencia en comunicación lingüística (CCL): Tiene especial importancia con las estrategias metacognitivas y la metacognición, aunque también con las de apoyo. Ser capaz de expresarse de forma oral y sobre todo escrita, para hacerse preguntas a si mismo. De igual forma, poner en práctica habilidades comunicativas a la hora de pedir ayuda a distintas personas en diferentes contextos.
- Competencia plurilingüe (CP): En el caso concreto de las matemáticas, estas pueden ser entendidas como una lengua propia, gozando de universalidad, con su propio conjunto de símbolos como vocabulario, y reglas.
- Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM): Utilizando el pensamiento crítico, para entender y explicar sus propios procesos de pensamiento, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad.
- Competencia digital (CD): Reconociendo las tecnologías digitales como un recurso o estrategia más que potencia el aprendizaje. Utilizando internet y variedad de software matemático para construir conocimiento, y siendo capaz de seleccionar la herramienta digital que más se adecue a la tarea de aprendizaje.
- Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA): Esta es la competencia clave más vinculada con la metacognición. Esta competencia implica la capacidad de reflexionar sobre uno mismo para conocerse, aceptarse y fomentar un crecimiento personal constante; gestionar el tiempo y la información disponible de forma eficaz; colaborar con otras personas de forma constructiva; y gestionar el aprendizaje a lo largo de la vida. También, aprender a gestionar los procesos metacognitivos. Así, el uso de todo tipo de estrategias de aprendizaje promueve y demuestra la autoeficacia, la búsqueda de motivación hacia el aprendizaje. Y de igual manera, la realización de autoevaluaciones sobre el proceso de aprendizaje, la planificación de objetivos, la búsqueda de

retroalimentación para aprender de los errores, contribuyen al proceso de construcción de conocimiento y demuestran el logro de esta competencia clave.

- Competencia emprendedora (CE): En el sentido de Evalúa las fortalezas y debilidades propias, haciendo uso de estrategias de autoconocimiento y autoeficacia.

3 Propuesta de autoevaluación y tareas interrogativas

Una vez presentado en las secciones anteriores los conceptos de aprendizaje y aprendizaje percibido, resaltado la importancia que tiene en ellos la metacognición y la dimensión afectiva emocional, y presentado las estrategias de aprendizaje enfatizando en las metacognitivas, pasamos continuación a hacer una propuesta de técnicas cognitivas y metacognitivas, como ejemplo de estrategias de aprendizaje metacognitivas.

Es decir, en esta sección nos proponemos proporcionar herramientas útiles tanto para el alumno como el docente, que ayuden a hacer consciente y participe al alumno de su aprendizaje matemático percibido, y de las carencias que hacen que este esté más o menos distanciado del aprendizaje real. Esto puede ser el punto de partida que sirva de referencia para que tanto el alumno como el docente redirijan sus esfuerzos a mejorar sus puntos débiles.

La herramienta elegida para cumplir el objetivo arriba propuesto es la de la autoevaluación y las tareas interrogativas. Con estos instrumentos se pretende que los alumnos evalúen tanto sus aprendizajes como sus procesos, que reflexionen sobre estos de una forma activa, y que identifiquen así posibles fortalezas y debilidades que requieren mejora.

Proponemos una batería de cuestiones, que dividiremos por categorías. Las cuestiones se pueden adaptar a las circunstancias concretas de la situación. De todas estas, el docente podrá hacer una selección (como haremos nosotros en la propuesta didáctica) en función de sus objetivos y las situaciones de aprendizaje que plantee como el momento en el que quiera que se haga la reflexión (en casa, en la primera clase, después de una actividad...) o en qué aspecto concreto se quiera centrar.

Cuestiones sobre estrategias cognitivas
- ¿Practico haciendo problemas o ejercicios para comprender y afianzar conocimientos?
- ¿Recupero conocimientos previos al enfrentarme a la tarea?
- ¿Al estudiar Matemáticas relaciono lo que aprendo con lo que ya sé?
- ¿Organizo en tablas, cuadros o esquemas lo que aprendo en Matemáticas?
- ¿Copio lo que escribe el profesor en la pizarra?
- ¿Visualizo o hago un dibujo o gráfica de la tarea que tengo delante?
- ¿Comparo mis respuestas con las respuestas de mis compañeros?

- ¿Comparo mis respuestas con las escritas en la pizarra?
- ¿Comparo mis respuestas con las que proporciona el profesor?
- ¿Reflexiono mentalmente sobre la tarea que estoy haciendo?
- ¿Cuándo estudio matemáticas leo las definiciones y procedimientos del libro y apuntes?
- ¿Cuándo estudio matemáticas solo hago ejercicios y problemas?
- ¿Estudio matemáticas repitiendo definiciones, fórmulas para memorizarlas?
- ¿Repito varias veces los mismos problemas para memorizarlos?
- ¿Al resolver problemas, trato de encontrar la relación con otros similares?

Cuestiones sobre estrategias metacognitivas
- ¿Al empezar nuevo tema planeo cómo estudiarlo?
- ¿Pienso en cual puede ser la mejor forma de estudiar el tema antes de empezarlo?
- ¿Planeo qué y cómo voy a estudiar antes de empezar?
- ¿Intento calcular cuánto tiempo me llevará el estudio?
- ¿Me pregunto si entiendo las explicaciones del profesor?
- ¿Intento identificar el área que me causa mayor confusión?
- ¿Evalúo o me pongo nota a los ejercicios tras corregirlos?
- ¿Reflexiono sobre las respuestas que da el profesor a las preguntas de mis compañeros?
- ¿Antes de estudiar, me pongo objetivos de aprendizaje?
- ¿Me hago preguntas mientras estudio para asegurarme que estoy aprendiendo?
- ¿Mientras estudio, llevo un control de lo que he aprendido hasta ese momento?
- ¿Qué estrategias me han funcionado para aprender en este tema?
- ¿Me pregunto si conozco los materiales y recursos disponibles para el estudio?
- ¿Compruebo si entiendo bien lo que aprendo?
- ¿Intento resolver los problemas por distintos caminos si no lo consigo a la primera?

Cuestiones sobre estrategias de apoyo	
-	¿Tengo fijado un horario para hacer tareas?
-	¿Preparo un horario de estudio previo al examen?
-	¿Estudio en un lugar fuera de distracciones?
-	¿Me esfuerzo por mantener la concentración?
-	¿Trato de realizar la tarea en el tiempo previsto?
-	¿Cuándo me atasco, hago un esfuerzo por superar el obstáculo?
-	¿Si me cuesta lo que estoy estudiando, intento mantener la calma?
-	¿Pido ayuda al profesor si la necesito?
-	¿Pido ayuda a otros estudiantes si la necesito?
-	¿Recurso a otros materiales si lo necesito?
-	¿Escucho la retroalimentación que el profesor da a otros estudiantes?

Mientras que las cuestiones anteriores hacen referencia a estrategias cuyo actor principal es el alumno, las que propondremos a continuación tienen que ver con la percepción que este tiene sobre la labor docente. Así, todas las cuestiones se complementan pues cubren los dos agentes principales del proceso enseñanza-aprendizaje. Como hemos expuesto en secciones anteriores, hay investigaciones como la de Lo (2010) que destacan la relación positiva entre el aprendizaje y el aprendizaje percibido del estudiante con la satisfacción de este con el entorno de aprendizaje. Por esto, recogemos algunas cuestiones de la investigación nombrada que sería interesante incorporar en la práctica docente para conocer esta realidad del alumnado y utilizarla para mejorar la labor del profesor. Las cuestiones tienen que ver con la actuación del profesor, el compromiso con el aprendizaje, y las normas del curso:

Cuestiones sobre la satisfacción con el apoyo del profesor	
-	El profesor fomenta que los alumnos hagan preguntas.
-	Las tareas que propone el profesor requieren pensamiento crítico y creativo.
-	Siento que el profesor me trata justamente.
-	El profesor usa la tecnología adecuada para presentar el tema con claridad.

- El profesor es accesible para los estudiantes.
- El profesor organizó grupos colaborativos para trabajar.
- El/la curso/tema/actividad estaba bien organizado/a.
- El profesor utilizó la tecnología para brindar más apoyo a lograr los objetivos del curso.

Cuestiones sobre la satisfacción con el compromiso con el aprendizaje
- El profesor informa a menudo sobre el progreso de los estudiantes.
- El profesor me reta a entender conceptos e ideas.
- El profesor anima a que los estudiantes usen variedad de recursos.
- El curso/tema/actividad supuso un desafío intelectual.
- Soy más competente en esta materia gracias a este curso/tema/actividad.
- El profesor presentó los conceptos de una forma clara.
- El profesor fue un apoyo para cualquier necesidad académica.
- El profesor demostró un interés personal en mi éxito.

Cuestiones sobre la satisfacción con las normas del curso
- El profesor ha dado retroalimentación con mucha frecuencia para mantener a los estudiantes al día con las expectativas del curso.
- El sistema de evaluación y calificación y otras normas han sido comunicados con claridad.
- El profesor ha justificado claramente sus decisiones a la hora de evaluar y calificar.
- El plan de la asignatura ha sido preciso y útil.

Hay que ser especialmente cuidadosos con estas preguntas y no olvidar que, al ser percepciones de los estudiantes, las respuestas pueden estar influenciadas por aspectos como la relación con el profesor.

3.1 Propuesta para trabajar el aprendizaje percibido en geometría analítica

En la propuesta didáctica que elaboramos en el siguiente capítulo de este trabajo, trabajamos la geometría analítica y las estrategias metacognitivas, para hacer más consciente al alumno de su aprendizaje percibido, e intentar mejorar su aprendizaje y rendimiento. Las estrategias formuladas

son autoevaluaciones y tareas interrogativas, que tienen especial sentido cuando la evaluación es formativa (Sitzmann et al, 2010) ya que anima a los estudiantes a esforzarse en las carencias que se vayan encontrando. El plan creado trata de tener en cuenta los factores relacionados con el aprendizaje y aprendizaje percibido que hemos expuesto en capítulos anteriores de este trabajo.

El planteamiento contará con los siguientes elementos:

- Empleo de variedad de metodologías, de uso de recursos de enseñanza-aprendizaje, y de formas de evaluar. Con la intención de crear un entorno de aprendizaje rico, motivador y positivo.
- Numerosas oportunidades a lo largo de toda la propuesta para que el estudiante entrene la calibración de su aprendizaje, a partir de los siguientes instrumentos y retroalimentación posterior del profesor:
 - Un **cuestionario** inicial y final diagnóstico de estrategias de aprendizaje y la relación de los alumnos con las matemáticas. Servirá como base para comprobar cómo valoran el aprendizaje de las matemáticas.
 - **Autoevaluación intermedia.**
 - **Autoevaluación final,** con ítems que el profesor también utilizará en su evaluación. Usar la misma medida para la autoevaluación y la evaluación hace que tenga sentido la comparación de aprendizaje y aprendizaje percibido.

Los cuestionarios concretos están expuestos en las actividades de la propuesta didáctica del siguiente capítulo.

A continuación, confeccionamos para la propuesta didáctica una serie de tareas interrogativas de geometría analítica y el aprendizaje que se pretende reflejar respondiéndolas, que ayuden al estudiante a calibrar su aprendizaje percibido y el nivel de conocimientos, y comprobar en qué aspectos matemáticos puede tener carencias:

➤ **Conceptos**

- ¿Conozco cuáles son los conceptos clave de este tema? Escríbelos. ¿Conozco procedimientos y conexiones realizables entre ellos? Escríbelos.

Conocer de forma general los elementos clave y estructura matemáticos de la propuesta didáctica. Plano cartesiano, puntos, vectores y rectas. Cálculo de distancias, sumas de vectores y producto por un número, producto escalar, propiedades de las rectas y posición relativa.

- ¿Conozco el plano cartesiano, y cómo situar puntos en él? Escribe cuatro puntos que se sitúen en los cuatro cuadrantes y cuatro en los semiejes positivos y negativos. Dibújalos.

Entender las coordenadas, no cambiar el orden de estas y distinguir su posición según el signo.

- ¿Puedo explicar con mis palabras qué es un vector, sus características y darle un significado? Hazlo. ¿Se cómo se denota un vector y qué es útil para obtener uno? Construye vectores y di qué has necesitado para hacerlo.

Entender un vector como un segmento con una dirección, sentido y módulo. Puede construir uno a partir de un punto origen y un punto final, y las coordenadas del vector expresan las “instrucciones” para llegar del origen al final. Entender la notación de un vector y distinguirla de la de un punto, pudiendo calcular cualquiera de ellos a partir del resto de datos.

- ¿Puedo explicar con mis palabras qué es una recta? Hazlo. ¿Qué elementos necesitas para determinar una recta? ¿Puedes determinar una recta conociendo un punto? ¿Y dos? ¿y solo un vector director?

Ver que es una línea con una dirección y que contiene infinitos puntos. Se pretende que conozca formas equivalentes de determinar una recta: conocer un punto y una dirección, es decir es suficiente tener dos puntos, o un punto y un vector director, o un punto y la pendiente.

- ¿Distingo gráficamente los conceptos de punto, vector y recta? ¿Puedo graficar puntos y vectores a partir de sus coordenadas? Prueba a hacer los dos procesos.

- ¿Puedo explicar el concepto de pendiente con mis palabras? Hazlo. ¿Qué elementos necesitas para calcular la pendiente de una recta o un vector? ¿Qué significa geoméricamente la pendiente? Elige los elementos que consideres necesarios, y realiza el cálculo.

Entender la pendiente como la inclinación o dirección. Es suficiente conocer las coordenadas de un vector para calcularla, y es equivalente a la tangente del triángulo cuyos catetos son las componentes del vector.

➤ Procedimientos

- ¿Qué elementos necesito para calcular el módulo de un vector? ¿Cómo calculo el módulo? ¿Puedo representar gráficamente el proceso en el que se basa? Inventa un vector, calcula su módulo y grafica el significado geométrico.

Entender el proceso de cálculo de módulo de un vector. Determinar elementos necesarios para su cálculo, como las coordenadas del vector, o las coordenadas de los extremos del vector. Cálculo de módulo y relación con el Teorema de Pitágoras.

- ¿Cuál es el procedimiento para sumar y restar vectores? ¿Qué es el resultado? ¿Puedo representar gráficamente el procedimiento? ¿Puedes multiplicar un número por un vector?

¿Qué es el resultado? ¿Qué relación tiene la multiplicación con la suma o resta? Inventa vectores, realiza las operaciones recién comentadas y dibuja, tratando de dar respuesta a las preguntas.

Comprender el procedimiento de sumar vectores, entendiendo que el resultado es también un vector. Ver la multiplicación como sumas sucesivas o “alargamiento y encogimiento” del vector. Entender gráficamente tanto la suma como la multiplicación.

- ¿Conozco la fórmula del producto escalar de dos vectores? Escríbela. ¿Conozco los elementos involucrados? Explícalos. ¿Conoces el procedimiento de cálculo de producto escalar, qué necesitas para realizarlo, y qué se obtiene como resultado? ¿Qué elementos puedes obtener gracias a esta fórmula? ¿Qué ocurre con el producto si dos vectores son perpendiculares?

Conocer la fórmula y los elementos involucrados en ella. Saber hacer los cálculos para hallar el producto escalar y reconocer que el resultado es un número. Entender la utilidad de la fórmula para hallar ángulos entre vectores, módulos o coordenadas, dependiendo de los datos conocidos. Comprobar la ortogonalidad de vectores identificando el que el coseno del ángulo formado es cero, y realizando también el proceso de producto escalar.

- ¿Conozco la fórmula y los elementos involucrados para calcular el punto medio de un segmento en el plano? Dibuja un segmento y realiza el cálculo. ¿Entiendo el procedimiento de obtención de la fórmula? Dibuja el procedimiento.

- Conociendo dos puntos de una recta, ¿puedo construir la ecuación vectorial? Elige dos puntos y constrúyela. A partir de esta, ¿puedo hacer manipulaciones y deducir el resto de las ecuaciones de la recta, entendiendo qué es cada componente? Hazlo una por una, describiendo cada elemento que aparece en ellas. ¿Puedes graficar la recta? Hazlo.

Conocer y reconocer las distintas expresiones de una recta y el manejo y construcción de estas, identificando los elementos y componentes involucrados (componentes del punto, componentes del vector, pendiente, vector normal).

- ¿Puedo averiguar si un punto pertenece a una recta dada? ¿Puedo construir una recta a partir de dos puntos? ¿y a partir de un punto y un vector director? ¿y a partir de un punto y una pendiente? ¿y a partir de un punto y un vector normal a la recta? Prueba a construir una recta partiendo de cualquiera de las parejas anteriores, y obteniendo también el resto de las parejas.

Manejar condiciones suficientes y equivalentes para construir rectas, identificando cuándo queda determinada.

- Dadas dos rectas, ¿qué posiciones relativas pueden tener? Representalo geoméricamente. ¿En qué conceptos clave te fijas para conocer la posición relativa de dos rectas? Explica qué ocurre con estos conceptos en cada situación posible.

Comprender tanto analíticamente como geoméricamente todas las posibles posiciones relativas entre dos rectas. Entender y utilizar la pendiente como primer elemento clave para empezar a determinar la situación (paralelas y coincidentes, o secantes), seguidamente de la comprobación de algún punto en común para determinar la posición relativa por completo. Además, reconocer cuándo las rectas son perpendiculares.

➤ Estrategias

- Al enfrentarme a una tarea, ¿me pregunto qué elementos matemáticos intervienen en ella, y si los manejo? ¿Me pregunto qué herramientas, procedimientos o estrategias pueden ser útiles para resolverla? Realiza la práctica: antes de realizar un ejercicio o problema, responde a estas preguntas.

Llevar a cabo una organización en la resolución de tareas, planificando y reflexionando antes de tratar de resolverlas, ayudando así a identificar en qué partes se encuentran las dificultades.

- ¿Sé utilizar los conceptos y procedimientos para resolver problemas complejos que integren varios conocimientos, o solo se aplicarlos en ejercicios? Piensa en cualquier problema propuesto en clase o en el libro. Por ejemplo, en problemas que identifiques que hay que dividir un segmento en partes iguales, ¿has sido capaz de recurrir al razonamiento usado en el cálculo de punto medio? En problemas que encuentres cuestiones de simetría, ¿has identificado la fórmula de punto medio como posible herramienta útil? En cuestiones relativas a distancias o mediciones, ¿has identificado el cálculo de módulo de un vector como herramienta útil?

Estas tareas interrogativas sobre geometría analítica sirven al alumno a ser más consciente y responsable de su aprendizaje, pues permiten que este compruebe si realmente conoce lo que cree y pueda situar específicamente las dificultades y desalineamiento, siendo la base para redirigir sus esfuerzos. Además, pueden plantearse a lo largo y hasta el final de la propuesta, pues así el estudiante es capaz de ver un progreso aprendiendo y pudiendo responder a preguntas que antes no era capaz.

4 Propuesta didáctica

La propuesta didáctica que en esta sección vamos a plantear, están pensadas dentro del marco legal vigente marcado por la LOMLOE, de acuerdo con el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

En esta propuesta, se trata de tener en cuenta lo presentado en este trabajo poniendo en práctica algunas de las estrategias de aprendizaje explicadas, integrándolas con una serie de actividades con las que se pretende contribuir al desarrollo del perfil competencial deseado para el alumnado. De esta forma buscamos que sea una propuesta que trabaje en las competencias específicas de matemáticas a través de la geometría analítica (resolución de problemas, razonamiento y demostración, conexiones...) a la vez que en las competencias socioafectivas (manejo de emociones, autorregulación del aprendizaje, colaboración con iguales), resultando en lo que consideramos situaciones de aprendizaje más significativas.

4.1 Contextualización

Las tareas y actividades que se proponen en esta sección están destinadas para trabajar la asignatura de Matemáticas en una clase de 4º ESO Académicas (A), competencias que se sirvan mayormente de saberes como los que suponen la geometría analítica, y el sentido socioafectivo.

Para la correcta y completa puesta en práctica de esta propuesta, es necesario que el centro educativo en el que se desarrolle tenga una sala con ordenadores para que los alumnos trabajen individualmente o en parejas. Por otro lado, también es muy conveniente que el aula habitual tenga una pizarra digital o que se pueda proyectar un ordenador. Por ello, supondremos que el centro educativo en el que se desarrolla posee estas características. Este centro será un Colegio privado concertado del centro urbano de Valladolid, cuya oferta educativa abarca desde infantil hasta ESO. Centrándonos en la clase de 4ªA, algunos de los tutores familiares tienen carrera universitaria o similar, y otros menos formación, pero en general tienen una alta preocupación por la educación de sus hijos. La mayoría cuenta con empleos estables, pudiéndose permitir costear excursiones y viajes de fin de curso, recursos para la educación de sus hijos (academias...), así como teléfonos móviles para sus hijos, ordenadores y conexión a internet en casa. En cuanto a los estudiantes, son 21. No hay alumnado extranjero que pueda tener dificultades con el idioma. Tampoco hay alumnos que presenten alguna adaptación especial. Tienen buen manejo de nuevas tecnologías como el móvil, un nivel básico de herramientas como el Word o Excel gracias a la asignatura de tecnología, pero no conocen software de matemáticas como GeoGebra. El nivel de interés por las matemáticas es intermedio, habiendo pocos alumnos que les atraiga la materia y busquen profundizar en ellas, y otros pocos que no les guste ni motiven. El transcurso de la clase

es tranquilo, pero responden muy bien si se les motiva y dinamiza, mostrando interés y una actitud activa. Al estar acostumbrados en matemáticas a la metodología tradicional de explicación-tarea-deberes-corrección, acogen bien cualquier novedad siempre que les resulte bien más fácil o bien más divertida que esta.

4.2 Fundamentación curricular

A continuación, exponemos los elementos curriculares implicados en esta propuesta didáctica. Expondremos las competencias específicas que se trabajan, así como los contenidos (sentidos) matemáticos necesarios para desempeñar dichas competencias específicas. También, enumeraremos los criterios de evaluación que nos servirán para evaluar cada competencia específica. De igual forma, mostraremos a qué descriptores operativos están vinculados las competencias específicas, y por tanto qué competencias clave ayuda a desarrollar esta propuesta didáctica.

Así, se trabajará con geometría analítica para lograr los siguientes objetivos en los estudiantes:

- Comprender y consolidar los conceptos de coordenadas de un punto, las coordenadas y características de un vector, y la relación entre los conceptos.
- Conocer las estrategias de cálculo de módulo de un vector, de punto medio de un segmento y distancia entre puntos.
- Conocer y deducir expresiones de la ecuación de la recta, relacionándolas con los conceptos de punto y vector.
- Saber determinar la posición relativa de rectas estudiándolas analítica y geoméricamente.
- Establecer correspondencia entre las representaciones gráficas y analíticas de los concepto y procedimientos.
- Desarrollar habilidades para resolver problemas y cálculos.
- Conocer estrategias de autoevaluación y autorregulación del aprendizaje
- Desarrollar habilidades y conductas de trabajo en equipo.

4.2.1 Competencias específicas

Las competencias específicas (c.e.) que establece la LOMLOE para la materia de Matemáticas las recoge en cinco bloques: resolución de problemas (c.e. 1 y 2), razonamiento y prueba (c.e. 3 y 4), conexiones (c.e. 5 y 6), comunicación y representación (c.e. 7 y 8) y destrezas socioafectivas (c.e. 9 y 10). Resumimos en lo que sigue las competencias específicas trabajadas en esta propuesta:

- Competencia específica 1: Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.
- Competencia específica 2: Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE3.
- Competencia específica 5: Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1.
- Competencia específica 6: Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.
- Competencia específica 7: Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.
- Competencia específica 8: Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.
- Competencia específica 9: Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.

- Competencia específica 10: Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.

4.2.2 Descriptores operativos de las competencias clave involucradas

A continuación, recogemos los descriptores operativos de las competencias clave asociados a las competencias específicas anteriores:

- Competencia en comunicación lingüística (CCL):
 - CCL1. Se expresa de forma oral, escrita, signada o multimodal con coherencia, corrección y adecuación a los diferentes contextos sociales, y participa en interacciones comunicativas con actitud cooperativa y respetuosa tanto para intercambiar información, crear conocimiento y transmitir opiniones, como para construir vínculos personales.
 - CCL3. Localiza, selecciona y contrasta de manera progresivamente autónoma información procedente de diferentes fuentes, evaluando su fiabilidad y pertinencia en función de los objetivos de lectura y evitando los riesgos de manipulación y desinformación, y la integra y transforma en conocimiento para comunicarla adoptando un punto de vista creativo, crítico y personal a la par que respetuoso con la propiedad intelectual.
 - CCL5. Pone sus prácticas comunicativas al servicio de la convivencia democrática, la resolución dialogada de los conflictos y la igualdad de derechos de todas las personas, evitando los usos discriminatorios, así como los abusos de poder, para favorecer la utilización no solo eficaz sino también ética de los diferentes sistemas de comunicación.
- Competencia plurilingüe (CP):
 - CP1. Usa eficazmente una o más lenguas, además de la lengua o lenguas familiares, para responder a sus necesidades comunicativas, de manera apropiada y adecuada tanto a su desarrollo e intereses como a diferentes situaciones y contextos de los ámbitos personal, social, educativo y profesional.

- Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)
 - STEM1. Utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea diferentes estrategias para resolver problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario
 - STEM2. Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar los fenómenos que ocurren a su alrededor, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, planteándose preguntas y comprobando hipótesis mediante la experimentación y la indagación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y las limitaciones de la ciencia.
 - STEM3. Plantea y desarrolla proyectos diseñando, fabricando y evaluando diferentes prototipos o modelos para generar o utilizar productos que den solución a una necesidad o problema de forma creativa y en equipo, procurando la participación de todo el grupo, resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir, adaptándose ante la incertidumbre y valorando la importancia de la sostenibilidad.
 - STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la cultura digital e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos.
 - STEM5. Emprende acciones fundamentadas científicamente para promover la salud física, mental y social, y preservar el medio ambiente y los seres vivos; y aplica principios de ética y seguridad en la realización de proyectos para transformar su entorno próximo de forma sostenible, valorando su impacto global y practicando el consumo responsable

- Competencia digital (CD):
 - CD1. Realiza búsquedas en internet atendiendo a criterios de validez, calidad, actualidad y fiabilidad, seleccionando los resultados de manera crítica y archivándolos, para recuperarlos, referenciarlos y reutilizarlos, respetando la propiedad intelectual.
 - CD2. Gestiona y utiliza su entorno personal digital de aprendizaje para construir conocimiento y crear contenidos digitales, mediante estrategias de tratamiento de la información y el uso de diferentes herramientas digitales, seleccionando y configurando la más adecuada en función de la tarea y de sus necesidades de aprendizaje permanente.

- CD3. Se comunica, participa, colabora e interactúa compartiendo contenidos, datos e información mediante herramientas o plataformas virtuales, y gestiona de manera responsable sus acciones, presencia y visibilidad en la red, para ejercer una ciudadanía digital activa, cívica y reflexiva.

- Competencia a personal, social y de aprender a aprender (CPSAA):
 - CPSAA1. Regula y expresa sus emociones, fortaleciendo el optimismo, la resiliencia, la autoeficacia y la búsqueda de propósito y motivación hacia el aprendizaje, para gestionar los retos y cambios y armonizarlos con sus propios objetivos.
 - CPSAA3. Comprende proactivamente las perspectivas y las experiencias de las demás personas y las incorpora a su aprendizaje, para participar en el trabajo en grupo, distribuyendo y aceptando tareas y responsabilidades de manera equitativa y empleando estrategias cooperativas.
 - CPSAA4. Realiza autoevaluaciones sobre su proceso de aprendizaje, buscando fuentes fiables para validar, sustentar y contrastar la información y para obtener conclusiones relevantes.
 - CPSAA5. Planea objetivos a medio plazo y desarrolla procesos metacognitivos de retroalimentación para aprender de sus errores en el proceso de construcción del conocimiento.

- Competencia ciudadana (CC):
 - CC2. Analiza y asume fundamentamente los principios y valores que emanan del proceso de integración europea, la Constitución española y los derechos humanos y de la infancia, participando en actividades comunitarias, como la toma de decisiones o la resolución de conflictos, con actitud democrática, respeto por la diversidad, y compromiso con la igualdad de género, la cohesión social, el desarrollo sostenible y el logro de la ciudadanía mundial.

- Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC):
 - CCEC4. Utiliza con creatividad diversos medios y soportes, así como técnicas plásticas, visuales o audiovisuales para la creación de productos artísticos y culturales, tanto de forma individual como colaborativa, identificando oportunidades de desarrollo personal, social y laboral, así como de emprendimiento.

4.2.3 Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación para cada competencia específica que se considerarán, teniendo en cuenta los previstos por la ley para Matemáticas A, serán:

Competencia específica 1.

- 1.1 Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
- 1.2 Seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando su eficacia e idoneidad en la resolución de problemas

Competencia específica 2.

- 2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos adecuados y necesarios.

Competencia específica 5.

- 5.1 Deducir relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.
- 5.2 Analizar y poner en práctica conexiones entre diferentes procesos matemáticos, aplicando conocimientos y experiencias previas.

Competencia específica 6.

- 6.2 Identificar y aplicar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias realizando un análisis crítico.

Competencia específica 7.

- 7.1 Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos visualizando, ideas y estructurando procesos matemáticos.
- 7.2 Seleccionar entre diferentes herramientas, incluidas las digitales, y formas de representación (pictórica, gráfica, verbal o simbólica), valorando su utilidad para compartir información

Competencia específica 8.

- 8.1 Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, con coherencia, claridad y terminología apropiada.

- 8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana y en diversos contextos, comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.

Competencia específica 9.

- 9.1 Identificar y gestionar las emociones propias y ajenas y desarrollar el autoconcepto matemático, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.
- 9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas, aceptando la crítica razonada.

Competencia específica 10.

- 10.1 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa, tomando decisiones y realizando juicios informados.
- 10.2 Gestionar el reparto de tareas en el trabajo en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, responsabilizándose del rol asignado y de la propia contribución al equipo.

4.2.4 Indicadores de logro

Los siguientes indicadores serán los utilizados en las rúbricas para evaluar el grado de consecución de las competencias específicas por parte de los estudiantes:

1. Interpreta los enunciados, datos y conceptos clave en los problemas matemáticos. (Criterios de evaluación 1.1, 6.2).
2. Integra y conecta los conocimientos matemáticos ya adquiridos con los nuevos. (Criterios de evaluación 5.1, 5.2).
3. Idea estrategias para resolver problemas y las pone en práctica (Criterios de evaluación 1.2, 5.2, 7.1).
4. Utiliza lenguaje matemático para comunicarse tanto de forma oral como escrita (Criterios de evaluación 7.2, 8.1, 8.2).
5. Interpreta las soluciones de los problemas y valora su validez (Criterios de evaluación 2.1).
6. Entiende y utiliza la representación gráfica de los conceptos y estrategias matemáticas (7.1, 7.2).
7. Colabora al trabajar en equipo, aportando activamente y escuchando la aportación de los demás, siendo crítico y respetuoso. (Criterio de evaluación 10.1, 10.2).

8. Muestra una actitud crítica y positiva y trata de mejorar sus competencias matemáticas. (Criterios de evaluación 9.1, 9.2).

4.2.5 Contenidos

Los contenidos matemáticos tratados en esta propuesta serán la mayoría los propios de la geometría analítica. Los contenidos tal y como los recoge la LOMLOE como sentidos, son los siguientes:

- Sentido numérico:
 - 2. Cantidad: Realización de estimaciones en diversos contextos analizando y acotando el error cometido
 - 3. Operaciones: Operaciones con números reales en la resolución de situaciones contextualizadas
- Sentido de la medida:
 - Medición: La pendiente y su relación con un ángulo en situaciones sencillas: deducción y aplicación.
- Sentido espacial:
 - 1. Formas geométricas de dos dimensiones: Propiedades geométricas de objetos de la vida cotidiana: investigación con programas de geometría dinámica, modelización e impresión 3D o mediante modelos físicos.
 - 3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica: Modelización de elementos geométricos de la vida cotidiana con herramientas tecnológicas como programas de geometría dinámica.
- Sentido socioafectivo:
 - 1. Creencias actitudes y emociones: Reconocimiento de la importancia del esfuerzo y motivación en el aprendizaje. Práctica de la autoconciencia y autorregulación. Conocimiento y práctica de estrategias cognitivas y metacognitivas.
 - 2. Trabajo en equipo y toma de decisiones: Asunción de responsabilidades y participación activa. Pedir, dar y gestionar ayuda. gestión y la toma de decisiones adecuadas en la resolución de situaciones propias del quehacer matemático en el trabajo en equipo.

4.3 Metodología

En esta propuesta se plantea la puesta en marcha de distintas metodologías con el objetivo de enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje. Así, se atiende a la diversidad de estilos de

aprendizaje que pueda tener el alumnado, se presenta un proceso flexible que se adapte a la clase, se potencia el compromiso y la motivación de los estudiantes y se fomenta el desarrollo de habilidades necesarias para su futuro como el trabajo en equipo o la competencia digital.

Las metodologías elegidas que se llevarán a cabo serán:

- Clase magistral participativa: Presentamos la información (definiciones, teoremas, demostraciones...) de una forma organizada y clara para los estudiantes, haciendo uso de la pizarra o de la pizarra digital/proyector para enriquecer los contenidos de geometría. Durante la presentación piden opiniones y se debate, se hacen preguntas y se responden dudas a los estudiantes para mantener su atención y motivación, y comprobar que siguen bien la explicación. Además, se plantean breves ejercicios prácticos para que el alumno aplique en tiempo real lo que va aprendiendo.
- Aprendizaje cooperativo: Los estudiantes trabajan en grupos, planeados previamente por el profesor de forma heterogénea. En nuestro caso el trabajo en grupo se realizará tanto en clase, como si es necesario en casa. De esta forma los alumnos buscan objetivos comunes y para lograrlos interactúan activamente. Así cada estudiante aporta sus conocimientos y habilidades, y aprende de las del resto, promovándose la comunicación y la resolución de conflictos. Esta metodología aumenta la autonomía, motivación e implicación de los alumnos en su aprendizaje.
- Gamificación: Se presenta una actividad de aprendizaje a través de una dinámica de juego (puntos, competición...), resultando en general más divertida para los alumnos. Se utilizará esta metodología solo como elemento motivador para el inicio de la propuesta, para repasar conceptos previos y ver en qué situación está cada uno.

4.4 Desarrollo de las sesiones

La propuesta se construye sobre dos pilares: el diseño del plano de un pueblo/ciudad verde mediante el uso de la geometría y geometría analítica, y las estrategias de aprendizaje, en especial la metacognición.

Estas dos ideas se explicarán a los estudiantes desde el principio, para que estos tengan claro antes de empezar cuáles son las ideas de las próximas sesiones y planeen en torno a ello. El diseño de la ciudad se realizará en grupos en las últimas sesiones pues requerirá de los conocimientos vistos hasta entonces. La metacognición se trabajará desde la primera sesión, en la que a través de un cuestionario y debate se establecerán las líneas que es interesante que el alumno tenga en cuenta a lo largo de la propuesta didáctica. Al final de la propuesta, se realizarán unas tareas

interrogativas y reflexión sobre el cuestionario inicial para ayudar a que el alumnado sea consciente de una forma realista de su proceso de aprendizaje.

Es importante destacar, que el conocimiento, práctica y regulación de las estrategias de aprendizaje, son habilidades que se perfeccionan a lo largo de la etapa académica y el resto de la vida. Por ello, lo planteado en cuanto a ellas en esta propuesta didáctica tiene sentido enmarcado en un todo coherente en un plazo de tiempo considerable (un trimestre, curso completo...).

Por otro lado, remarcar que en todas las sesiones que a continuación se planean, se explicará a los estudiantes al inicio de la clase cuál es el plan para la sesión. Se tratará el contenido matemático tanto gráficamente como analíticamente. Además, se reconocerá el papel de protagonista del alumno haciendo la clase lo más participativa posible, haciendo preguntas a los estudiantes para asegurarnos que comprenden y reflexionan sobre el aprendizaje que están construyendo, y apoyándoles en las dudas o dificultades que planteen dándoles retroalimentación a menudo.

A continuación, se describe el plan para las sesiones. Las actividades y cuestionarios concretos que se llevarán a cabo están recogidas en la sección titulada “[Actividades por sesión](#)”. También, se plantearán a los estudiantes una serie de tareas interrogativas que aconsejaremos que tengan en cuenta desde el inicio hasta el final de la propuesta. Estas tareas son las elaboradas al final de la sección anteriormente presentada “[Propuesta para trabajar el aprendizaje percibido en geometría analítica](#)”.

4.4.1 Sesión I

En la primera clase, se explicará a los alumnos la idea sobre la que se trabajará las jornadas venideras: el diseño del plano de un pueblo/ciudad verde junto al trabajo de las estrategias de aprendizaje y metacognición. Se avisará a los estudiantes que se tendrán que preparar una sesión (la quinta) para darla ellos en grupos, intentando generar en ellos un sentimiento de responsabilidad, autonomía y compromiso de este punto en adelante. Así, lo primero que haremos será un breve debate sobre estas estrategias preguntando si saben lo que son, qué ejemplos conocen, si las utilizan, y qué utilidad ven en ellas. Después, entregaremos un pequeño cuestionario diagnóstico de las estrategias de aprendizaje para recoger estas ideas individualmente de cada estudiante. Dejaremos claro que esto es solo para hacernos una idea de qué punto partimos, para reflexionar y mejorar a partir de aquí. Es importante que este cuestionario lo recoja el profesor, pero una vez analizado se lo devolverá a los alumnos para que tengan el “rastros” del aprendizaje que van experimentando a lo largo del tiempo.

Una vez hecho esto, se realizará un Kahoot relativo al plano cartesiano, coordenadas de un punto, vectores y suma de vectores, con el que se pretende conseguir una activación de los conocimientos

previos que tenga cada estudiante. Al finalizar este, se repasará entre todos cada pregunta detalladamente explicando cada concepto para asegurarnos que todos fijan todos los conceptos, instando también a los alumnos a tomar apuntes. También se tratará de sacar ejemplos de su vida diaria donde aparezcan los vectores: representación de trayectorias, representación de magnitudes como fuerzas (física, tecnología), representación de velocidad y dirección de vientos o corrientes marítimas en meteorología, representación de dirección y desplazamiento en GPS, videojuegos...

En resumen, en esta sesión:

- Debate estrategias
- Cuestionario de estrategias y relación con las matemáticas. Se les devolverá tras revisarlo.
- Kahoot y explicación posterior de repaso y activación de geometría de años pasados.

4.4.2 Sesión II

Esta sesión se dedicará a presentar y trabajar el manejo de vectores para afianzar la confianza de los alumnos. Se comenzará terminando lo que quedase pendiente de la clase anterior. A continuación, se pasará a presentar el cálculo del módulo de un vector a partir del Teorema de Pitágoras con algún ejemplo concreto. Seguidamente se trabaja el producto de un vector por un escalar y la suma de vectores, se profundizará tanto como se pueda, viendo la suma de vectores gráficamente (método cabeza con cola y paralelogramo) y analizando las propiedades de los vectores tras multiplicar por según qué escalar. Todas estas explicaciones se harán en la pizarra con la participación de los alumnos, pero también se proyectarán usando GeoGebra, aprovechando para que se vayan familiarizando con el software. A continuación, se propondrán ejercicios para practicar, mismamente los ofrecidos por el libro de texto.

En resumen, en esta sesión:

- Terminar sesión anterior
- Explicación participativa de cálculo de módulo, producto vector por escalar, y suma vectores, usando y mostrando GeoGebra el profesor.
- Realización de ejercicios para practicar los conceptos.

4.4.3 Sesión III

Se comenzará la sesión dando voz a los alumnos para que planteen las dudas que hayan tenido hasta ahora, y resolviéndolas con la ayuda de los demás estudiantes en la medida de lo posible. Es importante haber cubierto todos conceptos relativos a puntos, definición de vectores, sumas y producto por escalar, pues los usaremos a partir de ahora.

En esta sesión se iniciará el trabajo entorno a el diseño de la ciudad/pueblo verde, ficticio, o inspirado en el suyo propio. Lo primero será hacer los grupos, de 3-4 personas cada uno, intentando que sean heterogéneos (en cuanto a niveles de aprendizaje, género, cultura...). Así, nos dirigiremos a la sala de ordenadores para dar allí la clase, donde, aunque haya grupos, se intentará que cada alumno o pareja de alumnos ocupen un ordenador. Se procederá a presentar GeoGebra a los alumnos, como software de matemáticas gratuito muy útil tanto para geometría como álgebra, análisis o estadística. Presentaremos a los alumnos la vista gráfica en 2D, la vista algebraica, y las herramientas de geometría que aparecen en la parte superior, invitándolos a que investiguen y prueben por su cuenta un breve periodo de tiempo.

Después presentaremos la primera actividad para el diseño del pueblo verde, que consistirá en el diseño de la bandera. La crearán a partir de puntos, vectores, segmentos, polígonos, y demás elementos planos, y se les pedirá condiciones que deben cumplir, así como su posterior descripción detallada para encargar la bandera a un diseñador (de forma ficticia). El archivo generado lo enviarán o guardarán para el profesor, al igual que las respuestas escritas a las preguntas.

En resumen, en esta sesión:

- Terminar la sesión anterior y formación de grupos
- Presentación GeoGebra en ordenadores
- Actividad de creación de la bandera y envío al profesor

4.4.4 Sesión IV

En esta sesión se trabajará en el aula habitual para tratar el producto escalar de vectores y la presentación y demostración del punto medio, pues las demostraciones son de las herramientas matemáticas que menos se ven en la ESO, y servirán a los alumnos para fortalecer el razonamiento y el desarrollo de procesos lógicos y ordenados a partir de conocimientos que ya saben para llegar a resultados desconocidos.

Primero se presentará mediante clase magistral participativa el producto escalar, haciendo ver los elementos que intervienen (vectores, módulo, coseno) y los cálculos necesarios. Se pondrán ejemplos y propondrán problemas tratando de ver la utilidad de estos cálculos en otros ámbitos como la física o tecnología, a la hora de calcular ángulos para hallar las componentes de una fuerza o una velocidad, y se hará un pequeño experimento práctico que ejemplifica un uso real del producto escalar. Se intentará que los alumnos deduzcan, pues tienen conocimientos de trigonometría, cual es el producto escalar de vectores perpendiculares, y paralelos.

La segunda parte de la clase se dedicará a la demostración de la fórmula del punto medio entre dos puntos, a partir del cálculo del vector que une los puntos, su mitad, y posterior suma del vector resultante al punto origen. Con esto se pretende (y así se verbalizará a los estudiantes) que los

alumnos encuentren el sentido detrás de las fórmulas y vean los razonamientos de las demostraciones como herramientas para hacer matemáticas, y no se aprendan de memoria algunas fórmulas como fórmulas mágicas que no se sabe de dónde salen. Se pondrá especial atención a que los alumnos sigan y entiendan con profundidad el proceso seguido y su rigor, destacando que la potencia de las matemáticas y parte de la ciencia radica en la solidez de las demostraciones. Y que el pensamiento crítico tiene mucho que ver con las demostraciones, pues ambos buscan a través de razonamientos lógicos y consistentes resultados en los que confiar.

Para terminar, se propondrán problemas que busquen la reflexión y requieran el entendimiento de los conceptos por parte del alumnado, más que el simple uso de fórmulas.

Se recordará a los alumnos que en la siguiente sesión realizarán presentaciones de la ecuación de la recta.

En resumen, en esta sesión:

- Explicación producto escalar
- Demostración fórmula punto medio
- Problemas

4.4.5 Sesión V

En esta sesión los grupos de alumnos deberán exponer al resto de la clase una ecuación de la recta diferente (se lo habrán preparado fuera de clase previamente): deben explicar cómo obtenerla a partir de otra ecuación de la recta, poner ejemplos concretos de cómo construirla a partir de dos puntos, un vector y un punto, o un punto y la pendiente (deberán mostrar que entienden cómo obtener puntos, vectores directores o pendiente de una recta, dados dos de los anteriores tres elementos). Deberán valerse de representación gráfica también.

Al inicio de la sesión tendrán unos minutos para consultar al profesor alguna duda breve. A continuación, presentarán.

Así habrá varios grupos que expongan la ecuación vectorial, después varios grupos que a partir de la vectorial deduzcan las ecuaciones paramétricas; a partir de estas, otros grupos mostrarán cómo obtener la ecuación continua; a partir de la continua otros expondrán la ecuación general; otros seguirán con la ecuación explícita; y por último terminarán los grupos de la ecuación punto-pendiente (esta se deducirá a partir de la ecuación continua, pues es inmediato calcular la pendiente). Entre exposiciones, tanto los alumnos como el profesor podrán hacer preguntas o puntualizaciones de lo explicado, asegurándose de la corrección del contenido y su comprensión.

Durante esta sesión los alumnos evaluarán a sus compañeros con una rúbrica que repartirá el profesor. Además, que varios grupos expongan las mismas ecuaciones conseguirá que los alumnos tengan referencias claras en las que fijarse para calibrar cuáles son sus niveles de

aprendizaje. De igual forma, los estudiantes desarrollarán habilidades comunicativas y sociales, se sentirán más cómodos exponiendo al ver a sus compañeros hacerlo, obtendrán retroalimentación constructiva tanto del profesor como del resto de la clase, observarán quizá distintas perspectivas de sus compañeros, y reforzarán la adquisición del contenido matemático pues es algo en lo que están directamente implicados y han trabajado sobre ello antes de ver las exposiciones del resto (normalmente el alumno no prepara las clases antes de recibirlas, sino que las estudia una vez vistas en clase).

En resumen, en esta sesión:

- Exposición de las ecuaciones de la recta por parte de los grupos de alumnos
- Coevaluación de las exposiciones

4.4.6 Sesión VI

En esta sesión se realizará algún ejercicio más sobre ecuaciones de la recta para asegurar el manejo y comprensión de lo expuesto por los alumnos en la sesión anterior.

Además, se comenzará a ver a través de estos problemas la posición relativa de rectas y puntos de corte. Esto no se tratará mediante fórmulas como aparecen en muchos libros de texto, sino que se trabajará de forma lógica. Así, con la participación de los alumnos se deducirá que en primer lugar basta comparar la pendiente de dos rectas para ver si se cortan, o si son paralelas o coincidentes. Entre estas dos últimas opciones, basta comprobar si un punto que está en una de las rectas también pertenece a la otra para determinar si las rectas son paralelas o coincidentes. Por otro lado, para el cálculo de puntos de corte entre rectas, basta recordar que esto ya lo hacían al resolver sistemas de ecuaciones el curso anterior. Las ecuaciones lineales de dos variables se representan gráficamente como rectas, siendo los puntos de la recta soluciones de la ecuación. Así, se mencionará a los alumnos que hay fórmulas para calcular lo trabajado en esa sesión, pero tiene mucho más sentido trabajar de forma lógica y recuperar y conectar conocimientos/herramientas matemáticas que ya conocen.

En resumen, en esta sesión:

- Realización de ejercicios sobre ecuaciones de la recta
- Deducción entre todos de posición relativa de rectas y puntos de corte
- Ejercicios.

4.4.7 Sesión VII

En esta sesión se dará voz a los alumnos para que planteen dudas o comentarios que les haya surgido hasta el momento. Como siempre, se tratará de responder con la participación del resto de compañeros.

Una vez finalizado esta parte, se repartirá una batería de preguntas interrogativas que trate de hacer reflexionar a los estudiantes sobre el aprendizaje percibido que han adquirido hasta ahora, así como otras cuestiones metacognitivas. Con estas preguntas buscamos que los estudiantes plasmen por escrito la perspectiva que tienen sobre su proceso de aprendizaje, pues esto les ayudará a identificar fortalezas y puntos débiles y evaluar la efectividad de las estrategias que utilizaron para regularlas y mejorar su aprendizaje.

Este cuestionario nos lo quedaremos nosotros para revisarlo y poder dar retroalimentación, y se entregará una copia a los alumnos en la sesión previa al examen. Tener los cuestionarios de esta sesión y la sesión I les servirá para seguir el rastro de su aprendizaje y ser más conscientes y responsables de este.

En resumen, en esta sesión:

- Periodo de consultas de los alumnos.
- Cuestionario autoevaluación

4.4.8 Sesiones VIII y IX

En estas sesiones se llevará a cabo el diseño simple de la ciudad verde con el apoyo de GeoGebra, y la entrega de tareas relacionadas con este diseño. Se trabajará manteniendo los grupos establecidos en sesiones anteriores. Se empezará explicando a los alumnos que tendrán que diseñar el plano de una ciudad verde con las herramientas de GeoGebra. Primero deberán hacer una pequeña búsqueda sobre el significado de ciudad verde. Su ciudad deberá cumplir con ciertas regulaciones (condiciones) que se les proporcionará, como número y característica de sus carreteras, edificios, superficie o distancia entre lugares clave. Además, se pedirá que describan cómo resolverían ciertas situaciones. Para estas sesiones trabajarán en equipo y se movilizarán contenidos relativos a geometría y geometría analítica, así como competencias socioafectivas, de modelización y resolución de problemas, de comunicación matemática, de conexión con otras materias y la vida cotidiana, y de desarrollo sostenible.

El archivo generado deberán enviarlo al profesor. Igualmente deberán entregar la resolución de las tareas en papel.

4.4.9 Sesión X

Al inicio de esta sesión los grupos podrán mostrar sus ciudades al resto de compañeros y comentar las cuestiones matemáticas que estimen oportunas que se resolverán entre toda la clase. A continuación, el profesor devolverá a los alumnos el cuestionario autoevaluativo de la sesión VII.

Después, se pedirá a los alumnos que realicen el mismo cuestionario de la sesión I, sobrescribiéndolo, pero en otro color. Se pedirá que observen si ha habido algún cambio en sus respuestas.

Después, los alumnos realizarán una autoevaluación mediante una rúbrica. Esta tratará algunos de los ítems que el profesor usará también para evaluar el aprendizaje de los alumnos, tanto con el examen como por el resto de los instrumentos (observación, entregas...). En este punto, los alumnos han tenido oportunidades y herramientas a lo largo de las sesiones con la realización de tareas matemáticas y cuestionarios reflexivos, para calibrar su aprendizaje percibido lo más ajustado al aprendizaje real posible, a la par que mejorar este último.

Así, al finalizar la sesión tendrán un buen abanico de evidencias sobre las que fundamentar la percepción que tienen de su aprendizaje, y los factores que han influido en este, así como la evolución que han tenido.

Con esto se pretende fomentar en el estudiante la cultura de la autoevaluación y metacognición como herramientas para calibrar mejor su aprendizaje y mejorar su rendimiento académico.

4.4.10 Sesión XI

En esta sesión se realizará un examen sobre los contenidos matemáticos tratados en las sesiones previas.

4.4.11 Sesión XII

En esta última sesión, se entregará a los alumnos su examen y corrección. Se les propondrá algunas preguntas para que reflexionen y plasmen lo que esperaban, lo sucedido, las diferencias, y los posibles motivos. Una vez más, con esto se pretende brindar herramientas y oportunidades a los alumnos para que desarrollen sus habilidades de evaluación crítica de su proceso de enseñanza-aprendizaje, y para que identifiquen líneas de mejora en las que dirigir sus esfuerzos.

Después, los alumnos junto con la retroalimentación del profesor realizarán una reflexión en forma de debate y de cuestionario sobre todo el proceso de aprendizaje experimentado en esta propuesta didáctica.

4.5 Actividades por sesión

4.5.1 Actividades sesión I

El cuestionario utilizado para el diagnóstico de estrategias de aprendizaje y la relación de los alumnos con las matemáticas tendrá las siguientes preguntas:

Cuestión	1. Nada de acuerdo 4. Totalmente de acuerdo			
	Valoración de las matemáticas			
Las matemáticas me parecen útiles para mi presente y futuro	1	2	3	4
Las matemáticas me parecen atractivas	1	2	3	4
Las matemáticas me resultan fáciles de entender y practicar	1	2	3	4
Las matemáticas son cercanas a mi vida cotidiana	1	2	3	4
Las matemáticas tienen aplicaciones prácticas en otras materias	1	2	3	4
Afectividad				
Suelo estar motivado/a al trabajar matemáticas	1	2	3	4
Confío en mis capacidades para aprender y entender conceptos matemáticos	1	2	3	4
Me estreso cuando no entiendo algo en matemáticas	1	2	3	4
Me pongo muy nervioso/a antes y durante un examen de matemáticas	1	2	3	4
Estrategias				
Tengo un horario planificado y un lugar de estudio adecuado para estudiar matemáticas	1	2	3	4
Preparo los exámenes y pruebas con tiempo suficiente	1	2	3	4
Para preparar exámenes me aseguro de entender todos los conceptos y practicar los procedimientos involucrados	1	2	3	4
Cuando me atasco, hago un esfuerzo por superar el obstáculo	1	2	3	4
Pido ayuda al profesor, compañeros o familiares si la necesito	1	2	3	4
Trato de planear y preparar un nuevo tema en matemáticas antes de empezarlo en clase	1	2	3	4
Al estudiar matemáticas, trato de entender los conceptos y procedimientos primero	1	2	3	4
Estudio matemáticas repitiendo fórmulas, ejercicios y problemas.	1	2	3	4

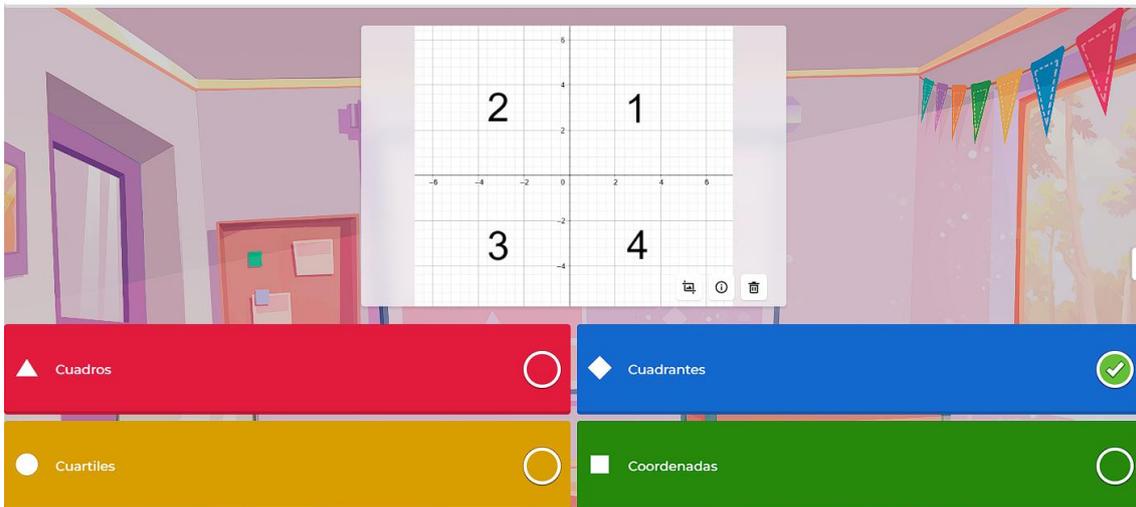
Estudio matemáticas realizando dibujos y gráficas que me apoyen	1	2	3	4
Trato de recuperar y relacionar conocimientos matemáticos que ya conozco con los nuevos	1	2	3	4
Atiendo al profesor y compañeros, y tengo en cuenta sus consejos para mi aprendizaje	1	2	3	4
Evalúo y corrijo mis tareas de matemáticas	1	2	3	4
Compruebo si mi forma de estudiar es eficaz, y trato de cambiarla si no lo es	1	2	3	4
Me centro más en aprender lo que más me cuesta, que en reforzar lo que ya se	1	2	3	4
Percepciones				
Identifico bien mis fortalezas y debilidades en matemáticas	1	2	3	4
Aprendo mejor matemáticas trabajando en equipo	1	2	3	4
En los exámenes de matemáticas, suelo sacar la nota que preveo	1	2	3	4
Aprendo mejor usando recursos diversos (pc...) que solo con papel y lápiz	1	2	3	4
Aprendo mejor matemáticas con metodologías más activas (trabajo en equipos, proyectos, juegos) que con clase magistral	1	2	3	4
El ambiente de mi clase me resulta cómodo para aprender	1	2	3	4
Participo en la clase de matemáticas y me siento cómodo/a haciéndolo	1	2	3	4
Las explicaciones sobre matemáticas del profesor son claras y entiendo lo que presenta	1	2	3	4
El profesor explica claramente cómo se va a desarrollar el curso (evaluación, calificación, metodologías...)	1	2	3	4
El profesor se interesa por mí y me da retroalimentación regularmente	1	2	3	4

El Kahoot planteado constará de las siguientes preguntas, contando cada una con 4 respuestas posibles y sólo 1 válida (marcada con una X en lo que sigue):

Ejemplo de diapositiva:

FIGURA 2 PREGUNTA DE KAHOOT (ELABORACIÓN PROPIA A PARTIR DE KAHOOT)

¿Cómo se llaman las zonas numeradas del siguiente plano cartesiano?



Cuestiones:

1. ¿Cómo se llaman las zonas numeradas del siguiente plano cartesiano?:

- Cuadros

- Cuadrantes (X)

- Cuartiles

- Coordenadas

2. Los cuatro cuadrantes del plano cartesiano quedan divididos por los ejes llamados...

- Abscisas y ordenadas (x e y) (X)

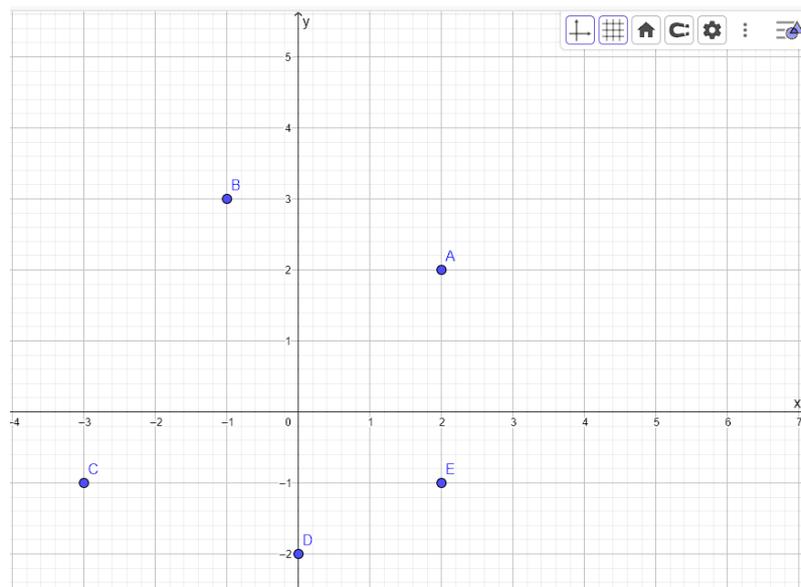
- Ordenadas y coordenadas

- Horizontal y vertical

- Positivo y negativo

3. Las coordenadas de los siguientes puntos son

FIGURA 3 IMAGEN DE PUNTOS PARA LA PREGUNTA DE KAHOOT (ELABORACIÓN PROPIA)



- A (2,2), B (3,1), C (-3,1), D (2,0) y E (2,1)
- A (2,2), B (-3,1), C (3,1), D (2,0) y E (2,-1)
- A (2,2), B (-1,3), C (-3,1), D (2,0) y E (2,1)
- **A (2,2), B (-1,3), C (-3,-1), D (0,-2) y E (2,-1) (X)**

4. Un vector es una flecha que parte de un punto y termina en otro.

- **Verdadero (X)**

- Falso

5. ¿Qué tres elementos identifican a un vector?

- Distancia, dirección, y apuntado.

- **Módulo, dirección y sentido. (X)**

- Módulo, aspecto y longitud.

- Ángulo, pendiente y módulo.

6. Un vector con origen en el punto A y final en el punto B, se denota como:

- **\overrightarrow{AB} (X)**

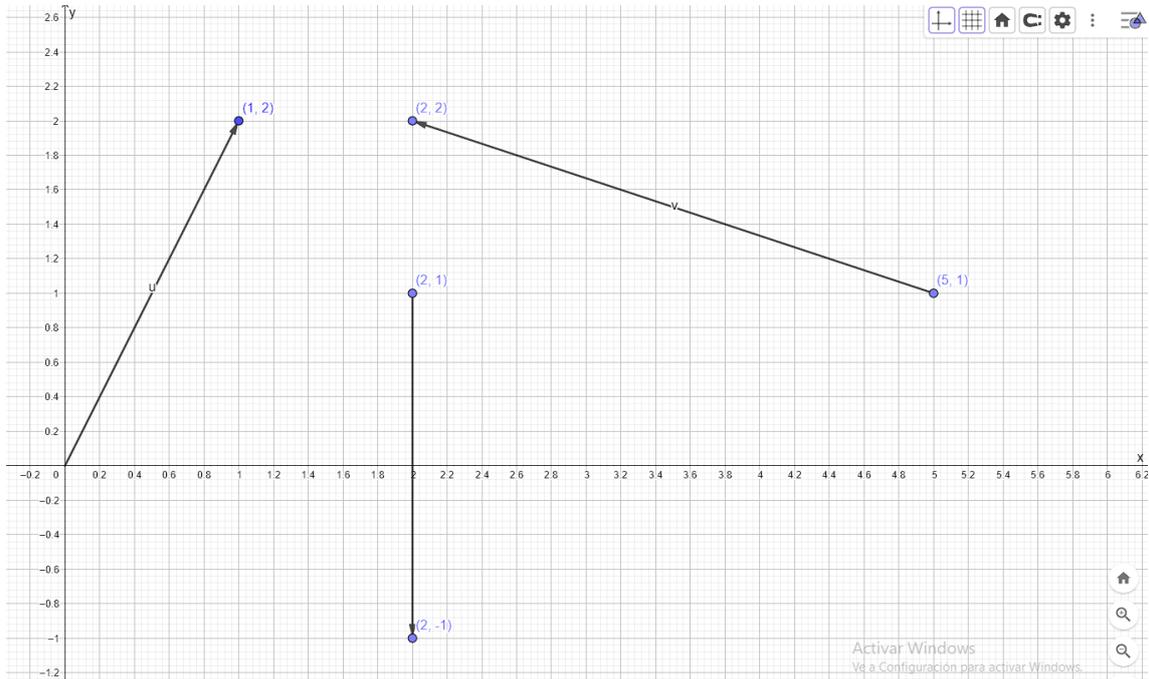
- \overrightarrow{BA}

- \overrightarrow{OAB}

- A+B

7. Las coordenadas de los siguientes vectores son:

FIGURA 4 IMAGEN DE VECTORES PARA LA PREGUNTA DE KAHOOT (ELABORACIÓN PROPIA)



- $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (2,2)$ y $\vec{w} = (2,1)$,

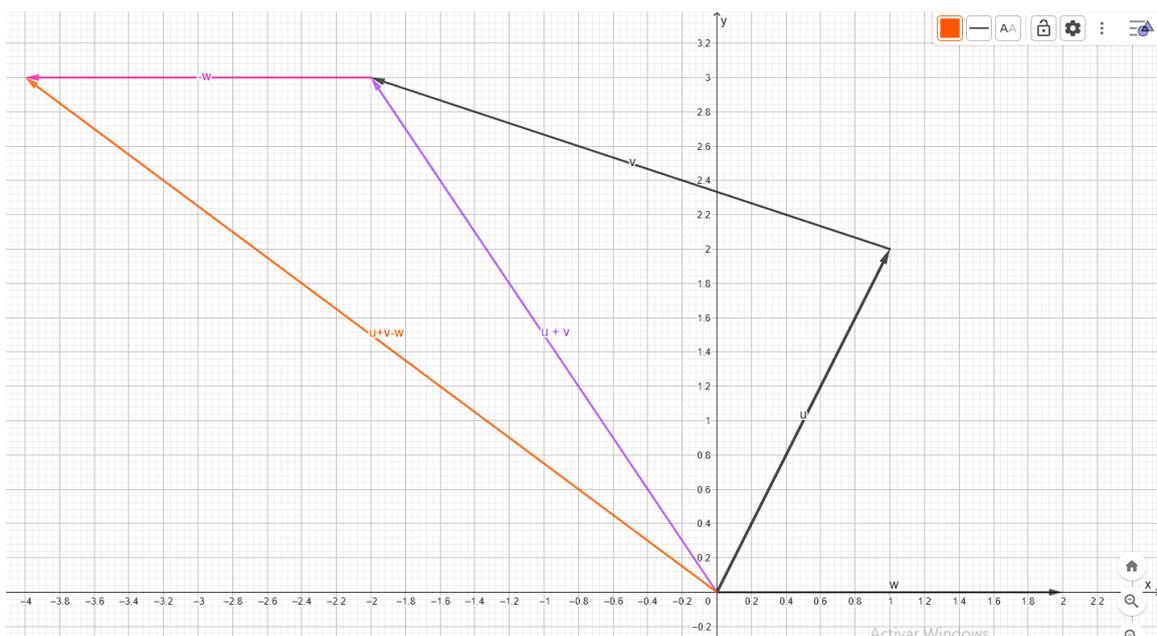
- $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (-3,1)$ y $\vec{w} = (0,-2)$ (X)

- $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (3,1)$ y $\vec{w} = (0,-2)$

- $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (-3,1)$ y $\vec{w} = (2,0)$

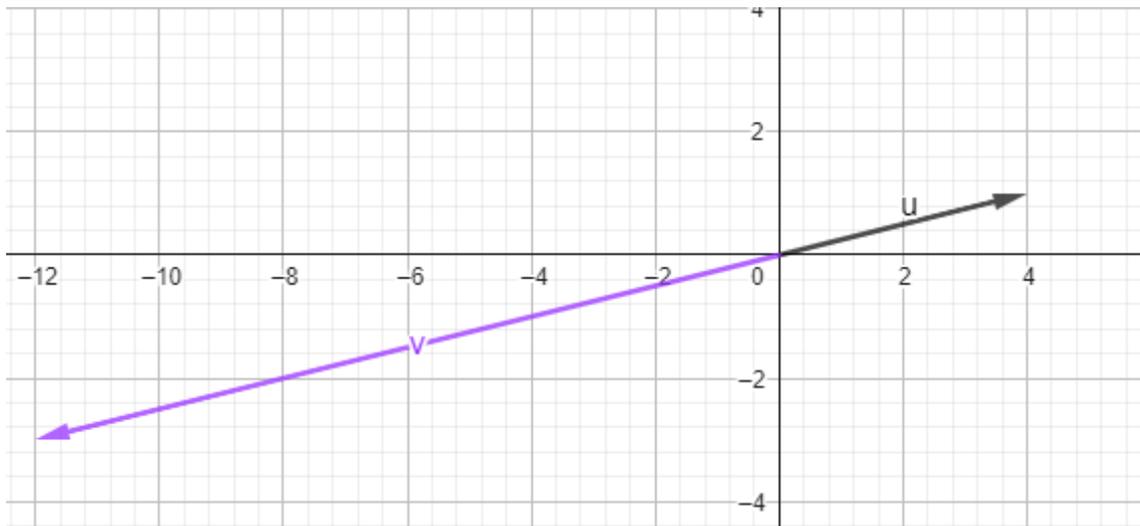
8. Si $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (-3,1)$ y $\vec{w} = (2,0)$, entonces $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ es:

FIGURA 5 IMAGEN SUMA DE VECTORES PREGUNTA DE KAHOOT (ELABORACIÓN PROPIA)



9. Si $u = (4,1)$ entonces el producto escalar $v=-3u$ es:

FIGURA 6 PRODUCTO POR ESCALAR (ELABORACIÓN PROPIA)



- Un escalar (un número) $v = -3*4+(-3)*1 = -15$
- Un vector con igual dirección, sentido, y módulo un tercio que u. $w = (-12,-3)$
- Un vector con dirección opuesta, sentido, y módulo triple que u. $w = (-12,-3)$
- Un vector con igual dirección, sentido opuesto, y módulo triple que u. $w = (-12,-3)$ (X)

10. ¿Qué ángulo forman los vectores $u = (105,3,0)$ y $v = (0,1)$?

- $105,3^\circ$
- No se puede medir el ángulo
- 90° (X)
- 180°

4.5.2 Actividades sesión II

Se plantean ejercicios relacionados con lo visto de vectores que bien se pueden encontrar en cualquier libro de texto: Cálculo de módulo de vectores, producto de vector por escalar y suma de vectores.

4.5.3 Actividades sesión III

La bandera creada en GeoGebra deberá cumplir ciertas condiciones, sobre las que después tendrán que detallar información:

- La bandera ha de ser una figura cerrada
- Ha de usarse algún tipo de simetría respecto algún eje u origen de coordenadas (y tendrá que explicarse cuál se ha usado y sobre qué elemento)
- Ha de usarse algún polígono o círculo (circunferencia opacada)
- Han de usarse segmentos o vectores

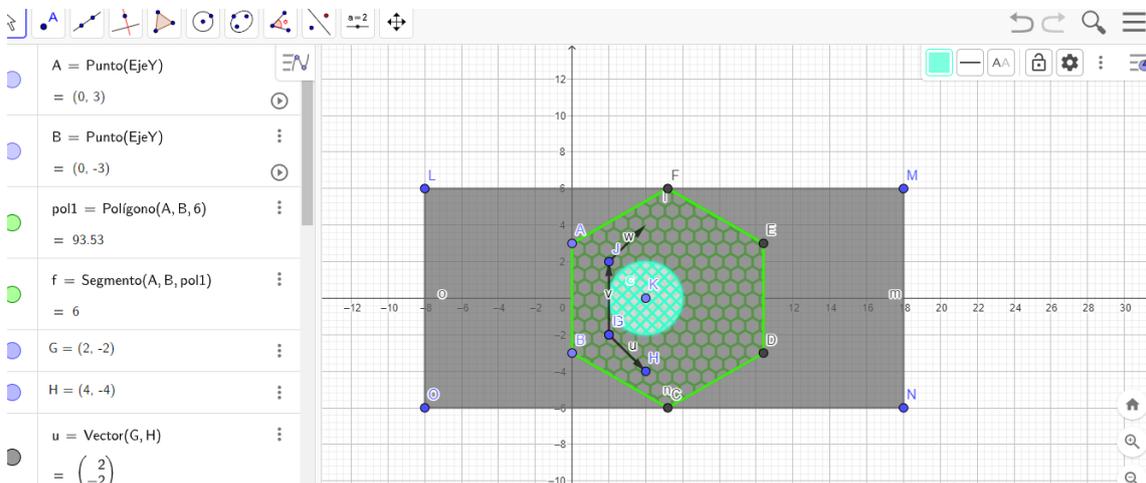
- Han de usarse vectores obtenidos a partir de suma de vectores

Para que el diseñador haga el proyecto, se le deberá dar la siguiente información (aproximada) de la bandera:

- Coordenadas de los vectores que delimitan la bandera, así como su longitud y ángulo que forman
- Coordenadas de todos los vectores de la bandera, y módulo. (Medidas)
- Explicar todas las simetrías que tenga (tipo y objeto)
- Superficie de cada figura cerrada (aproximada).

Ejemplo:

FIGURA 7 BANDERA REALIZADA CON GEOGEBRA (ELABORACIÓN PROPIA)



4.5.4 Actividades sesión IV

Para trabajar el producto escalar se pueden proponer ejercicios del libro, y tareas que muestren la relación con la asignatura de física y química o tecnología. Por ejemplo, ejercicios simples que pidan hallar el producto escalar dadas las coordenadas de dos vectores o el ángulo que forman. O un poco más elaborados del estilo del siguiente:

Ejercicio ejemplo: Dado el vector $\vec{u} = (4, -2)$ determinar los vectores unitarios que tengan la misma dirección que \vec{u} , los vectores ortogonales con mismo módulo que \vec{u} , y los vectores ortogonales y unitarios a \vec{u} .

En este ejercicio se puede reflexionar sobre cuántos vectores hay de cada tipo, aparte de movilizar los cálculos.

Ejercicio ejemplo: Imagina 3 vectores de módulo 2 que formen un triángulo equilátero. Calcula el producto escalar de sus lados dos a dos.

Este ejercicio incita una pequeña reflexión, y es que basta con hacer uno de los 3 productos pedidos, ya que en un triángulo equilátero los tres lados y ángulos son iguales.

Por último, se pueden trabajar pequeños problemas de física relacionados con fuerzas como por ejemplo el siguiente:

Problema ejemplo: Un alumno empuja una mesa con una Fuerza (\vec{F}) paralela al suelo de 10 Newtons. Consigue arrastrar la mesa una Distancia (\vec{d}) de 2 metros. Calcular el trabajo realizado W , sabiendo que este es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento.

En este problema, los estudiantes verán el uso del producto escalar en física. Así, para resolverlo deben plantear los vectores $\vec{F} = (10,0)$ y $\vec{d} = (2,0)$ y calcular el producto escalar.

Profundización: Lo ideal es darle una vuelta más al problema, aplicando una fuerza que forme cierto ángulo θ con el desplazamiento. Así, el estudiante debería calcular la componente horizontal del vector fuerza, y posteriormente darse cuenta de que para conseguir el mismo trabajo y desplazar la misma distancia la mesa, es necesario que haga más fuerza. Verá que esto es así por el factor coseno, que al formar los vectores 0° el coseno es 1, y en cualquier otro caso es menor que 1.

Se puede hacer el experimento en clase, si los alumnos empujan 2m una mesa con una fuerza paralela al suelo, les costará menos que si la fuerza que aplican la hacen arrastrándola, haciendo un poco de fuerza hacia el suelo. De igual forma, si empujan la mesa hacia abajo, no podrán desplazar la mesa (pueden deducir el cálculo, pues los vectores son ortogonales y el coseno será 0).

Para trabajar la parte del punto medio de un segmento que une dos puntos, se pueden proponer problemas o ejercicios del libro de texto. .

Además, yo plantearía necesariamente los siguientes dos en concreto, en línea con la dinámica de abstracción y generalización que se pretende en esta sesión:

Problema ejemplo: Se quiere usar radares para dividir en 2 partes de igual longitud un tramo recto de carretera que, según Google Maps, comienza en el punto A(-1,-2) y termina en el punto B(3,6).¿En qué punto se colocará el radar?¿Y si se quiere dividir en 3 partes iguales?¿ Y en 4?

Con esta tarea se pretende que el estudiante use la fórmula del punto medio, pero se dé cuenta de que no vale para todo el ejercicio y es necesario recurrir al proceso llevado a cabo en la

demostración constructiva de la fórmula del punto medio para resolver el segundo apartado. Para el tercer apartado sí que vale la fórmula del punto medio, debiéndose aplicar 3 veces. Se intentará que el alumnado deduzca que para hallar los puntos que dividen un segmento en $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ partes iguales, basta con aplicar la fórmula reiteradamente. Sin embargo, para cualquier otra división en m partes iguales del segmento es necesario proceder como en la demostración del punto medio, es decir, hallar un vector de módulo $\|\text{segmento}\|/m$ e ir sumándolo al punto origen. Es decir, se pretende que reflexionen para decidir qué camino es válido, no aplicar simplemente una fórmula.

Ejercicio: Dado un segmento cuyos extremos tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Escribir, en función de las coordenadas de estos extremos, las coordenadas de los puntos que dividen el segmento en 4 partes iguales.

Esta es una tarea sencilla a priori, pero que con ella se pretende que los alumnos profundicen su nivel de abstracción. Por un lado, tratando de entender el enunciado, y por otro, operando solo con los datos proporcionados, que al no ser números concretos como están acostumbrados a manejar puede dificultarles la tarea. Esta tarea refuerza la propuesta de haber realizado una demostración de una fórmula en esta misma sesión, pues evidencia la necesidad de tratar información abstracta y generalizaciones, algo a lo que no se suele estar acostumbrado pues la mayoría de las tareas que realizan los alumnos son ejemplos con números concretos.

Este ejercicio lo pueden realizar tanto con la fórmula como con procedimiento, lo importante es entender lo que se pide.

Los puntos pedidos serán:

$$P_1\left(x_1 + \frac{x_1+x_2}{2}, y_1 + \frac{y_1+y_2}{2}\right), P_2\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right), P_3\left(x_2 + \frac{x_1+x_2}{2}, y_2 + \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

4.5.5 Actividades sesión V

Los ejemplos de cálculo de ecuaciones de recta los proponen los grupos.

La rúbrica que los alumnos utilizarán para evaluar la exposición de sus compañeros será la siguiente:

Rúbrica de Coevaluación	
Grupo evaluador:	Grupo evaluado:
Ítem	1. Insuficiente 2. Aceptable

	3. Bien 4. Excelente			
Todos los integrantes del grupo colaboran de forma similar en la exposición.	1	2	3	4
El grupo ha expuesto en un tiempo razonable, sin prisas ni demoras.	1	2	3	4
La exposición ha sido organizada, clara y fácil de seguir.	1	2	3	4
El grupo ha demostrado conocimiento matemático del tema.	1	2	3	4
El grupo ha utilizado la representación gráfica (bien en pizarra o proyectando en PC).	1	2	3	4

4.5.6 Actividades sesión VI

Los ejercicios tratarán de requerir el manejo de puntos, vectores y pendiente de una recta, así como el conocimiento de ecuaciones de la recta. Podrán requerir conocimientos previos de geometría analítica. Serán del estilo de los siguientes ejemplos:

Ejercicio: Hallar ecuaciones de la recta que pase por un punto $A(1, 2)$ y sea paralela a la recta $r: x - 3y + 1 = 0$.

Ejercicio: Calcular k y l para que la recta $s: 3x + ky - 7 = 0$ pase por el punto $A(3, 2)$ y sea paralela a la recta $r: lx + 2y - 13 = 0$.

Ejercicio: Sea ABC un triángulo de coordenadas $A(0, 0)$, $B(5, 0)$ y $C(5, 5)$, calcular la ecuación de la mediana que pasa por C , las longitudes de sus lados y ángulos que forman.

Ejercicio: Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas, calculando puntos de corte si los hubiere. $r: 2x + 3y - 1 = 0$, $s: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2}$, $t: 3x - 2y - 9$, $l: y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

4.5.7 Actividades sesión VII

Las tareas interrogativas, relativas a las estrategias y percepciones del alumno, y a su conocimiento matemático general del tema de geometría analítica, serán las siguientes:

Cuestionario para reflexionar y comprobar el proceso de aprendizaje hasta ahora
Estrategias
1. ¿Estoy estudiando matemáticas en casa? ¿Cómo planifico el estudio en cuanto a horarios y lugar?

2. ¿En qué consiste mi sesión de estudio de matemáticas?
3. ¿Qué partes del tema me cuestan más? ¿Y menos? ¿Por qué?
4. ¿Estoy poniendo el foco en lo que más me cuesta? ¿Cómo?
5. ¿Estoy fijándome en mis errores más comunes? ¿Cuáles son?
6. ¿Participo activamente en clase? ¿Cómo ha influido esto en mi aprendizaje?
7. ¿Realizo tareas en casa y las corrijo o pregunto en clase?
8. ¿Estoy pidiendo ayuda?
9. La labor del profesor, ¿está resultando útil, o me ayudaría más de otra forma?
10. ¿Compruebo lo que aprendo? ¿Cómo?
11. ¿Siento que estoy siguiendo y preparando el tema adecuadamente?
Contenidos (no entrar en detalle)
12. ¿Cuáles son los conceptos matemáticos clave de este tema?
13. ¿Qué propiedades de estos conceptos conozco?
14. ¿Qué procedimientos he aprendido a realizar con estos conceptos clave?
15. ¿Qué conocimientos matemáticos que ya conocía estoy poniendo en práctica en este tema?
16. ¿Conozco usos de estos conceptos y herramientas en la vida cotidiana u otras asignaturas?
17. Al resolver problemas, ¿los entiendo, trazo una estrategia, soy capaz de aplicarla y graficarla y comprobar la solución y su coherencia?

4.5.8 Actividades sesiones VIII y IX

El diseño de la ciudad se hará a partir de herramientas de GeoGebra y papel y boli, y se prevé el uso de rectas, vectores, puntos y polígonos, así como de herramientas como el cálculo de distancias, simetrías o mediatrices. Se les proporcionará a los alumnos una lista de preguntas, características y situaciones que su diseño de ciudad debe cumplir. Esta lista contendrá las cuestiones siguientes.

Instrucciones:

- Los edificios/construcciones o áreas abiertas, deberán ser representados por polígonos o circunferencias. Deben ser identificados por nombres o colores.
- Las carreteras, carriles bici, railes... deberán ser representados por rectas o vectores. Deben ser identificados por nombres o colores.
- Los cálculos o descripciones del proceso seguido en las tareas han de estar explicados en papel para entregarlo al finalizar la actividad.

Tareas:

1. Investiga qué es una ciudad verde y escribe una breve explicación.
2. Elige elementos de una ciudad verde para incorporar a tu ciudad (Bosques, parques y jardines verdes, línea de tranvía eléctrico, zona de paneles solares, zona de aerogeneradores, planta de gestión de residuos, planta de tratamiento del agua...)

Estas cuestiones buscan fomentar en los alumnos una ciudadanía responsable y consciente con el medio ambiente, así como el descubrimiento de ideas, tecnologías o estrategias para sostenibles para entender los desafíos medioambientales presentes y futuros.

3. La ciudad debe tener, al menos (puede tener tantos elementos como deseéis):

- Un colegio
- Un hospital
- Tres bloques de pisos
- Un polideportivo
- Cuatro carreteras, al menos dos de ellas paralelas.

4. La distancia entre el colegio y dos de las zonas residenciales, no puede ser mayor que 15 unidades de longitud (si la ciudad queda apelotonada, puedes usar otra cantidad mientras lo argumentes). Explica cómo has aplicado esta condición sin cálculos o escribe los cálculos. Pista: ¿Cómo determinas todos los puntos que disten 15 o menos unidades del colegio?

Pueden calcular distancias, o hacerlo a ojo, pero será mucho más interesante si dibujan una circunferencia con centro el colegio y radio 15 para determinar dónde pueden poner las casas.

5. Describe todos los elementos (excepto caminos/carreteras) que tiene tu ciudad, con el nombre que les has dado y/o sus coordenadas (cualquier punto interior al elemento o cercano vale como coordenadas del lugar).

Por ejemplo:

- 1 Hospital, hexágono llamado Hosp, con coordenadas H (2,3)
- 1 Centro educativo con coordenadas E (-5,4)
- 1 Bosque, dibujo verde con coordenadas (-1,-4)

6. **Escribe las ecuaciones de la recta de cada carretera, tratando de usar variedad de ecuaciones. Calcula la pendiente de las carreteras paralelas. Calcula un ángulo que formen dos carreteras secantes. Calcula todos los puntos de cruce entre carreteras, o al menos dos.**
7. **Calcular aproximadamente la superficie de elementos verdes (bosques, paneles solares...) que tiene tu ciudad. Explica cómo haces la aproximación. Calcular también la superficie construida del resto de elementos. Calcula la superficie aproximada de tu ciudad.**

Es una cuestión interesante para desarrollar estrategias de aproximación, pues el cálculo exacto de área (a mano) de algunas figuras sería muy tedioso, será mucho más rápido aproximar por cuadrados, o rectángulos.

8. **¿Qué instrucciones nos daría Google Maps para llegar desde dos de las casas hasta el colegio? (usa vectores aproximados, y recuerda que Google recomienda la ruta más corta)**
9. **Si en el polideportivo una deportista sufre una lesión grave y necesita una ambulancia, ¿cuánto tardaría en llegar si sale del hospital y circula a una velocidad de 2 unidades de longitud por minuto? (si el polideportivo y el hospital están al lado, supón que la lesión ocurre en otra zona más alejada). Explica cómo afrontas el problema.**

Las cuestiones 8 y 9 tratan de presentar problemas de la vida cotidiana las cuales el estudiante tiene que modelizar matemáticamente en su ciudad, y planear una estrategia para resolverla, usando contenidos tanto matemáticos como de otras materias como física.

10. **Elige dos elementos de tu ciudad relativamente lejanos (no carreteras). Imagina que dos amigos quieren quedar, y cada uno se encuentra en uno de los elementos elegidos. ¿Dónde deben quedar si quieren recorrer la misma distancia? Da las coordenadas del punto. ¿Cómo lo has calculado? Reflexiona y explica cómo lo haces, ¿hay más lugares donde puedan quedar, manteniendo la condición de que caminen la misma distancia? Pista: piensa en alguna construcción geométrica que conozcas que resuelva esta duda.**

Esta cuestión trata de que el estudiante active conocimientos que haya aprendido recientemente como la fórmula o construcción del punto medio, pero también otras herramientas matemáticas que resuelvan situaciones similares, como puede ser el uso de la mediatriz.

Ejemplo de ciudad:

Conozco y manejo herramientas tecnológicas para trabajar los contenidos de este tema.	1	2	3	4
Conozco aplicaciones en la vida cotidiana u otras materias de los contenidos del tema.	1	2	3	4
Integro y conecto otros conocimientos matemáticos con los de este tema.	1	2	3	4
Utilizo el lenguaje matemático adecuado para comunicarme tanto de forma oral como escrita.	1	2	3	4
Identifico y entiendo los conceptos geométricos y analíticos estudiados.	1	2	3	4
Aplico los conceptos en la resolución de ejercicios y problemas.	1	2	3	4
Conozco y aplico las herramientas y estrategias propias del tema para la resolución de problemas.	1	2	3	4
Interpreto correctamente los enunciados y datos de los problemas.	1	2	3	4
Ideo estrategias para resolver problemas complejos.	1	2	3	4
Interpreto correctamente las soluciones obtenidas en ejercicios y problemas.	1	2	3	4
Entiendo y utilizo la representación gráfica de los conceptos	1	2	3	4
Realizo operaciones y cálculos sin errores	1	2	3	4

4.5.10 Actividades sesión XI

Examen sobre contenidos de geometría analítica

4.5.11 Actividades sesión XII

El breve cuestionario de reflexión tendrá las siguientes preguntas:

Reflexión post examen
Mi desempeño en el examen, ¿fue el que esperaba? ¿por qué?
¿Cómo de diferentes han sido mis expectativas de lo ocurrido en realidad?
¿En qué conceptos, estrategias o procedimientos han estado las dificultades (punto, vector, recta, cálculos, comprensión del problema, conocimiento de cálculo de punto medio, ecuaciones de recta, gráficos)?

¿En qué aspectos específicos puedo mejorar? ¿Con qué estrategia concreta?

4.6 Evaluación

El proceso de evaluación para esta propuesta didáctica tendrá dimensión tanto formativa como sumativa.

Por un lado, la evaluación sumativa es la que se llevará a cabo en la penúltima sesión con la realización de un examen clásico sobre cuestiones de geometría analítica.

Por otro lado, la evaluación formativa consistente en el acompañamiento e intercambio de retroalimentación con el alumno durante su proceso de aprendizaje se llevará a cabo mediante las actuaciones que comentamos a continuación:

- Realización de evaluación diagnóstica inicial de la relación de los alumnos con las matemáticas y las estrategias de aprendizaje
- Entregas de trabajos intermedios y posterior aportación de retroalimentación
- Coevaluación entre los alumnos en la tarea expositiva por grupos.
- Autoevaluación con preguntas abiertas sobre el aprendizaje percibido y estrategias hasta el momento.
- Revisión de la evaluación diagnóstica inicial y Autoevaluación final con rúbrica.
- Observación diaria (desempeño en clase, realización de ejercicios, actitud...).

Con estas actuaciones, pretendemos por un lado hacer consciente al alumno de su propio aprendizaje percibido mediante la reflexión, darle varias oportunidades en el camino para que identifique sus fortalezas y debilidades, pueda autorregularse, calibrar su aprendizaje percibido y mejorar su aprendizaje y su capacidad crítica de autoevaluarse. Por otro lado, esta evaluación formativa sirve también para el profesor, pues se conoce información durante el proceso enseñanza-aprendizaje que puede ser útil para adaptar las estrategias y tomar medidas para hacer este proceso más efectivo.

Para evaluar y calificar el desempeño del alumnado se utilizarán tres rúbricas elaboradas: para las entregas grupales, coevaluación, y observación y cuestionarios. Los niveles de logro de cada ítem de la rúbrica van de 1 a 4, siendo 1 insuficiente y 4 excelente. Se puede obtener una calificación de cada rúbrica sobre 10. La calificación puede obtenerse contando un 10% la coevaluación, 10% la autoevaluación previa al examen, 20% observación, 20% las entregas grupales y 40% examen final.

La rúbrica de coevaluación es la presentada en las [actividades de la sesión V](#). La rúbrica de autoevaluación es la presentada en las [actividades de la sesión X](#). Las rúbricas de los trabajos en equipo, y de la observación diaria se presentan a continuación:

Rúbrica trabajos en equipo (tareas y cuestiones con GeoGebra):

Indicador de logro	1 Insuficiente	2 Aceptable	3 Bien	4 Excelente
2. Conexión entre conocimientos	Tiene dificultades para integrar conocimientos, no aplicando conceptos anteriores.	Integra y conecta conocimientos previos con los nuevos, aunque de manera limitada	Integra bien los conocimientos previos con los nuevos, mostrando habilidad para aplicar conceptos anteriores a nuevas situaciones de manera efectiva	Demuestra una capacidad avanzada para aplicar conceptos anteriores a nuevas situaciones complejas y diversas.
3. Resolución de problemas y cálculos	No conoce los conceptos propios del tema para resolver cuestiones y problemas.	Identifica los conceptos y estrategias, aunque falla en ocasiones en su aplicación y cálculos	Identifica las estrategias y conceptos y las pone en práctica, aunque comete pequeños errores	Idea estrategias creativas para resolver problemas, y las pone en práctica sin errores
6. Representación gráfica	Tiene dificultades para entender o utilizar representaciones gráficas mostrando poca habilidad en la interpretación o creación de gráficos tanto a mano como con GeoGebra	Comprende ocasionalmente las representaciones gráficas en matemáticas y las utiliza con cierta eficacia, aunque de manera limitada	Entiende y utiliza bien las representaciones gráficas de los conceptos tanto a mano como con GeoGebra	Domina de manera avanzada y creativa la representación gráfica para comunicar conceptos y estrategias
7. Trabajo en equipo	No participa, ni escucha a sus compañeros o es irrespetuoso	Participa y escucha, pero no se implica demasiado	Participa activamente, aporta ideas significativas y escucha activamente a los demás.	Participa constantemente, aporta ideas innovadoras y proporciona críticas constructivas con respeto
8. Actitud e interés	Muestra mala actitud y no le interesa mejorar	Muestra interés de forma intermitente	Muestra una actitud positiva de manera consistente, demostrando interés activo en mejorar sus competencias matemáticas	Muestra una actitud crítica y positiva, buscando activamente mejorar y desarrollar sus competencias matemáticas de manera proactiva.

Rúbrica observación

Indicador de logro	1 Insuficiente	2 Aceptable	3 Bien	4 Excelente
1. Interpretación	Tiene dificultades para entender los enunciados, datos ni conceptos matemáticos en las cuestiones.	Interpreta parcialmente los enunciados, dando lugar a resultados variables en sus resoluciones	Interpreta bien los enunciados, datos y conceptos clave en los problemas, cometiendo pocas equivocaciones.	Interpreta bien los enunciados, datos y conceptos clave en los problemas, sin equivocarse.
2. Conexión entre conocimientos	Tiene dificultades para integrar conocimientos, no aplicando conceptos anteriores.	Integra y conecta conocimientos previos con los nuevos, aunque de manera limitada	Integra bien los conocimientos previos con los nuevos, mostrando habilidad para aplicar conceptos anteriores a nuevas situaciones de manera efectiva	Demuestra una capacidad avanzada para aplicar conceptos anteriores a nuevas situaciones complejas y diversas.
3. Resolución de problemas y cálculos	No conoce las estrategias propias del tema para resolver cuestiones y problemas.	Identifica los conceptos y estrategias, aunque falla en ocasiones en su aplicación y cálculos	Identifica las estrategias y conceptos y las pone en práctica, aunque comete pequeños errores	Idea estrategias creativas para resolver problemas, y las pone en práctica sin errores
4. Comunicación	No utiliza nada de lenguaje matemático para comunicarse	Comunica usando poco lenguaje matemático o con imprecisiones	Se comunica usando lenguaje matemático con algunas carencias en oral o escrito	Se comunica perfectamente haciendo uso de lenguaje matemático preciso
6. Representación gráfica	Tiene dificultades para entender o utilizar representaciones gráficas mostrando poca habilidad en la interpretación o creación de gráficos.	Comprende ocasionalmente las representaciones gráficas en matemáticas y las utiliza con cierta eficacia, aunque de manera limitada	Entiende y utiliza bien las representaciones gráficas de los conceptos.	Domina de manera avanzada y creativa la representación gráfica para comunicar conceptos y estrategias.
8. Actitud e interés en el proceso de aprendizaje	Muestra mala actitud y no le interesa mejorar	Muestra interés de forma intermitente, y el interés justo en su proceso de aprendizaje	Muestra una actitud positiva de manera consistente, demostrando interés activo en mejorar sus competencias matemáticas	Muestra una actitud crítica y positiva, buscando activamente mejorar y desarrollar sus competencias matemáticas de manera proactiva.

4.7 Atención a diferencias individuales

Una de las maneras de atender a las diferencias individuales de los estudiantes en esta propuesta es mediante la implementación de diversidad de metodologías. Para abarcar la diversidad de estilos de aprendizaje, se emplean tanto metodologías clásicas como la clase magistral participativa, como la gamificación para hacer la clase más motivadora y activa, el trabajo con tecnologías en actividades que combinen destrezas matemáticas con procesos creativos (creación de banderas o planos de ciudades), o el trabajo colaborativo.

Las diferencias en cuanto a características personales como el idioma se pueden atender con traducciones de los cuestionarios, tareas grupales y el cambio de idioma en GeoGebra. Por otro lado, la propuesta no requiere de recursos económicos por parte de los estudiantes, pues los cuestionarios los repartirá el profesor, y el uso de ordenadores solo será necesario en clase.

En la formación de los equipos para las tareas grupales, se tratará de que estos sean heterogéneos en cuanto a características y niveles de habilidad (género, cultura, intereses, distintos niveles de destreza matemática). Con esto se pretende fomentar un clima de igualdad e inclusión, en el que los alumnos desarrollen habilidades de colaboración, apoyo y empatía. Además, los estudiantes más aventajados en según qué áreas pueden complementar las carencias de otros.

Por otro lado, las tareas grupales diseñadas son flexibles en cuanto a ritmos de aprendizaje, pues, aunque parten de una base asequible, pueden hacerse tan complejas y creativas como los alumnos estén dispuestos a afrontar.

Por último, la realización de los diversos cuestionarios a lo largo de la propuesta no solo permite al estudiante ser consciente de su aprendizaje, sino también al profesor comprobar los niveles y percepciones de cada uno y su progreso, con lo que puede adaptar la propuesta acorde a la realidad de la clase.

4.8 Valoración de la propuesta didáctica

Esta propuesta parte de la base de diseñar y utilizar herramientas que ayuden al alumno a ser más reflexivo con su aprendizaje percibido para mejorar su aprendizaje y rendimiento académico. Precisamente estas herramientas nos sirven también para evaluar el diseño de nuestra propuesta. En los cuestionarios creados, los alumnos plasman sus impresiones sobre el aprendizaje que perciben en el entorno de aprendizaje creado: su percepción sobre el trabajo en equipo, el uso de tecnologías, las distintas metodologías empleadas, el clima de la clase, las explicaciones del profesor de la materia y la organización de las clases, y el interés y retroalimentación que muestra

el docente. Estas son buenas herramientas para identificar puntos de mejora sobre los que tomar decisiones a futuro que enriquezcan la propuesta.

Por otro lado, sería interesante poner en práctica la propuesta, para valorar aspectos como la adecuación de la temporalización planeada a la realidad o la familiaridad y recepción de las estrategias de aprendizaje y metacognición por parte de los alumnos.

5 Reflexión final

Este trabajo se ha abordado como una revisión de la literatura para ahondar y comprender mejor la naturaleza de la percepción de los estudiantes sobre su propio aprendizaje, y posteriormente hacer una elaboración y propuesta de puesta en práctica de estrategias destinadas a la mejora de la reflexión y autorregulación de los alumnos. Considero que la labor realizada es muy útil en diferentes aspectos. Para empezar, doy a conocer una realidad y presento un tópico que no encuentro muy tratado en la bibliografía en español como es el del aprendizaje percibido. Además, gracias a la revisión profunda de la literatura y sus ejemplos consigo establecer relaciones de este con el aprendizaje y con variedad de factores presentes en el entorno de aprendizaje del estudiante. Si bien es cierto que yo me centro en el factor de las estrategias de aprendizaje, la puerta queda abierta para investigar o reflexionar sobre el papel que juegan el resto de los factores. También, proporciono herramientas utilizables, tanto por mí como por cualquier docente de matemáticas para mejorar su labor y el desempeño de sus alumnos. Es más, algunos de estos instrumentos son fácilmente adaptables a otras materias y diversos niveles, promoviendo el aprendizaje transversal y a lo largo de la vida.

Por otro lado, también soy consciente de posibles debilidades y áreas de mejoras que puede tener esta propuesta. En primer lugar, la actividad de la metacognición y las autoevaluaciones es algo que, en mi experiencia, los estudiantes en general no están acostumbrados a realizar y de hecho no reconocen la importancia que pueden tener. Por ejemplo, durante mis estudios de secundaria no recuerdo que se dedicasen esfuerzos a esta práctica por parte activa del profesor, y en el libro de texto a veces se hacía algún ejercicio de final de tema cuando ya habías acabado el resto, relegándola a la última de las prioridades. Mi experiencia en el periodo de prácticas no ha hecho que cambie de opinión, las clases se dedican íntegramente a las explicaciones del tema, resolución de ejercicios y problemas, y corrección de estos. Por esto, creo que puede que los alumnos se muestren reacios en un primer momento a la implementación de estas estrategias ya que sería un cambio (en metodología, evaluación...) con el que no están familiarizados. Por supuesto, el docente tiene un papel fundamental en presentar y diseñar entornos de aprendizaje que tengan en cuenta el aprendizaje percibido y la reflexión, y en acompañar a los alumnos en su desarrollo. Por tanto, es necesario que los profesores conozcan esta realidad (quizá proporcionándoles formación), y le otorguen mayor prioridad dedicándole más tiempo en las aulas.

Por último, quiero plasmar que otra perspectiva muy interesante desde la que tratar este TFM o estudios posteriores sobre el aprendizaje percibido, hubiese sido a través de una pequeña investigación. Buena parte de la literatura consultada durante este trabajo, son estudios en los que se plantea unas preguntas, se diseña un cuestionario y se aplica con los participantes, analizando posteriormente los resultados. Si bien es cierto que en mis prácticas elaboré y apliqué un pequeño

cuestionario sobre las percepciones de los alumnos sobre mi intervención al final de esta (presentado en mi memoria de prácticas), no considero este instrumento suficientemente maduro como para incluirlo en este trabajo. Así, hubiese sido interesante aplicar durante el periodo de prácticas las estrategias elaboradas en este trabajo y hacer algún análisis cualitativo o cuantitativo para proporcionar alguna conclusión que responda a preguntas como: ¿Existe desalineamiento entre aprendizaje percibido y aprendizaje en el alumnado? ¿Se puede dar alguna medición de cuán distante están? ¿Las estrategias aplicadas reducen esa brecha? Por ello, creo que sería una buena línea de investigación sobre la que avanzar para entender mejor el aprendizaje matemático de los estudiantes.

6 Referencias bibliográficas

- Antón, L. J. M., Sánchez, J. M. R., & Martín, M. Á. C. (2005). La paráfrasis como estrategia de aprendizaje: propuesta de intervención. *International Journal of Developmental and Educational Psychology*, 2(1), 393-408.
- Escuela de Profesores del Perú (2024). *Aprendizaje constructivista, concepto, características*. Recuperado el 9 de julio de 2024 <https://epperu.org/aprendizaje-constructivista/>
- Bacon, D. R. (2016). Reporting actual and perceived student learning in education research. *Journal of Marketing Education*, 38(1), 3-6.
- Bandara, D., & Wijekularathna, D. K. (2017). Comparison of student performance under two teaching methods: face to face and online. *International Journal of Education Research*, 12(1).
- Barbera, E., Clara, M., & Linder-Vanberschot, J. A. (2013). Factors influencing student satisfaction and perceived learning in online courses. *E-learning and Digital Media*, 10(3), 226-235.
- Barr, R. B., & Tagg, J. (1995). From teaching to learning—A new paradigm for undergraduate education. *Change: The magazine of higher learning*, 27(6), 12-26.
- Beltrán Llera, J. A. (2003). Estrategias de aprendizaje. *Revista de educación*. (332), 55-73.
- Carbonero Martín, M. Á., y Navarro Zavala, J. C. (2006). Entrenamiento de alumnos de Educación Superior en estrategias de aprendizaje en matemáticas. *Psicothema*, 18(3), 348-352.
- Castillo, M. S., Hernández, L. B., Castro, S. E., y Estrada, D. R. (2022). Aprendizaje percibido de estudiantes universitarios en cursos en modalidad presencial y mixta: un estudio comparativo. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 21(1), 115-127.
- Consejería de Educación (2022). Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León*, 190.
- Dunning, D., Heath, C., & Suls, J. M. (2004). Flawed self-assessment: Implications for health, education, and the workplace. *Psychological science in the public interest*, 5(3), 69-106.
- Eom, S.B., Wen, H.J. & Ashill, N. (2006) The Determinants of Students' Perceived Learning Outcomes and Satisfaction in University Online Education: an empirical investigation. *Decision Sciences Journal of Innovative Education*, 4(2), 215-235.

- Ferreira, M., Cardoso, A. P., & Abrantes, J. L. (2011). Motivation and relationship of the student with the school as factors involved in the perceived learning. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 29, 1707-1714.
- Franganillo, J., Sánchez, L., García, M. Á., y Marquès, A. (2021). El aprendizaje servicio en Comunicación Audiovisual: aprendizaje percibido y rendimiento académico. *Audiovisual e industrias creativas: Presente e futuro* (pp. 583-600). McGraw Hill España.
- Garrison, D. R. (2007). Online community of inquiry review: Social, cognitive, and teaching presence issues. *Journal of Asynchronous Learning Networks*, 11(1), 61-72.
- Goodenow, C. (1993). The psychological sense of school membership among adolescents: Scale development and educational correlates. *Psychology in the Schools*, 30(1), 79-90.
- Hong, K. S., Lai, K. W., & Holton, D. (2003). Students' satisfaction and perceived learning with a web-based course. *Journal of Educational Technology & Society*, 6(1), 116-124.
- Horvath, A., & Teles, L. (1999). Novice users' reaction to a web-enriched classroom. *Virtual University Journal*, 2(2), 49-57.
- Jaramillo, F., & Spector, P. E. (2004). The effect of action orientation on the academic performance of undergraduate marketing majors. *Journal of marketing Education*, 26(3), 250-260.
- Kruger, J., & Dunning, D. (1999). Unskilled and unaware of it: how difficulties in recognizing one's own incompetence lead to inflated self-assessments. *Journal of personality and social psychology*, 77(6), 1121.
- Equipo Pedagógico de Campuseducación. (6 de mayo de 2024). La evaluación en la LOMLOE. *Blog de Campuseducacion.com*. <https://www.campuseducacion.com/blog/guia-oposiciones/la-evaluacion-en-la-lomloe/#:~:text=Desde%20la%20LOMLOE%20la%20evaluaci%C3%B3n,las%20demandas%20de%20la%20comunidad>
- Mentes abiertas Psicología S.L. (s.f.). La teoría sociocultural de Lev Vygotsky. <https://www.mentesabiertaspsicologia.com/blog-psicologia/blog-psicologia/la-teoria-sociocultural-de-lev-vygotsky>
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre (LOMLOE), por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE núm. 340, 30 12 2020).
- Lo, C. C. (2010). How student satisfaction factors affect perceived learning. *Journal of the Scholarship of Teaching and Learning*, 10(1), 47-54.

- Martínez-Ferreira, J.M., Sánchez-Agustí, M. y Miguel-Revilla, D. (2022). Importancia y dominio percibido de competencias docentes en el Prácticum: análisis en la especialidad de Geografía e Historia del Máster en Profesor de Educación Secundaria. *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*, (42), 51-64.
- Meroño García, L., Calderón Luquin, A., Arias Estero, J. L., & Méndez Giménez, A. (2018). Diseño y validación del cuestionario de percepción del profesorado de Educación Primaria sobre el aprendizaje del alumnado basado en competencias (# ICOMpri2). *Revista Complutense de educación*, 29(1), 215-235.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 76, 41571-41789.
- Monereo, C., Castelló, M., Clariana, M., Palma, M., & Pérez, M. L. (2000). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje*. Graó.
- Neuhauser, C. (2002). Learning style and effectiveness of online and face-to-face instruction. *The American Journal of distance education*, 16(2), 99-113.
- Pintrich, P. R., & Garcia, T. (1991). Student goal orientation and self-regulation in the college classroom. *Advances in motivation and achievement: Goals and self-regulatory processes*, 7, 371-402.
- Reyes, R.R. (2023, 4 de agosto). *Teoría conductista, concepto, características*. EPPERU. Recuperado el 9 de julio de 2024 de <https://epperu.org/teoria-conductista/#:~:text=Seg%C3%BAAn%20la%20teor%C3%ADa%20conductista%2C%20el,se%20repita%20en%20el%20futuro>.
- Rodríguez, R. S., y Pedrajas, A. P. (2017). Diferencias entre expectativas y logros en las competencias del Prácticum del Máster de Formación del Profesorado de Enseñanza Secundaria. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 20(1), 1-18.
- Ros Martínez de Lahidalga, I., Goikoetxea Piédrola, J., Gairín, J., & Lekue Rodríguez, P. (2012). Implicación del alumnado en la escuela: Diferencias interindividuales e intercentros. *Revista de Psicodidáctica*, 17(2), 291-307.
- Rueda Valencia, S. (2022). *El error en pruebas escritas como elemento de aprendizaje matemático*. [Trabajo Fin de Máster]. Universidad de Valladolid. <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/57727>

- Sarceda-Gorgoso, M. C., Santos-González, M. C., & Rego-Agraso, L. (2020). Las competencias docentes en la formación inicial del profesorado de Educación Secundaria. *Profesorado, Revista De Currículum Y Formación Del Profesorado*, 24(3), 401–421.
- Schunk, D. H. (1997). *Teorías del aprendizaje*. Pearson educación.
- Soffer, T., & Nachmias, R. (2018). Effectiveness of learning in online academic courses compared with face-to-face courses in higher education. *Journal of Computer assisted learning*, 34(5), 534-543.
- Sitzmann, T., Ely, K., Brown, K. G., & Bauer, K. N. (2010). Self-assessment of knowledge: A cognitive learning or affective measure?. *Academy of Management Learning & Education*, 9(2), 169-191.
- Txabarri, J. G. (2016). El empleo de estrategias en el aprendizaje de las Matemáticas en Enseñanza Secundaria Obligatoria. *Revista de Investigación Educativa*, 34(2), 487-502.
- Valle, A., González Cabanach, R., Cuevas González, L. M., y Fernández Suárez, A. P. (1998). Las estrategias de aprendizaje: características básicas y su relevancia en el contexto escolar. *Revista de Psicodidáctica*, (6), 53-68.
- Weinstein, C. E., & Mayer, R. E. (1983). The teaching of learning strategies. *Innovation abstracts*, 5(32), 32.