UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática

AULAS DE PENSAMIENTO EN CONTEXTOS PROPIOS DEL BACHILLERATO NOCTURNO: UNA PROPUESTA DE IMPLEMENTACIÓN PARA GRUPOS REDUCIDOS

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumna: Clara Martínez Diez

Tutor: José María Marbán Prieto

Valladolid, julio de 2024

Resumen

Los estudiantes del Bachillerato nocturno a menudo afrontan ansiedad matemática y una percepción negativa de sus habilidades. La implementación de estrategias que no sólo aborden el contenido matemático, sino también las necesidades afectivas y emocionales, puede mejorar su autoconcepto y, en consecuencia, su motivación y disposición hacia el aprendizaje. Este tipo de estrategias, como las *Thinking Classrooms*, o Aulas de Pensamiento, crean entornos educativos adecuados para fomentar el pensamiento crítico, la colaboración y el aprendizaje activo entre los estudiantes.

El objetivo de este Trabajo de Fin de Máster es diseñar un conjunto de actividades y herramientas didácticas que promuevan el pensamiento crítico, la colaboración activa y el aprendizaje significativo entre los estudiantes adultos que cursan el Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en 1º Bachillerato en horario nocturno, atendiendo, además, a las necesidades afectivas del alumnado en su relación con la materia de matemáticas. Esta propuesta de implementación se fundamenta en la adaptación de las estrategias pedagógicas de Aulas de Pensamiento para grupos reducidos, para las cuales se proponen actividades estructuradas que incluyen, como eje principal, el uso de pizarras verticales blancas para facilitar la visualización y discusión de ideas, así como la creación de problemas matemáticos contextualizados que desafíen a los estudiantes a aplicar conceptos teóricos en situaciones prácticas.

Palabras clave: Aulas de Pensamiento, Bachillerato nocturno, dominio afectivo, motivación, pensamiento crítico, razonamiento matemático.

Abstract

Students in nighttime high school often face math anxiety and a negative perception of their abilities. Implementing strategies that address not only the mathematical content but also the affective and emotional needs can improve their self-concept and, consequently, their motivation and willingness to learn. Thinking Classrooms are educational environments designed to foster critical thinking, collaboration, and active learning among students.

The objective of this Thesis is to design a set of activities and didactic tools that promote critical thinking, active collaboration, and meaningful learning among adult students enrolled in Applied Mathematics to Social Sciences in the 12^{th} grade in nighttime high school. Additionally, it aims to address the affective needs of the students in their relationship with mathematics. This implementation design is based on adapting the pedagogical strategies of Thinking Classrooms for small groups, for which structured activities are proposed. These activities include, as a central element, the use of vertical whiteboards to facilitate the visualization and discussion of ideas, as well as the creation of contextualized mathematical problems that challenge students to apply theoretical concepts in practical situations.

Keywords: affective domain, critical thinking, mathematical reasoning, motivation, Nighttime High School, Thinking Classrooms.

Índice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Capítulo 1

Introducción

1.1. Justificación

El presente Trabajo de Fin de Máster (TFM) pertenece al Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas de la Universidad de Valladolid. A través de él, se pretende mostrar las competencias adquiridas durante el año 2023-2024 cursando el máster en su especialidad Matemáticas.

Este trabajo, "Aulas de pensamiento en contextos propios del bachiller nocturno: una propuesta de implementación para grupos reducidos", ha sido dirigido y supervisado por José María Marbán, Doctor por la Universidad de Valladolid perteneciente al área de Didáctica de la Matemática.

El bachillerato nocturno representa una oportunidad educativa crucial para numerosos estudiantes adultos que, por diversas razones, no pudieron completar su educación en el sistema diurno. Estos estudiantes, a menudo, combinan sus estudios con responsabilidades laborales, familiares o deportivas, lo que les exige un esfuerzo adicional y una gran capacidad de gestión del tiempo. En este contexto, las metodologías pedagógicas tradicionales pueden no ser las más adecuadas para satisfacer sus necesidades específicas y promover un aprendizaje efectivo.

Las Aulas de Pensamiento (*Thinking Classrooms*) se presentan como una herramienta innovadora y activa que fomenta el pensamiento crítico, la colaboración y la autonomía en el aprendizaje. Sin embargo, la implementación de esta metodología en el bachillerato nocturno, especialmente en grupos reducidos, no ha sido ampliamente explorada. Por lo tanto, existe una necesidad imperiosa de adaptar y evaluar estas estrategias pedagógicas para este entorno educativo particular, ya que se trata de un contexto poco estudiado.

Las Aulas de Pensamiento pueden transformar el entorno de aprendizaje, haciéndolo más dinámico y participativo, lo cual es esencial para captar el interés y la motivación de los estudiantes nocturnos. Al promover la participación activa y la colaboración, se espera que los estudiantes desarrollen una comprensión más profunda de las matemáticas y mejoren su rendimiento académico.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este TFM es diseñar una propuesta de intervención pedagógica basada en la metodología *Thinking Classrooms* o "Aulas de Pensamiento", adaptada a las particularidades del Bachillerato nocturno y enfocada hacia grupos reducidos en el aula de Matemáticas. Con este enfoque se pretende:

- Promover un ambiente de aprendizaje inclusivo y motivador, adaptando las metodologías a las necesidades y contextos individuales de los alumnos.

- Fomentar la percepción de autoeficacia y el autoconcepto matemático, de tal manera que ayuda impulsar positivamente la creencia de los estudiantes en su capacidad para resolver tareas matemáticas y aprender nuevos conceptos.

- Diseñar la puesta en práctica de estas estrategias y actividades que ayuden a crear un ambiente de aprendizaje dinámico y participativo, donde los estudiantes desarrollen habilidades críticas y colaborativas en matemáticas.

1.3. Estructura

El proyecto se va a estructurar en varias partes, siguiendo un orden secuencial desde lo más general (conceptos, ideas clave) hasta las aplicaciones específicas.

- Introducción: establece el contexto, los objetivos, la importancia del estudio y la estructura del TFM.

- Marco conceptual y contextual: revisión exhaustiva de la literatura relevante que informa y contextualiza el trabajo. Incluye teorías, estudios previos y antecedentes necesarios para comprender el tema que se va a implementar. Además, se plasman las características que envuelven el Bachillerato de personas adultas en régimen nocturno, así como la introducción a la estrategia pedagógica que vamos a desarrollar.

- En el capítulo de la experiencia en el Bachillerato nocturno se narra las situaciones vividas durante el período de prácticas del Máster en el I.E.S Jorge Manrique de Palencia, participando en el aula de Matemáticas 1º Bachillerato para Ciencias Sociales.

- La parte principal se centra en el diseño de la estrategia pedagógica: detalles sobre la propuesta de implementación de las diferentes actividades a través de las Aulas de Pensamiento, los materiales y recursos que se requieren, así como la metodología a seguir, finalizando con unas conclusiones a modo de cierre.

- En la parte final se encuentran los anexos, donde se recogen todas las actividades que se han propuesto para este diseño.

Capítulo 2

Marco conceptual y contextual

2.1. Marco conceptual

2.1.1. El enfoque socioafectivo en el aprendizaje

En los últimos tiempos se ha podido observar una necesidad de estudiar las cuestiones afectivas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los alumnos cada vez disfrutan menos de las matemáticas a medida que avanzan en su formación educativa y esto puede ser el reflejo de otras muchas actitudes negativas hacia el proceso de aprendizaje matemático, aunque no necesariamente dejando de valorar las matemáticas como disciplina (Russo et al., 2023). De forma histórica, esta materia ha sido percibida como aburrida, mecánica o sin sentido, proviniendo esta idea de la propia experiencia negativa de los alumnos. Según Martínez-Padrón (2005) es posible que esta impopularidad tenga sus raíces, por un lado, en la dificultad que muchos tienen para comprenderla, considerándolas difíciles y abstractas, y, por otro lado, en la manera de proceder que aún tienen algunos docentes para impartir la materia de una manera rígida e incluso infundiendo temor. Ante esta situación, muchos alumnos pueden experimentar ansiedad ante la resolución de problemas, malestar, frustración, inseguridad o baja autoestima, lo que les impide afrontar con éxito y eficacia las tareas matemáticas (Gil et al., 2006). Las visiones desfavorables hacia las matemáticas pueden impactar negativamente a la capacidad del estudiante para adquirir los conocimientos en la materia en la escuela como para su uso de manera efectiva a lo largo de su vida. Por el contrario, los estudiantes que tienen una disposición positiva hacia las matemáticas tienen más probabilidades de involucrarse en actividades que envuelven la materia y aprovechar oportunidades que tienen una dimensión matemática (Grootenboer y Marshman, 2016).

Desde el punto de vista de Buclkey y Sullivan (2023), a consecuencia de atribuir repetidamente los fracasos a una creencia en la propia falta de habilidad innata, conduce a la percepción de que el éxito es inalcanzable y, por lo tanto, que persistir o esforzarse resulta inútil. Se ha podido demostrar con las pruebas PISA que ya en 2012 se analizó por primera vez la ansiedad en las matemáticas (OCDE, 2013), y de nuevo PISA lo ha vuelto a estudiar en el último informe de 2022: aquellos alumnos con mejores resultados en la prueba de matemáticas tienen, en general, niveles más bajos de ansiedad.

De esta forma, se pone en manifiesto que las emociones y las relaciones sociales juegan un papel crucial en la forma en la que los estudiantes aprenden, comprenden y aplican el conocimiento adquirido. Un autor que destaca por su trabajo realizado respecto a la dimensión afectiva, McLeod (1992), se refiere al dominio afectivo como "un extenso rango de creencias, sentimientos y estados de ánimo, que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición". Los factores que considera como componentes básicos y que estudia en este dominio son las creencias, las actitudes y las emociones.

2.1.2. Principales elementos del dominio socioafectivo

Creencias

Son consideradas como un componente subjetivo implícito de cada individuo, que se fundan según su experiencia acerca de la enseñanza y aprendizaje en las matemáticas desde la infancia. Volviendo a McLeod (1992), las creencias de los estudiantes se clasifican en base al objeto: sobre las matemáticas, sobre ellos mismos, sobre la enseñanza de la materia y las promovidas por el contexto social.

La creencia acerca de las matemáticas se fundamenta en la percepción del alumno acerca de su importancia como materia, estableciendo que son importantes, difíciles y apoyada en reglas. Este factor, aunque no es emocional por naturaleza, tiende a provocar reacciones intensamente negativas, al contrario de cuando se cree que es algo sencillo o insignificante. Aquí también puede considerarse que la creencia acerca de las matemáticas puede debilitar la capacidad del estudiante en resolver problemas no rutinarios, ya que, si piensa que se resuelven todos en un pequeño límite de tiempo, su persistencia ante un problema de otro tipo será menor y llevará al fracaso.

En cuanto a la creencia sobre sí mismo, está estrechamente relacionado con el autoconcepto, el autocontrol y la confianza en uno mismo, por lo que este factor tiene una gran carga afectiva. El estudiante puede pensar que sus éxitos vienen dados por factores externos e incontrolables, como puede ser la suerte, mientras que los fracasos se atribuyen a una escasa capacidad (elemento interno e incontrolable), lo que hace disminuir su motivación y rendimiento por creer que no puede controlar ni cambiar las causas, provocando finalmente una baja autoestima.

El autoconcepto matemático en los alumnos, según Gómez-Chacón (1997), es la autoimagen de ellos mismos con respecto a cómo se perciben y se valoran a la hora de aprender y realizar tareas de la materia y la cual ha ido formándose a lo largo de su proceso de escolarización. Está estrechamente ligado a las creencias, pero también con las emociones, actitudes, motivaciones, expectativas personales y atribuciones.

La creencia de la enseñanza de las matemáticas viene de la mano de los métodos utilizados para impartir la asignatura, incluidas las creencias de los profesores acerca de la instrucción docente.

Finalmente, el último grupo que encontramos de creencias motivadas por el contexto social se relaciona con el aula, la escuela, las familias y hogares, donde un ambiente que promueve la afectividad, la comprensión y las ganas de aprender matemáticas se refleja en los alumnos.

Actitudes

Martínez-Padrón (2005) explica en su artículo que las actitudes son comportamientos predispuestos u orientaciones afectivas que un sujeto adquiere y que son acompañados por reacciones positivas o negativas, influyendo en su conducta hacia un determinado objeto o situación. Estas actitudes no son innatas, son relativamente estables, pueden expresarse a través tanto de lenguaje verbal como no verbal, tienen relevancia social porque pueden ser compartidas con otros compañeros y, además, son transmisibles. Ante esta última característica, es importante mencionar que las actitudes de los padres respecto a la materia de matemáticas, el grado de competencia y las actitudes de los profesores sobre el aprendizaje de sus alumnos, los métodos de enseñanza utilizados y la naturaleza abstracta de las matemáticas, son los condicionantes esenciales en la configuración de las actitudes de los estudiantes (Sarabia e Iriarte, 2005).

Consta de tres componentes: un componente cognitivo manifestándose en las creencias subyacentes, esto es, lo que el estudiante piensa y cree sobre las matemáticas; uno afectivo demostrando sentimientos de aceptación o rechazo ante la tarea o la materia; y un componente intencional que corresponde a la predisposición que tienen los alumnos hacia cierto tipo de comportamientos (Gil y Blanco, 2005). Es decir, un estudiante que posee una creencia negativa hacia la materia de matemáticas tenderá a mostrar sentimientos contrarios o negativos hacia las tareas relacionadas con ella y esto podría llevarlo a adoptar actitudes de rechazo hacia las mismas.

De este modo los investigadores distinguen dos categorías. Por un lado, están las actitudes hacia las matemáticas, refiriéndose a la valoración e interés del alumno por la materia y su aprendizaje, destacando aquí la componente afectiva, y por otro lado se describen las actitudes matemáticas como la forma de utilizar las capacidades que tiene el alumno sobre pensamiento crítico, apertura mental y la objetividad, con un componente puramente cognitivo.

Emociones

Son consideradas respuestas afectivas de gran intensidad que incluyen lo fisiológico, cognitivo, motivacional y el aprendizaje experiencial. Nacen en respuesta a un acontecimiento, que puede ser tanto interno como externo, y que va a tener para el individuo una carga de significado positiva o negativa. Es decir, tras un suceso, hay una reacción positiva o negativa ante su resultado según sea de éxito o de fracaso, y esto constituye lo que llamamos una emoción primitiva. Frecuentemente, la emoción primitiva relacionada con el éxito es la felicidad y la relacionada con el fracaso la de frustración.

Sin embargo, como cada persona es diferente y, por tanto, también sus interacciones entre lo cognitivo y lo afectivo-emocional, un mismo evento puede despertar distintas emociones secundarias, como puede ser la ira, la autoestima, la culpabilidad, la compasión, la vergüenza, la gratitud o la desesperación. Asociándolo a una clase de matemáticas, se pueden observar emociones en los estudiantes cuando éstos exasperan o muestran nerviosismo. De acuerdo con lo señalado por Martínez-Padrón (2005), hay ciertas reacciones emocionales que tienen una gran importancia en el proceso de aprendizaje. Por ejemplo, la ira o el miedo pueden obstaculizar capacidades intelectuales del alumno si se manifiestan de una forma extrema, mientras que emociones como la alegría predisponen al estudiante a confiar en su capacidad de afrontar las tareas, potenciando el aprendizaje e inhibiendo, así, los sentimientos negativos.

Los diferentes estudios realizados (Blanco et al., 2010) demuestran que los estados emocionales experimentados por los alumnos durante un proceso de resolución de problemas pueden ejercer influencias no deseadas al acompañar de forma negativa a la tarea matemática, lo que va a condicionar su futura participación en actividades similares.

2.1.3. Otros constructos relacionados con el dominio socioafectivo

Motivación

Para resolver cualquier tarea matemática es preciso que el alumno no sólo pueda hacerla, es decir, que posea la capacidad cognitiva para ello (conocimientos, estrategias, habilidades y destrezas), sino que además es necesario que éste quiera llevarla a cabo, entrando aquí elementos como la predisposición, la determinación o la intención, esto es, el factor motivacional (Martínez-Padrón, 2021). Por tanto, cuando se enfrentan a la resolución de cualquier problema tiene que combinarse el plano cognitivo con el afectivo, social y contextual, donde la motivación juega un papel importante que hace de guía para mantener determinados comportamientos óptimos para alcanzar las soluciones requeridas.

De acuerdo con esa reflexión, la motivación es una manifestación psicológica que estimula a los estudiantes a conseguir, desarrollar y mantener disposiciones favorables hacia el aprendizaje de los contenidos de la materia. Martín J. Andrew (2017) define la motivación como la predisposición (tendencia), energía, emoción e impulso relacionado con el proceso de aprendizaje, el trabajo efectivo y el alcance de logros; el compromiso, por otro lado, engloba los comportamientos que reflejan esta predisposición, energía, emoción e impulso.

Cuando los chicos y chicas presentan dificultades en matemáticas hay que instaurarles una cultura de que sí son capaces a resolver las tareas para que ellos puedan derribar las barreras en el aprendizaje de la asignatura. Conseguir motivar al alumnado, infundir un clima en el aula de confianza y seguridad, así como valorar su rendimiento intelectual, puede sacar al estudiante de su bloqueo matemático.

Resiliencia matemática

En general, la resiliencia académica hace referencia al proceso que permite a los estudiantes alcanzar resultados con éxito después de haberse enfrentado a situaciones adversas o desfavorables (Meneghel et al., 2021). Orientado a las matemáticas, la resiliencia es sinónimo de afrontar, de manera satisfactoria, tareas vinculadas con contenidos matemáticos mediante una actitud favorable hacia la materia y enfrentándose a dificultades del proceso de enseñanza-aprendizaje. Martínez-Padrón (2022) indica la importancia de que en las aulas se den las condiciones para que los alumnos no se desmotiven ni deserten, evitando el fracaso e involucrando a todos los agentes que participan en el logro del aprendizaje matemático. Todos los estudiantes tienen la posibilidad de ser resilientes, y debe constituirse desde la escuela para que aquellos que están involucrados en el proceso de aprendizaje-enseñanza pueden ayudar a superar los eventos traumáticos o localizar situaciones de riesgo.

Afrontar una situación adversa, resolverla y conseguir salir exitoso, da como resultado una predisposición del propio estudiante acompañada de motivaciones, emociones positivas y actitudes favorables. Además, el perfil de una persona resiliente se fundamenta en ser resolutivo, con iniciativa, independencia o creatividad. Una vez que el estudiante se enfrenta a dificultades en matemáticas y comienza a desarrollar su propia recuperación en la materia, trabajando su ansiedad e imagen negativa de ésta, y todo ello en un entorno seguro y colaborativo, el alumno puede empezar a entrenarse con éxito a sí mismo. Los docentes deben ayudar a desarrollar la resiliencia matemática en especial a aquellos escolares que han experimentado exclusión matemática o han sido sometidos a situaciones de estrés, depresión u otros factores relacionados con las respuestas negativas ante la materia.

Ansiedad matemática

Pérez-Tyteca, Monje y Castro (2013) consideran la ansiedad matemática como un estado afectivo que se caracteriza por la ausencia de confort de una persona en situaciones relacionadas con las matemáticas, tanto de la vida académica como de la cotidiana. Las respuestas ante estas circunstancias se manifiestan en forma de tensión, nervios, preocupación, impaciencia, irritabilidad, miedo o bloqueo mental. Volviendo de nuevo a los últimos informes PISA, el estudio ha comprobado que una gran cantidad de alumnos sienten inseguridad, por lo que aquellos que sienten ansiedad cuando estudian la asignatura tienden a no interesarse en el proceso de aprendizaje, lo que se traduce en un bajo rendimiento. Según Blanco, Caballero, Piedehierro, Guerrero y Gómez (2010), la mayoría del alumnado muestra sentirse indeciso, nervioso e incluso hasta desesperado cuando se bloquea en la resolución de un problema. Esto se relaciona a la falta de confianza, a la falta de capacidad o habilidad y a la falta de tranquilidad y calma a la hora de enfrentarse a una tarea matemática.

La suposición general de algunos autores es que el alumnado demuestra más ansiedad y actitudes negativas hacia la asignatura de matemáticas que hacia otras materias académicas. Por eso es importante que los docentes, las familias y los demás educadores del sistema hagan un esfuerzo para que el miedo y la ansiedad que sienten los estudiantes hacia las matemáticas no tengan un efecto negativo sobre sus logros, para motivarles, darles apoyo y mantener las expectativas altas mediante incentivos.

Autoconcepto matemático

La confianza en uno mismo o, de forma generalizada, el autoconcepto (McLeod, 1992), es considerada como la creencia del alumnado en su propia capacidad para comprender, aprender y resolver problemas matemáticos. El autor resalta que existe una estrecha relación entre el autoconcepto matemático y los logros en la materia: habitualmente los alumnos con una reiterada experiencia de fracaso en la asignatura dudan de sus capacidades, magnificando la dimensión de sus deficiencias. Estos perfiles de alumnos muestran, además, bajas expectativas de éxito y abandonan fácilmente al enfrentarse con dificultades.

Por el otro lado, aquellos alumnos que cuentan con un rendimiento satisfactorio gozan de un autoconcepto más positivo con expectativas más altas, traduciéndose en la obtención de mejores calificaciones, y, por ende, realizan más atribuciones al esfuerzo. Este esfuerzo y dedicación hacen que los chicos afronten las tareas matemáticas con un autoconcepto positivo, ya que atribuirán su éxito al esfuerzo realizado, y, en consecuencia, pensarán que fracasan porque no han invertido el tiempo o dedicación que deberían a la materia (Gil, Guerrero y Blanco, 2006).

Autoeficacia

Percepción de los individuos acerca de sus propias habilidades y recursos personales que les permite desarrollar comportamientos que los lleve al éxito. En otras palabras y refiriéndonos al entorno de un aula de matemáticas, las expectativas de autoeficacia miden cómo se considera de capaz el propio alumno de obtener resultados satisfactorios en esta asignatura. Para mejorar la autoeficacia en la materia, es necesario ayudar al estudiante a establecer metas alcanzables y realistas, de forma que pueda desglosar tareas complejas en pasos manejables para que pueda potenciar su sensación de logro.

La autoeficacia es considerada por la mayoría de las investigaciones como un constructo fuertemente predictivo del desempeño académico. Según la cognitiva social de Bandura, recogida el artículo de González-Franco et al. (2022), la autoeficacia impacta en el comportamiento de los alumnos en varios aspectos: los chicos elegirán aquellas actividades en las que se consideran capaces de llevaras a cabo satisfactoriamente, y evitando aquellas en las que se sienten ineficaces; realizarán un mayor o menor esfuerzo para ejecutarla (a mayor autoeficacia, mayor interés y mayor persistencia); y se plantearán retos y metas claros porque se sentirán capacitados para alcanzarlos.

2.1.4. Teorías del proceso enseñanza-aprendizaje

En el ámbito de las ciencias de la educación, se destacan dos principales enfoques que intentan explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el contexto escolar: el enfoque empirista y el enfoque constructivista, considerado este último por varios autores como la corriente predominante desde la segunda mitad del siglo XX hasta nuestros días. A continuación, se describen sus principales características (Arce et al., 2019).

Corriente empirista

El enfoque que toma esta corriente respecto a la transferencia de conocimientos se basa en que el aprendizaje ocurre a través de la transmisión directa de conocimientos desde el docente al estudiante. El profesor es visto como la fuente principal de sabiduría y el estudiante como un receptor pasivo, por lo que el proceso de enseñanza es unidireccional.

Se utilizan métodos de enseñanza tradicionales, como la exposición oral, la memorización y la repetición. El objetivo principal es que los estudiantes adquieran y reproduzcan información precisa. La evaluación en la corriente empirista suele ser sumativa, centrada en medir la cantidad de información retenida por los estudiantes a través de exámenes y pruebas estandarizadas.

Los estudiantes son, principalmente, receptores pasivos de información. Su papel es escuchar, memorizar y reproducir el conocimiento transmitido por el maestro. El error se relaciona con el fracaso, ya sea por parte del docente o por parte del alumno, y es algo a evitar.

La corriente empirista está influenciada por teorías del aprendizaje conductista, que enfatizan la importancia de los estímulos externos y las respuestas observables en el proceso de aprendizaje.

Corriente constructivista

El enfoque que toma esta corriente respecto a la transmisión de conocimientos se basa en la idea de que el aprendizaje es un proceso activo en el cual los estudiantes construyen su propio conocimiento a través de la interacción con el entorno y la resolución de problemas. El alumnado no es mero receptor de información, sino participante activo en el proceso de aprendizaje.

Los métodos de enseñanza incluyen actividades que fomentan la exploración, la investigación y la colaboración. Los maestros facilitan el aprendizaje proporcionando situaciones problemáticas y guiando a los estudiantes en el descubrimiento y la construcción de conocimientos.

Cabe destacar también que la evaluación en la corriente constructivista es principalmente formativa y continua. Se centra en el progreso individual del estudiante, la comprensión profunda y la aplicación del conocimiento. Se utilizan diversos métodos de evaluación, como proyectos, portafolios y observaciones.

Los alumnos, por tanto, son considerados constructores activos de su propio conocimiento. Participan en actividades significativas, interactúan con otros y reflexionan sobre sus experiencias para construir entendimientos profundos y duraderos.

De nuevo, volviendo al artículo de Arce et al. (2019), se apunta que estas teorías enfatizan la importancia de los procesos internos de pensamiento y la influencia del contexto social y cultural en el aprendizaje. Algunas de ellas consideradas como las más influyentes son las siguientes:

- *Constructivismo Cognitivo de Jean Piaget*:

  Identifica cuatro etapas del desarrollo cognitivo: sensoriomotor (0-2 años), preoperacional (2-7 años), operaciones concretas (7-11 años) y operaciones formales (11 años en adelante). Cada etapa representa un nivel cualitativamente diferente de pensamiento y razonamiento.

  Describe los esquemas como estructuras mentales que los individuos usan para organizar y entender el mundo. Los esquemas se desarrollan y se modifican a través de la experiencia y la interacción con el entorno para incorporar nueva información mediante el proceso de asimilación y acomodación. Durante este proceso, el individuo busca alcanzar el equilibrio, que es el estado de estabilidad cognitiva. El aprendizaje y desarrollo cognitivo surgen del desequilibrio ocasionado por la modificación de los esquemas existentes.

- *Constructivismo Social de Lev Vygotsky:*

  Destaca la importancia de las herramientas culturales (como el lenguaje, los símbolos y los artefactos) en la mediación del aprendizaje. Las interacciones sociales y el uso de estas herramientas permiten a los individuos internalizar conocimientos y habilidades. Considera el lenguaje como una herramienta fundamental para el desarrollo cognitivo porque ayuda a la estructuración del pensamiento y a la autorregulación y la reflexión.

  Describe el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) como el rango de tareas que un niño puede realizar con la ayuda y guía de un adulto o compañero más capacitado. La ZDP representa el potencial de aprendizaje del niño y enfatiza la importancia de la interacción social en el desarrollo cognitivo.

- *Aprendizaje por descubrimiento de Jerome Bruner*:

  Defiende el aprendizaje por descubrimiento, donde los estudiantes construyen su propio conocimiento a través de la exploración y la resolución de problemas. Durante su trabajo activo, los procesos de observación, experimentación, comparación o formulación de hipótesis, se genera el aprendizaje y conocimiento por sí mismos. Si posteriormente se realiza un trabajo más analítico, como el de la generalización o comprobación de la veracidad de las respuestas, podrán asimilar e integrar el conocimiento descubierto.

  Bruner establece la idea de currículo en espiral, basado en el asentamiento de ideas y conceptos a lo largo de varios niveles de enseñanza. Esto es, el tratamiento de un concepto en varios cursos aumentando progresivamente el nivel de complejidad.

  En esta teoría el papel del docente es fundamental, puesto que es el responsable de seleccionar los problemas, y realizará observaciones a los estudiantes, motivarles, animarlos a realizar hipótesis e identificar posibles errores.

- *Aprendizaje significativo de David Ausubel:*

  Considera que para un aprendizaje significativo es necesario que la nueva información se relacione con el conocimiento previo para originar una comprensión profunda y retención a largo plazo en el alumno. En contrapartida, el aprendizaje memorístico y mecánico es aquel que el estudiante recibe informaciones o conocimientos aislados, por lo que no es capaz de relacionarlos con otros anteriores. Para conseguir el aprendizaje significativo, se plantean varias metodologías docentes de tipo expositivo-participativo.

  Es necesario que el docente, en primer lugar, tenga presente con qué conocimientos previos cuentan los alumnos, y, en segundo lugar, plantee los nuevos conocimientos de una manera que facilite al estudiante a asimilarlos, ya sea planteando cuestiones que relacionen conceptos previos, o bien yendo de lo general a lo particular, tareas que reflejen el mundo real, etc.

A modo de conclusiones, como recoge Coll (1996), no se debe cerrar en banda hacia una única teoría del desarrollo o del aprendizaje para analizar y comprender los procesos del sistema enseñanza-aprendizaje. Si así fuera, se estaría renunciando a utilizar otras teorías que pueden ayudar a comprender otros aspectos que no están suficientemente estudiados y explicados por la elegida.

2.1.5. La importancia del dominio socioafectivo en la didáctica de las matemáticas

Las teorías generales constructivistas descritas en el apartado anterior se utilizaron para tratar de explicar y conocer mejor los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Arce et al., 2019, p. 34), pero han resultado poco satisfactorias dado que estas teorías son independientes del contenido enseñado, y, por tanto, de las características específicas de la asignatura, como por ejemplo su contenido abstracto. Por esta razón se tuvo la necesidad de desarrollar una nueva disciplina de conocimiento, la didáctica de la matemática con el objetivo de intercambiar conocimientos, visiones, experiencias, investigaciones, entre profesores e investigadores de la materia.

Brousseau (1990) presenta en su artículo el empleo más corriente del adjetivo "didáctica" como "lo que es apropiado para la enseñanza, lo que tiene por finalidad la enseñanza, y, más en general, lo que está relacionado con la enseñanza". Entendemos como Didáctica de las Matemáticas, por tanto, al área científica que se ocupa de analizar y mejorar la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina (Gutiérrez, 2021). Su objetivo es encontrar métodos y estrategias que faciliten la comprensión y el aprendizaje efectivo de la materia.

La enseñanza de las matemáticas, tradicionalmente enfocada en la transmisión de conocimientos técnicos y habilidades analíticas mediante métodos directos y repetitivos, ha evolucionado significativamente en las últimas décadas. Esta evolución ha sido introducida por las diversas investigaciones en la disciplina de Didáctica de la Matemática. A nivel global, esta investigación se inició orientándose al estudiante, rechazando la idea de verlo como un mero receptor de conocimientos. Se preocupó por considerar sus concepciones y cómo estas influyen y son transformadas por el aprendizaje (Artigue, 2004).

Hoy en día, se reconoce que el aprendizaje de las matemáticas no solo debe centrarse en el dominio cognitivo, sino también en el desarrollo socioafectivo de los estudiantes en el que influyen todos los factores participantes del sistema educativo, por lo que es de vital importancia también la visión de los docentes, aula, centro, familias. Este enfoque integral es esencial para fomentar una comprensión profunda y significativa de las matemáticas, así como para desarrollar habilidades emocionales y sociales cruciales para el éxito en la vida. Los conceptos centrales que algunos autores han establecido como aparato teórico de la disciplina son los de sistema didáctico y situación didáctica.

Sistema didáctico

Como hemos comentado anteriormente, a la hora de analizar cualquier proceso de enseñanza hay que tener presentes los diferentes elementos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje: alumnos, docentes, matemáticas y el entorno; por lo que hay varios campos de investigación según esos elementos (Armendáriz, Azcárate y Defulofeu, 1993).

- Investigaciones en torno al pensamiento de los docentes y a sus pautas de comportamiento. Se incluyen las investigaciones de las matemáticas como objeto de enseñanza, las ideas que tienen ellos sobre la materia que enseñan, aquellas matemáticas que creen que deben enseñar y por qué, o la forma en la que los alumnos la aprenden, así como sus ideas sobre la relación profesor-alumno. El profesor se encargará de organizar las interacciones entre los estudiantes y la materia, favoreciendo que aprendan a aprender poniéndoles en contacto directo con el saber matemático.

- Investigaciones respecto a los alumnos, incluyendo sus ideas respecto a la materia, dificultades que se les presentan en el aprendizaje de la misma, la influencia del medio social, cultural y afectivo sobre el aprendizaje, el papel que toma la motivación e intereses del estudiante.

- Investigaciones en torno a las estrategias de enseñanza, donde se contempla tanto nuevas teorías de aprendizaje como nuevas propuestas curriculares o métodos didácticos (como puede ser resolución de problemas, aprendizaje basado en proyectos, *thinking classrooms*, técnica puzzle, etc).

- Investigaciones que hacen referencia al marco o contexto en el que se desarrolla la enseñanza, incluyendo el centro escolar con sus aulas, laboratorios, talleres, etc., las interacciones que ocurren en el centro como alumno-alumno, alumno-profesor o profesor-clase.

Podemos en este apartado hablar ya de la primera interacción entre elementos del sistema a través del contrato didáctico. Se establece para las relaciones entre alumnos, alumnos y profesor y el buen funcionamiento del aula una serie de reglas explícitas o implícitas.

Relación entre elementos del sistema didáctico: las situaciones didácticas

Las situaciones didácticas son aquellas interrelaciones de enseñanza y aprendizaje del docente, el alumno, las matemáticas como saber, y sin dejar a un lado el contexto o entorno. Partiendo del triángulo de la didáctica (D'Amore, 2008), se pueden observar los distintos vínculos:

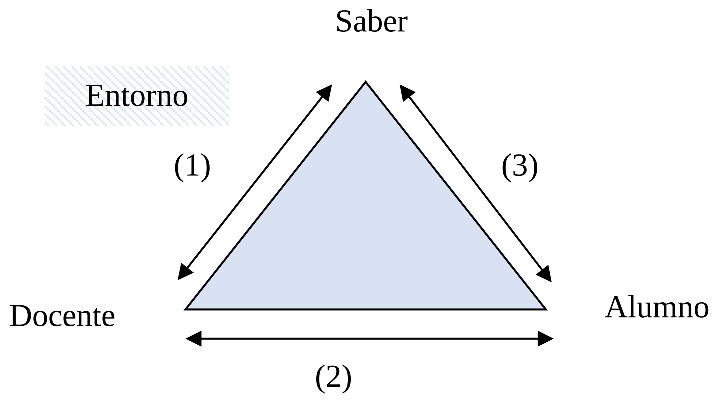


Ilustración 1. Elementos del distema didáctico

- Centrado en el contenido (1): llamado también modelo normativo, el maestro introduce los conceptos teóricos y utilizando ejemplos mientras el alumno está en un plano secundario escuchando, aprendiendo, ejercitando y finalmente aplicando, estando el saber (los conocimientos matemáticos) ya construido. Por eso el estudiante en este caso cuando se le entrega una tarea, busca si ya trabajado otra del mismo tipo.

- Centrado en el alumno (2): llamado iniciativo, es propio de los métodos activos. El docente se preocupa por los intereses de los alumnos para buscar su motivación. Así les ayuda a usar diferentes herramientas de aprendizaje para que recolecten la información para organizarla, estudiarla y aprenderla. Se utiliza el problema como motor del aprendizaje, siendo el alumno el principal protagonista como ansioso demandante de conocimientos.

- Centrado en la construcción del saber por parte del alumno (3): se parte de los conceptos que el alumnado ya posee y se utilizan para mejorarlas o construir nuevas. El cometido del profesor es proponer y organizar problemas, que es el recurso de aprendizaje, y su resolución interviene desde el inicio. El estudiante tendrá que resolverlos interactuando con sus compañeros para construir su conocimiento.

A la hora de realizar esta conexión triangular entre los saberes, la enseñanza y el aprendizaje, es importante establecer varias pautas que nos ayuden a ello como docentes, y se basarán en las preguntas guía:

- “¿Qué enseño?”, refiriéndose a los contenidos (qué voy a enseñar).
- “¿Cuándo lo voy a enseñar?”, queriendo decir los tiempos tanto de enseñanza por parte del profesor como los de aprendizaje por parte del alumno.
- “¿Cómo lo voy a enseñar?”, es decir, los métodos y estrategias que voy a seguir. Aquí entran en juego las metodologías docentes que describiremos en el siguiente apartado.

Métodos didácticos en matemáticas

El método didáctico, o método de enseñanza, es el conjunto de procedimientos que tienden a dirigir el aprendizaje. Como docentes, es fundamental estar al tanto de tareas y recursos didácticos que promuevan y estimulen el aprendizaje de las matemáticas, adecuándolos al nivel educativo correspondiente. Para implementarlos, es esencial conocer, desarrollar y aplicar diversas metodologías, tanto grupales como individuales, que se adapten a la diversidad de los estudiantes.

La escasez de información sobre otros métodos reconocidos como exitosos y la fuerte conexión de la enseñanza con el magisterio académico han llevado a que la llamada "lección magistral" sea la estrategia metodológica más utilizada en toda la educación. Sin embargo, ¡existen otros procedimientos! Algunos de ellos se describen a continuación, recopilados del material entregado en la asignatura Metodología y Evaluación Matemática (González, 2024) del presente Máster MUPES.

- *Aprendizaje basado en problemas (ABP):*

  Es un método de aprendizaje que utiliza problemas como punto de partida para la adquisición e integración de nuevos conocimientos, fomentando el autoaprendizaje y el desarrollo del pensamiento crítico. Su objetivo es que los estudiantes analicen y resuelvan un problema planteado en forma de escenario para alcanzar ciertos objetivos educativos. Se espera que los estudiantes puedan diagnosticar sus necesidades de aprendizaje, comprendan la importancia del trabajo colaborativo y desarrollen habilidades de búsqueda de información, análisis y síntesis.

  La metodología de ABP implica una selección cuidadosa de problemas por grupos de profesores de materias afines, presentados a pequeños grupos de estudiantes con la ayuda de un tutor. Los problemas se describen en un lenguaje sencillo y poco técnico, planteando un reto o una cuestión que requiere explicación. La tarea del grupo de estudiantes es discutir estos problemas y aportar explicaciones fundamentadas en términos de procesos, principios o mecanismos relevantes, valorando tanto el conocimiento adquirido como el proceso de aprendizaje.

El material básico de aprendizaje incluye las descripciones de los problemas, una biblioteca de recursos, clases ocasionales y el contacto con expertos para consultas puntuales.

- *Aprendizaje cooperativo:*

  Es una metodología pedagógica que utiliza las relaciones sociales y las interacciones colectivas como experiencias de aprendizaje, mediante la realización de tareas en grupo. En este enfoque, el aprendizaje se basa en el intercambio de información entre los estudiantes, quienes se motivan tanto para alcanzar sus propios objetivos como para impulsar el éxito de los demás.

  El aprendizaje cooperativo consiste en utilizar el trabajo en equipos reducidos de alumnos con un propósito didáctico, aprovechando al máximo la interacción entre ellos. De esta manera, todos los miembros del grupo asimilan los contenidos escolares, cada uno hasta el límite de sus capacidades, y, además, aprenden a trabajar en conjunto.

- *Estudio de casos:*

  El estudio de casos es un método pedagógico que tiene como objetivo principal desarrollar el sentido práctico de los estudiantes en un área específica, enfrentándolos a situaciones problemáticas. El término "caso" generalmente se refiere al caso concreto presentado a los alumnos, que suele ser un relato o una descripción que plantea una serie de preguntas a responder. Aunque a veces también se usa para referirse abreviadamente al propio método.

  Cabe destacar que el estudio de casos también puede referirse a un tipo particular de investigación. Sin embargo, en este contexto, nos enfocamos en el método de enseñanza. Formalmente, un caso es una narración que describe un contexto y un desafío a enfrentar. Su aplicación como estrategia de aprendizaje consiste en entrenar a los estudiantes en la elaboración y argumentación de respuestas válidas, preparándolos para un futuro lleno de contingencias.

  Un caso no proporciona soluciones sino datos concretos para reflexionar, analizar y discutir en grupo las posibles soluciones que un mismo problema puede tener. No ofrece las respuestas al aprendiz, sino que lo entrena para generarlas. Es una técnica que ejercita el pensamiento abstracto, invitando a los estudiantes a plantear diversas hipótesis, evaluar cuál es la más adecuada y luego comprobar los resultados. Esta técnica se contrapone al clásico método de prueba y error. Además, este método de aprendizaje fomenta la generación de múltiples soluciones alternativas, promoviendo la creatividad y la innovación.

- *Aprendizaje Orientado a Proyectos (AOP)*

  Este método consiste en estructurar el aprendizaje de una parte o la totalidad de una asignatura alrededor de la creación de un proyecto. Este proyecto se basa en una situación real en la que los estudiantes pueden aplicar los conocimientos adquiridos en el aula. A menudo, se realiza en grupo, y los alumnos deben planificar, desarrollar y evaluar un proyecto que responda a las necesidades de la situación real planteada. El aprendizaje es práctico e inductivo, con el docente introduciendo conocimientos según las dificultades y el progreso de los proyectos.

  Para llevar a cabo este tipo de aprendizaje, los estudiantes deben saber cómo manejar diversas fuentes de información. Además, es crucial la coordinación entre docentes de distintas materias para presentar a los alumnos un proyecto que requiera aplicar conocimientos de diferentes asignaturas, permitiéndoles construir nuevos conocimientos de manera coherente. Trabajar con proyectos puede transformar las relaciones entre maestros y estudiantes, reduciendo la competencia entre los alumnos y fomentando la colaboración en lugar de la competencia. Los proyectos también pueden cambiar el enfoque del aprendizaje, pasando de la simple memorización de hechos a la exploración de ideas.

  En cuanto al uso de este método en la enseñanza de las matemáticas, es evidente que muchos jóvenes dominan habilidades organizativas y procedimientos, pero tienen dificultades para formular preguntas científicas, gestionar procesos complejos, transformar datos y desarrollar explicaciones lógicas para apoyar sus argumentos. Por esta razón, parece que este método no se emplea ampliamente en la educación matemática.

- *Aprendizaje basado en tareas (ABT)*

  El aprendizaje basado en tareas (ABT) se trata de una metodología tradicional, pero le da mucha importancia al aprendizaje significativo y a la competencia de aprender a aprender, organiza los aprendizajes en torno a la creación de proyectos prácticos. Las tareas son actividades orientadas a objetivos concretos que fomentan la interacción y el uso del idioma o conocimientos específicos para resolver problemas y compartir experiencias. A diferencia de enfoques tradicionales, ABT centra la enseñanza en el estudiante y promueve un aprendizaje significativo.

  Consta de tres fases: en la primera, el docente introduce el tema y repasa conceptos clave; en la segunda, los estudiantes realizan la tarea en grupos, preparan una presentación y exponen su trabajo; y en la tercera, analizan y practican los conocimientos adquiridos.

El ABT, originalmente desarrollado para la enseñanza de idiomas, también es efectivo en matemáticas, aunque se utiliza menos. En esta disciplina, los estudiantes trabajan en grupos para resolver problemas y exponer sus hallazgos, lo que fomenta la confianza, la colaboración y el pensamiento crítico. Para diseñar tareas efectivas, es crucial ajustar la dificultad, establecer objetivos claros, promover la participación activa y estimular la reflexión y la práctica.

- *Resolución de problemas*

La resolución de problemas es una metodología que ofrece estrategias que puedan ayudar a un alumno a aprender a resolver problemas matemáticos, y al profesor que puedan ayudarle a "enseñar a resolver". Representan un desafío que implica diversas emociones, ya que esta metodología a menudo presenta a los alumnos situaciones de incertidumbre, bloqueos, por lo que es muy importante que aprendan a gestionarlas y a que el error es parte del proceso de aprendizaje.

Para que una actividad sea considerada como problema debe tener un objetivo que no sea sencillo alcanzar con la aplicación directa de una fórmula o un procedimiento inmediato matemático. El alumno debe saber que puede haber diferentes formas de resolver un problema tomando caminos distintos, que no se pueda resolver o que la solución no sea numérica.

- *Gamificación o aprendizaje basado en juegos (ABJ)*

El aprendizaje basado en juegos es una metodología innovadora que aprovecha el potencial educativo que ofrecen los videojuegos en general y los juegos serios en particular para mejorar los procesos de formación, facilitando así que los usuarios logren un aprendizaje motivado (del Moral et al., 2018).

Aunque se utiliza comúnmente como sinónimos, existe una sutil diferencia entre ambos conceptos. Mientras que la metodología de aprendizaje basado en juegos (ABJ) utiliza juegos para el aprendizaje o la evaluación de contenidos, la gamificación se enfoca en aplicar estrategias de juego en contextos no lúdicos. Es decir, por un lado la metodología ABJ emplea juegos, ya sean existentes o creados, para enseñar contenidos específicos a los estudiantes. Por otro lado, la gamificación implementa elementos y técnicas de juegos en situaciones que no son inherentemente lúdicas, con el fin de reforzar o modificar las conductas de los alumnos, sin que esto implique necesariamente el uso de un juego.

Los *serious games* son juegos diseñados principalmente con fines educativos en lugar de entretenimiento. El término fue acuñado por Clark Abt en 1970, quien exploró cómo los juegos pueden integrarse en procesos educativos sin perder su aspecto lúdico. Estos juegos son especialmente útiles para aprender habilidades específicas como idiomas y matemáticas, y también han demostrado ser efectivos en la formación profesional, desarrollando competencias como el liderazgo y la gestión de proyectos. Actualmente, los *serious games* suelen presentarse en formato de videojuegos.

Estrategias didácticas para integrar el dominio socioafectivo en las matemáticas

Las nuevas orientaciones curriculares, tanto en España como en otros países, resaltan la importancia del componente socioafectivo en el aprendizaje de las matemáticas, subrayando la necesidad de considerarlo en la planificación e implementación de las secuencias educativas. Integrar el dominio socioafectivo en la enseñanza de las matemáticas implica reconocer la importancia de las emociones, las actitudes y las relaciones sociales en el proceso de aprendizaje. A continuación, se desarrollan algunas estrategias didácticas que pueden ser efectivas para lograr esta integración (Nuñez M.C, y Fontana, M., 2009; Vaello, 2007).

- Fomento de la comunicación y el trabajo en equipo: fomentar el trabajo colaborativo en equipos pequeños puede desarrollar habilidades sociales y emocionales cruciales. A través del aprendizaje cooperativo, los estudiantes aprenden a comunicarse de manera efectiva, resolver conflictos y trabajar juntos hacia una meta común. Los docentes pueden fomentar la discusión y el intercambio de ideas entre los estudiantes, así como asignar tareas que requieran la colaboración de todo el grupo. Esto contribuye no solo a mejorar las habilidades de comunicación de los alumnos, sino también a fortalecer sus relaciones interpersonales y a cultivar un sentido de comunidad y pertenencia en el entorno educativo.

- Educación emocional en matemáticas: incorporar la educación emocional en las lecciones de matemáticas es esencial para que los estudiantes puedan gestionar sus emociones relacionadas con esta asignatura. Realizar actividades que incluyan la reflexión sobre las emociones experimentadas al resolver problemas, utilizar técnicas para manejar la ansiedad y abrir discusiones sobre los sentimientos hacia las matemáticas puede ayudar a los estudiantes a desarrollar una mayor conciencia de sí mismos y a regular mejor sus emociones.

- Ambiente escolar positivo: crear un entorno de clase que favorezca la inclusión, el respeto y el apoyo entre los estudiantes es fundamental para su desarrollo socioafectivo. Los profesores deben ser modelos de comportamientos positivos y establecer reglas claras que promuevan el respeto y la cooperación. Un ambiente escolar positivo reduce el estrés y la ansiedad, lo que mejora el bienestar emocional y la motivación de los estudiantes para aprender.

- Enfoque en la diversidad: reconocer y apreciar la diversidad en la clase de matemáticas es esencial para satisfacer las necesidades individuales de los alumnos. Esto implica una adaptación de las metodologías de enseñanza para que todos se sientan incluidos y valorados, sin importar sus antecedentes culturales, sociales o emocionales. Adoptar un enfoque inclusivo y equitativo en la materia puede ayudar a disminuir las barreras emocionales y sociales que algunos estudiantes puedan experimentar.

- Integración de actividades lúdicas. Una estrategia fundamental para enseñar matemáticas con un enfoque socioafectivo es incorporar diversas metodologías pedagógicas que incluyan este tipo de técnicas. Estas actividades no solo hacen que el aprendizaje sea más entretenido y motivador, sino que también promueven la colaboración y el trabajo en equipo entre los alumnos.

- Uso de ejemplos cercanos a la realidad del alumnado. Al vincular los conceptos matemáticos con situaciones y desafíos cotidianos, se les ofrece la oportunidad de conectar el aprendizaje con su propia experiencia, lo que facilita su comprensión y aplicación. Por ejemplo, los educadores pueden presentar ejemplos que involucren el manejo del tiempo, el uso del dinero o la comprensión de medidas relevantes para los alumnos.

- Fomento de la comunicación y el trabajo en equipo. Los maestros pueden fomentar la discusión y el intercambio de ideas entre los estudiantes, así como asignar tareas que requieran la colaboración de todo el grupo. Esto contribuye no solo a mejorar las habilidades de comunicación de los alumnos, sino también a cultivar un sentido de comunidad y pertenencia en el entorno educativo.

No debemos pasar por alto la importancia de la formación constante del profesorado. Los docentes desempeñan un rol fundamental en el desarrollo socioafectivo de los alumnos. Es crucial que reciban capacitación continua en habilidades socioemocionales y en enfoques didácticos que fomenten un crecimiento integral. La instrucción en áreas como la gestión del aula, la resolución de conflictos y la educación emocional prepara a los educadores para abordar de manera efectiva las necesidades socioafectivas de sus alumnos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas.

2.2. Marco contextual

2.2.1. Educación para adultos en España

El Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deporte del Gobierno de España, recoge en su portal web *educagob* que la educación de personas adultas "tiene la finalidad de ofrecer a todos los mayores de dieciocho años la posibilidad de adquirir, actualizar, completar o ampliar sus conocimientos y aptitudes para su desarrollo personal y profesional".

La educación dirigida a adultos se concentra en brindar oportunidades de aprendizaje que abarcan una amplia gama de áreas de conocimiento y habilidades para individuos mayores de edad. Este enfoque educativo reconoce que el proceso de formación no se detiene con los años, sino que se adapta a lo largo de la vida para atender las diversas necesidades y aspiraciones de los adultos en diferentes etapas de su desarrollo personal y profesional. Ofrece la oportunidad de adquirir las competencias básicas y, en su caso, las correspondientes titulaciones, facilitando el acceso a la educación secundaria obligatoria o equivalente, no sólo a los jóvenes que renunciaron a sus estudios de manera temprana y a los adultos que quieran continuar con su aprendizaje, sino también permite a los inmigrantes que llegan a nuestro país sin estudios o sin conocer el castellano la posibilidad de formarse en distintos ámbitos.

En el marco de la educación a lo largo de toda la vida, la UNESCO (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura) reconoce la importancia del aprendizaje y la educación de adultos como una pieza fundamental del rompecabezas educativo. Este enfoque abarca diversas modalidades de aprendizaje, incluyendo la educación formal, no formal e informal, cada una con sus propias características y objetivos.

La educación formal para adultos se integra dentro del sistema educativo oficial de un país y se desarrolla en instituciones educativas autorizadas, ofreciendo programas estructurados y certificados reconocidos por las autoridades competentes. Sus características principales incluyen la jerarquización en cursos y ciclos, la emisión de certificados o títulos que validan competencias básicas, y el marco legal específico de cada nación. El profesorado es mayormente profesional y el alumnado predominantemente joven, aunque abierto a adultos que deseen reincorporarse. La financiación puede ser estatal, privada o mixta, y se enfatiza la flexibilidad para combinar la formación con el trabajo y permitir a quienes dejaron sus estudios tempranamente retomarlos.

En contraste, la educación no formal complementa la educación formal y se adapta a todas las edades sin seguir una trayectoria continua. Se presenta en forma de cursos, seminarios o talleres, y otorga certificaciones no equivalentes a las de la educación formal. Incluye programas de alfabetización, habilidades laborales y desarrollo social. La Ley de Educación reconoce su importancia en la promoción de valores comunitarios y la mejora de la calidad de vida en diversos ámbitos sociales.

Por otro lado, la educación informal se refiere a los procesos de aprendizaje no estructurados e intencionales que ocurren en entornos cotidianos, como el hogar, el trabajo o la comunidad, sin una organización institucional definida. Estas experiencias de aprendizaje pueden ser tanto individuales como grupales, y se caracterizan por su naturaleza flexible y adaptable a las necesidades y circunstancias de cada individuo.

Características generales de la enseñanza para personas adultas

Las condiciones de incorporación a esta modalidad de enseñanza son, con carácter general, para personas con más de 18 años o que los cumplan en el año que comience el curso escolar, y, excepcionalmente, para los mayores de 16 años que lo soliciten y que se encuentren en alguna de las siguientes circunstancias:

- Que tengan un contrato laboral que no les permita acudir a los centros educativos en régimen ordinario.
- Que sean deportistas de alto rendimiento.
- Encontrarse en circunstancias excepcionales que les impidan acudir a centros educativos en régimen ordinario, siempre y cuando estas circunstancias estén debidamente justificadas ante la dirección del centro y aprobadas por el servicio de inspección.
- No haber estado escolarizado anteriormente en el sistema educativo español.

La educación en este sistema se puede orientar a tres áreas diferentes, según sea el objetivo al acceso a otros niveles del sistema educativo, al desarrollo profesional o al desarrollo personal y social.

<table>
<tr><td rowspan="4">Área de educación orientada al acceso a otros niveles del sistema educativo</td><td>Enseñanza Básica para personas adultas:
• Nivel de Iniciación
• Nivel de Conocimientos Básicos
• Enseñanza Secundaria para personas adultas.</td></tr>
<tr><td>Bachillerato para personas adultas.
• Bachillerato a distancia
• Bachillerato nocturno</td></tr>
<tr><td>Programas formativos destinados a la preparación de pruebas libres y pruebas de acceso:
• Pruebas libres para la obtención del título de graduado en ESO.
• Pruebas de acceso a ciclos de Formación Profesional de grado medio y de grado superior.
• Pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 y 45 años.</td></tr>
<tr><td>Programas de desarrollo y refuerzo de competencias básicas específicas.</td></tr>
<tr><td>Área de formación orientada al desarrollo profesional</td><td>Programas para la adquisición y desarrollo de competencias profesionales.

Programas de preparación de las pruebas para la obtención del título de Técnico y Técnico Superior de Formación Profesional.</td></tr>
</table>

	Enseñanzas de formación profesional específica para personas adultas. Programa Aula Mentor.
Área de formación para el desarrollo personal y social.	Programa de desarrollo y refuerzo de las competencias básicas genéricas.

Tabla 1. Ofertas educativas en la enseñanza para personas adultas

De acuerdo con el artículo 4 de la Orden EFP/822/2023, de 19 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la enseñanza básica para las personas adultas, y se establecen las características de la prueba para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria para mayores de dieciocho años, en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación y Formación Profesional, publicada en el BOE, la enseñanza se impartirá en tres modalidades:

- En la modalidad presencial, el alumnado deberá asistir a un centro docente de manera regular para realizar las tareas de enseñanza y aprendizaje según un horario semanal preestablecido a principio de curso. Se impartirá en Centros de Educación de Personas Adultas (CEPAS) para el caso de Secundaria y, para Bachillerato, también en centros ordinarios. Las enseñanzas que se pueden cursar en esta modalidad con las siguientes:
    - Nivel de iniciación: su objetivo es que los estudiantes adquieran conocimientos básicos de lectura, escritura y matemáticas. Hay un nivel de iniciación diseñado específicamente para personas cuya segunda lengua es el castellano (especialmente inmigrantes) y otro para quienes tienen el castellano como lengua materna. Los estudiantes que completen estas enseñanzas recibirán un certificado del centro educativo, el cual detallará los módulos que han cursado y las calificaciones obtenidas en cada uno de ellos.
    - Nivel de Conocimientos básicos: el objetivo fortalecer los conocimientos previos, aumentando la adquisición de competencias básicas y el dominio de las tecnologías de la información y la comunicación, así como de una lengua extranjera. Esto prepara a los estudiantes para acceder a la Educación Secundaria para adultos o para seguir cursos que les permitan obtener cualificaciones profesionales. Al igual que en el anterior, el alumnado al finalizar esta enseñanza recibirá una certificación del centro educativo en la que constarán los módulos cursados y las calificaciones.
    - Enseñanza Secundaria para personas adultas (ESPA): facilita el desarrollo de las habilidades y competencias necesarias para obtener el título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria, el cual se obtiene tras superar el conjunto de

módulos que constituyen el currículo de la educación secundaria para personas adultas. Se estructura en cuatro módulos cuatrimestrales (módulo I, módulo II, módulo III y módulo IV, cada módulo equivale a un curso de la ESO) y cada uno de estos módulos está formado por tres ámbitos de conocimiento (ámbito de científico-tecnológico, ámbito de comunicación y ámbito social).

- Bachillerato para personas adultas en régimen nocturno: su finalidad es la formación integral de los adultos, dotándolos de una madurez tanto intelectual como humana. Esto incluye proporcionarles los conocimientos y habilidades necesarios para desempeñarse con responsabilidad y competencia en sus roles sociales. Además, los capacita para acceder a estudios universitarios, formación profesional de grado superior o para integrarse de manera efectiva en la vida laboral. En el apartado siguiente se detallarán las características de esta modalidad.

- Programas de educación no formal: busca ayudar en la obtención de una titulación básica, facilitar el acceso a la formación profesional, fortalecer y desarrollar competencias básicas y profesionales, y promover la ciudadanía activa, contribuyendo así a la formación integral de las personas adultas. Existen varios tipos de programas de educación no formal, que van desde programas de preparación de pruebas de acceso a ciclos formativos, de pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años y 45 años, programas de desarrollo y refuerzo de competencias básicas, así como aquellos para la adquisición de competencias profesionales.

- En la modalidad a distancia, el alumnado deberá asistir al centro docente de manera puntual para complementar las tareas de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan mediante plataformas virtuales. En este caso se impartirá tanto en centros docentes ordinarios o en Centros de Educación de Personas Adultas.

- En la modalidad a distancia virtual, el alumnado realizará todas las tareas de enseñanza y aprendizaje mediante plataformas virtuales. Deberá ser diseñada conforme a los principios de accesibilidad universal y diseño para todos, y será impartida por el Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia (CIDEAD), a través del Centro Integrado de Enseñanzas Regladas a Distancia (CIERD). En ambas modalidades a distancia, las enseñanzas a cursar son:

    - Enseñanza Secundaria para personas Adultas (ESPAD): con el mismo argumento que la modalidad presencial, ésta a distancia cuenta con tutorías que se realizan a distancia y de forma presencial. Estas tutorías pueden ser individuales (de forma telefónica, telemática o presencial) en la que cada alumno expone sus dudas y se hará un seguimiento del proceso de aprendizaje por parte del tutor, y tutorías colectivas, que se realizan de manera conjunta para todos aquellos alumnos matriculados que acudan de manera voluntaria.

- Ciclos de formación Profesional Online: utilizando una plataforma de formación en línea, se proporcionan los materiales didácticos, tareas y actividades, junto con la atención tutorial del profesorado. Además, esta modalidad educativa ofrece una alternativa para quienes, debido a razones personales, familiares, laborales, u otras, no pueden asistir a clases presenciales. La formación en centros de trabajo, que corresponde a un módulo, tiene que ser en régimen presencial.

- Bachillerato para personas adultas a distancia: los objetivos son los mismos que en la modalidad presencial, estando aquí orientado a aquellas personas adultas que no puedan acudir al centro formativo de forma presencial por circunstancias especiales. A diferencia del bachillerato ordinario donde existe un límite de permanencia de cuatro años, en el bachillerato a distancia no hay limitación temporal de permanencia, lo cual te permite cursar estas enseñanzas con la flexibilidad que requieras. La organización de tutorías es equivalente a las de la ESPAD.

- Cursos del Aula Mentor se trata de un programa educativo diseñado para adultos interesados en mejorar sus habilidades personales y profesionales. Las clases se imparten de manera remota a través de Internet. No obstante, las aulas Mentor proporcionan acceso a equipos conectados a Internet para aquellos estudiantes que no disponen de recursos propios. Los estudiantes tienen la libertad de establecer su propio ritmo de aprendizaje y dedicación, permitiéndoles gestionar el tiempo dedicado al curso según sus disponibilidades, y además existe una amplia oferta educativa en la plataforma.

En nuestra comunidad autónoma, Castilla y León, es competencia de la Consejería de Educación, la cual realiza una gestión descentralizada a nivel provincial, por medio de las 9 Direcciones Provinciales de Educación (Sede electrónica de Castilla y León, 2023). Aquí indica en qué centros se impartirá esta enseñanza: existe una red pública y gratuita de Centros de Educación de Personas Adultas (CEPAS) y Aulas de Educación de Personas Adultas en Castilla y León. Muchos de estos centros están situados en zonas rurales y su radio de actuación es el territorial, es decir, abarcan todos los municipios incluidos en su ámbito de actuación.

En el Portal de Educación de la Junta de Castilla y León, *educacyl*, se detallan las informaciones respecto a la oferta educativa y a las homologaciones y equivalencias de títulos. El mensaje para transmitir, en todo caso, está siempre orientado a la flexibilidad de la modalidad, la posibilidad de adaptación a las necesidades para conciliar la vida personal y la laboral con la formación.

2.2.2. Características de las enseñanzas de Bachillerato para personas adultas

Con la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE), también conocida como Ley Celaá, se establece el marco normativo actual para la enseñanza de personas adultas en España. La LOMLOE ha introducido cambios significativos en el sistema educativo español, incluyendo aspectos relevantes para la educación de adultos. Respecto a esta modalidad, mantiene los principios de igualdad de oportunidades, accesibilidad, flexibilidad y adaptación a las circunstancias personales y laborales de los adultos. Se promueve la educación a lo largo de toda la vida y se refuerza la importancia de la formación continua y permanente.

La ley enfatiza la inclusión y la equidad en la educación, reconociendo la diversidad de necesidades y situaciones de los mayores de edad que desean continuar su formación. Además, se potencia el reconocimiento de competencias adquiridas mediante la experiencia laboral o personal, facilitando vías para la acreditación y validación de aprendizajes previos.

La LOMLOE también subraya la colaboración entre administraciones educativas para asegurar una oferta formativa coherente y adaptada a las demandas locales y regionales. Esto se traduce en una mayor autonomía para las comunidades autónomas en la gestión y planificación de la educación de personas adultas, respetando el marco normativo establecido a nivel estatal.

La normativa vigente para la enseñanza de Bachillerato de personas adultas viene recogida por la Orden EFP/824/2023, de 19 de julio, por la que se regula la ordenación de la enseñanza de Bachillerato para personas adultas y se establecen las características de la prueba para la obtención del título de Bachiller para personas mayores de veinte años, en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación y Formación Profesional.

El Bachillerato tiene como objetivo ofrecer formación integral, madurez intelectual y humana, y desarrollar conocimientos, habilidades y actitudes para desempeñar funciones sociales y participar en la vida activa con responsabilidad. Además, debe asegurar la adquisición de competencias esenciales para el futuro formativo y profesional, y preparar para el acceso a la educación superior. Conforma la educación secundaria postobligatoria junto con la Formación Profesional de Grado Medio, las Enseñanzas Artísticas Profesionales y las Enseñanzas Deportivas de Grado Medio.

Organización

Como se describe en el bloque anterior, las enseñanzas de Bachillerato para adultos se organizan en tres modalidades según sea régimen presencial, a distancia, y a distancia virtual. Las modalidades presencial y a distancia se imparten en centros educativos ordinarios o en Centros de Educación de Personas Adultas que están autorizados para ofrecer Bachillerato en régimen ordinario. Por otro lado, la modalidad a distancia virtual es ofrecida por el Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia (CIDEAD) a través del Centro Integrado de Enseñanzas Regladas a Distancia (CIERD).

Organización en régimen presencial

El horario se organiza en turno nocturno de lunes a viernes, con clases de al menos cincuenta y cinco minutos de duración cada una. La asistencia regular es fundamental, ya que se requiere un mínimo del 75% de asistencia para ser evaluado mediante un proceso continuo. Para aquellos estudiantes que no cumplan con el requisito de asistencia se establecen pruebas finales específicas para cada materia.

Los centros educativos que desean impartir esta modalidad deben ser autorizados por la Dirección General de Planificación y Gestión Educativa, tras una evaluación que considera las necesidades sociales, laborales y personales de los estudiantes potenciales. Estos centros pueden ofrecer las mismas modalidades de Bachillerato que se imparten en el régimen ordinario, adaptando el currículo y la organización académica según las circunstancias específicas de los adultos que asisten.

La matrícula generalmente se realiza para un curso completo, pero existe la flexibilidad de matricularse en materias individuales, tanto del primero como del segundo curso, permitiendo al estudiante adaptar su carga académica a sus posibilidades y disponibilidad de tiempo. Es crucial asegurar que el alumno asista a todas las sesiones requeridas, especialmente en el caso de materias que requieren una secuencia continua de aprendizaje entre cursos. La distribución de las horas de cada materia de forma semanal está distribuida de la siguiente manera:

Tipo de materia	Materias	Curso 1º	Curso 2º
Materias comunes	Educación Física	2h	-
	Filosofía	3h	-
	Lengua Castellana y Literatura	3h	4h
	Lengua extranjera	3h	3h
	Historia de España	-	4h
	Historia de la Filosofía	-	3h
Materias de modalidad	Materia de modalidad I	4h	4h
	Material de modalidad II	4h	4h
	Materia de modalidad III	4h	4h
Tutoría		1h	1h

Tabla 2. Carga semanal de las materias en el Bachillerato nocturno

Organización en régimen a distancia

En la modalidad a distancia, el apoyo al alumno se realiza tanto de forma presencial como telemática, mientras que en la modalidad a distancia virtual se ofrece exclusivamente de manera *online*.

Los Institutos de Educación Secundaria autorizados por la Dirección General de Planificación y Gestión Educativa pueden impartir estas modalidades de Bachillerato, adaptando su oferta según las necesidades sociales y laborales de los estudiantes. La autorización específica incluye la especificación de las modalidades y vías de Bachillerato que pueden ser ofrecidas.

En el caso de la modalidad a distancia virtual, las enseñanzas se gestionan a través del CIDEAD, cuya oferta formativa es definida por la Dirección General de Planificación y Gestión Educativa. La matrícula en estas modalidades permite al estudiante inscribirse en el número de materias deseado de los dos cursos de Bachillerato, con la condición de cumplir con los requisitos de continuidad entre cursos para ciertas materias, según lo establecido en la normativa vigente.

El alumnado recibirá guías de aprendizaje que orientarán su trabajo autónomo. Estas guías incluirán la distribución temporal de los criterios de evaluación, las orientaciones metodológicas y las actividades correspondientes a cada materia. Serán actualizadas anualmente e incluirán fechas de evaluación y otra información relevante, y serán elaboradas por los departamentos didácticos bajo la supervisión de la jefatura de estudios del centro. En la modalidad a distancia virtual, esta responsabilidad recae en el CIDEAD. El centro asegurará que todo el alumnado tenga acceso a estas guías al inicio del curso.

Las sesiones lectivas en la modalidad a distancia podrán ser telemáticas o presenciales, tanto individuales como colectivas. Se programará al menos una sesión semanal presencial por materia, junto con sesiones de tutoría y apoyo durante el trimestre. Las sesiones individuales también se organizarán según el número de horas asignadas a cada materia.

El horario de las sesiones colectivas e individuales será publicado al inicio del curso, especificando fechas y horarios para facilitar la asistencia del alumnado. Las sesiones colectivas tendrán una duración fija de cincuenta y cinco minutos y serán voluntarias. Se ofrecerán opciones de atención individualizada, incluyendo atención telefónica, telemática o presencial, según las necesidades del estudiante.

En la modalidad a distancia virtual, la atención al alumnado será exclusivamente virtual, gestionada a través del CIDEAD y el CIERD, utilizando herramientas de comunicación adecuadas para la atención individual y colectiva.

Los alumnos de Bachillerato para personas adultas deben cursar, por un lado, materias comunes, que proporcionan una formación general al alumnado y son obligatorias para todos ellos, y, al igual que en el régimen ordinario, los alumnos deben elegir asignaturas de una de las cuatro modalidades que se ofertan: Artes, Ciencia y Tecnología, General y Humanidades y Ciencias Sociales. Estas materias específicas de modalidad permiten profundizar en el perfil de Bachillerato elegido.

- Modalidad de Artes: Ideal para aquellos estudiantes interesados en el ámbito audiovisual, diseño o publicidad, así como para aquellos con pasión por la producción musical, danza o teatro. A su vez, hay para elegir dos vías: Artes Plásticas, Imagen y Diseño y Música y Artes Escénicas.

- Modalidad de Ciencias y Tecnología: para alumnos interesados en el ámbito biosanitario, los procesos tecnológicos, y las ciencias experimentales como matemáticas, física, química, biología o geología.

- Modalidad General: este Bachillerato es el más flexible, permitiendo la configuración de itinerarios formativos diversos al ofrecer la posibilidad de cursar materias de otras modalidades.

- Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales: para aquel alumnado que tiene inquietudes relacionadas con los estudios lingüísticos y literarios, la filosofía, las ciencias sociales, jurídicas, políticas y económicas o el turismo.

Los centros educativos desarrollan y complementan el currículo de la etapa según sea necesario, ajustándolo tanto a las características y necesidades de los estudiantes como a la realidad socioeducativa mediante su propuesta pedagógica. Además, cada departamento didáctico incluirá en su programación las adaptaciones necesarias para proporcionar la respuesta educativa más adecuada a los estudiantes, así como la metodología apropiada para cada modalidad de enseñanza.

Promoción y titulación

Para los estudiantes que cursan el Bachillerato para personas adultas, no se aplicarán los criterios de promoción establecidos en el artículo 21, apartado 1, del Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, que son válidos para el Bachillerato en régimen ordinario. En consecuencia, el número de materias no aprobadas no se tendrá en cuenta para pasar de un curso a otro. Además, se mantendrá la calificación de las asignaturas que hayan sido aprobadas. Las materias del segundo curso que requieran la aprobación previa de materias del primer curso, según lo especificado en el anexo VI de la Orden EFP/755/2022, de 31 de julio, se registrarán como "Pendientes" ("PT") hasta que se supere la asignatura correspondiente del curso anterior. En los documentos de evaluación de cada estudiante se incluirán las anotaciones necesarias para indicar que ha cursado el Bachillerato para personas adultas en modalidad presencial, a distancia o a distancia virtual.

Para que un alumno o alumna que no haya aprobado una materia obtenga el título de Bachiller de forma excepcional, deben cumplirse las siguientes condiciones: el equipo docente debe considerar que el alumno ha alcanzado los objetivos y competencias del título; el alumno no debe haber abandonado la materia según los criterios del centro; debe haberse presentado a todas las pruebas y realizado las actividades de evaluación, incluidas las de la convocatoria extraordinaria; y la media de las calificaciones de todas las materias debe ser igual o superior a cinco, considerando la nota de la materia no aprobada para el cálculo final.

Currículo

El currículo del Bachillerato para personas adultas se ajustará a lo dispuesto en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de Bachillerato, posteriormente concretado, para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación y Formación Profesional, en la Orden EFP/755/2022, de 31 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación del Bachillerato en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación y Formación Profesional. En el siguiente apartado hablaremos acerca del currículo de matemáticas, que es la materia objeto de estudio en el presente trabajo.

2.2.3. La competencia matemática en el currículo de Bachillerato

El Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, establece la organización y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. Define los objetivos, fines, principios generales y pedagógicos de esta etapa, y especifica el nivel de adquisición de competencias clave esperado al finalizarla. También detalla las modalidades y materias del Bachillerato, las competencias específicas de cada materia, y los criterios de evaluación y conocimientos básicos. Estos elementos, junto con los objetivos de la etapa, constituyen las enseñanzas mínimas. Las administraciones educativas deben establecer el currículo aplicable en sus territorios, incluyendo estas enseñanzas mínimas.

En cumplimiento de esto, el Ministerio de Educación y Formación Profesional debe determinar el currículo del Bachillerato para los centros bajo su gestión, integrando las enseñanzas mínimas fijadas, y lo hace a través de la Orden EFP/755/2022, de 31 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación del Bachillerato en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación y Formación Profesional. Además, la orden abarca disposiciones sobre la evaluación, la atención a la diversidad del alumnado, la autonomía de los centros, la tutoría y la participación de los padres o tutores en el proceso educativo.

La asignatura de matemáticas se oferta en la modalidad, por un lado, de Ciencias y Tecnología, que se cursará de forma obligatoria en primer curso como Matemáticas I y en el segundo curso como Matemáticas II, y, por otro lado, en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, que se da a elegir para cursar de forma obligatoria entre ella y Latín. En caso de escogerla, se cursará en primero como Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y en segundo como Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. En caso de la elección de la modalidad General, todo el alumnado que ha elegido esta opción cursará en primer curso Matemáticas Generales.

El desarrollo curricular de Matemáticas I y II en el Bachillerato se enfoca en lograr los objetivos generales de la etapa, poniendo especial atención en las competencias clave que los estudiantes deben adquirir. Estas competencias incluyen la interpretación de problemas y la comunicación de resultados, vinculadas a la competencia en comunicación lingüística y plurilingüe (CCL y CP), y el emprendimiento en la planificación y revisión del trabajo, relacionado con la competencia emprendedora (CE). Además, la toma de decisiones y la adaptación a la incertidumbre forman parte de la competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA), mientras que el uso de herramientas digitales se asocia a la competencia digital (CD). El razonamiento, la argumentación, la modelización y el pensamiento computacional son fundamentales para la competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM). Las matemáticas también contribuyen a la competencia ciudadana (CC) y a la competencia en conciencia y expresión cultural (CCEC).

Desarrollo de las competencias específicas de la propuesta de implementación

El Real Decreto 243/2022 del 5 abril describe las competencias específicas como “desempeños que el alumnado debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los saberes básicos de cada materia. Las competencias específicas constituyen un elemento de conexión entre, por una parte, las competencias clave, y por otra, los saberes básicos de las materias y los criterios de evaluación”.

Haciendo continuidad de la Educación Secundaria Obligatoria, las competencias específicas de las asignaturas de Matemáticas I y II, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II y Matemáticas Generales incluyen la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos, la resolución de problemas, el razonamiento y la investigación matemática, especialmente en contextos científicos y tecnológicos. Se enfatizan procesos como la formulación de preguntas, la realización de conjeturas, la justificación y la generalización, así como la conexión entre diferentes ideas matemáticas y su aplicación en otras áreas del conocimiento. La resolución de problemas y la investigación matemática son esenciales para desarrollar habilidades cognitivas, creatividad y pensamiento abstracto, destacando el papel instrumental de las matemáticas en diversas áreas de conocimiento científico, social, tecnológico, humanístico y artístico. Las competencias específicas que se desarrollan en este diseño de implementación se recogen en la siguiente tabla:

Modelización y resolución de problemas
La modelización y resolución de problemas son esenciales en el aprendizaje de las matemáticas, proporcionando herramientas para describir, analizar y comprender situaciones cotidianas y científicas. A lo largo de esta implementación se incluye la formulación del problema, búsqueda y organización de datos relevantes, codificación en lenguaje matemático o descomposición en problemas más simples. El método usado en

la resolución de problemas, primero extracurriculares como más adelante curriculares, participa en la evolución de esta competencia específica. Esta competencia se conecta con los descriptores STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD5, CPSAA4, CPSAA5 y CE3.
Verificación de soluciones
La verificación de soluciones mediante razonamiento y argumentación fomenta la reflexión crítica y evaluación desde diversas perspectivas, como la sostenibilidad y la equidad. Implica autoevaluación, coevaluación, uso de herramientas digitales y distintos métodos de verificación. Se trabajará con la estrategia de resolución de problemas que van a aplicar los alumnos, cuya una de sus etapas es la vista hacia atrás para verificar una respuesta. Se relaciona con los descriptores STEM1, STEM2, CD3, CPSAA4, CC3 y CE3.
Formulación e investigación de conjeturas
Formular conjeturas y generar problemas es esencial en el currículo de Matemáticas. Probar o refutar conjeturas mejora el razonamiento y fomenta el compromiso con las matemáticas. Esta competencia promueve un pensamiento flexible y la capacidad para resolver problemas en diversos contextos. Se vincula con los descriptores CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD3, CD5 y CE3.
Pensamiento computacional
El pensamiento computacional se enfoca en la resolución de problemas mediante la creación y generalización de algoritmos. Implica usar la abstracción para identificar aspectos clave, descomponer problemas en tareas simples y codificarlas en un lenguaje adecuado. Este proceso se aplica a situaciones cotidianas, científicas y tecnológicas. Aunque no se aplica directamente para la creación de algoritmos, se usará a través de la gamificación como una interfaz entre el problema y los estudiantes. Se conecta con los descriptores STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5 y CE3.
Conexiones matemáticas
Establecer conexiones entre diferentes ideas matemáticas profundiza la comprensión de cómo varios enfoques pueden producir resultados equivalentes. Conectar ideas de distintos contextos mejora la comprensión de conceptos, procedimientos y argumentos.

Esta competencia implica enlazar nuevas ideas con conocimientos previos y usar estas conexiones para resolver problemas, creando un todo integrado. La aplicación de la estrategia *Thinking Classrrooms*, con el uso de las pizarras blancas verticales, ayuda a conectar las ideas de cada miembro del grupo de trabajo. Se relaciona con los descriptores STEM1, STEM3, CD2, CD3 y CCEC1.
Vínculos con otras áreas de conocimiento
Establecer conexiones entre matemáticas y otras áreas de conocimiento potencia la capacidad para resolver problemas diversos. Estas conexiones también aplican actitudes matemáticas transferibles a otros contextos. Esta competencia en nuestra propuesta pedagógica viene desarrollada por la aplicación de problemas contextualizados para diversas situaciones, magnitudes, materias, etc. Se conecta con los descriptores STEM1, STEM2, CD2, CPSAA5, CC4, CE2, CE3 y CCEC1.
Representación y comunicación de conceptos e ideas matemáticas
Comunicar ideas matemáticas de forma clara y precisa es esencial en la sociedad de la información. Interactuar con otros para intercambiar y reflexionar sobre ideas fortalece el aprendizaje. Esta competencia implica expresar hechos, ideas y procedimientos matemáticos utilizando la terminología adecuada, así como la capacidad para representar conceptos, procedimientos e información matemática que facilite el razonamiento y la demostración. Al trabajar en esta propuesta de manera cooperativa, es indispensable la buena comunicación en el equipo. Además, el uso de la pizarra vertical hace propicio la necesidad de representar los conceptos para resolver las tareas. Se relaciona con los descriptores CCL1, STEM3, STEM4, CD1, CD2, CE3, CCEC4
Destrezas personales y sociales
Identificar y gestionar emociones, respetar las de los demás y trabajar en equipo son esenciales en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia implica gestionar el estrés, ser perseverante, crítico, creativo y resiliente ante retos matemáticos, mostrando empatía y tomando decisiones responsables. Uno de los principales objetivos del presente trabajo es desarrollar un aprendizaje en actividades que promuevan la colaboración, la comunicación y la motivación mediante el uso de estrategias pedagógicas.

Se relaciona con los descriptores CCL1, STEM5, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3 y CE2.

Tabla 3. Competencias específicas que se desarrollan en la propuesta de intervención

Sentidos matemáticos

Los saberes básicos se han organizado en torno al concepto de sentido matemático, entendido como un conjunto de aprendizajes relacionados con el dominio contextual de contenidos numéricos, algebraicos, geométricos, métricos y estocásticos, permitiendo su uso de manera funcional. Además, se incluye el sentido socioafectivo, que ayuda a los estudiantes a enfrentar el aprendizaje de las matemáticas en esta etapa, identificando y gestionando las emociones que les provoca y descubriendo las nuevas oportunidades que les ofrece. Dependiendo de la asignatura de matemáticas según la modalidad escogida, el currículo de los saberes básicos se centrará en diferentes conocimientos.

- Sentido numérico: los estudiantes deben comprender las propiedades de los números, vectores y matrices, y operar con ellos de manera efectiva. El profesorado debe enfocarse en la visión global de los conjuntos numéricos, sus diferencias y propiedades, y enseñar el uso adecuado de herramientas digitales. Se debe evitar realizar operaciones rutinarias, algoritmos sin sentido y cálculos manuales complejos que se realizan mejor con calculadoras o medios digitales.

  En el caso de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, no formará parte del currículo el temario relacionado con vectores, y se le añade la capacidad de resolver problemas orientados a la educación financiera.

- Sentido de la medida: los alumnos deben decidir sobre unidades y escalas adecuadas, calcular áreas y volúmenes, aplicar fórmulas y técnicas de medida, realizar acotaciones, calcular límites y entender la probabilidad como medida de incertidumbre. Los docentes deben enfatizar la construcción de modelos del mundo real, la visualización del espacio y el uso del razonamiento y demostraciones para justificar afirmaciones, mostrando la medida en diversos contextos. Se debe evitar la memorización excesiva de fórmulas y la manipulación de expresiones complejas poco comunes.

  En este sentido para la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales no constituirá el currículo los volúmenes de sólidos, y los límites a resolver serán sencillos. Será este sentido el que seleccionemos para la propuesta de intervención.

- Sentido algebraico: el alumnado debe identificar patrones y relaciones entre variables, expresar regularidades mediante distintas representaciones, ampliar su repertorio de funciones y modelizar situaciones con expresiones simbólicas. Es esencial desarrollar destreza en la manipulación de representaciones simbólicas y usar herramientas informáticas para apoyar la comprensión. El profesor debería priorizar métodos informáticos y gráficos para resolver ecuaciones, sistemas de ecuaciones e inecuaciones, y fomentar la conexión entre problemas y su modelización matemática. Se debe evitar la representación manual de funciones y la resolución manual de sistemas de ecuaciones con determinantes o matrices complejas. Se añade en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales la utilización de métodos informáticos para plantear y resolver problemas de programación lineal.

- Sentido espacial: el alumno debe aprender a representar ideas geométricas mediante coordenadas, transformaciones, vectores, y matrices, conectando estos conceptos con otros contextos. El profesorado debe usar programas de geometría dinámica para analizar características geométricas, fomentar el razonamiento y la argumentación, y evitar la memorización de definiciones y clasificaciones.

  Este sentido no forma parte del currículo de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.

- Sentido estocástico: los estudiantes deben abordar diversas situaciones de tipo social o científico que requieran razonamiento y análisis de datos, desarrollando habilidades para elaborar conjeturas, tomar decisiones basadas en información estadística, valorar críticamente los datos y comprender fenómenos aleatorios. El docente debe fomentar la investigación de situaciones de interés para el alumnado, análisis exploratorios de datos mediante gráficos, y la comunicación crítica y razonada de resultados. El aprendizaje de la probabilidad debe enfocarse en entender la incertidumbre y la variabilidad. Se debe evitar la enseñanza de la estadística como cálculo de parámetros fuera de contexto, el estudio de juegos de azar como única aplicación de probabilidad, y la repetición mecánica de técnicas de conteo. Los proyectos estadísticos deben ir más allá de determinar parámetros y comparar datos, enfocándose en el proceso completo de investigación.

- Sentido socioafectivo: el alumnado debe aprender a reconocer y gestionar sus emociones al resolver problemas, tomar decisiones, ser resiliente, ver los errores como parte del aprendizaje, desarrollar una visión positiva de sí mismos frente a las matemáticas (esto es, el autoconcepto), y reflexionar sobre sus actitudes y creencias, desechando prejuicios infundados. También deben trabajar en equipo y fomentar relaciones interpersonales basadas en el respeto y la escucha activa.

  En cuanto al sentido socioafectivo, el profesorado debe priorizar el esfuerzo y la constancia en la resolución de problemas, promoviendo la perseverancia incluso ante resultados incorrectos, la autodisciplina y la gestión emocional frente a resultados inesperados. Es fundamental que el alumnado planifique y organice su trabajo, solicite ayuda cuando enfrente obstáculos y establezca buenas relaciones interpersonales para colaborar eficazmente en matemáticas.

Evaluación de las matemáticas

En el proceso de evaluación centrado en el desarrollo de competencias específicas en matemáticas, se enfoca en diversas áreas clave, que responden a las siguientes preguntas:

- ¿Qué se evalúa? La evaluación se centra en el desarrollo de competencias específicas mediante la resolución de retos matemáticos en contextos variados. Los criterios de evaluación están detallados para facilitar la medición del progreso a partir de las evidencias obtenidas en las actividades de aprendizaje.

- ¿Cuándo se evalúa? La evaluación debe estar integrada a lo largo de todo el proceso educativo. Desde la detección de ideas previas hasta la síntesis final del aprendizaje, la evaluación proporciona información continua sobre el desarrollo del estudiante, no limitándose a momentos finales.

- ¿Quién evalúa? Es esencial involucrar a todos los participantes del proceso evaluativo, incluidos los estudiantes, como sujetos interesados en valorar sus propios avances y dificultades. Los errores desempeñan un papel crucial en el aprendizaje, especialmente cuando se analizan en el contexto de tareas complejas, tanto matemáticas como extramatemáticas.

- ¿Cómo se evalúa? Se recomienda utilizar una variedad de instrumentos más allá de las pruebas escritas tradicionales para obtener información significativa sobre el logro de competencias. La integración de herramientas digitales ofrece nuevas oportunidades para la interacción entre estudiantes y con el profesorado. Además, la creación de rúbricas asociadas a las tareas permite captar indicadores específicos de cada competencia evaluada y niveles de dominio alcanzados.

- ¿Para qué se evalúa? Primero, permite identificar las dificultades y progresos del alumnado, ajustando así el proceso educativo a sus necesidades específicas de manera continua y formativa. Segundo, es crucial para analizar la efectividad de los métodos de enseñanza en relación con las particularidades de los estudiantes.

Trabajo en el aula de matemáticas

Actualmente, existen diversas bases para trabajar en el aula de matemáticas. Una de ellas, la resolución de problemas, es esencial en el aprendizaje matemático, no solo como meta en sí misma, sino como método para construir conocimiento. Problemas bien seleccionados ayudan al alumno a enfocarse en aspectos clave, desarrollar competencias específicas y cultivar la perseverancia y comprensión matemática. Los problemas deben abarcar contextos diversos y desafíos crecientes, desde conjuntos numéricos hasta geometría avanzada y análisis de datos probabilísticos.

El uso de tecnología como ordenadores y calculadoras facilita cálculos complejos y promueve la investigación matemática. El razonamiento y la prueba son fundamentales, al igual que el pensamiento computacional, que incluye habilidades como descomponer patrones y diseñar algoritmos.

Es crucial que los profesores presenten situaciones de aprendizaje que destaquen la importancia de justificar razones y explorar relaciones matemáticas en diversos sentidos: espacial, algebraico y probabilístico. Los estudiantes deben aprender a demostrar técnicas y construir argumentos válidos, comprendiendo la diferencia entre ejemplos que sugieren y pruebas formales que validan.

Las ideas matemáticas se entrelazan y se construyen en un todo integrado de conocimiento, conectándose internamente y con otras disciplinas y aplicaciones prácticas. El desarrollo de conexiones matemáticas y la comunicación efectiva, utilizando lenguaje simbólico y representaciones visuales, son cruciales para organizar y consolidar el pensamiento matemático.

En el aula, los estudiantes deben sentirse incentivados a compartir sus pensamientos con claridad y coherencia, utilizando diferentes técnicas de representación como álgebra, funciones, geometría y grafos según la situación. La colaboración y el debate abren el camino a múltiples enfoques y soluciones, promoviendo un aprendizaje matemático profundo y significativo.

2.2.4. Introducción a las *Thinking Classrooms* o aulas de pensamiento

Las aulas de pensamiento se basan en la creación de un ambiente dinámico y estimulante que promueva un pensamiento matemático profundo, la colaboración entre estudiantes y el uso efectivo de representaciones visuales y estrategias de resolución de problemas. Este enfoque ha demostrado mejorar significativamente la participación y el rendimiento de los estudiantes en matemáticas, así como su actitud hacia la materia.

En su obra "Building Thinking Classrooms in Mathematics", Peter Liljedahl propone un enfoque revolucionario para transformar las aulas de matemáticas en dichos entornos dinámicos que fomenten el pensamiento crítico y la resolución de problemas entre los estudiantes. Liljedahl parte de la premisa de que las habilidades matemáticas no se limitan a la memorización de fórmulas y procedimientos, sino que deben cultivarse a través de un proceso activo de indagación y descubrimiento. Este enfoque no solo mejora el rendimiento académico de los estudiantes, también los prepara para enfrentarse a desafíos complejos en un mundo donde las habilidades analíticas y creativas son cada vez más valoradas. En este apartado analizaremos su obra, considerada como precursora de esta herramienta didáctica en la que se incluye sus reflexiones tras varios años trabajando con múltiples docentes.

Principales conceptos

Aulas de pensamiento: creando un ambiente propicio

Liljedahl introduce el concepto de "Aulas de Pensamiento", donde el diseño físico y la disposición del espacio están cuidadosamente planeados para fomentar la colaboración y la interacción entre los estudiantes. Por ejemplo, sugiere organizar los asientos en grupos pequeños o en círculos para facilitar la discusión y el trabajo en equipo. Este entorno propicia un aprendizaje activo donde los estudiantes pueden explorar conceptos matemáticos juntos, discutir sus ideas y confrontar sus entendimientos. La interacción social y el intercambio de perspectivas en estas configuraciones ayudan a los estudiantes a desarrollar una comprensión más profunda de los temas matemáticos y a construir conocimiento de manera colaborativa.

Problemas significativos y desafiantes

Constituye una piedra angular en la metodología de Liljedahl el uso de problemas matemáticos desafiantes y relevantes para los estudiantes. Estos problemas actúan como catalizadores para el pensamiento crítico y la aplicación práctica de conceptos matemáticos en contextos del mundo real. Al enfrentarse a problemas complejos, los estudiantes no solo practican habilidades de cálculo, sino que también desarrollan estrategias de resolución de problemas y aprenden a enfrentar la incertidumbre y la ambigüedad de manera efectiva. Este enfoque además de aumentar la motivación intrínseca de los estudiantes hacia las matemáticas, también mejora su capacidad para transferir conceptos a nuevas situaciones y aplicaciones.

Estrategias de pensamiento

El autor explora una variedad de estrategias de pensamiento diseñadas para promover el pensamiento crítico y la resolución de problemas. Entre estas estrategias se incluyen el uso de gráficos visuales y modelos manipulativos para representar conceptos abstractos de manera concreta, así como técnicas de argumentación y justificación matemática para validar y comunicar razonamientos. Estas tácticas fortalecen la comprensión conceptual de los estudiantes a la vez que mejoran sus habilidades de comunicación y colaboración al usar, por ejemplo, pizarras compartidas para la discusión de las tareas, competencias esenciales en un entorno educativo moderno y globalizado. El error se ve como una oportunidad para el aprendizaje y en el aula es donde los estudiantes se sienten seguros para participar activamente en la exploración y discusión matemática sin temor al juicio.

Metacognición y autorregulación

Enfatiza la importancia de la metacognición y la autorregulación en el proceso de aprendizaje matemático. Los estudiantes son guiados para reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento, evaluar la efectividad de sus estrategias de resolución de problemas y ajustarlas según sea necesario. Esta autorreflexión no solo mejora el rendimiento académico de los estudiantes al identificar áreas de mejora, sino que también los empodera para convertirse en aprendices autónomos y conscientes de sus propios métodos de aprendizaje.

Estudios de caso y ejemplos prácticos

A través de estudios de caso y ejemplos prácticos, Liljedahl ilustra cómo implementar estas metodologías efectivamente en diversas configuraciones educativas. Por ejemplo, describe cómo un profesor puede diseñar una lección utilizando un problema matemático complejo que motive a los alumnos a explorar múltiples estrategias de solución y discutir sus razonamientos con sus compañeros. Estos casos de estudio no solo demuestran la aplicabilidad de sus enfoques, sino que también proporcionan inspiración y guía práctica para educadores que desean mejorar la enseñanza de las matemáticas en sus aulas.

Evaluación formativa y retroalimentación

Para la evaluación formativa y la retroalimentación continua en el proceso de aprendizaje matemático, propone técnicas específicas para monitorear el progreso de los estudiantes, identificar áreas de dificultad y proporcionar retroalimentación efectiva que fomente el crecimiento y la mejora continua. Esta evaluación no solo informa la práctica docente, sino que también permite a los estudiantes reflexionar sobre su propio aprendizaje y establecer metas para su desarrollo académico y personal.

Las catorce prácticas para construir *Thinking Classrooms*

A lo largo de los capítulos que componen el libro, el autor va desarrollando y describiendo las diferentes situaciones vividas en las aulas reales, y en cada capítulo deja una técnica y consejo diferente para ir poco a poco implementando la metodología de *Thinking Classrooms*. Las denomina en su página web *Buildind Thinking Classrooms* "las catorce prácticas de enseñanza que la investigación muestra que optimizan las condiciones para que los estudiantes piensen, lo cual aumenta su compromiso y aprendizaje". Esas catorce estrategias de enseñanza son las siguientes:

Qué tipo de tareas utilizamos

1

Para fomentar el pensamiento profundo y el compromiso de los estudiantes, es crucial proporcionar tareas que no solo requieran pensar, sino que también fomenten el pensamiento. Al iniciar una *Thinking Classroom*, se recomienda comenzar con tareas no curriculares altamente atractivas para los chicos. Conforme se desarrolla la cultura del pensamiento, se transita hacia el uso de tareas del currículo, de esta manera se mantiene el efecto y afecto positivo.

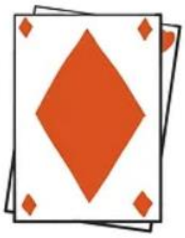
Se pueden diferenciar tres tipos de lecciones: por un lado, las que incluyen las tareas curriculares, las cuales, a través de instrucciones directas los alumnos aplican la mímica ("copiar y pegar" resoluciones de ejercicios); tareas dirigidas hacia el perfil curricular, es decir, ejercicios curriculares que se introducen de una manera no directa; y tareas no curriculares, basándose en ejercicios interesantes que inducen al pensamiento.

Las tareas asociadas al currículo implican una mímica del alumno ante la resolución del ejercicio, por lo que no está favoreciendo al desarrollo del pensamiento, y, por tanto, tampoco al aprendizaje.

El objetivo no es únicamente que los estudiantes participen en tareas no curriculares, sino que más estudiantes piensen profundamente y durante más tiempo dentro del contexto del currículo, promoviendo así un aprendizaje más profundo y duradero.

Cómo formamos los grupos de trabajo

2



Las distintas investigaciones indican que la colaboración estudiantil es crucial en el aula, pero la forma tradicional de formar grupos no fomenta el pensamiento activo. Cuando los grupos se forman visiblemente al azar con frecuencia, todos los estudiantes muestran un cambio positivo hacia el pensamiento activo y la contribución, mejorando la movilidad del conocimiento y el entusiasmo por las matemáticas, mientras se reducen las barreras sociales y el estrés.

En cambio, en los grupos que los propios alumnos han compuesto y seleccionado ellos mismos, los forman para socializar, no con el objetivo de trabajar. Y, por otro lado, si el profesor asigna los grupos, los estudiantes piensan que se les ha puesto en ese grupo en concreto para interpretar un rol (pasivo, líder...), dependiendo de los otros integrantes.

Por eso, es importante que a la hora de formar los equipos de trabajo se les muestre a los chicos que dicha configuración es completamente al azar, por lo que tienen que ser activos con cualquier compañero que les toque. Este grupo, además, se recomienda que sea de 3 alumnos.

Dónde trabajan los alumnos

3

En las aulas de matemáticas, sentar a los estudiantes en sus mesas y escribir en cuadernos ha resultado ser el entorno menos propicio para el pensamiento activo. En cambio, se ha comprobado que tener a los estudiantes de pie trabajando en superficies verticales no permanentes como pizarras blancas, pizarrones o ventanas tiene un impacto significativo.

Estas superficies fomentan más toma de riesgos y previenen la desconexión, transformando los espacios de aprendizaje en entornos activos de pensamiento donde los estudiantes pueden comprometerse en pensar durante períodos prolongados, hasta 60 minutos o más.

El tener a los alumnos de pie hace que desaparezca su sentimiento de anonimato, lo que conlleva el compromiso para trabajar en las tareas sin quedar en un segundo plano pasivo. Además, ayuda a que no se sientan inseguros.

Es necesario apuntar la importancia de usar un único rotulador por grupo, ya que si cada miembro tiene uno, comienzan a trabajar de manera paralela en vez de colaborar unos con otros.

Cómo organizamos el mobiliario

4

El diseño del mobiliario en un aula juega un papel crucial en el tipo de aprendizaje que tiene lugar en ella. Las aulas rectilíneas y orientadas hacia el frente tienden a promover un aprendizaje pasivo. Por el contrario, organizar el mobiliario de manera que los estudiantes se sienten mirando en todas direcciones, conocido como aula "desfrontalizada", se ha demostrado que es la forma más efectiva de estimular el pensamiento activo de los estudiantes.

En un aula que facilita el razonamiento, los chicos se sienten más relajados para probar, arriesgar, y fallar, y volver a empezar el proceso hasta llegar al éxito, cosa que se ha comprobado que no ocurre en una clase muy organizada.

Cómo respondemos los docentes a las preguntas

5

La mayoría de las preguntas que los estudiantes hacen caen en las categorías de:

- “Preguntas de proximidad”: las que los alumnos hacen porque estás cerca de ellos. Se ha visto que muchas de las respuestas ante estas preguntas nunca son utilizadas, o que incluso el alumno ya había descubierto. Es decir, son preguntas que el estudiante hace por el hecho de ser una acción habitual que se tiene que hacer cuando el profesor está cerca de él.

- Preguntas de cese de pensamiento: las que hacen para reducir su esfuerzo, siendo la más común: "¿Es esto correcto?". Por tanto, el alumno hace este tipo de preguntas cuando no quiere esforzarse más en razonar y espera que el profesor le responda a la cuestión.

Esto va en contra de construir una cultura de pensamiento y aprendizaje activo. Para desarrollar un aula de pensamiento, es crucial responder únicamente a las preguntas que promuevan que los estudiantes continúen trabajando, intentando y pensando, lo que llamamos “Preguntas de seguir pensando”. Son cuestiones que hacen los chicos para clarificar algún punto, o para preguntar algo más allá de la tarea.

Algunos de los *tips* para evitar responder a los dos primeros tipos de preguntas, podrían ser respuestas de tipo: “¿no es interesante?”, “¿puedes encontrar algo más?”, “¿es eso siempre verdadero?”, “¿por qué no pruebas algo más?”.

Cuándo, dónde y cómo se dan las tareas

6

En las aulas convencionales, las tareas se presentan a los estudiantes en forma de texto, pero cómo y cuándo se da la tarea influye en la cantidad y tipo de pensamiento que se genera. Se ha descubierto que una tarea dada en los primeros cinco minutos de la lección genera más pensamiento que si se da más tarde. Si la lección comienza con un ambiente de recepción pasiva mediante la toma de apuntes, es mucho más difícil despertar la energía de los chicos para que comiencen a pensar.

Lo mismo ocurre con la forma en la que reciben la tarea, los estudiantes piensan más cuando la reciben de pie alrededor del profesor comparado con cuando están sentados en sus pupitres. Esto se debe a que, si los chicos están en sus mesas, la actitud tiende a ser pasiva y con bajas energías.

Asimismo, dar una tarea verbalmente produce más y diferentes tipos de pensamiento en comparación con sacarla del libro de texto o escribirla de forma completa en la pizarra. Este segundo camino implica muchas más preguntas por parte del alumno que desvían el proceso de pensamiento. La combinación de las instrucciones verbales junto con la escritura únicamente de sus detalles (por ejemplo, datos, cantidades, medidas, formas, etc.) mientras el docente habla, es la mejor forma de activar el pensamiento, de forma más rápida y profunda.

Cómo son las tareas para casa

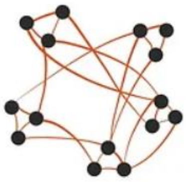
7

La tarea en su forma actual, como práctica diaria que se debe realizar en casa, no resulta efectiva según lo indica la investigación y la experiencia de los profesores. Los estudiantes que más necesitan hacer la tarea a menudo no la hacen, mientras que aquellos que la hacen no siempre la necesitan. El problema radica en la percepción de los estudiantes sobre para quién es la tarea (el profesor) y su propósito (calificaciones), que difiere de las intenciones del profesor al asignarla (verificar la comprensión del estudiante).

Al renombrar la tarea como "preguntas para verificar la comprensión" y presentarla como una oportunidad en lugar de un requisito obligatorio, se observan cambios significativos en cómo los estudiantes se involucran con la tarea y cómo la abordan con propósito y reflexión. Además, como los alumnos querrán las soluciones para poder comprobar el trabajo que han hecho para sus "preguntas para verificar la comprensión", se les puede facilitar más adelante, pero no de manera inmediata, pues copiarían directamente aplicando la mímica, condicionante de las T*hinking Classrooms*.

Cómo fomentamos la autonomía de los estudiantes

8



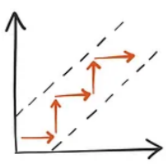
En un aula de pensamiento, se promueve la independencia estudiantil a través de cambios significativos: trabajar en grupos, estar de pie y desfrontar el aula. Los estudiantes aprenden a usar el conocimiento de sus compañeros para mantenerse pensando, ya sea cuando están atascados o necesitan un nuevo desafío, lo cual es crucial para el funcionamiento efectivo de este tipo de aulas.

Esto implica que el docente, en vez de ser la fuente de conocimiento, sea el encargado de movilizar dicho conocimiento en el aula, y pasará a realizar un papel más pasivo y deliberadamente menos servicial.

Es necesario dar a los grupos la suficiente autonomía para usar la información y el razonamiento que se obtiene a partir del pensamiento tanto individual como colectivo. El que los grupos hablen entre sí sin saber si es correcta o no una respuesta, provoca que el pensamiento de los alumnos vaya más allá al preguntarse "¿qué ha razonado el otro grupo para llegar a esa respuesta?".

Cómo usamos las pistas y ampliaciones

9



La enseñanza de las matemáticas tradicionalmente ha seguido un modelo síncrono, donde todos los estudiantes realizan las mismas actividades al mismo tiempo. Sin embargo, la investigación a lo largo de los años muestra que los alumnos aprenden de manera diferente y a diferentes velocidades.

Para cultivar un pensamiento profundo, es crucial adoptar un enfoque asíncrono, proporcionando pistas y extensiones adaptadas a las necesidades individuales de los estudiantes para mantenerlos en un estado de flujo adecuado en comparación con el del resto de los compañeros.

Hay que entender que el balance entre el estímulo o desafío y entre la habilidad o capacidad (el llamado aquí *flow* como la experiencia óptima del conocimiento) debe estar creciendo en ambas direcciones. Es decir, el alumno a medida que aprende de forma óptima (se encuentra "en flujo"), su capacidad irá creciendo, y, por tanto, el profesor deberá aumentar las dificultades de las tareas.

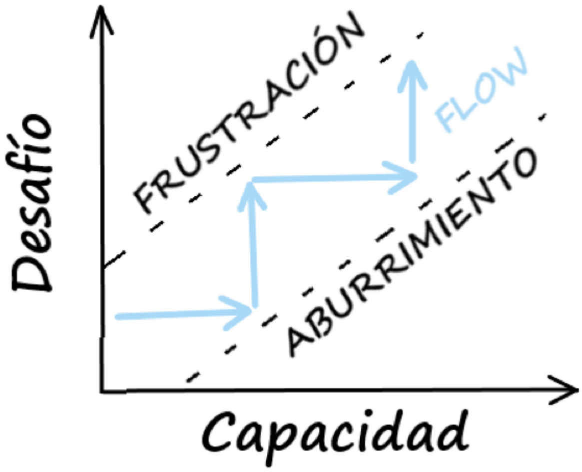
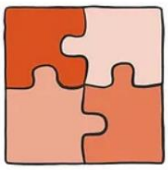


Ilustración 2. Representación del balance entre el desafío de las tareas y la capacidad del alumno

Es por eso que el ritmo de aprendizaje tiene que ser el adecuado para cada alumno, ya que, si se aumenta la dificultad de la tarea antes de que el estudiante haya madurado sus aptitudes (esto es, proveer de ampliaciones de las tareas), estamos empujándole hacia la frustración, y si al contrario se espera mucho tiempo a aumentar el desafío (es decir, un aumento de la capacidad usando pistas y ayudas), entonces induciremos al aburrimiento.

Cómo consolidamos una lección

10



La consolidación de la lección es crucial para integrar las partes de una tarea y ayudar a los estudiantes a entender conceptualmente lo aprendido. A diferencia del enfoque tradicional de explicar el contenido, en un aula de pensamiento se trabaja desde los fundamentos de un concepto, utilizando el trabajo de los estudiantes durante su reflexión sobre tareas comunes.

Lo primero que se presenta a la hora de una consolidación desde la base son las soluciones que han obtenido los estudiantes sobre la tarea. Existen tres formas en las que ocurre esta consolidación:

- El docente comenta de forma general la tarea y las soluciones sin escribir nada en la pizarra.
- El profesor comenta de forma detallada los ejercicios y las soluciones mientras registra en la pizarra lo que se está hablando.

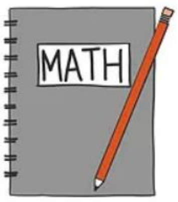
- El profesor comenta de forma detallada los ejercicios y las soluciones que han trabajos los alumnos en sus pizarras verticales para hablar sobre ellas.

Éste último método resulta ser el más efectivo para mantener el compromiso de los estudiantes porque se utiliza su propio trabajo.

Cómo los alumnos toman apuntes

En las aulas de matemáticas tradicionales, tomar apuntes se hace mecánicamente y con poca participación mental de los estudiantes. Por el contrario, en las aulas de pensamiento, los estudiantes toman apuntes de manera consciente y reflexiva, decidiendo qué información será útil para ellos en el futuro. Esto no solo mantiene a los estudiantes pensando activamente durante la toma de apuntes, sino que también aumenta significativamente la probabilidad de que revisen y utilicen sus apuntes en el futuro cercano y lejano, ya que actualmente los estudios indican que menos del 20% de los alumnos revisan sus apuntes.

11



Los alumnos necesitan apuntes visualmente organizados, lo que llamaremos organizadores gráficos, que podemos diferenciar entre cuatro tipos:

- Tipo 1: las notas de los alumnos escritas en una celda de espacio limitado, es decir, que puedan tomar todos los apuntes que quieran, pero con la condición de que entre en un área de tamaño limitado, para que se centren en la información más importante que realmente les ayude en el futuro.

- Tipo 2: con la misma filosofía de celda limitada como en el tipo 1, en este caso los alumnos utilizan varias celdas para organizar dentro de una celda principal sus apuntes y diferentes puntos de éstos.

- Tipo 3: formaliza la organización del tipo 2 con celdas preestablecidas de acuerdo con los tópicos del tema, que el profesor considera que son las cosas que el alumno tiene que recordar.

- Tipo 4: se centra en vocabulario y definiciones del tópico a tratar, grandes ideas o conceptos, procedimientos, y ejemplos.

12

Qué elegimos evaluar

Los docentes valoran diversas competencias en sus estudiantes, como la perseverancia y la colaboración. Para desarrollar estas competencias, es crucial evaluarlas específicamente. Esto implica utilizar rúbricas diseñadas para medir estos aspectos importantes, asegurando así que los estudiantes comprendan y aprecien lo que se valora en el aprendizaje, no únicamente, como se ha estado haciendo tradicionalmente, valorar el logro individual de los resultados del currículo.

Por ello, se puede construir de manera conjunta profesor-alumno la rúbrica de evaluación, en la cual los chicos pueden participar en determinar qué es necesario evaluar y de qué manera, teniendo así claro lo que se espera de su trabajo. Así, pueden también autoevaluarse grupalmente y comprender y evolucionar sus competencias.

13

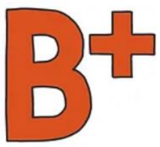
Cómo utilizamos la evaluación formativa

La evaluación formativa, acompañante de la formación sumativa a lo largo de los últimos años (basada ésta en la calificación final) se utiliza para informar tanto la enseñanza como el aprendizaje, ayudando a los estudiantes a comprender su nivel actual y lo que aún necesitan aprender. Esto no solo fomenta un mayor compromiso y pensamiento crítico, sino que también puede mejorar significativamente el rendimiento en las pruebas de cada tema.

Para que los alumnos tengan esa información (lo que saben y aquello que no saben), tiene que existir un *feedback* en forma de tests, concursos, y lo que previamente hemos llamado “preguntas para verificar la comprensión” (las tareas para casa). Y no solo hay que tener en cuenta la naturaleza de dicho *feedback*, sino cómo ayuda el profesor a retener y organizar esa retroalimentación.

Se pueden utilizar instrumentos para llegar a este objetivo, creados por el docente para que los alumnos se autoevalúen, puede ser, por ejemplo, en forma de lista de subtópicos de una lección, y, éstos a su vez, ser subdivididos según complejidad.

14



Cómo evaluamos

En un entorno de aulas de pensamiento, la calificación se basa en los resultados y la evidencia específica de lo que los estudiantes son capaces de lograr, enfocado, además, en informar y empoderar el aprendizaje del estudiante a través de la retroalimentación continua.

Para recoger evidencias para evaluar el aprendizaje diario o cómo trabajan los alumnos en grupo, tiene que utilizar algún tipo de instrumento tipo rúbrica que muestre el aprendizaje resultante, así como las diferencias entre la complejidad de los niveles de cada una de las tareas.

Los alumnos comenzarán a pensar acerca de su aprendizaje más que acerca de la puntuación y notas, lo que implica que en un futuro dichas notas sean un producto del aprendizaje, en vez del único objetivo de éste.

Conclusiones y reflexiones

En resumen, "Building Thinking Classrooms in Mathematics" de Peter Liljedahl ofrece un marco comprensivo y práctico para transformar las aulas de matemáticas en espacios dinámicos de aprendizaje donde los estudiantes pueden desarrollar habilidades esenciales para el siglo XXI. Al adoptar estas metodologías, los docentes pueden cultivar un verdadero amor por las matemáticas entre sus estudiantes, equipándolos con las habilidades necesarias para abordar desafíos complejos y contribuir de manera significativa a un mundo cada vez más tecnológico y globalizado, eliminando, además, barreras asociadas al aprendizaje de las matemáticas.

Capítulo 3

Experiencia en el Bachillerato Nocturno

3.1. Contexto de la experiencia

3.1.1. Régimen nocturno del centro

Durante el período de siete semanas he tenido la oportunidad de acompañar a dos niveles correspondientes a las clases de horario nocturno: 1º Bachiller de la rama Ciencias Sociales y 2º Bachiller de la rama de Ciencias y Tecnología en el I.E.S. Jorge Manrique, de Palencia. Se trata de un centro situado en el corazón de la ciudad con unos 1200 estudiantes, distribuidos entre los diferentes niveles y regímenes de la siguiente manera:

<table>
<tr><th>RÉGIMEN</th><th>ENSEÑANZA</th><th>Nº GRUPOS</th><th>Nº ALUMNOS</th><th>TOTAL</th></tr>
<tr><td rowspan="4">DIURNO</td><td>ESO –
S. BILINGÜE</td><td>18
(4 líneas en 1º, 2º, 3º, 4º ESO)
(1 líneas en 1º, 2º diversificación)</td><td>400</td><td rowspan="4">918</td></tr>
<tr><td>BACHILLER</td><td>13
(7 líneas en 1º Bach)
(6 líneas en 2º Bach)</td><td>376</td></tr>
<tr><td>BACH. INTERNACIONAL</td><td>2
(1 línea en 1º Bach)
(1 línea en 2º Bach)</td><td>36</td></tr>
<tr><td>CICLOS:
GM APSDC
GS ED. INFANTIL</td><td>2
(1 línea en 1º)
(1 línea en 2º)</td><td>47 + 59</td></tr>
<tr><td>NOCTURNO</td><td>BACHILLER</td><td>3
(Bloques I, II, III)</td><td>33</td><td>33</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A DISTANCIA</td><td>ESPAD</td><td>2
(1 línea en 3º ESO)
(1 línea en 4º ESO)</td><td>2</td><td rowspan="3">194</td></tr>
<tr><td>BACHILLER</td><td>2
(1 línea en 1º Bach)
(1 línea en 2º Bach)</td><td>10</td></tr>
<tr><td>CICLOS:
GM APSDC
GS ED. INFANTIL</td><td>2
(1 línea en 1º)
(1 línea en 2º)</td><td>182</td></tr>
<tr><td colspan="4">TOTAL</td><td>1145</td></tr>
</table>

Tabla 4. Distribución del alumnado según la enseñanza

El horario de la primera clase en régimen nocturno comienza a las 18:50h, con duración de cincuenta y cinco minutos, y la última clase termina a las 22:30h. En el caso del régimen a distancia, las clases también son por la tarde y consisten en tutorías de dos horas de duración 110 minutos a la cual acuden aquellos alumnos que quieran recibir clase en presencial. Estas tutorías comienzan a las 16:55h y para cada nivel (1º ó 2º Bachiller) corresponde un día a la semana.

El régimen de tarde o nocturno es una modalidad un poco diferente al resto de clases de horario de mañana. Mientras que los grupos del horario lectivo diurno constan de entre veinte y treinta alumnos, los grupos de la tarde no tienen un número establecido. En el caso concreto de las asignaturas de Matemáticas en las que participé en el régimen nocturno, en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I la asignatura estaba formada por tres alumnos, y en la asignatura Matemáticas II participaban once alumnos.

Cabe destacar que alberga a deportistas de alto rendimiento (Selección Nacional Juvenil de Voleibol masculino), por lo que en el centro se hace un esfuerzo para adaptar el diseño curricular en las enseñanzas de Nocturno y facilitar así su formación académica. Esto chicos poseen un tutor específico que se encarga de su coordinación. En este curso hay matriculados 12 alumnos repartidos entre 4º ESO y los bloques I, II y III del nocturno.

3.1.2. El perfil de los alumnos del régimen nocturno

Se distinguían diferentes perfiles de alumnos en el bachillerato nocturno, repartidos en los correspondientes niveles de enseñanza.

1º Bachillerato: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

Dos de ellos, jugadores de voleibol de alto rendimiento, se encuentran viviendo en una residencia en la que los acompaña un tutor académico. En general se nota un nivel bajo para estar en el último ciclo, achacándolo estos alumnos a la falta de tiempo para poder estudiar, por lo que las tareas de la asignatura no siempre las traen hechas, y si las han realizado, se puede ver expuesta la falta de interés en conseguir una buena base. La tercera, una chica, muestra mayor interés e intenta diariamente traer las tareas para casa realizadas, aunque, al igual que sus compañeros, se puede ver una base poco sólida de matemáticas. Sin embargo, la actitud es buena, existe una participación en clase y realizan preguntas a la profesora, y, si ésta les da un toque de atención, ellos responden siempre desde el respeto y con un sentimiento de culpabilidad. Se puede observar que existe un vínculo de confianza profesora-alumnos, y que les gusta comentar con ella lo bien o mal que se les dio el último partido de voleibol, o incluso la profesora les pregunta si el próximo partido lo juegan en casa para ir a verlos.

2º Bachillerato: Matemáticas II

Al igual que en el grupo anterior, hay un alto porcentaje de alumnos que son jugadores de voleibol de alto rendimiento que se encuentran viviendo en una residencia (hay alumnos de Canarias, de Extremadura, de Andalucía, de Mallorca…). El resto son residentes de Palencia que, por no tener éxito en el régimen diurno, han pedido cambio al nocturno. Al contrario que los anteriores, este grupo de último curso realiza las tareas para casa diariamente y hacen preguntas muy acordes con la situación, demostrando que han entendido la explicación.

Encontramos, por tanto, alumnos en este grupo que tienen buena base y que están interesados en las matemáticas, alumnos que no se les da tan bien pero que se esfuerzan (a veces con éxito, a veces no), y se encuentra también el caso de un alumno que ni está atraído por aprender la materia, ni pone interés durante la clase, estando al móvil distraído él mismo y distrayendo a los compañeros. La profesora, al igual que en el otro grupo, para motivar a los chicos, les pregunta por sus partidos y sus concentraciones, cosa que los alumnos ven como un acercamiento y les ayuda a coger confianza.

3.2. El aula de matemáticas del régimen nocturno

3.2.1. Dinámica de las clases

Al igual que en el apartado anterior, se diferencian dos dinámicas diferentes que están estrechamente relacionadas con los perfiles de alumnos que hay en cada nivel de enseñanza.

1º Bachillerato: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

Comienzan las clases con la corrección de ejercicios del día anterior. Como son solo tres alumnos, no salen a la pizarra para corregirlos, sino que la profesora se los revisa en el cuaderno. Como alguna vez alegan no haber sido capaz de hacerlos porque “no sabían”, la docente sopesa gracias a su experiencia si es necesario hacer un repaso de los contenidos del último día, o bien simplemente es que no han intentado hacerlos en casa. La profesora tiene una rúbrica donde registra diariamente la realización de los deberes. Por tanto, la clase se distribuye en los cinco primeros minutos corrección, los diez siguientes, en caso necesario, repaso del último tema dado, y el grueso de la clase es la explicación de la materia de ese día intercalada con ejercicios en la pizarra para que los chicos entiendan la teoría.

El contenido que se imparte durante mi acompañamiento son las funciones, funciones a trozos, límites y continuidad. Durante estos temas la profesora utiliza representaciones gráficas en la pizarra para señalar y anotar sobre ellas, bien dibujadas y escaladas, de tal forma que los alumnos pueden visualizar de forma fácil los comportamientos de las funciones. Otros materiales que se usan es el libro de texto, que utilizan para el seguimiento de la lección y, primordialmente, para la resolución de sus ejercicios.

El lenguaje utilizado no es un lenguaje matemático de alto nivel, sino que se adapta a la capacidad de entendimiento de los alumnos, que, como hemos mencionado anteriormente, no tienen una base muy avanzada para el nivel en el que estamos. La profesora, además, tiene un gran sentido del orden, ayudando con una muy buena caligrafía, clara y ordenada en la pizarra. Separar los diferentes pasos de manera que sigan un orden bien claro en la pizarra, con los apartados correspondientes y sus gráficas, hace que los chicos se encuentren más seguros a la hora de copiarlo en su cuaderno, que tienden a escribirlo tal cual está en la pizarra, y esto les ayudará a entenderlo en el momento que tengan que leerlo en casa. El objetivo es que en casa realicen las tareas propuestas, que rondan sobre unos tres ejercicios al día, para que refuercen la materia impartida en clase.

La evaluación es continua en la que se va teniendo en cuenta el trabajo diario (incluye tareas para casa, si hay algún comportamiento fuera de lugar durante las clases, o algún ejercicio para entregar) y las notas de cada uno de los exámenes. Todo lo que pueda ser evaluable lo apunta en una aplicación que utilizan los docentes del centro para ello. Al usar un dispositivo Tablet, puede registrar toda la información al momento.

Se tiene una importante consideración a los alumnos que muestran un pequeño esfuerzo. Así, el caso de uno de los alumnos que, aunque en clase daba la sensación de estar entendiendo el contenido, luego en el examen mezclaba conceptos y resolvía mal los ejercicios, la profesora le plantea un plan de acción para ponerse al día con pequeños trabajos adicionales. Pretende entender la situación individual del chico y ver dónde necesita ayuda y entre los dos llegar a un compromiso para alcanzar el éxito a final de curso.

2º Bachillerato: Matemáticas II

Al contrario que en el grupo anterior, a este nivel las clases son menos flexibles. El tiempo para finalizar y llegar con todos los contenidos dados antes de la EBAU corre en su contra. Las clases comienzan de la misma manera: corrección de ejercicios del día anterior que se ofrecen los alumnos a salir a hacerlos a la pizarra. Aunque la profesora pregunta diariamente a todos si han hecho las tareas para casa, son siempre los mismos los que salen voluntarios a corregirlas. Los chicos y chicas son a estas alturas más independientes y responsables, no siendo necesario por lo general tener que estar detrás de ellos para que realicen las tareas o atiendan en la sesión. Para aplicar la evaluación continua, cada trimestre se les pide a los alumnos una entrega voluntaria de ejercicios, saliendo a la pizarra para explicarlo al resto de los compañeros.

Como no siempre el libro se ajusta a los conceptos que la profesora quiere que los alumnos aprendan, para cada tema les entrega unas fichas con explicaciones más detalladas acompañadas de un resumen.

El contenido que se imparte durante mi presencia de las siete semanas es, en primer lugar, matrices y determinantes, y el segundo tema son los vectores, rectas y planos en el espacio. Todo el contenido está orientado a la EBAU y a los ejercicios que han puesto a lo largo de los años en esta prueba, por lo que la profesora refuerza la lección con una selección de ejercicios desde el año 2007. Al igual que en el otro grupo, después de la corrección de las tareas al inicio de la clase, se continúa con la explicación de la materia acompañada de ejercicios que ayudan a los chicos a entender los conceptos.

La profesora intenta en todo momento hacer hincapié en la importancia del uso correcto del vocabulario matemático y la nomenclatura. En los contenidos de matrices, determinantes y sistemas no se utiliza ninguna representación gráfica, son ejercicios muy metódicos que a lo largo de las sesiones van aumentando la dificultad hasta llegar a la discusión de sistemas de ecuaciones con parámetros.

Para el contenido de vectores en el espacio las clases son un poco más dinámicas. La profesora utiliza materiales manipulativos para la explicación de los vectores y la representación de los mismos mediante Geogebra. Es un tema que es necesario que los chicos visualicen con claridad para poder entender las aplicaciones.

3.2.2. Observaciones en los episodios relevantes

Durante el desarrollo del período de intervención, se ha ido observando la evolución de los alumnos ante un temario completamente nuevo para ellos: nos fijaremos en el curso de 1º Bachillerato con los límites de las funciones.

Durante las sesiones he podido ir descubriendo que los estudiantes están desmotivados con la materia. Se percibe un autoconcepto negativo, considerando que "no soy bueno en Mate". Por lo tanto, se detecta la necesidad de introducir algo de dinamismo en la clase para demostrar que las matemáticas no tienen por qué ser aburridas ni difíciles. Por ello, se considera adecuado el uso de herramientas didácticas que alternen clases más explicativas y tareas basadas en ejercicios del libro con sesiones más dinámicas, que les ayuden a desarrollar un pensamiento crítico, incluso con un toque de gamificación, para conseguir el objetivo buscado: promover un ambiente de aprendizaje inclusivo y motivador, y fomentar la percepción de autoeficacia y el autoconcepto matemático.

Algunas de las pistas que nos han ido llevando a esa conclusión, se pueden resumir en la siguiente tabla:

SESIÓN *23/02/2024*	*Concepto de límite a partir de gráficas.*
	Manifiestan dificultad en diferenciar entre imagen y límite de la función, en especial cuando la función no es continua y hay algún tipo de salto.

SESIÓN *26/02/2024*	*Cálculo de límites en un punto: límites directos e indeterminados tipo K/0.*
	Se observa dificultad en entender que el límite de una función es el valor al que tiende coger la imagen de dicha función (“el valor de y, no el de x”).

SESIÓN *27/02/2024*	*Cálculo de límites en un punto: límites directos e indeterminados tipo K/0 (segunda parte).*
	La repetición de la expresión “el límite de f(x) cuando x tiende a…” y de los pasos a seguir para resolver los límites les ayuda a interiorizarlo. Dificultad en identificar las asíntotas, no reconocen bien la recta vertical x=a y la horizontal y=a. Siguen mostrando dificultad en diferenciar la variable dependiente de la independiente, al hablar de “cuando x tiende a” se centran en el “movimiento de x”. La gamificación sorprende a los alumnos y hace que se enganchen a las actividades que les propones.

SESIÓN *29/02/2024*	*Cálculo de límites en un punto: indeterminación tipo 0/0.*
	Se tiene que repetir en todas las clases lo dado en las anteriores. Es importante sopesar si es por falta de entendimiento o por falta de trabajo en casa para afianzar conceptos. No siempre y no todos realizan las tareas para casa, por lo que en ocasiones encuentro dificultad para continuar el ritmo de la sesión.

SESIÓN *01/03/2024*	*Cálculo de límites en un el infinito: órdenes de infinitud e indeterminaciones $\infty - \infty$ y ∞/∞.*
	Identifico que los alumnos no entienden por qué esos 0/0, K/0 ó ∞/∞ son indeterminadas.

SESIÓN *04/03/2024*	*Cálculo de límites de funciones a trozos.*
	Que los alumnos realicen los ejercicios en la pizarra explicando con sus propias palabras el razonamiento a sus compañeros es una práctica muy buena que ayuda al aprendizaje significativo. Además, al docente le permite identificar errores de concepto en los que tiene que insistir más.

SESIÓN *07/03/2024*	*Ejercicio de evaluación*
	Sobre un punto, se les plantea un ejercicio que abarque los conceptos de límites que se han presentado al largo de las sesiones. Los tres alumnos presentan errores principalmente de incorrecta factorización ni simplificación, errores por copiar mal signos o directamente el enunciado, y se observa también dificultad en identificar los métodos con los que se tiene que resolver cada tipo de límite e indeterminaciones. Durante las clases había una participación activa y van entendiendo los conceptos demostrándolo con sus preguntas y respuestas, pero en el ejercicio de control no demuestran lo mismo.

SESIÓN *22/03/2024*	*Situación de Aprendizaje: finalización del juego "Límites en la Montaña".*
	Se desarrolla una sesión dinámica para la Situación de Aprendizaje. Se observan que están motivados, alegres, con una comunicación activa entre ellos. Les pido que salgan a la pantalla y que escriban en la pizarra todo lo que necesitan para trabajar una aproximación a las *thinking classrooms*. Se sienten cómodos con la pantalla digital interaccionando con el programa *Genially*, seleccionando las opciones correctas, arrastrando las soluciones a sus huecos correspondientes, etc.

	La motivación es esencial para “enganchar” a los estudiantes y que puedan ver que las matemáticas no son difíciles ni aburridas. Se puede trabajar en grupo, con herramientas interactivas, etc.

Tabla 5. Observaciones en los episodios relevantes

3.3. Reflexiones

Después de mi experiencia, primero como observadora y luego como interventora, la mayor dificultad que he encontrado en el proceso de enseñanza-aprendizaje es la diversidad de niveles de habilidad matemática en una misma clase. Algunos estudiantes necesitan más tiempo para asimilar los conceptos que otros, lo que complica avanzar a un mismo ritmo. Además, la falta de motivación se refleja en la baja participación en clase, la escasez de esfuerzo en las tareas y el bajo rendimiento en las evaluaciones. La ansiedad y el temor hacia las matemáticas también crean una barrera para el aprendizaje, llevando a los alumnos a verse a sí mismos como ineptos en la materia.

Considerando todo esto, creo que sería beneficioso incluir un diseño de actividades inclusivas y desafiantes para todos los niveles, con grupos de trabajo que fomenten la colaboración y la comunicación entre los estudiantes. También se podría incrementar la motivación de los alumnos mediante proyectos y el uso frecuente de tecnologías educativas que les permitan explorar nuevas formas de aprendizaje. Un buen sistema sería la estrategia educativa T*hinking Classrooms* para observar la evolución de los alumnos. En mi limitada experiencia con sesiones algo diferentes a las habituales, los estudiantes estaban motivados y comprometidos, preguntándome en días posteriores si íbamos a continuar con ese enfoque. Es por eso que la propuesta de intervención estará basada en esta filosofía innovadora y poco vista en las aulas.

Capítulo 4

Propuesta de intervención

4.1. Planteamiento: Aulas de Pensamiento para grupos reducidos

La estrategia educativa que desarrollan las Aulas de Pensamiento está diseñada para promover el pensamiento crítico y la resolución de problemas entre los estudiantes, buscando que éstos participen activamente en el aprendizaje de las matemáticas y favoreciendo de esta forma la motivación y el autoconcepto del alumno sobre la materia.

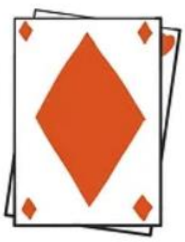
Esta propuesta de intervención se plantea para implementar la herramienta *Thinking Classrooms* en un aula de Bachillerato en régimen nocturno de la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales con grupos reducidos formados por entre 3 y 12 alumnos, contexto poco explotado y que queremos diseñar su implementación.

Aunque en la idea desarrollada inicialmente por Peter Liljedahl ubica el umbral para poder implementar esta estratega en torno a 12 alumnos debido a que, con un número menor, los chicos llegan a tener la sensación de que siempre trabajan con el mismo compañero y disminuye la diversidad de en los grupos. Además, se reduce la variedad y complejidad de ideas entre grupos, ya que solo habrá entre uno y cuatro grupos diferentes de alumnos desarrollando las tareas.

Sin embargo, trabajar en grupos reducidos tiene ciertas ventajas, como la posibilidad de ofrecer una atención más personalizada y fomentar una mayor participación individual. A continuación, adaptaremos tres de las prácticas del plan teniendo en cuenta las particularidades de los grupos reducidos, proporcionando un enfoque flexible y colaborativo que puede mejorar significativamente la experiencia de aprendizaje de los estudiantes (Liljedahl, 2022).

Cómo formamos los grupos de trabajo en grupos reducidos

2



Para mejorar la diversidad entre grupos, puede disminuirse el tamaño de éstos a dos alumnos, aunque es reconocido que hace disminuir la diversidad dentro de un grupo. Para compensarlo, los grupos de dos deben trabajar cerca de otros grupos, aumentando así la probabilidad de que las ideas se propaguen de uno a otro. Esta fusión entre dos equipos ocurre cuando ambos tienen diferentes ideas, estrategias o soluciones a la tarea, es decir, cuando existe diversidad de pensamiento. Está demostrado que al fusionarse, no experimentan la sensación de estar trabajando con la misma persona.

En caso de tener el mínimo de alumnos, esto es, 3 personas en un grupo, no tendremos diversidad entre grupos porque solamente habrá uno, pero se repartirá la función de portavoz, de tal manera que sea cada vez uno diferente el que interactúe con las ideas del profesor.

Otra forma es entregar a cada uno de los 3 alumnos una pizarra individual, y poner en común sus ideas para resolver juntos la tarea.

Cómo fomentamos la autonomía de los estudiantes en grupos reducidos

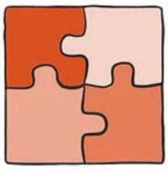
8

En estos pequeños grupos, existen menos ideas que fluyen en el aula para que puedan tomar unos grupos de otros, por lo que para compensar esto el docente puede utilizar una pizarra blanca vertical para su propio uso. De esta forma, si ningún grupo está haciendo un gráfico, el profesor podrá dibujarlo en su pizarra; si tampoco están resolviendo la tarea de manera visual, la podrá mostrar en dicha pizarra.

El objetivo no es mostrarles la solución, sino movilizar las ideas y el conocimiento. Es decir, no ayudarles directamente cuando un grupo pide ayuda, sino dirigirles a la pizarra vertical del profesor o hacia otro grupo que tenga esa idea que están buscando.

Cómo consolidamos una lección en grupos reducidos

10



Al igual que en los grupos grandes, la consolidación del conocimiento viene desde abajo: seleccionando cuidadosamente el trabajo y su secuencia para construir un hilo conductor coherente. En las clases pequeñas la única diferencia es que incluye el uso de la pizarra blanca vertical con la que trabaja el profesor durante este proceso de selección y secuenciación del conocimiento.

4.2. Descripción de la propuesta

4.2.1. Objetivo

Siguiendo las indicaciones de Liljedhal, es importante comenzar a construir un Aula de Pensamiento con tareas no curriculares. Está comprobado que, desarrollando al menos tres clases basadas en tareas no rutinarias antes de exponerles a las lecciones curriculares, los alumnos tienen un mayor índice de éxito que aquellos que tuvieron éxito en las tareas de órdenes directas en las que se aplica la mímica. Es decir, su motivación y voluntad para pensar está activada con el uso de buenos ejercicios no pertenecientes al currículo.

El objetivo de esta propuesta de intervención puede resumirse en los siguientes puntos:

- Desarrollo del pensamiento crítico: los estudiantes analizan y resuelven problemas significativos (no necesariamente complejos).

- Habilidades colaborativas: fomenta el trabajo en equipo y la comunicación.

- Compromiso y motivación: problemas desafiantes y trabajo en grupo aumentan el interés y el compromiso.

Se describen dos tipos de propuestas para alcanzar esos objetivos de fomentar el pensamiento crítico y la resolución colaborativa de problemas en los estudiantes, de tal forma que aumente su confianza en sí mismos y su autoeficacia al convertirse en mejores "pensadores matemáticos".

En una propuesta inicial, se plantea la primera activación del pensamiento e introducción a esta estrategia pedagógica, planteando pequeños retos de 10 minutos que no llevan relación con el currículo para construir la cultura de un Aula de Pensamiento. Estas actividades pueden ser un poco más protagonistas en la sesión y tener más duración (máximo 30 minutos).

Y en la segunda, la dedicación de la sesión completa a través de las *Thinking Clasrooms* para la explicación de un contenido correspondiente al currículo de Bachillerato en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.

4.2.2. Contexto

Como se ha descrito anteriormente, las propuestas del presente trabajo están orientadas para aplicarse en el grupo de 1º Bachillerato, en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales que se imparte en un régimen nocturno y con un número reducido de estudiantes, en este caso tomaremos de referencia un grupo de 3 personas, el mínimo de alumnos requeridos, como en la situación real vivida en el grupo del I.E.S. Jorge Manrique de Palencia.

El temario en el que se ha elegido implementar esta propuesta es, dentro del Sentido de la medida, el de “Cambio”, el cual incluye el siguiente conocimiento matemático:

- Límites: estimación y cálculo a partir de una tabla, un gráfico o una expresión algebraica.

4.2.3. Metodología

El contenido se expondrá en diferentes sesiones a lo largo de las cuales se implementarán, de manera secuencial, las distintas actividades. Para todas ellas, el objetivo persigue mejorar la autoeficacia del alumno, que le permita, a su vez, mejorar su autoconcepto y creencias frente a las matemáticas a través de una motivación en su aprendizaje.

La combinación de la resolución de problemas con el aprendizaje cooperativo crea un entorno donde los estudiantes no sólo desarrollan sus habilidades cognitivas, sino que también aprenden a trabajar en equipo, resolviendo tareas y ejercicios de manera conjunta. Esto mejora la comprensión y permite a los estudiantes aprender de las perspectivas y experiencias de sus compañeros, enriqueciendo el proceso de aprendizaje. Además, se incluyen también actividades de gamificación, lo que implica el uso de elementos de juegos para aumentar la motivación y el compromiso de los estudiantes.

Para llevar a cabo la resolución de los problemas, se utilizará la estrategia propuesta por George Pólya para esta metodología, la cual consiste en 3 etapas:

- Etapa 1: Entender el problema. Comprender el enunciado, identificar lo que se está preguntando y qué datos son los que proporcionan. Aquí el alumno tiene que ser capaz de darse cuenta si se han resuelto problemas similares con anterioridad.

- Etapa 2: Configurar un plan. Se plantea la estrategia según el enunciado que hemos leído y comprendido. Es importante tomarse su tiempo para no lanzarse a resolverlo solo porque el enunciado es parecido a otro. Aquí se tendrá en cuenta teoremas que se hayan utilizado o si se puede implementar el mismo método que otro problema semejante. También hay que puntualizar que en el nivel de ESO y Bachillerato todos los datos que se muestren se utilizarán para la resolución. Aquí podemos ver algunos enunciados que van guiando al alumno con una serie de preguntas acordes con el desarrollo del problema.

- Etapa 3: Ejecutar el plan. Se implementa la estrategia paso a paso para evitar cometer errores, por lo que se puede tomar el tiempo que se necesite. Es importante ir escribiendo los distintos razonamientos de por qué se están dando esos pasos tanto para detectar si hay algún error como para ir mostrando al profesor que entendemos el problema. Si no se da con la solución, se vuelve a empezar con el plan.

- Etapa 4: Mirar hacia atrás. Comprobar que se ha realizado bien la tarea, si hemos respondido a la pregunta que se pedía, si tiene sentido la solución, si existe otra solución más sencilla, etc.

4.2.4. Activación del pensamiento: pequeñas tareas no curriculares

Las tareas no curriculares desempeñan un papel crucial en la educación, especialmente en contextos como el bachillerato nocturno. Aunque no están directamente alineadas con el contenido curricular específico, estas tareas contribuyen significativamente a la evolución integral de los estudiantes y complementan el aprendizaje académico.

- Están implicadas en el desarrollo de *soft skills* que son esenciales para el éxito académico y personal del alumnado. Estas habilidades incluyen la comunicación, la colaboración, el liderazgo, la resolución de conflictos y la gestión del tiempo.

- Se orientan a proporcionar apoyo emocional y social a los estudiantes, ayudándoles a manejar el estrés, la ansiedad y otros desafíos emocionales.

- Ayuda a fomentar la creatividad y la innovación, permitiendo a los alumnos a explorar nuevas ideas y enfoques.

- Mejoran su autonomía y sus habilidades de gestión del tiempo.

Recursos y materiales

Para este tipo de tareas de activación del pensamiento, se utilizarán:

- Pizarras blancas portátiles. Se entregará una única pizarra para los tres alumnos, y otra pizarra que tenga el profesor cerca de donde se han posicionado en la clase.

- Rotuladores para pizarra. Cada día será uno de los chicos el considerado como portavoz, que tome el marcador y se encargue de escribir en la pizarra en colaboración con las ideas de los compañeros.

- Problemas de ingenio matemático que requieran pensamiento crítico (sin entrar en los temas del currículo). Se entregará al inicio de cada sesión, para evitar consumir más tiempo del requerido, la tarea en papel, una copia para cada alumno para que les sea accesible la lectura para todos.

Desarrollo de la actividad

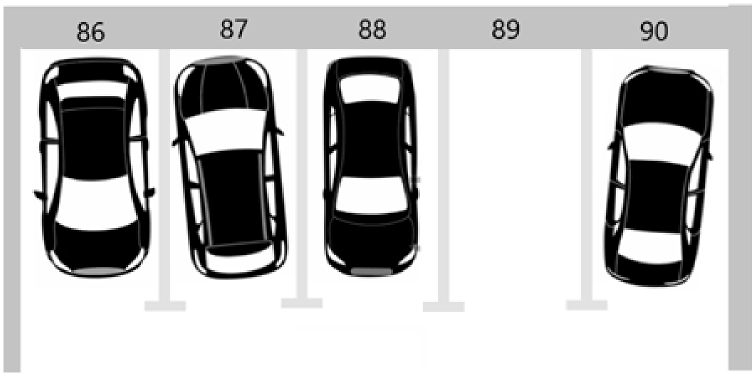
En los primeros 5 minutos de la sesión se plantea a los alumnos una pequeña tarea que implique pensamiento y reflexión y que no esté relacionada con el currículo, pero que se considere motivante para ellos. Se pueden encadenar varias de estas tareas, comenzando siempre con la más sencilla para que los chicos vayan descubriendo su capacidad, y, a medida que la dificultad pueda ir aumentando, ellos a su vez ir mejorando el autoconcepto matemático. Serán problemas de lógica e ingenio, para que se active el pensamiento crítico, y están recogidos en el Anexo I.

En este caso no usaremos los 14 planteamientos de la estrategia *Thinking Classrooms*, sino que los adaptaremos para aplicar estas cortas tareas de 10 o 15 minutos y así acostumbrar a los estudiantes a la nueva estrategia. Se pueden también aplicar en alguna sesión tareas un poco más largas, de 30 minutos, para dar tiempo al alumno a asentar las bases de esta herramienta.

A modo de ejemplo, tomando la primera tarea que encontramos en el Anexo 1, se presenta el siguiente problema:

Actividad 1

Averigua los nombres de los propietarios de cada coche, así como el color y la antigüedad de cada vehículo, incluso para la plaza vacía.



1. El coche más antiguo tiene dos años más que el de Juan, que es azul.
2. Carmen aparca su coche con el frontal hacia la pared, como lo hace la propietaria del coche que tiene dos años.
3. El coche de María es tres veces más viejo que el de Carmen.
4. El coche de cuatro años y el verde aparcan en las esquinas, junto a la pared.
5. El coche gris solo tiene cuatro meses y el de Pablo seis años.
6. El coche que tiene un año tienen la plaza vacía a su lado.
7. Celia aparca su coche en sentido contrario que María, que posee el coche blanco.
8. Pablo es propietario de un coche color crema.
9. El coche verde es seis veces más viejo que el gris.

Ilustración 3. Actividad 1 de activación del pensamiento

La sesión comienza entregando a los alumnos el enunciado, una hoja para cada uno para que en primer lugar la lean detenidamente lo que se les está requiriendo.

Una persona será la portavoz con la responsabilidad de escribir en la pizarra blanca las ideas que van poniendo en común con sus compañeros. Es importante esperar un par de minutos a que reflexionen sobre lo que se les está pidiendo resolver y observar las primeras reacciones. Se espera que la primera acción por parte de los alumnos sea apuntar los datos de entrada en la pizarra. En caso de desviarse y no observar evolución, en la pizarra que tendrá el profesor éste puede apuntar la siguiente tabla para ayudarles a empezar el planteamiento, y, junto con los alumnos oralmente, registrar los datos que se obtienen del enunciado para que ellos los apunten en su propia pizarra:

Datos:	Juan Carmen María Pablo Celia	Azul Gris Blanco Crema Verde	2 años María x3 viejo Carmen Cuatro meses 6 años Verde x6 viejo gris
PLAZA	PROPIETARIO	COLOR	ANTIGÜEDAD
86			
87			
88			
89			
90			

Tabla 6. Planteamiento Actividad 1 de activación de pensamiento

Una vez que han conseguido Los tres alumnos, reunidos de pie frente a la pizarra vertical, resolverán el ejercicio interactuando unos con otros para llegar a un consenso y una solución.

Discusión y reflexión

Al finalizar la actividad, el portavoz del grupo explica al docente su resolución y los pasos y razonamientos que han seguido para el resultado obtenido.

Los beneficios que se van a obtener de estas intervenciones cortas se basarán en:

- Activación del pensamiento crítico: los estudiantes aprenden a analizar y resolver problemas no habituales.
- Desarrollo de habilidades colaborativas: fomentar el trabajo en equipo y la comunicación efectiva.
- Aparición de un sentimiento de compromiso y motivación: los problemas desafiantes y el trabajo en grupo pueden aumentar la motivación y el compromiso con el aprendizaje.

4.2.5. Aplicación de las Aulas de Pensamiento en el currículo

Recursos y materiales

Las proposiciones de la 1 a la 8 expuestas por Liljedhal en *"*Building Thiking Classrooms in Mathematics*"* se desarrollarán de la misma manera en todas las tareas que se van a desarrollar:

Los tres alumnos que forman nuestro grupo se dispondrán de pie en una zona del aula con su pizarra vertical. Para mostrar una cercanía, el profesor se posicionará cerca de ellos, pero sin estar constantemente encima del grupo para dejarles el espacio suficiente y autonomía para razonar las tareas. Por tanto, para este tipo de actividades con tareas curriculares, se utilizarán como material:

- Pizarras blancas portátiles. Se entregará una única pizarra para los tres alumnos, y otra pizarra que tenga el profesor cerca de donde se han posicionado en la clase.

- Rotuladores para pizarra. Cada día será uno de los chicos el considerado como portavoz, que tome el marcador y se encargue de escribir en la pizarra en colaboración con las ideas de los compañeros.

- Problemas desafiantes de matemáticas que requieran pensamiento crítico (no solo cálculos rutinarios) y que formen parte del currículo. Se entregará al inicio de cada sesión, para evitar consumir más tiempo del requerido, la tarea en papel, una copia para cada alumno para que les sea accesible la lectura para todos.

El resto de las proposiciones se irán implementando de manera diferente en cada una de las sesiones de Aulas de Pensamiento que se van a realizar.

Desarrollo de la secuencia de actividades

La implementación de las Aulas de Pensamiento en el currículo requiere una adaptación del enfoque tradicional de enseñanza, centrándose más en el aprendizaje activo y la colaboración, lo que resulta en una experiencia educativa más enriquecedora y motivadora para los estudiantes. Se aplicará la estrategia para consolidar el conocimiento acerca del tema de Límites de funciones a través de varias sesiones en las que se utilizará la metodología de resolución de problemas. Los problemas propuestos para implementar vienen recogidos en el Anexo II: Sesión de Aulas de Pensamiento con tareas curriculares. Algunas de las estrategias usadas con mayor frecuencia y con las que se pretende que los alumnos se familiaricen y terminen utilizando de manera autónoma son las siguientes:

- Esquematizar datos de entrada.
- Representaciones gráficas (diagramas, dibujos geométricos).
- Recordar problemas relacionados o semejantes.
- Traducción del lenguaje matemático.

- Escribir las ecuaciones/fórmulas que se consideren servibles.
- Dividir en subproblemas más sencillos.
- Particularizar y generalizar.
- Reducción al absurdo.
- Ensayo y error.
- Usar una variable.

Sesión 1 construyendo Aulas de Pensamiento	*Repaso de las propiedades de las funciones con Sudokunciones (50 min)*

Esta sesión servirá como repaso de las características de la función: su magnitud, el tipo, las variables dependiente e independiente, continuidad, dominio, etc. En la hoja que les entregamos con la actividad, aparece un tablero de sudoku en el que vemos números y letras y una gráfica. Las letras deberán transformarlas a números para poder resolver el sudoku con facilidad.

Los tres alumnos en su pizarra vertical transcribirán el tablero de sudoku e irán completándolo con los valores que obtengan de la resolución de las premisas que se les entrega. Es una actividad que engloba una parte curricular, como son las características de las funciones, y una parte de gamificación, como es la resolución de un sudoku.

A		B		5		C		6
		D	2		E	8		F
		7	9		6	5		
		G	4		7		H	
2					I		8	5
	1			J	5	K	L	3
	9		M					
	N		3	O				P
Q	4	R		S				

Tabla 7. Sudokunción para completar

Para obtener el valor de esas letras, se les facilita una gráfica y tendrán que utilizar las propiedades de la gráfica para obtener las premisas (siempre el resultado en valores absolutos):

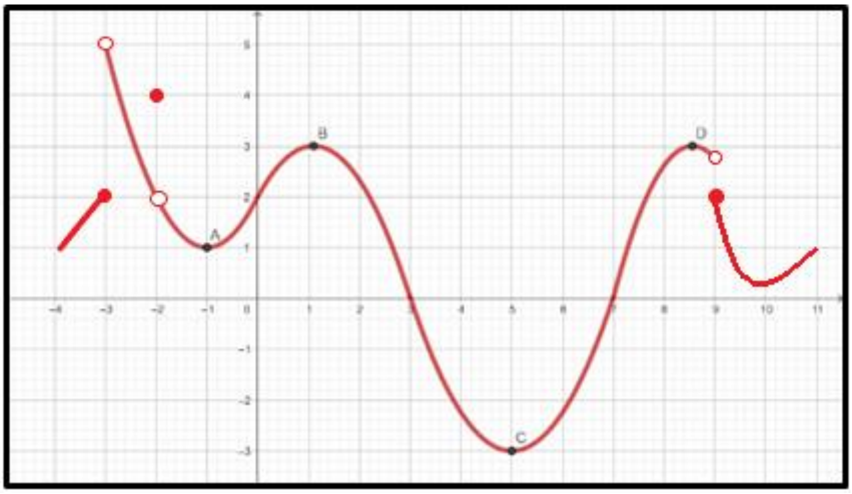


Ilustración 4. Gráfica de la función de la actividad "Sudokunciones"

Valor	Premisa	Res.
A	El máximo valor del recorrido de la función restado 2	
B	La x>0 que corresponde a f(x)=3 pero que no es x=1	
C	La imagen de $x = -2$ restado 2	
D	La abscisa del mínimo absoluto de la función	
E	El punto de corte con el eje OX más pequeño	
F	El punto de corte mayor con el eje OX	
G	El límite de la función cuando x tiende a -2	
H	El punto de corte con el eje OY	
I	El máximo valor del dominio de la función	
J	La imagen para x= -2	
K	Para ese valor de x, la función pasa de negativa a positiva	
L	El valor más pequeño de la variable independiente que tiene una imagen de -2	
M	Para ese valor de la variable independiente x, f(x) = -3	
N	El límite lateral por la derecha cuando x tiende a -3	
O	3 más que el mayor valor alcanzado por la función	
P	El número de intervalos donde la función es decreciente	
Q	El límite lateral cuando x tiende a -3 por la izquierda	
R	El número de intervalos donde la función es creciente	
S	La variable independiente no puede tomar valores mayores que éste.	

Tabla 8. Premisas para la actividad de "Sudokunciones"

En el caso que los alumnos se atasquen en algún punto, el docente podrá facilitarles algún valor de los que no formen parte de la tabla de características de las funciones, y lo puede hacer mediante la utilización de su "pizarra docente", que ayudará a los estudiantes a tomar ideas. Recordemos que el objetivo es que repasen la materia curricular, no que se les pongan dificultades para resolver un sudoku.

Al finalizar la actividad, el alumno portavoz en esta sesión se encargará de transcribir al profesor cada una de las respuestas para conseguir consolidar la información que se ha obtenido de esta tarea. El docente, por su parte, irá señalando en la gráfica del ejercicio que tendrá dibujada en su pizarra los resultados de las diferentes premisas del enunciado.

Sesión 2 construyendo Aulas de Pensamiento	*Límites de una función en un punto y resolución de problemas (50 min)*

Al contrario que en las metodologías más tradicionales, se comenzará la sesión directamente con un problema en el que se aplique este tipo de límites. Así, en la misma sesión se irá ampliando el conocimiento con extensiones del problema base para completar el conocimiento.

Problema:

Pablo y María están vaciando su piscina para cambiar el agua y volverla a llenar de cara al verano, y ésta se vacía a través del desagüe según la función:

$$v(t) = \frac{\sqrt{t+3} - 2}{t - 1}$$

donde t es el tiempo de vaciado en horas y $v(t)$ es el volumen de agua expresado en L. Averigua hacia dónde se acerca el volumen de la piscina cuando el tiempo:

a) *Se aproxima a 20 minutos.*
b) *Se aproxima a 1 h.*
c) *Se aproxima a 1 h si la función fuera de la siguiente manera:* $v(t) = \frac{\sqrt{t+3}-1}{t-1}$

Con este problema se trabajan los tipos de cálculo de límites en un punto: directo, indeterminado $\left(\frac{k}{0} y \frac{0}{0}\right)$.

Comenzando con el primer apartado, los alumnos lo primero que harán será apuntar la fórmula que se les ha facilitado. Se les dará un par de minutos para analizar el problema, y se les puede preguntar qué les está pidiendo el enunciado. Es una forma de empujarles a activar el pensamiento. Lo más probable es que su primer instinto sea sustituir por el valor que les da el enunciado: 1h. En ese momento, el docente se les puede acercar y hacer alguna pregunta que les haga reflexionar sobre su respuesta directa: "¿Eso es cuando se aproxima, o cuando llega justo a la hora exacta del comienzo del vaciado?", "¿el problema te pide exactamente a la hora?".

Este es el momento de introducir el método de resolución de problemas basándonos en la estrategia de Pólya:

- Etapa 1: Entender el problema. "¿Qué nos están pidiendo realmente?". "¿Sabemos cómo se calcula eso que nos piden?". Los alumnos deberán apuntar en su pizarra la información que les ofrece el problema y la incógnita que les está solicitando, esto es, el valor del volumen $v(t) \rightarrow t$ se acerca a 0,2 en el primer apartado y 1 en el segundo.

- Etapa 2: Configurar un plan. Como esta definición es una materia nueva para ellos, no sabrán cómo empezar. Aquí el profesor puede darles una pista de cómo comenzar, como por ejemplo probando a representar la gráfica mediante una tabla de valores.

x (t)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
y (vol)	0,268	0,264	0,260	0,257	0,253	?	0,247	0,244	0,241

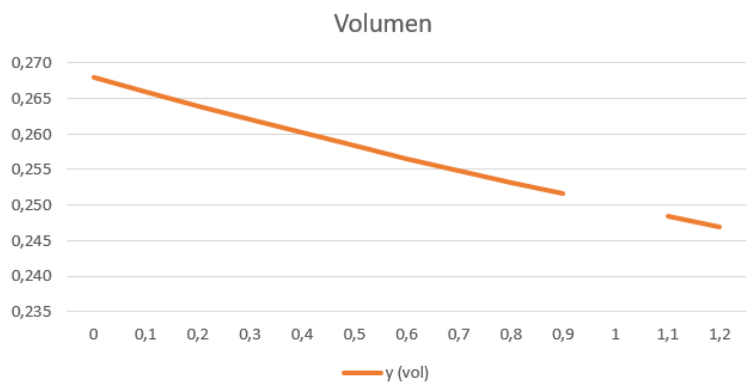


Ilustración 5. Etapa 2 de resolución del problema 1

- Etapa 3. Ejecutar el plan. Los alumnos se pondrán a hacer la tabla de valores y a dibujar los puntos en los ejes de coordenadas para unirlos con unas curvas y así representar la función. Una vez dibujada tendrán que saber indicar a qué valor de la imagen se va a acercando la función a medida que la x tiende al valor que les piden.
  En caso $de\ t = 20\ min\ = 0{,}33\ h$, tienen que dar valores muy cercanos al que les piden, y lo mismo para $t = 1\ h$.

x (tiempo)	0,328	0,329	**0,33**	0,331	0,332
y (vol)	0,26149	0,26147	**0,26145**	0,26143	0,26141

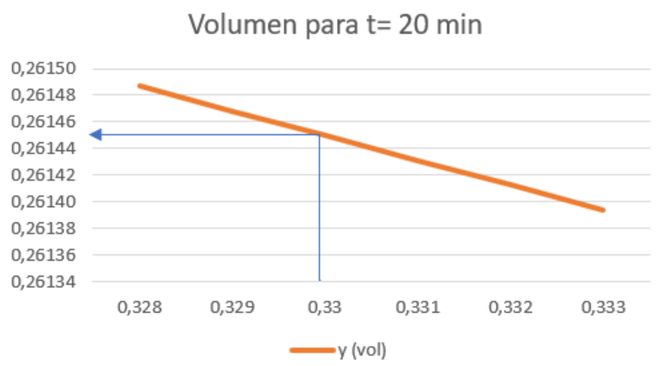


Ilustración 6. Etapa 3 de la resolución del problema 1

- Etapa 4. Mirar hacia atrás. En este punto el profesor introduce el concepto de límite, y su resolución directa mediante su cálculo a partir de la función. Se explicarán las indeterminaciones del tipo K/0 y 0/0 y sus resoluciones correspondientes (límites laterales y factorización) y podrán discutir si les parece una manera más fácil para resolverlo sin necesidad de dibujar una gráfica ni obtener los valores de esta.

Los alumnos, de manera paralela, irán tomando notas de los conceptos estudiados, que más adelante serán recogidos todos en una hoja resumen que Liljedahl nombra como "organizador básico".

Notas:

"El límite de una función en un punto es el valor al que se dirige a tomar f(x) cuando la variable independiente x se aproxima a un valor determinado".

Tipos **Límites en un punto**	Finito $\lim_{x\to n} f(x) = nº\ real$	Infinito $\lim_{x\to n} f(x) = \infty$ ó $-\infty$	No existe $\nexists \lim_{x\to n} f(x)$

Cálculo **Límites en un punto** $\lim_{x\to n} \boldsymbol{f(x)} =$	$= nº\ real$ Solución directa	$= \frac{K}{0}$ Lím. laterales	$= \frac{0}{0}$ Factorización (Ruffini)

Tabla 9. Notas de los alumnos tras la primera sesión

Sesión 3 construyendo Aulas de Pensamiento	*Consolidación del conocimiento (50 min)*

Para establecer unos buenos cimientos de la comprensión y razonamiento de límites de una función en un punto, es conveniente plantear de diferentes formas la materia para conseguir el conocimiento profundo y no caer en el conocimiento por repetición. Para ello, se plantean problemas a la inversa, que activen el pensamiento de los alumnos y sepan razonar.

Problema:

Representa tres funciones que cumplan:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4$$

Y que, además, cada una de ellas tenga la siguiente condición:

a) $f(3) = 4$
b) $f(3)\ no\ existe$
c) $f(3) \ = 5$

El objetivo de esta tarea es consolidar el conocimiento, por lo que, aunque la actividad la desarrollen entre los tres alumnos, cada uno explicará al profesor al finalizar la tarea el razonamiento de cada una de las funciones plasmadas.

Para ampliar la tarea, el profesor puede pedir que se representen dichas funciones elegidas por cualquier integrante del grupo, de tal manera que todos comparten el mismo nivel en la actividad, evitando dejar a alguno de ellos por detrás de los demás integrantes.

Esta actividad se puede también ampliar con el complemento de las asíntotas. Por la experiencia con este grupo de alumnos, es un concepto que no terminan de comprender por no tener una buena base inicial, por lo que se puede ayudar implementando un refuerzo en el aula de pensamiento.

Problema:

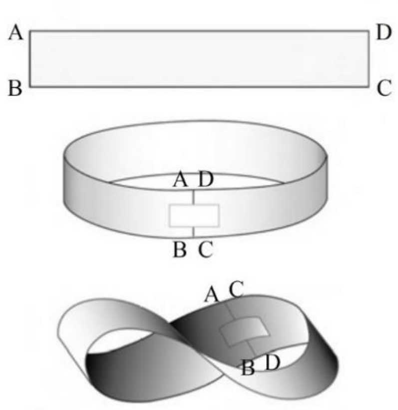
Escribe una función racional que cumpla las siguientes condiciones:

a) *Que tenga únicamente dos asíntotas en* $x = 3$ *y* $x = -2$.
b) *Que tenga dos asíntotas, una en* $x = -3$ *y otra en* $y = 2$.
c) *Que al menos tenga una asíntota en* $x = 4$.

De la misma manera que en el ejercicio anterior, los tres alumnos elaborarán colaborando entre ellos las respuestas, pero será de manera individual la forma en explicar y razonar la resolución al profesor a partir de sus pizarras.

Sesión 4 construyendo Aulas de Pensamiento	*Límites en el infinito (50 min)*

Para introducir la sesión de límites en el infinito, se puede hacer una actividad manipulativa que mantenga la atención de los alumnos como acercamiento a ese concepto de infinito tan abstracto.



La cinta de Moebius es un objeto simple pero profundo que desafía nuestras intuiciones sobre el espacio y las superficies, siendo un símbolo de infinito y continuidad. Su estudio proporciona valiosos conocimientos en varios campos de la ciencia, el arte y la literatura. Lleva el nombre del matemático y astrónomo alemán August Ferdinand Möbius, quien la describió en 1858. Se trata de una superficie con solo un lado y un solo borde, y se puede crear tomando una tira de papel, girando uno de los extremos 180 grados y luego pegando los extremos juntos. Proporciona a los chicos tres tiras y pegamento para que la construyan.

Una vez construida, se puede comentar con ellos la característica más destacada de la cinta de Moebius, que es que es una superficie no orientable. Esto significa que, si empiezas a dibujar una línea por el centro de la cinta, eventualmente regresarás al punto de inicio pero en el lado "opuesto" sin haber levantado el lápiz. Es decir, a pesar de lo que podría parecer, la cinta de Moebius tiene solo un borde. Si comienzas a trazar el borde de la cinta, volverás al punto inicial habiendo recorrido todo el borde una sola vez.

Problema:

Se estima que la población de conejos en una finca evoluciona según la función:

$$f(x) = 100\,\frac{6t^2 + 4}{3 + t^2}$$

donde f(x) representa el número de individuos y t el tiempo transcurrido en meses. El veterinario de la finca ha observado que, en los primeros nueve meses, la población ha aumentado. Investiga si el crecimiento será indefinido, si tenderá dicha población de conejos a estabilizarse o si tenderá a disminuir.

De nuevo, en esta sesión se plantea un problema para ir desarrollando y incluyendo nuevos conocimientos. Seguimos la estrategia de resolución de problemas:

- Etapa 1: Entender el problema. Los alumnos apuntarán en su pizarra la información que indica el enunciado del ejercicio, pero ¿qué significa “crecimiento indefinido”? ¿y la frase de “tender a estabilizarse”? Aquí tienen que comprender que lo que les está pidiendo el problema es calcular el límite cuando x tiende a infinito, esto es:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

- Etapa 2: Configurar un plan. En este punto ya saben cómo calcular los límites, pero no en el infinito. El planteamiento, sin embargo, deberá de ser similar al del ejercicio de la sesión de límites en un punto: primeramente, la representación bien por medio de una tabla o bien por medio de gráfica cuando t cada vez es más grande para observar cómo se comporta esa función y ver si se puede sacar alguna conclusión.

- Etapa 3: Ejecutar el plan. Aquí los alumnos representarán la función a través de una tabla de valores y su gráfica, dando valores de cada vez más grandes. Es por ello que el profesor les entregará una hoja con las propiedades de las operaciones con los infinitos. Además, deberán plantear en primer lugar, al igual que en la sesión de límites de una función en un punto, la representación bien por medio de una tabla o bien por medio de gráfica cuanto t cada vez es más grande.

t (tiempo)	1	5	10	15	20	50	100	200	300
y (poblac.)	250,000	550,000	586,408	593,860	596,526	599,441	599,860	599,965	599,984

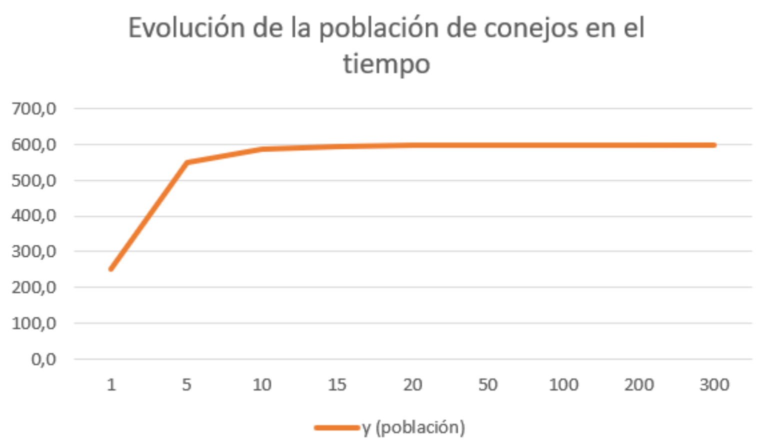


Ilustración 7. Etapa 3 del problema 2

Con esta ejecución, los alumnos ya pueden sacar las conclusiones que se les está pidiendo, y es que la población de conejos tenderá a estabilizarse en un valor, por mucho que pase el tiempo no seguirá aumentando el número.

- Etapa 4: Mirar hacia atrás. En este punto el profesor introduce el concepto de límite en el infinito, y su resolución directa mediante su cálculo a partir de la función. Se explicarán las indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$ y ∞/∞ y sus resoluciones correspondientes que consiste en trabajar con las órdenes de infinitud. Éstas constituyen la “prioridad” o “superioridad” de unas funciones frente a otras teniendo en cuenta la rapidez con la que crecen (es decir, cuál toma un valor más grande cuando la x tiende al infinito).

El profesor, para consolidar la lección, escribirá en su pizarra vertical la resolución de este nuevo tipo de límites discutidos. De igual forma, los estudiantes recogen los conceptos para más adelante elaborar la hoja “organizador básico”.

Notas:

Tipos Límite en el infinito	Finito $\lim_{x\to\infty} f(x) = nº\ real$	Infinito $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ó $-\infty$	No existe $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$

Órdenes de infinitud
$a^x > x^n > \log_a x$

Cálculo Límite en el infinito $\lim_{x\to\infty} f(x) =$	$= \infty - \infty$ Órdenes de infinitud	$= \frac{\infty}{\infty}$ Órdenes de infinitud

Tabla 10. Notas de los alumnos tras la sesión 4

Sesión 5 construyendo Aulas de Pensamiento	*Consolidación del conocimiento (50 min)*

De manera similar a lo realizado en la materia anterior, es preciso asentar una buena base de este conocimiento nuevo. Para ello, se buscan tareas que enfoquen desde otra perspectiva estos ejercicios y evitar así la repetición sistemática de su resolución.

Problema:

Escribe un polinomio P(x) que complete la siguiente expresión para que se cumpla cuando se calcule su límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2 + 6x - 2}{P(x)}$$

a) 4
b) 5
c) 0
d) ∞
e) $-\infty$
f) *No existe*

Repitiendo el sistema de la estrategia que llevamos implementando en todas las sesiones, de manera conjunta los miembros del grupo escribirán las expresiones del resultado, pero será de manera individual que expliquen el razonamiento y la obtención de dicho polinomio, por lo que tienen que estar participando de manera activa en el desarrollo de la actividad.

Una extensión de esta tarea puede ser también la obtención de parámetros para que se obtengan unos resultados pedidos, como, por ejemplo:

Problema:

Obtener el valor de a para que se cumplan las siguientes expresiones:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3ax^3 - 5x - 2}{9x^3 + 4} = -1$$

Sesión 6 construyendo Aulas de Pensamiento	*Límites de funciones a trozos (50 min)*

Continuamos con la misma dinámica: se plantea un problema a partir del cual se irán asimilando los diferentes conceptos.

Problema:

El servicio de cirugía de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las largas listas de espera. Se prevé que, a partir del 1 de septiembre de 2024, la siguiente función $P(x)$ indicará en cada momento t, en meses, el porcentaje de enfermos que podrá ser intervenido sin necesidad de entrar en lista de espera.

$$P(x) = \begin{cases} t^2 - 7t + 35\,, & si\ 0 \leq t \leq 10 \\ \\ \dfrac{30t - 100}{0{,}4t}\,, & si\ t > 10 \end{cases}$$

a) *¿Cuál será el porcentaje al que tienda cuando se acerque el fin de año?*
b) *Pasado un tiempo largo, ¿cuál será ese porcentaje?*

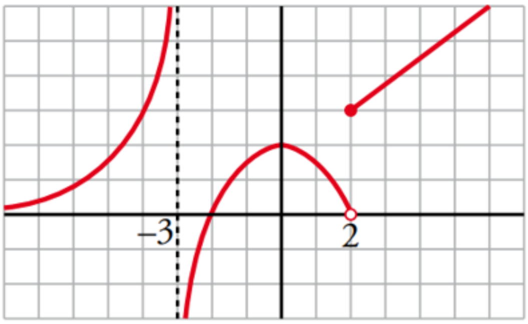
- Etapa 1: Entender el problema. A estas alturas de la materia, los alumnos ya deben entender qué se les está pidiendo en el enunciado. En el primer apartado el único obstáculo que pueden tener es cuál es el t cuando llegue fin de año. Deberán tener en cuenta que el inicio de esta función es en septiembre, es decir si estamos en septiembre para $t \rightarrow 0$, en diciembre será $t \rightarrow 4$ (¡cuidado con la traducción al lenguaje matemático! Del 1 septiembre al final de diciembre son 4 meses). En caso del segundo apartado es el cálculo cuando $t \rightarrow \infty$.

- Etapa 2: Configurar un plan. Las funciones a trozos no dejan de ser funciones convencionales con las cuales ya hemos trabajado a lo largo de las sesiones, con la única restricción de estar acotadas para unos valores determinados. Los chicos deberán considerar qué intervalo es el que necesitan tomar para calcular cada uno de los apartados.

- Etapa 3: Ejecutar el plan. Los alumnos, en sus pizarras verticales, calcularán los límites pedidos en el problema. El primer límite será:
$$\lim_{t\to 4}(t^2 - 7t + 35)$$
Se trata de un límite en un punto de resolución directa, siendo el resultado $\lim_{t\to 4}(t^2 - 7t + 35) = [4^2 - 7 \cdot 4 + 35] = 23$
En cuanto a la segunda pregunta, se trata de un límite con indeterminación del tipo ∞/∞, por lo que hay que resolver mediante órdenes de infinitud:
$$\lim_{t\to\infty} \frac{30t - 100}{0{,}4t} = \left(\frac{30 \cdot \infty - 100}{0{,}4 \cdot \infty}\right) = \left(\frac{30}{0{,}4}\right) = 75$$

- Etapa 4: Mirar hacia atrás. Este tipo de problemas es bueno para hacer reflexionar a los alumnos si realmente han respondido a la pregunta que les está planteando el problema, o simplemente se limitan a escribir el valor que les da el resultado. ¿Son peras? ¿Manzanas? Es la pregunta que los docentes suelen responder. Por eso, esta última etapa es importante para cerrar el círculo y que los estudiantes se cercioren que su respuesta, sea correcta o incorrecta numéricamente, tiene sentido.
En este caso, las respuestas serían para las preguntas:
   a) El 23% de pacientes no necesitarán entrar en lista de espera cuando termine el año 2024.
   b) Un 75% de los pacientes no necesitarán en el futuro entrar en listas de espera.

Como ampliación de los límites a trozos, se puede añadir una representación gráfica donde puedan ver los intervalos.



a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

i) $f(2)$

j) $f(-3)$

Ilustración 8. Ejercicio de ampliación de funciones a trozos

Se puede incluir, además, preguntas acerca de las asíntotas, ya que se ha demostrado que este concepto presenta dificultad a los chicos.

Sesión 7 construyendo Aulas de Pensamiento	*Consolidación del conocimiento (50 min)*

Para ver otro tipo de funciones a trozos en las que se pueda aplicar todo lo aprendido hasta ahora, esto es, la identificación de los diferentes límites y la aplicación de la estrategia correspondiente para realizar su cálculo.

Hallar los siguientes límites en la función:

$$f(x) = \begin{cases} 7\,, & si\ x \neq 2 \\ \dfrac{2-x}{x^2-4}\,, & si\ x = 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

Hallar los siguientes límites en la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{x+1}\,, & si\ x < -1 \\ 5 - x^2\,, & si\ x > -1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

Sesión 8 construyendo Aulas de Pensamiento	*Consolidación del conocimiento mediante gamificación con "Límites en la montaña" (50 min)*

Tras haber completado todas las sesiones planificadas para el desarrollo del currículo de Límites de funciones, se finaliza el tema con una sesión usando la gamificación. El objetivo es reunir todos los conceptos adquiridos hasta ahora a la vez que se transmite confianza a los alumnos mediante una actividad en la que ellos se sientan motivados para continuar. Es una oportunidad más para mostrarles que las matemáticas no son algo aburrido, monótono y repetitivo, sino que se puede adquirir el conocimiento a través de diversas estrategias.

Se trata de una actividad muy completa cuya finalidad es hacer un repaso de cada concepto: existencia de límite, cálculo gráfico de límites, límites en un punto, límites en el infinito, indeterminaciones, asíntotas, etc.

Los estudiantes verán en la pizarra digital un mapa interactivo creado a través de la herramienta "Genially" que muestra varias misiones, cada una de ellas se compone de diferentes desafíos con límites que corresponde a cada concepto de las sesiones teóricas. Se trabajará en grupo los tres alumnos, favoreciendo el debate y la comunicación para elegir la respuesta correcta. El llegar al final de la actividad significará el éxito de la resolución de las tareas.

El objetivo final es que los alumnos hayan encontrado las diferentes herramientas que necesitan para salir de la isla donde han quedado atrapados. Para ello, tendrán que superar un total de cuatro misiones, cada una con sus tareas correspondientes, para ir consiguiendo los objetos perdidos.

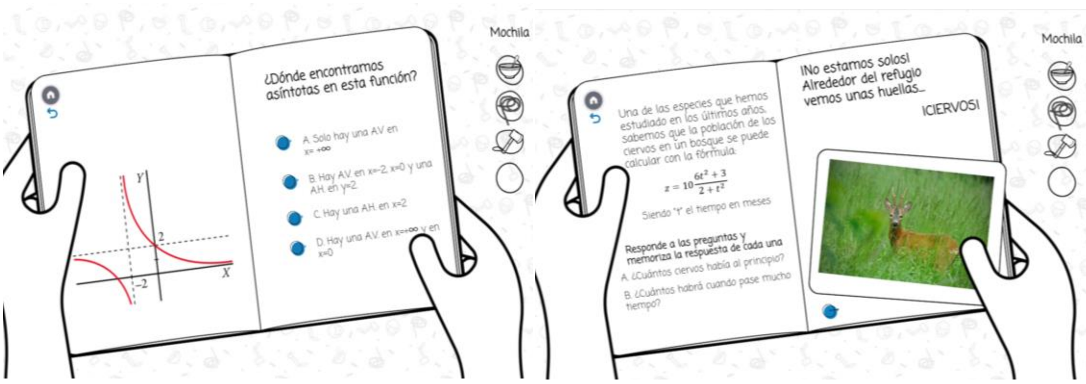


Ilustración 9. Actividades de la Misión 4 "Límites en la Montaña" (Herramienta Genially)

Tendrán que interactuar con los compañeros para tomar la decisión de qué resultado elegir. En caso de que fallen, la pantalla vuelve al inicio de la misión en la que se encuentran.

El enlace al juego diseñado especialmente para los alumnos de 1º Bachillerato en la asignatura matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales del IES Jorge Manrique se encuentra en el siguiente enlace: [Límites en la Montaña]

Toma de notas

Para el progreso del currículo de Límites de una Función, los alumnos deberán desarrollar una hoja resumen basada en un organizador básico que estructure todos los tipos diferentes de casos de combinatoria tras la primera clase teórica con un ejemplo práctico. Esta hoja será la que se utilice como apoyo para realizar los ejercicios, y además la guía para el posterior estudio.

Para hacer este "organizador básico", se reunirán las notas que han estado recogiendo los alumnos a lo largo de las sesiones, que servirá a modo de "chuleta" resumida que tenga la información necesaria para que puedan resolver todo tipo de límites. Se utilizará una sesión para

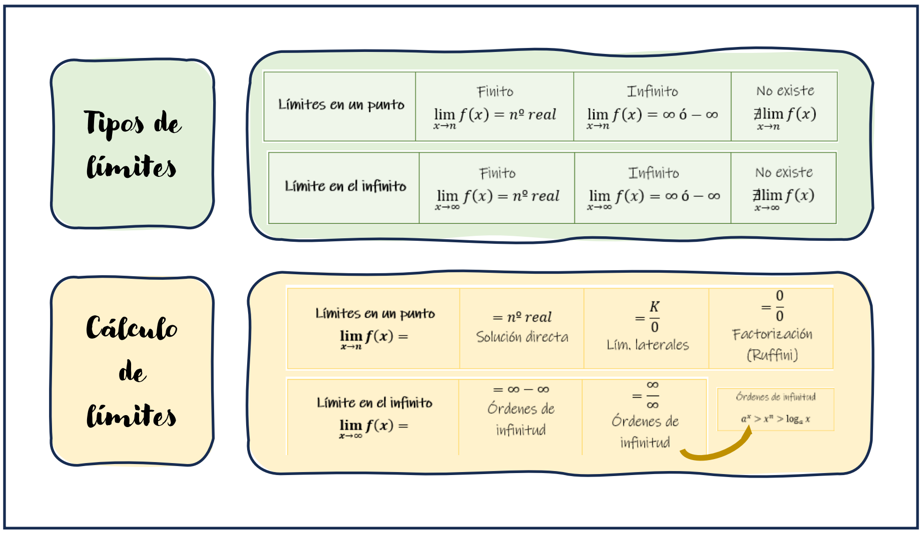


Ilustración 10. Notas de los alumnos en forma de "organizador básico"

4.2.6. Evaluación

La evaluación de la metodología de resolución de problemas lo haremos a través de una rúbrica. Aprovechando que la resolución de problemas se puede aplicar a cualquier contenido de la asignatura, se puede ir viendo la evolución de cada alumno. La rúbrica contendrá una serie de preguntas que debemos ir contestando sobre cada uno de los estudiantes a medida que van evolucionando con la herramienta pedagógica *Thinking Classrooms*. Las preguntas que el docente debe contestar son de la forma:

Nº SESIÓN: ____________________				
Aspecto a valorar	Nunca	Alguna vez	Habitualmente	Siempre
¿El alumno muestra interés por la tarea?				
¿El alumno participa de forma colaborativa?				
¿El alumno elabora conjeturas?				
¿Se usan diferentes tipos de representación?				
¿El alumnado usa símbolos matemáticos de forma adecuada?				
¿Se justifica el porqué del procedimiento matemático?				
¿Se establecen conexiones entre los conceptos matemáticos?				
¿Se validan los resultados de manera crítica?				

Tabla 11. Rúbrica de evaluación de las actividades

Además, se les propondrá un ejercicio completo en el que tengan que aplicar, mediante trabajo cooperativo al igual que en las sesiones de *Thinking Classrooms*, las estrategias aprendidas acerca de la resolución de límites de funciones, con su razonamiento de cada apartado.

EJERCICIO: LÍMITES DE UNA FUNCIÓN

Indicaciones: Se pueden usar calculadoras no programables que no admitan memoria para texto, ni realicen representaciones gráficas, ni ecuaciones, ni integrales. **Los móviles y otros aparatos tecnológicos deben estar APAGADOS.**

Se observarán los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Resuelve aplicando conocimientos de 1º de bachillerato. Da claramente las soluciones.

NOMBRE: **FECHA:** **GRUPO: 6N**

Ejercicio 1: Dada la función f(x), encuentra los siguientes límites: (1 punto)

(Nota: realiza y razona todos los pasos).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+1}{x^3-2x+4} & si\ x < -2 \\ \dfrac{2x+2}{x^2-1} & si - 2 \leq x < 3 \\ x^2-8 & si\ x > 3 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $b)$ $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ $c)$ $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ $d)$ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

Aspecto a valorar	Sí	No
Escogen correctamente la función del intervalo correspondiente		
Saben aplicar límites laterales cuando el punto a estudiar está en el extremo de los intervalos.		

Saben diferenciar si es un límite de cálculo directo o una indeterminación y de qué tipo		
Saben aplicar la estrategia de cálculo correspondiente a cada indeterminación.		
Operan correctamente el desarrollo del límite.		

Tabla 12. Evaluación del ejercicio de límites

Es conveniente también realizar una autoevaluación de cada uno de los alumnos, para que ellos mismos analicen su evolución a medida que van sucediendo las sesiones de Aulas de Pensamiento. Es importante como docentes conocer sus creencias, el autoconcepto que tienen sobre ellos mismos, y de esta manera constatar si este tipo de actividades son adecuadas y si tienen un buen recibimiento para continuar haciéndolas.

Aspecto a valorar	☹	😕	☺
Considero que he comprendido los conceptos.			
Me veo capaz de aprender de esta forma otro temario.			
Se me da bien trabajar de manera individual.			
Se me da bien trabajar en equipo.			
Tengo buena capacidad de comunicación.			
¿Alguna propuesta para mejorar?			

Tabla 13. Autoevaluación de los alumnos

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Máster era diseñar y proponer la implementación de Aulas de Pensamiento en contextos propios del Bachillerato nocturno, específicamente para grupos reducidos. Esta propuesta incluye actividades de trabajo cooperativo, resolución de problemas y gamificación para fomentar un ambiente de aprendizaje dinámico, efectivo y afectivo. La implementación de Aulas de Pensamiento en el bachillerato nocturno tiene el potencial de revolucionar el aprendizaje de las matemáticas para estudiantes adultos, proporcionando un enfoque pedagógico que no solo aborde los aspectos cognitivos, sino también los afectivos y emocionales. Este TFM, al diseñar y proponer actividades específicas para este contexto, busca ofrecer una solución educativa innovadora y efectiva, alineada con las necesidades y características únicas de los estudiantes nocturnos.

La propuesta de intervención se centró en tres tipos de actividades clave: trabajo cooperativo, resolución de problemas y gamificación. Cada una de estas actividades fue seleccionada y diseñada para abordar las necesidades específicas de los estudiantes del bachillerato nocturno, quienes a menudo tienen responsabilidades adicionales fuera del ámbito escolar y pueden beneficiarse de enfoques pedagógicos más flexibles y motivadores.

- Trabajo cooperativo: facilita la colaboración y el intercambio de ideas entre los estudiantes, promoviendo un aprendizaje más profundo y el desarrollo de habilidades sociales esenciales. Las dinámicas grupales permiten a los estudiantes apoyarse mutuamente y aprender de las perspectivas y conocimientos de sus compañeros.

- Resolución de problemas: fomenta el pensamiento crítico y la capacidad de abordar desafíos de manera estructurada y creativa. Ayuda a los estudiantes a aplicar conocimientos teóricos en contextos prácticos, mejorando su capacidad para enfrentar situaciones reales.

- Gamificación: incrementa la motivación y el compromiso de los estudiantes mediante el uso de elementos lúdicos en el proceso educativo. Hace que el aprendizaje sea más atractivo y divertido, reduciendo la percepción de esfuerzo y aumentando la participación activa.

Es importante reconocer que la propuesta de implementación enfrenta ciertas limitaciones. La naturaleza específica del bachillerato nocturno, con estudiantes que a menudo tienen responsabilidades laborales y familiares, puede afectar la consistencia y el nivel de compromiso con las actividades propuestas. Además, con grupos reducidos se hace más complicada la implementación de nuevas metodologías pedagógicas en las que se trabaja la cooperación, puesto que no hay capacidad de intercambio de miembros de los grupos para crear equipos diferentes y heterogéneos. Estas nuevas estrategias requieren tiempo y recursos que pueden no estar inmediatamente disponibles en todas las instituciones educativas.

En conclusión, la propuesta de actividades para implementar las *Thinking Classrooms* en el bachillerato nocturno para grupos reducidos representa una estrategia pedagógica innovadora y efectiva. Al enfocarse en el trabajo cooperativo, la resolución de problemas y la gamificación, esta propuesta busca crear un entorno de aprendizaje que no solo mejore el rendimiento académico de los estudiantes, sino que también promueva el desarrollo de habilidades críticas y reflexivas necesarias para su éxito futuro. Esta propuesta ofrece una base sólida para futuras aplicaciones prácticas y adaptaciones en contextos educativos similares.

La experiencia docente en el Bachillerato nocturno me ha mostrado que los alumnos en este régimen tienen, por lo general, una actitud menos positiva frente a la materia de matemáticas y un autoconcepto negativo acerca de sus aptitudes hacia ella. Es por eso que, como docentes, está en nuestra mano conseguir que eso cambie para ayudar a los chicos a conseguir el éxito educativo. Algunos consejos para tener en cuenta a la hora de tratar con este perfil de grupo son:

- Mantener una actitud flexible y abierta: las *Thinking Classrooms* requieren adaptación y ajuste constante.
- Fomentar la cultura del error: los errores son parte del proceso de aprendizaje. Anima a los estudiantes a aprender de ellos.
- Involucrar a los estudiantes en la toma de decisiones: pregunta a los estudiantes qué tipos de problemas les gustaría resolver y cómo prefieren trabajar.

La mayor satisfacción como docente no es, a mi parecer, que un alumno repita a la perfección los ejercicios que se hacen en clase, sino sentir que están motivados en el aula, que hay un ambiente idóneo de trabajo y que se encuentran contentos de participar en la asignatura, por lo que todo lo que conlleve alcanzar este marco, es un camino de éxito asegurado.

Referencias

Armendáriz, M. V., Azcárate, C., Deulofue, J. (1993). Didáctica de las Matemáticas y Psicología. *Infancia y Aprendizaje*, 77-99. Aprendizaje

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática. *Educación Matemática, 16*(3), 5-28.

Buckley, S., & Sullivan, P. (2023). Reframing anxiety and uncertainty in the mathematics classroom. *Mathematics Education Research Journal, 35*(Suppl 1), 157–170. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00393-8

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Primera parte). *Enseñanza de las Ciencias, 8*(3), 259-267).

Col, C. (1996). Constructivismo y educación escolar: ni hablamos siempre de lo mismo ni lo hacemos siempre desde la misma perspectiva epistemológica. *Anuario de Psicología, 69*, 153-158.

D'Amore B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matemática*. *Revista de la ASOVEMAT, 17*(1), 87-106.

Del Moral, M. E. , Guzmán, A. P. Fernández, L. C. (2018). Game-Based Learning: Increasing the Logical-Mathematical, Naturalistic, and Linguistic Learning Levels of Primary School Students. *Journal of New Approaches in Educational Research 7*(1), 31-39. DOI: 10.7821/naer.2018.1.248

Del Rincón, T. O. (2005). *Conexiones matemáticas: Motivación del alumnado y competencia matemática*. 218. Graó.

Gil, N., Guerrero, E., Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa. 8*(4), 47-72.

González-Fernández, C.J. (2024). Metodología y Evaluación en Matemáticas. Universidad de Valladolid.

González-Franco, V., González-Lomelí, D., y Maytorena-Noriega, M. A. (2022). Efecto de las fuentes de autoeficacia en matemáticas sobre la autovaloración en matemáticas. *Psicumex, 12* (1), 1-24, e484. https://doi.org/10.36793/psicumex.v12i1.484

Gutiérrez, A. (2021). Desafíos actuales para la Didáctica de las Matemáticas. *Revista Innovaciones Educativas, 23*(34), 198-203. https://doi.org/10.22458/ie.v23i34.3515

Grootenboer, P., Marshman, M. (2016). *Mathematics, Affect and Learning. Middle School Students' Beliefs and Attitudes About Mathematics Education*. Springer. DOI 10.1007/978-981-287-679-9

Liljedahl, P. (2020*). Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*. Corwin Mathematics.

Liljedahl, P. (2022). *Modifying your thinking classrooms for different settings*. Corwin Mathematics.

Martin, A. J., Ginns, P., & Papworth, B. (2017). Motivation and engagement: Same or different? Does it matter? *Learning and Individual Differences, 55*, 150–162. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.03.013

Martínez-Padrón, O. J. (2005). Dominio afectivo en educación matemática. *Paradigma, 14*(2), 7-34.

Martínez-Padrón, O. J. (2021). El afecto en la resolución de problemas de Matemática. *RECIE. Revista Caribeña de Investigación Educativa, 5*(1), 86-100. https://doi.org/10.32541/recie.2021.v5i1.pp86-100

Martinez-Padrón, O. J., Dunixe De Tejada-Lagonell, M., García-González, M. S. (2022). Resiliencia en aprendices de contenidos matemáticos. *Revista Electrónica Educare*, *26*(2). https://doi.org/10.15359/ree.26-2.25

Meneghel, I., Boix Altab, Q., Salanova, M. (2021). Resiliencia y autoeficacia como mecanismos psicológicos que favorecen el éxito académico. *DEDiCA. Revista De Educação E Humanidades*, 18, 153-171. http://dx.doi.org/10.30827/dreh.vi18.18022

Morales, P. y Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria, 13*(1), 145-157.

Nuñez, M.C. y Fontana, M. (2009). Competencia socioemocional en el aula: Características del profesor que favorecen la motivación por el aprendizaje en alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria. *Revista Española de Orientación y Psicopedagogía, 20*(3), 257-269.

Pérez-Tyteca, P., Monje, J., Castro, E. (2013). Afecto y matemáticas. Diseño de una entrevista para acceder a los sentimientos de alumnos adolescentes. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 4, 65-82.

Russo, J., Kalogeropoulos, P., & Roche, A. (2023). Exploring underachieving students' views of, and attitudes towards, mathematics across stage of schooling. *Asian Journal for Mathematics Education, 2*(2), 240–257. https://doi.org/10.1177/27527263231177435

Sagasti-Escalona, M. (2019). La ansiedad matemática. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 2(2), 1-18.

Vaello, J. (2007). *Cómo dar clase a los que no quieren*. Graó.

Fuentes legales

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.

Orden EFP/755/2022, de 31 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación del Bachillerato en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Orden EFP/824/2023, de 19 de julio, por la que se regula la ordenación de la enseñanza de Bachillerato para personas adultas y se establecen las características de la prueba para la obtención del título de Bachiller para personas mayores de veinte años, en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Anexo I: Tareas no curriculares para Aulas de Pensamiento

Introducción a la activación del pensamiento

En este apartado se presentan las tareas y ejercicios no vinculados al currículo de 1º Bachillerato en Matemáticas I de Ciencias Sociales utilizados para la introducción y las primeras sesiones para desarrollar el Aula de Pensamiento. Consistirán en pequeños ejercicios de ingenio que activen el pensamiento crítico y acostumbren a los alumnos a la estrategia pedagógica a usar. Se encontrará, por un lado, esas las tareas cortas que se realizarán al inicio de la sesión y que no tendrán vinculación a priori unas con otras, y una secuencia de ejercicios no curriculares que se desarrollarán en un poco más de tiempo, sin llegar a ocupar la sesión completa de clase.

Actividad 1: lógica proposicional

Tiempo estimado: 10 minutos.

La lógica proposicional se puede explorar a través de silogismos, pero a veces, cuando los problemas son más complejos, se requieren herramientas más sofisticadas para estructurar el razonamiento lógico. En esta práctica, se empleará el método de tablas lógicas de referencias cruzadas para resolver acertijos.

En este ejercicio los alumnos tratarán de averiguar la distinta información a partir de ciertas premisas o proposiciones, las cuales serán necesarias cruzar los datos que contienen para llegar a la solución. Se les pide escribir los nombres de los propietarios de cada coche, así como el color y la antigüedad de cada vehículo, incluso para la plaza vacía.

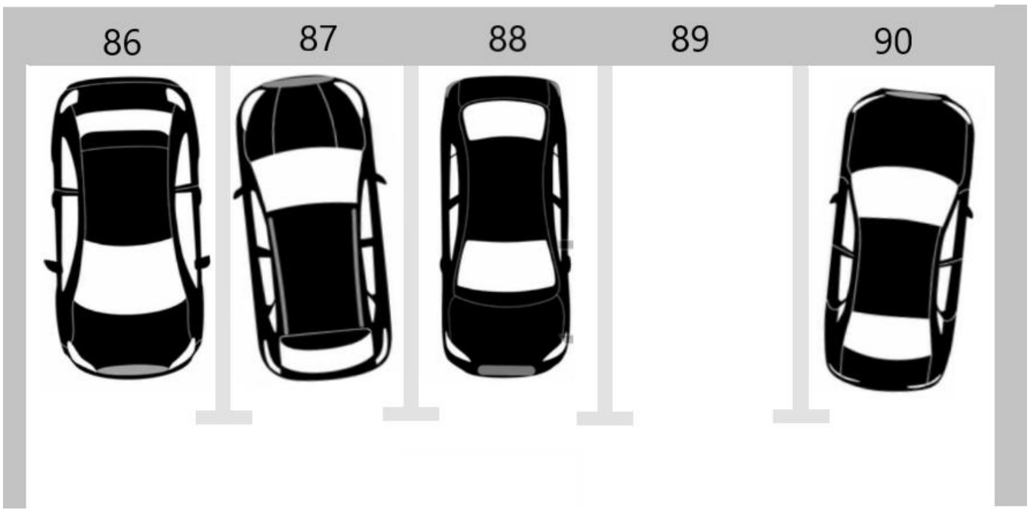


Ilustración 11. Actividad 1 de la activación de pensamiento

1. El coche más antiguo tiene dos años más que el de Juan, que es azul.
2. Carmen aparca su coche con el frontal hacia la pared, como lo hace la propietaria del coche que tiene dos años.
3. El coche de María es tres veces más viejo que el de Carmen.

4. El coche de cuatro años y el verde aparcan en las esquinas, junto a la pared.
5. El coche gris solo tiene cuatro meses y el de Pablo seis años.
6. El coche que tiene un año tienen la plaza vacía a su lado.
7. Celia aparca su coche en sentido contrario que María, que posee el coche blanco.
8. Pablo es propietario de un coche color crema.
9. El coche verde es seis veces más viejo que el gris.

Solución:

PLAZA	PROPIETARIO	COLOR	ANTIGÜEDAD
86	Juan	Azul	4 años
87	Carmen	Gris	4 meses
88	María	Blanco	1 año
89	Pablo	Crema	6 años
90	Celia	Verde	2 años

Tabla 14. Solución para Actividad 1

Actividad 2: razonamiento de cálculo

Tiempo estimado: 10 minutos.

Las pirámides matemáticas, pirámides numéricas o secretas, son un tipo de ejercicio de lógica matemática con las que trabajar la capacidad del cálculo y la concentración. Son retos en forma de pirámide que tienen una secuencia lógica. La relación de los números corresponde con una operación matemática que se repite de forma ascendente o descendente.

El enunciado del ejercicio pide rellenar los espacios vacíos de la pirámide.

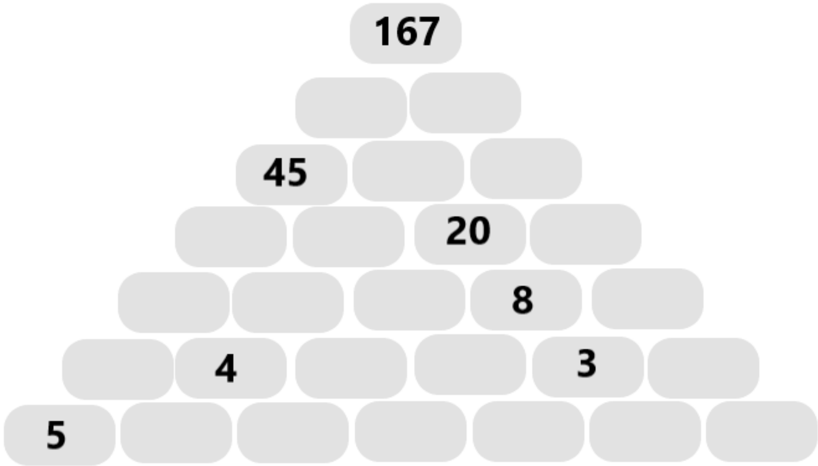


Ilustración 12. Actividad 2 de la activación del pensamiento

Los alumnos, con ella representada en su pizarra blanca vertical, deberán obtener los diferentes valores. Es un ejercicio sencillo, en el cual la mayor dificultad se encuentra en elegir el sitio por dónde empezar. Ante esta situación, siguiendo la práctica número 5 de Liljedahl, evitaremos contestar a esa pregunta que es posible que realicen: “profe, ¿por dónde se empieza?”. Este ejercicio busca precisamente la capacidad de iniciativa y de razonamiento de por dónde se inicia una tarea de este tipo.

Solución:

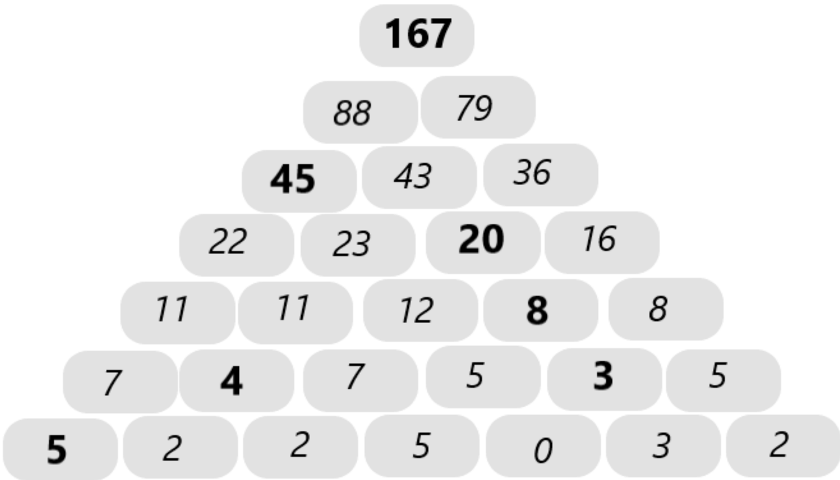


Ilustración 13. Solución para Actividad 2

Actividad 3: problemas de tiempos

Tiempo estimado: 5 minutos.

Este es el fin de semana que os vais de viaje, pero la única indicación que os han dejado para la hora de la salida del tren es la siguiente:

"Si duplicas el tiempo transcurrido desde medianoche hasta las 6:32 y después añades un quinto de una hora y media, obtendrás la hora del tren menos 12 minutos."

Resolución:

El tiempo desde las 00:00h hasta las 6:32h son 6:32h, que duplicado son las 13:04h. Por otro lado, un quinto de una hora y media son 18 minutos, que añadido a lo anterior obtenemos las 13:22h. Finalmente se tiene que sumar los 12 minutos para hallar la hora real del tren, lo que significa que la hora de salida del tren son las 13:34h.

Actividad 4: lógica recreativa

Tiempo estimado: 15 minutos.

Un juego consiste en trasladar los discos desde el primer eje (posición inicial) al tercero. ¿Cuántos movimientos mínimos habrá que realizar para conseguirlo, teniendo en cuanta que un disco grande no puede situarse sobre uno pequeño?

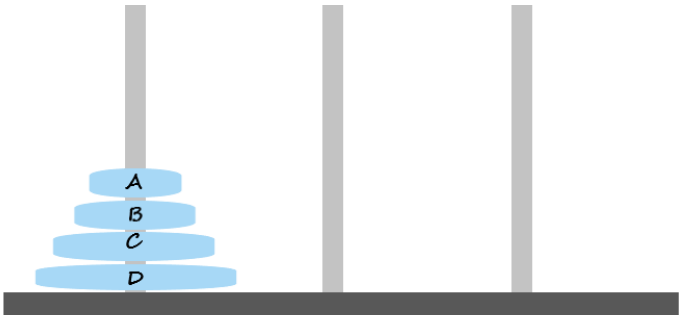


Ilustración 14. Planteamiento de la Actividad 4 de activación de pensamiento

En este ejercicio los alumnos tendrán que desarrollar en la pizarra cada uno de los movimientos, como si se tratase de traslados reales. Como posiblemente lo que empiecen a hacer es dibujar discos y el planteamiento rápidamente se verá emborronado con tachaduras, se les puede ofrecer una ayuda en el comienzo con una tabla:

Movimientos	Hacia 1º eje	Hacia 2º eje	Hacia 3º eje
0 (estado inicial)	A B C D	-	-
1	B C D	A	
2	C D	A	B
3	C D		A B
…	…	…	…

Tabla 15. Planteamiento de la resolución de la Actividad 4

Actividad 5: relación de funciones

Tiempo estimado: 30 minutos.

En matemáticas, las relaciones entre dos o más variables se representan mediante funciones, y sus gráficos son comunes en nuestra vida cotidiana. En esta actividad, aprenderemos a asociar el tiempo de llenado o vaciado de distintos recipientes con su altura.

Planteamiento:

El profesor distribuirá dos láminas: una mostrando diferentes recipientes (todos con la misma altura y volumen, pero con formas diferentes) y otra con varios gráficos (cada gráfico relaciona la altura alcanzada con la cantidad de líquido en un momento dado).

El grupo debe asignar el gráfico correcto a cada recipiente.

En caso de trabajar con más alumnos (entre 3 y 12 estudiantes), los grupos compartirán sus conclusiones y deberán llegar a una solución consensuada, con la ayuda del profesor si es necesario.

Después, cada grupo diseñará su propio recipiente y creará el gráfico correspondiente. Luego, pasarán su gráfico al grupo vecino. En nuestro caso, al ser tres alumnos, podríamos entregar tres pizarras y que cada uno, de forma individual, realizase su diseño.

Los grupos o miembros intentarán dibujar el recipiente que corresponde al gráfico recibido sin ver el dibujo original del recipiente.

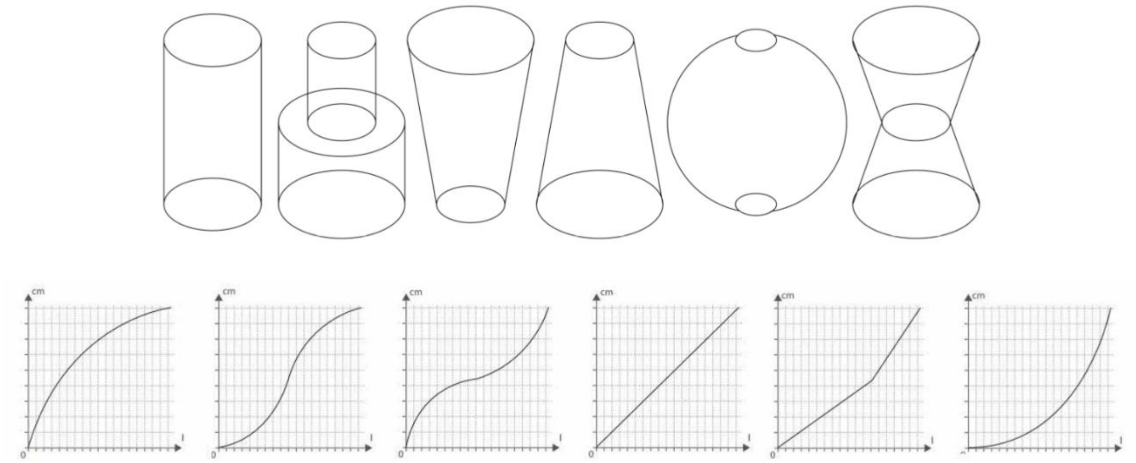


Ilustración 15. Volúmenes de líquido con las funciones a relacionar en la Actividad 5

Actividad 6: deducciones de reglas de divisibilidad e introducción a la aritmética modular

Tiempo estimado: 30 minutos.

Cuando decimos que un número es divisible por otro, simplemente significa que el segundo número es un múltiplo del primero. Sin embargo, no solo podemos considerar si un número es múltiplo de otro, sino también el residuo que queda al dividir un número por otro. Si un número es múltiplo de otro, al dividirlo el residuo es cero. Pero si no son múltiplos, y el divisor es un número natural mayor que 2, hay más opciones posibles. Esto introduce la rama de la aritmética modular o las congruencias.

El propósito de la siguiente práctica no es profundizar en los temas de residuos y divisibilidad, sino desarrollar la lógica y la capacidad de razonamiento de los estudiantes, utilizando este tema como base. Es crucial fomentar en los alumnos el instinto para razonar con sus conocimientos previos.

Planteamiento:

Los estudiantes se organizan en parejas en caso de ser pares, o, en el grupo que estamos trabajando en este contexto concreto que son tres alumnos, uno será el observador externo.

- Cada pareja dibuja en la pizarra vertical 10 figuras (por lo general se suele representar con palos verticales).

- Los estudiantes juegan por turnos, decidiendo quién empieza.

- En cada turno, los estudiantes eligen si tomar uno o dos objetos de la mesa, el observador se encargará de borrar de la pizarra lo seleccionado.

- Pierde el jugador que tome el último objeto.

Los estudiantes repiten el juego hasta encontrar la estrategia ganadora. La clave para ganar es dejar al oponente con un solo objeto al final, forzándolo a perder. Por lo tanto, el jugador que tome el noveno objeto gana. Esto se puede asegurar si el segundo jugador siempre hace que la suma de los objetos tomados en ambos turnos sea tres (si el primer jugador toma uno, el segundo toma dos, y viceversa). Como nueve es múltiplo de tres, el segundo jugador puede asegurarse de tomar el noveno objeto, haciendo que el primer jugador tome el décimo y pierda.

Si resulta una tarea sencilla, según la proposición 9 que describe *Biulding Thinking Classrooms* (Liljedhal, 2021), podemos ofrecer a los chicos una extensión o ampliación para mantener el *flow* del desarrollo del aprendizaje y evitar caer en el aburrimiento. Se les puede ofrecer una variante del juego con 16 objetos, donde en cada turno se pueden tomar de 1 a 4 objetos, con el razonamiento es similar. El jugador que tome el decimoquinto objeto gana, ya que 15 es múltiplo de cinco. El segundo jugador puede asegurarse de tomar el decimoquinto objeto ajustando sus tomas para que en cada turno la suma de los objetos tomados por ambos jugadores sea cinco (si el primer jugador toma uno, el segundo toma cuatro; si el primero toma dos, el segundo toma tres; y así sucesivamente).

Normas:

En cada partida, los estudiantes deben alternar el orden de juego: el alumno que comenzó primero en la partida anterior ahora jugará en segundo lugar. En nuestro caso, que son tres estudiantes, en cada partida uno será el moderador e irán intercambiando este perfil.

Se jugarán tantas partidas como sean necesarias hasta que los estudiantes sientan que han descubierto la estrategia ganadora.

Cuando el grupo crea que ha encontrado la estrategia ganadora, podrá desafiar al profesor y demostrar su habilidad ganando varias partidas.

Si resolviesen el problema rápidamente (algo inusual), el profesor puede proponer una variante con 16 elementos en la mesa, permitiendo tomar entre 1 y 4 elementos por turno.

Cuestiones:

Al finalizar la práctica, los alumnos deberán explicar al profesor las siguientes preguntas:

a) Explica la estrategia ganadora que garantiza una victoria en este juego.

b) ¿Cuál sería la estrategia ganadora si en lugar de 10 hubiera 16 elementos en la mesa y se pudieran tomar entre 1 y 4 objetos por turno?

Conclusiones:

Para asegurar la victoria utilizando la estrategia ganadora, se debe jugar como el segundo jugador.

Las reglas del juego permiten que el segundo jugador tome todos los elementos que son múltiplos de 3 (el tercero, sexto y noveno). De este modo, el primer jugador tomará los elementos cuyo residuo al dividir por 3 sea 1 (el primero, cuarto, séptimo y décimo).

Se pueden crear juegos similares donde los jugadores puedan tomar entre 1 y n-1 elementos por turno, y el total de elementos sea $n \cdot m + 1$ (donde m es cualquier número natural).

Anexo II: Tareas curriculares para Aulas de Pensamiento

Tareas curriculares mediante resolución de problemas

Utilizaremos la resolución de problemas como metodología de aprendizaje de las matemáticas. Para ello se propondrán una serie de problemas del contenido específico del currículo a tratar, y aplicaremos el método para ir resolviéndolo. Existen varios autores que han publicado sus métodos de resolución de problemas: G. Pólya, A. Schoenfeld, Mason-Burton-Stacy, M. de Guzmán o Santos, entre los que podemos destacar. Todos ellos contemplan en sus metodologías el punto de la planificación y utilización de diversas estrategias de resolución de problemas y su posterior comprobación.

Problema 1:

Pablo y María están vaciando su piscina para cambiar el agua y volverla a llenar de cara al verano, y ésta se vacía a través del desagüe según la función:

$$v(t) = \frac{\sqrt{t+3}-2}{t-1}$$

donde t es el tiempo de vaciado en horas y $v(t)$ es el volumen de agua expresado en L. Averigua hacia dónde se acerca el volumen de la piscina cuando el tiempo:

a) Se aproxima a 20 minutos.
b) Se aproxima a 1 h.
c) Se aproxima a 1 h si la función fuera de la siguiente manera: $v(t) = \frac{\sqrt{t+3}-1}{t-1}$

Problema 2:

Se estima que la población de conejos en una finca evoluciona según la función:

$$f(x) = 100\,\frac{6t^2+4}{3+t^2}$$

donde f(x) representa el número de individuos y t el tiempo transcurrido en meses. El veterinario de la finca ha observado que, en los primeros nueve meses, la población ha aumentado. Investiga si el crecimiento será indefinido, si tenderá dicha población de conejos a estabilizarse o si tenderá a disminuir.

Problema 3:

El servicio de cirugía de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las largas listas de espera. Se prevé que, a partir del 1 de septiembre de 2024, la siguiente función $P(x)$ indicará en cada momento t, en meses, el porcentaje de enfermos que podrá ser intervenido sin necesidad de entrar en lista de espera.

$$P(x) = \begin{cases} t^2 - 7t + 35\,, & si\; 0 \le t \le 10 \\ \dfrac{30t - 100}{0{,}4t}\,, & si\; t > 10 \end{cases}$$

a) ¿Cuál será el porcentaje cuando termine el año?
b) Pasado un tiempo largo, ¿cuál será ese porcentaje?

Problema 4:

El tamaño de una población del lobo ibérico en una determinada región ha variado a lo largo de los últimos años. Los años vienen dados por la variable t y el tamaño de la población N(t), por la expresión:

$$N(t) = \frac{100}{1 + 3e^{-0.1t}}$$

a) Calcula la población de lobos que había cuando se inició en 2010 dicho estudio.

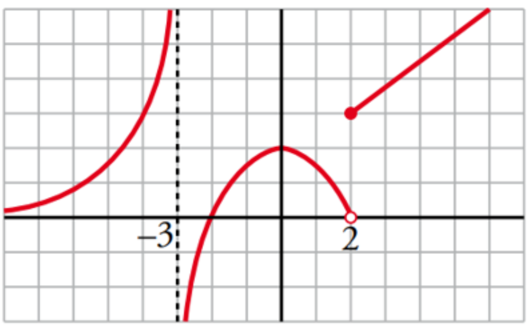
b) ¿Qué población de lobos habrá en este año 2024?

c) ¿Cuánto tiempo habrá pasado para que la población sea de 200 individuos?

d) Si se sigue con esta misma tendencia, ¿cuál sería la población en el año 2030?

e) ¿Qué población se alcanzará a largo plazo?

Tareas curriculares para consolidación de conocimiento



a) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$

c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

d) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

f) $\lim_{x \to -2} f(x)$

g) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

h) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

i) $f(2)$

j) $f(-3)$

Ilustración 16. Gráfica de la actividad de consolidación de conocimiento

Hallar los siguientes límites en la función:

$$f(x) = \begin{cases} 7\,, & si\ x \neq 2 \\ \dfrac{2-x}{x^2-4}\,, & si\ x = 2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ $\lim_{x\to -2} f(x)$ $\lim_{x\to 0} f(x)$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ $\lim_{x\to \infty} f(x)$

Hallar los siguientes límites en la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{x+1}\,, & si\ x < -1 \\ 5 - x^2\,, & si\ x > -1 \end{cases}$$

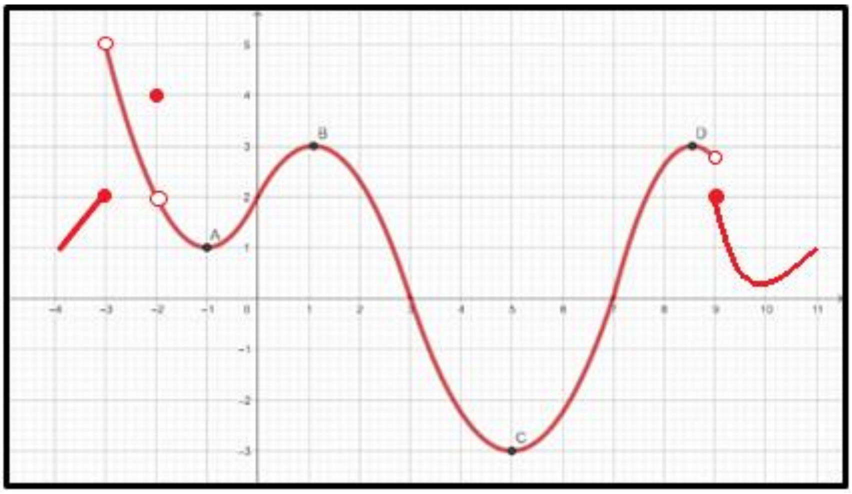
$\lim_{x\to -4} f(x)$ $\lim_{x\to -1} f(x)$ $\lim_{x\to 2} f(x)$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ $\lim_{x\to \infty} f(x)$

Tareas de repaso con gamificación

Sudokunciones

A		B		5		C		6
		D	2		E	8		F
		7	9		6	5		
		G	4		7		H	
2					I		8	5
	1			J	5	K	L	3
	9		M					
	N		3	O				P
Q	4	R		S				

Tabla 16. Actividad de Sudokunciones



Valor	Premisa	Res.
A	El máximo valor del recorrido de la función restado 2	
B	La x>0 que corresponde a f(x)=3 pero que no es x=1	
C	La imagen de $x = -2$ restado 2	
D	La abscisa del mínimo absoluto de la función	
E	El punto de corte con el eje OX más pequeño	
F	El punto de corte mayor con el eje OX	
G	El límite de la función cuando x tiende a -2	
H	El punto de corte con el eje OY	
I	El máximo valor del dominio de la función	
J	La imagen para x= -2	
K	Para ese valor de x, la función pasa de negativa a positiva	
L	El valor más pequeño de la variable independiente que tiene una imagen de -2	
M	Para ese valor de la variable independiente x, f(x) = -3	
N	El límite lateral por la derecha cuando x tiende a -3	
O	3 más que el mayor valor alcanzado por la función	
P	El número de intervalos donde la función es decreciente	
Q	El límite lateral cuando x tiende a -3 por la izquierda	
R	El número de intervalos donde la función es creciente	
S	La variable independiente no puede tomar valores mayores que éste.	

Límites en la montaña

Actividad realizada a través de la aplicación Genially.

https://view.genially.com/65fb0cbadc1d170015420546/interactive-content-ultimoescape-limites-en-la-montana