Universidad de Valladolid

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas

Especialidad en Matemáticas

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA (ESO) DESDE UN ENFOQUE SOCIOAFECTIVO

Autora: María Martínez Rodríguez

Tutor: José María Marbán Prieto

Año: 2024

A mi familia, por la vida y la educación que me han dado.

Sin vuestro apoyo incondicional no estaría aquí.

ÍNDICE

1. Introducción 5
2. Marco conceptual 7
   2.1. Competencia matemática 7
      2.1.1. Razonamiento matemático 10
      2.1.2. Competencias y razonamiento matemático en la LOMLOE 14
   2.2. Diversidad e inclusión en la educación 16
   2.3. Dominio afectivo 20
   2.4. Algunas metodologías 29
      2.4.1. Thinking Classrooms 29
      2.4.2. Lección Magistral 41
      2.4.3. Otras metodologías 43
      2.4.4. El uso de distintas metodologías y la LOMLOE 45
3. Marco metodológico 46
   3.1. Investigación-acción 47
   3.2. Cuestionario PISA 48
4. Marco de intervención 51
   4.1. Contexto 51
      4.1.1. El entorno 51
      4.1.2. El centro 53
      4.1.3. La clase 55
   4.2. Diseño de la propuesta de intervención 56
      4.2.1. Contenidos y competencias 56
      4.2.2. Materiales 59
      4.2.3. Prácticas 63
      4.2.4. Evaluación 69
   4.3. Resultados de la recogida de datos 69
   4.4. Intervención 74
      4.4.1. Primera parte de la intervención: Lección magistral 75
      4.4.2. Segunda parte de la intervención: *Thinking Classrooms* 80
      4.4.3. Otros comentarios sobre la intervención 86
   4.5. Discusión 89

5. Conclusiones y propuestas de mejora 93
6. Referencias 96
7. Anexos 103
7.1. Fichas 103
7.2. Examen 108
7.3. Kahoot 109

1. Introducción

Conseguir que el alumnado desarrolle destrezas asociadas al razonamiento matemático es uno de los principales objetivos -si no el principal- del profesorado de matemáticas de educación secundaria. Sin embargo, conseguirlo no es tan sencillo y muchas de las prácticas más extendidas en las aulas no se sabe si necesariamente contribuyen a este fin. Con el propósito de determinar de manera contrastada prácticas que dieran los mejores resultados en términos de favorecer el razonamiento matemático del alumnado, Peter Liljedahl, profesor universitario de educación matemática en la universidad Simon Fraser de Canadá, dirigió una investigación durante 15 años en la que participaron centenares de clases de secundaria y cuyos resultados se plasman en Liljedahl (2020). Los resultados, en términos de pautas y estrategias docentes, recogidos en el mencionado trabajo de Liljedahl, así como el deseo de construir clases de matemáticas en las que el alumnado, por encima de todo, piense -*Thinking classrooms* siguiendo la terminología de Liljedahl- son, precisamente, el punto de partida del presente trabajo.

Por otra parte, el razonamiento matemático no se puede explicar sin la disposición del alumnado a "hacer matemáticas", disposición que está inevitablemente vinculada a la dimensión afectiva del aprendizaje y, en particular, a sus actitudes, sus creencias y sus emociones en relación con la materia. Es por ello por lo que el estudio del dominio afectivo en matemáticas ha adquirido cada vez mayor relevancia en la educación matemática y en diversos estudios como los que se plasman en los diferentes informes PISA (OECD, 2013; OECD, 2023a).

En este sentido, este Trabajo de Fin de Máster (en adelante TFM) recoge las reflexiones a las que ha dado lugar una intervención realizada durante el periodo de prácticas en una clase de matemáticas de 3º de la ESO en el Instituto de Educación Secundaria Galileo, ubicado en Valladolid capital. Más específicamente, en esa intervención se diferencian dos grandes enfoques y momentos en función de la metodología empleada en cada una de ellas. La primera, más cercana a una lección tradicional magistral y, la segunda, diseñada poniendo énfasis en conseguir que el alumnado formase parte activa de su aprendizaje y, sobre todo, razonase en clase de matemáticas, para lo que se recurrió al enfoque propio de las *Thinking classrooms*. El motivo de esta diferenciación obedece al deseo de poder contrastar los efectos observados con ambas metodologías en un caso real de cara a poder extraer conclusiones sobre su eficacia para favorecer el aprendizaje y el razonamiento del alumnado, así como sobre su repercusión o impacto en la dimensión afectiva en dicho proceso.

Por otra parte, mi principal motivación personal en este trabajo ha estado ligada a la mejora de mi futura práctica docente, habiendo sido esta experiencia una buena oportunidad para reflexionar sobre ello. En particular, esta inquietud nace de la genuina duda de si algunas metodologías innovadoras sobre las que a veces puede parecer que solo se teoriza, realmente pueden ser una alternativa mejor a la lección magistral, la metodología con la que he aprendido matemáticas y con más recorrido, a mi juicio, a lo largo de la historia de la enseñanza de las matemáticas.

Además de apoyarse en una intervención realizada en las prácticas del Máster, este trabajo se nutre también de otras asignaturas de este, tanto del Módulo Genérico, como del Módulo Específico de Matemáticas. Así, en relación con el primero, la intervención no habría tenido sentido sin tener en consideración el contexto educativo, el entorno socioeconómico del mismo, el funcionamiento del centro y la ley educativa en vigor -la LOMLOE-, todos ellos elementos que se han trabajado en la asignatura *Procesos y contextos educativos y* en *Sociedad, educación y familia.* Igualmente, tampoco podría entenderse este trabajo sin conocer de manera formal los rasgos que caracterizan el desarrollo cognitivo de los adolescentes, vistos en *Aprendizaje y desarrollo de la personalidad,* y que han permitido comprender mejor la clase y a los individuos que la conforman. En cuanto al Módulo Específico, por tratarse de una intervención en clase de matemáticas, se ha prestado especial atención a la didáctica de las matemáticas y a la innovación en el aula (*Didáctica de la Matemática* e *Innovación docente en matemáticas*) así como a la implementación de diversas metodologías (*Metodología y evaluación en matemáticas*). De modo similar, aun careciendo del planteamiento y rigor requeridos en una investigación educativa, se han tenido en cuenta algunos de los recursos vistos en *Iniciación a la investigación en matemáticas*, como, por ejemplo, el enfoque propio de la investigación-acción para la mejora de la práctica docente, la necesidad de un marco conceptual, el uso de algunos instrumentos validados para la toma de toma de datos y la utilidad de los grupos de control, pues aunque no se haya utilizado propiamente un grupo de control, la comparativa realizada entre lo tradicional y lo innovador sirve para el mismo propósito: medir los efectos de una práctica educativa frente a otra.

De entre las competencias generales del Máster y de las específicas de cada asignatura, que pueden encontrarse en el programa del propio Máster, merece la pena destacar tres de ellas: E.P.4, E.E.15. y G.4., por ser las que más se han desarrollado durante la elaboración de este TFM y que pueden sintetizarse de forma conjunta así: *conocer, desarrollar y aplicar tanto metodologías didácticas en matemáticas adaptadas a la diversidad de los estudiantes, como metodologías y técnicas básicas de investigación y evaluación educativas, y participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica.*

2. Marco conceptual

En este capítulo se desarrollarán los aspectos teóricos sobre los que se fundamenta la intervención mencionada en el apartado anterior, aspectos que justifican el interés del tema planteado.

2.1. Competencia matemática

Una de las acepciones de la palabra competencia según la Real Academia Española es: *pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado*. Esta es la acepción de la RAE más cercana a la noción de competencia que se tratará en este apartado, pero no abarca todo el significado de este término que en las últimas décadas ha ido cobrando más relevancia tanto en el ámbito social como en el profesional y en el educativo. Para conocer toda la extensión de este y poder definirlo sin ambigüedad es preciso hablar de su evolución.

Uno de los primeros antecedentes de las competencias en el ámbito educativo se encuentra en el Informe Delors encargado por la UNESCO (Delors, 1996). Este informe identificaba cuatro pilares básicos de una educación permanente que permitiera el desarrollo completo de las personas ante los retos del Siglo XXI y que consistían en "aprender a conocer", "aprender a hacer", "aprender a ser" y "aprender a convivir".

A partir de entonces comienza a hablarse desde la Unión Europea (Consejo Europeo, 2000; Comisión Europea, 2004) primeramente del desarrollo de ciertas capacidades y, posteriormente, de competencias, como condición indispensable para lograr que los individuos alcancen un pleno desarrollo personal, social y profesional ajustado a las demandas de un mundo globalizado y cambiante. No obstante, no se precisa en qué consisten exactamente las mismas.

De manera prácticamente paralela, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), entre 1997 y 1999 comienza a desarrollar el programa de evaluación internacional a estudiantes conocido como PISA, que se aplica por primera vez en el año 2000, y que también plantea que el éxito en la vida de un estudiante depende de la adquisición de un rango amplio de competencias. En este caso, se realizan varios proyectos destinados a desarrollar un marco conceptual que defina e identifique dichas competencias. En uno de esos proyectos, el conocido como *Definición y Selección de Competencias -DeSeCo-* (OECD, 2005) se precisa que una competencia es "la capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas

diversas de forma adecuada" y que "supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz". Esta es la definición de competencia que se adopta en este trabajo.

A partir de dicha acepción, se puede afirmar que las competencias abarcan tres grandes dimensiones: la cognitiva, la instrumental y la actitudinal. La dimensión cognitiva comprende el conocimiento de conceptos, principios, teorías, datos, hechos y otras informaciones que las personas deben asimilar e integrar (se identifica con el "saber"). La dimensión instrumental supone la habilidad para aplicar esos conocimientos en tareas concretas que requieren ser entrenadas y desarrolladas (se identifica con el "hacer"). Finalmente, la dimensión actitudinal incluye valores, emociones, hábitos y principios, y supone la mentalidad y disposición positiva para actuar o reaccionar en variedad de contextos (se identifica con el "querer"). (Decreto 39/2022, 2022).

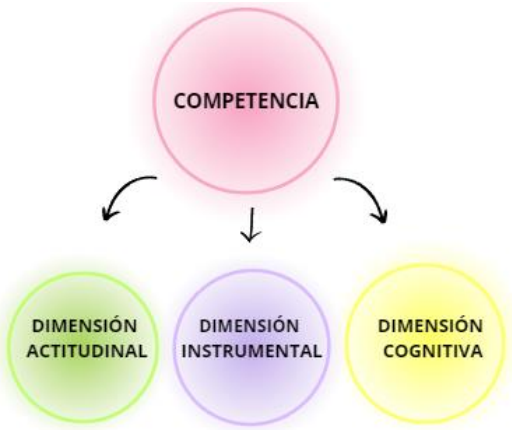


Figura 1. Diagrama de las dimensiones de una competencia. Fuente: Elaboración propia.

A las competencias que todas personas precisan para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo, se las llama competencias clave; y la Recomendación (UE) 2006/962/EC del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje, y posteriormente la Recomendación (UE) 2018/C 189/01 de la Comisión, de 22 de mayo, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente (en adelante Recomendación (UE) 2018/C 189/01) instan a los estados miembros a que sus ciudadanos las desarrollen.

A raíz de esto, diversas instituciones de ámbito nacional e internacional comienzan a definir, acorde a sus contextos, una serie de competencias clave o necesarias para el desarrollo integral de las personas y su completa integración en el mundo de hoy. Salvo cambio de nombre, una de

ellas siempre es la competencia matemática, que es la que resulta de mayor relevancia para el objeto de este trabajo. Puesto que durante el resto del trabajo se ha recurrido en varias ocasiones al Informe PISA, se ha adoptado su definición de competencia matemática, -referida actualmente como alfabetización matemática (Math Litteracy) -, que al igual que ocurría con la acepción de competencia, ha ido evolucionando a lo largo del tiempo.

El Informe PISA de 2003, que precisamente fue el primero cuya área principal fueron las matemáticas, definía la competencia o alfabetización matemática de la siguiente manera:

> La capacidad de identificar y comprender el rol que las matemáticas juegan en el mundo, hacer juicios bien fundamentados y usar y comprometerse con las matemáticas de formas que se logren satisfacer las necesidades de la vida propia como ciudadano constructivo, preocupado y reflexivo. (OECD, 2004).

En 2012, el siguiente año en que las matemáticas fueron área principal del informe PISA la definición utilizada por el estudio fue la siguiente:

> La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan. (OECD, 2013).

Ya recientemente, según el marco conceptual para PISA 2022, publicado en 2018 la alfabetización matemática se define como:

> La capacidad de un individuo de razonar matemáticamente, de utilizar conceptos matemáticos procedimientos y herramientas para predecir fenómenos y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas en una amplia variedad de contextos de la vida real. Esto incluye conceptos, procedimientos, para resolver problemas en una variedad de contextos del siglo XXI. (OECD, 2018).

Comparando las definiciones de competencia o alfabetización matemática de los marcos de PISA 2003, 2012 y 2022, se observa que aunque ha habido ideas que se han mantenido constantes en el tiempo, como la capacidad de comprender y resolver problemas del mundo real por medio de las matemáticas, ha ido creciendo la importancia que se da al razonamiento matemático, hasta el punto de que en la definición de 2022 se incluye explícitamente el razonamiento matemático como el primero de sus pilares. Es por ello por lo que, si se quiere que el alumnado desarrolle la competencia matemática, es imprescindible trabajar el razonamiento matemático, lo que justifica

el interés del tema de este trabajo. Y para poder estudiarlo y medirlo, nuevamente es necesario fijar el marco conceptual que se utilizará.

2.1.1. Razonamiento matemático

De manera similar a lo que ocurre con el término "competencia", la mayoría de las personas tienen una idea intuitiva y general sobre lo que es el razonamiento matemático, pero no son capaces de precisar exactamente en qué consiste. Esto ha generado incluso posiciones discrepantes dentro de la educación matemática, como, por ejemplo, entre los que consideran el razonamiento como un producto y quienes lo entienden como una actividad.

Puesto que uno de los objetivos del presente trabajo es estudiar el impacto del uso de diversas metodologías en el razonamiento matemático en el aula, es necesario precisar la noción de razonamiento matemático que se adoptará en adelante.

Se define el razonamiento matemático como "un proceso de comunicación con otros o con uno mismo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de otros enunciados matemáticos". (Jeannotte y Kieran, 2017).

Es preciso hacer ciertos comentarios al respecto de esta definición.

Primeramente, esta definición se enmarca dentro de una teoría sobre el aprendizaje que, en inglés, se conoce *commognition,* proveniente de los vocablos *communication* y *cognitive,* término acuñado por la investigadora en Didáctica de la Matemáticas Anna Sfard (Sfard, 2008, como se citó en Jeannotte y Kieran, 2017) y que en este trabajo se ha traducido como teoría comunicativo-cognitiva. Esta plantea que pensar es una forma de comunicación interna, más que otra operación distinta. Por ello, para un investigador de esta corriente, las matemáticas son un discurso, un tipo particular de comunicación.

En segundo lugar, se observa que esta definición de razonamiento matemático tiene una naturaleza inferencial. Nótese que inferir significa concluir una proposición, a la que se llama conclusión, a partir de unas premisas. Según su estructura, y siguiendo de nuevo a Jeannotte y Kieran (2017), un razonamiento puede ser de tres tipos:

- Deductivo: es un tipo de argumento en el que una premisa general conduce a una conclusión específica, que es siempre cierta si la premisa de partida lo es.

- Inductivo: es aquel en el que a partir de unas observaciones específicas se extrae una conclusión general, que puede ser o no cierta.

- Abductivo: es un tipo de razonamiento en el cual, a partir de observaciones incompletas, se formula la mejor predicción posible de su causa, la cual puede ser cierta o no. A diferencia del razonamiento inductivo, en el razonamiento abductivo no se busca generalizar, sino identificar una causa plausible que justifique las observaciones realizadas (el efecto).

La falta de certeza de los argumentos inductivos y abductivos hace que algunos autores sostengan que el deductivo es el único razonamiento propiamente matemático. No obstante, en el presente trabajo se ha decidido incluir los tres tipos pues hay procesos –de los que se hablará más adelante- ampliamente admitidos como vinculados al razonamiento matemático que tienen la segunda o la tercera estructura.

Y por último, precisamente por este enfoque comunicativo-cognitivo, esta definición logra superar la dicotomía del razonamiento matemático considerado como producto o como actividad. Esto se debe a que un acto comunicativo involucra ambos aspectos, los cuales se reflejan en el proceso y la estructura del razonamiento matemático.

Siguiendo las mismas fuentes que hasta ahora, se diferencian nueve procesos asociados al razonamiento matemático, ocho de los cuales pueden clasificarse en dos categorías:

- Procesos relacionados con la búsqueda de semejanzas o diferencias.
- Procesos relacionados con la validación.

El noveno, la ejemplificación, es un proceso que supone un apoyo para las otras dos categorías.

<u>Procesos relacionados con la búsqueda de semejanzas o diferencias</u>

1. Generalización: se trata de un proceso que infiere narrativas o relaciones sobre un conjunto de objetos matemáticos a partir de un subconjunto de este conjunto.

   Desde una perspectiva comunicativo-cognitiva, se puede vincular la generalización al razonamiento matemático porque el proceso está directamente asociado con la inferencia, el discurso y el pensamiento inductivo.

2. Conjetura: se trata de un proceso que mediante la búsqueda de similitudes y diferencias, infiere una narrativa sobre alguna regularidad a la que se le atribuye ser probable o verosímil y que tiene potencial para la teorización matemática.

Desde una perspectiva comunicativo-cognitiva, la conjetura conduce a una extensión del discurso mediante la construcción de narrativas probables, basadas en la búsqueda de similitudes y diferencias. Las conjeturas son, junto a la generalización, unos de los casos más claros de razonamiento no deductivo (inductivo o abductivo) en matemáticas

3. Identificación de patrones: se trata de un proceso que, mediante la búsqueda de similitudes y diferencias, infiere una narrativa sobre una relación recursiva entre objetos matemáticos o relaciones.

   Este proceso, desde el punto de vista comunicativo-cognitivo, se diferencia de la conjetura y la generalización en que no busca, necesariamente, extender los patrones identificados a un conjunto mayor.

4. Comparación: es un proceso de razonamiento matemático que infiere, mediante la búsqueda de similitudes y diferencias, una narrativa sobre objetos matemáticos o relaciones.

   El proceso de comparar puede ocurrir a la vez que otros procesos: generalizar, identificar un patrón, validar... Por ejemplo, identificar un patrón requiere comparar casos o ejemplos para resaltar el patrón. Sin embargo, identificar un patrón va más allá de comparar, porque comparar solo infiere una narrativa sobre similitudes y diferencias.

5. Clasificación: se trata de un proceso que infiere, mediante la búsqueda de similitudes y diferencias entre objetos matemáticos, una narrativa acerca de una clase de objetos basada en propiedades y definiciones matemáticas.

   Agrupar o separar diferentes objetos en función de sus propiedades, es un proceso que permite estructurar discursos. Clasificar puede asociarse con comparar, conjeturar y generalizar.

<u>Procesos relacionados con validar</u>

6. Validación: se trata de un proceso que tiene como objetivo cambiar el valor epistémico (es decir, la probabilidad o la verdad) de una narrativa matemática.

   A diferencia de la conjetura, que infiere una narrativa probable, los procesos de validación buscan cambiar el valor epistémico de una narrativa de una manera u otra. Este cambio

puede ser de probable a verdadero, de probable a falso, o incluso de probable a más probable.

7. Justificación: se trata de un proceso que mediante la búsqueda de datos, garantías y otros apoyos, permite modificar el valor epistémico de una narrativa.

   El cambio del valor epistémico, como se mencionó anteriormente, no es necesariamente de probable a verdadero.

8. Prueba: se trata de un proceso a través del cual, mediante la búsqueda de datos, apoyos y justificaciones, se modifica el valor epistémico de una narrativa de probable a verdadero. Este proceso se caracteriza por:
   i) Ser deductivo.
   ii) Apoyarse en resultados aceptados por la comunidad matemática.

   Dependiendo de si los resultados o narrativas en las que se apoya están disponibles sin mayores justificaciones o si están rigurosamente sistematizados en una teoría matemática construida con axiomas y teoremas, se pueden clasificar en pruebas informales y pruebas formales (también conocidas como demostraciones).

   Las pruebas se diferencian de la justificación en su potencial para la teorización.

El noveno proceso, la ejemplificación, como ase adelantó anteriormente, no pertenece estrictamente a ninguna de las dos categorías anteriores:

9. La ejemplificación: se trata de un apoyo para otros procesos de razonamiento matemático. Ejemplificar permite inferir datos sobre un problema que pueden ser utilizados en la búsqueda de similitudes o diferencias en patrones y relaciones, pero también dentro de los procesos de validación.

Figura 2. Diagrama de los procesos del razonamiento matemático. Fuente: Elaboración propia.

2.1.2. Competencias y razonamiento matemático en la LOMLOE

La LOMLOE (Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la ley orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de educación) es la ley educativa vigente en España. Esta ley fue aprobada en noviembre de 2020 y entró en vigor en enero de 2021, reemplazando a la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE). Aunque su predecesora ya contemplaba el concepto de competencias, uno de los aspectos más destacados de la LOMLOE es su enfoque competencial en todo el currículum, entendiendo competencia no solo como una adquisición aprendizajes sino como la capacidad de aplicación de estos para resolver situaciones y problemas de la vida cotidiana.

Siguiendo las recomendaciones propuestas por la Unión Europea previamente mencionadas (Recomendación (UE) 2018/C 189/01), la ley plantea un Perfil de Salida que se espera que todas las personas, tras pasar por el sistema educativo, alcancen. Dicho Perfil de Salida se encuentra identificado por ocho competencias clave para garantizar el desarrollo integral de las personas:

1. **Competencia en comunicación lingüística (CCL)**: es la habilidad de identificar, comprender, expresar, crear e interpretar conceptos, pensamientos, sentimientos, hechos y opiniones de forma oral o escrita, que permite la interacción eficaz en distintos ámbitos y situaciones.
2. **Competencia plurilingüe (CP)**: es la habilidad de utilizar distintas lenguas de forma adecuada y efectiva para el aprendizaje y la comunicación, compartiendo las principales

capacidades de la competencia en comunicación lingüística. Además, esta competencia supone reconocer y respetar los perfiles lingüísticos individuales

3. **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (STEM)**: integra la comprensión del mundo, junto a los cambios causados por la actividad humana, utilizando el pensamiento y la representación matemática, los métodos científicos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno a partir de la responsabilidad de cada individuo como ciudadano.
4. **Competencia digital (CD):** es aquella que implica el uso creativo, seguro, crítico, saludable, sostenible y responsable de las tecnologías digitales para el aprendizaje, el trabajo y para la participación en la sociedad.
5. **Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA)**: se refiere a la habilidad de reflexionar sobre uno mismo, gestionar el tiempo y la información, colaborar constructivamente con otros, mantener la resiliencia y gestionar el propio aprendizaje de manera autónoma.
6. **Competencia ciudadana (CC)**: es la habilidad de actuar como ciudadanos responsables y participar de manera plena y constructiva en la vida social y cívica.
7. **Competencia emprendedora (CE)**: es la habilidad para convertir ideas en acciones y desarrollar proyectos, aprovechando las oportunidades de diferentes contextos.
8. **Competencia en conciencia y expresión cultural (CCEC)**: implica comprender y respetar las diversas formas en que las ideas, emociones y significados se expresan de manera creativa y se comunican en diferentes culturas.

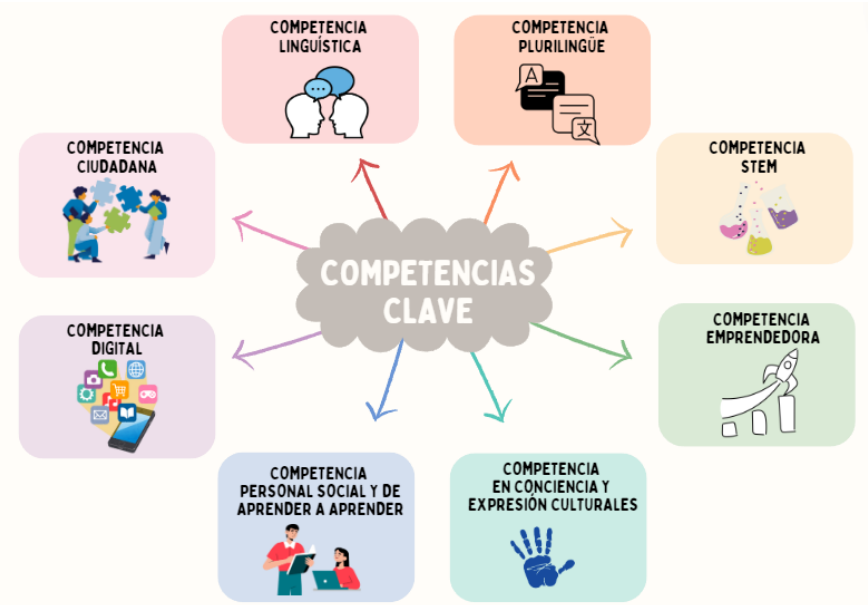


Figura 3. Diagrama de las competencias clave según la LOMLOE. Fuente: Elaboración propia.

La ley concreta dentro de la competencia STEM la competencia matemática, (así como la competencia en ingeniería y la competencia en ciencia) que define de la siguiente manera:

> La competencia matemática es la habilidad de desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos, junto a sus herramientas de pensamiento y representación, al objeto de describir, interpretar y predecir distintos fenómenos que permitan resolver problemas en situaciones cotidianas. (Decreto 39/2022, 2022).

Así, según la definición propuesta en la actual ley educativa, el razonamiento matemático es indispensable para el desarrollo de la competencia matemática, de la competencia clave STEM y, en consecuencia, para alcanzar el Perfil de Salida propuesto.

En cada materia, el nivel de desarrollo del Perfil de Salida (especificado con sus descriptores operativos), se concreta en las competencias específicas. Y aunque la propia ley no defina el razonamiento matemático, dichas competencias específicas sí reflejan la importancia de razonamientos tanto inductivos como deductivos (competencias específicas 3 y 1 de Matemáticas y descriptor operativo STEM 1), y de los procesos de validación, conjetura, prueba, justificación, identificación de patrones, generalización, clasificación, comparación y ejemplificación (principalmente en las competencias específicas 1, 2 y 3 de matemáticas) que caracterizan la noción de razonamiento planteada en este trabajo.

2.2. Diversidad e inclusión en la educación

La Convención sobre los Derechos del Niño es un tratado adoptado por la Organización de las Naciones Unidades en 1989, que recoge un elenco de 41 derechos humanos civiles políticos, económicos, sociales y culturales, que deben ser respetados y protegidos para todos los niños (persona menor de 18 años) del mundo. Este tratado representa el instrumento de derechos humanos más ampliamente reconocido a nivel global, habiendo sido ratificado por todos los países del mundo excepto dos. Sus artículos 28 y 29 se refieren específicamente a la educación y, sintéticamente, dicen lo siguiente:

> Todo niño tiene derecho a la educación. El estado garantizará una educación primaria obligatoria, y gratuita para todos y fomentará el desarrollo de diferentes formas de educación secundaria, haciéndolas accesibles a todos sobre la base de la capacidad, por cuantos medios sean apropiados. Así mismo, el estado se responsabilizará de que la educación esté orientada a desarrollar la personalidad, las aptitudes y la capacidad mental

> y física del niño hasta el máximo de sus posibilidades, preparándole para asumir una vida responsable en una sociedad libre, con espíritu de comprensión, paz, tolerancia, igualdad de los sexos y amistad entre todos los pueblos, grupos étnicos, nacionales y religiosos y personas de origen indígena. (Unicef, 1989, pp.11-12).

En 1990, se reafirma el compromiso de garantizar el derecho a la educación sin importar las diferencias individuales en la Declaración Mundial sobre la Educación para Todos (UNESCO, 1990). Y en 1994, representantes de 92 países se reúnen en Salamanca, en una convención organizada por el Gobierno español en cooperación con la UNESCO, para continuar por esa senda y promover los objetivos de la Educación para Todos mediante la ratificación de la Declaración de Salamanca (UNESCO, 1994). Esta recoge los cambios políticos necesarios para favorecer el enfoque de la educación inclusiva, y proporciona un marco de acción para conseguir escuelas que respondan a las necesidades individuales, particularmente a las necesidades educativas especiales, es decir, aquellas derivadas de la capacidad o las dificultades de aprendizaje.

Es importante señalar que en el documento en inglés de la Declaración se menciona que está inspirado en el principio de inclusión, mientras que en el documento en español se traduce como principio de integración. Aunque estos dos términos a menudo se utilizan de manera intercambiable en el lenguaje cotidiano, en términos rigurosos no son lo mismo. La integración se refiere al acto de incorporar a alguien -inicialmente segregado o diferenciado- a un grupo o sistema existente, mientras que la inclusión significa crear un entorno que valore y respete a todos los individuos, independientemente de sus diferencias y que esté preparado para adaptarse a la diversidad de la totalidad de la población escolar que el sistema atiende. Por las propuestas de la Declaración de Salamanca, se entiende que realmente promueve una concepción inclusiva en contraste con el paradigma integrador anterior. Así que en lo siguiente se ha seguido la versión inglesa de la Declaración. Y, de hecho, son estas ideas de educación inclusiva las que han inspirado en cierta medida el diseño de la intervención llevada a cabo en este trabajo.

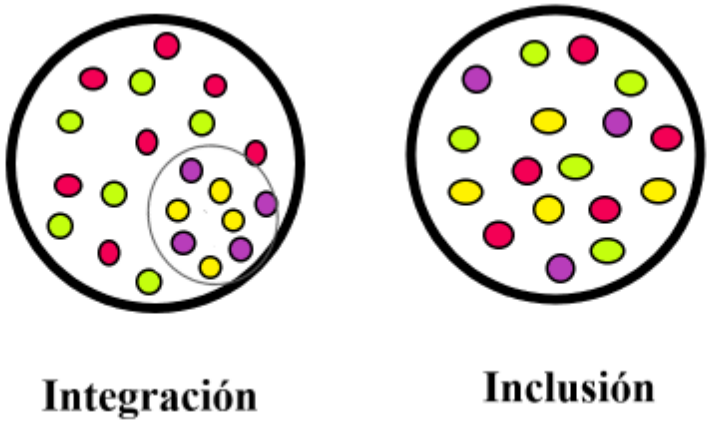


Figura 4. Diagrama que refleja el paradigma de la integración frente al de la inclusión. Fuente: Elaboración propia.

De manera sintética, esta Declaración proclama que todos los niños y todas las niñas tienen un derecho fundamental a la educación y deben tener la oportunidad de alcanzar un nivel adecuado de conocimientos. Estos han de ser garantizados por unos sistemas educativos diseñados y aplicados teniendo en cuenta que cada niño tiene características y necesidades de aprendizaje únicas. Además, defiende que la mejor manera para alcanzar esos objetivos, así como de frenar la discriminación de cualquier índole, proporcionar una educación efectiva a la mayoría de los niños, promover la igualdad de oportunidades, la participación completa y mejorar la relación costo-eficacia del sistema educativo, es garantizar el acceso de los estudiantes con necesidades especiales a escuelas ordinarias (salvo para casos excepcionales donde la educación regular no pueda satisfacer sus necesidades), que deben implementar una pedagogía centrada en el niño. (UNESCO, 1994).

En la actualidad, las políticas europeas y nacionales relativas a educación, en particular la LOMLOE, se adhieren a las ideas de esta declaración y persiguen por medio de distintas actuaciones y leyes la creación de escuelas inclusivas como el mejor medio para lograr el éxito educativo y el desarrollo social e intelectual pleno de todo el alumnado.

Puesto que se acepta que todos los alumnos son únicos, se puede afirmar que un aula se caracteriza siempre por su diversidad, que es a su vez un reflejo de la sociedad. Las necesidades especiales (discapacidad física, psíquica, sensorial y trastornos graves de la comunicación y el lenguaje) son parte de ella, pero en las aulas hay además altas capacidades, diversidad de procedencia, diversidad étnica, diversidad cultural y más diversidad lingüística que nunca. Y aunque es difícil, si se aspira a la inclusión hay que conocer toda esa diversidad y rediseñar la escuela de modo que se puedan satisfacer las necesidades de todos los estudiantes. Esto es precisamente lo que propone el del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), el enfoque que se ha tenido en consideración para tratar de garantizar la inclusión en la diversidad en este trabajo.

El DUA se inspira en el *diseño universal* de arquitectura, un planteamiento surgido en los años 70 en Estados Unidos que buscaba diseñar edificios que fueran accesibles para todas las personas, independientemente de si tenían una discapacidad (de cualquier tipo) o no; es decir, planteaba no diseñar expresamente adaptándose a un tipo específico de discapacidad porque podía no ser accesible para otra, sino eliminar cualquier tipo de barrera que pudiera encontrarse. Ascensores o rampas son ejemplos de diseño universal de los que todos nos beneficiamos. Tras su éxito surge la idea de trasladar esta idea a la educación por parte de CAST (Center for Applied Special Technology), una organización sin ánimo de lucro sobre investigación y desarrollo en educación. Esta define el DUA como "un marco para mejorar y optimizar la enseñanza y el aprendizaje para

todas las personas basado en conocimientos científicos sobre cómo aprenden los humanos". (CAST, 2018).

En vez de realizar adaptaciones curriculares a cada discapacidad, el DUA propone desarrollar nuevos currículums que de partida no planteen barreras para la mayoría del alumnado, anticipándose a las necesidades y resultando beneficioso tanto para alumnos con discapacidad como sin ella, ya que se parte de la concepción de que todos aprenden de manera diferente.

Los principios que caracterizan al DUA son los siguientes (CAST, 2018):

1. **Proporcionar múltiples formas de comprometerse con el aprendizaje**: este principio se centra en el porqué del aprendizaje. Consiste en otorgar mayor libertad al estudiantado para decidir cómo participar en las actividades según sus preferencias, intereses y habilidades, lo cual fomenta una mayor motivación. Además, implica facilitar métodos para que los estudiantes regulen su propio aprendizaje y mantengan su esfuerzo. Algunos ejemplos de aplicación de este principio incluyen permitir que los alumnos aporten feedback (teniéndolo en cuenta para futuras ocasiones), dividir objetivos a largo plazo en una sucesión de pequeñas metas a corto plazo, y ofrecer una retroalimentación frecuente al alumnado sobre su evolución.

2. **Proporcionar múltiples formatos de representación:** este principio se centra en el qué del aprendizaje. Dado que los alumnos perciben y asimilan la información de maneras diferentes (algunos precisan de estímulos visuales, otros auditivos…), parece aconsejable contar con diversidad de formatos de representación que permitan aprender utilizando diferentes opciones de percepción, de idioma, símbolos y comprensión. Un ejemplo de aplicación de este principio sería proporcionar un contenido en formato texto, audio, vídeo con subtítulos, y a través de un material manipulativo. Esta diversificación no supone un perjuicio para nadie y beneficia a todos los estudiantes (incluidos aquellos que presentan algún tipo de discapacidad), que pueden optar por el modo de aprendizaje que más les beneficie. Para la implementación de este principio resulta de gran utilidad el uso de las nuevas tecnologías.

3. **Proporcionar múltiples opciones de acción y expresión**: este principio se focaliza en el cómo del aprendizaje. Puesto que no hay una única manera de expresarse que sea ideal para todos, el DUA sugiere permitir al alumnado múltiples posibilidades de interactuar con el material y de demostrar su aprendizaje. Un ejemplo sería dar la posibilidad de evaluarse con una prueba en papel, de manera oral o realizando un proyecto de manera individual o grupal.

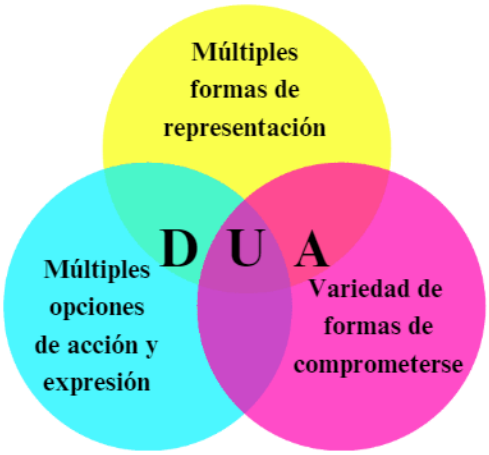


Figura 5. Esquema sobre el Diseño Universal para el Aprendizaje. Fuente: Elaboración propia.

Para concluir este apartado, este enfoque de inclusión en la diversidad ya está contemplado en la LOMLOE, que en su preámbulo señala que su objetivo es garantizar una educación de calidad para toda la ciudadanía. Asimismo, incluye como contenido transversal a todas las materias el fomento de la educación para la convivencia escolar proactiva, orientada al respeto de la diversidad como fuente de riqueza.

Además, en el Artículo 4.3 relativo a la Enseñanza básica (que comprende Primaria y Secundaria) insta a la adopción de la educación inclusiva como principio fundamental para atender a la diversidad de las necesidades de todo el alumnado, tanto del que tiene dificultades especiales de aprendizaje, como del que tiene mayor capacidad y motivación para aprender. Y para conseguirlo, contempla la adopción de medidas organizativas, metodológicas, curriculares y otros apoyos pertinentes, siguiendo los principios del Diseño Universal de Aprendizaje.

2.3. Dominio afectivo

Cuando se habla informalmente de matemáticas con alguien es muy frecuente que se combinen respuestas que involucren la relación afectiva con las matemáticas (“me gustan”, “no me gustan”, “las encuentro muy difíciles”…) como sus logros cognitivos. Aunque esta es una observación muy genérica, apoya la idea de que los afectos juegan un rol en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Y si esto es así, para que las investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las

matemáticas maximicen sus beneficios en estudiantes y profesores, es necesario tener en consideración también la dimensión afectiva (McLeod, 1992).

Pero para poder estudiar dicha dimensión es necesario fijar un marco conceptual sobre los términos involucrados que permita medirlos, identificarlos durante la intervención, e interpretarlos de manera estandarizada dentro de esta. Esta no es una tarea sencilla pues la terminología relacionada con los afectos tiene muchas connotaciones difícilmente perceptibles con el lenguaje ordinario. Además, el estudio de los mismos ha estado ampliamente marcado por la visión del aprendizaje y de los estudiantes de diversas corrientes psicológicas. Ya que, por ejemplo, si se parte de la concepción de que los estudiantes son simplemente receptores de conocimiento en lugar de participantes activos en la construcción de este, las investigaciones pueden diferir significativamente en términos tanto afectivos como cognitivos (McLeod, 1992).

El conductismo, que fue la corriente psicológica dominante la primera mitad del siglo pasado, se enfocaba únicamente en el comportamiento observable. En consecuencia, hasta hace relativamente poco tiempo (década de 1970), muchos investigadores sobre el aprendizaje consideraban el afecto como una complicación (debido a su naturaleza variable) de poca importancia que podía ser evitada sin afectar al estudio del aprendizaje. Sin embargo, esta perspectiva tenía limitaciones y dificultaba la comprensión y el estudio de estos procesos. La insatisfacción generada por el conductismo favoreció el desarrollo de otros enfoques.

Los primeros que prestaron atención a los afectos (en particular a las actitudes) fueron investigadores de psicología diferencial y social, principalmente utilizando métodos cuantitativos como cuestionarios. Pero aun aportando un gran cuerpo de información a estos temas, con el auge del cognitivismo comenzaron a buscarse otros enfoques que permitieran una comprensión más profunda de estos temas.

El cognitivismo es una perspectiva psicológica que enfatiza el estudio de los procesos mentales tales como el razonamiento, la percepción, la atención y la memoria, centrándose en cómo las personas comprenden, gestionan, organizan y utilizan la información. Los investigadores cognitivos sostienen que estos procesos internos afectan y condicionan el comportamiento, y que los métodos cualitativos son los más adecuados para estudiarlos porque proporcionan una visión más completa de la realidad estudiada. Es con estos métodos (como entrevistas, protocolos en voz alta, mayor atención a creencias y emociones…), que se empieza a constatar que hay algo más allá de la cognición y se comienza a evidenciar una mayor importancia de los afectos.

En este contexto, McLeod (1992) define el domino afectivo como “un amplio rango de creencias, sentimientos y estados de ánimo que generalmente se considera que superan el dominio de cognición”, es decir, lo puramente intelectual o relacionado con el conocimiento. McLeod plantea

además, existiendo un amplio consenso en la educación matemática, que dicho dominio está dividido en creencias, actitudes y emociones, siendo el afecto un término que se suele utilizar de manera más general. Para dicha división, McLeod se apoya en las ideas del psicólogo cognitivo constructivista George Mandler.

Figura 6. Diagrama de los elementos del dominio afectivo. Fuente: Elaboración propia.

De manera simplificada la teoría de Mandler (Mandler, 1989, como se citó en McLeod, 1992) dice que la mayoría de los factores relacionados con el afecto surgen como respuestas emocionales a la interrupción de planes o comportamientos planeados. Si la secuencia de acciones anticipada no puede ser completada como se esperaba, el bloqueo o discrepancia se ve seguido por una respuesta fisiológica. Esta respuesta fisiológica a menudo es un aumento del ritmo cardíaco o tensión muscular. Este estado de agitación sirve como mecanismo para redirigir la atención del individuo, y presumiblemente tiene un valor para la supervivencia de los individuos y ha jugado un papel en el desarrollo evolutivo. A la vez que ocurre este estado de agitación o excitación, el individuo trata de evaluar el significado de este bloqueo inesperado. La evaluación cognitiva de la interrupción puede clasificarse de varias maneras y es lo que da un significado a esta agitación.

Hay diversos aspectos importantes en el análisis del significado de las interrupciones:

- Primeramente, el significado dependerá de lo que el individuo sepa o asuma como cierto. Dicho de otro modo, el conocimiento y las **creencias** tienen un papel importante en la interpretación de la interrupción, y puesto que la cultura y la sociedad moldean muchas de esas creencias, estas también son importantes y juegan un papel en esta cuestión.
- En segundo lugar, la agitación que lleva a una **emoción** es generalmente de duración limitada, y también lo es la consecuente emoción, aunque en ocasiones puede ser muy intensa.

- Y en tercer lugar, repetidas interrupciones en el mismo contexto a menudo dan lugar a emociones cada vez menos intensas. El individuo reduce la demanda de procesamiento cognitivo respondiendo de manera cada vez más automática. Las respuestas a estas situaciones se vuelven más estables y predecibles y comienzan a desarrollarse **actitudes**.

A continuación, se ilustra esta información con un ejemplo. Supóngase que un alumno piensa que determinado tipo de problemas debería de ser resuelto de manera razonable en unos cinco minutos. Supóngase además que el estudiante tiene éxito en otras áreas de las matemáticas. Si el alumno es incapaz de dar una respuesta satisfactoria en un tiempo razonable (interrupción del plan), la sensación de fracaso puede producir algún tipo de agitación. La interpretación de esta agitación es probable que sea negativa y que se califique como frustración. Por el contrario, si el alumno vence el bloqueo y logra resolver el problema probablemente le reportará reacciones positivas a la experiencia. Si ocurren reacciones negativas de manera repetida, la respuesta a este tipo de problemas eventualmente se volverá automática y estable. En esta situación el estudiante habría desarrollado una actitud negativa hacia este tipo de problemas.

Siguiendo de nuevo a McLeod (1992) creencias, actitudes y emociones se usan para describir un amplio rango de respuestas afectivas hacia las matemáticas, aunque estas varían en su estabilidad, en la intensidad de sus respuestas y en el grado de cognición que involucran. Las creencias y las actitudes son generalmente estables y tardan más tiempo en desarrollarse, pero las emociones pueden aparecer, desaparecer y cambiar muy rápidamente. Las más intensas en cuanto a los afectos que describen serían las creencias (frías), posteriormente las actitudes (templadas) y en el lugar con mayor intensidad las emociones (calientes). Y por último, las que menos cognición parecen involucrar son las emociones, y las que más, las creencias que son cognitivas en naturaleza pero que se incluyen el dominio afectivo por su papel central en el desarrollo de respuestas emocionales y actitudinales.

Resulta conveniente detenerse un poco más en estos tres términos, para comprender qué suponen en la educación matemática y conocer los resultados de algunos estudios al respecto.

Creencias

El interés de los investigadores en las creencias surge de la convicción de que las creencias tienen consecuencias observables en el comportamiento (Schoenfeld,1992, como se citó en De Corte et al. 2012; Hurst y Cordes, 2017). Dentro del ámbito de la educación matemática, McLeod (1992) diferencia cuatro grandes tipos de creencias: creencias sobre las matemáticas, creencias sobre uno mismo, creencias sobre la enseñanza de las matemáticas y creencias sobre el contexto social, en cuyo desarrollo tienen mucha importancia los factores culturales. Por la naturaleza del presente trabajo se han considerado más relevantes las dos primeras:

- Creencias sobre las matemáticas: corresponden con la visión de los estudiantes sobre cómo son las matemáticas, e influyen en la forma en la que estos se involucran en el aprendizaje matemático. Por ejemplo, los alumnos que piensan que las matemáticas son útiles, interesantes e importantes tienen más probabilidades de trabajar duro. No obstante, resulta problemático ver que creencias falsas pero ampliamente extendidas también pueden afectar al aprendizaje de las matemáticas.

  Por ejemplo, De Corte et al. (2012) muestra que muchos estudiantes tienen la falsa creencia de que casi todos los problemas matemáticos se pueden resolver mediante la aplicación directa de reglas, fórmulas y procedimientos mostrados por el profesor, lo que hace que al aprender matemáticas dediquen su energía en memorizar reglas y procedimientos, pero no en comprenderlas profundamente.

  Más recientemente, Hurst y Cordes (2017) señalan que la falsa creencia de que la habilidad en matemáticas es una habilidad fija que no puede ser cambiada (o se es inherentemente "bueno" o "malo" en matemáticas), influye negativamente en la participación del alumnado y en la cantidad de esfuerzo que están dispuestos a invertir individualmente en la realización de tareas matemáticas. También estos autores señalan que es una creencia ampliamente extendida que las matemáticas son un área de estudio vinculada al aislamiento social. A esto han contribuido infinidad de series y películas que vinculan este campo con tener dificultades sociales o con la soledad. En los niveles más básicos de educación, la creencia de que las matemáticas no son atractivas o "guays" puede desanimar al estudiantado a implicarse en esta asignatura para evitar ser excluidos socialmente. Pero, además, puede influir en la percepción de un individuo sobre si encaja en el ámbito de las matemáticas, llegando a afectar a la elección de itinerarios formativos optativos que tengan matemáticas.

  Otras creencias sobre las matemáticas generalizadas entre los alumnos (Schoenfeld, 1992, como se citó en De Corte, E. et al., 2012) incluyen la idea de que los problemas de matemáticas tienen una única respuesta correcta y solo hay una manera de resolverlos, que los estudiantes que han comprendido las matemáticas pueden resolver cualquier problema asignado en cinco minutos o menos, y que las matemáticas aprendidas en la escuela tienen poco o nada que ver con el mundo real.

En definitiva, las creencias sobre las matemáticas permean la disposición del alumnado ante esta asignatura. El aspecto positivo es que recientes estudios señalan que es posible fomentar cambios de creencias y de mentalidad en el alumnado, especialmente si viene acompañado por parte de prácticas docentes u otro tipo de intervenciones que las promuevan (Boaler et al., 2023; Hecht et al., 2023).

- Creencias sobre uno mismo: Estas incluyen entre otras cosas el estudio de la autoeficacia y del autoconcepto, dos constructos muy relacionadas con la metacognición, la autorregulación y la motivación.

  Según la OECD (2012) el autoconcepto matemático es el conjunto de creencias de una persona sobre sus habilidades matemáticas. Este ha probado estar fuertemente relacionado de manera recíproca con el logro académico (Marsh y O'Mara-Eves, 2008; Susperreguy et al., 2018). También se ha demostrado que el autoconcepto actúa como mediador entre emociones relacionadas con las matemáticas. Concretamente Van der Beek et al. (2017) señalan que el autoconcepto matemático tiene efectos indirectos significativos tanto en el disfrute como en la ansiedad en matemáticas, mostrando que un mayor autoconcepto matemático contribuye a más disfrute y menos ansiedad en matemáticas.

  En cuanto a la autoeficacia, la OECD (2012) la define como el grado en que los estudiantes creen en sus propias capacidades para manejar tareas matemáticas de manera efectiva y superar dificultades. Y también se ha observado una relación positiva significativa entre esta y el logro académico (Xing y Hari, 2009; Nicolaidou y Philippou, 2003; Goldin et al., 2016; Grigg et al., 2018), sugiriendo que los alumnos que tienen mayor confianza en su desempeño tienden a alcanzar mejores resultados.

  Muchos de los estudios relativos a las creencias sobre uno mismo en el ámbito de la educación matemática han estado vinculado a la diferencia entre géneros, observándose que los chicos tienen mayores niveles de autoconcepto y autoeficacia (OCDE, 2012) que las chicas, variando dicha diferencia de muy a muy poco perceptible de unos países a otros, y pudiendo sugerir la influencia de factores culturales o estereotipos de género.

Emociones

Durante mucho tiempo, las emociones fueron el área menos investigada del dominio afectivo en matemáticas, con excepción de la ansiedad matemática (Schukajlow et al., 2023), probablemente

por la dificultad de su estudio debido a su naturaleza inestable. Pero desde el año 2000 el interés por ellas se ha incrementado.

Dentro del ámbito académico y durante todos los procesos de aprendizaje pueden surgir distintos tipos de emociones en función del objeto que las produzca: emociones epistémicas -derivadas del conocimiento o la construcción de conocimiento (Vilhunen et al., 2022) -, emociones sociales -las que surgen de las interacciones con personas-, emociones derivadas del tema de estudio, o emociones de logro vinculadas al éxito o fracaso de realizar una actividad. Las emociones epistémicas son las que se han considerado de mayor relevancia para este trabajo.

Algunas de las principales emociones epistémicas son las siguientes: sorpresa, curiosidad, disfrute, confusión, ansiedad, frustración y aburrimiento (Vilhunen et al., 2022). Estas se pueden clasificar en positivas si están vinculadas con sensaciones agradables, negativas si están vinculadas con sensaciones desagradables, o neutras, pudiendo cambiar este valor dependiendo de la situación. También se pueden clasificar en activadoras (como el disfrute o la confusión) o desactivadoras (como el aburrimiento) en función de la intensidad de la respuesta generada y de si producen un elevado o un bajo estado de energía durante la respuesta.

Con respecto a sus consecuencias, varios estudios empíricos (Pekrun y Linnenbrink-Garcia, 2012; Obergriesser y Stoeger, 2020; Schukajlow, 2021) han explorado el papel de los afectos y de las emociones en particular, y señalan que las emociones influyen en una amplia gama de procesos cognitivos y metacognitivos, incluyendo la atención, percepción, juicio social, resolución de problemas cognitivos, toma de decisiones y procesos de memoria, afectando también, de diversas maneras, al grado de motivación del alumnado.

En particular, las emociones epistémicas positivas y activadoras (como la curiosidad o el disfrute) se han asociado con efectos beneficiosos para el aprendizaje como el uso de estrategias de procesamiento del aprendizaje más profundo, incluyendo el uso de estrategias metacognitivas y la generación de inferencias (Muis et al., 2015; Obergriesser y Stoeger, 2020).

En el caso de las emociones epistémicas negativas como la confusión, la frustración y la ansiedad, la situación es más variable. Se ha observado que la confusión, puede motivar a los alumnos a comprometerse más con el aprendizaje (D'Mello et al., 2014, como citó Schubert, S., 2023), aunque si no resuelve la incongruencia cognitiva que los produce también puede perjudicarlo. En cuanto a la frustración y a la ansiedad matemáticas están vinculadas con débiles estrategias cognitivas y metacognitivas (Schubert et al., 2023); y en particular la ansiedad también está relacionada con peores desempeños (OECD, 2023).

En cuanto a las emociones desactivadoras negativas, se ha observado que el aburrimiento es claramente perjudicial para el aprendizaje, -especialmente cuando la actividad de aprendizaje es compleja-, y es un predictor negativo de planificación y establecimiento de objetivos, estrategias de procesamiento profundo, así como un inhibidor de estrategias metacognitivas (Pekrun et al., 2010, como se citó en Muis et al., 2015; Putwain et al., 2018).

La importancia del estudio de las emociones radica en que son inevitables en el aprendizaje de las matemáticas, siendo particularmente evidentes cuando las tareas matemáticas propuestas son nuevas.

Actitudes

Estas pueden ser más o menos positivas en función de si reflejan una disposición emocional positiva o negativa. Su estudio fue el primero que se inició (por medio de cuestionarios y otros métodos cuantitativos) dentro del dominio afectivo, pues se hipotetizaba que era más probable tener mejores resultados en una asignatura hacia la que se tienen actitudes positivas. Desde entonces se han hecho multitud de estudios al respecto, algunos con resultados dispares. A continuación, se recogen algunas de las últimas evidencias.

Las actitudes negativas hacia las matemáticas según lo planteado por McLeod (1992) son el resultado de frecuentes y repetidos fracasos o problemas durante la realización de tareas matemáticas; y se ha evidenciado que estas cambian significativamente con el tiempo, siendo habitualmente positivas en primaria y empeorando notablemente según avanzan los cursos de secundaria (Nicolaidou y Philippou, 2003; Mazana et al. , 2019). Esto se puede explicar por un incremento de la presión sobre los estudiantes, así como por el aumento de exigencia y por clases que encuentran poco interesantes, lo que abre la puerta a pensar que las actitudes también pueden cambiar de negativas a positivas, o que se puede evitar que cambien a negativas.

Diversos estudios (Nicolaidou y Philippou, 2003; Berger et al., 2020; Hwang y Son, 2021) señalan la relación entre actitudes positivas de los estudiantes hacia las matemáticas y un alto rendimiento en la asignatura. Otros, sin embargo, no hallan una relación significativa entre ambas variables (de Mato, y de la Torre , 2009; Georgiou , et al., 2007, como citó Mata et al., 2012; Mazana et al, 2021; Libradilla et al. , 2023). No obstante, en ambos casos, varios autores (Georgiou, et al., 2007, como citó Mata et al., 2012; Hwang y Son, 2021; Mazana et al., 2019, Libradilla et al., 2023) enfatizan el rol de profesores y escuelas para cambiar las actitudes de sus

alumnos hacia las matemáticas, exponiendo que con determinadas prácticas docentes, mejores materiales o un profesorado que traslade mayor motivación al alumnado sería posible mejorar las actitudes de este y, a su vez, lograr mejoras en el rendimiento.

El estudio de Mata et al. (2012) señala también que los niveles de motivación intrínseca (la derivada de las satisfacciones inherente a realizar una actividad) están relacionados positivamente con las actitudes hacia las matemáticas. De manera similar también se señala que estudiantes con comportamiento escolar relacionados con baja motivación (por ejemplo, llegar tarde a la escuela, faltar a clases, venir sin libros ni tareas) tienen una actitud más negativa hacia las matemáticas. Dicho estudio también revela una significativa relación directa entre el apoyo de profesores y de los compañeros, y las actitudes positivas hacia las matemáticas, siendo la primera más fuerte que la segunda.

Aunque ya se conocen muchas cosas sobre el dominio afectivo, este es aún un campo bastante nuevo en la educación matemática. En consecuencia, se conoce la relación entre multitud de variables, pero en muchos casos no se conoce si dichas relaciones son causales o no. Además, la gran variedad de variables a considerar (incluyendo las diferencias entre personas y grupos), hacen que algunos estudios sean difícilmente replicables e incluso algunos ofrezcan resultados contradictorios. En definitiva, se trata de un campo muy prometedor, pero del que aún quedan muchas cosas por comprender.

2.3.1. LOMLOE, matemáticas y dominio afectivo

La LOMLOE expone que entre sus ocho competencias clave no existe una jerarquía y que todas se encuentran interrelacionadas entre sí, solapándose y entrelazándose. Además, indica que las competencias no se corresponden de manera unívoca con las asignaturas, sino que todas las asignaturas contribuyen, en mayor o menor medida, al desarrollo de dichas competencias claves. Por tanto, aunque las matemáticas contribuyen principalmente al desarrollo de la competencia STEM, también están vinculadas a otras como la competencia en comunicación lingüística, la competencia personal social y de aprender a aprender, la digital o la ciudadana.

Esto es relevante porque la contribución a esas otras competencias se refleja en los bloques o sentidos en los que se estructuran los contenidos de la asignatura de matemáticas: sentido numérico, de la medida, espacial, algebraico, estocástico y socioafectivo. Este último, según la ley, conlleva identificar y gestionar las emociones, afrontar los desafíos, mantener la motivación y la perseverancia y desarrollar el autoconcepto y el sentido de la identidad en el aprendizaje de

las matemáticas. Se trata de una de las novedades de la ley y refleja la toma en consideración del dominio afectivo como parte del aprendizaje matemático, encontrándose fuertemente vinculado a la competencia personal social y de aprender a aprender y a la competencia ciudadana.

Los saberes básicos pertenecientes a dicho sentido obviamente varían en cada curso, pero están divididos en tres aspectos: trabajo en equipo y toma de decisiones; inclusión, diversidad y respeto; y creencias, actitudes y emociones. Este último hace alusión explícita a los tres aspectos del domino afectivo e incluye aspectos como el reconocimiento del esfuerzo, la perseverancia y la motivación en el aprendizaje de las matemáticas, la comprensión del error como oportunidad y parte del aprendizaje, la gestión emocional durante el aprendizaje y el fomento de estrategias de autorregulación y flexibilidad cognitiva en matemáticas.

2.4. Algunas metodologías

En este apartado se desarrollan las características principales de las metodologías de las que se hará uso en la fase de intervención de este trabajo.

2.4.1. Thinking Classrooms

Aunque el objetivo de las clases de matemáticas es que el alumnado desarrolle la competencia matemática -siendo el razonamiento matemático una condición imprescindible para ello-, muchas veces esto no ocurre. Esto es lo que observó Peter Liljedahl, profesor universitario e investigador matemático canadiense, tras presenciar más de 40 clases de matemáticas de diferentes niveles y entornos socioculturales. Independientemente de las características de la clase y de que el profesor fuera considerado "bueno" por los alumnos y otros profesores, en todas ellas ocurrían muchas cosas similares y asumidas como naturales dentro de una clase de matemáticas, como la corrección de ejercicios, la resolución de problemas, la exposición de teoría, resolución de dudas, interacciones sociales… pero pensar no era una de las principales. Observó que las clases estaban preparadas bajo la suposición de que los alumnos o no podían o no iban a pensar (Liljedahl, 2020). Y considerando que pensar -o razonar- es un precursor necesario para aprender (Liljedahl, 2020), esto evidenciaba un gran problema.

Ante esta situación Liljedahl comenzó una investigación que duró 15 años y en la que participaron más de 400 profesores de matemáticas de clases desde Infantil hasta el nivel equivalente a 2º de Bachillerato (curso 12) de Canadá, con el propósito de cuestionar las normas y formas de

proceder asociadas a las clases de matemáticas, y ver si de este modo se conseguía aumentar el número de estudiantes que pensaban en clase de matemáticas y el tiempo que pasaban haciéndolo. De los resultados de dicha investigación se extrajeron 14 prácticas, recogidas en Liljedahl (2020), orientadas para conseguir que los alumnos pensasen en clase de matemáticas y construir -según su terminología- *Thinking classrooms.*

Las 14 prácticas dan respuesta a las siguientes cuestiones:

1. Qué tipo de tareas usar.
2. Cómo formar grupos colaborativos.
3. Dónde deben trabajar los estudiantes.
4. Cómo disponer el mobiliario.
5. Cómo responder a las preguntas.
6. Cuándo, dónde y cómo dar las tareas.
7. Cómo deben ser los deberes que se mandan.
8. Cómo promover la autonomía de los alumnos.
9. Cómo usar pistas y extensiones.
10. Cómo consolidar una lección.
11. Cómo deben tomar notas los alumnos.
12. Qué evaluar y cómo
13. Cómo realizar una evaluación formativa.
14. Cómo calificar.

A continuación, se describirán los rasgos principales de dichas prácticas:

1. Qué tipo de tareas usar

Para construir aulas en las que el alumnado piense, la investigación demostró que lo más efectivo es la utilización de tareas altamente interesantes entre las que se encuentran acertijos, juegos de cartas y tareas matemáticas relacionadas con la vida real y los intereses de los estudiantes, con la ambigüedad y la amplitud que éstos presentan.

Puesto que el currículum es importante y en la práctica no se puede ignorar, Liljedahl propone iniciar las clases con algunas de estas actividades altamente interesantes que comprometan e motiven a los estudiantes a pensar, y posteriormente seguir con tareas curriculares. Estas no deben ser de tipo repetitivo, sino que deben ser planteadas como un problema a resolver antes de haber visto cómo se resuelven algorítmicamente. La estructura que recomienda para lograr este

propósito es la siguiente: preguntarles sobre algo que ya conocen; preguntarles sobre una extensión de dicho conocimiento; y preguntarles cómo hacer algo sin explicárselo previamente. En la Figura 7 se encuentra un ejemplo de cómo una actividad curricular, la factorización de polinomios, puede ser planteada para que sea una actividad altamente interesante que haga pensar al alumnado.

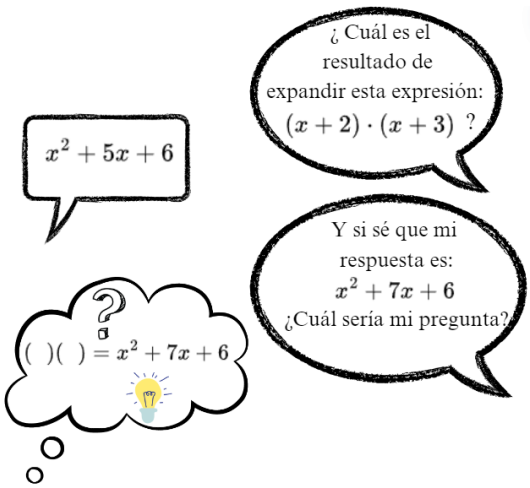


Figura 7. Planteamiento de una actividad curricular de modo que fomente el razonamiento. Adaptado de: Liljedahl (2020).

2. **Cómo formar grupos colaborativos**

Partiendo de la premisa de que la colaboración entre estudiantes tiene un efecto muy positivo en el aprendizaje (Edward y Jones, 2003; Hattie, 2009; Slavin, 1996; como se citó en Liljedahl, 2020), Liljedahl busca cómo formar grupos que den los mejores resultados a la hora de pensar.

El estudio evidencia que los mejores resultados se obtienen con la formación de grupos visiblemente aleatorios, es decir, donde el alumnado presencie la aleatoriedad del proceso de creación de los grupos. El motivo es que, al no percibir una intencionalidad oculta tras la creación de los grupos y al cambiar frecuentemente los mismos, los alumnos suelen aceptar mejor los cambios, mostrar más disposición a colaborar, no encasillarse en un rol y centrarse más rápidamente en la tarea de pensar. Además, esto favorece la eliminación de barreras y la movilidad del conocimiento.

Figura 8. Creación de grupos aleatorios a través de cartas. Fuente: Liljedahl (2020).

En cuanto al número de personas por grupo, Liljedahl señala que en secundaria tres es la cifra óptima, pues permite que participen todos los miembros y que exista suficiente **redundancia** (ideas e interés comunes que motiven la colaboración) y **diversidad** (perspectivas e ideas distintas que hagan que la colaboración sea prolífica), dos condiciones necesarias para que se den colaboraciones efectivas (Davis y Simmt, 2003; como se citó en Liljedahl, 2020).

3. Dónde deben trabajar los alumnos

La investigación estudió el uso de cuadernos, de rotafolios en posición horizontal, de rotafolios en posición vertical y superficies borrables tanto horizontales como verticales, evaluando su efectividad sobre diversos factores.

El estudio demostró que el uso de superficies verticales borrables era el más efectivo para lograr una mayor participación (seguido de las superficies horizontales borrables), menor tiempo para empezar a trabajar en una actividad y mayor tiempo dedicado a la tarea. Los motivos incluyen una mayor activación del alumnado al encontrarse de pie y la posibilidad de borrar errores.

Además, se observó que para maximizar los efectos de las superficies borrables, daba buenos resultados el uso de un único rotulador que rotara entre los alumnos del grupo, pues aumentaba la participación y el compromiso de todos los miembros de este.

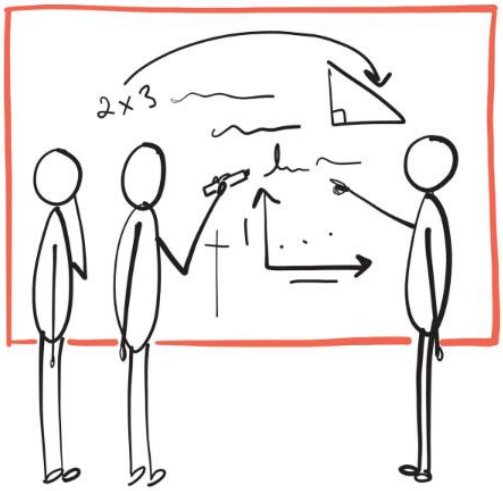


Figura 9. Grupo de alumnos trabajando en una superficie vertical borrable. Fuente: Liljedahl (2020).

4. Cómo disponer el mobiliario

El estudio concluyó que la disposición de las clases condicionaba el tipo de comportamiento esperado del alumnado y que para que se encontraran cómodos, pensando y tomando riesgos, las clases no debían ser ni demasiado organizadas ni demasiado caóticas. Los mejores resultados (en términos de tiempo invertido en pensar) se lograron disponiendo el mobiliario de manera que los pupitres no miraran al frente , no hubiera simetría y que dentro de un mismo grupo cada pupitre tuviera una orientación distinta. Se observó que esto favorecía la colaboración entre alumnos, facilitaba la circulación del profesor durante la clase y disminuía el tiempo dedicado por el profesor a la lección expositiva, dando más tiempo al estudiantado para participar activamente.

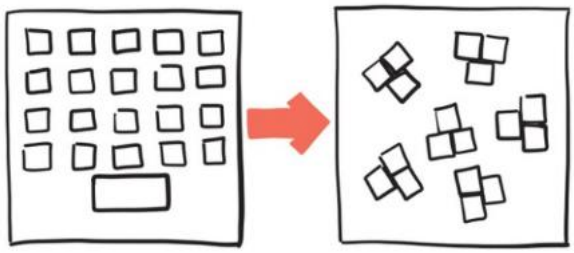


Figura 10. Propuesta de disposición de una clase para conseguir una *Thinking classroom*. Fuente: Liljedahl (2020).

5. Cómo responder a las preguntas

La investigación evidenció la existencia de diversos tipos de preguntas en el aula: preguntas para dejar de pensar como “¿esto cae en el examen?” ó “¿esto es así?”; preguntas que forman parte de la dinámica de la clase pero que no promueven el razonamiento del alumno; y preguntas para

seguir pensando, que suelen ser clarificaciones o dudas sobre problemas o sobre variaciones de estos.

El estudio reveló que lo más adecuado es responder solo a este último tipo de preguntas, y que en caso de recibir alguna pregunta de los otros dos tipos, lo más adecuado es no responder o responder con otra pregunta para fomentar el pensamiento crítico y la autonomía del alumnado.

6. Cuándo, dónde y cómo dar las tareas

Se observó que la atención y la disposición del alumnado a pensar durante la clase decrece con el tiempo. Por lo tanto, lo más adecuado es dar las tareas en los primeros 3-5 minutos de la clase, en lugar de ocupar su energía con actividades pasivas como tomar notas o corregir ejercicios.

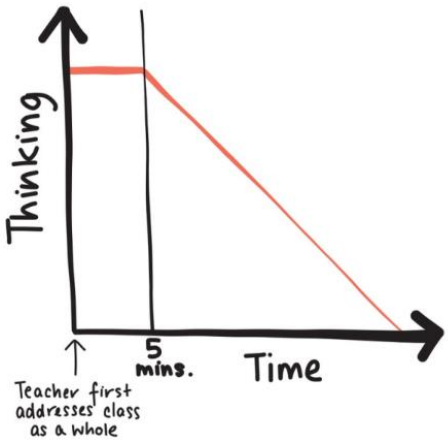


Figura 11. Diagrama que representa la disposición del alumnado a pensar en función del momento de la clase en que se le proporcionan tareas matemáticas. Fuente: Liljedahl (2020).

Además, Liljedahl señala que es más efectivo dar las tareas de manera oral, con el profesor y los alumnos de pie rodeándole. Esto favorece que no haya tanta pasividad y que los alumnos estén más involucrados.

7. Cómo deben ser los deberes

Liljedahl observó que muy frecuentemente había una desconexión muy grande entre los objetivos de los profesores y los alumnos respecto a la realización de los deberes: mientras que los primeros querían que fueran una oportunidad de aprendizaje, los segundos los percibían como una imposición cuya realización solo servía para aprobar o no tener faltas en la asignatura, lo que a

menudo llevaba a que altos porcentajes de alumnos no los hicieran, los copiaran o pidieran ayuda, no teniendo ningún beneficio para los alumnos.

Tras la investigación, se llegó a la conclusión de que para conseguir que los deberes realmente sirvieran para el propósito de los profesores, debían dejar de ser tratados como tradicionalmente se han tratado los deberes (comprobando si están hechos o no diariamente, marcándolos, corrigiéndolos al día siguiente…), y empezar a ser planteados como cuestiones para que ellos mismos comprobaran lo que habían aprendido y para aprender de sus fallos sin riesgo (es decir, sin una penalización). Aunque esto comporte la posibilidad de que algunos alumnos no intenten dichas cuestiones (al igual que ya ocurría con los deberes "tradicionales"), el porcentaje de realización que se observó durante la investigación fue elevado y los motivos por los que los intentaban (para aprender), los correctos. Añadir además, que puesto que eran una oportunidad de comprobación individual sobre el aprendizaje, se observó que era aconsejable dar las soluciones sin detalles ni procedimientos a la vez que se planteaban las cuestiones (para que realmente tuvieran con qué comparar) y dar mayores detalles o la solución desarrollada al cabo de unos días.

8. Cómo promover la autonomía de los alumnos

Todos los cambios anteriores requieren una mayor autonomía por parte de los estudiantes que hay que fomentar. La investigación reveló que una buena manera para promoverla es permitirles movilizar el conocimiento entre los distintos grupos de estudiantes. Esto implica permitirles levantarse, animarles a observar lo que hacen otros grupos, a preguntarse cuestiones relativas a las tareas y, deliberadamente, ayudarles menos en aspectos en los que otros grupos pueden asistirles. Este enfoque fomenta la colaboración, el aprendizaje entre pares y el desarrollo de una mayor autonomía.

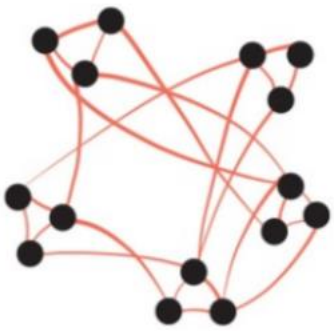


Figura 12. Diagrama que refleja la movilidad de conocimiento. Fuente: Liljedahl (2020).

9. Cómo usar pistas y extensiones

Partiendo de la premisa de que si un estudiante está involucrado activamente en una actividad está pensando, y si está pensando entonces está involucrado activamente, Liljedahl señala que hay que intentar encontrar un balance entre el reto propuesto y sus habilidades, para mantener a los alumnos implicados y por ende, pensando. De no hacerse así, el exceso de dificultad continuado desemboca en frustración y la falta de exigencia conduce al aburrimiento o al desinterés. Para mantener este flujo entre desafío y habilidad, la investigación señala la utilidad de usar pistas y extensiones. No obstante, puesto que cada alumno tiene sus propios ritmos de aprendizaje y un flujo de pensamiento diverso, el uso de pistas y extensiones no puede ser síncrono para todos los alumnos.

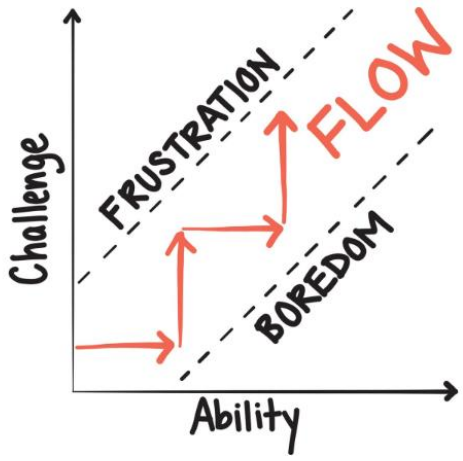


Figura 13. Diagrama que refleja un flujo de pensamiento que mantiene el balance entre la habilidad del alumno y el reto propuesto. Fuente: Liljedahl (2020).

Dado que encontrar el momento justo en que cada grupo necesita una pista o una extensión para mantenerse en flujo no es sencillo, la investigación señala que es muy útil la utilización en el aula de actividades de "suelo bajo y techo alto" que favorecen que todos puedan empezar a pensar, entrar en flujo, y avanzar a su ritmo sin aburrirse ni limitarse. Esto mismo se consigue con secuencias de actividades de dificultad creciente diseñadas de manera que en cada paso solo haya una variación respecto al anterior, que además garantizan que no haya grandes saltos cognitivos que les hagan salir del flujo y les impidan avanzar.

Independientemente de las actividades que se utilicen para mantener en flujo a los alumnos, para conseguirlo también es importante responsabilizar al alumnado del aprendizaje de cada miembro de su grupo.

10. Cómo consolidar una lección

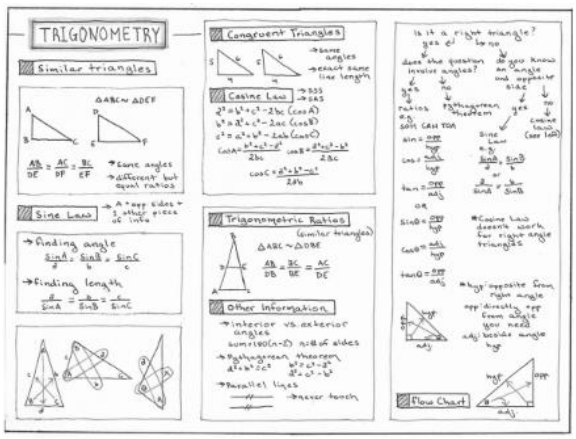
Consolidar implica reunir las ideas vistas o aprendidas y darles coherencia. Liljedahl propone consolidar las clases "desde abajo", es decir comenzando por las soluciones a las que todo el mundo ha llegado. Esto se debe a que limitarse a dar los resultados finales o más complicados supone un salto cognitivo muy grande para algunos estudiantes y no aporta nada nuevo a aquellos que ya lo entendieron. Para realizar esta consolidación desde abajo durante la investigación se probaron diferentes maneras: discusión general guiada por el profesor y que es exclusivamente oral; discusión detallada guiada por el profesor, que además escribe los aspectos discutidos en la pizarra; y discusión detallada guiada por el profesor, que se apoya en los avances de los alumnos en las superficies verticales borrables. Cada una, reflejó tener beneficios en distintas circunstancias, aunque la tercera demostró ser la más efectiva para mantener al alumnado involucrado y, en consecuencia, pensando. Además, independientemente del método utilizado, se observó que una mejora notable en la atención del estudiantado durante la consolidación se conseguía haciéndola de pie, con los alumnos alrededor del profesor y permitiendo su movilidad.

Para concluir, la investigación señaló también que en la consolidación desde abajo es más beneficioso dedicar más tiempo a los aspectos fundacionales de la tarea, e ir dedicando cada vez menos a los aspectos de mayor dificultad, pues así se consigue que los alumnos estén más tiempo involucrados en la misma.

11. Cómo deben tomar notas los alumnos

Tomar notas es una actividad presente en todas las clases de matemáticas del mundo, pero en muchos casos es una actividad puramente pasiva en la que no se da oportunidad para que el alumno piense, sino para que simplemente se limite a copiar. Liljedahl propone dar tiempo a los alumnos para que tomen notas sobre lo aprendido de manera significativa para ellos, lo que les ayudará a recordar lo aprendido en lecciones posteriores. Para fomentarlo, propone:

1. Usar organizadores gráficos que permitan organizar mejor la información. Estos pueden ser de varios tipos: pueden ayudar a dividir un tema en subtemas mediante la subdivisión en celdas de espacio limitado, o bien contar con espacios diferenciados para definiciones, ejemplos, procedimientos, ideas, conceptos…
2. Proporcionar ejemplos variados de cómo tomar este tipo de notas.
3. Dar actividades semanas después, que requieran el uso de dichas notas para que comprendan su utilidad y potencial.



Vocabulary/Definition	Big Ideas/Concepts
Procedures	Examples

Figura 14. Dos ejemplos de organizadores gráficos: a la izquierda en subtemas mediante división en celdas, y a la derecha en función de la naturaleza del contenido. Fuente: Liljedahl (2020).

De esta manera, se promueve una toma de notas más activa y adaptada a cada uno, y por tanto más útil, que contribuye al proceso de aprendizaje a largo plazo.

12. Qué evaluar y cómo

Para que las estrategias planteadas anteriormente tengan éxito y para que el alumnado aprenda matemáticas resulta imprescindible que desarrollen ciertas competencias como la disposición a tomar riesgos, la habilidad para colaborar o la perseverancia. Y si dichas competencias son tan fundamentales para que funcionen las *Thinking classrooms* es razonable que sean evaluadas (sin perjuicio de evaluar también las habilidades individuales en el desempeño de los logros del currículum) para conseguir que el alumnado también las valore y desarrolle. Es decir, hay que evaluar lo que se valora.

Aunque se admite que las rúbricas son los instrumentos más adecuados para evaluar competencias, la investigación expone una serie de modificaciones que se les puede hacer para que sean herramientas más efectivas, significativas y que evalúen mejor el proceso de desarrollo de competencias.

Primeramente, la investigación señala que lo más adecuado es que en cada rúbrica se evalúe una única competencia y que los alumnos participen en el diseño de la misma incluyendo su propia terminología. De este modo se consigue una rúbrica más comprensible y se asegura que los alumnos entienden lo que se evalúa y sus criterios. Con este mismo propósito y para hacerla más visual, se desaconseja el uso de más de dos o tres columnas, la escritura de mucho texto y se

propone el uso de, por ejemplo, flechas que permitan ver el desarrollo de competencias como un proceso continuo y no como algo discreto y estático.

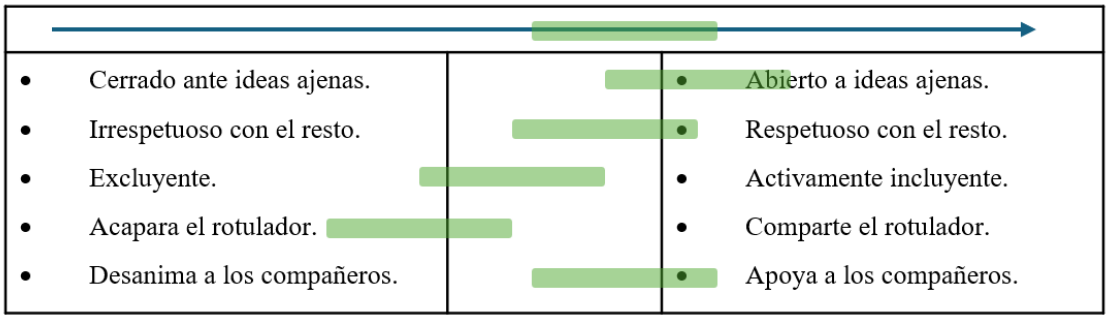


Figura 15. Ejemplo de rúbrica para evaluar competencias. Adaptado de: Liljedahl (2020).

13. Cómo realizar una evaluación formativa

Liljedahl sostiene que en una *Thinking classroom* toda evaluación debería ser formativa (aunque parte de ella sea también sumativa), es decir, enfocada a informar para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para ello es importante comunicar al alumno lo que sabe (dónde se encuentra en el proceso de aprendizaje), pero también ayudarle a identificar lo que aún no sabe (a dónde se quiere llegar). Para conseguirlo, Liljedahl propone el uso de instrumentos diseñados por el profesor que permitan a los alumnos autoevaluarse y reflexionar sobre su aprendizaje de manera continua durante un tema.

El instrumento de evaluación debería incluir una columna con los subtemas fundamentales que componen el tema de aprendizaje. Cada uno de ellos debería descomponerse en nivel básico, medio y avanzado de adquisición (u otras etiquetas similares que evidencien el nivel de complejidad pero no el de habilidad de los alumnos) e ir acompañado con algún ejemplo o una referencia a ejercicios que ilustren dicho nivel, para ayudar a los alumnos a discernir más fácilmente dónde se encuentran y lo que aún les queda por lograr en su proceso de aprendizaje.

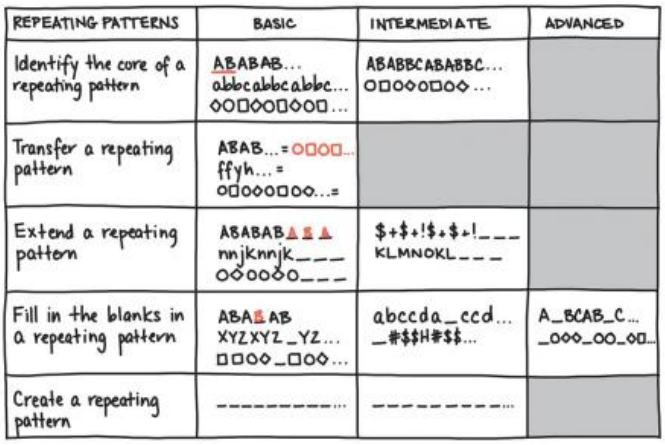


Figura 16. Instrumento de evaluación formativa. Fuente: Liljedahl (2020).

14. **Cómo calificar**

El modelo de calificación tradicional, en el que se otorgan puntos en función de lo que se sabe realizar en una determinada prueba, no valora la evolución del alumnado, sino que, de hecho, penaliza lo que no sabe inicialmente, cuando lo razonable es que al comienzo no se sepan ciertas cosas. Por ello, en las *Thinking classrooms* se insta a calificar en base a datos o evidencias en vez de con puntos.

Para ello se propone un instrumento destinado a ser usado por el profesor similar al del apartado anterior (que incluya los subtemas que se enseñan y los distintos niveles de adquisición, aunque no los ejemplos). Este servirá para recoger todos los datos de manera ordenada, pudiendo utilizar en cada nivel diversos ítems: realizado individualmente (✓), realizado individualmente con un pequeño fallo (S), realizado con ayuda (H), realizado en grupo (G), intentado aunque erróneo (✗), no intentado (N)… y pudiendo añadir si el dato ha sido recogido por observación (✓o) o por conversación (✓c). Con una tendencia y un número suficiente de datos observados favorables en cada nivel, se da por adquirida la categoría sin penalizar los fallos iniciales. Para convertir estos datos en una calificación numérica, se asignan pesos a cada categoría permitiendo hacer una ponderación: básico (2 puntos), medio (3 puntos) y avanzado (4 puntos). De esta manera, con la adquisición básica de todos los niveles, los estudiantes superan los contenidos fundamentales, y una mayor calificación se obtiene al ser capaz de realizar tareas de mayor dificultad. Este enfoque valora más la evolución del alumno a lo largo del tiempo, y ofrece claridad tanto a profesores como a alumnos sobre el estado del aprendizaje de cada subtema.

FRACTIONS	BASIC	INTERMEDIATE	ADVANCED	OUT OF	MARK
Definitions	✓✓			2	2
Add and subtract proper fractions	✓✓	✓✓	✓✓	4	4
Add and subtract mixed fractions	✓X✓	✓S X✓✓	S ✓✓	4	4
Multiply and divide proper fractions	XX✓✓	NNX✓X	✓✓✓	4	4
Multiply and divide mixed fractions	XX✓✓	XS	XXH✓✓	4	4
Solve order of operation tasks with proper and mixed fractions	XS	NNX	✓✓	4	4
Solve contextual problems involving fractions		N✓✓	✓x S X	4	3
Estimate solutions for problems involving fractions	XX N ✓	XN✓S	✓✓✓	4	4
	2	3	4	30	29

Figura17 Instrumento de calificación. Fuente: Liljedahl (2020).

2.4.2. Lección Magistral

La lección magistral o método didáctico expositivo es una metodología en la que el docente imparte los contenidos de una materia o tema a través de la exposición de forma oral de estos a un alumnado que debe ejercer la escucha activa y que, habitualmente, tomará notas. En esta metodología el profesor o maestro es la fuente de conocimiento y de aprendizaje, y los alumnos son principalmente sujetos pasivos. No obstante, existe una variante de esta metodología, la clase magistral participativa, en la que el profesor invita a los alumnos a participar y les plantea preguntas sobre el contenido que él previamente ha expuesto, sobre ejercicios que haya realizado en la pizarra, u otros ejercicios realizados por el alumnado. Es decir, el foco de acción sigue estando en el docente aunque este, a su vez, permite intervenir en cierto grado al alumno.

Este es uno de los métodos más tradicionales de enseñanza, y tiene su origen en cómo se enseñaba en la Antigua Grecia, más concretamente en el período helenístico cuando la educación deja de ser impartida únicamente en el ámbito privado y pasa a ser objeto de reglamentación oficial. Si en la época grecorromana ya se podían intuir algunos indicios de la lección magistral, es durante la Edad Media cuando se consolida el método expositivo con el cristianismo y la aparición del método escolástico y las Lectios. Estas influenciaron posteriormente el estudio en las Universidades durante la Edad Moderna, aunque entonces la educación seguía estando reservada para unos pocos. Es con la llegada de la Revolución industrial cuando se identifica la importancia de la formación para conseguir mano de obra, y las escuelas se convierten en centros de enseñanza y disciplina de los nuevos obreros, provenientes de los estratos más humildes. Puesto que el

objetivo era el cumplimiento de los estándares y necesidades de la burguesía, la participación del alumnado era más bien pasiva y la máxima autoridad era la del maestro, que impartía los conocimientos de manera expositiva. En esencia, este modo de enseñar no ha cambiado demasiado hasta nuestros días, siendo aún hoy la lección magistral una de las metodologías más utilizadas.

Aparte de las diferencias entre el papel asignado al profesor y a los alumnos en las *Thinking classrooms* y en la lección magistral, estas metodologías se diferencian en su concepción de cómo ocurre el aprendizaje. Mientras que el enfoque de las *Thinking classrooms* es más constructivista, el paradigma que plantean las lecciones magistrales es que para que haya aprendizaje basta con poner al aprendiz en contacto con el conocimiento.

En cuanto a cómo responde la lección magistral a las 14 cuestiones que se contemplaban en las *Thinking classrooms*, la respuesta no es unánime, aunque hay diversas prácticas muy extendidas. Por ejemplo, puesto que el profesor es el centro del aprendizaje, la clase está orientada hacia él, habitualmente en filas ordenadas que miran a la pizarra o en forma de U. Desde esta posición los alumnos toman (o copian de la pizarra) notas durante la exposición del profesor en su cuaderno. Además, puesto que los alumnos son mayormente pasivos en este aprendizaje, no se da mucha importancia a la creación de grupos colaborativos, y en caso de plantearse trabajar en grupos suele ser el profesor quien los haga, o se suele trabajar con el compañero que se tenga más cerca para agilizar la clase.

Lo habitual es que el alumnado se encuentre sentado en su pupitre, desde donde intervendrá para hacer preguntas que son resueltas de manera directa por el profesor. La movilidad libre por parte de los alumnos es atípica aunque, en función del grado de participación de dichas lecciones magistrales, en ocasiones salen a la pizarra a hacer ejercicios. El profesor, por otra parte, suele limitarse a moverse por la zona cercana a la pizarra, aunque en caso de haber dudas, principalmente mientras los alumnos trabajan, se acerca a ellos.

En cuanto a la estructura de la lección, la clase suele comenzar con un repaso de los últimos conceptos vistos o con la corrección de ejercicios. Posteriormente, se suele continuar con la exposición de la teoría correspondiente, ilustrándola con ejemplos y ejercicios. Y finalmente, se suelen plantear como deberes o como tarea para realizar en el aula ejercicios similares a los vistos, de solución única y que generalmente se resuelven de manera no muy extensa a través de fórmulas, procedimientos o razonamientos cortos relacionados de manera muy estrecha con la teoría expuesta.

Respecto a la evaluación, gran parte de esta se realiza por medio de exámenes o pruebas individuales, que se consideran las herramientas más adecuadas para comprobar el nivel de

aprendizaje alcanzado. Aunque también se suelen tener en cuenta factores actitudinales, o cuestiones como la realización de deberes o la participación, en caso de haberla.

Una de las objeciones que suele haber sobre el método expositivo, es que dado que el profesor es el foco del aprendizaje y las actividades están planteadas de manera síncrona para todos los estudiantes, resulta difícil atender adecuadamente a la diversidad. Además, la evidencia empírica respalda el hecho de que para aprender y desarrollar competencias no basta solo con entrar en contacto con el conocimiento, pues, si no, no existiría ningún problema en la educación actualmente. Además, algunos estudios realizados apuntan a que la lección magistral consigue peores resultados tanto en términos de resultados académicos, como en implicación del alumnado que metodologías cooperativas (Majoka et al., 2010; Aziz y y Hossain, 2010) o flipped classrooms (Bhagat et al., 2016).

En cuanto a quienes apoyan esta metodología, aparte de por cuestiones de tradición, a menudo arguyen que permite una mayor gestión del tiempo por parte del profesorado, algo que para cubrir el currículum resulta muy importante.

2.4.3. Otras metodologías

En este apartado se detallan someramente los rasgos principales de otros dos enfoques metodológicos que, aunque no han sido utilizados de manera central en la intervención de este trabajo, han sido empleados como un recurso puntual.

2.4.3.1. El enfoque C-P-A

Durante la adolescencia se produce aparte del desarrollo físico de las personas, su desarrollo cognitivo y del pensamiento formal. Este se caracteriza por el paso de lo concreto -los objetos- a lo abstracto -las ideas-, y además, supone un desarrollo en el pensamiento hipotético-deductivo, claramente relacionado con el razonamiento matemático. Simultáneamente, este desarrollo cognitivo, implica un aumento del grado de relativismo (lo que conlleva la comprensión de que hay diferentes perspectivas y formas de interpretar la realidad) y una mejora de la autorregulación cognitiva, permitiendo controlar y dirigir el propio proceso de pensamiento de manera consciente y reflexiva. No obstante, a diferencia del desarrollo físico, que se produce de manera relativamente rápida (tres o cuatro años) y en una secuencia semejante en la mayoría de los individuos, el desarrollo cognitivo y en concreto del pensamiento formal tiene lugar con más

lentitud (siete u ocho años), en una progresión irregular y con notables diferencias entre unas personas y otras. Por tanto, es razonable pensar que el grado de razonamiento en la adolescencia no sea el mismo en todo el alumnado, pudiendo variar mucho de unos individuos a otros por encontrarse en distintas etapas del desarrollo del pensamiento formal.

De acuerdo con esto, Jerome Bruner, psicólogo estadounidense pionero en la psicología cognitiva y el constructivismo, proponía en su teoría del aprendizaje que para lograr un aprendizaje completo era aconsejable pasar por una progresión concreto-pictórico-abstracta (CPA) que facilitase el paso gradual del mundo de los objetos al de las ideas. Esta secuencia centra el aprendizaje en la comprensión, haciéndolo accesible para todos y favoreciendo el desarrollo del pensamiento formal, lo cual resulta especialmente interesante en la adolescencia. De manera sintética, las etapas de lo concreto, pictórico y abstracto suponen lo siguiente:

1. **Concreto (C)**: Supone el descubrimiento de nociones matemáticas a partir de la manipulación y exploración de objetos físicos.
2. **Pictórico (P)**: Implica la sustitución de los objetos por imágenes y representaciones visuales que faciliten la comprensión de conceptos.
3. **Abstracto (A)**: Enlaza los procesos anteriores con algoritmos y formulaciones matemáticas más abstractas.

Ilustración 18. Secuencia del enfoque C-P-A. Fuente: Elaboración propia.

Este enfoque, CPA, es uno de los pilares del Método Singapur, una metodología de enseñanza desarrollada en dicho país en la década de 1980. Este método ha llevado a Singapur, un país entonces con pocos recursos, a alcanzar una educación de excelencia y a situarse en los primeros puestos en los rankings de aprendizaje de matemáticas, como PISA.

2.4.3.2. La Gamificación

La definición de gamificación que se utiliza en el presente trabajo es la siguiente:

> “La gamificación es el uso de mecánicas basadas en juegos, estética y pensamiento de juego para implicar personas, motivar la acciones, promover el aprendizaje y resolver problemas.” (Kapp, 2012).

Dicho de otro modo, la gamificación, también conocida como ludificación, se basa en aplicar estrategias propias de juegos en situaciones y contextos que en principio no son lúdicos. De este modo se busca reforzar o modificar las conductas del alumnado, sin implicar necesariamente el uso de un juego. Esta estrategia resulta particularmente interesante para conseguir involucrar al alumnado en la dinámica de la clase, y encuentra en las nuevas tecnologías un gran aliado.

2.4.4. El uso de distintas metodologías y la LOMLOE

En relación con las diferentes metodologías y con el rol del profesorado en el proceso de enseñanza, la LOMLOE plantea que estas se deben adecuar a la madurez del alumnado, que durante la adolescencia, como se ha mencionado anteriormente, se está desarrollando.

Así, la LOMLOE en las primeras etapas de secundaria, cuando la mayoría del estudiantado aún no ha desarrollado el pensamiento formal -o al menos no de manera suficiente-, propone un estilo más directivo por parte del profesor, y el uso de técnicas expositivas y de estudio dirigido (donde encajaría correctamente la lección magistral). Mientras que posteriormente, coincidiendo con un mayor desarrollo cognitivo, fomenta metodologías que conlleven una participación más activa del alumnado en su propio aprendizaje a través de técnicas como el aprendizaje por descubrimiento, los proyectos de investigación, la resolución de problemas y otros. En este apartado encajaría mejor, según la ley, la metodología de las *Thinking classrooms.* Además, para ayudar al alumnado a representar adecuadamente y facilitar la adquisición de conceptos y procedimientos, la ley insta a la utilización de diferentes materiales aparte de los recursos habituales, incluyendo, explícitamente, materiales manipulativos, recursos digitales y herramientas de gamificación.

3. Marco metodológico

Aunque ya se presentaron en la introducción, resulta conveniente volver a plantear los objetivos de este trabajo, pues son los que justifican la elección de este marco metodológico:

- Reflejar una intervención realizada en una clase de matemáticas de 3º de la ESO compuesta de dos fases: una en la que se emplea una metodología expositiva más tradicional y otra en la que se utilizan estrategias para construir *Thinking classrooms* y otras metodologías activas.
- Reflexionar y discutir sobre las metodologías empleadas y sus efectos, especialmente los relacionados con la capacidad de razonamiento matemático y la dimensión afectiva del alumnado.
- Estudiar diversos aspectos del dominio afectivo de la clase y su impacto a la hora de hacer actividades matemáticas, en particular relativas al razonamiento matemático.
- Hacer propuestas de mejora de la práctica docente en función de los diversos resultados obtenidos en la intervención.

Como ha quedado evidenciado en el Marco Conceptual, lo afectivo y lo cognitivo están estrechamente relacionados: las respuestas afectivas precisan de evaluaciones cognitivas para ocurrir, y la actividad cognitiva se ve influenciada por los afectos. Es por ello que en este trabajo se ha optado por integrar ambos estudios.

Tradicionalmente para el estudio de las actitudes en educación matemática se ha recurrido a cuestionarios y otros métodos cuantitativos que han proporcionado información muy valiosa a este campo de investigación. No obstante, en los últimos años se ha extendido el uso de métodos cualitativos que permiten acceder a un conocimiento profundo de los objetos de estudio y que resultan más naturales en el contexto del aula. Por ello, en este trabajo, se ha optado por un diseño metodológico mixto que permita que dichos enfoques se complementen, aunque el cualitativo tenga, en este caso, mayor peso.

Más concretamente, se ha realizado una intervención de siete semanas en un grupo de 3º de la ESO del IES Galileo, centro donde se ha realizado el periodo de prácticas. La manera de proceder ha estado inspirada en una investigación-acción y ha estado dividida en dos fases en las que se han utilizado principalmente dos tipos de metodologías diferentes. La información obtenida cualitativamente se ha visto complementada por la obtenida por medio de un cuestionario sobre diversos aspectos del dominio afectivo. De este modo, se han podido contrastar algunos de los

aspectos observados a través de otros medios, dándole una mayor validez a la información, y permitiendo realizar un análisis más profundo sobre la situación afectiva. A continuación, se verán cada uno de estos enfoques con más detalle:

3.1. Investigación-acción

Puesto que esta intervención y este TFM están motivados por lograr una mejora de la práctica docente, la metodología utilizada en el presente trabajo ha estado inspirada en la investigación-acción, una estrategia comúnmente utilizada en la investigación matemática para lograr este propósito. En este caso la intervención no cuenta con todo el rigor requerido en una investigación en educación matemática, pero esencialmente se han ido implementando diversas prácticas docentes, que se han ido adaptando o modificando en función de los resultados producidos. Esto ha requerido una observación y una reflexión diaria llevada a cabo a través de la elaboración de un diario. En él se ha recogido información sobre la metodología utilizada, los contenidos impartidos, la participación e implicación observadas, el comportamiento, las actitudes, las dificultades matemáticas constatadas, las respuestas emocionales del alumnado ante ellas y otros episodios que se han considerado relevantes. La escritura diaria ha favorecido la reflexión y una toma de decisiones sobre las prácticas utilizadas más fundamentada y ajustada a las necesidades de la clase. Y la posterior lectura ha posibilitado realizar el análisis requerido para este trabajo. Además, otro aspecto muy positivo de esta metodología es su flexibilidad, lo que ha proporcionado una gran libertad para adaptarse a las respuestas del alumnado dentro del contexto de periodo de prácticas del Máster.

De las dos fases en las que ha estado dividida la intervención, se ha dedicado aproximadamente la mitad del tiempo a cada una de ellas, es decir, algo más de tres semanas. En la primera de las fases se ha utilizado una metodología más tradicional, la lección magistral en su vertiente participativa, y en la segunda se han implementado sobre todo prácticas relativas a las *Thinking classrooms*, aunque también otras estrategias orientadas a fomentar el razonamiento matemático y a involucrar al estudiantado. Estas últimas prácticas, las más novedosas, son, en realidad, las que resultan de mayor interés para el objeto del trabajo. No obstante, para poder analizar los resultados de dichas prácticas es preciso considerar una referencia que permita comparar los resultados de una práctica frente a otra, y por ello la intervención se ha hecho en dos fases. Sin esta referencia, no se podría establecer una relación causa-efecto entre las prácticas utilizadas y los resultados observados. Y dado que la metodología expositiva sigue siendo actualmente una de las más extendidas, se ha considerado la mejor opción para ello.

Por otra parte, cuando se habla de los resultados observados, se hace alusión principalmente a aspectos como el tiempo que el alumnado dedica a pensar en una lección, la implicación activa en su aprendizaje y en actividades matemáticas, y su desempeño en las mismas. Todos ellos analizados teniendo en consideración el dominio afectivo del estudiantado. En este sentido, aunque solo hay una clase, la función de dividir en dos etapas tiene una utilidad similar a la de un grupo de control, estableciendo una referencia que permite medir y comparar una práctica frente a la otra.

3.2. Cuestionario PISA

La parte cuantitativa de la metodología ha consistido en un cuestionario de tipo Likert repartido al alumnado a mediados de la intervención y que ha sido de compilación voluntaria y anónima. El objetivo perseguido con este cuestionario ha sido obtener una visión más completa de diversos aspectos relacionados con el dominio afectivo del estudiantado.

Las preguntas han sido tomadas del cuestionario de contextos utilizado por PISA 2022. En particular, abordan temas relacionados con la mentalidad de crecimiento, diversas emociones y otras cuestiones afectivas.

La mentalidad de crecimiento es la creencia de que las habilidades y la inteligencia pueden desarrollarse con el tiempo, en lugar de ser dones innatos e invariables (OCDE, 2021), y según lo planteado por Mandler y McLeod, tener una mentalidad de crecimiento más fuerte puede ayudar a explicar una mejor disposición en el aprendizaje y para superar adversidades en el proceso. Su estudio ha consistido en cuatro afirmaciones sobre las que el alumnado ha determinado su grado de acuerdo con “Muy de acuerdo”, “De acuerdo”, “En desacuerdo” y “Muy en desacuerdo”:

- Con esfuerzo todo el mundo puede aumentar su inteligencia.
- La inteligencia es algo que no se puede cambiar mucho.
- Con esfuerzo todo el mundo puede tener buenos resultados en matemáticas.
- A algunas personas no se les dan bien las matemáticas independientemente de cuanto estudien.

En cuanto a las emociones, se ha preguntado al alumnado la frecuencia (“Nunca o casi nunca”, “Menos de la mitad del tiempo”, “La mitad de las veces”, “Más de la mitad del tiempo”, “Siempre o casi siempre”) con la que han sentido diferentes emociones en clase de matemáticas durante el último curso académico. Las emociones que se han tenido en consideración han sido:

ansiedad, seguridad, aburrimiento, emoción, cansancio, motivación, disgusto, interés, enfado, y alegría. Su estudio es interesante, porque como se ha expuesto en el Marco Conceptual, hay variedad de estudios que relacionan ciertas emociones con una amplia gama de procesos cognitivos y metacognitivos.

Como se anticipó anteriormente, dentro del estudio de las emociones se ha prestado especial atención a la ansiedad matemática. Para estudiarla, siguiendo la línea del cuestionario de contextos de PISA, se han incluido en la encuesta las siguientes seis afirmaciones, que el alumnado ha valorado a través de "Muy en desacuerdo", "En desacuerdo", "De acuerdo" y "Muy de acuerdo":

- Me preocupa que las clases de matemáticas sean difíciles para mí.
- Me pongo muy tenso cuando hago deberes de matemáticas.
- Me pongo muy nervioso haciendo problemas de matemáticas.
- Me siento impotente haciendo problemas de matemáticas.
- Me preocupa tener bajas calificaciones en matemáticas.
- Me produce ansiedad la idea de suspender matemáticas.

Asignando los valores del 1 al 4 a las opciones desde "Muy de acuerdo" hasta "Muy en desacuerdo", se ha establecido el siguiente baremo para determinar si un alumno tiene ansiedad alta, media o baja en función de la suma de sus respuestas:

Tabla 1 Baremo para medir ansiedad matemática.

Nivel de ansiedad	Suma de las respuestas
Bajo	[18, 24]
Medio	[13, 17]
Alto	[6, 12]

Por último, se han incluido en el cuestionario otras tres afirmaciones destinadas a conocer mejor la relación del alumnado con las matemáticas:

- Matemáticas es una de mis asignaturas favoritas.
- Matemáticas es fácil para mí.
- Quiero aprender y tener buenos resultados en matemáticas.

Nuevamente dichas afirmaciones han sido valoradas por el estudiantado a través de "Muy en desacuerdo", "En desacuerdo", "De acuerdo" y "Muy de acuerdo".

Las respuestas del cuestionario han sido analizadas mediante un sencillo análisis estadístico realizado con EXCEL, cuyos detalles se encuentran en el apartado 4.3 de este trabajo.

4. Marco de intervención

En este capítulo se abordan todos los aspectos relacionados con la intervención, incluyendo aquellos relativos a su preparación y diseño, los detalles de su implementación y los elementos correspondientes a su posterior análisis.

4.1. Contexto

Conocer el contexto en el que se interviene es fundamental tanto para el diseño de la intervención como para llevar a cabo una interpretación de los resultados más ajustada a la realidad. Se diferencian tres niveles de especificación del contexto a tener en cuenta: entorno, centro y clase.

Las características del entorno del centro, como la ubicación y el nivel socioeconómico medio, influyen en muchos casos en la percepción de la utilidad de la educación, y en particular de las matemáticas. En consecuencia, afectan al apoyo que las familias brindan a los alumnos y a las relaciones entre profesorado y alumnado, así como entre profesorado y familias. Por otro lado, las características propias del centro determinan su funcionamiento, la tolerancia ante ciertas conductas y los modos de actuación instaurados, que en última instancia afectan también a las dinámicas del aula, a la relación entre docente y estudiante, y a la percepción del alumnado sobre la asignatura. Por último, la clase es el nivel de mayor concreción. Las características particulares de la clase, tales como su nivel en matemáticas, su madurez, sus intereses, sus expectativas, sus creencias, la diversidad de formas de aprender y las dinámicas de socialización, moldean sus actitudes hacia el profesor, hacia la asignatura y hacia las distintas formas de enseñar.

Una vez expuesta la importancia de conocer el contexto para diseñar una intervención efectiva y poder realizar un análisis completo y realista, se procede a describirlo en detalle.

4.1.1. El entorno

El Instituto de Educación Secundaria Galileo se encuentra en el barrio de Pajarillos de Valladolid. Se trata de un barrio situado al este de la ciudad y delimitado por las vías del tren (que lo separan del centro de la ciudad), la ronda de la circunvalación VA-20, el Paseo del Cauce del río Esgueva

(que lo separa del Barrio Pilarica), la calle Pelícano (que lo separa del Barrio San Isidro), la Avenida de Soria y el Paseo de Juan Carlos I.

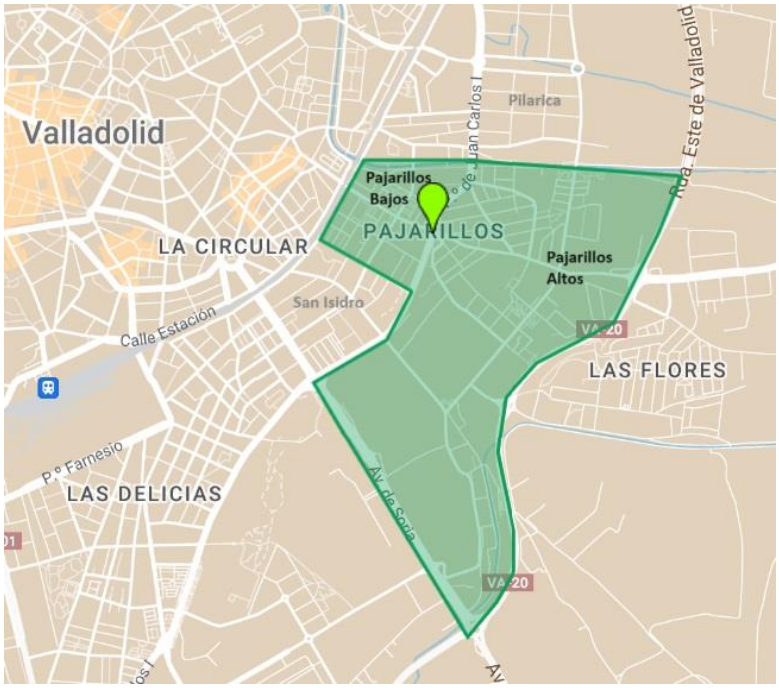


Figura 19. Mapa del barrio de Pajarillos. Adaptado de: Google Maps.

Se trata de un barrio surgido a finales del siglo XIX con la llegada de población humilde proveniente de entornos rurales, que construyeron viviendas ilegales y zonas de chabolas rodeadas de tierras de cultivo (García-Araque, y García-Cuesta, 2020). Su expansión urbana y crecimiento se produjo principalmente entre los años 1950 y 1980, durante los cuales se construyeron rápidamente muchos bloques de baja calidad.

A finales de los años 70, se estableció una zona del barrio para alojar temporalmente a la población que continuaba viviendo en chabolas, con la intención de garantizar unas condiciones dignas de habitabilidad y posteriormente fomentar su integración social. Este asentamiento, conocido como el Poblado de la Esperanza, acabó convirtiéndose en un gueto marginado y caracterizado por el tráfico de drogas. Finalmente fue derruido en 2003, y su población fue distribuida a otras partes del barrio y de la ciudad.

En la actualidad, el barrio se encuentra dividido en dos áreas: Pajarillos Bajos, la zona más poblada y cercana a las vías del tren, y Pajarillos Altos, una zona de reciente urbanización tras la demolición del Poblado de la Esperanza. Además, desde hace algunos años, se están llevando a cabo procesos de rehabilitación integral en diversas zonas del barrio. Estas intervenciones incluyen tanto proyectos arquitectónicos y urbanísticos destinados a regenerar e integrar el

territorio con el resto de la ciudad, como iniciativas sociales y vecinales orientadas a cohesionar la convivencia.

Con todo, en la actualidad sigue siendo uno de los barrios más humildes de la ciudad. Según la Estadística de los Declarantes del Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas de los mayores municipios por código postal, realizada en 2021, Pajarillos-Arcas Reales es el distrito de Valladolid con la menor renta media de la ciudad, que supone solo el 78,51% de la renta promedio de todo el municipio.

Otra característica destacable es la gran diversidad étnica y de procedencia de sus habitantes. En el barrio reside una numerosa población gitana, así como personas de más de 60 nacionalidades, siendo las más numerosas la marroquí, búlgara y rumana. Esta diversidad es especialmente notable en Pajarillos Bajos, donde, según datos proporcionados por el ayuntamiento a comienzos de 2024, el porcentaje de población extranjera empadronada es del 13,07%, uno de los más altos de la ciudad, en contraste con el 7,85% de la media de Valladolid.

4.1.2. El centro

El Instituto de Educación Secundaria Galileo es un centro público dependiente de la Junta de Castilla y León situado en Pajarillos, siendo uno de los tres institutos con los que cuenta el barrio. Más concretamente, se encuentra en la Carretera Villabáñez, en la zona de Pajarillos Altos, aunque a poca distancia de los Bajos.

Se trata un centro de educación secundaria que oferta enseñanza para los cuatro cursos de la Educación Secundaria Obligatoria y para dos modalidades de Bachillerato: Ciencias, y Humanidades y Ciencias Sociales; y que, además, cuenta con grupos de Formación Profesional de grado medio, básico y superior. En total hay unos 1000 alumnos, de los cuales unos 450 se encuentran en ESO o Bachillerato repartidos en cuatro grupos de 1º y de 2º de la ESO, tres grupos de 3º y de 4º de la ESO, y en una clase por cada modalidad y curso de Bachillerato. Para todos ellos, hay en torno a una centena de educadores y orientadores; y para dar respuesta a las necesidades del centro, cuenta con profesores de Educación Compensatoria, Pedagogía Terapéutica y de Servicios a la Comunidad.

El horario de secundaria y Bachillerato es diurno, comenzando a las 8.15 y acabando a las 14.00 en la mayoría de los casos, y alargándose hasta las 15.00 en grupos bilingües.

Uno de los rasgos que caracterizan al IES Galileo es la diversidad de su alumnado, tanto a nivel socioeconómico y de integración en el sistema escolar, como a nivel de procedencia, estando en consonancia con la diversidad propia de la zona. En consecuencia, para dar respuesta a las necesidades derivadas de esta situación, el centro está muy comprometido con la inclusión en la diversidad. Según se puede ver en su Reglamento de Régimen Interno, se inspiran en diversos principios educativos, y los más representativos, según la experiencia obtenida durante las prácticas en el centro, son los siguientes:

- La equidad, que garantice la igualdad de oportunidades, la inclusión educativa y la no discriminación y actúe como elemento compensador de las desigualdades personales, culturales, económicas y sociales, con especial atención a las que deriven de discapacidad.

- La flexibilidad para adecuar la educación a la diversidad de aptitudes, intereses, expectativas y necesidades del alumnado, así como a los cambios que experimentan el alumnado y la sociedad.

- La orientación educativa y profesional de los estudiantes, como medio necesario para el logro de una formación personalizada, que propicie una educación integral en conocimientos, destrezas y valores.

Siendo este último, la orientación educativa, un eje imprescindible que vertebra las relaciones del centro con el alumnado y sus familias.

El centro participa, además, en varios programas educativos: dos programas bilingües en inglés (MEC-British Council y Sección Bilingüe español-inglés, de acuerdo con el modelo de la Junta de Castilla y León); un proyecto de Autonomía para alumnos de secundaria basado en la flexibilización de agrupamientos en la ESO, con el fin de atender de manera individualizada las múltiples realidades del centro promoviendo la innovación pedagógica; y un Bachillerato de investigación y excelencia en idiomas (BIE). Asimismo, el centro promueve una variedad de actividades extracurriculares que contribuyen al desarrollo integral del alumnado. Entre otras, se incluyen viajes y excursiones culturales, intercambios, trabajo en el huerto del instituto, participación en la radio del centro, ajedrez, concursos de poesía y participación en certámenes de diversas asignaturas.

En cuanto a algunas normas o dinámicas de funcionamiento características del centro se encuentran las siguientes. En primer lugar, se promueve el orden de las aulas trabajando la responsabilidad individual y grupal. En segundo lugar, durante los cambios de clase, los alumnos permanecen en las aulas, y se supervisan las zonas comunes para evitar conflictos. Y en tercer lugar, aunque se lleva un registro de la asistencia y puntualidad se permite el ingreso al aula de alumnos aun llegando tarde.

Por último, aunque no se trata de un centro muy nuevo, cuenta con todas las facilidades propias de un centro público de estas dimensiones, destacando especialmente la presencia de una pizarra digital en todas las aulas.

4.1.3. La clase

Se trata de una clase de quince alumnos de 3º de la ESO con mucha diversidad étnica y de procedencia, pero también en otros aspectos. Hay tres alumnas que han repetido, un alumno con TDAH y una alumna de un año más que en el momento de mi llegada al centro hacía un mes que acababa de llegar a España procedente de Marruecos y que desconoce el idioma. Durante el período de intervención, se observó una notable evolución en su comprensión del español.

En términos generales, la clase se caracteriza por ser bastante inquieta y mostrar un nivel bajo en matemáticas. A través de la observación, se ha notado cierta división y la existencia de varios grupos dentro de la clase, algunos de los cuales no interactúan mucho entre sí. Los alumnos que no pertenecen a ningún grupo tienden a trabajar en parejas o de manera más independiente. Debido a estas divisiones, no se identifica claramente un líder en la clase en su conjunto, aunque dentro de cada grupo sí hay una o dos personas que ejercen más influencia.

Por otra parte, se han identificado varias personas en la clase con conductas disruptivas, como desobediencia, incumplimiento de normas o falta de cooperación. Algunas de estas personas, paradójicamente, muestran mayores habilidades en matemáticas y son conscientes de ello. A menudo, se muestran reticentes a participar en las dinámicas de clase y a prestar atención, lo cual afecta al ambiente de aula. Como resultado, la clase tiende a ser bulliciosa y caótica, lo que provoca que las lecciones empiecen a menudo con cierto retraso y que el ambiente no sea siempre el más propicio para el aprendizaje. A pesar de todo ello, la relación del alumnado con el profesorado es generalmente cordial y muy cercana.

En general, se observa que los estudiantes tienen la percepción de que las matemáticas son muy difíciles, y que específicamente, las de 3º de la ESO, algo más abstractas que en cursos anteriores, no están muy conectadas con el mundo real y les van a resultar de poca utilidad. Además, muchos de los alumnos muestran poca confianza en sus habilidades, algo que se evidencia, por ejemplo, durante la realización de ejercicios en la pizarra, una actividad que les gusta y para la que se suelen mostrar dispuestos, pero durante la cual tienden a buscar constantemente indicaciones o aprobación.

Por otra parte, son pocos los alumnos que manifiestan gusto e interés por las matemáticas. En general, adoptan una actitud pasiva frente a las tareas matemáticas, prefiriendo que se les explique cómo realizarlas antes de intentarlas por sí mismos, aunque esto probablemente se deba a haberse acostumbrado a esta dinámica en las clases de matemáticas a lo largo de los años. Por último, se ha constatado como tendencia general una falta de hábito de trabajo y poca perseverancia al enfrentarse a las tareas matemáticas.

Como corresponde por ley a 3º de la ESO, en esta clase se imparten cuatro horas de matemáticas a la semana. Tres de ellas son después del recreo y una de ellas a primera hora, en la que es bastante frecuente que falten alumnos.

4.2. Diseño de la propuesta de intervención

En este apartado se presentan todos los aspectos relevantes que determinan la propuesta de intervención de este trabajo. En primer lugar, se exponen los contenidos que se quiere abordar y las competencias que se pretende desarrollar a través de ellos. Posteriormente, se especifican los materiales necesarios para trabajar estos contenidos y se detallan las prácticas metodológicas previstas para cada una de las dos fases de la propuesta y que han sido seleccionadas a partir de lo contemplado en el Marco Conceptual y de las características del grupo. Y por último, se expone cómo está previsto evaluar la efectividad de cada una de las metodologías implementadas.

4.2.1. Contenidos y competencias

El tiempo disponible para la intervención es de siete semanas. Durante este período, los temas a trabajar son “Sucesiones y progresiones aritméticas y geométricas” y “Lenguaje algebraico”. Y los contenidos que se planea abordar mediante la intervención son los saberes básicos establecidos por la LOMLOE relativos a estos temas:

Sucesiones y progresiones aritméticas y geométricas

Del sentido numérico se incluyen dos saberes, el primero de ellos correspondiente al apartado de conteo y el segundo correspondiente al de relaciones:

- Estrategias variadas de recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana llegando solo si es necesario al uso de fórmulas.
- Patrones y regularidades numéricas. Reconocimiento, aplicación y uso de las sucesiones numéricas.

Y del sentido algebraico se incluyen los dos siguientes saberes relativos al apartado de patrones contemplado en la ley:

- Patrones, pautas y regularidades: observación, predicción, búsqueda de términos que faltan y determinación de la regla de formación en casos sencillos, mediante palabras, gráficas, tablas o reglas simbólicas.
- Fórmulas y términos generales: obtención mediante la observación de pautas y regularidades sencillas y su generalización.

Lenguaje algebraico

Naturalmente todos los saberes básicos relativos a este tema pertenecen al sentido algebraico propuesto en la ley. Tres de ellos corresponden al uso del lenguaje algebraico para realizar modelos matemáticos:

- Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando, representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico.
- Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.
- Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.

Y otros dos son relativos al concepto de variable:

- Variable: comprensión del concepto como incógnita en ecuaciones cuadráticas, como indeterminadas en expresión de patrones o identidades notables y como cantidades variables en fórmulas y funciones cuadráticas.
- Polinomios en una variable, operaciones básicas y factorización.

Según la LOMLOE, el objetivo final del sistema educativo es que los estudiantes desarrollen las competencias necesarias y alcancen el Perfil de Salida que les permita ser ciudadanos capaces de enfrentar las necesidades del siglo XXI. Aunque se ha visto que los contenidos (dimensión cognitiva) son imprescindibles para el desarrollo de estas competencias, también es esencial desarrollar la habilidad para aplicar esos conocimientos en tareas concretas (dimensión instrumental), así como fomentar una mentalidad y disposición positiva para actuar y reaccionar

en una variedad de contextos utilizando dichos conocimientos y habilidades (dimensión actitudinal). Teniendo esto en consideración, las competencias específicas que se busca que los alumnos desarrollen mediante estos contenidos en esta intervención son los siguientes, obtenidos también de la ley educativa:

- **Competencia específica 1**: Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las Matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.
- **Competencia específica 3**: Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.
- **Competencia específica 4**: Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.
- **Competencia específica 8**: Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.
- **Competencia específica 9**: Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.
- **Competencia específica 10**: Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.

Esto no implica que no se trabajen colateralmente otras competencias específicas incluidas en la ley, pero las que se acaban de enumerar son en las que más se incidirá. A su vez, estas competencias ayudarán a desarrollar aspectos de las competencias clave, principalmente la STEM y la competencia en comunicación lingüística, ya que varias de ellas están explícitamente relacionadas con la comunicación y el razonamiento matemático, que en este trabajo se ha concebido como un tipo de comunicación interna. En el caso de la alumna que no conoce el español, aparte de la competencia lingüística se trabajará la competencia plurilingüe. Además, de

manera general también se trabajarán la competencia emprendedora (CE), la competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA), y la competencia ciudadana (CC), especialmente con las competencias específicas 8, 9 y 10. Es importante notar que debido a las diferencias entre las metodologías, se espera que el alumnado tenga muchas más oportunidades de desarrollar estas tres competencias específicas durante la segunda fase de la intervención.

4.2.2. Materiales

A continuación, se describen los materiales necesarios para la intervención. Algunos de ellos serán utilizados solo en una de las fases de intervención y otros en ambas, pero de distintos modos.

- **Pizarra digital**: Se utiliza en ambas fases, pero su uso es más frecuente en la primera. En ella el profesor expone la materia que debe conocer el alumnado. Además, es el principal medio a través del cual los alumnos participan en clase de matemáticas.
- **Libro**: Se utiliza en ambas fases, pero con diferentes propósitos. En la lección magistral, el libro es indispensable y sirve como guía del temario y repositorio de ejercicios. Y en la segunda fase, su uso es más complementario, actuando como un apoyo adicional y un repositorio de ejemplos, pero sin ser el único recurso.
- **Cuaderno**: Es una herramienta indispensable durante la lección magistral. En él, cada alumno toma notas de lo expuesto en clase, practica ejercicios y realiza los deberes. Es decir, es donde se entrena lo aprendido.
- **Superficies borrables:** Se usan durante la segunda fase para realizar tareas matemáticas de manera cooperativa. Se trata de superficies de dimensiones 100x67cm, que se utilizan igual que una pizarra en la que se escribe con rotuladores. Aunque pueden ser adheridas a una superficie vertical, como una pared, se ha optado por su utilización en horizontal ya que no se pueden despegar y volver a pegar a conveniencia, y no se cuenta ni con las infraestructuras necesarias ni con el permiso del centro para hacerlo. Recuérdese que su uso de manera horizontal es el segundo más efectivo de los analizados por Liljedahl.
- **Teléfonos:** Su uso en clase está limitado en ambas fases. Solo se pueden usar para tomar fotografías de algo planteado en la pizarra, como calculadora en caso de no tener una o para la realización de alguna actividad particular que lo requiera, como un Kahoot. La excepción es la alumna que no habla español, que puede utilizar su teléfono para hacer fotos y usar Google Lens, una aplicación que posibilita traducir información del español al árabe mediante una imagen. En este caso, su uso puede considerarse una implementación del DUA, que

promovía diversos formatos para presentar el contenido y diferentes maneras de implicarse en el aprendizaje.

- **Fichas de actividades secuenciales:** Se proporcionan durante la segunda fase. En ellas se distribuyen las tareas matemáticas que el alumnado debe realizar cooperativamente. Se entregan tanto en formato físico a cada grupo, como a través de una plataforma online para para que todos tengan acceso a ellas y puedan practicar en casa.
- **Material manipulativo para polinomios:** Se utiliza en la segunda fase. Este material ha sido diseñado personalmente para introducir el concepto de polinomio de manera manipulativa, lo cual, según el enfoque C-P-A y el Método Singapur, facilita la posterior transición a lo pictórico y a lo abstracto. Esto es particularmente adecuado para el nivel de 3º de la ESO, ya que el alumnado está desarrollando el pensamiento formal, algo que, como se ha visto, ocurre de manera no uniforme entre los distintos alumnos.

  El material está confeccionado con gomaeva, aunque también puede hacerse con papel, y su representación gráfica es muy sencilla, lo que permite una fácil transición a la fase pictórica. El material incluye rayas, cuadraditos, pares de cuadraditos (dispuestos uno encima del otro), tríos de cuadraditos y cuartetos. Véase la siguiente figura para mayor claridad:

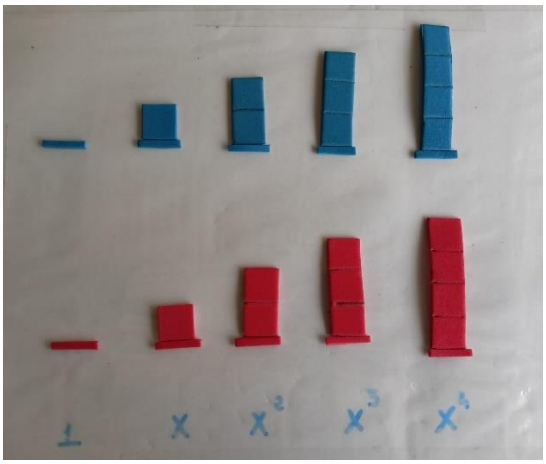
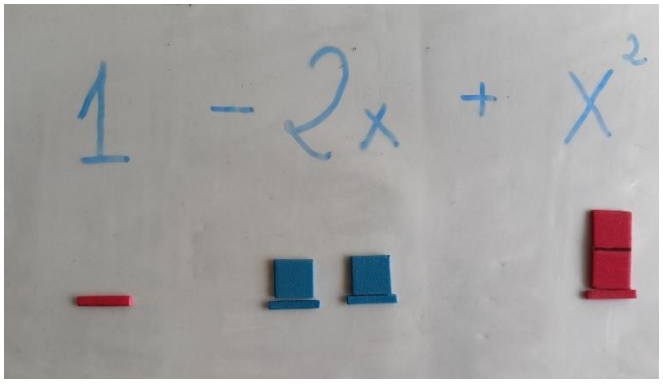


Figura 20 Material manipulativo para trabajar polinomios. Fuente: Elaboración propia.

Se puede notar que los cuadraditos superpuestos evocan la imagen de cajas apiladas sobre un soporte, por lo tanto, se utilizará frecuentemente el término “cajas” para hacer referencia a estas figuras. El color rojo indica que el coeficiente del monomio correspondiente es 1, mientras que el color azul indica que el coeficiente correspondiente es -1, permitiendo así representar positivos y negativos.

Aunque este material puede ser utilizado para trabajar la multiplicación de polinomios, en este trabajo se ha utilizado para trabajar la representación, la suma y la resta de polinomios. A continuación, se proporciona un ejemplo de cada uno de estos procesos con este material:

- **Representación de polinomios:** el número de cajas sobre cada soporte sirve para representar los grados, y el número de veces que aparece cada figura indica el coeficiente de cada monomio en valor absoluto. El color, por otra parte, determina el signo (positivo o negativo) de cada coeficiente. De este modo, si se quiere representar $1 - 2x + x^2$, se utiliza una raya roja para representar el 1, dos cajas solas azules para representar $2x$ y una pila con 2 cajas rojas para representar x^2. Puede verse en la siguiente imagen:



Fuente 21 Representación de un polinomio a través del material manipulativo. Fuente: Elaboración propia.

- **Suma de polinomios**: puede realizarse a través del material manipulativo juntando y agrupando las fichas de igual forma de los dos polinomios involucrados en la operación, y utilizando la regla de que si se tienen dos fichas de la misma forma pero de distinto color, entonces estas se cancelan.

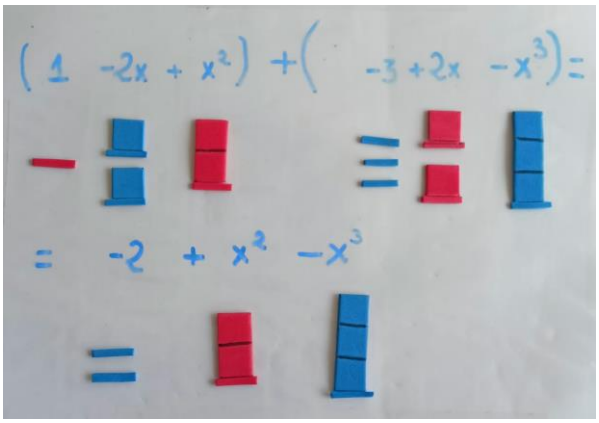


Figura 22 Suma de polinomios a través del material manipulativo. Fuente: Elaboración propia.

- **Resta de polinomios**: esta operación se realiza con el material utilizando que restar es sumar el opuesto. El opuesto de un polinomio se construye usando las mismas fichas que para el polinomio original pero de color contrario. Se ilustra con el siguiente ejemplo:

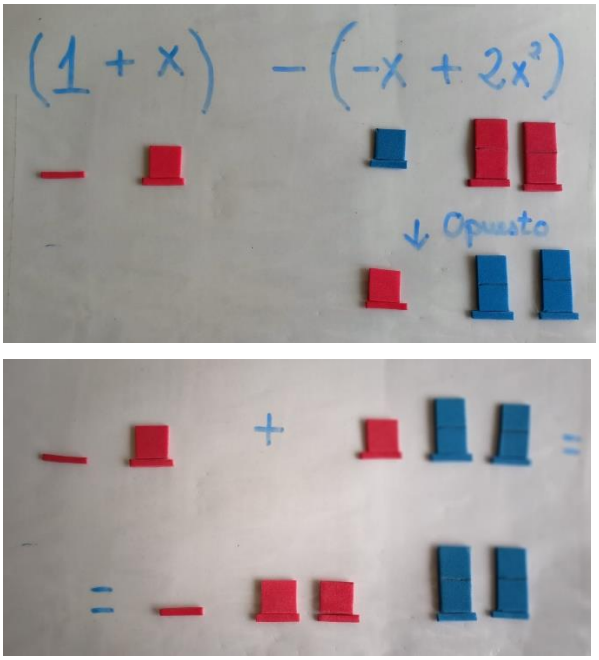


Figura 23 Resta de polinomios a través del material manipulativo. Fuente: Elaboración propia.

Nótese que siguiendo lo planteado por el DUA, aparte del teléfono móvil, varios de estos materiales proporcionan diversos formatos de expresión, de acción y participación en el aprendizaje.

4.2.3. Prácticas

En este apartado se exponen las estrategias y prácticas que se plantea llevar a cabo en la intervención. No obstante, es preciso hacer varias aclaraciones. La primera es que se detallarán más exhaustivamente las prácticas relativas a la segunda fase, es decir, aquellas relacionadas con las *Thinking classrooms* y otras metodologías destinadas a involucrar al alumnado y fomentar su razonamiento. Esto se debe a que en la primera fase las prácticas son más generales, convencionales y cercanas a la dinámica preexistente en la clase.

La segunda aclaración es que, dado que la intervención se ha inspirado en una investigación-acción, algunas de las prácticas planteadas pueden verse alteradas o modificadas parcialmente durante la ejecución de estas, para adaptarse a las necesidades y a las respuestas de la clase. Igualmente, la aplicación de alguna de ellas puede verse limitada debido a que la intervención forma parte del periodo de prácticas del Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria (MUPES).

Primera Fase

Se considera lección magistral en su versión participativa, ya que se considera que esta modalidad permite un mayor ejercicio del razonamiento matemático y que dadas las características del grupo, tan inquieto, es adecuado hacer la clase más interactiva. Las prácticas de esta metodología que se utilizarán son las siguientes:

1. Exposición de los contenidos en la pizarra por parte del profesor. Estos se verán apoyados por gráficos y dibujos que favorezcan la intuición del alumnado.
2. Ilustración de los contenidos mediante ejemplos y ejercicios, cuyo nivel será similar al de los exámenes.
3. Fomento de la participación mediante preguntas sobre los contenidos expuestos o extensiones de estos.
4. El alumnado toma apuntes de la exposición del profesor desde su pupitre.
5. La dinámica de la clase incluye un repaso inicial, corrección de deberes, exposición de la teoría en la pizarra apoyándose en el libro, realización de ejemplos (por parte del profesor y, ocasionalmente, del alumnado) y trabajo personal del estudiante sobre la materia o en pequeños grupos que se encuentren cerca.
6. La evaluación se basa principalmente en un examen sobre los contenidos tratados, donde se espera que el alumnado demuestre las competencias adquiridas. En menor medida, se

evalúa el cuaderno (completitud de apuntes y orden), la realización diaria de deberes (revisados diariamente), y la participación y actitud en el aula.

Puesto que se ha procurado adaptarse al modo de trabajo previo del grupo, durante la intervención se han adoptado de manera puntual otra prácticas a las que el grupo se encontraba habituado. Estas se mencionarán en el apartado de Intervención.

Segunda Fase

A continuación, se exponen las prácticas extraídas de Liljedahl (2020) que se ha decidido implementar parcial o totalmente en la segunda fase para conseguir *Thinking classrooms*. En el libro se menciona que no es conveniente implementar todas las prácticas a la vez debido a que supone un cambio brusco respecto a la metodología tradicional. En su lugar, se recomienda comenzar con tres o cuatro prácticas y cuando el grupo las haya interiorizado, ir añadiendo más gradualmente. Las prácticas han sido seleccionadas por su potencial para fomentar el razonamiento matemático, el trabajo cooperativo, y por considerarse las más adaptables a la clase y a las dinámicas del centro. También se ha tenido en consideración la limitación del tiempo y mi rol como alumna en prácticas. El orden en que se han implementado, así como las posibles modificaciones derivadas de su aplicación, se detallan en el apartado dedicado a la Intervención.

Las prácticas son las siguientes:

- Diseño y uso de actividades secuenciales de dificultad creciente, que permiten a todo el alumnado comenzar a trabajar y entrar en el flujo de aprendizaje descrito por Liljedahl. Muchas de las actividades están diseñadas de manera que en cada paso solo cambie una variable de aprendizaje, para evitar que el aumento de dificultad sea brusco y cause frustración, pero también para prevenir el aburrimiento. Todas las actividades proporcionadas se incorporan en los anexos. Un ejemplo de actividad secuencial sobre el lenguaje algebraico es la siguiente modelización de diversas situaciones utilizando expresiones algebraicas:

    1. Un número: x
    2. Un número más dos unidades:
    3. El triple de un número:
    4. La mitad de un número:
    5. El doble de un número, más cinco unidades:
    6. El doble del resultado de sumarle tres a un número:

- Trabajo cooperativo en grupos de no más de tres personas, formados aleatoriamente mediante una baraja de cartas española. Los alumnos se distribuyen en grupos según el número extraído, garantizando que el proceso es aleatorio. Esto favorece la creación de grupos heterogéneos, con suficiente diversidad y redundancia, promoviendo la inclusión y evitando que los alumnos sospechen de segundas intenciones en la elección de los grupos, lo que, teóricamente, aumenta su disposición a colaborar.

- Uso de superficies horizontales borrables. No se usan verticalmente debido a la logística de la clase, como se ha comentado anteriormente. Además, en cada grupo se permite un único rotulador que debe rotarse entre los miembros para garantizar la participación de todos. Se enfatiza que todos los miembros deben verbalizar sus razonamientos y explicárselos al resto de componentes del grupo, garantizando su comprensión y corrigiéndose si es necesario. Esto fomenta la responsabilidad del estudiantado sobre su aprendizaje y el desarrollo de la competencia en comunicación lingüística.

- Inicio del trabajo cooperativo sobre las tareas planteadas prácticamente desde el comienzo de la clase, ya que, según Liljedahl (2020), la atención y disposición a trabajar de los alumnos disminuye con el tiempo. Los primeros 5-10 minutos se utilizan para explicar qué se va a hacer (aunque sin detallar cómo) y para retomar las ideas aprendidas en días anteriores que sean necesarias para que los alumnos empiecen a trabajar. El profesor se desplaza por los diferentes grupos mientras los estudiantes trabajan, dedicando poco tiempo a la explicación en pizarra, la cual se usa solo para consolidar, unir ideas, hacer algún ejemplo ilustrativo, plantear alguna extensión o reforzar alguna idea.

- La consolidación se realiza en dos etapas durante la clase. La primera etapa, más breve, se lleva a cabo al inicio de la clase. En esta etapa, además de plantear la tarea a realizar, se retoman las ideas de días anteriores que resultan necesarias para la actividad del día. Esto se hace mediante preguntas o planteando conceptos conocidos y pidiendo al alumnado que haga extensiones o generalizaciones sobre el mismo. La segunda etapa de consolidación ocurre al final de la clase, donde se da coherencia a lo trabajado a través de las actividades secuenciales. Esta etapa es guiada por el profesor que utiliza ejemplos de las tareas planteadas u otros adicionales para ilustrar las ideas principales, apoyándose en la pizarra digital.

- Con el objetivo de movilizar el conocimiento se permite al alumnado levantarse, moverse y hablar con otros grupos, exclusivamente, sobre las tareas matemáticas. Además, los

alumnos pueden ilustrar sus propias dudas en la pizarra digital para que otros compañeros puedan consultarlas y preguntarles si tienen dificultades similares.

- No se responden dudas de manera explícita. Dado que las actividades están planeadas secuencialmente, se recurre a puntos anteriores para guiar al alumnado hacia niveles más complejos. En caso de necesitar más explicaciones, se parte de algo conocido (por ejemplo, una propiedad numérica) y se les pregunta sobre una extensión (por ejemplo, la extensión de esa propiedad numérica a una propiedad sobre los polinomios), pidiéndoles que intenten algo que aún no saben. Otra opción es motivarles a preguntar a otros grupos.

- Los deberes no se asignan todos los días ni se controlan sistemáticamente. Se proponen como una forma de repasar, indicando ejercicios del libro o de las fichas repartidas que sirvan para ese propósito, o proponiéndolos como parte de la consolidación.

Las prácticas anteriores están basadas en las propuestas en Liljedahl (2020) para construir *Thinking classrooms*, que era el objetivo de la segunda fase de la intervención. Aunque estas han sido las más características de esta, en sesiones específicas se han utilizado otras dos prácticas consideradas útiles para fomentar el razonamiento de los alumnos o mejorar su disposición a trabajar en matemáticas:

- Uso de materiales manipulativos para trabajar polinomios, siguiendo un enfoque similar al del método Singapur que favorezca el posterior paso a lo pictórico y a lo algebraico. Esto ayuda al alumnado, que recordemos que está desarrollando su pensamiento formal, a pasar de lo concreto a lo abstracto. Pese a no ser una práctica propiamente de las *Thinking classrooms*, resulta adecuada para hacer accesible a todo el alumnado la materia y favorecer su razonamiento. Además, esta práctica ha sido planteada de manera conjunta a otras como las tareas secuenciales o el trabajo cooperativo.

- Uso de la gamificación para realizar actividades de repaso. Concretamente, se ha recurrido a Kahoot, una plataforma educativa interactiva que permite a los educadores crear y compartir cuestionarios, encuestas y juegos de aprendizaje basados en preguntas de opción múltiple, que los estudiantes rellenan en tiempo real utilizando dispositivos móviles. Aunque no pertenece expresamente a las *Thinking Classrooms*, se ha empleado como estrategia para lograr una mayor implicación de los alumnos, condición que Liljedahl considera imprescindible para que comiencen a pensar.

Por último, se presentan unos instrumentos de evaluación diseñados para esta segunda fase de intervención de acuerdo con las directrices de Liljedahl. A diferencia de las prácticas anteriores,

estas se plantean de manera meramente teórica, puesto que la evaluación (tanto formativa como sumativa) del estudiantado no es una labor que corresponda un alumno de prácticas (aunque sí pueda participar en la corrección y elaboración de exámenes), y menos tratándose de una forma de evaluación muy distinta a la planteada en la Programación Didáctica del curso.

- Evaluación formativa: se ha dividido el tema en subtemas y se ha elaborado el siguiente instrumento del que dispondrá cada alumno. Cada subtema cuenta con varios niveles de adquisición (básico, medio y avanzado), que se encuentran ilustrados por ejemplos completos o parciales. Estos ejemplos permiten al alumno identificar en qué punto se encuentra su aprendizaje, ayudándole a autorregularse y a conocer qué le falta por adquirir.

LENGUAJE ALGEBRAICO	**BÁSICO**	**MEDIO**	**AVANZADO**
Modelización de situaciones a través de variables.	Una cantidad: x . El doble de una cantidad: $2x$.	Un tercio de una cantidad, más uno: El cuadrado de una cantidad, menos cinco: $x^2 - 5$.	El área y el perímetro de esta figura: $3x + 1$ x
Concepto de polinomio	En una variable: $p(x) = 3x^2 + x - 1$ $q(y) = y^3 - 2y + 1$	En varias variables: $r(x, y) = 2x^3 - 3xy^2 + y - 2$	
Suma y resta de polinomios	$3x^2 + 5x + 2$ $+ \quad 2x^2 - 3x + 4$ ——————— $5x^2 + 2x + 6$	$(3x^2 - 2 + 4x^3) + (-x^2 + 1) =$ $(5y - 2y^2 + 3) - (4 - y^2)$ $= -y^2 + 5y - 1$	$(3x^2y - 2xy + 4)$ $+ (5xy - x^2 + y^2)$ $= 3x^2y + 3xy - x^2$ $+ y^2 + 4$
Multiplicación de polinomios	$3 \cdot (2x^2 - 5x + 1)$ $= 6x^2 - 15x + 3$ $x^2 \cdot (3x^2 - 2x + 5) =$	$(x - 1) \cdot (3x^2 - 2x + 5) =$	$(a + b) \cdot (a + 2b)$ $= a^2 + 3ab + 2b^2$ $(y - 1) \cdot (y + 1) =$

Figura 24 Instrumento para la evaluación formativa. Fuente: Elaboración propia.

- Evaluación sumativa: La evaluación sumativa se lleva a cabo mediante un instrumento similar al utilizado anteriormente, en el cual se incluyen los subtemas en los que se ha dividido la unidad y los diferentes niveles de adquisición posibles. Sin embargo, en lugar de ejemplos, este instrumento cuenta con espacios en blanco que el docente rellena en función del desempeño cronológico observado en los alumnos durante las lecciones. Con una tendencia y un número suficiente de datos observados favorables en cada nivel, se da por adquirida la categoría. De este modo, se logra una verdadera evaluación continua, que valora el trabajo diario sin penalizar el desconocimiento inicial de los conceptos. Los símbolos utilizados para marcar el desempeño serán los mencionados en el Marco Conceptual: realizado individualmente (✓), realizado individualmente con un pequeño fallo (S), realizado con ayuda (H), realizado en grupo (G), intentado aunque erróneo (✗) y no intentado (N). Además, si se observa que un alumno ha superado un nivel de adquisición de una categoría también se consideran superados los de los niveles inferiores de la misma categoría.

  Para calificar adecuadamente, se asignará un peso específico a cada nivel de manera que el aprobado se consiga al superar los niveles básicos; y tal que se obtengan mayores calificaciones al alcanzar niveles superiores. El profesor dispondrá de un instrumento de estos para la evaluación de cada alumno. A continuación, el instrumento diseñado:

LENGUAJE ALGEBRAICO	BÁSICO	MEDIO	AVANZADO	NOTA POSIBLE	NOTA
Modelización de situaciones a través de variables.	✓ ✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓ ✓	4	4
Concepto de polinomio	✓ ✗ N	✓ G ✓		3	3
Suma y resta de polinomios	S N	✓ ✓ ✓	G ✗ N N	4	3
Multiplicación de polinomios	H S ✓	✓ ✓	G ✗ N	4	3
				15	13

Figura 25 Instrumento de calificación y ejemplo de uso. Fuente: Elaboración propia.

De este modo la calificación resultante es $\frac{13}{15} \cdot 10 \approx 8.67$.

4.2.4. Evaluación

En el apartado anterior se ha especificado, de manera teórica, cómo evaluar a los alumnos tanto formativa como sumativamente. Este apartado está destinado a exponer cómo se va a evaluar esta propuesta, es decir, a determinar la efectividad de cada una de las dos fases de intervención.

Dado que la motivación del trabajo es determinar prácticas que mejoren el razonamiento matemático y lograr clases en las que los alumnos dediquen más tiempo a pensar, se discutirá qué metodología ha dado mejores resultados en función de la cantidad de alumnos que piensan en cada clase, el tiempo dedicado a pensar y la implicación en las distintas actividades matemáticas. Todo esto se determinará por medio de la observación. Además, puesto que el razonamiento matemático está inevitablemente vinculado a la comunicación, se ha prestado especial atención a los resultados de cada metodología en términos de la capacidad del alumnado para comunicar ideas y expresarse utilizando el lenguaje matemático.

Otros indicadores que se utilizarán para determinar la efectividad de las prácticas incluyen los logros académicos alcanzados con cada una de las metodologías empleadas, el tiempo empleado en trabajar ciertos contenidos, la participación del estudiantado, el interés reflejado, la autonomía, el grado en que se favorece la colaboración entre alumnos, y el desarrollo de otras competencias, siempre relacionadas con el razonamiento matemático.

Por último, como ya se ha expresado anteriormente, se prestará especial atención a cómo el dominio afectivo del alumnado influye en la recepción de estas metodologías, y si estas metodologías generan algún cambio en su disposición hacia el aprendizaje.

4.3. Resultados de la recogida de datos

En lo relativo a la mentalidad de crecimiento el análisis de los resultados de la encuesta refleja que, aunque la mayoría (84%) del alumnado está de acuerdo o muy de acuerdo con que con esfuerzo todo el mundo puede aumentar su inteligencia, casi la mitad del alumnado (46%) considera que esta no se puede cambiar mucho. En lo relativo a las matemáticas, todos los estudiantes menos uno reflejan su acuerdo con la afirmación de que con esfuerzo todo el mundo puede tener buenas calificaciones en matemáticas. No obstante, la totalidad de la clase también se muestra de acuerdo con el hecho de que a algunas personas no se les dan bien las matemáticas

independientemente de cuánto estudien, lo que puede condicionar a parte del alumnado que tenga menor confianza en sí mismo a abandonos tempranos o a una falta de perseverancia, que sean los que en realidad acaben incidiendo negativamente en su rendimiento en la asignatura.

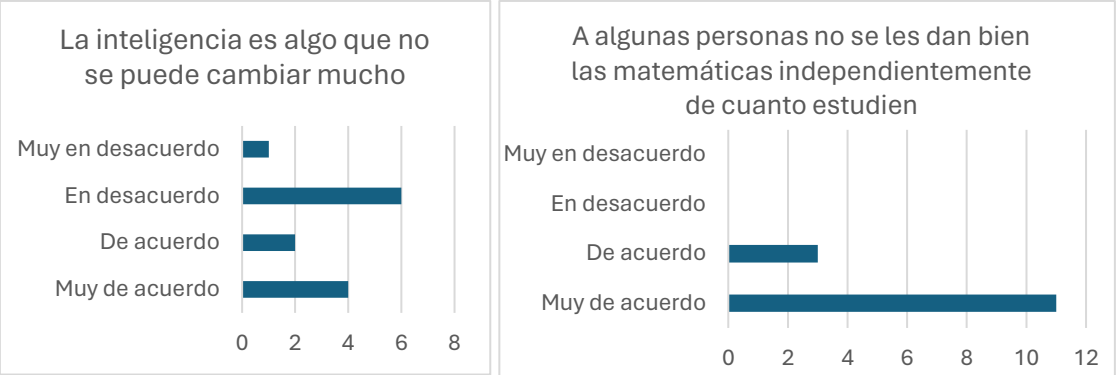


Figura 26. Gráficos que reflejan el grado de acuerdo del alumnado ante dos afirmaciones sobre la mentalidad de crecimiento. Fuente: Elaboración propia.

El hecho de que el número de respuestas no sumen 15 se debe a que finalmente el cuestionario solo lo realizaron 14 personas, y a que algunas cuestiones no fueron respondidas por la totalidad del alumnado.

Ante la pregunta "¿con qué frecuencia te has sentido de las siguientes maneras en tus clases de matemáticas en este curso académico?", las respuestas del alumnado fueron las siguientes:

Tabla 2. Porcentaje de alumnos que han experimentado diversas emociones en clase de matemáticas con determinada frecuencia.

FRECUENCIA	Ansioso	Seguro	Aburrido	Emocionado	Cansado
Nunca o casi nunca	8%	0%	17%	42%	9%
Menos de la mitad del tiempo	31%	46%	17%	17%	27%
La mitad de las veces	38%	31%	25%	17%	36%
Más de la mitad del tiempo	23%	15%	17%	25%	9%
Siempre o casi siempre	0%	8%	25%	0%	18%

FRECUENCIA	Motivado	Disgustado	Interesado	Enfadado	Contento
Nunca o casi nunca	0%	8%	17%	31%	0%
Menos de la mitad del tiempo	25%	25%	8%	15%	31%
La mitad de las veces	50%	50%	33%	38%	31%
Más de la mitad del tiempo	17%	8%	33%	15%	31%
Siempre o casi siempre	8%	8%	8%	0%	8%

Nota: Se encuentran subrayadas las categorías con mayor porcentaje de respuesta de cada columna.

Los datos por sí mismos proporcionan poca claridad, por lo que es preciso centrarse en determinados aspectos para obtener algo de información relevante.

A continuación, se presentan los estados experimentados por un mayor porcentaje del alumnado al menos la mitad del tiempo. El 75 % ha reflejado sentirse motivado e interesado en la clase de matemáticas al menos la mitad del tiempo, seguido del 69 % que ha indicado sentirse contento, y cerca del 67 % ha manifestado sentirse disgustado y aburrido. Estos datos, aunque puedan parecer contradictorios, son compatibles y, en cierta medida, preocupantes, pues aunque las primeras emociones son activadoras positivas y tienen un efecto favorable en la autorregulación y en el uso de diversas estrategias cognitivas, el porcentaje de aburrimiento (una emoción desactivadora negativa perjudicial para el aprendizaje, la planificación, el establecimiento de objetivos y el uso de estrategias de procesamiento profundo) y de disgusto tampoco es desdeñable. No obstante, convendría comparar estos resultados con los obtenidos en el informe PISA en Castilla y León o en España para determinar si los resultados son significativos. Un porcentaje menor de estudiantes ha registrado que se sienten cansados (64 %), enfadados (54 %), seguros (54 %) y emocionados (42 %) al menos la mitad del tiempo, siendo este último estado el único experimentado al menos la mitad del tiempo por menos de la mitad de la clase.

Por otra parte, si se observa la tabla de manera global, se puede apreciar que, en la mayoría de las columnas, la categoría que recibe un mayor porcentaje de respuestas es la central ("La mitad del tiempo"). En la tabla se han subrayado las categorías con mayor porcentaje de respuestas. Las principales excepciones a esta tendencia son la seguridad y la emoción; y en el caso del aburrimiento, el interés y la alegría comparten esta posición con otra categoría.

En el caso de la seguridad, la opción más elegida es "Menos de la mitad del tiempo" con el 46% de las respuestas, que puede explicar la falta de autonomía, la baja confianza y la escasa toma de riesgos de gran parte alumnado. En cuanto al caso de la emoción, la opción más escogida es "Nunca o casi nunca" siendo elegida por el 42 % de los estudiantes. Respecto al aburrimiento, la categoría central comparte el mayor porcentaje de respuestas (25 %) con la de "Siempre o casi siempre", mientras que sobre el interés, la respuesta central recibe el mismo porcentaje de votos (33%) que "Más de la mitad del tiempo".

Como ya se ha mencionado, sería interesante conocer las respuestas a esta pregunta en el resto de España o Castilla y León para poder extraer información más valiosa. No obstante, sin ella resulta prudente no extraer más conclusiones.

En cuanto a la ansiedad, las respuestas a las seis preguntas relativas a esta emoción (Me preocupa que las clases de matemáticas sean difíciles para mí; me pongo muy tenso cuando hago deberes

de matemáticas; me pongo muy nervioso haciendo problemas de matemáticas; me siento impotente haciendo problemas de matemáticas; me preocupa tener bajas calificaciones en matemáticas; me produce ansiedad la idea de suspender matemáticas) se han utilizado para diseñar un baremo según lo descrito en el Marco Metodológico. Según este baremo el 50 % del alumnado presentaría un nivel alto de ansiedad matemática, el 29% medio y el 21% bajo:

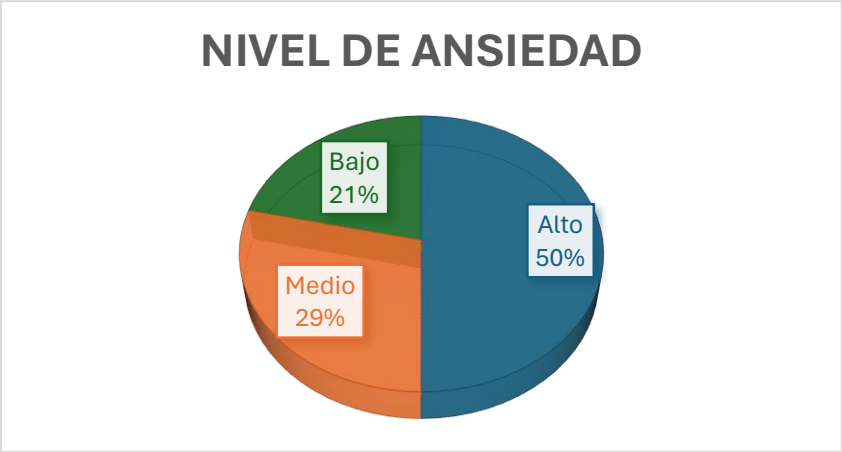


Figura 27 Representación del porcentaje de alumnos de la clase que experimenta cada nivel de ansiedad matemática de acuerdo con el baremo establecido. Fuente: Elaboración propia.

El estudio de esta emoción es particularmente importante porque tal y como se expuso en el Marco Conceptual está relacionada con débiles estrategias cognitivas, metacognitivas y con peores desempeños en matemáticas.

Si bien los resultados de este baremo no pretenden sustituir los resultados obtenidos por un test de ansiedad matemática, sí reflejan de manera global un fuerte grado de acuerdo con las afirmaciones planteadas, lo cual es igualmente preocupante.

Las frecuencias de las respuestas a estas seis preguntas se encuentran desglosadas en la siguiente tabla, siendo los seis ítems las afirmaciones en el orden citado:

Tabla 3 Frecuencias de las respuestas del alumnado a los distintos ítems relativos a la ansiedad matemática.

Grado de acuerdo	ITEM 1	ITEM 2	ITEM 3	ITEM 4	ITEM 5	ITEM 6
Muy de acuerdo	6	2	2	1	9	7
De acuerdo	5	5	7	6	4	2
En desacuerdo	3	2	1	4	0	2
Muy en desacuerdo	0	5	4	2	1	2

Resulta particularmente llamativo el quinto ítem, que refleja que tener bajas calificaciones en matemáticas es una gran preocupación de prácticamente la totalidad del alumnado, independientemente de su actitud en el aula:

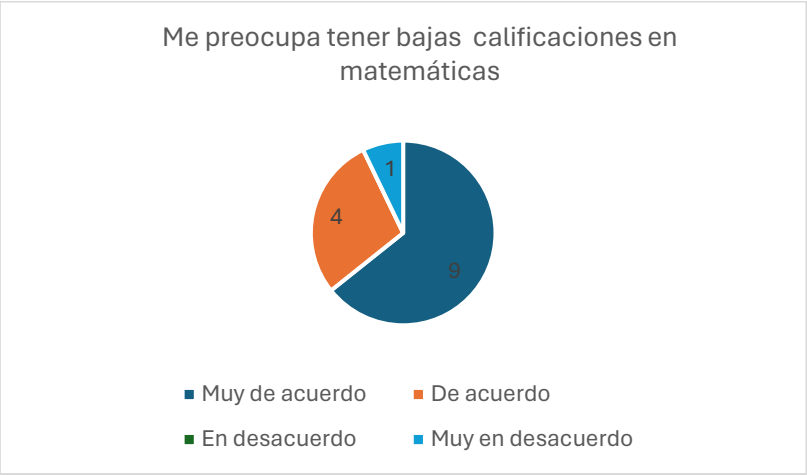


Figura 28 Gráfico que refleja el número de alumnos que experimentan los diferentes grados de acuerdo ante la afirmación "Me preocupa tener bajas calificaciones en matemáticas". Fuente: Elaboración propia.

Por último, ante la afirmación "Matemáticas es una de mis asignaturas favoritas" las respuestas están muy polarizadas, y ante la afirmación "Las matemáticas son fáciles para mi" las respuestas son algo más variadas. No obstante, en ambos casos el número de alumnos que disiente con la afirmación es ligeramente superior al de personas que están de acuerdo, como puede verse en las siguientes gráficas:

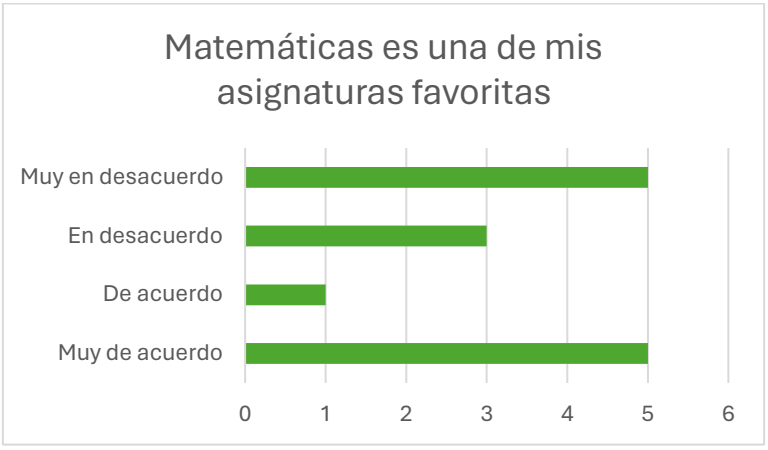


Figura 29. Gráfica que representa el grado de acuerdo del alumnado con la afirmación "Matemáticas es una de mis asignaturas favoritas".

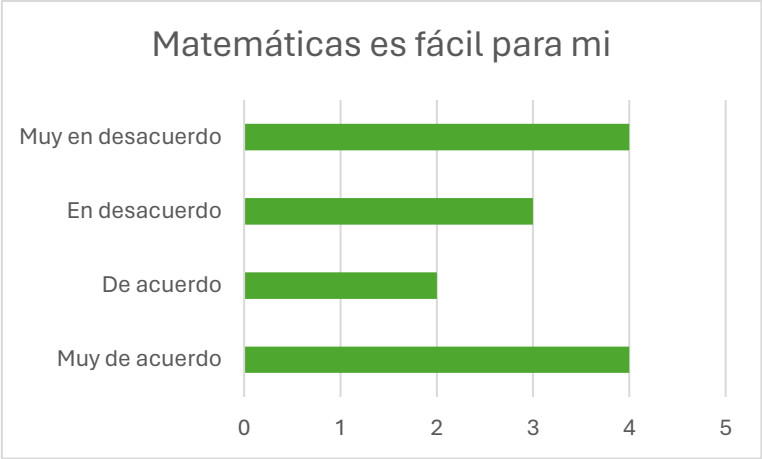


Figura 30 Gráfica que representa el grado de acuerdo del alumnado con la afirmación "Matemáticas es fácil para mi".

Ante la afirmación "Quiero aprender y tener buenas calificaciones en matemáticas" la totalidad del alumnado se identifica con ella, estando un 42% de acuerdo y un 58% muy de acuerdo.

Los resultados aquí expuestos son principalmente descriptivos de las respuestas del alumnado y proporcionan una comprensión de ciertos aspectos dominio afectivo de la clase y de su relación con las matemáticas desde una perspectiva cuantitativa. Esto permite contrastar y complementar los hallazgos obtenidos mediante métodos cualitativos.

4.4. Intervención

En este apartado se desarrollan los principales aspectos de la puesta en práctica de la propuesta de intervención. Debido a la naturaleza de esta, durante la implementación se han realizado diversas modificaciones y adaptaciones respecto a la propuesta inicial con el fin de conseguir los mejores resultados para el alumnado dentro de las posibilidades del rol de alumna de prácticas.

La información fue recogida a través de un diario durante la intervención, y a continuación, se relatan de manera cronológica los aspectos más importantes extraídos del mismo. Estos comprenden los contenidos tratados, los resultados de la implementación de diversas prácticas metodológicas, las modificaciones que han sido necesarias, las respuestas afectivas observadas en el alumnado, información sobre la implicación y participación, y otros datos y episodios que se han considerado relevantes.

4.4.1. Primera parte de la intervención: Lección magistral

Sesión 1. La primera sesión consiste en una continuación de la dinámica vista al tutor de prácticas en los días previos, que se han dedicado a la observación de la clase, y que se enmarca dentro de la lección magistral. Acaban de iniciar el tema de Sucesiones y progresiones aritméticas y geométricas, y ya han visto de manera intuitiva qué es una sucesión y cómo calcular sus términos a partir de una fórmula. Precisamente se corrigen en la pizarra unos ejercicios de ese tema que se habían mandado como deberes el día previo y se comienza a trabajar las sucesiones aritméticas de manera intuitiva, es decir, se les plantean los términos de unas sucesiones aritméticas y se les pide que digan el siguiente término y expliquen por qué saben que es ese, llegando al concepto de *diferencia* (lo que se suma de un término al siguiente en una sucesión aritmética). De este modo se pretende que trabajen la expresión oral en matemáticas, imprescindible para el desarrollo de la competencia lingüística en matemáticas, y que trabajen la identificación de patrones y la búsqueda de similitudes y diferencias, procesos que como se ha visto son propios del razonamiento matemático. O bien porque la dinámica se parece mucho a la que están acostumbrados, o bien por ser la primera sesión con este grupo, se muestran receptivos, tranquilos y parece que comprenden el concepto de progresión aritmética. Se finaliza la lección mandando un ejercicio del libro como deberes para el fin de semana. El ejercicio consiste en identificar progresiones aritméticas de entre una lista de sucesiones, y determinar su diferencia.

Sesión 2. Se inicia la clase corrigiendo los apartados mandados para el fin de semana y se observa que una parte importante del alumnado no los ha hecho. La corrección se realiza de manera participativa como el día anterior: se plantean los primeros términos de una sucesión y se pide al alumnado que diga cuál es el siguiente y cómo lo ha hallado. El alumnado participa desde su pupitre. Se observa que tienen problemas con la terminología: les confunde que a los términos de una sucesión a veces les llame $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, y otras $b_1, b_2, \ldots$ y aun volviéndoselo a explicar no parece que entiendan del todo qué son la n, la d,... ni por qué se usan. Al acabar la corrección se les plantea si pueden hallar la suma de los primeros términos de una sucesión aritmética. Se propone un ejemplo sencillo y su primera opción es hallar el resultado sacando los términos involucrados en la suma y sumándolos. Posteriormente se les plantea la suma de los cien primeros naturales y se llega a la conclusión de que si hay que sumar muchos términos no es práctico hacerlo término a término. Se intenta hacerles razonar la forma de sumar los primeros términos de una progresión aritmética siguiendo la prueba del libro (la misma idea que tuvo Gauss cuando se le planteó este problema: se suma el primero y el último, el segundo y el penúltimo,… y así sucesivamente, y se observa que los resultados son constantes). Aunque parece que comprenden cada paso, se constata que les cuesta lo abstracto y comprender el por

qué se hace cada uno de los pasos. También se constata que al estar en la pizarra explicando la mayor parte del tiempo, apenas se dispone de tiempo para atender activamente a la alumna que no habla español, y es el profesor titular quien está con ella haciendo con fichas.

Sesión 3. La clase es a penúltima hora y hay mucho alboroto que no permite dar la clase, y hace que se inicie más tarde. Se repasa de nuevo la suma de ciertos términos de una progresión aritmética siguiendo la idea ya trabajada el día anterior, y posteriormente se plantea una serie de ejercicios que van resolviendo ellos mismos en la pizarra digital por turnos. Para ello, o bien usan las fórmulas que se ha deducido en clase, o bien siguen los razonamientos que se han hecho para obtenerlas. Salir a la pizarra, aunque les cuesta, les gusta y quieren participar prácticamente todos. En un cierto punto el profesor titular tiene que intervenir porque se ha producido un incidente entre alumnos. Al acabar la clase, en el intercambio, se les pregunta si están entendiendo y si les gusta salir a la pizarra y sus respuestas son afirmativas.

Sesión 4. Se sigue con la realización de ejercicios sobre la suma aritmética. Esta vez no son de resolución tan directa y requieren razonar un poco más: comprender bien los enunciados y darse cuenta de que para hallar lo que se les pide necesitan datos intermedios; por ejemplo, teniendo un par de términos intermedios y consecutivos de una sucesión, hallar la suma de los *k* primeros términos de dicha sucesión. Se observa que, de manera generalizada, les cuesta mucho entender enunciados y hacer ejercicios que no sean la mera aplicación de la fórmula, aunque a algunos también les cuesta el uso de la fórmula porque no tienen claro qué son en cada problema S_n, a_1, a_n, n ... Aunque buscan aprobación e indicaciones para el siguiente paso frecuentemente, siguen reflejando entusiasmo y ganas por participar en la pizarra. Tras haber hecho varios ejercicios, se inicia a trabajar las progresiones geométricas tal y como se hizo con las aritméticas: se plantean los primeros términos de sucesiones geométricas (sin decirles lo que son) y se les pregunta cuáles son los siguientes términos y cómo los hallan.

Sesión 5. Se continua con las progresiones geométricas, exponiendo sus características desde un punto de vista teórico, identificándolas, diferenciándolas de las aritméticas y de otras sucesiones, y hallando los términos siguientes a unos dados. En el último tercio de la clase se les manda un par de ejercicios como deberes para el puente y comienzan a hacerlos. Este día se le llevan unas notas a la alumna que no habla español elaboradas especialmente para ella. Mientras el resto de los alumnos trabajan, se ha trabajado con ella sobre esas notas por medio de francés y español, que es como nos hacemos entender mutuamente. Para elaborar dichas notas se ha escrito solo lo imprescindible (ella utiliza Google Lens para traducir), y se ha utilizado colores y ejemplos sencillos que ilustren el patrón que siguen las aritméticas y con los que pueda practicar el uso de la fórmula. Aunque en el momento parece que lo entiende, sin alguien a su lado a quien pueda preguntar dudas se observa que le resulta difícil. Se le propone que intente como deberes los ejemplos planteados en las notas que no se han hecho y parece dispuesta.

Sesión 6. Se prosigue con las progresiones geométricas y se deduce en la pizarra la fórmula de suma de los primeros términos de una progresión geométrica siguiendo la indicación del libro ($rS_n - S_n = a_{n+1} - a_1$). Se nota que, aunque entienden cada paso individualmente, no entienden para qué se hacen ni qué se pretende conseguir. Parece que supone un nivel de abstracción muy alto para ellos, y consultándolo con el profesor titular se acuerda exigir que sepan deducir la fórmula de la suma de la aritmética, pero no la de la geométrica. La alumna que no habla español no ha hecho los ejercicios que se le propusieron en la lección anterior, y se vuelve a constatar que es muy difícil atender a la diversidad si gran parte de la lección el profesor se encuentra en la pizarra. También ese día se le entregan y explican unas notas someras con ejemplos sobre las geométricas para que la ayuden a seguir el tema.

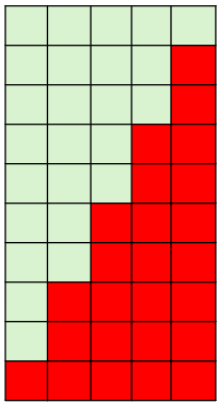
Sesión 7. Se dedica la sesión a hacer más ejercicios de todo el tema. Alguno se resuelve expositivamente y otros los hacen los alumnos en la pizarra. En concreto, sale la alumna que no habla español (se observa que comprende) y de manera guiada a través de preguntas ("¿Qué pasa de un término a otro?", "¿Cuál es el siguiente término?", "¿De qué tipo es la sucesión que hemos visto?", "¿Cuál es el décimo término?"…) es capaz de resolverlo. Se constata nuevamente que les gusta la dinámica. De hecho, se observa que una alumna que a veces muestra comportamientos disruptivos y que generalmente muestra poca proactividad en la dinámica de la clase, cuando consigue hacer bien un ejercicio, se encuentra alegre y orgullosa ("¿Has visto que he sabido hacerlo?"). Con todo, se nota poca autonomía en la clase.

Sesión 8. Se elabora en la pizarra digital un pequeño esquema resumen de las características de las progresiones aritméticas y geométricas. No resulta posible dar más clase porque tienen examen de otra asignatura más tarde y no están centrados. Puesto que es importante lo plasmado en la pizarra, se insta a hacerle una foto y a compartirla por el grupo de la clase. Además, se fija conjuntamente el examen del tema para el siguiente viernes.

Sesión 9. La clase es a última hora y hay mucho jaleo, lo que hace que la lección empiece tarde. Para intentar mantener su atención, se acuerda con el profesor titular decirles que esa semana se repasarán ejercicios para el examen y que uno de ellos entrará en el examen (motivación extrínseca), pero no funciona: en una hora solo se consigue hacer un ejercicio y medio, hablan muchísimo, no atienden, se levantan y algunos contestan. Lo que se ha repasado en esta lección y que está previsto repasar en las clases siguientes son ejercicios sobre calcular el término general de una sucesión dada, identificar si una sucesión es aritmética o geométrica, hallar un término dado de una sucesión, hallar la suma de ciertos términos de una progresión, y sobre todo ejercicios en los que hay varios pasos y son ellos los que tienen que razonar qué hay que hallar para poder calcular lo que se pide. Aunque se les ha proporcionado fórmulas (las de las sumas y las de los términos generales) se les ha explicado en diversas ocasiones cómo obtenerlas y cómo razonar sin ellas, y la única que no tienen que saber deducir es la de la suma de una

progresión geométrica.

Sesión 10. La clase es a penúltima hora y nuevamente hay jaleo: hay comportamientos disruptivos e incluso desafiantes por parte de algún alumno. Resulta llamativo que uno de los alumnos, se le llamará alumno A, que hasta el momento había sido de los que más participaba en generar alboroto, al ser el examen esta semana, está trabajando muy bien y preguntando muchas dudas. Al final de la clase se vuelve a repasar cómo deducir la fórmula de la suma de una progresión aritmética, pero esta vez a través de la interpretación gráfica, que se espera que les resulte más intuitiva, fácil de recordar y menos abstracta, que la algebraica. A continuación, se muestra un ejemplo de ello:



Las columnas en rojo reflejan los términos de una progresión aritmética. En verde se tiene la misma progresión en el orden inverso La suma de los primeros términos de la progresión aritmética es la mitad de los cuadraditos de la imagen y se puede calcular conociendo el número de cuadraditos de la base (n, el número de columnas) y de la altura del rectángulo ($a_1 + a_n$, suma del primer y último término que se quieren sumar) y dividiendo entre dos: $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$.

Figura 31 Interpretación gráfica de la suma de los primeros términos de una sucesión aritmética.

Sesión 11. El alumno A sigue mostrando interés y una actitud proactiva. No obstante, en clase el ambiente general sigue siendo de alboroto, y hay incluso enfados y quejas para que se posponga el examen; pero no se hace pues se había acordado de manera conjunta con la clase. Posteriormente, se consigue que el alumnado trabaje en ejercicios en pequeños grupos -hechos con las personas que tienen cerca-, aunque se observa que avanzan principalmente cuando están bajo la supervisión directa del profesorado. Resulta de mucha ayuda que el profesor titular también se pase por los grupos y los oriente; pero se constata que en caso de haber un único profesor, trabajar así es muy complicado.

Sesión 12. Es el día del examen. La prueba ha sido diseñada por mi (adjunta en los Anexos) con el visto bueno del profesor titular. Como se avisó, uno de los ejercicios se ha realizado en clase, y el resto son similares a los trabajados, de manera que conllevan la identificación de patrones en diversas circunstancias, la comprensión de enunciados y el razonamiento a partir de los datos disponibles. Al inicio del examen se escribe en la pizarra la fórmula de la suma de las progresiones geométricas, la única que se acordó no exigir cómo se deducía. Esta es una dinámica instaurada en la clase previa a mi llegada al centro, en la que se apuesta por la no memorización en matemáticas. El resto de fórmulas no se proporcionan pues se ha trabajado

cómo deducirlas o razonar sin ellas a partir de las propiedades de las progresiones. No obstante, se observa que varios alumnos se escriben las fórmulas en la hoja nada más comenzar el examen, lo que sugiere que quizá confían más en la fórmula que en sus razonamientos, o que les da seguridad tenerla.

El resultado del examen es muy malo: hay una alumna que entrega el examen en blanco y otro par de personas que prácticamente no intentan nada. Aprueban cuatro personas de quince: una alumna a la que le cuesta pero que presta atención y trabaja mucho en clase, el alumno que en los últimos días se ha puesto al día y ha sacado la nota más alta (un 7.1), una de las chicas que ha repetido y que ha sabido hacer los ejercicios que requerían más razonamiento pero no los más sencillos, y otra chica que no pudo asistir el día del examen y lo realiza en otra fecha. Solo otras dos personas tiene más de un 4. En la corrección del examen se observan errores en cuestiones aritméticas muy básicas de manera repetida (poner que la suma de los cien primeros naturales es 1+1+…+1=101, ó poner que $\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{3}+1=\frac{1}{4}$), aunque sin duda lo más preocupante es la gran cantidad de ejercicios, similares a los trabajados en clase y que incluso han realizado ellos mismos en la pizarra, sin intentar. La media de la clase, sin contar a la alumna que realizó el examen en otra fecha, fue de un 3,08.

Sesión 13. Nuevamente siguiendo la dinámica de la clase previa a mi llegada, se hace la corrección del examen. Hay jaleo y se evidencia mucho desinterés. El motivo, tras comentarlo con el profesor titular, es que este trimestre no van a tener global y por tanto este tema, independientemente de la calificación obtenida, no les va a volver a caer en un examen, y en consecuencia consideran que no hay razones para trabajarlo más. Con todo, quieren ver los exámenes, que no se reparten hasta acabar la corrección con la esperanza de conseguir su atención. Tras la entrega de los resultados, varios de los alumnos que han suspendido se alteran y piden aprobar la evaluación por otros medios. Por otra parte, el alumno A, que ha tenido la nota más alta se muestra muy contento y cuando se le anima a trabajar como los último días dice "¿Profe, ves cómo soy listo?".

Sesión 14. Esta es en realidad una sesión de transición entre la metodología expositiva utilizada hasta entonces y la implementación de las prácticas para conseguir *Thinking classrooms.* En ella se repasan conceptos que según el currículum se ven en 2º de la ESO: monomio, grado, coeficiente, parte literal, polinomio… y por turnos van saliendo a la pizarra a identificarlos en ejemplos. Se ha decidido realizar esta sesión de transición porque se busca que los alumnos conecten con lo que ya conocen del tema y porque es preciso asentar de manera inequívoca la terminología básica que se necesita para empezar a trabajar el siguiente bloque temático: el lenguaje algebraico. Al final de la clase, se comenta al alumnado que puesto que los resultados del examen no han sido buenos, a partir de la siguiente clase va a cambiar la manera de trabajar,

que va a ser más cooperativa, pero que es necesario que colaboren y que posibiliten un ambiente en el que puedan trabajar bien todos. Ellos se muestran de acuerdo con que, efectivamente, ese ambiente no se ha estado dando. En definitiva, se plantea que para que la nueva metodología funcione se han de responsabilizar más de su aprendizaje.

En pequeños grupos y de manera individual varios de los alumnos han comunicado que van a comportarse mejor, y que quieren aprobar bien la asignatura.

4.4.2. Segunda parte de la intervención: *Thinking Classrooms*

Sesión 1. Para esta primera sesión con una nueva metodología, se utiliza una baraja española para hacer grupos de tres de manera aleatoria (una de las estrategias planteadas por Liljedahl) en función de la carta que les toque. Se explica la dinámica y pese a que inicialmente parece que les gusta la idea, no sale nada bien: se intercambian las cartas, mienten y un alumno se niega a ponerse con otro grupo porque no quiere estar con chicas. Estos comportamientos poco maduros dificultan que se pueda empezar a trabajar sobre las actividades matemáticas previstas. Tras muchos intentos se desiste en el intento de que se pongan en los grupos que les habían tocado y se continúa con los grupos de tres en los que se han colocado, ya que se considera que no se puede emplear toda la clase en eso (especialmente siendo alumno en prácticas), y que no es posible llevar a cabo este tipo de dinámicas si no hay un mínimo de colaboración por parte del alumnado.

Para ese día se ha preparado una ficha (adjunta en Anexos) para cada grupo, para que trabajen el lenguaje algebraico de manera secuencial, esto es, empezando por lo más sencillo y cambiado en cada paso una variable. Las tareas consisten en transformar expresiones del lenguaje cotidiano sobre una cantidad en función de otra desconocida, en lenguaje algebraico. Por ejemplo, el doble de una cantidad o la mitad de una cantidad más uno. Se comunica de manera explícita que el objetivo de trabajar en grupos es que todos los miembros de cada grupo lo entiendan, participen en la discusión y se ayuden y corrijan si es necesario; y aunque no da tiempo a acabarlo (por lo mucho que se ha tardado en hacer los grupos), en general lo van intentando. La excepción es la chica que ha aprobado el examen y que ha repetido: se pone a hacer ella sola la actividad diciendo que es muy fácil y no explica nada ni dejar intervenir a sus compañeras, a las que les cuesta más. Al tratar de explicarle que tienen que intentar hacerlo conjuntamente para que todos lo comprendan y aprendan, contesta con chulería, se enfada y deja de participar en la dinámica. Esta actitud se observa más días. Al margen de este incidente, se rota por los diferentes grupos para ayudarles si se bloquean: en caso de que tengan un fallo, o bien se les redirige a ejemplos

anteriores de las tareas secuenciales que les puedan ayudar a detectar el fallo, o se les sugiere trabajar en vez de con una variable con un número, algo que saben hacer como mucha más soltura y que les ayuda a validar si lo que hacen es correcto o no.

Sesión 2. Para esta sesión se ha preparado un material manipulativo (las fichas de gomaeva) para trabajar polinomios. Esta sesión está inspirada en el método Singapur que aboga por empezar a trabajar las matemáticas desde lo concreto para posteriormente pasar a lo pictórico y finalmente a lo algebraico. De este modo se pretende que todos los alumnos entren en el flujo de pensamiento independientemente de su grado de desarrollo del pensamiento formal, facilitando así el paso a lo abstracto.

Es viernes a primera hora y faltan bastantes alumnos. Tras la mala experiencia haciendo grupos del día anterior, se permite que se coloquen con los compañeros con los que estuvieron ese día (quedando la mayoría de grupos con dos personas) para empezar a trabajar rápidamente. La dinámica es la siguiente: se explica qué significa cada una de las fichas y su color y se les propone que creen polinomios con ellas y los escriban en lenguaje algebraico y viceversa. P para ello se les proporciona una hoja con ejercicios que tienen que ir haciendo y con cuestiones para reflexionar sobre ellas (ver Anexos). También se les indica que sumar dos polinomios es el resultado de juntar las fichas de ambos realizando las cancelaciones de fichas correspondientes (ya que fichas rojas y azules iguales se cancelan). Esto sirve de introducción para definir qué es el opuesto de un polinomio a través de este material.

La recepción no es demasiado buena: algunos alumnos hablan bastante y hay otros que no quieren participar, y que si no se les supervisa directamente todo el proceso no trabajan. Entre los alumnos que muestran apatía se encuentran las alumnas marroquíes. Por otra parte, algunos de los que participan, expresan que les gusta trabajar en grupo, y que este tipo de actividades distintas les ayudan a entender mejor.

Al final de la clase una de las alumnas más habladoras y con más liderazgo expresa que se distraen mucho con el móvil y propone que todo el alumnado lo deje al inicio de la clase en una mesa para no desconcentrarse. Este cambio de actitud se valora positivamente porque refleja que quiere implicarse más en su aprendizaje y que es consciente de que el teléfono es un obstáculo para ello. Se acuerda con el resto del grupo empezar a hacerlo los próximos días.

Sesión 3. A diferencia de la sesión anterior, a esta clase asiste la mayoría del alumnado y aceptan dejar todos los móviles en una mesa vacía en la parte delantera de la clase. Al inicio de la sesión se plantea rápidamente que se va a trabajar la suma de polinomios de manera algebraica. Se busca hacerles razonar a partir de lo hecho con el material manipulativo el día anterior: se recurre a algún dibujo (fase pictórica) y se les recuerda que se había visto que sumar dos polinomios es el resultado de juntar las fichas de ambos.

Se entrega una nueva hoja de ejercicios sobre la suma de polinomios de dificultad gradual para que trabajen en grupos. Los grupos son similares a los de los últimos días pues se han colocado así al inicio de la clase y tras la experiencia de las cartas se ha decidido priorizar iniciar a trabajar cuanto antes. Puesto que no son exactos (porque suele faltar algún alumno), hay algún grupo con dos personas, pero la mayoría son de tres. El profesorado rota por las mesas haciendo preguntas e intentando que participen y razonen todos los miembros de cada grupo. Además, esta dinámica permite dedicarle más tiempo a los alumnos que más lo necesitan.

El error más común observado es que tratan de sumar monomios que tienen distinta parte literal. Se recurre al material manipulativo del día anterior o a su versión pictórica para hacerles razonar por qué esto no es así. Se finaliza la clase ilustrando con algún ejemplo la suma de polinomios a modo de consolidación.

Hay algunos grupos (aproximadamente la mitad) que trabajan bastante bien: participan todos los miembros del grupo, se resuelven dudas entre ellos, están activos y hacen preguntas para seguir pensando, aunque también otras con las que buscan la respuesta directa y que se evita responder. En particular las alumnas marroquíes han estado más implicadas. No obstante, el resto del alumnado muestra desinterés.

Se constata que trabajar así en grupos es lento, pero que la gente que se implica está dedicando más tiempo de la lección a expresarse en matemáticas y a razonar (que se había definido como un proceso de comunicación) que en la lección magistral.

Sesión 4. Un incidente con insectos en el aula hace que resulte prácticamente imposible aprovechar la lección. Tras ello queda muy poco tiempo de clase y solo se consigue recordar lo que es el opuesto de un polinomio (se vio con el material manipulativo) y hacerles deducir cuál es el opuesto con lenguaje algebraico. Además, se recurre a los números enteros para recordarles que restar es sumar el opuesto, y se busca que extiendan esto a la resta de polinomios.

Sesión 5. Se continúa con la resta de polinomios, vista como la suma del opuesto. Siguen trabajando por grupos con las hojas de ejercicios secuenciales que se les entrega diariamente. Estos días, apenas estoy utilizando la pizarra, salvo para comentar lo que se va a hacer o, si se observa que muchos estudiantes tienen una misma dificultad, para explicarla o dar un ejemplo. Al rotar por los grupos se evita contestar directamente a sus preguntas y se trata de responder con otras preguntas que les hagan pensar o redirigiéndoles a ejemplos anteriores que tengan menor dificultad y que les ayuden a sortear barreras cognitivas. No obstante, sorprende observar que en varios grupos los alumnos no hacen los apartados en el orden propuesto incluso aunque se ha comunicado explícitamente que los hagan así, sino que van saltando de unos a otros. Esto hace que no se beneficien del aumento gradual de dificultad y que a menudo se encuentren bloqueados.

Al final de la clase se inicia con la multiplicación de polinomio por constante, recurriendo de nuevo al lenguaje y al material manipulativo para hacerles razonar ("multiplicar un número por 2 es duplicarlo, así que multiplicar un polinomio por 2 será otro polinomio compuesto por el doble de fichas").

Se ha observado que personas que usualmente trabajan bien, están más distraídas y hablan mucho por estar con amigos en el grupo. La consecuencia es que acaban haciendo menos de lo que podrían en una hora.

Sesión 6. Es viernes, a primera hora y hay huelga, lo que probablemente explica que falten bastantes alumnos. Se proporciona una nueva ficha para seguir trabajando la multiplicación de polinomios en las que la dificultad aumenta de manera gradual: los primeros apartados son de multiplicación de polinomio por constante, seguidos por multiplicación por monomio primero mónico y luego no, (se hace énfasis en que la parte literal es un producto de letras, y se repasan las propiedades de las potencias en números) y continuando con la multiplicación por un polinomio genérico.

Este día se empieza a trabajar con superficies borrables de manera horizontal. Esto es recibido con mucho entusiasmo. Además, se proporciona un rotulador a cada grupo para que se lo vayan turnando y forzar que todos participen.

Se ha observado que las dos alumnas marroquíes -que antes estaban con una tercera persona- desde hace unos días trabajan ellas dos, pero no se hace ningún cambio porque están trabajando bien. También se ha observado que el alumno con TDAH (al que le ha motivado particularmente la introducción de las superficies borrables) empieza a trabajar solo. En su caso se intenta que vuelva con su grupo, aunque se constata que ellos, a diferencia de él, no quieren participar.

Sesión 7. Se prosigue con las hojas de multiplicaciones y las superficies borrables. Las dos alumnas marroquíes se han sentado en primera fila, hasta ahora siempre vacía, según ha iniciado la clase. Puesto que la multiplicación de polinomios genéricos es lo que más cuesta, se recuerda la distributividad de los conjuntos numéricos que conocen y se busca que extiendan dicha propiedad a los polinomios. Los grupos que acaban, escriben en la pizarra digital la solución de los distintos apartados (sin el procedimiento), para que los grupos más rezagados puedan comprobar si van bien.

Sesión 8. Se sigue trabajando multiplicaciones y lenguaje algebraico con la dinámica de días anteriores. Hay grupos que trabajan más que otros y que acaban las fichas preparadas. A estos se les plantean más ejercicios en la pizarra mientras acaban los demás. Se tiene la percepción de que el motivo de que haya grupos más atrasados no es la falta de tiempo o la complejidad de las tareas, sino que hay grupos que hablan mucho y que apenas trabajan sin supervisión directa.

Además se ha observado que hay alumnos que usan las superficies borrables para dibujar en vez de trabajar las tareas matemáticas.

Sesión 9. Un día más se proporcionan fichas sobre multiplicaciones y sobre la modelización de situaciones a través del lenguaje algebraico. Una alumna pregunta que si es posible que se les envíen dichas fichas que están trabajando cooperativamente para que puedan practicarlas individualmente en casa. Tras comunicárselo al profesor titular, se crea un Google Classroom (una plataforma online para compartir materiales y recursos al alumnado) para compartirles las fichas.

Sesión 10. Se sigue trabajando en grupos las operaciones de polinomios y el uso del lenguaje algebraico para modelizar situaciones. En el último tercio de la clase, se inicia un repaso sobre las identidades notables, que suelen darse en 2º de la ESO pero que no parece que recuerden.

Primeramente, se busca que las comprendan de manera geométrica. Se les pregunta si se recuerdan cómo calcular el área de cuadrados y rectángulos y confirman que sí. Se dibuja en la pizarra digital un cuadrado de lado $a + b$ y de manera participativa se llega a que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

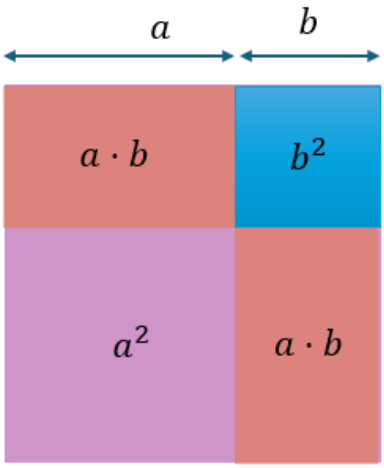


Figura 32. Interpretación gráfica de una identidad notable.

Sesión 11. Se recuerda brevemente lo visto en la sesión anterior sobre $(a+b)^2$ e inmediatamente después se entregan unas fichas con actividades para que deduzcan geométricamente la identidad notable de $(a-b)^2$ en las superficies borrables. Unos grupos avanzan más que otros, pero ninguno llega a concluir autónomamente. Les cuesta deducir por sí mismos y parece que buscan que dé lo mismo que en el caso anterior. Nuevamente, en esta actividad, sigue habiendo alumnos que sin supervisión directa no trabajan.

Sesión 12. Se continúa trabajando las igualdades notables por grupos, aunque esta vez desarrollándolas algebraicamente haciendo el producto de polinomios en varias variables, para

lo que se les proporciona unas nueva ficha. Las alumnas marroquíes están trabajando muy bien y se ayudan la una a la otra, pero principalmente la que no habla español a la otra. Puesto que los alumnos que estaban en el grupo con el chico que tiene TDAH no trabajan, intento que él trabaje con otro grupo de dos personas pero comunica que prefiere trabajar solo y finalmente se le permite (múltiples formas de acción y de comprometerse con el aprendizaje, DUA).

Se constata que en total hay entre 5 y 7 alumnos en la clase (de un total de 15) que muestran mucho desinterés por la asignatura y por las dinámicas, y que no trabajan salvo supervisión directa, y a veces ni aún así. Entre ellos también se ha observado actitudes negativas de algunos alumnos hacia otros, como no querer trabajar con algún compañero o malas contestaciones.

Aunque hasta ahora en cada grupo solo se proporcionaba un rotulador, en los grupos en los que se ha conseguido que todos los miembros están involucrados y razonando se les deja alguno más, y no parece que dejen de trabajar ni cooperen menos.

Sesión 13. En este momento son muy notables las diferencias entre los ritmos de unos alumnos y otros. Aquellos que van atrasados continúan trabajando en fichas anteriores sobre la multiplicación de polinomios, y a los alumnos que van algo mejor se les plantea alguna actividad de introducción a la división de polinomios: primeramente se proponen dos polinomios y se les pregunta por qué monomio hay que multiplicar uno para obtener el otro, y posteriormente se les proponen otros ejemplos en los que el polinomio a encontrar no es un monomio. También se les facilitan ejercicios para describir el perímetro y el área de figuras geométricas en función de alguno de sus lados (para trabajar más el lenguaje algebraico) y ejercicios sobre igualdades notables.

Sesión 14. Dado que es la última sesión con el grupo, se plantea diferente a las demás. Primeramente, se realiza un Kahoot (ver Anexo), que se ha diseñado específicamente para ellos, sobre polinomios y lenguaje algebraico. Exceptuando a una alumna, todos los estudiantes se involucran en la actividad, incluso aquellos que usualmente no participan, y muestran bastante entusiasmo.

Cuando aciertan, alguno de los miembros de los grupos que han acertado explica la respuesta al resto de la clase. Resulta llamativo que solo un alumno acierte una pregunta relativa a cuál es el opuesto de un polinomio, y explica que recordaba la respuesta gracias al material manipulativo de gomaeva. Sin embargo, tras tantas sesiones trabajándolo tampoco es un dato demasiado alentador.

Esta sesión se ha incluido dentro de esta segunda parte de la intervención dedicada a las *Thinking Classrooms* porque, tras el Kahoot, se pide feedback al alumnado sobre esta forma de trabajar y participa incluso la parte del alumnado que a menudo ha sido menos proactiva y cuya opinión resulta particularmente interesante. De manera general, parece que hay consenso en que los

dibujos, las superficies borrables, trabajar en grupo, el material manipulativo y las fichas que les he proporcionado les resultan útiles. Además, dan las siguientes sugerencias:

- Dar más explicaciones teóricas al inicio de la clase, y solo después proponer ejercicios para trabajar en las superficies borrables. No obstante, matizan que les gusta esta forma de trabajar y la ven útil.
- Mandar más o menos deberes en función de las necesidades de cada alumno.
- Que sea el docente el que haga los grupos, ya que consideran que al estar con compañeros con los que tienen mejor relación trabajan menos. Al recordar la falta de colaboración al tratar de hacer grupos aleatorios con la baraja de cartas, el alumnado responde con humor.
- Aprovechar los días en los que tienen clase antes del recreo para dar teoría, porque consideran que están más receptivos, y utilizar los días que tienen después del recreo, especialmente a última hora, para trabajar con las superficies borrables.

Concluyendo, la opinión sobre esta metodología, incluso de los que menos han participado en general, ha sido positiva y confirman que les ayuda trabajar así.

4.4.3. Otros comentarios sobre la intervención

En este apartado se comentan otros episodios que resultan relevantes para valorar la utilidad de las distintas metodologías y para conocer la situación afectiva de parte del alumnado. El motivo por el que no han sido recogidas en el apartado anterior es que algunos de estos episodios se han desarrollado durante diversas sesiones, se han observados de manera repetida o en el momento de su recogida no se precisó la sesión específica en la que ocurrió.

Durante el desarrollo de la segunda fase de la intervención se pudo observar que algunos alumnos que en la fase previa se habían mostrado más receptivos, en esa se mostraban más distraídos o trabajando poco. Al preguntar a alguno de estos alumnos si les ayudaba trabajar de este modo (cooperativamente, con actividades secuenciales, materiales manipulativos…), su respuesta fue afirmativa y se mostraron agradecidos por los materiales al considerar que les ayudaban a entender mejor que una lección expositiva. Sin embargo, uno de ellos mencionó que si no trabajaban no era por la metodología, sino porque no se sentían capaces y creían que no iban a saber hacerlo. Esto evidencia que hay estudiantes con muy poca confianza en sus habilidades, condicionándoles a abandonar prematuramente. En concreto, este estudiante de manera habitual se encontraba en un grupo trabajador, pero en el que los otros miembros también mostraban poca

confianza en sus habilidades. Esto, sumado a la relación cercana entre ellos, conducía a que se distrajeran con actividades no relacionadas con las matemáticas.

En cuanto al alumno que tiene TDAH, se pudo observar desde la primera fase de intervención que mostraba interés, que le gustaba mucho participar y salir a la pizarra, y que intentaba siempre los ejercicios que se habían mandado, aunque le costara la materia. También se mostró muy motivado con las superficies borrables y las *Thinking classrooms*, aunque en ciertos momentos se percibió que experimentaba frustración al equivocarse. En concreto, trabajando con él la multiplicación de polinomios se le escuchó decir frases como: "No me va a salir. No voy a saber hacerlo".

Por último, aunque en el apartado anterior ya se han mencionado algunos datos sobre la evolución del aprendizaje de las alumnas marroquíes, en particular de la que no habla español, se considera interesante profundizar en su progreso. El motivo es que son un claro ejemplo del potencial de las *Thinking classrooms* y de la importancia tanto de la disposición a aprender como de la metodología para el éxito del alumnado. Además, su ejemplo demuestra que dicha disposición o actitud es algo que puede cambiarse, y a lo que, precisamente, el uso de una metodología u otra puede contribuir.

Lo primero que se constata al iniciar la intervención es que la alumna recién llegada, a pesar de desconocer el idioma, se está integrando bien en el grupo. Su principal apoyo es otra alumna de origen marroquí que domina tanto el árabe como el español. Por simplificar, nos referiremos a ellas como alumna B y alumna C, respectivamente. El objetivo prioritario del centro para la alumna B, dado que llegó a mediados de curso, es que aprenda español. No obstante, durante la intervención se busca también que pueda aprovechar al máximo las clases. Inicialmente, se intenta superar la barrera lingüística de B, involucrando a la alumna C para que actúe como intermediaria y la ayude. Sin embargo, rápidamente se observa que esto, inicialmente, no da buenos resultados: a la alumna C le cuestan las matemáticas, le interesan poco y cuando están juntas tienden a hablar en árabe sobre otros temas, distrayendo a su entorno y no prestando atención a la clase.

Tras este intento fallido, durante el resto de la primera fase de intervención se decide mantener a estas alumnas separadas. Cuando se tiene la oportunidad de trabajar directamente con B en clase, muestra disposición, gusto por las matemáticas, y que no tiene mal nivel, aunque requeriría más atención y tiempo por parte del docente, algo que con la lección magistral es complicado. La comunicación se consigue gracias a que su comprensión del español mejora diariamente, al recurso ocasional al francés (una lengua que ambas comprendemos, aunque no dominamos), a herramientas para traducir como Google Lens y a fichas con ejemplos sencillos diseñados para ella. No obstante, en ocasiones sigue habiendo dificultades comunicativas.

En la primera parte de la intervención, en la que se usa la metodología expositiva, no les va muy bien a ninguna de las dos, especialmente el examen. Pero la situación cambia mucho cuando se empiezan a introducir estrategias de las *Thinking classrooms* y comienzan a trabajar juntas de nuevo (les toca en la baraja de cartas al tratar de hacer grupos aleatorios), especialmente tras las sesiones del material manipulativo. Puesto que se plantean tareas secuenciales en los que los primeros apartados son muy sencillos, la dificultad aumenta gradualmente y no se dan más que unas pocas indicaciones, la alumna B empieza a trabajar igual que el resto. Además, la alumna B, tras los resultados de la segunda evaluación, muestra la motivación de mejorar en la tercera para evitar repetir. Y al verla trabajando, C comienza a mostrar más interés.

Ocurren varios eventos. El primero es que estas dos alumnas , que siempre se sentaban en la mitad de la clase, comienzan a sentarse en una mesa libre de la primera fila, y que empiezan a trabajar inmediatamente tras darles el material. El segundo, que la alumna B un día dice "Profe, ejercicios" para pedir más ejercicios tras haber acabado la ficha propuesta, mientras que el resto de la clase aún se llegaba por la mitad. Esto es relevante porque aunque se había comprobado que comprendía el idioma, es la primera vez que se la oye utilizar el español en clase de matemáticas, aparte de para saludar o dar las gracias, lo que demuestra el alto grado de implicación con esta metodología y el gusto por el aprendizaje. El tercero es que la alumna C, que hasta la fecha había mostrado poca proactividad, comienza a trabajar muy bien. El cuarto es que un día se observa que es la alumna B quien le explica a la alumna C (la que no sabe español a la que sí) en árabe cómo se hace algo. Este caso resulta sorprendente porque refleja cómo algo que inicialmente era una barrera, el idioma, puede terminar convirtiéndose en otra herramienta más de aprendizaje. Y el quinto es que, uno de los últimos días se plantean en la pizarra como deberes operaciones de polinomios y, antes de abandonar la clase, se observa que la alumna B se ha puesto de pie y está resolviéndolas en la pizarra, muy rápido y sin fallos. Además de todo esto, estas alumnas son las que más avanzan en relación con el grupo.

Todo esto demuestra la importancia del "querer" (las actitudes, en términos del dominio afectivo) frente al "poder", y destaca el gran potencial que tienen algunas metodologías para lograr que los alumnos se involucren, aprendan y obtengan buenos resultados, incluso partiendo de situaciones muy desfavorables, como no conocer el idioma. Esto no implica que esta metodología sea la mejor para todos los alumnos en cualquier circunstancia, pero sin embargo, es innegable que para algunos funciona muy bien.

Como comentario final de este episodio, uno de los últimos días de la intervención, la alumna C expresó, con resignación, que cuando dejara de trabajar de este modo (superficies borrables, actividades secuenciales y trabajo cooperativo), las matemáticas volverían a "dársele mal". Aunque esto pueda estar relacionado con la autoconfianza, resulta razonable pensar que ella fuera

consciente de que con la metodología de las *Thinking classrooms* aprovechaba las clases mucho más que con la lección magistral.

4.5. Discusión

En este apartado se discutirán los resultados obtenidos tras las dos fases de intervención en términos de las respuestas del alumnado, del desarrollo de competencias logrado, de su idoneidad para atender a la diversidad y de su contribución al razonamiento matemático. Asimismo, se han tenido en consideración los datos relativos a afectos obtenidos tanto de manera cualitativa como cuantitativa.

Se inicia esta discusión reflexionando sobre la respuesta del alumnado ante estas metodologías. Dado que la primera parte de la intervención resulta más similar a la dinámica a la que estaban acostumbrados, los estudiantes se muestran más receptivos ante ella. Más concretamente, reflejan una mayor aceptación pasiva de la misma, ya que no requiere una implicación activa del alumnado (salvo para participar voluntariamente en la pizarra), algo que prefieren evitar, teniendo en consideración los altos grados de ansiedad y nerviosismo que, según el cuestionario, les generan las tareas matemáticas. Puesto que durante la mayor parte de cada lección el foco está puesto en la exposición del profesor, lo que resulta en una metodología poco atractiva e incluso aburrida, la mayoría de los estudiantes no dudan en aprovechar las oportunidades de participar, aunque sea de manera poco autónoma y buscando ser guiados. Esta dualidad entre aburrimiento e interés por participar ha quedado constatada tanto mediante la intervención como con la encuesta.

La segunda parte de la intervención, al tratarse de una metodología muy diferente a la que están acostumbrados, inicialmente, genera más rechazo (especialmente la creación de grupos aleatorios, el uso del material manipulativo, y la realización de tareas matemáticas sin explicaciones previas sobre cómo hacerlas). Los motivos probablemente son la novedad y el requerimiento de un papel más activo y autónomo, algo a lo que no están habituados, y que resulta particularmente difícil a alumnos con baja confianza en sus habilidades matemáticas. Como excepciones a lo expuesto anteriormente, el uso de superficies borrables y la utilización de Kahoot (una herramienta de gamificación ajena a las *Thinking classrooms*), no han generado rechazo inicial en el alumnado y, de hecho, han logrado mayor implicación. En el resto de casos, el rechazo inicial a la metodología es superado por una parte importante del alumnado. Al final de la intervención, aproximadamente la mitad de la clase trabaja desde el inicio de la lección de manera cooperativa

en tareas matemáticas que promueven la verbalización de ideas y el razonamiento matemático, así como el desarrollo de la autonomía. No obstante, existe un amplio rango de mejora y se observan grandes diferencias entre unos grupos y otros. La otra mitad, por otra parte, o bien se niega a participar o no trabaja sin la presencia constante del profesor.

Que solo la mitad del alumnado se involucre en esta metodología puede parecer un dato poco alentador. Sin embargo, si se tiene en consideración que durante las lecciones magistrales los alumnos solo piensan bajo la supervisión directa del profesor (algo impracticable con un solo docente en el aula), se trata de un cambio notable logrado en menos de cuatro semanas.

Resulta llamativo que entre los alumnos que no participan en las dinámicas se encuentran aquellos que demuestran mayor nivel y autoconfianza. Estos, además, acaban influyendo negativamente en otros alumnos con más dificultades y menor confianza en sus habilidades de los que se rodean. La interpretación que se hace de este hecho, es que esta parte del alumnado percibe el esfuerzo diario como innecesario para aprobar (una de las cuestiones que más preocupa al alumnado según la encuesta) pues consideran que son capaces de lograrlo concentrando el esfuerzo los días previos a los exámenes o trabajando por su cuenta. Entre los estudiantes que mejor participan en la dinámica se encuentran mayoritariamente personas a las que les cuestan las matemáticas (nivel medio o bajo) pero que muestran mayor disposición para trabajar y esforzarse para aprender y lograr sus objetivos. También se implican, en menor medida, algunos alumnos que reflejan muy baja confianza en sus habilidades, pero que se encuentran en grupos que favorecen su participación y propician que no abandonen, aunque en ocasiones resulte complicado. En estos casos, se ha observado con mayor frecuencia frustración o aburrimiento, emociones que debilitan su disposición a trabajar.

A continuación, se reflexiona sobre la idoneidad de estas dos metodologías para atender a la diversidad. Pese a los intentos con la lección magistral participativa para dar un espacio y atender, principalmente (aunque no solo), al alumno que tiene TDAH y a la alumna que no habla español, que el profesor sea la figura central del aprendizaje limita mucho sus posibilidades, ya que con una única exposición, no se pueden satisfacer todos los ritmos y necesidades de la clase. Y, de hecho, los intentos de atender a las personas con necesidades específicas dentro del marco de esta metodología, se han encontrado más cercanos al paradigma integrador que al paradigma inclusivo. Por otra parte, dado que las estrategias de Liljedahl proporcionan más autonomía al alumnado, que se encuentra trabajando (o debería) en grupos variados, resulta posible dedicar más tiempo a aquellos alumnos que necesitan mayor apoyo, pero manteniéndoles incluidos en la dinámica de la clase. Además, la variedad de recursos, materiales utilizados (superficies borrables, fichas secuenciales, material manipulativo, Google Lens, Kahoot…) y formas de trabajar, han facilitado una mayor diversidad de formas de expresión (incluyendo idiomas y

tecnología), de involucrarse en el aprendizaje y de acceder al conocimiento, resultando en algunos casos en mayor motivación e implicación. De este modo, según el DUA, el enfoque metodológico de la segunda fase ha resultado el más adecuado para atender a las necesidades individuales de todo el alumnado, siendo particularmente exitoso con la alumna que no habla español.

Respecto al desarrollo de competencias, se ha tenido en consideración sus tres componentes: cognitivo (conocimientos), instrumental (habilidad para usar dichos conocimientos) y actitudinal (disposición para actuar). La primera metodología se centra, principalmente, en el componente cognitivo, pero ni fijando una evaluación centrada en los contenidos se han obtenido buenos resultados. En cuanto a los otros dos componentes, el papel pasivo del estudiantado durante las lecciones magistrales hace que tengan muy pocas oportunidades para desarrollar habilidades prácticas y actitudinales, que sin duda deben ser entrenadas. Por el contrario, con las estrategias para construir *Thinking classrooms*, aparte de trabajar contenidos se promueve una mayor autonomía y se brindan más oportunidades (en términos de actividades motivadoras, trabajo cooperativo, expresión oral…) para que los alumnos desarrollen estas habilidades y una disposición para actuar o reaccionar siempre y cuando exista la voluntad de hacerlo. Como ha quedado constatado anteriormente, esto no se ha logrado en todos los casos, estando bastante relacionado con las motivaciones de los alumnos y la percepción de sí mismos. En definitiva, aunque no se ha realizado una evaluación competencial del alumnado para determinar su evolución, se puede afirmar que las características propias de la segunda metodología proporcionan mayores posibilidades para lograr un desarrollo competencial en el alumnado.

En cuanto al razonamiento matemático, aunque algunos aspectos relativos a él ya han sido comentados, es preciso añadir un par de reflexiones. Ambas metodologías ofrecen la oportunidad de plantear actividades que implican la identificación de patrones, la generalización, la validación, la justificación, la ejemplificación y otros procesos propios del razonamiento matemático. Sin embargo, al concebir el razonamiento como una comunicación interna, se observa que con la lección expositiva el alumnado tiene menos oportunidades para realizar los razonamientos por sí mismo. Actúa como un receptor pasivo que en ocasiones logra realizar estos procesos y en otras no. Por otro lado, la naturaleza cooperativa de las *Thinking classrooms* fomenta la comunicación entre el alumnado y, si los estudiantes son capaces de verbalizar sus razonamientos, es una garantía de que realmente son capaces de hacerlos. A su vez, el trabajo entre pares también resulta beneficioso porque los estudiantes, al estar en un nivel de aprendizaje más cercano entre sí, pueden entenderse mejor que cuando reciben explicaciones del profesor, favoreciéndose el desarrollo del potencial a su alcance, conocido en psicología como zona de desarrollo próximo.

Pese a no ser una cuestión central en este trabajo, resulta interesante concluir esta discusión aludiendo al tiempo requerido por estas metodologías. A este respecto, la lección magistral permite una mejor gestión del tiempo, lo cual es importante para garantizar el cumplimiento del currículum. Por otro lado, la implementación de las *Thinking classrooms* y el aprendizaje autónomo requiere no solo más tiempo, sino también una mayor preparación previa y una adaptación a la nueva metodología, tanto del profesorado como del alumnado. Sin embargo, al ser los propios alumnos quienes razonan y participan activamente en su aprendizaje, este tiempo es de mayor calidad, lo cual es al menos tan importante. Se hace necesario, por tanto, buscar un balance entre ambos aspectos. El punto favorable para las *Thinking classrooms* es que se espera que, con el tiempo, al acostumbrarse profesores y alumnos a estas prácticas, las dinámicas se agilicen, haciendo esta metodología aún más completa y apta para cubrir el currículo establecido.

5. Conclusiones y propuestas de mejora

Tras haber realizado esta intervención y analizado la misma, se finaliza el presente trabajo sintetizando las principales conclusiones a las que se ha llegado, así como presentando algunas propuestas de mejora y exponiendo alguna reflexión surgida durante de la intervención o en su posterior análisis.

En primer lugar, tal y como se ha expresado en la discusión, las *Thinking classrooms*, junto con las otras prácticas utilizadas en la segunda fase, han resultado más efectivas en términos de desarrollo de competencias, atención a la diversidad y razonamiento matemático, que una lección expositiva tradicional. No obstante, los resultados distan de ser perfectos. Aunque es un logro significativo que la mitad del alumnado mejore su autonomía y dedique las clases a pensar, es igualmente relevante señalar que la otra mitad no participa en la dinámica de la clase. Sin embargo, si se conoce con qué parte del alumnado no se alcanzan los resultados esperados y por qué, es esperable que se puede mejorar mucho esta proporción realizando varias adaptaciones a esta metodología. En este caso, teniendo en consideración el perfil del alumnado que no se implica, que se ha detallado en el apartado de discusión, se considera razonable que una mejora de los resultados pudiese lograrse aplicando precisamente otras dos estrategias de *Thinking classrooms*:

- Evaluar lo que se valora: Parte del alumnado no coopera porque considera innecesario esforzarse diariamente si pueden aprobar sin hacerlo. Por lo tanto, para que el cambio de metodología funcione, es necesario que vaya acompañado de un cambio en la evaluación. Esto implica un cambio en la evaluación formativa, pero también en la sumativa, siendo esta última la que más preocupa al alumnado. De este modo, se podría utilizar la motivación por aprobar del alumnado para lograr una mayor implicación en las dinámicas de la clase.
- Crear frecuentemente grupos de manera aleatoria: De este modo, los alumnos no se acostumbrarían a adoptar un rol determinado, y tendrían que adaptarse a trabajar independientemente de las circunstancias, beneficiándose de grupos más propicios, pero también aprendiendo a tomar la iniciativa en grupos donde haya menor disposición. Además, procediendo de esta manera resulta esperable que con el tiempo las diferencias entre distintos grupos y personas no sean tan grandes como en la intervención realizada e incluso se reduzcan.

Si se recuerda, la intervención se inició con la intención de llevar a cabo esta segunda práctica, no obstante, la falta de disposición del alumnado condujo a un resultado fallido que, sumado al contexto de prácticas, limitaron que se volviera a intentar. Este ejemplo evidencia la importancia de la perseverancia y la implicación, tanto por parte del alumnado como por parte del profesorado, para lograr buenos resultados con las *Thinking classrooms* y observar su verdadera efectividad, ya que, como se ha comentado anteriormente, el componente novedoso de estas prácticas puede generar un rechazo inicial, que es imprescindible superar. En el caso de esta intervención, dado que la segunda fase ha durado menos de cuatro semanas y las prácticas se han ido aplicando secuencialmente, se considera que no es tiempo suficiente para juzgar cada una de las prácticas por separado, aunque globalmente hayan probado ser prometedoras.

Dejando aparte los aspectos más puramente metodológicos, la segunda conclusión extraída de este trabajo es la gran relevancia de actitudes, emociones y creencias, tanto para motivar al alumnado a trabajar, razonar y pensar, como para frenarles o prevenirles de realizar dichas actividades. Se ha observado que la disposición del alumnado para lograr su objetivos, y superar las dificultades, marcada por sus actitudes y creencias, ha determinado su grado de implicación en su aprendizaje, pero que también las emociones, como el aburrimiento, o el interés han marcado el grado de perseverancia reflejado. Pese a ser una realidad ampliamente documentada, este trabajo ha supuesto una buena oportunidad para constatarla de primera mano y reflexionar sobre ello.

Por otra parte, la realización de las fases de intervención y los efectos derivados de ellas han reflejado el potencial de diversas metodologías para modificar las actitudes del alumnado. Y si estas se pueden cambiar, como futuros docentes, es preciso que nuestra práctica educativa se encuentre guiada, entre otras cosas, por la motivación de conseguir alumnos dispuestos a aprender. Pues sin ello, no será posible que el alumnado alcance todos los logros cognitivos a su alcance.

En definitiva, este trabajo ha supuesto una buena oportunidad de reflexión acerca del impacto de diversas metodologías y de la concepción de la enseñanza sobre diversos factores tanto cognitivos como afectivos. Y tras lo expuesto anteriormente en este apartado, se dan por alcanzados todos los objetivos propuestos.

A nivel personal, si bien me encontraba algo escéptica antes de aplicar las prácticas de la segunda fase de intervención, tras la implementación me hallo más convencida de que su uso es posible, y que, pese a las dificultades, son muy prometedoras. En particular, encuentro valioso el potencial de estas prácticas para permitir el desarrollo de competencias y el éxito educativo de aquellos alumnos que se implican y quieren aprender, independientemente de sus dificultades, como ha

podido verse en el trabajo. Esto puede atribuirse, presumiblemente, a que esta metodología, aparte de ser accesible para todos, concibe al estudiante como un sujeto activo en su propio aprendizaje, orientándolo a dedicar la mayor parte del tiempo a construir, por sí mismo y junto a sus compañeros, conocimiento y otros aprendizajes. Esto resulta, además, mucho más motivador. Todas estas características, y especialmente la relativa a la idoneidad de esta metodología para el desarrollo de competencias, hacen de esta, una opción interesante y compatible con la actual ley educativa, la LOMLOE.

No obstante, como ya se señaló al final del apartado de intervención, esto no implica que esta metodología sea la más adecuada para cualquier clase ni para todo el alumnado bajo cualquier circunstancia. Para determinarlo, sigue siendo imprescindible conocer el contexto de la clase, incluyendo su dimensión afectiva, nivel de madurez y desarrollo. Solo de este modo se conseguirá una práctica docente más efectiva y ajustada las necesidades del alumnado. En cualquier caso, si se busca fomentar clases en las que los alumnos dediquen más tiempo a pensar, la implementación de algunas de estas prácticas resulta una buena opción. Sin embargo, es fundamental tener en cuenta que, para su éxito, serán necesarias tanto la perseverancia ya mencionada, como la flexibilidad para adaptarse a las particularidades de cada clase.

6. Referencias

1. Agencia Tributaria. (2021). *Estadística de los declarantes del impuesto sobre la renta de las personas físicas de los mayores municipios por código postal*. https://sede.agenciatributaria.gob.es/AEAT/Contenidos_Comunes/La_Agencia_Tributaria/Estadisticas/Publicaciones/sites/irpfCodPostal/2021/jrubik58143a54c9406aa6ac797497a102b2c99a50f0ce.html
2. Ayuntamiento de Valladolid. (2024). Características de la población a fecha de referencia 1/1/2024. *Valladolid.es*. https://www.valladolid.es/es/temas/hacemos/open-data-datos-abiertos/catalogo-datos/informacion-estadistica-ciudad/poblacion/caracteristicas-poblacion/caracteristicas-poblacion-fecha-referencia-1-1-2024
3. Ayuntamiento de Valladolid. (2019). *Estudio estadístico para el plan de convivencia intercultural*. https://www.valladolid.es/es/actualidad/noticias/estudio-estadistico-plan-convivencia-intercultural.ficheros/550081-Estudio%20Poblacional%20web.pdf
4. Aziz, Z., & Hossain, M. A. (2010). A comparison of cooperative learning and conventional teaching on students' achievement in secondary mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 9,* 53-62.
5. Berger, N., Mackenzie, E., & Holmes, K. (2020). Positive attitudes towards mathematics and science are mutually beneficial for student achievement: A latent profile analysis of TIMSS 2015. *The Australian Educational Researcher*, *47*(3), 409-444.
6. Beswick, K. The role of knowledge and beliefs in helping learners to progress their mathematical understanding. *J Math Teacher Educ* **22**, 125–128 (2019). https://doi.org/10.1007/s10857-019-09432-5
7. Bhagat, K. K., Chang, C. N., & Chang, C. Y. (2016). The impact of the flipped classroom on mathematics concept learning in high school. *Journal of Educational Technology & Society, 19*(3), 134-142.
8. Boaler, J., Dieckmann, J., & Loos, R. A. (2023). Changing mathematical beliefs and achievement: The synergies of mindset ideas and effective teaching. Quadrante, 32(2), 195-208.
9. CAST (2018). *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*. Retrieved from http://udlguidelines.cast.org
10. Chacón, I. M. G., & Hoz, A. D. L. O. (1997). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas*. Universidad Complutense de Madrid.
11. Conclusiones del Consejo, de 12 de mayo de 2009, sobre un marco estratégico para la cooperación europea en el ámbito de la educación y la formación (ET 2020). (2009). *Diario*

Oficial, C 119, 2-10. CELEX: https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:52009XG0528(01) [legislation]

12. Consejo Europeo Lisboa 23 y 24 de marzo 2000: Conclusiones de la Presidencia. (2000). https://www.europarl.europa.eu/summits/lis1_es.htm
13. D'Mello, S., Lehman, B., Pekrun, R., & Graesser, A. (2014). Confusion can be beneficial for learning. *Learning and Instruction, 29,* 153-170.
14. De Corte, E., Op't Eynde, P., & Verschaffel, L. (2012). "Knowing what to believe": The relevance of students' mathematical beliefs for mathematics education. In *Personal epistemology* (pp. 297-320). Routledge.
15. Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León*, 29 de septiembre de 2022. Recuperado de https://bocyl.jcyl.es/boletines/2022/09/30/pdf/BOCYL-D-30092022-3.pdf
16. Delors, J. (1996). La Educación encierra un tesoro, informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI (compendio).
17. Di Martino, P. & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 43,* 471-482. URL: 10.1007/s10649-017-9761-8
18. Edwards, J., & Jones, K. (2003). Co-learning in the collaborative mathematics classroom. In A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Begg (Eds.), *Collaboration in teacher education: Mathematics teacher education* (Vol. 1, pp. 135–151). Springer.
19. "Educación y Formación 2010" Urgen las reformas para coronar con éxito la estrategia de Lisboa — Informe intermedio conjunto del Consejo y la Comisión sobre la ejecución del programa de trabajo detallado relativo al seguimiento de los objetivos de los sistemas de educación y formación en Europa. (2004). *Diario Oficial, C 104,* 1-19. CELEX: https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:52004XG0430(01) [legislation]
20. Evans, J., Hannula, M., Zan, R., & Brown, L. (Eds.). (2006). Affect in mathematics education—Exploring theoretical frameworks. *Educational Studies in Mathematics, Special Issue, 63*(2).
21. García-Araque, J., & García-Cuesta, J. L. (2020). Propuesta y ensayo de una metodología de identificación de la vulnerabilidad urbana. *Ciudad Y Territorio Estudios Territoriales, 52*(205), 455–476. https://doi.org/10.37230/CyTET.2020.205.02
22. Georgiou, S. N., Stavrinides, P., & Kalavana, T. (2007). Is Victor Better than Victoria at Maths? *Educational Psychology in Practice, 23*(4), 329–342. https://doi.org/10.1080/02667360701660951

23. Gil, Nuria & Barona, Eloísa & Nieto, Lorenzo. (2006). The Affective Domain in Mathematics Learning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 1*. 10.29333/iejme/169.
24. Gobierno de España. (2015). ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado, número 25,* de 29 de enero de 2015, páginas 6986 a 7003 . URL: https://www.boe.es/eli/es/o/2015/01/21/ecd65
25. Goldin, G. A., Hannula, M. S., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., ... & Zhang, Q. (2016). *Attitudes, beliefs, motivation and identity in mathematics education: An overview of the field and future directions*. Springer Nature.
26. Grigg, S., Perera, H. N., McIlveen, P., & Svetleff, Z. (2018). Relations among math self efficacy, interest, intentions, and achievement: A social cognitive perspective. *Contemporary Educational Psychology*, *53*, 73-86.
27. Grootenboer, P., Marshman, M., Grootenboer, P., & Marshman, M. (2016). Students' beliefs and attitudes about mathematics and learning mathematics. *Mathematics, Affect and Learning: Middle School Students' Beliefs and Attitudes About Mathematics Education*, 55-74.
28. Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Routledge.
29. Hecht, C. A., Murphy, M. C., Dweck, C. S., Bryan, C. J., Trzesniewski, K. H., Medrano, F. N., ... & Yeager, D. S. (2023). Shifting the mindset culture to address global educational disparities. *npj Science of Learning*, *8*(1), 29.
30. Hurst, M., & Cordes, S. (2017). When being good at math is not enough: How students' beliefs about the nature of mathematics impact decisions to pursue optional math education. In *Understanding emotions in mathematical thinking and learning* (pp. 221-241). Academic Press.
31. Hwang, S., & Son, T. (2021). Students' Attitude toward Mathematics and Its Relationship with Mathematics Achievement. Journal of Education and e-Learning Research, 8(3), 272-280.
32. Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96,* 1-16. 10.1007/s10649-017-9761-8
33. Kapp, K. M. (2012). *The gamification of learning and instruction: game-based methods and strategies for training and education*. John Wiley & Sons.
34. Klang, N., Karlsson, N., Kilborn, W., Eriksson, P., & Karlberg, M. (2021, August). Mathematical problem-solving through cooperative learning—the importance of peer

acceptance and friendships. In *Frontiers in Education* (Vol. 6, p. 710296). Frontiers Media SA.

35. Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006. *Boletín Oficial del Estado, 340,* de 3 de mayo, de Educación. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3
36. Libradilla, A. A., Morales, D. R. B., Piamonte-Bacatan, R. J., & Misoles, P. A. (2023). Examining the association between attitude towards mathematics and student achievement. *International Journal of Research Publication and Reviews*, *4*(7), 1040-1046.
37. Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin.
38. Liu, X., & Koirala, H. (2009). *The effect of mathematics self-efficacy on mathematics achievement of high school students.*
39. Majoka, M. I., Dad, M. H., & Mahmood, T. (2010). Student team achievement division (STAD) as an active learning strategy: Empirical evidence from mathematics classroom. *Journal of Education and Sociology, 4,* 16-20.
40. Mandler, G. (1984). *Mind and body: Psychology of emotion and stress*. Norton, New York.
41. Marsh, Herb & O'Mara-Eves, Alison. (2008). Reciprocal Effects Between Academic Self-Concept, Self-Esteem, Achievement, and Attainment Over Seven Adolescent Years: Unidimensional and Multidimensional Perspectives of Self-Concept. *Personality & Social Psychology Bulletin, 34,* 542-52. 10.1177/0146167207312313.
42. Mato, M. D., & de la Torre, E. (2009). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico.
43. Mata, M. D. L., Monteiro, V., & Peixoto, F. (2012). Attitudes towards mathematics: Effects of individual, motivational, and social support factors. *Child Development Research, 2012*.
44. Mazana, Y. M., Suero Montero, C., & Olifage, C. R. (2019). Investigating students' attitude towards learning mathematics.
45. McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 575–596). Macmillan Publishing Co, Inc.
46. McLeod, D.B. (1989). Beliefs, Attitudes, and Emotions: New Views of Affect in Mathematics Education. In: McLeod, D.B., Adams, V.M. (eds) *Affect and Mathematical Problem Solving*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_17
47. Muis, K. R., Psaradellis, C., Lajoie, S. P., Di Leo, I., & Chevrier, M. (2015). The role of epistemic emotions in mathematics problem solving. *Contemporary Educational Psychology, 42,* 172-185.

48. National Center for Education Statistics (NCES), U.S. Department of Education, Institute of Education Sciences. (2021). *Program for International Student Assessment 2022 (PISA 2022) Main Study Recruitment and Field Test: Appendix C PISA 2022 Field Test Questionnaires (OMB# 1850-0755 v.25)*. Washington, DC. https://omb.report/icr/202103-1850-001/doc/109638801
49. Nicolaidou, M., & Philippou, G. (2003). Attitudes towards Mathematics, Self-Efficacy and Achievement in Problem Solving. In M. A. Mariotti (Ed.), *European Research in Mathematics Education III* (pp.1-11). Italy: University of Pisa.
50. Obergriesser, S., & Stoeger, H. (2020). Students' emotions of enjoyment and boredom and their use of cognitive learning strategies–How do they affect one another?. Learning and Instruction, 66, 101285.
51. OECD (2004), *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills, PISA,* OECD Publishing, Paris, https://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33694881.pdf
52. OECD (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy,* OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en
53. OECD (2018). *ISA 2022 Mathematics Framework (Draft)*. Recuperado el 11 de junio de 2024, de https://pisa2022-maths.oecd.org/files/PISA%202022%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf
54. OECD (2019), *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*, PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/b25efab8-en.
55. OECD (2023 - a), *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*, PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en.
56. OECD (2023 - b). *PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español* (1.ª ed.). Instituto Nacional de Evaluación Educativa.
57. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2005). *Definición y selección de competencias clave (DeSeCo). Resumen ejecutivo.* OCDE. https://www.deseco.ch/bfs/deseco/en/index/03/02.parsys.78532.downloadList.94248.DownloadFile.tmp/2005.dscexecutivesummary.sp.pdf
58. Pekrun, R., & Linnenbrink-Garcia, L. (2012). Academic emotions and student engagement. In *Handbook of research on student engagement* (pp. 259-282). Boston, MA: Springer US.
59. Pekrun, R., Goetz, T., Daniels, L., Stupnisky, R. H., & Perry, R. (2010). Boredom in achievement settings: Exploring control-value antecedents and performance outcomes of a neglected emotion. *Journal of Educational Psychology, 102,* 531–549.

60. Pekrun, R., Goetz, T., Titz, W., & Perry, R. P. (2002). Academic emo¬tions in students' self-regulated learning and achievement: A program of qualitative and quantitative research. *Educational Psychologist, 37*(2), 91–105.
61. Putwain, D. W., Becker, S., Symes, W., & Pekrun, R. (2018). Reciprocal relations between students' academic enjoyment, boredom, and achievement over time. *Learning and Instruction*, *54*, 73-81.
62. Recomendación del Consejo, de 22 de mayo de 2018, relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente (Texto pertinente a efectos del EEE.). (2018). *Diario Oficial, C 189,* 1-13. CELEX: https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:32018H0604(01) [legislation]
63. Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. (2006). *Diario Oficial, L 394,* 10-18. ELI: http://data.europa.eu/eli/reco/2006/962/oj [legislation]
64. Schubert, S., Pekrun, R., & Ufer, S. (2023). The role of epistemic emotions in undergraduate students' proof construction. *ZDM–Mathematics Education, 55*(2), 299-314.
65. Schukajlow, S., Blomberg, J., Rellensmann, J., & Leopold, C. (2021). Do emotions and prior performance facilitate the use of the learner-generated drawing strategy? Effects of enjoyment, anxiety, and intramathematical performance on the use of the drawing strategy and modelling performance. *Contemporary Educational Psychology, 65*, 101967. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2021.101967
66. Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2023). Emotions and motivation in mathematics education: Where we are today and where we need to go. *ZDM–Mathematics Education, 55*(2), 249-267.
67. Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: Theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM*, *49*, 307-322.
68. Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.
69. Slavin, R. E. (1996). Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. *Contemporary Educational Psychology, 21*(1), 43–69.
70. Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and teacher education*, *17*(2), 213-226.
71. Susperreguy, M. I., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., & Chen, M. (2018). Self-concept predicts academic achievement across levels of the achievement distribution: Domain specificity for math and reading. *Child development*, *89*(6), 2196-2214.
72. Van der Beek, J. P. J., Van der Ven, S. H. G., Kroesbergen, E. H., & Leseman, P. P. M. (2017). Self-concept mediates the relation between achievement and emotions in mathematics. *The*

British Journal of Educational Psychology, 87(3), 478–495. https://doi.org/10.1111/bjep.12160

73. Vilhunen, E., Turkkila, M., Lavonen, J., Salmela-Aro, K., & Juuti, K. (2022, April). Clarifying the relation between epistemic emotions and learning by using experience sampling method and pre-posttest design. In *Frontiers in Education* (Vol. 7, p. 826852). Frontiers.
74. Unicef. (1989). *Convention on the Rights of the Child*.
75. Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics,* 113-121.

La validez de los enlaces presentados en la anterior relación ha sido comprobada a fecha de 9 de julio de 2024.

7. Anexos

Todo el material presentado en estos anexos ha sido diseñado personalmente.

7.1. Fichas

Trabajar con polinomios

Ejercicio 1 *Expresa utilizando el lenguaje algebraico:*

1. *Un número:* x
2. *Un número más dos unidades.*
3. *Un número menos cuatro unidades.*
4. *El doble de un número.*
5. *La mitad de un número.*
6. *El triple de un número, más cinco unidades.*
7. *Un número más tres unidades.*
8. *El doble del resultado de sumarle tres a un número.*
9. *La mitad del resultado de restarle uno a un número.*
10. *Un tercio de un número, más sesenta unidades.*
11. *El cuadrado de un número.*
12. *El cuadrado de un número, menos dos unidades.*
13. *El cuadrado del resultado de restarle dos a un número.*
14. *Un número menos un tercio de ese número.*
15. *Un número, más un cuarto de ese número, más una unidad.*
16. *El doble de un número, menos uno es igual a tres unidades.*
17. *El cuadrado de un número es igual al doble de ese número más uno.*

Ejercicio 2 *Representad estos polinomios con las fichas.*

1. $p(x) = 2x^0 + 3x^1 + 1x^2 + 0x^3 - 2x^4$
2. $q(x) = 1 + 2x - x^2 - x^3 + 3x^4$
3. $l(x) = 3$
4. $m(x) = -x^3$
5. $r(x) = -3 + x^3 - 3x^4$
6. $s(x) = x^3 - 2x^4 + 3 - x + x^2$
7. $t(y) = -3 - y + y^4 + y^2$

Cuando acabéis, id construyendo polinomios con las fichas; el resto de compañeros del grupo deberán tratar de escribir correctamente la expresión algebraica que le corresponda. Después esperar indicaciones.

Ejercicio 3 *En estas cuestiones tendréis que representar los polinomios utilizando las fichas y posteriormente sumarlos utilizando también las fichas . Cuando lo hayáis hecho expresad el resultado de forma algebraica.*

1. *Tenemos los polinomios* $p_1(x) = 1 + x + 2x^2 + x^4$ *y* $q_1(x) = 2x + 3x^2 + 3x^3 + x^4$. *Realizar* $p_1(x) + q_1(x)$.

2. *Tenemos los polinomios* $p_2(x) = 1 + x^3 - 4x^2$ *y* $q_2(x) = 3x^2 + 2x^4 - x + x^3 - 3$. *Realizar* $p_2(x) + q_2(x)$ *y* $q_2(x) + p_2(x)$. *¿Qué se puede decir de ello?*

3. *Calculad usando las fichas:* $(1 + x + x^2 - x^4) + (2x - 2x^2 + x^3 + 2x^4)$.

4. *Usando las fichas, ¿sois capaces de expresar este polinomio* $p(x) = 2 - x^3 + 4x^4$ *como suma de dos polinomios? ¡Hay muchas posibilidades!*

5. *Tenemos el polinomio* $q(x) = x - 2x + x^3 + 2x^4$. *¿Sois capaces de encontrar un polinomio, tal que si se lo sumamos a* $q(x)$ *nos dé* $h(x) = 2 - x^3 + x^4$ *?*

6. *Tenemos* $p_3(x) = 1 + x + x^2 + 3x^3 + 4x^4$ *y* $q_3(x) = -1 - x - x^2 - 3x^3 - 4x^4$. *Calculad* $p_3(x) + q_3(x)$. *¿Os esperábais este resultado? ¿Qué podéis decir de la relación de* $p_3(x)$ *y* $q_3(x)$?

Ejercicio 4 *En cada apartado haz la suma del polinomio $p(x)$ y del polinomio $q(x)$. Escríbelo de manera detallada como en el ejemplo.*

- $p(x)=1x$ $\quad q(x)=2x$ $\quad p(x)+q(x)=1x+2x=3x.$
- $p(x)=x$ $\quad q(x)=2x$
- $p(x)=x^2$ $\quad q(x)=3x^2$
- $p(x)=5x^4$ $\quad q(x)=4x^4$
- $p(x)=4x^2$ $\quad q(x)=-2x^2$
- $p(x)=2x$ $\quad q(x)=1$
- $p(x)=-3x$ $\quad q(x)=x^2$
- $p(x)=3x$ $\quad q(x)=5x+1$
- $p(x)=2x^3+1$ $\quad q(x)=4x^3$
- $p(x)=2x^3+1$ $\quad q(x)=4x^2$
- $p(x)=2x^3+1$ $\quad q(x)=-4x^2$
- $p(x)=4x^2-3$ $\quad q(x)=-x^2+1$
- $p(x)=2+5x$ $\quad q(x)=-3x$
- $p(x)=-3x$ $\quad q(x)=2+5x$
- $p(x)=x^3+2-4x^2$ $\quad q(x)=1+x^2+2x^3$
- $p(x)=x^3+2-4x^2$ $\quad q(x)=x^3-5+2x^2$
- $p(x)=x^3+2-x^4$ $\quad q(x)=x+x^2-x^3$
- $p(x)=4x^3-2x^2+x-7$ $\quad q(x)=-4x^3+2x^2-x+7$

¿Os esperábais el último resultado?

Ejercicio 5 *En cada apartado haz la resta del polinomio $p(x)$ menos el polinomio $q(x)$. Escribe todo el proceso como en el ejemplo.*

$p(x)=5x$ $\quad q(x)=2x$ $\quad$ *El opuesto de $q(x)$ es $-q(x)=-2x$.*

$p(x)-q(x)=p(x)+(-p(x))=5x+(-2x)=3x$

- $p(x)=4x^2$ $\quad q(x)=2x^2$
- $p(x)=3x$ $\quad q(x)=5x$
- $p(x)=-2x^4$ $\quad q(x)=4x^4$
- $p(x)=-x^3$ $\quad q(x)=-8x^3$
- $p(x)=x^5$ $\quad q(x)=3$
- $p(x)=2$ $\quad q(x)=x^4$
- $p(x)=2$ $\quad q(x)=-x^4$
- $p(x)=5x$ $\quad q(x)=x^3$
- $p(x)=5x+3$ $\quad q(x)=2x$
- $p(x)=3+4x^4$ $\quad q(x)=8x^4$
- $p(x)=3x^2$ $\quad q(x)=2x^2+5$
- $p(x)=-x^3$ $\quad q(x)=-x^3$
- $p(x)=-x+x^6$ $\quad q(x)=2x^3+x^4-5x$
- $p(x)=2x^3+x^4-5x$ $\quad q(x)=-x+x^6$

¿Podéis sacar alguna conclusión de los dos últimos resultados?

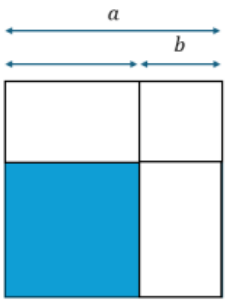
Ejercicio 6 *En cada apartado haz el producto (la multiplicación) del polinomio $p(x)$ por el ponimonio $q(x)$. Escríbelo de manera detallada como en el ejemplo.*

- $p(x)=4$ $q(x) = x \rightarrow p(x) \cdot q(x) = 4 \cdot x = 4x$
- $p(x)=x$ $q(x) = 4$
- $p(x)=5$ $q(x) = -x^2$
- $p(x)=-10$ $q(x) = x^3$
- $p(x)=x$ $q(x) = x^2$
- $p(x)=-x$ $q(x) = x^3$
- $p(x)=-x$ $q(x) = -2x^3$
- $p(x)=3$ $q(x) = 1 + x$
- $p(x)=x$ $q(x) = 1 + x$
- $p(x)=x^2$ $q(x) = 2 + x^3 - 2x^2$
- $p(x)=x+1$ $q(x) = 3$
- $p(x)=x+1$ $q(x) = x$
- $p(x)=x+1$ $q(x) = -4x^2$
- $p(x)=-1+x^3$ $q(x) = x + 1$
- $p(x)=2+4x-2x^2$ $q(x) = -2x + 2x^3$
- $p(y)=2y$ $q(y) = 3$
- $p(y)=-3y$ $q(y) = y$
- $p(y)=y$ $q(x) = 2x^3$
- $p(y)=y$ $q(x, y) = 2x^3 + 3y$
- $p(y)=y-x^2$ $q(x, y) = 2x^3 + 3y$

Ejercicio 7 *Queremos obtener la expresión algebraica de la cantidad de dinero que tienen ahorrado cinco hermanos: Juan, Marcos, Lucía, Rosa y Adrián. Juan tiene una cantidad x. Sabemos que Marcos tiene el triple que Juan. Lucía tiene ahorrada la misma cantidad que tienen Juan y Marcos juntos menos veinte euros. Rosa tiene un cuarto de los que tiene Lucía. Y Adrián tiene la misma cantidad que elevar al cuadrado la cantidad que tiene Marcos. Expresa lo que tiene cada hermano y plantea cuánto tienen en total:*

Juan: x
Marcos:
Lucía:
Rosa:
Adrián:

Ejercicio 8 *Indica el área total del cuadrado grande, y el área de cada uno de los cuadrado/ rectángulos pequeños.*



Después halla el área del cuadradado azul despejándolo de la expresión obtenida anteriormente.

Ejercicio 9 *Haz las siguientes multiplicaciones.*

1. $2 \cdot (1 + x) =$
2. $2 \cdot (1 + a) =$
3. $(1 + a) \cdot 2 =$
4. $2 \cdot a =$
5. $a \cdot b =$
6. $2 \cdot (a + b) =$
7. $(a + b) \cdot 2 =$
8. $-2 \cdot (a + b) =$
9. $2 \cdot (a - b) =$
10. $2 \cdot (-a + b) =$
11. $2 \cdot (3 + 4) =$
12. $a \cdot (a + 1) =$
13. $a \cdot (1 + a) =$
14. $a \cdot (a + b) =$
15. $b \cdot (a + b) =$
16. $(a + b) \cdot b =$

7.2. Examen

3º ESO – Progresiones Aritméticas y Geométricas

1. Calcula la suma de los 100 primeros números naturales (1 + 2 + 3 +…+ 99 + 100) de manera razonada (es decir, explicando el procedimiento).

(1,5 puntos)

2. Observa las siguientes sucesiones y responde a las preguntas:
   a) -6; -1; 4; 9; 14; …
   b) 1; 4; 9; 16; 25;...
   c) 96; 48; 24; 12; 6;…
   d) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \ldots$
   e) 0,7; -1,4; 2,8; -5,6; 11,2; …

   - Indica cuál de las sucesiones anteriores es una progresión aritmética, geométrica o ninguna de las anteriores.
   - Halla los dos términos siguientes de todas las sucesiones anteriores.
   - De entre las que sean aritméticas indica la diferencia (d) y calcula su término general.
   - De entre las que sean geométricas indica la razón (r) y calcula su término general.

(2 puntos)

3. En una progresión aritmética conocemos que el primer término es -5 ($a_1 = -5$) y que la suma de los diez primeros términos es 85 ($S_{10} = 85$). Halla el décimo término de dicha sucesión y su diferencia (d).

(2 puntos)

4. Juan ha comprado 20 libros. Por el primero ha pagado 1€, por el segundo 2 €, por el tercero 4 €, por el cuarto 8 € y así sucesivamente. ¿Cuánto ha pagado por el vigésimo libro? ¿Cuánto ha pagado por todos los libros en total?

(2 puntos)

5. El primer término de una progresión aritmética es $b_1 = 4$ y el séptimo es $b_7 = 13$. Calcula su diferencia (d) y b_3.

(1,5 puntos)

6. De una sucesión geométrica sabemos que el tercer término es $c_3 = 12$ y el sexto $c_6 = 96$. Calcula el término general de la sucesión.

(1 punto)

7.3. Kahoot

• 3º ESO: https://create.kahoot.it/share/cuanto-sabes-de-lenguaje□algebraico/41501f7c-ad4b-4acd-9f64-013b726442c5

[Disponible a 7 de julio de 2024]