FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Estadística

Aplicación Shiny para optimización de carteras de inversión en criptomonedas

Autora: Paula Garrido Mellado

Tutor: Ricardo Josa Fombellida

Año: 2024

A Irene y Rafa, mis mayores apoyos en esta etapa

Agradecimientos

A Ricardo Josa Fombellida, mi tutor, por haberme guiado durante el proceso de este trabajo. A mis compañeros de carrera, que se han convertido en amigos, por esta maravillosa etapa. A mi familia y pareja, por no haber dejado nunca de creer en mí. Por último, pero no menos importante, a los profesores del grado, por habernos aportado tanto incluso en momentos tan difíciles como una pandemia.

Resumen

En este proyecto se desarrolla una aplicación para la selección de carteras de inversión en el ámbito de las criptomonedas. En ella se permite que un usuario interesado en invertir en criptomonedas decida cuál es su objetivo y de esta manera conocer en qué criptoactivos invertir su capital dependiendo de la finalidad decidida. Para comprender el funcionamiento de la aplicación se incluyen distintos ejemplos de los posibles resultados con sus respectivos análisis.

El enfoque utilizado es el modelo de Markowitz. Se analizan los modelos básico, donde todas las cotizaciones tienen el mismo peso; modificado, donde se programa mayor peso a las cotizaciones más recientes; un modelo con restricciones de cardinalidad, es decir, un número mínimo y máximo de criptomonedas que forman parte de cada cartera; y un modelo que añade cotas a las inversiones en criptomonedas.

Para el diseño de la aplicación se ha usado la librería Shiny de R y para la obtención de las distintas carteras se ha programado el modelo en AMPL.

Palabras clave: optimización de carteras, criptomoneda, rendimiento, riesgo, frontera eficiente.

Abstract

This proyect develops an application based on selection of investment portfolio in the field of cryptocurrencies. It allows a user that is interested in cryptocurrencies investment to decide which their aim is, enabling them to know which cryptoassets should invest depending on the purpose decided. To understand how the application works, several examples of the different possible results are included, with their respective analysis.

The approach used is the Markowitz model. The basic model, where all the contributions have the same weights; modified, where a heavier weight is programmed to the most recent contributions; a model with cardinality restrictions, meaning that a minimum and maximum number of cryptoassets must be included in each portfolio; and a model that includes dimensions to the cryptocurrencies investment.

To create the design of the app, the Shiny library from R has been used, and to obtain the different portfolios the model has been programmed in AMPL.

Key words: portfolio optimization, cryptocurrency, reward, risk, efficient frontier.

Índice

1. Introducción

Las criptomonedas nacen en 2008, siendo la primera moneda virtual el conocido *Bitcoin*, que será el máximo exponente de este tipo de mercado. Desde este año, numerosos científicos y matemáticos han contribuido para que estos nuevos criptoactivos lleguen a ser lo que son hoy en día. Oficialmente, criptomoneda se define de la siguiente manera:

"Se entenderá por moneda virtual aquella representación digital de valor no emitida ni garantizada por un banco central o autoridad pública, no necesariamente asociada a una moneda legalmente establecida y que no posee estatuto jurídico de moneda o dinero, pero que es aceptada como medio de cambio y puede ser transferida, almacenada o negociada electrónicamente", ver [1].

En este trabajo hemos recogido datos de las principales diez criptomonedas, con información desde el 2 de octubre del año 2019 hasta el 2 de octubre del 2023. De esta manera podremos ver cómo han afectado distintos fenómenos en la evolución de estas monedas digitales, como por ejemplo la pandemia y la guerra de Ucrania.

Esta modalidad de mercado es mucho más volátil e impredecible que otro tipo de mercado. Veamos por ejemplo la fluctuación del valor de una moneda virtual (en este caso, Bitcoin) comparado con la fluctuación del valor de las acciones de una empresa (Mapfre, por ejemplo).

Figura 1: Evolución de Mapfre y Bitcoin.

Como podemos observar en la Figura 1, el comportamiento de una criptomoneda es mucho más impredecible que el de una empresa convencional y sus fluctuaciones son más grandes. Esto se debe a que este tipo de mercado es muy reciente y no está regulado aún. Por ello, es importante profundizar en el estudio y la aplicación de herramientas eficientes a este tipo de mercado, de manera que podamos optimizar y gestionar las inversiones en este campo tan volátil.

1.1. Objetivos

El propósito principal de este trabajo es la creación de una aplicación web que permita al usuario interactuar con ella para decidir cómo invertir en criptomonedas mediante el modelo de Markowitz. Respecto de los trabajos realizados anteriormente ([2], [3] y [4]), que usan una combinación lineal del rendimiento y del riesgo de la cartera en el modelo de Markowitz, en éste se considera una combinación convexa. El trabajo también considera restricciones de cardinalidad y dar más importancia a los datos más recientes. Un propósito importante del trabajo es visualizar el modelo con RShiny. Para implementar los modelos matemáticos se utilizará AMPL.

1.2. Estructura

La memoria del trabajo se desarrolla según la siguiente estructura:

- **Capítulo 1: Introducción.** Contextualización de los criptoactivos y objetivos del trabajo.
- **Capítulo 2: Marco teórico.** Conceptos de optimización de carteras, el modelo de Markowitz y fundamentos de la inversión en criptomonedas.
- **Capítulo 3. Descripción de datos y metodología.** Descripción de la metodología utilizada y de los datos usados.
- **Capítulo 4. Desarrollo de la aplicación Shiny.** Explicación de la estructura de la aplicación, funcionalidades implementadas y ejemplos del funcionamiento.
- **Capítulo 5. Resultados.** Presentación de los resultados obtenidos, análisis e interpretación de los mismos.
- **Capítulo 6. Conclusiones.** Posibles mejoras o extensiones, limitaciones del trabajo y logros alcanzados e importancia del estudio realizado.
- **Índices de figuras.**
- **Índices de tablas.**
- **Referencias bibliográficas.**

2. Marco teórico

En este apartado se explicarán los conceptos básicos de la optimización de carteras. Además, profundizaremos en el modelo de Markowitz y analizaremos la inversión en criptomonedas.

2.1. Fundamentos de la inversión en criptomonedas

Lo más importante para poder invertir en los criptoactivos es hacer un análisis fundamental de éstos como se indica en [5]. Así, obtenemos el valor real de una criptomoneda y de esta manera sabremos si su valor puede despreciarse con el tiempo o por el contrario su valor crece.

Antes de introducirnos en este análisis, vamos a definir unos conceptos básicos:

- White Paper: De acuerdo con [6], un white paper es un documento de nueve páginas que establece las bases para la criptomoneda. Está destinado a un público técnico, ya que su lenguaje requiere de conocimientos avanzados de programación y matemáticas.

- Token: De acuerdo con [7], un token es una unidad de valor basada en criptografía y emitida por una entidad privada en una 'blockchain', como Bitcoin o Ethereum.

- Blockchain: Según [8], blockchain es una tecnología que crea una base de datos a la cual tienen acceso sus participantes, que podrán rastrear cada transacción que hayan realizado. Cada blockchain usa un mecanismo que la aporta seguridad. De esta manera, se sabe cuál es más fácil de minar.

El valor real de una criptomoneda va a aumentar cuanto mayor sea su adopción en el mercado. Es decir, cuanto más se pueda usar esa moneda para pagar en ciertas páginas web o comercios, mayor será su valor. También nos interesa saber si está regulada, ya que, si no lo está, su valor disminuye. Estas regulaciones las veremos más adelante.

Otra de las cosas que tendremos que estudiar antes de invertir en criptomonedas, será su proyecto y su cobertura mediática, que nos indicará si tiene potencial o no. Podemos leer el White Paper de cada moneda digital, que nos muestra las reglas sobre las que se basan y cuántos tokens salen a circulación. También es interesante fijarse en los datos de la blockchain a la que pertenece, ya que dependiendo del mecanismo de seguridad que adopten se correrá más o menos riesgo.

¿Cuáles son las regulaciones actuales para las criptomonedas? Ver [9]. Para responder a esta pregunta tenemos que tener en cuenta que, en España no existe aún ninguna legislación específica. Sin embargo, en 2021 se aprueba la ley de medidas de prevención y lucha contra el fraude fiscal, donde se señalan las

obligaciones de los contribuyentes de criptomonedas.
Esta norma ha sido el primer paso para crear un marco legislativo aplicable a las criptomonedas. A partir del momento de aprobación de esta ley, los operadores de servicios de criptomonedas tendrán que:

- Identificar a sus clientes.
- Solicitar justificantes del origen de los fondos con los que van a operar.
- Estar registrados como operador de criptomonedas en el Banco de España.

2.2. Conceptos de optimización de carteras

La optimización de carteras se basa en seleccionar la mejor combinación de activos para conseguir el objetivo que nos propongamos. El objetivo más común se centra en maximizar la rentabilidad minimizando a su vez el riesgo. Vamos a definir brevemente los conceptos básicos de este campo de investigación.

- Activos: son las distintas criptomonedas en las que queremos invertir.
- Cartera: combinación de la distribución del capital en los distintos activos.
- Frontera eficiente de rentabilidad-riesgo: conjunto de carteras eficientes, es decir, que ofrecen la mayor rentabilidad para cada nivel de riesgo, y el mínimo riesgo para cada nivel de rentabilidad. No hay una cartera mejor que la cartera eficiente en cuanto a riesgo y rendimiento.

2.3. Modelo de Markowitz

Es el modelo principal del trabajo. El objetivo del inversor es maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo asociados a la inversión, ver [10]. Además de los beneficios claros que están indicados en los objetivos de este modelo, nos ofrece la diversificación de la cartera, que es una de las principales características de este modelo. El modelo de Markowitz tiene la siguiente forma:

$$\text{mín}\, f(x) = k\sigma^2(x) - (1-k)r(x) = k\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j - (1-k)\sum_{j=1}^{n}x_jr_j$$

$$s.a: \sum_{j=1}^{n}x_j = 1,\ j = 1, ..., n$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, ..., n$$

- x_i es la proporción de riqueza invertida en el activo $i, i = 1, ..., n$
- $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ es la cartera de inversiones.

- $f(x)$ es la función objetivo. El primer término, $\sigma^2(x)$ se corresponde con el riesgo de la cartera, y el segundo, $r(x)$ se refiere a la rentabilidad diaria de la cartera.

- $R(x)$ es la rentabilidad de la cartera, definida como: $R(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j R_j$, donde R_j es la rentabilidad diaria de la criptomoneda $j; j = 1, ..., n$. Entonces, $ER(x) = r(x)$ y $VarR(x) = \sigma^2(x)$.

- r_j es el rendimiento diario esperado de la criptomoneda $j; j = 1, ..., n$, y σ_{ij} es la covarianza entre R_i y R_j, $i, j = 1, ..., n$.

El parámetro k, que aparece en la función objetivo, es un parámetro que, cuanto más cercano a 1 sea, más vamos a priorizar minimizar el riesgo, y cuanto menor sea pondremos más énfasis a maximizar el rendimiento. k mide la importancia a minimizar el riesgo frente a maximizar el rendimiento. Dando valores a $k \in [0, 1]$ se obtienen todas las carteras eficientes. Así, éstos problemas nos aportan la frontera eficiente. Para poder elegir una cartera eficiente de la frontera, comparamos ciertos valores estadísticos obtenidos. El ratio de Sharpe es una medida que nos sirve para decidir qué cartera de la frontera eficiente será mejor:

$$SR(x) = \frac{r(x) - \tilde{r}}{\sigma(x)},$$

donde $\tilde{r}$ es el rendimiento medio del activo sin riesgo. La cartera de la frontera que nos va a interesar va a ser la que tenga el mayor valor de ratio de Sharpe.

3. Descripción de los datos y metodología

En este capítulo se explican brevemente los datos usados junto con un ejemplo. Además, se muestra la metodología con la que se aborda el trabajo.

3.1. Descripción de los datos

Hemos considerado 10 de las criptomonedas más conocidas actualmente. Los criptoactivos seleccionados han sido los siguientes: Algorand, Bitcoin, BNB, Cardano, Chainlink, Ethereum, Litecoin, Polygon, Tether y XRP. Se ha decidido recoger datos diarios durante 4 años, comenzando en octubre de 2019 y finalizando en octubre de 2023. Esto nos va a resultar interesante ya que podremos ver el impacto de ciertos fenómenos, como la pandemia, en el valor de estas monedas.

Los datos han sido extraídos de la web *Yahoo Finance*, [11], de donde obtenemos un documento Excel con diversas columnas, como la media, el valor de cierre o el valor de cierre ajustado. En este caso he decidido trabajar con los valores de cierre ajustados. Nuestra tabla de datos final tiene el formato mostrado en la Figura 2.

	Date	Algorand	Bitcoin	BNB	Cardano	Chainlink	Ethereum	Litecoin	Polygon	Tether	XRP
1	2019-10-02	0.213062	7657.534	14.55230	0.035989	1.839934	164.8743	51.55688	0.009902	0.916240	0.231320
2	2019-10-03	0.209997	7525.158	14.32766	0.034949	1.777467	159.6131	51.51624	0.009720	0.915545	0.225810
3	2019-10-04	0.209942	7473.723	14.34929	0.036127	1.802248	161.1926	51.78020	0.009760	0.918823	0.231276
4	2019-10-05	0.204518	7424.631	14.32151	0.036187	1.790695	160.6263	51.77511	0.009646	0.912590	0.230856
5	2019-10-06	0.195923	7272.209	13.97331	0.035799	1.991992	157.5486	50.44525	0.009458	0.921378	0.234607
6	2019-10-07	0.200360	7515.011	14.70475	0.037980	2.189040	165.1321	52.66791	0.010024	0.919163	0.251257

Figura 2: Estructura de los datos principales.

En la Figura 3 se muestran los gráficos de la evolución en el tiempo de cada una de las criptomonedas consideradas durante los cuatro años incluidos en el estudio. Se observa una gran variabilidad y altos valores en algunas criptomonedas.

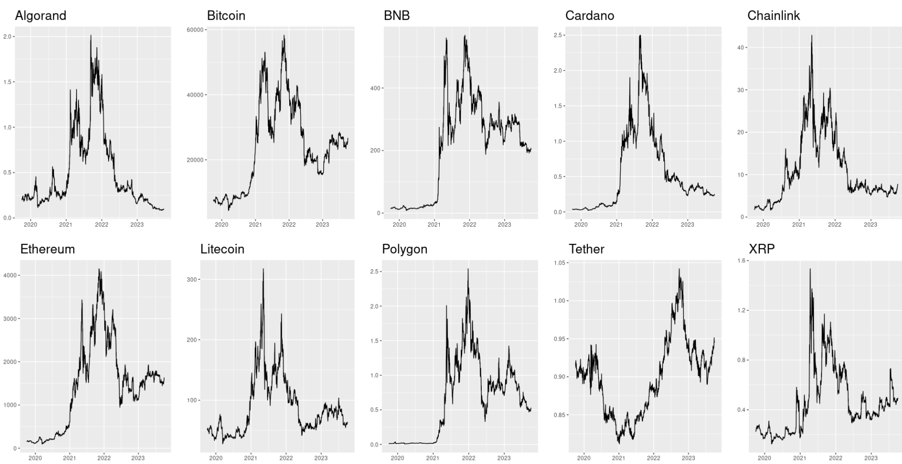

Figura 3: Evolución en el tiempo de las criptomonedas.

En la Tabla 1 se muestran los valores de rendimiento y riesgo, que se corresponden con la media y varianza respectivamente, de cada criptomoneda en el periodo de tiempo considerado.

Criptomoneda	Rendimiento	Riesgo
Algorand	1.0013	0.00368
Bitcoin	1.0015	0.00121
BNB	1.0031	0.00258
Cardano	1.0027	0.00281
Chainlink	1.0027	0.00339
Ethereum	1.0026	0.00203
Litecoin	1.0014	0.00237
Polygon	1.0055	0.00562
Tether	1.0000	0.00003
XRP	1.0022	0.00357

Tabla 1: Estadísticas de las criptomonedas

También vamos a analizar el gráfico de correlaciones de las criptomonedas de la Figura 4.

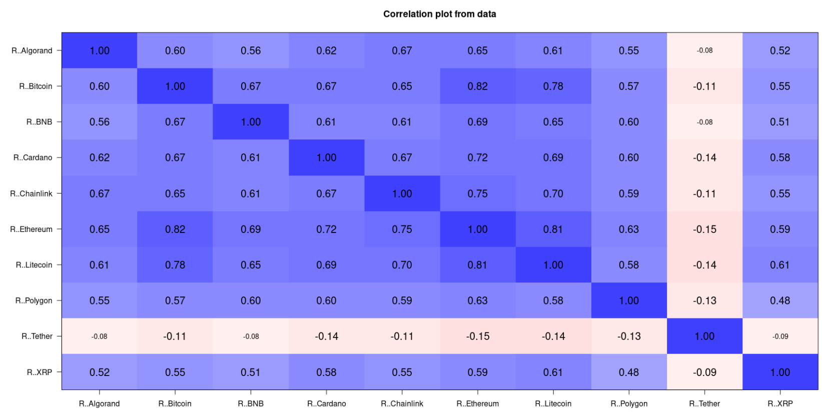

Figura 4: Correlación de las criptomonedas.

Observamos que las correlaciones no son muy altas, salvo entre Ethereum y Bitcoin, Litecoin y Bitcoin, y Ethereum y Litecoin. Esto nos quiere decir que estas criptomonedas se comportarán de forma similar o serán parecidas en cuanto a inversión. Por otro lado, el resto de las criptomonedas no tienen correlaciones muy elevadas, que es lo ideal para poder sacar conclusiones más certeras.

Por último, en la Figura 5, se incluye un gráfico en el que hemos dividido los datos de las diez criptomonedas por el primer dato de cada una que tenemos, de manera que podremos ver el crecimiento que han tenido individualmente en los últimos cuatro años.

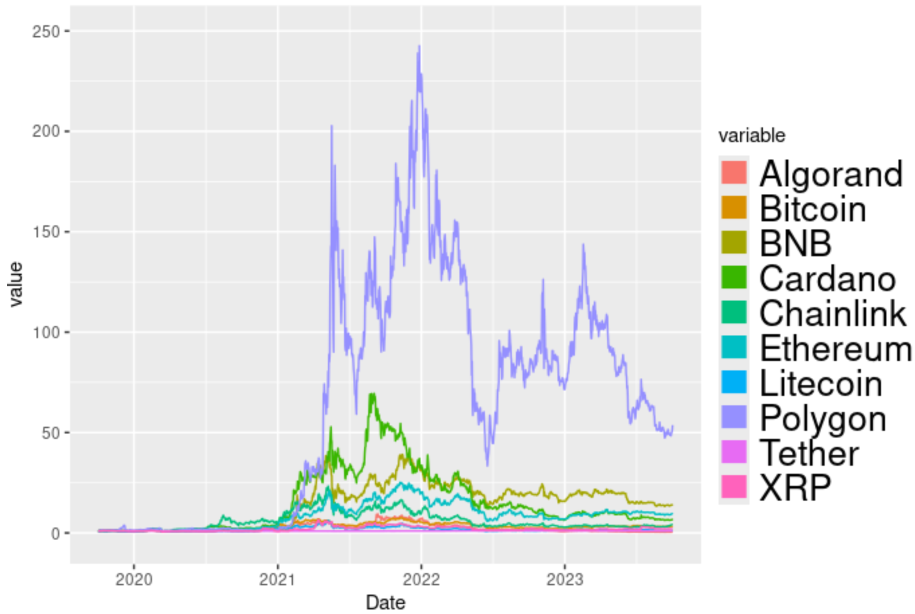

Figura 5: Crecimiento de las criptomonedas.

Se observa que Polygon al final del periodo ha multiplicado por casi 50 su valor inicial y Bitcoin por más de 10.

3.2. Metodología

El objetivo principal del trabajo es obtener una frontera eficiente de carteras usando el modelo de Markowitz. Diversos autores han utilizado el modelo de Markowitz como un problema de optimización no lineal biobjetivo. Véase [12], con empresas del IBEX35. En este trabajo se propone modificar mínimamente la función objetivo, considerando una combinación convexa del riesgo y rendimiento de la cartera. Esto será lo más novedoso respecto a TFGs anteriores.

$$\text{mín}\, f(x) = k\sigma^2(x) - (1-k)r(x) = k\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j - (1-k)\sum_{j=1}^{n}x_j r_j$$

$$s.a: \sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0; j = 1, ..., n$$

En este caso el parámetro $k \in [0,1]$. De esta manera, si $k = 0$, el objetivo será maximizar el rendimiento. En el caso de que $k = 1$, la función objetivo entonces se centrará únicamente en minimizar el riesgo de la cartera. Por último, si $k = 0.5$, estamos dando la misma importancia a minimizar el riesgo que a maximizar el rendimiento. Esto nos permite obtener carteras mediante la combinación convexa entre riesgo y rendimiento.

Consideramos el periodo de 4 años en 10 criptomonedas. Con las carteras eficientes obtenidas del modelo de Markowitz, hemos obtenido en la Figura 6 esta representación gráfica. Se muestran gráficamente los porcentajes de inversión en cada criptomoneda para cada valor de k. Además, estos porcentajes están también representados en la Tabla 2 de manera que podemos analizar los resultados tanto gráfica como numéricamente. Esto nos da una idea de los resultados que analizaremos más adelante en el trabajo.

Valor de k / Criptomoneda	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Algorand	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Bitcoin	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.21
Cardano	0	0	0	14.83	31.3	20.82	13.83	8.83	5.07	2.1	0
Chainlink	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ethereum	0	0	0	0	11.37	8.5	6.54	5.21	4.1	3.08	1.22
Algorand	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.38
Polygon	100	100	100	85.17	54.78	36.64	24.55	15.91	9.41	4.32	0.15
Tether	0	0	0	0	2.55	34.05	55.05	70.04	81.28	89.98	96.43
XRP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 2: Carteras eficientes para cada k

Nos llama la atención cómo para los primeros valores de k, la criptomoneda con más peso es Polygon, y a medida que la importancia a minimizar el riesgo aumenta, la criptomoneda que adquiere un mayor peso es Litecoin. Esto nos da ciertas pistas sobre el comportamiento de estas criptomonedas. Se puede decir que Polygon es la criptomoneda que ofrece un mayor rendimiento y Litecoin la que asume un menor riesgo.

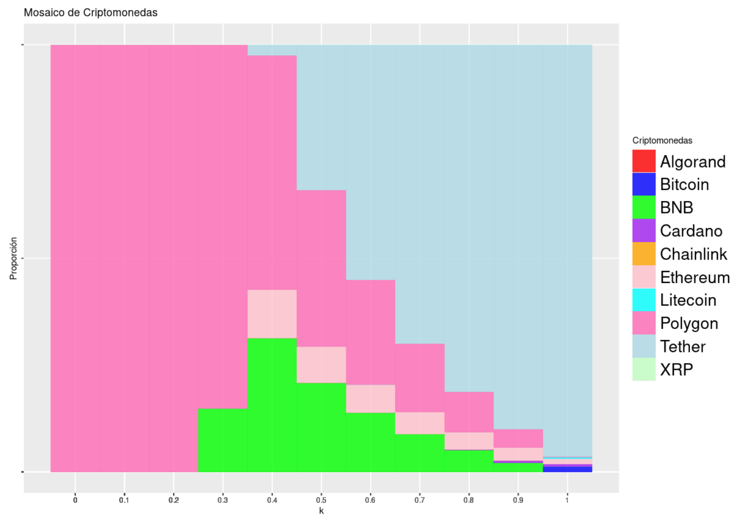

Figura 6: Carteras eficientes para cada k.

La optimización de carteras se ha llevado a cabo con AMPL, [13], donde hemos programado el modelo anterior obteniendo así las diferentes carteras eficientes del problema.

A continuación, hemos trasladado estos resultados a R, donde hemos programado la aplicación Shiny que analizaremos en el siguiente capítulo.

Por otro lado, hemos realizado análisis de distintas carteras con distintas restricciones, de manera que vemos cómo varían éstas. Estos últimos resultados no los hemos trasladado a la aplicación Shiny debido a que muchas de las carteras obtenidas están forzadas por las restricciones aplicadas. Vemos a continuación los modelos analizados como extensión del modelo básico de Markowitz, ver [14]. Se desarrollarán detalladamente en el Capítulo 5

1. Modelo de Markowitz con corrección de estimadores.
   En este caso, se lleva a cabo una modificación en los estimadores de la rentabilidad media, de manera que se da más peso a las cotizaciones más recientes, ver [15] y [16]. Para ello, corregimos la estimación del rendimiento de la siguiente manera:

$$r_j = \frac{\sum_{t=1}^{T} p^{T-t} R_j(t)}{\sum_{t=1}^{T} p^{T-t}}, 0 < p \leq 1$$

   Nótese que para $p = 1$ se tiene $r_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_j(t)$, que es el rendimiento que da el mismo peso a todos los datos.

2. Modelo de Markowitz con restricciones de cardinalidad:
   Uno de los problemas con los que nos hemos enfrentado en el trabajo es que, en el periodo de tiempo considerado, el modelo obtiene carteras en muchas ocasiones con únicamente una, dos o tres criptomonedas. Con este modelo vamos a especificar cuántos activos nos interesa que estén incluidos en la cartera. En este caso, nuestro modelo tendrá las siguientes restricciones:
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j \geq N$$
$$x_j \leq y_j S_j; j = 1, ..., n$$
$$y_j L_j \leq x_j; j = 1, ..., n$$
$$y_j \in \{0, 1\}; j = 1, ..., n$$
$$x_j \geq 0; j = 1, ..., n$$
   L_j y S_j son, respectivamente cotas superiores e inferiores de x_j. Nosotros tomamos $L_j = 0.01$ y $S_j = 1$. También podemos variar el valor de N realizando así un análisis de sensibilidad en N. Puesto que nuestro problema es que siempre obtenemos unas pocas criptomonedas en la cartera, vamos a probar con valores de $N = 3, 4$ y 5. Así, le indicamos al modelo que la cartera debe obtener como mínimo N activos. Esta restricción está forzada porque, como analizaremos más adelante, el resultado nos mostrará N criptomonedas en la cartera, pero con un % de inversión igual a L_j

3. Modelo de Markowitz con restricciones de cotas.
   Este modelo nos interesa puesto que, de esta manera, le indicamos al modelo cuánto hay que invertir en cada activo como mínimo y/o como máximo. En este caso, nos ha parecido relevante realizar un análisis con esta restricción puesto que los resultados obtenidos en varias ocasiones nos aconsejan invertir un 99 % en un activo, un 0.7 % en otro y un 0.3 % en otro. Así, podemos decidir que, como mínimo, por ejemplo, queremos invertir un 5 % para cada activo. Las restricciones que añadiremos a nuestro modelo serán las siguientes
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$
$$l_j \leq x_j \leq s_j; j = 1, ..., n$$
$$x_j \geq 0; j = 1, ..., n$$
   Aquí l_j y s_j son las cotas inferior y superior de inversión en cada criptomoneda, respectivamente, a las cuales daremos distintos valores, haciendo así un análisis de sensibilidad.

Como veremos, esta restricción va a estar forzada puesto que el modelo incluirá todos los activos en la cartera, con una inversión igual a la cota inferior indicada.

Como ya hemos contado anteriormente, tanto para el modelo básico de Markowitz como para sus tres extensiones, como método de obtención de resultados se utilizará AMPL, y para realizar una visualización de los mismos se usará R.

4. Desarrollo de la aplicación Shiny

Para el desarrollo de la aplicación he seguido varios pasos. Una vez que he obtenido los datos de Yahoo Finance, he añadido una columna de índices $1, ..., 1462$ (el número total de días) ya que he introducido la fecha como un índice de tiempo en AMPL.
El modelo de Markowitz con combinación convexa de riesgo y rentabilidad que queremos minimizar se programará en AMPL, junto con las restricciones propias del problema. En este caso, sólo he añadido las restricciones clásicas de Markowitz explicadas en el Apartado 2.3.

He usado distintos valores de k para obtener los resultados usados para la creación de la aplicación web. Los valores elegidos han sido $k \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$. Estos valores nos permiten estudiar cómo varía la solución dependiendo si le damos más valor a minimizar el riesgo, a maximizar el rendimiento, o bien, damos la misma importancia a ambos objetivos. Además, se han analizado las soluciones de estos valores de k para diferentes periodos de tiempo. Hemos considerado estudiar las soluciones obtenidas para la optimización de los últimos 6, 12, 18, 24 y 36 meses además de los cuatro años completos mencionados anteriormente. Analizaremos luego los resultados.

Una vez que el modelo está correctamente programado y funciona sin problemas, trasladamos las soluciones obtenidas a una hoja Excel, donde tendremos las siguientes columnas.

- Número de meses considerados en el análisis
- Valor de k
- Porcentaje de capital invertido en cada criptomoneda. En total son 10 columnas, que en conjunto es la cartera óptima para ese valor de k.
- Media o valor esperado de la cartera
- Varianza de la cartera
- Ratio de Sharpe de la cartera

Finalmente, obtenemos un conjunto de datos como el que se muestra en la Figura 7.

1	meses	k	Algorand	Bitcoin	BNB	Cardano	Chainlink	Ethereum	Litecoin	Polygon	Tether	XRP	Mean	Variance	SharpeRatio
2	48	0	0	0	0	0	0	0	0	100	0	0	1,005467	0,005615	0,093
3	48	0,1	0	0	0	0	0	0	0	100	0	0	1,005467	0,005615	0,093
4	48	0,2	0	0	0	0	0	0	0	100	0	0	1,005467	0,005615	0,093
5	48	0,3	0	0	14,83	0	0	0	0	85,17	0	0	1,0051132	0,0047099	0,096
6	48	0,4	0	0	31,3	0	0	11,37	0	54,78	2,55	0	1,0042567	0,00312741	0,103
7	48	0,5	0	0	20,82	0	0	8,5	0	36,64	34,05	0	1,00287843	0,00140459	0,117
8	48	0,6	0	0	13,83	0	0	6,54	0	24,55	55,05	0	1,00195955	0,000638864	0,137
9	48	0,7	0	0	8,83	0	0	5,21	0	15,91	70,04	0	1,00130325	0,000277945	0,168
10	48	0,8	0	0	5,07	0,14	0	4,1	0	9,41	81,28	0	1,00081087	0,000112399	0,218
11	48	0,9	0	0	2,1	0,52	0	3,08	0	4,32	89,98	0	1,00042775	4,32261E-05	0,293
12	48	1	0	1,21	0	0,61	0	1,22	0,38	0,15	96,43	0	1,00011421	2,61239E-05	0,316

Figura 7: Estructura de los datos de los resultados de AMPL.

Con este conjunto de datos y con el conjunto de datos de la Figura 2 será con los que implementaremos la aplicación.
Este procedimiento lo he repetido varias veces cogiendo los distintos periodos de tiempo mencionados anteriormente. De esta manera, es posible analizar las distintas carteras obtenidas dependiendo del periodo de tiempo en el que nos centremos al hacer el análisis.
También se puede observar cómo la composición de las carteras que maximizan el rendimiento a la vez que minimizan el riesgo varían dependiendo del periodo de tiempo escogido.

4.1. Estructura de la aplicación

En la aplicación vamos a distinguir tres partes principales, teniendo en cuenta que ha sido programada en R.

Primeramente, cargamos las librerías necesarias y los datos que se necesitarán más adelante. Se realizan unos cambios al conjunto de datos principal, puesto que las fechas no son detectadas correctamente. Para llevar a cabo esto, usamos la función *as.Date.numeric()*de R, ver [17].

A continuación he creado varias funciones que usaré más tarde dentro de la aplicación. En estas funciones escogemos los datos que van a ser usados para representar los gráficos y tablas que saldrán por pantalla. Por ejemplo, en la primera función *cambia_datos(k)*, escojo los datos que serán representados en los gráficos de sectores y barras. De esta manera se usan las demás funciones creadas en el programa.

Por último, se llega a la programación de la aplicación Shiny, ver [18]. Esta consta de tres partes principales:

- Ui: esta parte se centra en organizar la vista de la App. Dividimos la pantalla en columnas y filas, y en cada división indicamos lo que queremos que aparezca. En este caso, hemos decidido dividir la pantalla en cuatro filas. En la primera fila nos aparece el slider que será usado para elegir el valor de k deseado, como se observa en la Figura 8. Además, tenemos también la caja de opciones que permite al usuario elegir la cantidad de meses sobre la que se hará el análisis. Por otra parte, vemos también unas anotaciones para aclarar ciertas dudas que puedan surgirle al usuario al ejecutar la aplicación.

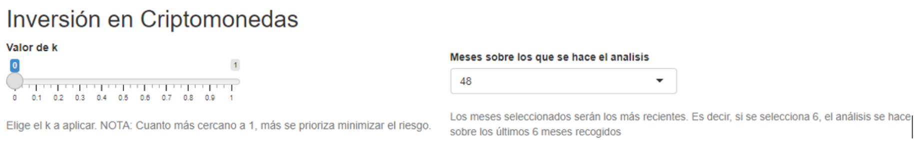

Figura 8: Estructura de la primera fila de la aplicación.

En la segunda fila es donde nos encontraremos los gráficos elegidos. En primer lugar, a la izquierda, aparece un diagrama de barras con el porcentaje del capital invertido en cada criptomoneda A la derecha nos aparece el diagrama de sectores que nos representa lo mismo. En la Figura 9, se muestra la estructura de esta fila.

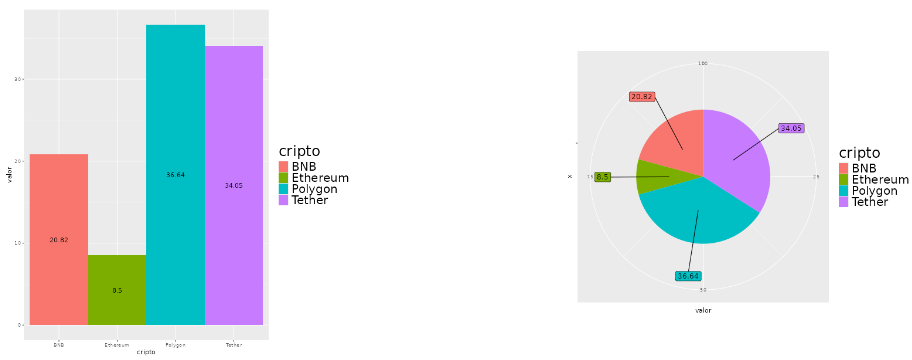

Figura 9: Estructura de la segunda fila de la aplicación.

En la tercera fila vamos a encontrarnos a la izquierda con la representación gráfica de la frontera eficiente para el periodo de tiempo escogido junto con las criptomonedas. A la derecha, por otro lado, observamos la tabla con el resumen estadístico de la cartera representada, lo vemos en la Figura 10.

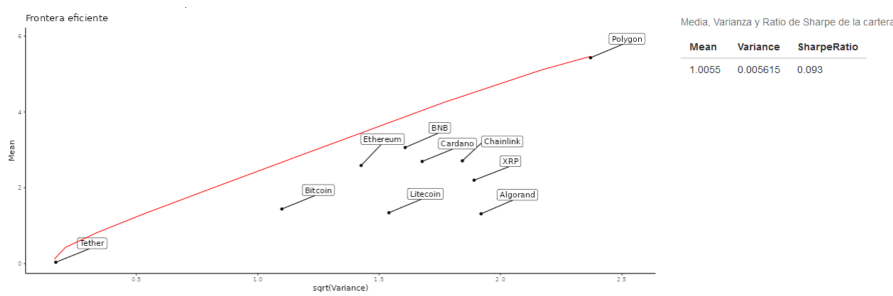

Figura 10: Estructura de la tercera fila de la aplicación.

En la cuarta y última fila tenemos los dos últimos gráficos, como se observa en la Figura 11. A la izquierda vemos el gráfico de la evolución de la cartera, donde tenemos una caja de elección, de manera que el usuario puede elegir la cartera sobre la que desea ver la evolución en el tiempo. Este gráfico también varía según el periodo de tiempo, ya que se verá la evolución de la cartera escogida en el intervalo seleccionado. A la derecha se incluye un gráfico con el valor del ratio de Sharpe según el valor de k. Esto nos sirve para ver visualmente cuál sería la mejor cartera de la frontera y para poder compararlas entre ellas en base a esta medida.

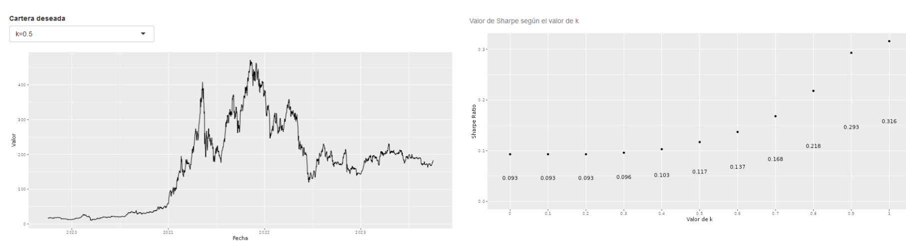

Figura 11: Estructura de la cuarta fila de la aplicación.

- Server: en esta parte vamos a programar cómo se crean los gráficos y las tablas que aparecen por pantalla. Aquí es donde modificamos la leyenda, tipo de gráfico, los colores, etc. En este caso, programamos el funcionamiento de los gráficos y conseguimos que estos cambien cuando se modifican ciertos valores.

- ShinyAPP: Es un comando que permite ejecutar y llevar a cabo la aplicación.

Esta app consta de una programación sencilla y clara. Se podrá modificar fácilmente el código en caso de querer añadir, excluir o cambiar algo relativo a los datos usados, el diseño de la aplicación o los gráficos escogidos para hacer el análisis.

4.2. Funcionalidades implementadas

En el proyecto se han incluido tres funcionalidades con las que el usuario puede interactuar modificando así los gráficos y tablas que se muestran.

La primera funcionalidad, mostrada en la Figura 12 permite escoger la importancia que se le quiere dar a minimizar el riesgo, es decir, si quiero darle mucha importancia entonces escogeré k más cercano a 1. Si quiero hacer la misma ponderación entre el riesgo y rendimiento, entonces escogeré $k = 0.5$. Si por el contrario, mi objetivo principal es maximizar el rendimiento sin tener mucho en cuenta el riesgo, el valor que necesitaré de k para conseguirlo será más cercano a 0.
Esta funcionalidad es importante ya que podemos elegir nuestro objetivo y la importancia que le damos a cada parte de la función objetivo. En el caso de que el objetivo fuera únicamente maximizar el rendimiento habría que escoger $k = 0$, y si en otra ocasión nos interesa sólo minimizar el riesgo, se selecciona $k = 1$.

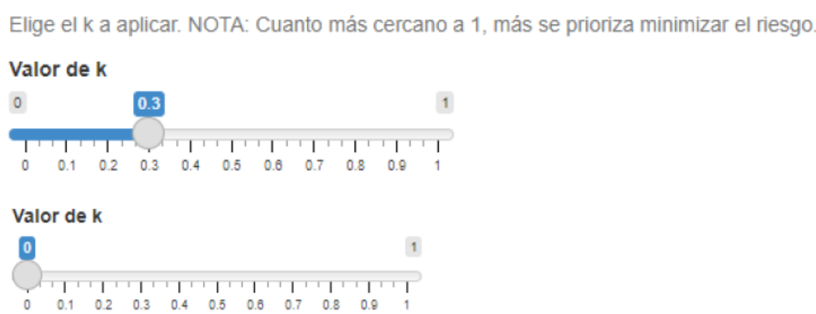

Figura 12: Slider de elección de k.

La segunda funcionalidad permite al usuario escoger el periodo de tiempo sobre el que se hace el análisis. Esta funcionalidad se puede ver en la Figura 13. De esta manera, el usuario decide si prefiere un análisis más exhaustivo eligiendo un periodo de tiempo mayor. Cuantos más datos tengamos, tendremos más información sobre el comportamiento de las criptomonedas y los resultados serán más fiables. O bien, si prefiere hacer un estudio centrado en los últimos meses, asumiendo que de esta manera seguirán comportándose las criptomonedas en un futuro.

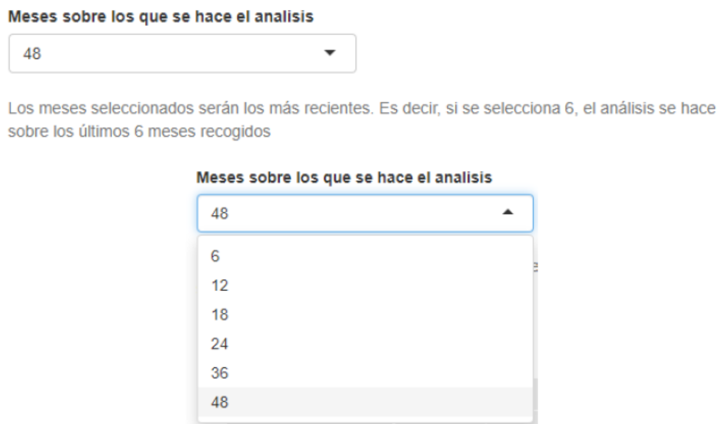

Figura 13: Caja de elección del periodo de tiempo.

La última funcionalidad aplicada nos permite ver la evolución de la cartera que se desee en el periodo de tiempo en el que están los datos. Mostrada en la Figura 14, es una funcionalidad bastante interesante ya que podemos contrastar los resultados del modelo optimizado con la evolución de la cartera deseada en el periodo de tiempo pertinente.

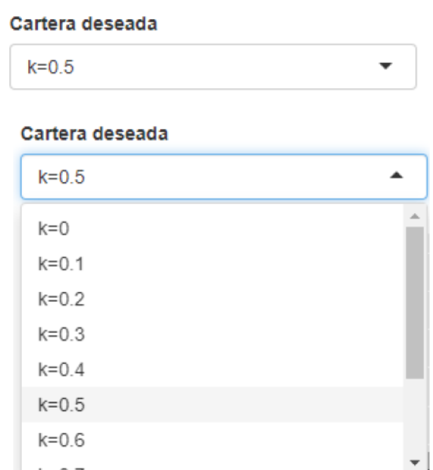

Figura 14: Caja de elección de k.

5. Análisis e interpretación de los resultados

En este apartado se muestran algunos resultados obtenidos en el trabajo.

5.1. Aplicación Shiny y modelo de Markowitz

El primer gráfico que se analiza es el que se muestra en la Figura 15, que representa los valores del ratio de Sharpe por cada valor de k para el análisis realizado con los cuatro años completos recogidos en los datos:

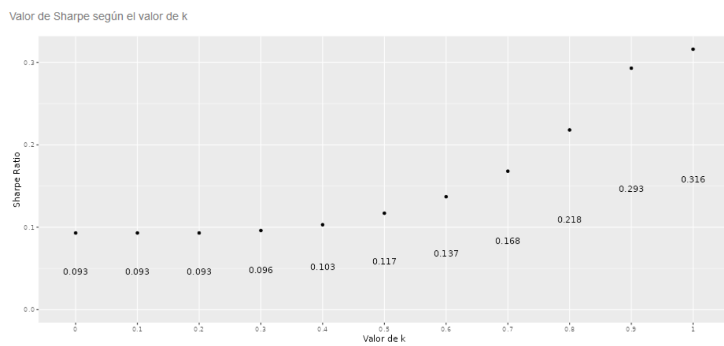

Figura 15: Ratio de Sharpe para cada valor de k en 48 meses.

A simple vista observamos cómo el valor más alto corresponde con un valor de $k = 1$. Esto nos indica que, contemplando todas las posibilidades, la mejor cartera es en la que nuestro objetivo principal será minimizar el riesgo.
Nos resulta curioso como para $k \in [0, 0.2]$, el ratio de Sharpe es igual. En el resto de valores vemos cómo esta métrica aumenta, llegando a su máximo, como ya hemos indicado antes, en $k = 1$.

A continuación, se hará una pequeña comparación entre las carteras para $k = 0, 0.5, 1$. Si uno de estos valores de k no maximizase el ratio de Sharpe también analizaríamos los resultados para la k correspondiente. Sin embargo, en este caso, la cartera que minimiza el riesgo y la cartera de máximo ratio de Sharpe es la misma. Incluiremos también el gráfico con la evolución de la cartera.

$k = 0$. Objetivo: maximizar el rendimiento.

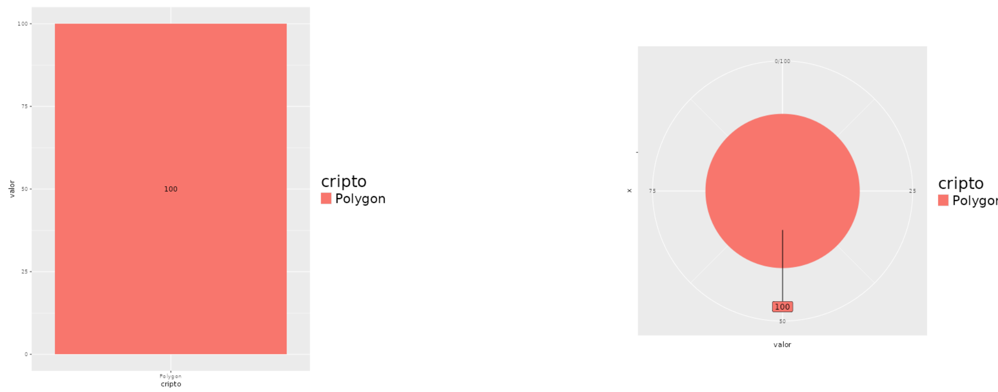

Figura 16: % del capital invertido en cada criptomoneda para $k = 0$ en 48 meses.

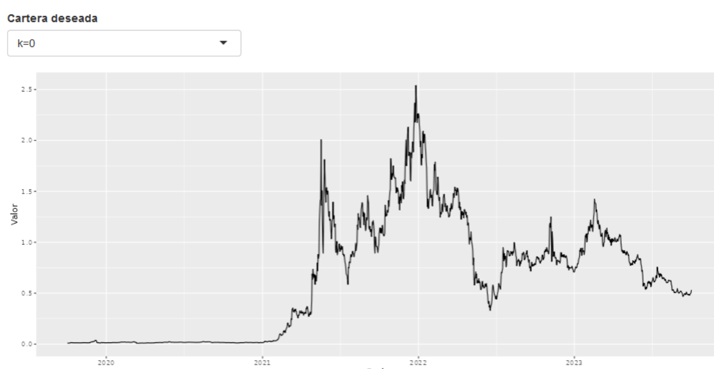

Figura 17: Evolución de la cartera eficiente en 48 meses y $k = 0$.

Si no tenemos en cuenta el riesgo, nos sugiere invertir el 100 % de nuestro capital en Polygon como podemos observar en la Figura 16. Esto nos demuestra que éste es el criptoactivo con mejor rentabilidad pero también con mayor riesgo. También podemos confirmar esto fijándonos en su varianza, mostrada en la Tabla 3, donde también se muestra la rentabilidad y el ratio de Sharpe de la cartera eficiente para $k = 0$. En este caso, vemos cómo el gráfico de la evolución de la cartera eficiente de la Figura 17 es idéntico al gráfico de la evolución en el tiempo de Polygon visto en la Figura 3, puesto que nos indica una inversión del 100 % en esta moneda.

Media, Varianza y Ratio de Sharpe de la cartera.

Mean	Variance	SharpeRatio
1.0055	0.005615	0.093

Tabla 3: Estadísticas de la cartera con $k = 0$ para 48 meses

En el campo de la optimización de carteras, el riesgo se define como la varianza del rendimiento de la cartera, por tanto, cuanto mayor sea la varianza, mayor será el riesgo de ésta.
Vemos cómo cambia la cartera en la Figura 18 al aumentar la importancia que le damos a minimizar el riesgo.

$k = 0.5$. Objetivo: maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo por igual.

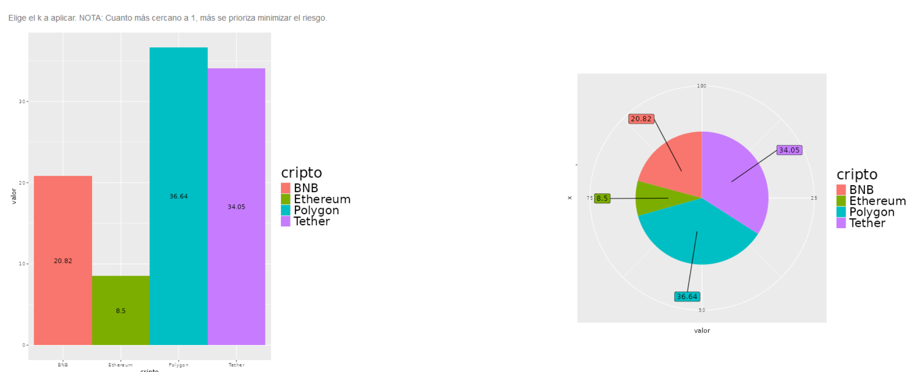

Figura 18: % de capital invertido a cada criptomoneda para $k = 0.5$ en 48 meses.

Media, Varianza y Ratio de Sharpe de la cartera.

Mean	Variance	SharpeRatio
1.0029	0.0014046	0.117

Tabla 4: Estadísticas de la cartera con $k = 0.5$ para 48 meses

En la Tabla 4 se muestran los estadísticos de la cartera eficiente para $k = 0.5$. En este caso observamos una cartera mucho más repartida o diversificada, contando con cuatro monedas distintas. Vemos que el mayor porcentaje de inversión está dedicado a Polygon, por lo que seguirá siendo la criptomoneda que mayor beneficio aporta. Para minimizar el riesgo, en este caso la optimización sugiere que la mayoría de nuestro capital debería ir dirigido a otras criptomonedas como son BNB, Ethereum y Tether. En esta cartera estamos obteniendo el resultado de aplicar el mismo peso a maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo.

Si comparamos la varianza de ambas carteras observamos cómo la varianza observada en la Tabla 4 ha disminuido en comparación a la de la Tabla 3. Comprobamos que según damos una mayor importancia a minimizar el riesgo, el modelo consigue encontrar una cartera que cumple las condiciones.

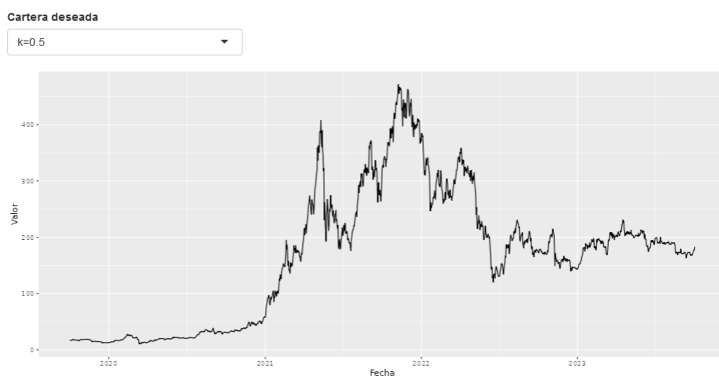

Figura 19: Evolución de la cartera eficiente en 48 meses y $k = 0.5$.

En la Figura 19 vemos la evolución en el tiempo de esta cartera, lo que nos da una idea de su comportamiento y la tendencia que tenía durante los últimos meses del estudio.
Comprobamos cómo el problema de optimización ha obtenido una solución óptima para esta configuración en la que el rendimiento sigue siendo alto pero la varianza es algo menor al caso anterior.

$k = 1$. Objetivo: minimizar el riesgo. Cartera de máximo ratio de Sharpe

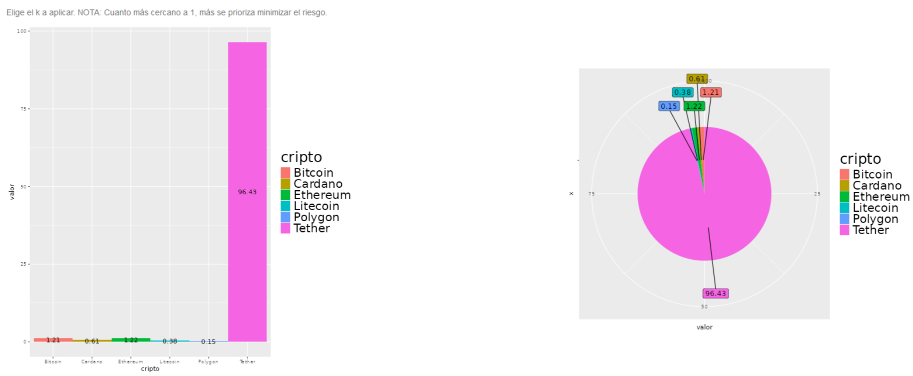

Figura 20: % de capital invertido en cada criptomoneda para $k = 1$ en 48 meses.

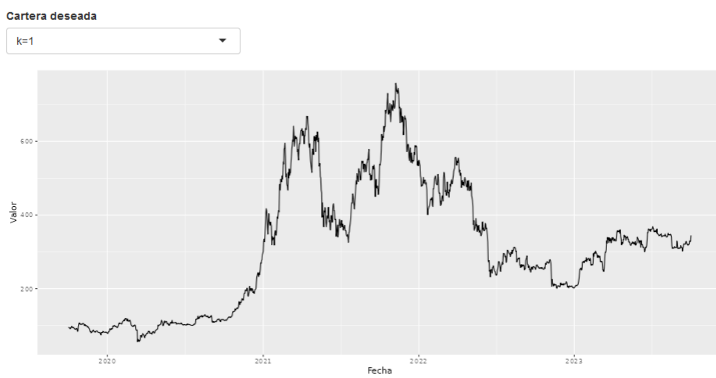

Figura 21: Evolución de la cartera eficiente en 48 meses y $k = 1$.

Media, Varianza y Ratio de Sharpe de la cartera.

Mean	Variance	SharpeRatio
1.0001	2.6124e-05	0.316

Tabla 5: Estadísticas de la cartera con $k = 1$ para 48 meses

Cuando $k = 1$ observamos en la Figura 20 cómo nos recomienda invertir un 96 % en Tether, lo que nos sugiere que será esta la criptomoneda que menor riesgo sufre. También aparecen otras cinco criptomonedas a las que se les dedica el 4 % restante, aunque en la mayoría de casos el porcentaje indicado es $<$ 1 %, por lo que deducimos que estas serán las monedas que mayor beneficio aporten, pero también tienen un mayor riesgo. Con la Figura 21 y la Tabla 5 completamos el análisis de estos resultados, donde podemos ver una varianza aún menor y un rendimiento muy pequeño, lo cual nos indica que el modelo funciona correctamente, ya que cumple los objetivos señalados.

Se incluye también en la Figura 22 la representación gráfica de la frontera eficiente junto con las carteras individuales para este periodo de tiempo:

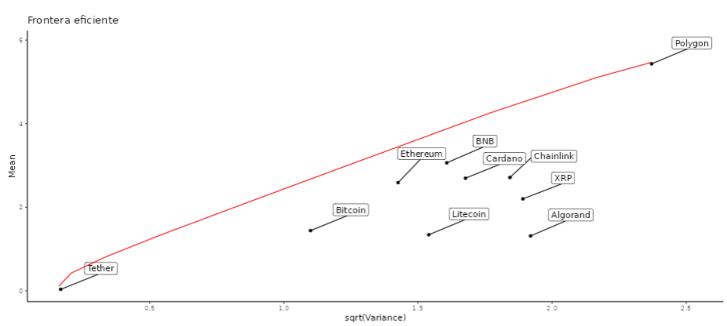

Figura 22: Frontera eficiente en 48 meses.

Una vez hemos analizado los resultados obtenidos para los cuatro años completos de los que habíamos obtenido los datos, vamos a analizar también los resultados obtenidos para los últimos seis meses de los que tenemos datos.

En primer lugar, analizamos el gráfico de los valores del ratio de Sharpe para cada valor de k.

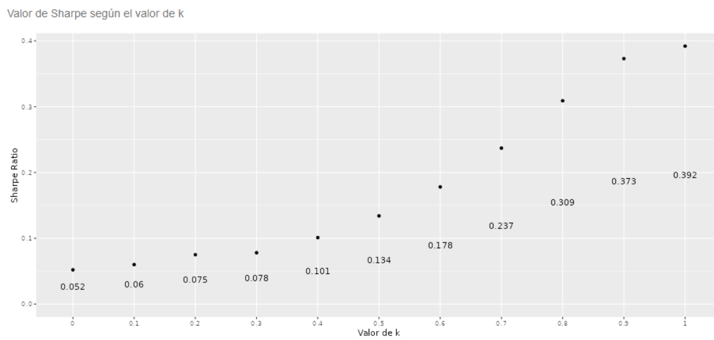

Figura 23: Ratio de Sharpe para cada valor de k en 6 meses.

El gráfico del ratio de Sharpe en el periodo de 6 meses mostrado en la Figura 23 es muy parecido al obtenido para el análisis realizado en los cuatro años completos. En este caso, la cartera que maximiza este valor también será la cartera dedicada a minimizar el riesgo únicamente. Por ello, analizaremos las carteras para $k = 0, 0.5, 1$.

$k = 0$. Maximizar el rendimiento:

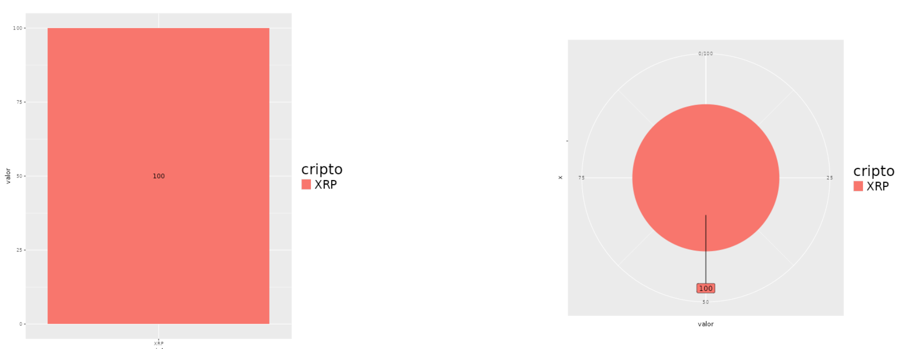

Figura 24: % del capital invertido en cada criptomoneda para $k = 0$ en 6 meses.

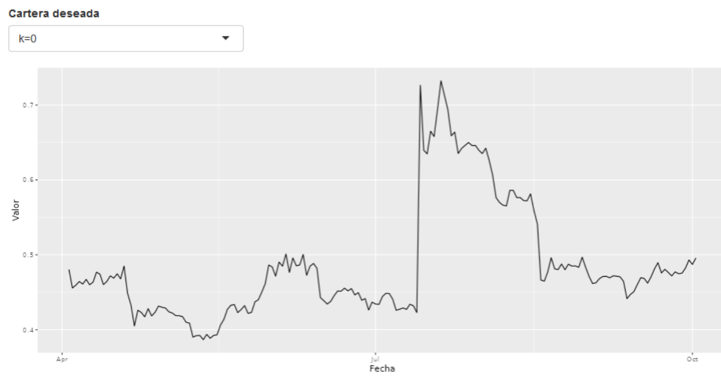

Figura 25: Evolución de la cartera eficiente en 6 meses para $k = 0$.

Media, Varianza y Ratio de Sharpe de la cartera.

Mean	Variance	SharpeRatio
1.0016	0.0035418	0.052

Tabla 6: Estadísticas de la cartera con $k = 0$ para 6 meses

En este caso también obtenemos una cartera que incluye únicamente a una criptomoneda, como vemos en la Figura 24, que es XRP. Esto nos sugiere que, durante los últimos 6 meses, esta criptomoneda ha obtenido un rendimiento mayor que las demás criptomonedas, por lo que obtenemos este resultado al optimizar el modelo cuyo objetivo es maximizar el rendimiento. Por ello, si nos fijamos en la Figura 25, veremos cómo es idéntico al tramo final de la evolución de XRP mostrada en la Figura 3. Además, en la Tabla 6 observamos cómo esta cartera tiene una varianza alta.

$k = 0.5$. Objetivo: maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo por igual.

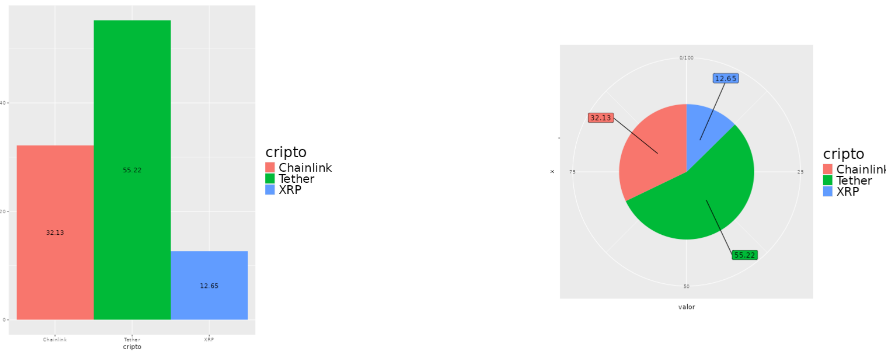

Figura 26: % del capital invertido en cada criptomoneda para $k = 0.5$ en 6 meses.

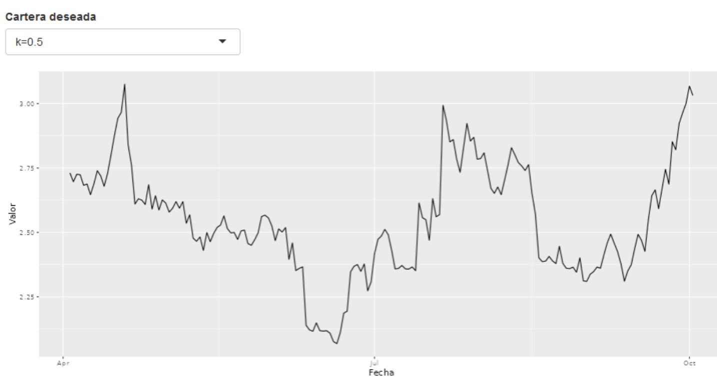

Figura 27: Evolución de la cartera eficiente en 6 meses para $k = 0.5$.

Media, Varianza y Ratio de Sharpe de la cartera.

Mean	Variance	SharpeRatio
1.0007	0.00026107	0.134

Tabla 7: Estadísticas de la cartera con $k = 0.5$ para 6 meses

Ahora vemos en la Figura 26 cómo se introducen dos criptoactivos adicionales en la cartera, que han sido Chainlink y Tether.
En cuanto a las estadísticas, observamos en la Tabla 7 que la media y varianza son menores que en el caso anterior, confirmando que el riesgo de la cartera disminuye en relación al objetivo señalado. Además, vemos que el rendimiento también es menor, lo cual es lógico también porque en este caso estamos dando un mayor peso a minimizar el riesgo. Analizar el gráfico de la evolución de la cartera eficiente mostrado en la Figura 27 junto con la tabla es interesante puesto que podemos confirmar que el modelo encuentra una combinación adecuada al objetivo seleccionado.

$k = 1$. Objetivo: minimizar el riesgo.

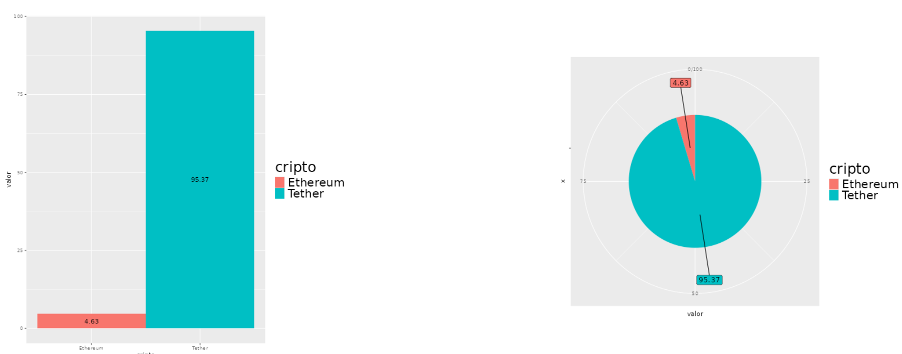

Figura 28: % del capital invertido en cada criptomoneda para $k = 1$ en 6 meses.

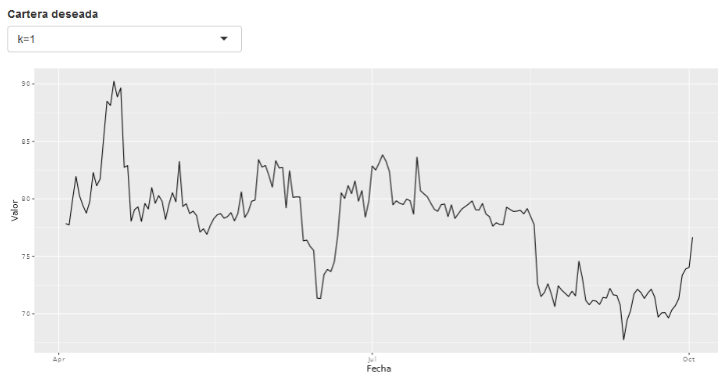

Figura 29: Evolución de la cartera eficiente en 6 meses para $k = 1$.

Media, Varianza y Ratio de Sharpe de la cartera.

Mean	Variance	SharpeRatio
1.0002	1.7875e-05	0.392

Tabla 8: Estadísticas de la cartera con $k = 1$ para 6 meses

Esta cartera reduce el número de activos a los que invertir a un total de dos, donde se invierte un 95 % aproximadamente a Tether y un 5 % a Ethereum. Como ya habíamos deducido antes, Tether es la moneda que menor riesgo tiene, y esto se confirma estudiando el resultado de este periodo de tiempo, ya que obtenemos una configuración similar en la Figura 28 a la obtenida en el problema con los cuatro años completos. Además, en la Tabla 8 comprobamos que la varianza ha disminuido en gran medida y que el rendimiento también es mucho más pequeño. En la Figura 29 vemos cómo en los últimos días estudiados, esta criptomoneda ha comenzado a recuperar el valor que había perdido en periodos anteriores.

Se incluye también la frontera eficiente para las carteras en este periodo de tiempo, que observamos en la Figura 30.

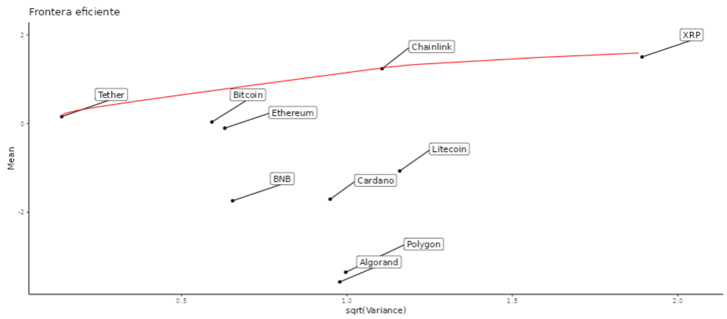

Figura 30: Frontera eficiente para 6 meses.

5.2. Modelo de Markowitz con corrección de estimadores

Para cada p consideramos un modelo. Incluiremos la cartera eficiente obtenida para $k = 0, k = 0.5$ y $k = 1$. También realizaremos un análisis de sensibilidad y variaremos los valores de p. Las fronteras eficientes de cada modelo también se van a representar en las Figuras 31, 32, 33 respectivamente. Si $p = 1$, es el modelo básico, por lo tanto no vamos a estudiar los resultados para este caso. Analizaremos los resultados para $p = 0.9, 0.8$ y 0.7.

- $p = 0.9$
  - $k = 0$.
    ```
    Chainlink     1.0000
    ```
  - $k = 0.5$.
    ```
    Chainlink     1.0000
    ```
  - $k = 1$
    ```
     Bitcoin     0.0072
     Cardano     0.0054
    Ethereum     0.0131
    Litecoin     0.0046
     Polygon     0.0023
      Tether     0.9674
    ```

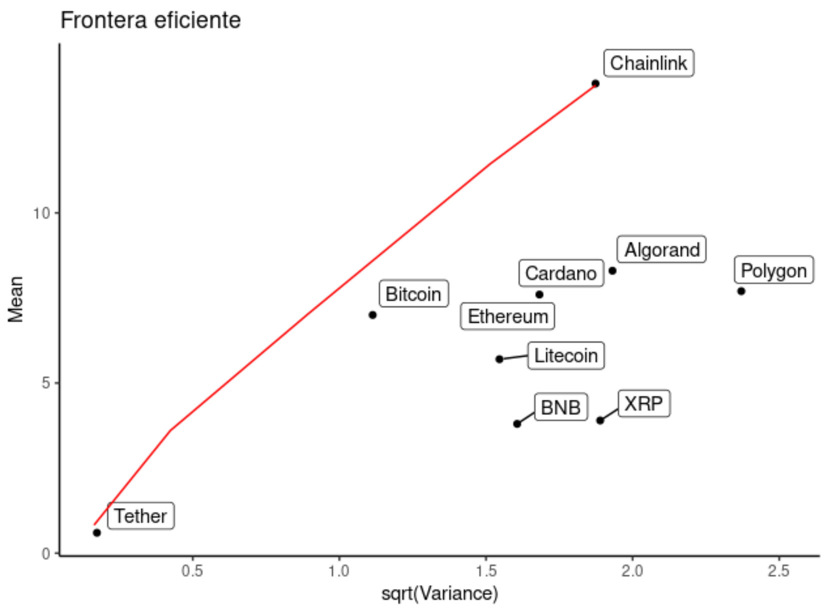

Figura 31: Frontera eficiente para corrección de estimadores con $p = 0.9$

En este caso observamos cómo cuando el objetivo es únicamente maximizar el rendimiento, AMPL nos recomienda invertir el 100 % a Chainlink, al igual que si nuestro objetivo es maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo a la vez y con la misma importancia. Y, sin embargo, si únicamente queremos minimizar el riesgo, nos aconseja invertir casi un 97 % a Tether y, porcentajes muy pequeños a otras criptomonedas como Bitcoin o Ethereum. Vemos ahora qué ocurre si le aplicamos un peso mayor a los días más recientes.

- $p = 0.8$
  - $k = 0$.
    ```
    Polygon      1.0000
    ```
  - $k = 0.5$.
    ```
    Bitcoin      0.0082
    Cardano      0.7821
    Polygon      0.2098
    ```

```
 Bitcoin     0.0036
 Cardano     0.0038
Ethereum     0.0131
Litecoin     0.0064
 Polygon     0.0019
  Tether     0.9702
```

- $k = 1$

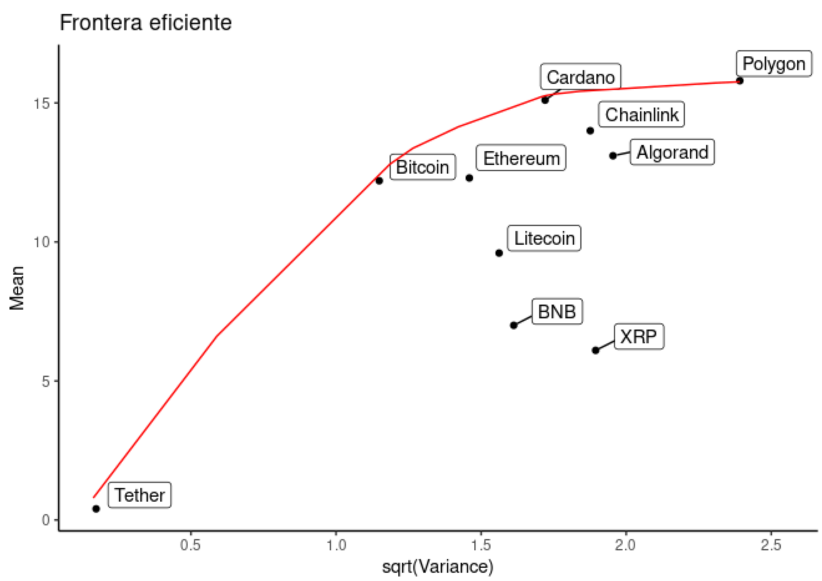

Figura 32: Frontera eficiente para corrección de estimadores con $p = 0.8$

Vemos que la solución para $k = 0$ recomienda invertir un 100 % a Polygon. Sin embargo, en este caso cuando queremos maximizar rendimiento y minimizar el riesgo, la solución cambia, incluyendo tres criptomonedas en la composición de la cartera eficiente. Por otro lado, cuando únicamente estamos interesados en minimizar el riesgo, el resultado es similar al del modelo anterior, donde el peso de los días más recientes era algo menor. Nos llama la atención cómo el porcentaje de inversión a Tether ha aumentado en este último caso, por lo que podemos intuir que, en los días más recientes, su riesgo disminuye en comparación a los días más antiguos.

Ahora veremos la solución dándole aún algo más de importancia a los datos más recientes.

- $p = 0.7$

  - $k = 0$.

```
Polygon     1.0000
```

```
Cardano     0.7050
Polygon     0.2950
```

- $k = 0.5$.

```
Cardano     0.0028
Ethereum    0.0145
Litecoin    0.0075
Polygon     0.0016
Tether      0.9720
XRP         0.0015
```

- $k = 1$

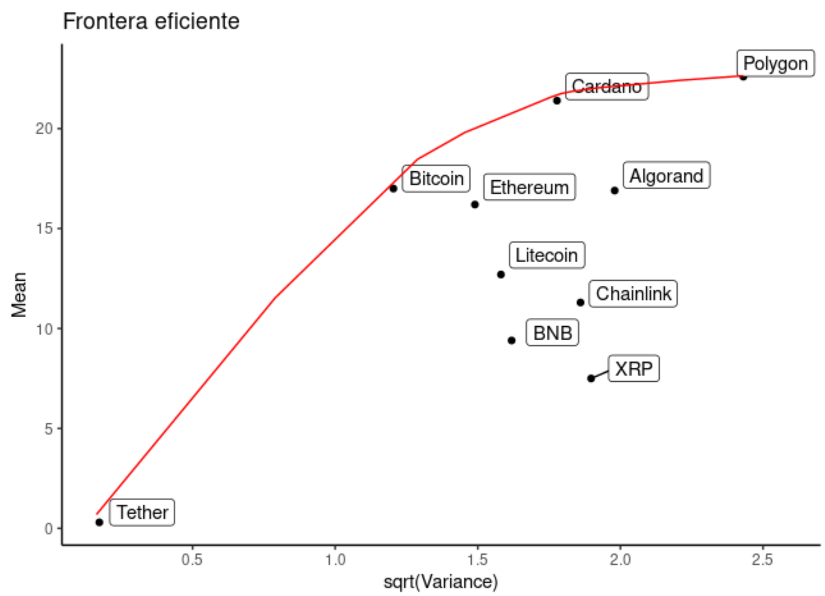

Figura 33: Frontera eficiente para corrección de estimadores con $p = 0.7$

Vemos cómo la solución para $k = 0$ es igual al caso anterior. Con esto podemos decir que en los días más recientes Polygon es la criptomoneda que está obteniendo mayores rendimientos. Esto podemos comprobarlo fácilmente si nos fijamos en la evolución de Polygon en la Figura 5. Veremos cómo en los últimos meses, ésta es la criptomoneda que tiene un mayor crecimiento. En cuanto a la teoría que habíamos deducido para $p = 0.8$, podemos decir que es acertada ya que, en este caso, el porcentaje de inversión a Tether ha vuelto a aumentar en el caso en el que queremos minimizar el riesgo únicamente.

5.3. Modelo de Markowitz con restricciones de cardinalidad

En primer lugar, analizaremos el resultado obtenido de este modelo con $N = 3$, e, igual que en el modelo anterior, veremos los resultados para $k = 0$, $k = 0.5$ y $k = 1$.

- $N = 3$
  - $k = 0$.

BNB	0.0100
Cardano	0.0100
Polygon	0.9800

  - $k = 0.5$.

BNB	0.2082
Ethereum	0.0850
Polygon	0.3664
Tether	0.3405

  - $k = 1$

Bitcoin	0.0168
Ethereum	0.0193
Tether	0.9639

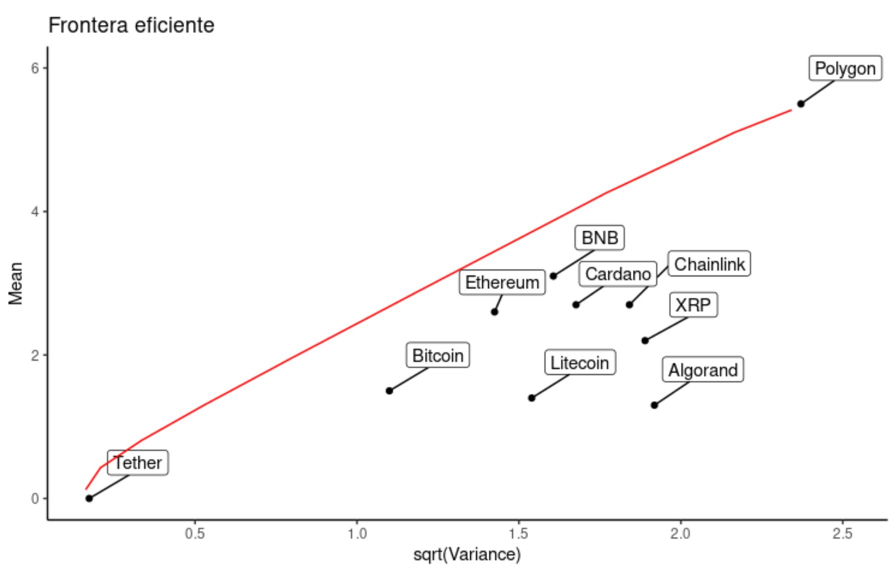

Figura 34: Frontera eficiente para restricción de cardinalidad con $N = 3$

Vemos lo que habíamos indicado anteriormente en el Apartado 3.2. En el primer caso, tenemos al menos un activo cuyo porcentaje de inversión

coincide con el límite inferior puesto en las restricciones del problema. Esto quiere decir que se introducen dichos activos a causa de las restricciones incluidas. Si estas no estuvieran, entonces estas criptomonedas seguramente no aparecerían en la comporsición de las carteras eficientes. Esto quiere decir que la solución está forzada.
Para $k = 0.5$ y $k = 1$ vemos que esto no ocurre, ya que en el modelo planteado inicialmente ya teníamos más de tres criptomonedas en esas configuraciones. Por ello, el resultado obtenido aquí es igual al que habíamos obtenido sin añadir esta restricción. Es por esto por lo que nos interesa estudiar los resultados si elevamos el número de criptoactivos mínimo que deben aparecer en la solución.

Estudiamos ahora el caso con cuatro soluciones como mínimo en la configuración final:

- $N = 4$
    - $k = 0$.

BNB	0.0100
Cardano	0.0100
Ethereum	0.0100
Polygon	0.9700

    - $k = 0.5$.

BNB	0.2082
Ethereum	0.0850
Polygon	0.3664
Tether	0.3405

    - $k = 1$

Bitcoin	0.0134
Cardano	0.0100
Ethereum	0.0129
Tether	0.9637

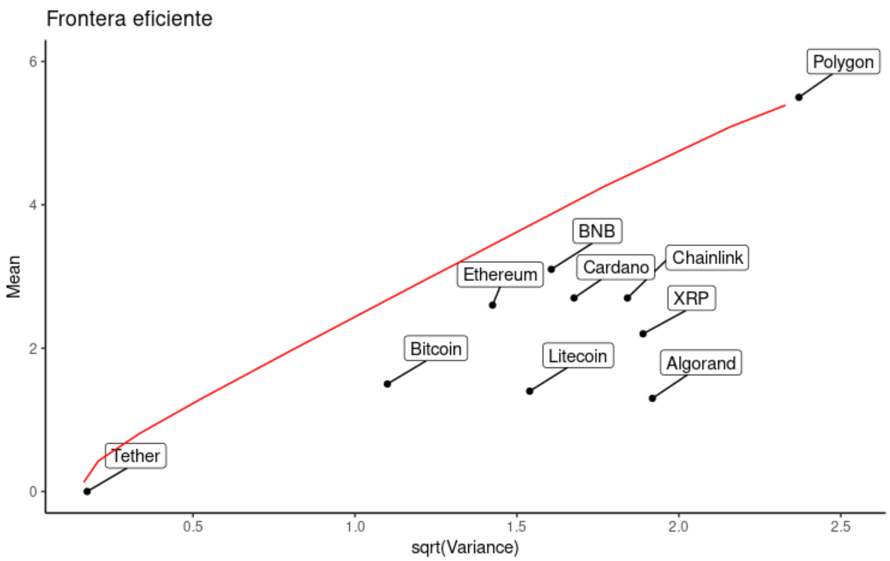

Figura 35: Frontera eficiente para restricción de cardinalidad con $N = 4$

Seguimos observando cómo las soluciones están forzadas para los casos $k = 0$ y $k = 1$, mientras que para $k = 0.5$ el resultado se mantiene igual que en el caso anterior. Sin embargo, es interesante, porque, aunque las criptomonedas hayan sido incluidas obligatoriamente, podemos ver cuáles son las que producen un mayor rendimiento, aparte de Polygon (en el caso $k = 0$), y cuáles son los criptoactivos con un menor riesgo, además de Tether, Ethereum y Bitcoin (en el caso $k = 1$).
En un caso práctico, esto nos permite dividir nuestro capital en diversas monedas en vez de apostar el 100 % en sólo una y, por lo tanto, tenemos algo más de ventaja a la hora de obtener un beneficio. En $k = 0$, si Polygon fallase (por ejemplo), tendríamos todavía un 3 % invertido en otras tres criptomonedas, dándonos algo de margen.

Vamos a hacer un último análisis de sensibilidad con los resultados obtenidos añadiendo una criptomoneda más.

- $N = 5$.

  - $k = 0$.

BNB	0.0100
Cardano	0.0100
Chainlink	0.0100
Ethereum	0.0100
Polygon	0.9600

BNB	0.2066
Cardano	0.0100
Ethereum	0.0791
Polygon	0.3649
Tether	0.3393

- $k = 0.5$.

Bitcoin	0.0100
Cardano	0.0100
Ethereum	0.0100
Litecoin	0.0100
Tether	0.9600

- $k = 1$

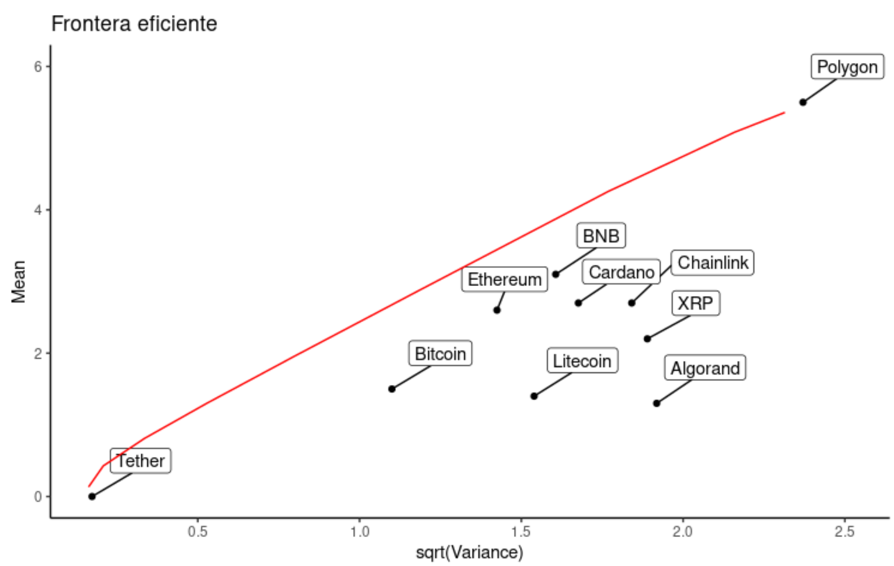

Figura 36: Frontera eficiente para restricción de cardinalidad con $N = 5$

Nos fijamos en que las tres fronteras eficientes mostradas en las Figuras 34, 35 y 36 son muy similares. Esto es porque en los tres distintos modelos, las distintas configuraciones tienen métricas muy similares debido a que la solución está forzada en todos los casos.

5.4. Modelo de Markowitz con restricciones de cota

Para este modelo, vamos a variar la cota superior. Primero analizaremos los resultados con unos valores de cota de inversión en criptomoneda $L = 0.05$ y $S = 0.95$. Como en este caso no hemos incluido restricción de cardinalidad y lo único que le hemos indicado es que, como mínimo cada criptomoneda tiene que tener una inversión del 5 %, y como máximo del 95 %, las carteras obtenidas contendrán a los 10 activos de los cuales estamos realizando el análisis en este trabajo.

- $L = 0.05, S = 0.95$.

Algorand	0.0500
Bitcoin	0.0500
BNB	0.0500
Cardano	0.0500
Chainlink	0.0500
Ethereum	0.0500
Litecoin	0.0500
Polygon	0.5500
Tether	0.0500
XRP	0.0500

  - $k = 0$.

Algorand	0.0500
Bitcoin	0.0500
BNB	0.0951
Cardano	0.0500
Chainlink	0.0500
Ethereum	0.0500
Litecoin	0.0500
Polygon	0.3065
Tether	0.2484
XRP	0.0500

  - $k = 0.5$.

Algorand	0.0500
Bitcoin	0.0500
BNB	0.0500
Cardano	0.0500
Chainlink	0.0500
Ethereum	0.0500
Litecoin	0.0500
Polygon	0.0500
Tether	0.5500
XRP	0.0500

  - $k = 1$

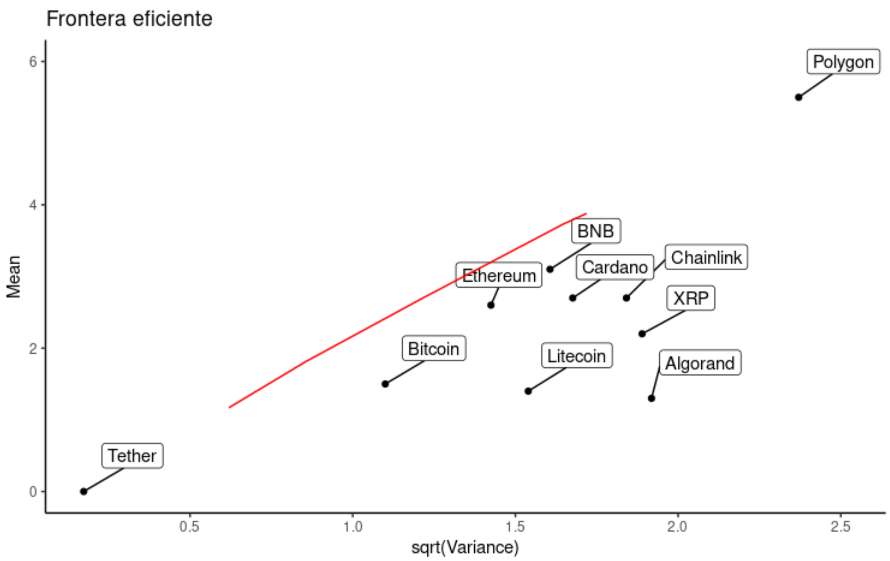

Figura 37: Frontera eficiente para restricción de cotas con $S = 0.95$

Se puede comprobar cómo la solución está forzada, al igual que nos pasaba en el modelo anterior. En este caso, las criptomonedas que inicialmente no están incluidas en la cartera tienen un valor del 5 %. Además, la distribución para $k = 0, 0.1, 0.2, 0.3$, y para $k = 0.8, 0.9, 1$, son iguales, y, por lo tanto, sus medias y varianzas también lo serán. Por ello, la frontera eficiente queda de esta manera.
Como observamos que la cota superior es 0.55 para el activo con un mayor porcentaje de inversión, analizaremos ahora los resultados con valores de $S \leq 0.5$.

- $L = 0.05, S = 0.5$.
  - $k = 0$.

```
 Algorand    0.0500
  Bitcoin    0.0500
      BNB    0.1000
  Cardano    0.0500
Chainlink    0.0500
 Ethereum    0.0500
 Litecoin    0.0500
  Polygon    0.5000
   Tether    0.0500
      XRP    0.0500
```

Algorand	0.0500
Bitcoin	0.0500
BNB	0.0951
Cardano	0.0500
Chainlink	0.0500
Ethereum	0.0500
Litecoin	0.0500
Polygon	0.3065
Tether	0.2484
XRP	0.0500

- $k = 0.5$.

Algorand	0.0500
Bitcoin	0.1000
BNB	0.0500
Cardano	0.0500
Chainlink	0.0500
Ethereum	0.0500
Litecoin	0.0500
Polygon	0.0500
Tether	0.5000
XRP	0.0500

- $k = 1$

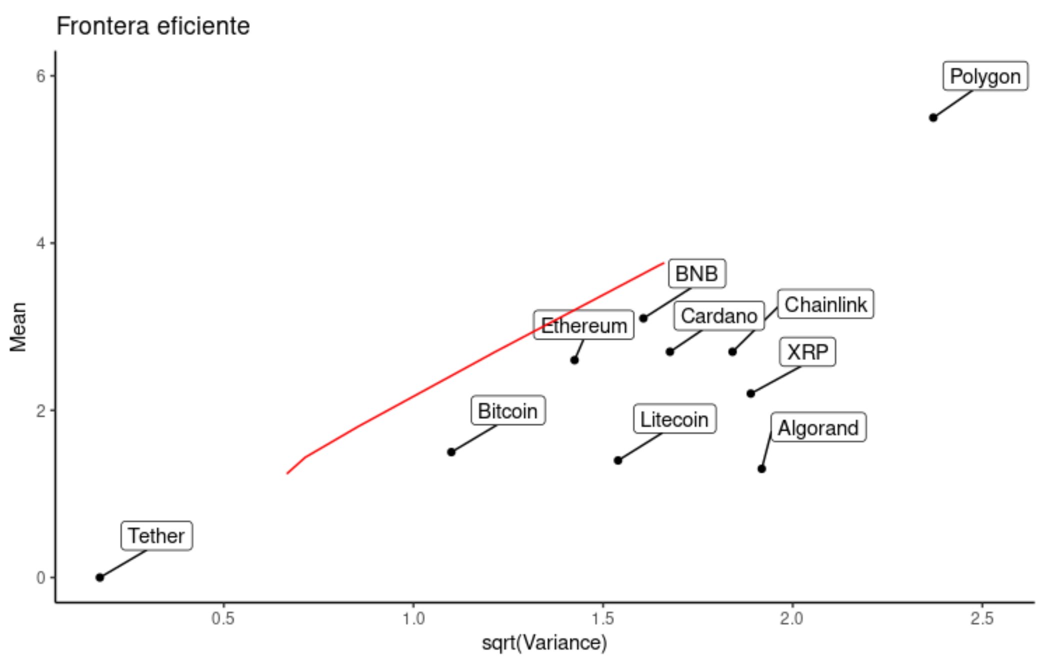

Figura 38: Frontera eficiente para restricción de cotas con $S = 0.5$

En este caso nos ocurre igual que en el anterior, las configuraciones se repiten para la mayoría de los valores de k, de manera que las medidas también son iguales, y por lo tanto las fronteras eficientes mostradas en las Figuras 37 y 38. Vemos cómo aumenta el porcentaje en alguna de las criptomonedas. Esto nos indica que, por ejemplo, en $k = 0$, BNB será el siguiente activo después de Polygon que promete un mayor rendimiento y, por lo tanto, un mayor beneficio. En el caso de $k = 0.5$ vemos que la solución es casi la misma que con la restricción anterior; la inversión en Bitcoin pasa del 5 al 10 %, y la de Tether disminuye de un 55 a un 50 %.

Una vez analizados estos resultados como ejemplo del funcionamiento de la aplicación y de los tres modelos de Markowitz explicados en el Apartado 3.2, pasamos a comentar las conclusiones del trabajo, así como sus posibles mejoras y limitaciones.

6. Conclusiones

La conclusión principal del trabajo recae sobre el objetivo principal que habíamos planteado en el Apartado 1.1. Se ha creado una aplicación Shiny con la que el usuario puede interactuar y obtener los gráficos y resultados que él desee. Además, se ha conseguido hacer una pequeña modificación en el modelo de Markowitz para obtener la combinación convexa, lo que supone una pequeña novedad respecto a los demás trabajos expuestos sobre este tema anteriormente. La aplicación permite elegir al usuario el porcentaje de relevancia para maximizar el rendimiento. De esta manera, se obtiene la cartera eficiente para las necesidades del usuario.

En cuanto a las herramientas utilizadas para completar el estudio, se remarca el aprendizaje de la librería Shiny, ya que antes no había tenido la oportunidad de trabajar con ella. Este trabajo también me ha permitido aprender un nuevo lenguaje de programación como es AMPL y profundizar en la parte *solver* de éste.

Los elementos que se había planificado incluir en la aplicación, como el *slider* que permite elegir el valor de k, han sido conseguidos exitosamente. Se han incluido todos los gráficos considerados relevantes para un análisis de la frontera eficiente. Esto nos permite estudiar los resultados de una manera más eficiente, ya que tenemos todos los elementos necesarios para hacerlo correctamente en una sola pantalla.

6.1. Posibles mejoras

Una de las mejoras más importantes e interesantes podría ser conseguir descargar datos directamente desde R en tiempo real, así de esta manera podríamos ejecutar la aplicación y hacer un análisis más avanzado con datos que llegan hasta el día de hoy y no basarnos en datos pasados. Para esto, también necesitaríamos conectar AMPL con R. En esto último se ha trabajado durante mucho tiempo sin obtener resultados, puesto que se obtenía un error informático que no podía solucionarse. Se ha consultado a antiguos estudiantes que consiguieron llevar a cabo esto en sus respectivos TFGs y, no hemos sido capaces de conseguirlo ni con su ayuda.
Además, sería interesante incluir los tres modelos analizados en la aplicación Shiny, de manera que el usuario pueda jugar con todas las opciones que éstos aportan.

6.2. Limitaciones

La limitación principal con la que me he topado en el transcurso del desarrollo del trabajo ha sido que, aunque existen cientos de monedas virtuales, la mayoría han sido creadas hace escasos años y apenas existen datos registrados de ellas. Muchas han entrado en el mercado más conocido hace un año y, una gran cantidad de éstas apenas se usan tanto como Bitcoin o Ethereum. Además, el hecho de que aún no estén reguladas impide que sus fluctuaciones sean menores, y vemos que pequeños hechos (como la compra de Twitter por Elon Musk) las afecta masivamente.

Si los activos de una empresa son impredecibles, las criptomonedas lo son aún más debido a la falta de estudio que existe en este campo de la economía y de la estadística. Es un mercado en constante crecimiento y en un futuro acabará siendo el principal modo de pago en muchos países, por lo que necesitamos conocimiento y estudio del tema lo antes posible. Esto ha provocado que los datos escogidos limiten mucho el avance del trabajo, puesto que algunos objetivos iniciales como podían ser restricciones o funcionalidades disponibles para el usuario han sido imposibles de llevar a cabo.

Además, como he mencionado en el apartado anterior, en un principio se pretendía conectar AMPL con R y de esta manera programar todo desde R directamente, sin embargo, no ha sido posible debido a errores y fallos en la librería que permite conectarlos. De esta manera, habría sido posible estudiar los datos en tiempo real, además de realizar el cambio en la función objetivo que ya se ha conseguido en este proyecto, pero incluyendo restricciones de cardinalidad. Esta ha sido la mayor limitación, ya que aunque hemos podido analizar cuatro modelos que aportan un enfoque distinto a los datos, hubiera sido más interesante aún poderlos incluir en la aplicación Shiny realizada.

Índice de figuras

Índice de tablas

Referencias

[1] Agencia Tributaria. *Preguntas frecuentes sobre el modelo 721. ¿Qué se entiende por "moneda virtual?"* `https://sede.agenciatributaria.gob.es/Sede/todas-gestiones/impuestos-tasas/declaraciones-informativas/modelo-721-decla-sobre-monedas-extranjero/preguntas-frecuentes-sobre-modelo-721/que-se-entiende-moneda-virtual.html#:~:text=Se%20entender%C3%A1%20por%20moneda%20virtual,de%20cambio%20y%20puede%20ser` [Online; accessed 22-Abr-2023]

[2] Arranz Barcenilla, V. *Aplicación web Shiny para la selección interactiva de carteras de inversión con el modelo de Markowitz*. Universidad de Valladolid (2022).

[3] Aparicio Corada, S. *Aplicación Shiny para optimización de carteras de inversión*. Universidad de Valladolid (2021).

[4] Arroyo Hernantes, I. *Optimización de carteras de productos agrarios.* Universidad de Valladolid (2023).

[5] Material Bitcoin. *¿Cómo hacer un análisis fundamental de criptomonedas?* `https://materialbitcoin.com/blog/analisis-fundamental-criptomonedas/#:~:text=El%20an%C3%A1lisis%20fundamental%20de%20criptomonedas,sobrevalorado%20o%20puede%20seguir%20creciendo` [Online; accessed 05-Feb-2024]

[6] Bit2Me Academy. *¿Qué es un White paper?* `https://academy.bit2me.com/que-es-un-whitepaper/#:~:text=Es%20un%20documento%20de%20tan,un%20p%C3%BAblico%2C%20eminentemente%2C%20t%C3%A9cnico` [Online; accessed 05-Feb-2024]

[7] BBVA. *Qué es un token y para qué sirve.* `https://academy.bit2me.com/que-es-un-whitepaper/#:~:text=Es%20un%20documento%20de%20tan,un%20p%C3%BAblico%2C%20eminentemente%2C%20t%C3%A9cnico` [Online; accessed 05-Feb-2024]

[8] National Geographic. *¿Qué son las criptomonedas y cómo funcionan?* `https://www.nationalgeographic.com.es/mundo-ng/que-son-criptomonedas-y-como-funcionan_16981` [Online; accessed 05-Feb-2024]

[9] UNIR. *Derecho y criptomonedas: ¿Cómo se regulan y qué leyes aplican?* https://www.unir.net/derecho/revista/derecho-criptomonedas/#:~:text=As%C3%AD%2C%20a%20trav%C3%A9s%20de%20la,servicios%20de%20cambio%20o%20de [Online; accessed 05-Feb-2024]

[10] Estrategias de inversión. *Modelo de Markowitz* https://www.estrategiasdeinversion.com/herramientas/diccionario/mercados/modelo-de-markowitz-t-240 [Online; accessed 05-Feb-2024]

[11] Yahoo Finance. *Yahoo Finance.* https://es.finance.yahoo.com/ [Online; accessed 03-Oct-2023]

[12] Mendizábal Zubeldia A., Miera Zabalda L.M, Zubia Zubiaurre M. *El modelo de Markowitz en la Gestión de Carteras.* Cuadernos de Gestión. Vol. 2, Nº1. (2002).

[13] AMPL. *AMPL.* https://ampl.com/ [Online; accessed 08-Ene-2024]

[14] Markowitz, H. *Portfolio Selection.* Journal of Finance 7, pp 77-91. (1952).

[15] Martín Sánchez, I. *Optimización de carteras de inversión.* Universidad de Valladolid (2013).

[16] Vanderbei, R.J. *Linear Programming. Foundations and Extensions.* Springer. (2008).

[17] Rdocumentation. *as.Date.numeric* https://www.rdocumentation.org/packages/zoo/versions/1.5-4/topics/as.Date.numeric [Online; accessed 20-Dic-2023]

[18] Rpubs. *Introducción a Shiny* https://rpubs.com/JairoAyala/Shiny_parte1 [Online; accessed 03-Sep-2023]